UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL[**10**] -Cálculo IV (MAT 225212 & MAT 225252)

Tema: ***Integración Compleja: Aplicaciones.***

NOTA: Fundamentar sus cálculos, en particular, definir la trayectoria que modela la frontera de su dominio de integración.

1. En los siguientes ejercicios primero debe establecer que la integral real converge. Enseguida para evaluar la integral de contorno compleja, utilizar un contorno rectangular. Establecer, para $\alpha > 1$:

$$\textbf{(P)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}dx = \frac{\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \qquad \text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha+1}dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

2. Establecer las siguientes identidades, donde las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ y $c > 0$:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e^4}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^2+2}dx = \frac{\pi}{e^{3\sqrt{2}}}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{2e^2}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a(x-b))}{x^2+c^2}dx = \frac{\pi\cos(ab)}{ce^{|a|c}}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(\pi x)}{x^2+x+9}dx = \frac{\pi}{e^{\frac{\sqrt{35}}{2}\pi}}$

(P) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^2+2x+4}dx = 0$

(2'). Defina dominos *indentados* para determinar los siguientes Valores Principales de Cauchy:

(a) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

(P) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(2x)}{x}dx = 0$

(P) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \pi$

(P) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin(x)}{x^2-a^2}dx = 2\pi\cos(a)$

(b) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx = \pi\left(1-e^{-1}\right)$

(c) (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-c^2}dx = -\pi\frac{\sin(c)}{c}.$

(2"). Establecer que en el sentido dde valores principales de Cauchy

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}dx = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad a < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ 1 & \text{si} \quad a > 0. \end{cases}$$

(P) Inferir del problema anterior, vía formulas de prostaféresis de la trigonometría plana:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < a < b \\ \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad a = b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 < a < b \end{cases}$$

Noviembre 2025
FPV/fpv