Sucesiones (resumen)
Módulo 1, Presentación 2

Raimund Bürger

30 de abril de 2020

S.1. Sucesiones y límites

Definición 0.1 Una sucesión de números reales es una aplicación $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde recordamos que $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es decir a cada $n \in \mathbb{N}_0$ se asigna un número $a_n \in \mathbb{R}$. A la sucesión nos referimos por $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ o $(a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Sea $n_0 \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Entonces a $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ o $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ también nos referimos como sucesión.

Ejemplo 0.1 Algunas sucesiones:

$$a_n = a \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ lo que entrega } (a, a, a, \dots). \tag{S.1}$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}: \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right). \tag{S.2}$$

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0: \quad (1, -1, 1, -1, \dots). \tag{S.3}$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0: \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right). \tag{S.4}$$

$$a_n = \frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0: \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots\right). \tag{S.5}$$

S.1. Sucesiones y límites

Ejemplo 0.2 Otras sucesiones:

1. Sea $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geqslant 2$. Esto es una definición recursiva de una sucesión. La sucesión generada

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) \tag{S.6}$$

es conocida como sucesión de los números de Fibonacci.

2. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $a_n = b^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, luego

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, b, b^2, b^3, \dots).$$

Definición 0.2 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales, es decir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$. Entonces se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge a $a \in \mathbb{R}$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{o} \quad a_n \to a \text{ cuando } n \to \infty, \quad \text{o} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N_\varepsilon$.

S.1. Sucesiones y límites

Formulación alternativa Se dice que la la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge a $a \in \mathbb{R}$ si cada ε-vecindad

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} \end{aligned}$$

contiene casi todos los miembros de la sucesión. ("casi todos": "todos con la excepción de un número finito de ...")

Podemos decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ si cada intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (para $\varepsilon > 0$ arbitrario) contiene un número infinito de miembros de la sucesión y un número a lo más finito de miembros está fuera del intervalo.

Definición 0.3 Una sucesión de números reales se llama divergente si no converge a ningún número real.

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos

1. Si $a_n = a$ para todo n, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se tiene que

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geqslant 0.$$

2. Para (S.2) se tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: sea $\varepsilon > 0$ dado y $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geqslant N_\varepsilon.$$

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos (continuación)

3. La sucesión $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ es divergente. Demostración: si existiera $a \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$, existiría para $\varepsilon = 1$ un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{para todo } n \geqslant N_1.$$

En tal caso se tiene para todo $n \geqslant N_1$, de acuerdo a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} 2 = |a_{n+1} - a_n| &= \big|(a_{n+1} - a) + (a - a_n)\big| \\ &\leqslant |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Se produce la contradicción $2 < 2$, es decir la sucesión no puede converger a a.

4. Para (S.4) se tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Demostración: Sea ε arbitrario, entonces

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos (continuación)

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Demostración: Por inducción se demuestra que $n^2 \leqslant 2^n$ para todo $n > 3$, luego

$$\frac{n^2}{2^n} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado y $N_\varepsilon > \max\{3, \frac{1}{\varepsilon}\}$, luego

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geqslant N_\varepsilon.$$

Definición 0.4 Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ se llama acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ (la cota superior) tal que $a_n \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La sucesión se llama acotada inferiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ (la cota inferior) tal que $a_n \geqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La sucesión se dice acotada si es acotada superiormente e inferiormente.

S.1. Sucesiones y límites

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es acotada si y sólo si existe $M \geqslant 0$ tal que $|a_n| \leqslant M$ para todo n.

Theorema 0.1 Cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergente es acotada.

Demostración Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < 1$ para todo $n \geqslant N_1$. Esto implica que

$$|a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| \leqslant |a| + 1 \quad \text{para } n \geqslant N_1.$$

Sea $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N_1-1}|, |a| + 1\}$, entonces $|a_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Discusión de los ejemplos (continuación)

6. La sucesión $\{a_n\}$ diverge. Para demostrar esto, basta probar que $a_n \geqslant n$ para todo n (por inducción). Las sucesión no es acotada, por lo tanto de acuerdo al Teorema 0.1 no es convergente.
7. La convergencia de la sucesión $\{b^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ depende del valor de b.

S.1. Sucesiones y límites

Theorema 0.2 (Unicidad del límite) Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge a a y tambien a a'. Entonces $a = a'$.

Comentario Este teorema justifica la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Demostración Supongamos que $a \neq a'$, y sea $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'| > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{para } n > N_\varepsilon.$$

Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$,

$$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a'| < \varepsilon \quad \text{para } n > N'_\varepsilon.$$

Para $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ se tiene tanto $|a_n - a| < \varepsilon$ como $|a_n - a'| < \varepsilon$. Esto implica que

$$\begin{aligned} |a - a'| &= \big|(a - a_n) + (a_n - a')\big| \\ &\leqslant |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|, \end{aligned}$$

es decir $|a - a'| < |a - a'|$, una contradicción, luego la hipótesis $a \neq a'$ es falsa y se debe tener $a = a'$. ■

Teorema 0.3 (Sumas, productos etc. de sucesiones convergentes) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces converge también $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con ...

