UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Evaluación 2

Sea $\Omega :=]0,1[^2$, $\Gamma_N := \{(x,y) \in \partial\Omega : (y=0) \vee (y=1)\}$ y $\Gamma_D := \{(x,y) \in \partial\Omega : (x = 0) \vee (x=1)\}$. Considere la siguiente EDO: *Encontrar* $\psi \in H^2(\Omega)$ *tal que:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\varepsilon\,\Delta\psi + \alpha\,\partial_x\psi + \sigma\,\psi &=& 1\,,\ \textit{en}\ \Omega \\ \psi &=& 0\,,\ \textit{en}\ \Gamma_D\,, \\ \nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} &=& 0\,,\ \textit{en}\ \Gamma_N\,, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde, $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y $\boldsymbol{n}$ es la normal externa a Ω. Se pide lo siguiente:

1. [**5 puntos**] Defina una formulación variacional continua y otra discreta (sobre el espacio V_h^k) para (1);

2. [**5 puntos**] Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para las formulaciones variacionales en el punto anterior;

3. [**10 puntos**] Presente un análisis de convergencia completo para el error $e_h = u - u_h$ (donde u es la solución del problema continuo y u_h es la solución del problema discreto) en las normas $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

4. [**20 puntos**] Implemente un código de elementos finitos para la formulación discreta anteriormente definida (presente el código implementado), y presente los siguientes resultados:

   a) Curvas de error usando $k = 1,2,3$ para las combinaciones:

      1) $\varepsilon = \alpha = \sigma = 1$
      2) $\varepsilon = 1e-3$, $\alpha = 1, \sigma = 0$
      3) $\varepsilon = 1e-4$, $\alpha = 0, \sigma = 1$
      4) $\varepsilon = 1e-3$, $\alpha = 1, \sigma = 10$

   b) Soluciones para un h fijo a elección y $k = 1$ para todas las combinaciones de datos definidas en el punto anterior.

5. [**20 puntos**] Sea $a(\cdot,\cdot)$ y $F(\cdot)$ las formas bilineal y lineal asociadas a las formulaciones variacionales definidas anteriormente, respectivamente, considere ahora $a_h : V_h^1 \times V_h^1 \to \mathbb{R}$, definida por

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + \delta\,(\alpha\,\partial_x u_h + \sigma\,u_h\,, \alpha\,\partial_x v_h)_{0,\Omega}\,, \forall u_h,\, v_h \in V_h^1$$

y, $F_h : V_h^1 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F_h(v_h) = F(v_h) + \delta\,(1\,,\alpha\,\partial_x v_h)_{0,\Omega}\,, \forall v_h \in V_h^1\,,$$

para $\delta > 0$ definido como

$$\delta := \begin{cases} c_0\,h\,, & \alpha\,h > 2\,\varepsilon \\ \frac{c_1}{\varepsilon}h^2\,, & \alpha\,h \leq 2\,\varepsilon \end{cases}\,,$$

con $c_0, c_1 > 0$ parametros a definir convenientemente. Entonces definimos el problema variacional discreto: *Encontrar* $w_h \in V_h^1$ *tal que*

$$a_h(w_h, v_h) = F_h(v_h)\,, \forall v_h \in V_h^1\,.$$

Se pide lo siguiente:

a) Implemente el método númerico anteriormente definido con c_0 y c_1 como parametros variables;

b) Determine experimentalmente los parametros c_0 y c_1 cde manera que los resultados del item 4 sean mejorados;

c) Una vez completado el item anterior presente resultados en todos los casos del item 4, compare y comente sus conclusiones;

d) [**BONUS: 30 puntos**] Muestre existencia y unicidad de la solución discreta $w_h \in V_h^1$.

Concepción, martes 27 de julio de 2021
DPC/dpc .