Listado 9: Ecuaciones no lineales

1. Problemas con papel y lápiz

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Escriba la iteración de Newton-Raphson para la ecuación $g(x) = 0$.
   (b) Demuestre que si $x^{(0)} \neq 0$, la iteración anterior no converge.

2. Considere el problema de encontrar $x, y \in \mathbb{R}$ tales que
$$\begin{aligned} xy + x - y - 1 &= 0, \\ xy &= 0. \end{aligned}$$
   (a) Encuentre la solución exacta de este problema.
   (b) Escriba la iteración de Newton para este problema.
   (c) Realice, si es posible, un paso del método de Newton para este problema tomando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Realice, si es posible, un paso del método de Newton para este problema tomando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + e^x - 2$.
   (a) Demuestre que existe un único $\alpha \in [0, 1]$ con la propiedad $f(\alpha) = 0$.
   (b) Dado que $f(0.4) < 0$ y $f(0.5) > 0$ (puede comprobarlo con una calculadora), se cumple que $\alpha \in [0.4,\ 0.5]$ y puede utilizarse el método de bisección para aproximar α.
   Sea $x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, el punto medio del intervalo $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ y $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [0.4, 0.5]$, ¿para qué valor de k se garantiza que
$$\left| \alpha - x^{(k)} \right| \leq 10^{-4}?$$

4. En problema anterior ya se demostró que f posee un único cero en $[0.4,\ 0.5]$. Dado que α, cero de f, es punto fijo de $\varphi_1(x) = 2 - e^x$ y es punto fijo de $\varphi_2(x) = \ln(2 - x)$, también podrían utilizarse las iteraciones de punto fijo
$$x^{(k+1)} = \varphi_1(x^{(k)}), \tag{1}$$
y
$$y^{(k+1)} = \varphi_2(y^{(k)}) \tag{2}$$
para aproximar α, dadas aproximaciones iniciales $x^{(0)}, y^{(0)} \in [0.4,\ 0.5]$.
   (a) ¿Satisface $\varphi_1 : [0.4,\ 0.5] \to \mathbb{R}$ con $\varphi_1(x) = 2 - e^x$ las condiciones que garantizan convergencia de (1) a α, dado $x^{(0)} \in [0.4,\ 0.5]$? Justifique su respuesta.

(b) ¿Satisface $\varphi_2 : [0.4,\, 0.5] \to \mathbb{R}$ con $\varphi_1(x) = \ln(2-x)$ las condiciones que garantizan convergencia de (2) a α, dado $y^{(0)} \in [0.4,\, 0.5]$? Justifique su respuesta.

5. Demuestre que la función $f : \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x - \frac{3}{4}\cos^2(x)$ tiene un único cero en todo su dominio. Escriba la iteración de Newton-Raphson para aproximar el cero de f.

6. Realice dos iteraciones del método de la secante para aproximar cero de función en problema anterior. Utilice $x^{(0)} = 0$ y $x^{(1)} = \frac{\pi}{2}$.

7. Demuestre que la función $f : \left[0,\, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x - \cos(x)$ tiene un único cero en todo su dominio. Escriba la iteración de Newton-Raphson para aproximar el cero de f.

8. Realice dos iteraciones del método de la secante para aproximar cero de función en problema anterior. Utilice $x^{(0)} = 0$ y $x^{(1)} = \frac{\pi}{3}$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$. Se desea determinar un $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumpla la siguiente condición: la recta tangente al gráfico de f en α es paralela a la recta y = x.

   (a) Deduzca una ecuación no lineal para ese α, es decir, determine una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga $g(\alpha) = 0$ si y solo si α satisface condición mencionada en enunciado.

   (b) Realice un paso del método de Newton-Raphson para determinar α tomando $x^{(0)} = 0$.

10. Se desea determinar $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $xe^x = 2$.

    (a) Efectúe una iteración del método de bisección aplicado a una función adecuada y con un intervalo inicial adecuado.