1. ... $c_n = a_n \pm b_n$, y
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$$
2. ... $c_n = a_n b_n$, y
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big) = ab.$$
3. ... $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ (suponiendo que $b \neq 0$), y
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 0.3 Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales convergentes con $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

S.1. Sucesiones y límites

Definición 0.5 Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $N_K \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ para todo $n \geqslant N_K$. Se dice que la sucesión diverge negativamente si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $N_K \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < K$ para todo $n \geqslant N_K$. Tambien se escribe en los casos respectivos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Teorema 0.4 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión divergente positivamente o negativamente. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo n_0, y la sucesión $\{\frac{1}{a_n}\}_{n\geqslant n_0}$ es convergente con $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

S.1. Sucesiones y límites

Definición Una sucesión de números reales se llama sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geqslant N_\varepsilon.$$

Teorema 0.5 Cada sucesión de números reales convergente es una sucesión de Cauchy.

Demostración Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado existe $N_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geqslant N_{\varepsilon/2}.$$

Entonces para todo $n, m \geqslant N_{\varepsilon/2}$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \big|(a_n - a) - (a_m - a)\big| \\ &\leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

S.1. Sucesiones y límites

Axioma de completitud Cada sucesión de Cauchy converge en $\mathbb{R}$.

Para hacer plausible este axioma, consideremos una sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces existen números $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, $n_k \in \mathbb{N}$, tales que

$$|a_n - a_m| < 2^{-k-1} \quad \text{para todo } n, m \geqslant n_k.$$

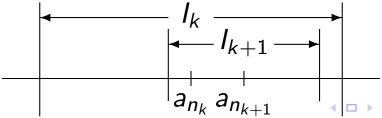
Sea ahora

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_k}| \leqslant 2^{-k}\}.$$

Se tiene $I_{k+1} \subset I_k$ para todo k. Para explicar esto, sea $x \in I_{k+1}$, entonces $|x - a_{n_{k+1}}| \leqslant 2^{-k-1}$; además $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < 2^{-k-1}$, luego a partir de la desigualdad triangular

$$|x - a_{n_k}| \leqslant |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < 2^{-k},$$

es decir $x \in I_k$.



S.1. Sucesiones y límites

Entonces tenemos una sucesión de intervalos anidados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ cuyas longitudes convergen a cero y se tiene $a_n \in I_k$ para todo $n \geqslant n_k$. Hay que imaginarse que los intervalos se contraen al límite de la sucesión de Cauchy considerada.

Definición Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión y $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ una sucesión de números enteros no negativos. Entonces se dice que

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$$

es una subsucesión de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Evidentemente, si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión acotada con el límite a, entonces cada subsucesión converge al mismo límite a.

Teorema 0.6 (Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión acotada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números reales posee una subsucesión convergente.

Demostración del Teorema 0.6

1. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es acotada, existen $A, B \in \mathbb{R}$ con $A \leqslant a_n \leqslant B$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Construiremos una sucesión de intervalos $[A_k, B_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, con las siguientes propiedades:
   (i) $[A_k, B_k]$ contiene un número infinito de miembros de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
   (ii) $[A_k, B_k] \subset [A_{k-1}, B_{k-1}]$.
   (iii) $B_k - A_k = 2^{-k}(B - A)$.

   Procedemos por inducción. Sea $[A_0, B_0] := [A, B]$. Supongamos que se ha construido $[A_k, B_k]$ con (i)–(iii). Sea $M := \frac{A_k+B_k}{2}$. Como $[A_k, B_k]$ contiene un número infinito de miembros de la sucesión, por lo menos uno de los subintervalos $[A_k, M]$ y $[M, B_k]$ debe contener un número infinito de miembros de la sucesión.

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [A_k, M] & \text{si } [A_k, M] \text{ contiene un número infinito } \ldots, \\ [M, B_k] & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración del Teorema 0.6 (continuación)

2. Definiremos ahora (por inducción una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ con $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, empezando por $a_{n_0} := a_0$. contiene un número infinito de miembros de la sucesión, podemos elegir $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$ tal que $n_{k+1} > n_k$.
3. Demostraremos ahora que la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge. Basta demostrar que es una sucesión de Cauchy.

$$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subset [A_N, B_N], \quad a_{n_j} \in [A_j, B_j] \subset [A_N, B_N]$$

para todo $k, j \geqslant N$, luego

$$|a_{n_k} - a_{n_j}| \leqslant |B_N - A_N| = 2^{-N}(B - A) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definición Un número a se llama punto de acumulación de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ si existe una subsucesión que converge a a.