Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Práctica 5 — miércoles 3 de junio de 2020

Problema 1. Aplicar la regla de la cadena para calcular la matriz Jacobiana de la función h, donde

a) $h = g \circ f$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (x^2 y, \exp(x+z), x^2 + y^2 + z^2), \quad g(u,v,w) = (uv, u + \sin w, uvw)$$

b) $h = g \circ f$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad g(x,y,z) = (x+z, y+z),$$

c) $h = f \circ g$, donde f y g son como en el Ejemplo (a).

Problema 2. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciables, y sea la función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $u(x,t) := f(x + ct) + g(x - ct)$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Demostrar que u satisface la siguiente ecuación de derivadas parciales (EDP): $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ (ecuación de la onda).

Problema 3. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *armónica* sobre $X \subset D(f)$ si sobre X se tiene

$$\Delta f = f_{x_1x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + f_{x_nx_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Demostrar que las siguientes funciones son armónicas:

a) Para $n = 2$ y $(x, y) \neq (a, b)$,

$$f(x, y) = \ln\big((x-a)^2 + (y-b)^2\big), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

b) Para $n = 3$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Problema 4. Analizar si el Teorema de Schwarz puede ser aplicado en el punto $(0,0)$ para cada una de las siguientes funciones; y calcular las segundas derivadas parciales si existen:

a)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x-y}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

b)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Problema 5. Se considera el plano $\mathbb{R}^2$ de los puntos (x, y) en coordenadas cartesianas. Podemos describir el punto (x, y) mediante su distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del origen y el ángulo φ que incluye con el eje positivo (coordenadas cilíndricas planas).

a) ¿Cuál es la función $g = (g_1, g_2)$ que para un punto $P = (r, \varphi)$ dado entrega sus coordenadas $(x, y) = (g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi))$?

b) Sea $f : \mathbb{R}^2$ dada y $\nabla f = (f_x, f_y)$. Calcular (f_r, f_φ) a partir de (f_x, f_y).

c) Expresar el Laplaciano $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ en coordenadas cilíndricas planas.

d) Desarrollar una ecuación diferencial ordinaria que satisfacen soluciones radiales (que no dependan de φ) de la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$.

e) Resolver esta ecuación y comparar el resultado con la información del Problema 1.