DESIGUALDAD DE HARDY MEDIANTE CONVOLUCIÓN RESPECTO A UNA MEDIDA ESPECIAL

LEONARDO FIGUEROA C.

A. Resultados de la evaluación 1 (2015-I) y unos nuevos

Reproduzco definiciones y resultados que aparecieron en la evaluación 1 del primer semestre de 2015 (Definición A.1 y partes 1, 2 y 3 de la Proposición A.2 más abajo) junto a otros nuevos (partes 4 y 5 de la misma proposición) cuya demostración se explica muy sucintamente.

Definición A.1 (Espacios L^p y convolución respecto a otra medida)**.** Sea R_+ el conjunto de los números reales estrictamente positivos y sea $w\colon R_+ \to R$ definida por $w(t) := 1/t$. Dado $p \in [1, \infty)$ definimos al espacio

$$L^p_w(R_+) := \left\{ f\colon R_+ \to R \text{ medible} \;\middle|\; \int_{R_+} |f|^p \, w < \infty \right\}$$

identificando entre sí a miembros que sean iguales casi en todas partes. Equipamos a este espacio con la norma

$$L^p_w(R_+) \ni f \mapsto \|f\|_{L^p_w(R_+)} := \left(\int_{R_+} |f|^p \, w \right)^{1/p}.$$

También definimos $L^\infty_w(R_+) := L^\infty(R_+)$ con su misma norma.

Dadas funciones f y g en $C_c(R_+)$ definimos la función $f \odot g\colon R_+ \to R$ por

$$(f \odot g)(x) = \int_{R_+} f(x/y)\, g(y)\, w(y)\, dy \tag{A.1}$$

para todo $x \in R_+$.

Proposición A.2 (Propiedades de convolución con respecto a otra medida)**.**

1. *Demuestre la siguiente versión de la desigualdad de Hölder: Si* $p, q \in [1, \infty]$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, entonces*

$$(\forall\, (f, g) \in L^p_w(R_+) \times L^q_w(R_+)) \qquad \left| \int_{R_+} fgw \right| \le \|f\|_{L^p_w(R_+)} \|g\|_{L^q_w(R_+)}. \tag{A.2}$$

2. *Demuestre que la operación* $\odot$ *es simétrica en* $C_c(R_+) \times C_c(R_+)$.
3. *Sean* $p, q, r \in [1, \infty]$ *tales que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. *Demuestre que para todo* $f, g \in C_c(R_+)$,
$$\|f \odot g\|_{L^r_w(R_+)} \le \|f\|_{L^p_w(R_+)} \|g\|_{L^q_w(R_+)}.$$
4. *Dado* $p \in [1, \infty)$ *use la densidad de* $C_c(R_+)$ *en* $L^p(R_+)$ *para demostrar la densidad de* $C_c(R_+)$ *en* $L^p_w(R_+)$.
5. *Para* $p, q, r \in [1, \infty]$ *tales que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. *Entonces la operación* $\odot$ *puede extenderse por densidad a una operación bilineal y continua de* $L^p(R_+) \times L^q(R_+)$ *a* $L^r(R_+)$ *que puede expresarse mediante la misma fórmula integral.*

Demostración. Las partes 1, 2 y 3 aparecieron en la evaluación 1 del semestre 2015-I. La parte 4 usa que en compactos de R_+ el peso w está acotado a ambos lados por cantidades positivas y la parte 5 se prueba de forma análoga a la manera en que se prueba el resultado correspondiente para la convolución convencional. □

B. Desigualdad de Hardy

A continuación reproduzco el lema 13.4 de [Tar07] con una demostración alternativa que se esboza en ese mismo texto. Cabe mencionar que hallé necesario modificar la función h que se indica ahí.

Lema B.1 (Desigualdad de Hardy)**.** *Sea $p > 1$ y dado $f \in L^p(R_+)$ se define $g\colon R_+ \to R$ por $g(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds$ para todo $t > 0$. Entonces,*

$$g \in L^p(R_+) \quad y \quad \|g\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Demostración. Definimos a la función $h\colon R_+ \to R$ por

$$(\forall\, t \in R_+) \quad h(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ t^{1/p-1} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Usando la notación de la Definición A.1 y la Proposición A.2,

$$\|h\|_{L^1_w(R_+)} = \int_{R_+} h(t)\,w(t)\,dt = \int_1^\infty t^{1/p-1}\frac{1}{t}\,dt = \frac{p}{p-1} < \infty$$

y

$$\begin{aligned}\Big(h \odot (s \mapsto s^{1/p}f(s))\Big)(t) &= \int_{R_+} h(t/s)s^{1/p}f(s)\frac{1}{s}\,ds \\ &= \int_0^t (t/s)^{1/p-1}s^{1/p-1}f(s)\,ds = t^{1/p}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds = t^{1/p}g(t).\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de Young para la operación $\odot$ (parte 5 de la Proposición A.2),

$$\begin{aligned}\|g\|_p = \left\|t \mapsto t^{1/p}g(t)\right\|_{L^p_w(R_+)} &= \left\|h \odot (s \mapsto s^{1/p}f(s))\right\|_{L^p_w(R_+)} \\ &\leq \|h\|_{L^1_w(R_+)}\left\|s \mapsto s^{1/p}f(s)\right\|_{L^p_w(R_+)} = \frac{p}{p-1}\|f\|_p.\end{aligned}$$

□

Referencias

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)