    (b) Escriba la iteración de Newton-Raphson para resolver este problema y calcule dos iteraciones de este método tomando $x^{(0)} = 0$.

11. Se desea determinar una aproximación a $\sqrt[3]{10}$. Utilicemos para ello los métodos vistos en clase.

    (a) Determine un polinomio p del que pueda garantizar que una de sus raíces es $\sqrt[3]{10}$.

    (b) Escriba la iteración de Newton-Raphson aplicada a p.

    (c) Realice dos iteraciones del método anterior tomando $x^{(0)} = 1$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f\left((x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^{\mathtt{t}}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}x_{n-2}^2 + 2x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n^2 \\ \frac{1}{2}x_{n-1}^2 + 2x_n \end{pmatrix}.$$

    (a) Escriba la forma general de la iteración de Newton para, dado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, determinar una aproximación a $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \theta$.

    (b) Tomando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule $x^{(1)}$ con el método formulado en ítem anterior.

13. Considere el problema de determinar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenezcan tanto a la circunferencia con centro en 0 y radio 2 como a la circunferencia con centro en $(0, 2)$ y mismo radio.

    (a) Escriba este problema como un sistema de ecuaciones no lineales.

    (b) Realice dos iteraciones del método de Newton para este problema tomando como vector inicial $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. Sean P y Q los dos puntos de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio 2 con la recta $y = 3x$. Suponga que P es el punto en el primer cuadrante del plano cartesiano y Q, el punto en el tercer cuadrante.

    Sea además $\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix}$ el vector que se obtiene en el paso k del método de Newton aplicado a la solución del problema de determinar las coordenadas de uno de estos puntos con aproximación inicial $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$.

    Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

    (a) Los valores $x^{(0)} = 0$ y $y^{(0)} = 0$ no son apropiados como aproximación inicial.

    (b) Si $y^{(0)} \neq -\dfrac{1}{3}x^{(0)}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $y^{(k)} = 3x^{(k)}$.

    (c) Si $x^{(0)} > 0$, entonces, si el método de Newton converge, lo hace a P.

2. Experimentos computacionales

1. Implemente el método de bisección y aproxime con él el cero de la función en 3 tomando $[0.4, 0.5]$ como intervalo inicial,

$$\frac{b^{(k)} - a^{(k)}}{2} \leq 10^{-4}$$

   como criterio de parada y $x^{(k)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$ como aproximación a α en el paso k. ¿Cuántas iteraciones realiza el método para lograr la precisión requerida? ¿Coincide este valor con el calculado por usted en el problema 3?

2. Implemente una función que, dada cierta función φ y valores $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ y $M, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, calcule

$$x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right), \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Utilice como criterio de parada

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon \vee k > M.$$

   Emplee esta función para aproximar el cero de la función f en problema 3, con las iteraciones de punto fijo propuestas en el problema 4. Utilice $\varepsilon = 10^{-4}$ y $M = 100$. ¿Es posible en ambos casos obtener una buena aproximación a α? Es decir, ¿ocurre en ambos casos que el método se detiene porque se satisface $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon$? ¿Confirman estos resultados lo demostrado por usted en el problema 4?

3. Implemente una función que, dada cierta función f y valores $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ y $M, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, aplique el método de Newton-Raphson a f tomando como aproximación inicial el valor de $x^{(0)}$.

   Utilice como criterio de parada

   $$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon \vee k > M.$$

   Emplee esta función para aproximar el cero de las funciones en problemas 5 y 7. Utilice $\varepsilon = 10^{-4}$, $M = 100$ y elija distintos valores de $x^{(0)}$.

4. Implemente una función que, dada cierta función f y valores $x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R}$ y $M, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, aplique el método de la secante a f tomando como aproximaciones iniciales los valores de $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$.

   Utilice como criterio de parada

   $$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon \vee k > M.$$

   Emplee esta función para aproximar el cero de las funciones en problemas 5 y 7. Utilice $\varepsilon = 10^{-4}$, $M = 100$ y elija distintos valores de $x^{(0)}, x^{(1)}$.