UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
11 de marzo de 2025

Prof.: Anahí Gajardo

Listado 1

1. Exprese las siguientes afirmaciones en lenguaje matemático y determine su valor de verdad.

   a) *Si multiplico un número natural por otro, no nulo, obtengo un número mayor o a lo más igual.*

   b) *A es el conjunto de todos los números naturales que dividen a todos los números enteros.*

   c) *A es el conjunto de todos los números que se pueden escribir como resta de dos números naturales.*

2. Determine cual(es) de las siguientes expresiones tiene(n) errores sintácticos, justifique.

   a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \wedge y \in \mathbb{N}$.
   b) $(\forall x > n)(\exists n \in \mathbb{Z})\ x + n < 0$.
   c) $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall x > n,\ x + n < 0$.
   d) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall n < x)\ x + n < 0$.

3. Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas.

   a) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ yz > x$.
   b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ [x > 1 \rightarrow x^2 > x]$.
   c) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \rightarrow x^2 < y^2]$.

4. Demuestre que las siguientes proposiciones son falsas.

   a) $(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\ |z - y| > x$.
   b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$.
   c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x^2 < y + 1$.

5. Para cada una de las siguientes expresiones: escriba en castellano, niegue, determine sus variables libres y si no las tiene, determine su valor de verdad (justifique).

   a) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall b \in]1, \infty[,\ b^n > 2$.
   b) $(\exists x \in \mathbb{R})\ \frac{1}{x^2+1} > 1$.
   c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ (x^2 < y^2 \rightarrow x < y)$.
   d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ [x + y \geq 2 \vee (x \leq 1 \wedge y \leq 1)]$.

6. Dé ejemplos de tres verdades matemáticas que lleven un signo de implicación, pero en que la recíproca no se cumpla, y en ese caso, dé un contraejemplo para la recíproca. Asimismo, enuncie el teorema en su forma contrarecíproca.

   Ejemplo: "Si $x > 1$ e $y > 0$, entonces $xy > y$" es un teorema, se cumple para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pero su recíproca no es cierta, basta tomar $x = 0{,}5$ e $y = -1$, cumple $xy = -0{,}5$, que es mayor que $y = -1$. El teorema en su forma contrarecíproca nos dice que "Si $xy \leq y$, entonces $x \leq 1$ o $y \leq 0$".

7. A continuación damos diversas definiciones, el objetivo es que usted aprenda a interpretarlas. Para ello le pediremos una serie de ejercicios simples.

   Definición 1. *Dados dos conjuntos A,$B \subseteq U$ se define:*

   $$A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

   Definición 2. *Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i=1}^n$ de U, se define:*

   $$\nu(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(U) : \exists i \in \{1, .., n\}\ B_i \subseteq A\}$$

   Parte 0. Sintaxis. Complete la siguiente tabla:

Definición Nro	objeto	tipo de objeto (número, conjunto, familia de Conj. o función)
1	$A + B$	
2	$\nu(\mathcal{F})$	

   Parte I. Interpretación de conjuntos, ejemplos individuales. En los siguientes ejercicios considere $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 7, 8, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$ y $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i=1}^3$, con $B_1 = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B_2 = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ y $B_3 = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcule:

   a) $A + B$.

   b) $B + B$.

   c) $A + \phi$.

   d) $\nu(\mathcal{F})$.

   e) $\nu(\{\phi\})$.

   f) $\nu(\nu(\mathcal{F}))$.