

Universidad de Concepción  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Matemática  
Dr. Raimund Bürger  
Profesor Titular

# Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — viernes 6 de julio de 2018

Nombre: \_\_\_\_\_

**Problema 1** (10 puntos). Se considera el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para un vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  y un vector inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  arbitrarios, indicar un número  $N$  de iteraciones de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para el cual se puede garantizar que  $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^*\| \leq 10^{-3}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$ , donde  $\mathbf{x}^*$  es la solución exacta y  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$  o  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ .

**Problema 2** (10 puntos). Se consideran las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Para cuales de ellas se puede garantizar o excluir la convergencia (a) del método de Jacobi, (b) del método de Gauss-Seidel, (c) del método SOR con  $0 < \omega \leq 2$ , (d) del método cg de Hestenes y Stiefel, y sin calcular ningún radio espectral?

**Problema 3** (15 puntos).

a) Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

y sea  $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$  la partición habitual de  $\mathbf{A}$ . Sea  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  dado y el método de Jacobi para la aproximación de una solución de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Probar que el método de Jacobi *no* converge para todo vector inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ .

- b) Demostrar que aplicando una matriz de permutación  $\mathbf{P}$ , se puede reformular el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  como  $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ , con  $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$  y  $\mathbf{c}$  definido adecuadamente, tal que el método de Jacobi aplicado a  $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$  converge para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ .
- c) Utilizando el resultado de (b), calcular una solución aproximada  $\mathbf{x}_2$  (dos pasos del método de Jacobi) de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  para  $\mathbf{b} = (1, 15, 11)^T$  a partir de  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ .

**Problema 4** (10 puntos).

a) Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz  $\mathbf{A}$  tiene tres valores propios reales distintos  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , y determinar números  $\alpha_i, \beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tales que  $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son los valores propios de  $\mathbf{A}$ .

b) Sea la matriz  $\mathbf{B}$  dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.04 \\ 0.01 & 2 & 0.01 \\ 0.02 & 0.02 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que  $\mathbf{B}$  posee tres valores propios reales  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Considerando una transformación de similitud con  $\mathbf{D} = \text{diag}(0.1, 5, 1)$ , demostrar que  $\lambda_1 \in [0.995, 1.005]$ .

**Problema 5** (15 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) Demostrar que el método SOR converge para el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , para cualquier  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  y a partir de cualquier  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ , y para valores  $0 < \omega < 2$  del parámetro de relajación  $\omega$ .
- b) Demostrar que el método SOR incluso converge con un parámetro de relajación óptimo,  $\omega = \omega_{\text{opt}}$ . Calcular  $\omega_{\text{opt}}$  y el valor del radio espectral  $r_{\sigma}(\mathbf{B}(\omega_{\text{opt}}))$ .
- c) Sea  $\tilde{\omega}$  el valor de  $\omega_{\text{opt}}$  redondeado adecuadamente a dos decimales. Calcular  $r_{\sigma}(\mathbf{B}(\tilde{\omega}))$  y dos pasos del método SOR con  $\omega = \tilde{\omega}$  para el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  con

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$