UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA

Problema 1. Usando variación de paramétros o aniquiladores, resuelva el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y''(t) & + & y'(t) - 6\,y(t) = \mathrm{e}^t\cos(2t) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1/8 \end{cases}$$

Desarrollo

La solución general, $y(t)$, de $y''(t) + y'(t) - 6\,y(t) = \mathrm{e}^t\cos(2t)$ es de la forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

donde

$$y_h(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2\mathrm{e}^{2t}$$

es la solución de la EDO homogénea asociada e $y_p(t)$ es una solución particular de la EDO dada.

(i) Usando aniquiladores buscamos una solución particular, $y_p(t)$, de la forma

$$y_p(t) = A\,\mathrm{e}^t\cos(2t) + B\,\mathrm{e}^t\mathrm{sen}(2t).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} y_p' &= A\,\mathrm{e}^t\{\cos(2t) - 2\mathrm{sen}(2t)\} + B\,\mathrm{e}^t\{2\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)\} \\ y_p'' &= A\,\mathrm{e}^t\{-3\cos(2t) - 4\mathrm{sen}(2t)\} + B\,\mathrm{e}^t\{4\cos(2t) - 3\mathrm{sen}(2t)\} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} y_p' &= (A + 2B)\,\mathrm{e}^t\cos(2t) + (B - 2A)\,\mathrm{e}^t\mathrm{sen}(2t) \\ y_p'' &= (-3A + 4B)\,\mathrm{e}^t\cos(2t) + (-3B - 4A)\,\mathrm{e}^t\mathrm{sen}(2t) \end{aligned}$$

y reemplazando en: $y_p'' + y_p' - 6y_p(t) = \mathrm{e}^t\cos(2t)$, resulta que $\boxed{A = -\frac{2}{25}}$ $\boxed{B = \frac{3}{50}.}$

Así, una solución particular es: $\boxed{y_p(t) = \frac{3}{50}\,\mathrm{e}^t\mathrm{sen}(2t) - \frac{2}{25}\mathrm{e}^t\cos(2t)}$

y la solución general de la EDO dada es:

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \; + \; \frac{1}{50}\mathrm{e}^{t}\left\{3\,\mathrm{sen}(2t) - \; 4\cos(2t)\right\},.$$

Como

$$y'(t) = -3c_1\mathrm{e}^{-3t} + 2c_2\mathrm{e}^{2t} + \; 4\mathrm{e}^{t}\cos(2t) - \; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{sen}(2t)$$

y además $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1/8$, se obtiene que

$$\boxed{c_1 = 83/200} \text{ y } \boxed{c_2 = 133/200}$$

Finalmente la solución al PVI dado, es:

$$y(t) = \frac{83}{200}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{133}{200}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{50}\mathrm{e}^{t}\left\{3\,\mathrm{sen}(2t) - \; 4\cos(2t)\right\}.$$

(ii) Por variación de parámetros

$$y_p(t) = c_1(t)\,\mathrm{e}^{-3t} \; + \; c_2(t)\,\mathrm{e}^{2t}$$

donde

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1'(t)\,\mathrm{e}^{-3t} & + & c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} & = & 0 \\ -3c_1'(t)\mathrm{e}^{-3t} & + & 2c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} & = & \mathrm{e}^{t}\cos(2t) \end{array}\right.$$

Al resolver el sistema anterior, se obtiene:

$$c_1(t) = -\frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{4t}\cos(2t)\,dt \; = -\frac{1}{25}\mathrm{e}^{4t}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t) + \; \cos(2t)\right\}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,dt \; = \frac{2}{25}\mathrm{e}^{-t}\left\{\mathrm{sen}(2t) - \; \frac{1}{2}\cos(2t)\right\},$$

esto es,

$$y_p(t) = -\frac{1}{25}\mathrm{e}^{t}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t) + \; \cos(2t)\right\} \; + \; \frac{2}{25}\mathrm{e}^{t}\left\{\mathrm{sen}(2t) - \; \frac{1}{2}\cos(2t)\right\},$$

es decir,

$$y_p(t) = \; \frac{1}{50}\mathrm{e}^{t}\left\{3\,\mathrm{sen}(2t) - \; 4\cos(2t)\right\},$$

