1.3 Solución de EDOs con Transformadas de Laplace

Nuestro objetivo es utilizar transformadas de Laplace para resolver EDOs o sistemas de EDOs de una manera más sencilla, es por ello que debemos estudiar la transformada de Laplace de la derivada de una función, para esto, utilizaremos la definición de Transformada de Laplace y realizamos integración por partes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=b} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} f(b)e^{-sb} - f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s).
\end{aligned}$$

Este resultado se obtiene, suponiendo que f es de orden exponencial c, en cuyo caso, $f(t)e^{-st} \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s),$$

con $s > c$, siempre que f sea de orden exponencial c.

Usando lo anterior, obtenemos la transformada de Laplace de la derivada segunda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) \\
&= -f'(0) + s\left[-f(0) + s\mathcal{L}(f(t))\right] \\
&= s^2\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Entonces, de manera general, para la derivada n-ésima tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4

Si $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ son funciones continuas por tramos en $[0,\infty[$ y de orden exponencial y si $f^{(n)}$ es continua por tramos en $[0,\infty[$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. *Usando la propiedad de la derivada, demuestre que* $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$, *para todo* $s > 0$.
Sabemos que $\dfrac{d}{dt}\sin(kt) = k\cos(kt)$. *Entonces, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados:*

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}\{k\cos(kt)\}(s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\sin(kt)\right\}(s).$$

A partir de la propiedad de la transformada de una derivada, tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\sin(kt)\right\}(s) = s\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) - \sin(0).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos(kt)\right\}(s) &= \frac{1}{k}\left(s\mathcal{L}\left\{\sin(kt)\right\}(s) - \sin(0)\right)\\ &= \frac{s}{k}\frac{k}{s^2+k^2} = \frac{s}{s^2+k^2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.7. *Consideremos $f(t) = t$, entonces por la regla de la transformada de la derivada:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\}(s) &= \mathcal{L}\{t'\}(s)\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{t\}(s).\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos que

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{1\}(s)}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Desde la fórmula anterior, podemos resolver EDOs siguiendo los siguientes pasos:

1. Aplicamos la transformadas de Laplace a la ED dada, de manera que la ecuación resultante sea una ecuación algebraica de variable $Y(s)$.
2. Resolvemos la ecuación algebraica obtenida en el paso anterior.
3. Aplicamos la transformada de Laplace inversa para obtener la solución original de la ED $y(t)$.

El siguiente ejemplo ilustra el proceso de resolver una ED mediante transformadas de Laplace.

Ejemplo 1.8. *Resuelva el siguiente PVI usando transformadas de Laplace:*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 15\sin(2t),\\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.\end{cases}$$

Primero aplicamos la transformadas de Laplace a la EDO dada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\}(s) &= \mathcal{L}\{15\sin(2t)\}(s)\\ \mathcal{L}\{y''\}(s) - 3\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) &= 15\mathcal{L}\{\sin(2t)\}(s)\\ s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0)) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) &= 15\frac{2}{s^2+4}\\ s^2Y(s) - s - 1 - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) &= \frac{30}{s^2+4}\\ (s^2 - 3s + 2)Y(s) &= s - 2 + \frac{30}{s^2+4}\\ Y(s) &= \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} + \frac{30}{(s^2+4)(s-1)(s-2)}\\ Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{30}{(s^2+4)(s-1)(s-2)}\end{aligned}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace inversa para recuperar $y(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{30}{(s^2+4)(s-1)(s-2)}\right\}(t)\\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{30}{(s^2+4)(s-1)(s-2)}\right\}(t)\end{aligned}$$

Finalmente, resolvemos las transformadas inversas del lado derecho separando por fracciones parciales y obtenemos la solución:

$$y(t) = \frac{15}{4}e^{2t} - 5e^t + \frac{9}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4}\sin(2t).$$