Funciones simples. Integral de Lebesgue.

- **Funciones simples. Representación canónica.**
- **Integral de funciones simples, medibles, positivas.**
- **Integral de Lebesgue de funciones medibles positivas.**

Funciones simples. Representación canónica.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida.

Def.: $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es una **función simple** si su rango $\varphi(X)$ es finito; es decir, si sólo toma una cantidad finita de valores reales.

Una función $\varphi := \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ con $a_j \in \mathbb{R}$ y $E_j \in \mathscr{X}$ es simple y medible.

Recíprocamente, si φ es simple y medible, sean

- $\varphi(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con $a_1, \ldots, a_n$ todos distintos y
- $E_j := \{x \in X : \varphi(x) = a_j\} \in \mathscr{X}, \ 1 \leq j \leq n$.

Entonces, $E_1, \ldots, E_n$ son mutuamente disjuntos y $\varphi := \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$.

Def.: • $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ es **una representación** de la función simple φ.

• Si $a_1, \ldots, a_n$ son todos distintos y $E_1, \ldots, E_n$ son mutuamente disjuntos, entonces $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ es **la representación canónica de** φ.

Integral de funciones simples, medibles, positivas.

Def.: Sea $\varphi \in M^+(X, \mathscr{X})$ una función simple. Sea $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ su representación canónica. Entonces, **la integral de φ con respecto a μ** es

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

- Recordemos que usamos la convención $0 \cdot (+\infty) = 0$.
- $\int \varphi \, d\mu = +\infty$ si y sólo si $\exists j \leq n : \; a_j > 0$ y $\mu(E_j) = +\infty$.
- Como $\forall j \leq n, \; a_j \geq 0$, no aparecen indeterminaciones $+\infty + (-\infty)$.

Lema: Sean $\varphi, \psi \in M^+(X, \mathscr{X})$ funciones simples y $c \geq 0$. Entonces:
(a) $\int (c\varphi) \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$ y (b) $\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.

Dem.: (a) ◦ Si $c = 0$, $c\varphi = 0 \implies \int (c\varphi) \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0 = c \int \varphi \, d\mu$.

◦ Si $c > 0$, $c\varphi \in M^+(X, \mathscr{X})$, es simple y, si la representación canónica de φ es $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, entonces la de $c\varphi$ es $c\varphi = \sum_{j=1}^n c a_j \chi_{E_j}$. Entonces,

$$\int (c\varphi) \, d\mu = \sum_{j=1}^n c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu.$$

(b) Sean $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ y $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$ las representaciones canónicas de φ y ψ, respectivamente. Entonces, como $\chi_{E_j}\chi_{F_k} = \chi_{E_j \cap F_k}$,

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, \chi_{E_j \cap F_k}$$

es una representación de $\varphi + \psi$, pero en general **no la representación canónica.**

Sean $\{a_j + b_k,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le m\} = \{c_1, \ldots, c_p\}$ con $c_1, \ldots, c_p$ todos distintos y $G_i := \dot{\bigcup}_{j,k:\, a_j + b_k = c_i} (E_j \cap F_k),\ 1 \le i \le p$.

Entonces, $\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{G_i}$ es la representación canónica de $\varphi + \psi$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int (\varphi + \psi)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{p} c_i \mu(G_i) = \sum_{i=1}^{p} c_i \sum_{j,k:\, a_j + b_k = c_i} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j,k:\, a_j + b_k = c_i} (a_j + b_k)\, \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\, \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)}_{\mu\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)\right)} + \sum_{k=1}^{m} b_k \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)}_{\mu\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} (E_j \cap F_k)\right)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\dot{\bigcup}_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k) = E_j \cap (\dot{\bigcup}_{k=1}^{m} F_k) = E_j \cap X = E_j$ y, análogamente, $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} (E_j \cap F_k) = (\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} E_j) \cap F_k = X \cap F_k = F_k$. ■

Corol.: Sea $\varphi \in M^+(X, \mathscr{X})$ una función simple y $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ una representación cualquiera de φ con $a_j \geq 0$ y $E_j \in \mathscr{X}$, $j = 1, \ldots, n$. Entonces, $\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$.

Dem.: $\int \varphi \, d\mu = \int (\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}) \, d\mu$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \int \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j). \quad \blacksquare$$

Lema: Sea $\varphi \in M^+(X, \mathscr{X})$ una función simple. Sea $\lambda : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida $\forall E \in \mathscr{X}$ por $\lambda(E) := \int \varphi \chi_E \, d\mu$. Entonces, λ es una medida en $\mathscr{X}$.

Dem.: Sea $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ la representación canónica de φ.

Entonces, $\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \chi_E = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j \cap E}$ es una función simple y, por el corolario anterior, $\lambda(E) := \int \varphi \chi_E \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j \cap E)$.

Ej. 3.A Las aplicaciones $E \mapsto \mu(E_j \cap E)$, $1 \leq j \leq n$, son medidas en $\mathscr{X}$.

Ej. 3.B Las combinaciones lineales de medidas con coeficientes no negativos son medidas.

Entonces, λ **es una medida en** $\mathscr{X}$. $\blacksquare$

Integral de Lebesgue de funciones medibles positivas.

Def.: • Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X})$. La **integral de f respecto de μ** es

$$\int f\, d\mu := \sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int \varphi\, d\mu,$$

donde

$$\Phi(f) := \left\{\varphi \in M^+(X, \mathscr{X}), \text{ simples: } \varphi \leq f\right\}.$$

• Sean $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $E \in \mathscr{X}$. La **integral de f en E respecto de μ** es

$$\int_E f\, d\mu := \int f \chi_E\, d\mu.$$

Lema: a) Si $f, g \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $f \leq g$, entonces $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

b) Si $f \in M^+(X, \mathscr{X})$, $E, F \in \mathscr{X}$ y $E \subset F$, entonces $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.

Dem.: **(a)** $f \leq g \implies \Phi(f) \subset \Phi(g) \implies$

$$\int f\, d\mu := \sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int \varphi\, d\mu \leq \sup_{\varphi \in \Phi(g)} \int \varphi\, d\mu =: \int g\, d\mu.$$

(b) $E \subset F \implies \chi_E \leq \chi_F \overset{f \geq 0}{\implies} f\chi_E \leq f\chi_F \implies$

$$\int_E f\, d\mu := \int f\chi_E\, d\mu \leq \int f\chi_F\, d\mu =: \int_F f\, d\mu. \quad \blacksquare$$