Continuando como en la parte anterior, se obtiene que la solución al PVI es:

$$y(t) = \frac{83}{200}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{133}{200}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{50}\mathrm{e}^{t}\left\{3\,\mathrm{sen}(2t) - \; 4\cos(2t)\right\}.$$

Pregunta 2. En un tanque con 100 litros de agua pura se vierte una solución salina a razón de 6 lt/min. La solución en el tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a razón de 5 lt/min. Si la concentración de sal en la solución que entra al estanque es de 1 Kg/lt, determinar:

(i) el momento en que la concentración de sal en el estanque llegue a 63/64 Kg/lt.

(ii) La mínima capacidad del estanque para que el proceso llegue a la concentración anterior.

Desarrollo

(i) Sea $Q(t)$ la cantidad de sal en Kg. en el instante t dentro del estanque.

La EDO involucrada para la cantidad de sal, es:

$$\frac{dQ}{dt} = 6 \cdot 1 - 5\frac{Q(t)}{V(t)}$$

Calculemos el volumen $V(t)$:

La variación de volumen es $\Delta V = 6 - 5 = 1$, de donde $V(t) = t + 100$

Así, el PVI que describe el problema es:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt}(t) \; + \; 5\dfrac{Q(t)}{t+100} = 6 & \text{para } 0 \leq t \leq ?, \\ Q(0) \; = 0 & \end{cases}$$

de donde se obtiene que $\qquad [(t+100)^5 \, Q(t)]' = 6\,(t+100)^5.$

Para obtener

$$Q(t) = (100+t) + C\,(100+t)^{-5}.$$

Como $Q(0) = 0$, se obtiene $C = -100^6$.

Así,

$$Q(t) = (100+t) \; - \; 100^6\,(100+t)^{-5}$$

Se pide hallar t tal que

$$\frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{63}{64}, \text{ esto es, } \frac{(100+t) \; - \; 100^6\,(100+t)^{-5}}{(100+t)} = \frac{63}{64}.$$

Así,

$$\left(\frac{100}{100+t}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

y finalmente, se obtiene

$$t = 100 \text{ minutos.}$$

(ii) Basta saber cual es el volumen del tanque a los 100 minutos; para ello basta calcular $V(100) = 100 + 100 = 200$ litros. Así, para obtener la concentración de 63/64 Kg/lt, debemos tener como mínimo un estanque de 200 litros.

Problema 3. Usando valores propios determine la solución del siguiente PVI:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & x(t) \, - \, 3z(t) \\ z'(t) & = & 3y(t) \, + \, \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) & = & y(0) \, = \, z(0) \, = \, 0 \end{array}\right.$$

Desarrollo: De la primera ecuación observamos que $x(t)$ es una función constante , como $x(0) = 0$, sigue que $x(t) \equiv 0$. Así, el sistema dado se reduce a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & -\,3z(t) \\ z'(t) & = & 3y(t) \, + \, \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) & = & z(0) \, = \, 0 \end{array}\right.$$

De $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, se obtiene que: $\lambda_1 = -3i$ y $\lambda_2 = 3i$. El espacio propios asociado a $\lambda_1 = -3i$, es

$$S_{\lambda_1} = < \{(1, i)\} > .$$

Las soluciones del sitema homogéneo son

$$X_1(t) \, = \, \mathrm{Re}\,(\phi(t)) \text{ y } X_2(t) \, = \, \mathrm{Im}\,(\phi(t))$$

donde $\phi(t) \, = \, \mathrm{e}^{-3it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, es decir,

$$X_1(t) \, = \, \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \mathrm{sen}(3t) \end{pmatrix} \text{ y } X_2(t) \, = \, \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema homogéneo, es

$$X_h(t) = A \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \mathrm{sen}(3t) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos una solución particular, $X_p(t)$, para el sistema no homogéneo con

$$X_p(t) \, = \, c_1(t) \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \mathrm{sen}(3t) \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

donde c_1 y c_2 deben verificar

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1'(t)\cos(3t) - c_2'(t)\mathrm{sen}(3t) & = & 0 \\ c_1'(t)\mathrm{sen}(3t) + c_2'(t)\cos(3t) & = & \mathrm{e}^{-t}; \end{array}\right.$$

el sistema anterior entrega

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1(t) & = & \int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}(3t)\,dt \\ c_2(t) & = & \int \mathrm{e}^{-t}\cos(3t)\,dt; \end{array}\right.$$

esto es,

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1(t) & = & -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{\mathrm{sen}(3t)\,+\,3\cos(3t)\}\ \text{y} \\ c_2(t) & = & \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{3\mathrm{sen}(3t)\,-\,\cos(3t)\} \end{array}\right.$$

