Sucesiones y series de números reales.

- Algunas sucesiones de números reales.
- Series.
- Criterio de Cauchy. Una condición necesaria.
- Criterio de comparación.
- Series geométricas.

Algunas sucesiones de números reales.

Para estudiar la convergencia de algunas sucesiones en $\mathbb{R}$, vamos a usar:

Prop.: [Potencia de un binomio]
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n.$

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Prop.: [Monotonía de potencias] $\forall a, b > 0,\ \forall p > 0,\ a < b \implies a^p < b^p.$

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$ Demuéstralo para $p \in \mathbb{Q}$.

Ahora estudiaremos la convergencia de algunas sucesiones de números reales.

Prop.: $\forall p > 0,\ \dfrac{1}{n^p} \xrightarrow{n} 0.$

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N} :\ N > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$. Entonces,

$\forall n \geq N,\ n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p} \implies 0 < \frac{1}{n^p} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon \implies \frac{1}{n^p} \xrightarrow{n} 0.$ $\square$

Prop.: $\forall p > 0,\ \sqrt[n]{p} \xrightarrow{n} 1.$

Dem.: i) Si $p > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $x_n := \sqrt[n]{p} - 1 > 0 \implies (1 + x_n)^n = p$.

Entonces, $1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p \implies 0 < x_n \leq \frac{p-1}{n} \xrightarrow{n} 0.$

$\implies x_n \xrightarrow{n} 0 \implies \sqrt[n]{p} - 1 = x_n \xrightarrow{n} 0 \implies \sqrt[n]{p} \xrightarrow{n} 1.$

ii) Si $p = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{p} = 1 \implies \sqrt[n]{p} \xrightarrow{n} 1.$

iii) Si $p < 1$, $\frac{1}{p} > 1 \implies \sqrt[n]{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n} 1 \implies \sqrt[n]{p} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}} \xrightarrow{n} 1.$ $\square$

Prop.: $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n} 1.$

Dem.: $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \implies (1 + x_n)^n = n.$

Entonces, $\frac{n(n-1)}{2!} x_n^2 \leq (1 + x_n)^n = n \implies x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ (si $n > 1$)

$\implies x_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow{n} 0$ (pues $\frac{1}{n^p} \xrightarrow{n} 0$)

$\implies \sqrt[n]{n} - 1 = x_n \xrightarrow{n} 0 \implies \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n} 1.$ $\square$

Prop.: $\forall p > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \dfrac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} \xrightarrow{n} 0.$

Dem.: Sea $k \in \mathbb{N} : \ k > \alpha$. Sea $n \in \mathbb{N} : \ n > 2k \implies k < \frac{n}{2}$.

Entonces, $(n - k + 1) > n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2}$

$$\implies (1+p)^n > \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{p^k}{k!}$$

$$\implies \frac{1}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{n^k p^k} \implies \frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} < \underbrace{\frac{2^k k!}{p^k}}_{\text{const.}} \ \underbrace{\frac{1}{n^{k-\alpha}}}_{k-\alpha>0} \xrightarrow{n} 0$$

$$\implies \frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} \xrightarrow{n} 0. \quad \square$$

Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} : \ |x| < 1, \ \ x^n \xrightarrow{n} 0.$

Dem.: Si $x = 0$, no hay nada que demostrar.

Si $x \neq 0$, sea $p \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{1+p} = |x|$; es decir, $p := \frac{1}{|x|} - 1$.

Entonces $p > 0$ y la proposición anterior con $\alpha = 0 \implies |x|^n \xrightarrow{n} 0$

$$\implies |x^n - 0| = |x|^n \xrightarrow{n} 0 \implies x^n \xrightarrow{n} 0. \quad \square$$

Series.

Def.: Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$, o en $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$).

Las sumas $S_n := \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, son sus **sumas parciales**.

Si existe $\lim_n S_n$, se dice que la **serie** $\sum_{n=1}^\infty a_n$ **converge** (o que es **sumable**).

En tal caso, se define la **suma de la serie** como $\sum_{n=1}^\infty a_n := \lim_n S_n$.

Si una serie no converge, se dice que **diverge.**

¡Cuidado! Pese a la notación, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no es una suma, sino un límite.

Def.: Una **serie es de Cauchy** si la sucesión de sus sumas parciales es de Cauchy.

Es decir, si $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m, n \geq N, \ |S_m - S_n| < \varepsilon$.

Como para $m > n$, $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m a_k$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es de Cauchy si y sólo si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m \geq n \geq N, \ \left|\sum_{k=n}^m a_k\right| < \varepsilon.}$$

Def.: Las sumas $\sum_{k=n}^m a_k$ se llaman **sumas de Cauchy** de la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Criterio de Cauchy. Una condición necesaria.

Teor.: [Criterio de Cauchy] La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m \geq n \geq N, \ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon.$

Dem.: Es consecuecia inmediata del Teor. de Cauchy para sucesiones y de la completitud de $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$.) $\square$

Corol.: [Condición necesaria] Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $a_n \xrightarrow{n} 0.$

Dem.: $a_n := \sum_{k=n}^{n} a_k, \ n \in \mathbb{N},$ son sumas de Cauchy de la serie.

Por lo tanto, el criterio de Cauchy implica que si la serie converge, entonces

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N, \ |a_n| < \varepsilon \implies a_n \xrightarrow{n} 0.$ $\square$

¡Cuidado! $a_n \xrightarrow{n} 0$ es una condición necesaria, pero **no suficiente** para la convergencia de la serie, como veremos más adelante.

Criterio de comparación.

Teor.: [Criterio de comparación] Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie en $\mathbb{R}$.

a) Si $\exists N_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_0, \ |a_n| \leq c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\exists N_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_0, a_n \geq c_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Dem.: **(a)** Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, por el criterio de Cauchy, $\exists N \geq N_0 : \ \forall m \geq n \geq N, \ \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$.

$$\implies \quad \forall m \geq n \geq N, \ \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon.$$

Entonces, otra vez por el criterio de Cauchy, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Por el absurdo. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Como por hipótesis $\exists N_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_0, \ 0 \leq c_n \leq a_n$

$\overset{(a)}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge. Pero por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\square$

Series geométricas.

Def.: Sea $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$). Se denomina **serie geométrica** a una serie de potencias de x de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Prop.: Sea $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$).

a) Si $|x| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

b) Si $|x| \geq 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

Dem.: (a) Sea $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$) tal que $|x| < 1$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n - xS_n = (1 + x + \cdots + x^n) - x\,(1 + x + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n} \frac{1}{1-x} \qquad \text{(pues } x^{n+1} \xrightarrow{n} 0\text{).}$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

(b) Si $|x| \geq 1$, entonces $|x^n| = |x|^n \geq 1 \implies x^n \not\to 0$

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge (por no cumplir la condición necesaria $x^n \to 0$). $\square$