

Desarrollos Evaluación 1  
Cálculo I (527140)

*Instrucciones.* Desarrollar justificadamente los siguientes problemas.

*Tiempo.* 100 minutos

**Problema 1. (26 puntos)**

Encontrar el conjunto solución de cada uno de los siguientes problemas.

(a)  $|2x^2 + 6x + 4| = 2x + 4$

Factorizamos  $2x^2 + 6x + 4 = 2(x + 2)(x + 1)$ . Por consiguiente hay que estudiar tres intervalos:

- $x \leq -2$ : en este intervalo  $2x^2 + 6x + 4$  es no negativo. La ecuación queda  $2x^2 + 6x + 4 = 2x + 4$ , que tiene las soluciones  $x = -2$  y  $x = 0$ . Sólo  $x = -2$  pertenece al intervalo estudiado.
- $-2 < x < -1$ : en este intervalo  $2x^2 + 6x + 4$  es negativo. La ecuación queda  $-(2x^2 + 6x + 4) = 2x + 4$ , que tiene la solución  $x = -2$ . No pertenece al intervalo.
- $x \geq -1$ : en este intervalo  $2x^2 + 6x + 4$  es no negativo. La ecuación queda nuevamente  $2x^2 + 6x + 4 = 2x + 4$ , que tiene las soluciones  $x = -2$  y  $x = 0$ . Sólo  $x = 0$  pertenece al intervalo estudiado.

El conjunto solución es  $\{-2, 0\}$ .

(b)  $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3} < 0$

La expresión queda factorizada de la forma  $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-1)} < 0$ .

- Si  $x < -2$ , los cuatro factores son negativos: la fracción es positiva.
- Si  $-2 < x < 1$ , tres factores son negativos: la fracción es negativa.
- Si  $1 < x < 3$ , un factor es negativo: la fracción es negativa.
- Si  $3 < x$ , ningún factor es negativo: la fracción es positiva.

El conjunto solución es  $(-2, 1) \cup (1, 3)$ .

(c)  $\sqrt{-x} \geq 2 + x$

El problema tiene la restricción  $-x \geq 0$ , es decir  $x \leq 0$ . La estrategia a seguir depende del signo de  $2 + x$ :

- Si  $2 + x < 0$ , es decir  $x < -2$ , la inecuación es verdadera. Considerando la restricción, queda el subconjunto  $(-\infty, -2)$ .

- Si  $2 + x \geq 0$ , es decir  $x \geq -2$ , ambos lados de la inecuación son no negativos, se pueden elevar al cuadrado y queda  $-x \geq 4 + 4x + x^2$ , lo que equivale a  $0 \geq 4 + 5x + x^2 = (x+4)(x+1)$ . Estudiando los signos, queda que  $x \in [-4, -1]$ . Considerando la restricción, queda el subconjunto  $[-2, -1]$ .

El conjunto solución es  $(-\infty, -1]$ .

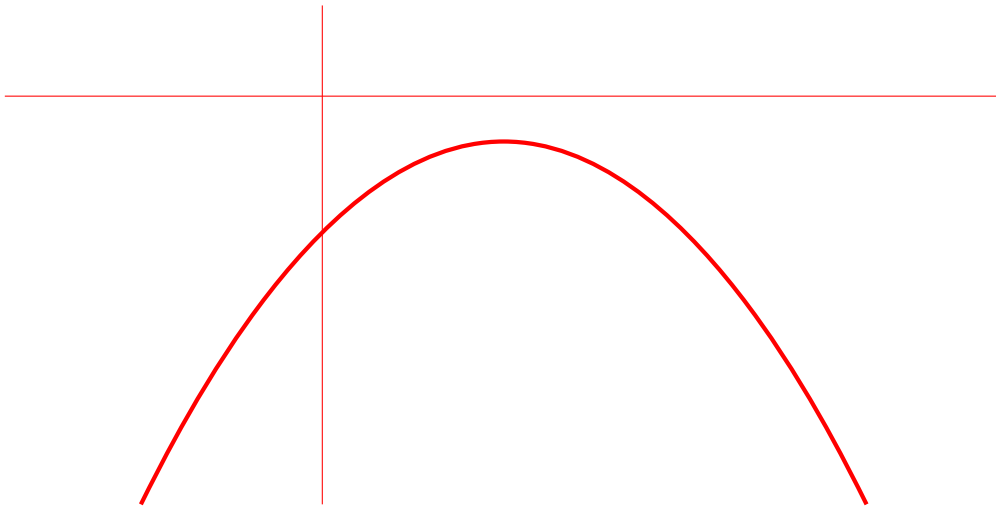
### Problema 2. (12 puntos)

Considerar la parábola de ecuación  $P : x - y = 3 + \frac{x^2}{8}$ . Determinar su orientación, vértice, foco y directriz; y luego esbozar su gráfica.

