UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo II, Trimestre 1 - 2019

Pauta Evaluación I

1. (a) (12 ptos) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_0^{x-1} \operatorname{sen}(t^2)\, dt & si \quad x \neq 1 \\ \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Calcule, si existe, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(h+1) - F(1)}{h}$.

Solución:

En primer lugar, notamos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h+1) - F(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^h \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{h^2} \quad (3 \text{ ptos})$$

Enseguida, como el límite anterior tiene forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hopital, y en virtud del Teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^h \operatorname{sen}(t^2)\, dt}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^2)}{2h} \quad (5 \text{ ptos})$$

Finalmente, si aplicamos nuevamente L'H a la expresión anterior se deduce que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^2)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h\cos(h^2)}{2} = 0 \quad (4 \text{ ptos})$$

(b) (8 ptos) Sabiendo que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Ind: Notar que $f(x) = e^{-x^2}$ define una función par en $]-\infty, +\infty[$

Solución:

Como f es par en $]-\infty, +\infty[$, luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ (1 pto)

Haciendo la sustitución $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$ se tiene que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (5 \text{ ptos})$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2 \text{ ptos})$$

2. (a) (10 ptos) Decida la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$

Solución:

Notamos que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}$ se indetermina en $x = 0$. Luego, como se trata de una integral impropia de los dos tipos debe separarse como:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$$

y analizar la convergencia de ambos sumandos por separado (1 pto).

En el caso de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$ esta converge ya que:

$$x \geq 1 \Rightarrow 1+x^4 \geq x^4 \Rightarrow \sqrt{x}(1+x^4) \geq x^{\frac{9}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)} \leq \frac{1}{x^{\frac{9}{2}}}$$

De donde sigue $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{9}{2}}}\,dx$ converge ya que $p = \dfrac{9}{2} > 1$.

Por tanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$ converge por Criterio de Comparación (4 ptos)

Ahora bien, en el caso de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$ esta también converge. En efecto, como:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1+x^4 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

se tiene que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, de donde sigue que la integral $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$ es convergente por Criterio de comparación. (4 ptos)

Finalmente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^4)}\,dx$ converge. (1 pto)

(b) (12 ptos) Encuentre el número real a para el cual $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{\pi}{4}$

Solución:

Notamos que por definición

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \quad \text{(2 ptos)}$$

Luego, observamos que $\displaystyle\int_a^{b} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan e^b - \arctan e^a$.

De donde sigue que:

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan e^b - \arctan e^a = \frac{\pi}{2} - \arctan e^a \quad \text{(7 ptos)}$$

Enseguida, como $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{\pi}{4}$ se tiene que:

$$\arctan e^a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

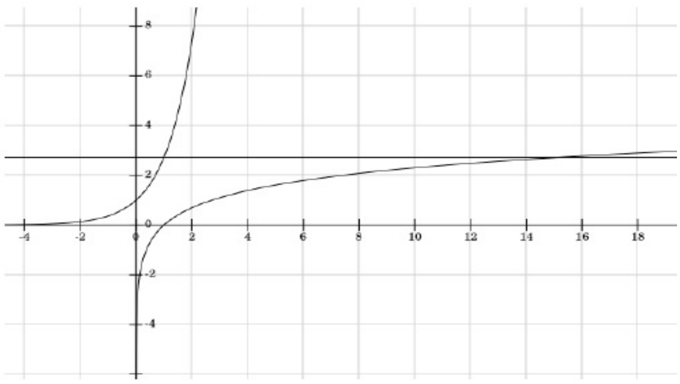
Y de esto último, $a = 0$. (3 ptos)

3. En el primer cuadrante del plano coordenado considere la región R limitada por los ejes coordenados, la recta $y = e$, y las curvas $y = e^x$ e $y = \ln(x)$.

(a) (12 ptos) Calcule el área de la región R.

(b) (6 ptos) Escriba una expresión integral que permita calcular el volúmen del sólido S generado por rotación de R en torno a la recta $y = -2$.

Solución:
Intersectando $y = e$ junto con $y = e^x$ se obtiene el punto $(1, e)$. Además, la intersección de $y = \ln(x)$ con la recta $y = e$ genera el punto (e^e, e). (2 ptos)
Luego, graficamos:



Enseguida, el área de la región R viene dada por:

$$A(R) = \int_0^1 e^x \, dx + \int_1^{e^e} (e - \ln(x)) \, dx = e^x|_0^1 + (ex - x\ln(x) + x)|_1^{e^e} = e^e - 2 \quad \text{(10 ptos)}$$

Para la pregunta (b) aplicando el método del anillo, la expresión integral es:

$$V(S) = \pi \int_0^1 (e^x + 2)^2 - 4 \, dx + \pi \int_1^{e^e} (e + 2)^2 - (\ln(x) + 2)^2 \, dx \quad \text{(6 ptos)}$$