UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

OPTIMIZACIÓN III (525551)

<u>Pauta Evaluación 2</u>

P1) (36 ptos.) Sea $G = (V, A)$ una red con función capacidad inferior nula y capacidad superior $c : A \to \mathbb{R}^+$ y $s, t \in V$ nodo fuente nodo sumidero, respectivamente. Sea además, $w : A \to \mathbb{R}^+$ una función de costo y f un s-t-flujo de G no nulo. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

a) Si (S, T) es un corte de G tal que $\forall (u, v) \in (S \times T) \cap A, \quad f(u, v) = c(u, v)$ y $\forall (w, z) \in (T \times S) \cap A,\ f(w, z) = 0$, entonces f es de valor máximo.

b) Sea $G' = (V', A')$ la red definida por: $V' = V$ y $A' = \{(u, v) \in A :\ f(u, v) < c(u, v)\}$. Si G' no tiene camino de s a t, entonces f es de valor máximo.

c) Si G tiene al menos un ciclo de largo mayor o igual a tres y f es un flujo de costo mínimo, entonces $\exists (u, v) \in A,\ f(u, v) = 0$.

Solución:

a) (Verdadera) Por resultado visto en clase, se tiene que:

$$Val(f) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - 0 = C(S, T).$$

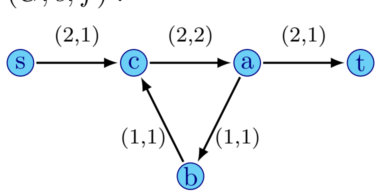
Además, se tiene que:

$$C = (S, T) = Val(f) \leq \max_{f'} Val(f') = \min_{(S', T')} c(S', T') = C(S, T),$$

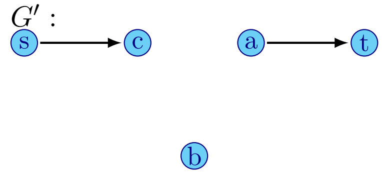
lo cual implica que $Val(f)$ es máximo, es decir f es flujo de valor máximo.

b) (Falso) En la siguiente red se muestra un flujo, que no es de valor máximo, pues es fácil ver que el flujo máximo tiene valor 2, dado por: $f'(s, c) = f'(c, a) = f'(a, t) = 2$ y el resto cero, y sin embargo G' no tiene camino de s a t.

(G, c, f) :



G' :



c) (Verdadero) Sea C un ciclo de G de largo mayor o igual a tres. Supongamos por contradicción que el resultado no es cierto, es decir $\forall(u,v) \in A, f(u,v) > 0$. Luego, la red residual G_f contiene los arcos (v,u) tal que (u,v) pertenece al ciclo C con $w_f(v,u) < 0$. Notar que $\forall(u,v) \in A,\ w(u,v) > 0$ por hipótesis. Luego, G_f contiene un ciclo C^R, correspondiente al ciclo C con todos sus arcos reversos y tal que $w_f(C^R) < 0$, lo cual es ua na contradicción con f de costo mñimo.

P2) (24 ptos.) En la comuna de Concepción se ha creado dos nuevos colegios mixtos C_1 y C_2 con una capacidad total máxima de matrícula de α_1 y α_2 estudiantes, respectivamente. Estos nuevos colegios recibirán estudiantes de tres localidades distintas de la comuna: L_1, L_2 y L_3. Cada localidad L_i tiene h_i estudiantes hombres y m_i estudiantes mujeres que deben ir necesariamente a alguno de estos nuevos colegios. Por otro lado, se ha estimado que el tiempo de traslado de cada estudiante desde la localidad L_i al colegio C_j es igual a $w(L_i, C_j)$.

Se desea determinar para cada localidad L_i el número de estudiantes hombres y de estudiantes mujeres que irán a cada colegio, de manera que los estudiantes hombres sean a lo más dos tercios, y al menos un tercio, de la capacidad de matrícula del colegio respectivo, y que el tiempo de traslado total, de los y las estudiantes a sus colegios asignados, sea el menor posible. Explique cómo este problema puede ser modelado matemáticamente como un problema de flujo visto en clase. Deduzca bajo que condiciones tiene una solución óptima.