Reordenando y completando cuadrado de binomio,

$$\begin{aligned} 3 + \frac{x^2}{8} &= x - y \\ x^2 - 8x &= -8y - 24 \\ (x - 4)^2 &= -8(y + 1) \end{aligned}$$

Reconocemos que es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en  $(4, -1)$  y distancia vértice-foco igual a 2. Por consiguiente su foco es el punto  $(4, -3)$  y su directriz es la recta  $y = 1$ .



### Problema 3. (22 puntos)

Considerar la siguiente definición:

La *potencia* de un punto  $P$  respecto a una circunferencia  $C$  de radio  $r$  es el valor  $\mathbf{F}_C(P) = d^2 - r^2$ , donde  $d$  es la distancia de  $P$  al centro de  $C$ .

- (a) Dados la circunferencia  $C : x^2 - 6x + y^2 - 4y + 12 = 0$  y el punto  $P = (1, 1)$ , calcular  $\mathbf{F}_C(P)$  usando la definición anterior.

Reordenando y completando cuadrado de binomio,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y &= -12 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

El radio de esta circunferencia es 1; la distancia entre su centro  $(3, 2)$  y el punto  $P$  es  $\sqrt{5}$ . Por lo tanto la potencia pedida es  $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$ .

- (b) Sean  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de dos circunferencias  $C_1$  y  $C_2$ . Justificar por qué  $\mathbf{F}_{C_1}(P) = \mathbf{F}_{C_2}(P)$  y  $\mathbf{F}_{C_1}(Q) = \mathbf{F}_{C_2}(Q)$ .

Notamos que si un punto está en una circunferencia de radio  $r$ , entonces su distancia al centro es igual al radio, por definición. Entonces la potencia del punto es  $r^2 - r^2 = 0$ . Observamos que las cuatro potencias del enunciado son de este tipo, y por consiguiente son todas iguales a cero e iguales entre sí.

- (c) Sean  $C_1 : (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$  y  $C_2 : (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2$  dos circunferencias con centros distintos. Plantear la ecuación del lugar geométrico de los puntos con igual potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ , y justificar por qué es siempre una recta.

Para un punto  $(x, y)$  la condición de que ambas potencias sean iguales se escribe

$$\left( \text{distancia entre } (x, y) \text{ \& } (p_1, q_1) \right)^2 - r_1^2 = \left( \text{distancia entre } (x, y) \text{ \& } (p_2, q_2) \right)^2 - r_2^2.$$

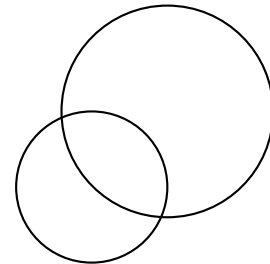
Desarrollando, queda

$$\begin{aligned} (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 &= (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 \\ -2p_1x - 2q_1y + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 &= -2p_2x - 2q_2y + p_2^2 + q_2^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

Observamos que los términos cuadráticos se cancelan; y como  $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$  los coeficientes de  $x$  e  $y$  no se cancelarán: por lo tanto queda una ecuación polinomial de grado uno, que corresponde a una recta.

- (d) Copiar el dibujo adjunto y esbozar el lugar geométrico de los puntos con igual potencia con respecto a ambas circunferencias. No es necesario encontrar ecuaciones o coordenadas.

**Ayuda.** Para abordar (d) se pueden usar las conclusiones de (b) y (c) aun sin haberlas respondido.



Por el ítem (c) sabemos que el lugar geométrico es una recta; por el ítem (b) sabemos que los puntos donde las circunferencias se intersectan se encuentran en el lugar geométrico. Como dos puntos determinan una recta, el dibujo queda