Así, se obtiene que

$$X_p(t)\,=\,-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{\mathrm{sen}(3t)+3\cos(3t)\}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \mathrm{sen}(3t)\end{pmatrix}+\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{3\mathrm{sen}(3t)-\cos(3t)\}\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema no homogéneo dado, es:

$$X(t)\,=\,X_h(t)\,+\,X_p(t),$$

esto es,

$$X(t)\,=\,A\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \mathrm{sen}(3t)\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{\mathrm{sen}(3t)\,+\,3\cos(3t)\}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \mathrm{sen}(3t)\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{3\mathrm{sen}(3t)\,-\,\cos(3t)\}\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}.$$

Como $X(0)\,=\,\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ sigue que $A=3/10$ y $B=1/10$.

Finalmente, la única solución del PVI dado es

$$X(t)\,=\,\frac{3}{10}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \mathrm{sen}(3t)\end{pmatrix}+\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{\mathrm{sen}(3t)\,+\,3\cos(3t)\}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \mathrm{sen}(3t)\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\{3\mathrm{sen}(3t)\,-\,\cos(3t)\}\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}(3t)\\ \cos(3t)\end{pmatrix}.$$

donde $X(t)\,=\,(y(t),z(t))^t$, más explícitamente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y(t) & = & \frac{3}{10}\cos(3t)-\,\frac{1}{10}\mathrm{sen}(3t)-\,\frac{3}{10}\mathrm{e}^{-t} \\ z(t) & = & \frac{3}{10}\mathrm{sen}(3t)+\,\frac{1}{10}\cos(3t)-\,\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}. \end{array}\right.$$

Problema 4. Resuelva el siguiente problema integro-diferencial:

$$5\int_0^t \mathrm{e}^u y(u)\cos(2(t-u))\,du \;=\; \mathrm{e}^t\Big(y'(t)+y(t)\Big)-1\,,\qquad y(0)=0\,.$$

Desarrollo: Aplicando transformada de Laplace a la ecuación y teniendo presente sus propiedades (convolución entre otras), se tiene

$$5\mathcal{L}[\mathrm{e}^t y(t)]_{(s)}\mathcal{L}[\cos(2t)]_{(s)} = \mathcal{L}[\mathrm{e}^t y'(t)]_{(s)} + \mathcal{L}[\mathrm{e}^t y(t)]_{(s)} - \mathcal{L}[1]_{(s)}\,,$$

el cual se reduce, aplicando la primera propiedad de traslación y considerando $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]_{(s)}$ y $\mathcal{L}[y'(t)]_{(s)} = s\mathcal{L}[y(t)]_{(s)} - y(0^+)$:

$$5Y(s-1)\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}[y'(t)]_{(s-1)} + \mathcal{L}[y(t)]_{(s-1)} - \frac{1}{s} = \ldots = s\,Y(s-1) - \frac{1}{s}\,.$$

De esta manera resulta

$$Y(s-1) = \frac{s^2+4}{s^2(s^2-1)}\,,$$

de donde, aplicando transformada inversa de Laplace, se tiene

$$\mathrm{e}^t\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[Y(s-1)]_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+4}{s^2(s-1)(s+1)}\right](t)\,.$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{s^2+4}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

se deduce que $A=0$, $B=-4$, $C=5/2$ y $D=-5/2$. Así, reemplazando, nos queda

$$\mathrm{e}^t\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]_{(t)} = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right](t) + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) = -4t + \frac{5}{2}\mathrm{e}^t - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}$$

y por tanto $y(t) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-2t} - 4t\mathrm{e}^{-t}$.

RBP/HMM/JMS/LNB//jms
30/06/2009.