Solución:

a) Definamos una instancia (G, s, t, l, c, w', f_0) del PFCM con capacidades inferiores, donde $G = (V, E)$ es dado por:

$V = \{s,t\} \cup \{L_1^h, L_2^h, L_3^h, L_1^m, L_2^m, L_3^m\} \cup \{C_1^m, C_2^m, C_1^h, C_2^h, C_1, C_2\}$ y
$E = \{(s, L_i^h), (s, L_i^m) :\ i = 1,2,3\} \cup \{(L_i^h, C_j^h), (L_i^m, C_j^m) :\ i = 1,2,3; j = 1,2\} \cup \{(C_1^h, C_1), (C_1^m, C_1), (C_2^h, C_2), (C_2^m, C_2)\} \cup \{(C_1, t), (C_2, t)\}$.
Por otro lado, se define la función capacidad inferior $l : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall(u,v) \in E, \quad l(u,v) = \begin{cases} \lceil \frac{\alpha_i}{3} \rceil & \text{si } (u,v) = (C_i^m, C_i) \text{ para algún } i \in \{1,2\}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, se define la función capacidad superior $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall(u,v) \in E, \quad c(u,v) = \begin{cases} h_i & \text{si } (u,v) = (s, L_i^h) \text{ para algún } i \in \{1,2,3\}, \\ h_i & \text{si } (u,v) = (s, L_i^m) \text{ para algún } i \in \{1,2,3\}, \\ \lfloor \frac{2\alpha_i}{3} \rfloor & \text{si } (u,v) = (C_i^m, C_i) \text{ para algún } i \in \{1,2\}, \\ \alpha_i & \text{si } (u,v) = (C_i, t) \text{ para algún } i \in \{1,2\}, \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función costo $w' : E \to \mathbb{R}_0^+$ se define por :

$$\forall(u,v) \in E, \quad w'(u,v) = \begin{cases} w(L_i, C_j) & \text{si } (u,v) = (L_i^h, C_j^h) \ \vee \ (u,v) = (L_i^m, C_j^m) \\ & \quad \text{para algún } i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\}. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Finalmente definimos $f_0 = \sum_{i=1}^{3} (h_i + m_i)$.

De esta forma si f es un s-t- flujo de la red anterior, el cual debido a sus capacidades enteras podemos suponer que tiene valores enteros, el valor dado en los arcos (C_i^h, C_i) y (C_i^m, C_m) representará la cantidad de estudiantes hombres y mujeres respectivamente que se matricularán en el colegio C_i, respetando las condiciones de cota inferior y superior sobre los hombres, de acuerdo a la capacidad de matrícula α_i correspondientes. Si además, $Val(f) = f_0$ entonces todos los hombres y mujeres de las tres localidades se matricularán en alguno de los dos colegios. Por último, como

$$w(f) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) = \sum_i \sum_j (f((L_i^h, C_j^h) + f(L_i^m, C_j^m))w(L_i, C_j),$$

entonces $w(f)$ representa el tiempo total de traslados de los estudianes. Por lo tanto, una solución óptima al problema de Flujo de Costo Mínimo, con la instancia anteriormente descrita, es una solución óptima al problema planteado. De igual forma, si $f : E \to \mathbb{N}_0$ es una solución óptima al problema planteado, entonces f satisface, por construcción, las condiciones para ser una solución óptima al PFCM con la instancia dada.

Por otro lado, es fácil ver que el problema tendrá una solución óptima si existe un s-t-flujo f de valor $Val(f) = f_0$. Para ello se debe cumplir que:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{3} (h_i + m_i) \leq \alpha_1 + \alpha_2,$$

y que la cantidad de estudiantes hombres y mujeres de las tres localidades permita satisfacer las restricciones que el número de estudiantes de hombres de todas las localidades sean a lo más dos tercios, y al menos un tercio, de la capacidad de matrícula del colegio respectivo.