

**Guía N°11: Sistemas Lineales Parte II**  
 Cálculo Numérico 521230

1. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar cuáles de ellas son definidas positivas.
- b) Determinar cuáles de ellas son diagonal dominante estricta.

2. Para  $s \in \mathbb{R}$ , considere la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar sus valores propios.
- b) Determine el rango de valores de  $s$  para el cual la matriz es definida positiva.
- c) Determine el rango de valores de  $s$  para el cual la matriz es diagonal dominante estricta.

3. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & -1 & a \\ -1 & 3 & 0 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar  $a$  y  $b$  de manera que la matriz sea simétrica y definida positiva.
- b) Determinar  $a$  y  $b$  de manera que la matriz sea diagonal dominante estricta.

4. De las matrices del Problema 4, determine a cuál de ellas se le puede realizar la factorización de Cholesky. Realizar dicha factorización cuando corresponda. **Indicación:** MATLAB entrega  $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$  a través del siguiente comando:  $\mathbf{U} = \text{chol}(\mathbf{A});$ .

5. Considere el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .
- a) ¿Es convergente el Método de Jacobi si se aplica a resolver este sistema?. Justifique.
  - b) Realizar, “a mano” dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - c) Bajar desde Canvas el programa *jacobi\_ejemplo1.m* utilizado en el video y modifíquelo para resolver este sistema con una tolerancia de  $\text{TOL} = 10^{-10}$ . ¿Cuál es la aproximación de  $\mathbf{x}$  que entrega el método?

6. Repita el ejercicio anterior, pero en lugar del Método de Jacobi considere el Método de Gauss-Seidel.

7. Considere el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- a) ¿Es  $\mathbf{A}$  es diagonal dominante estricta?. ¿Es  $\mathbf{A}$  simétrica y definida positiva?  
 b) ¿Cuál método iterativo recomendaría para resolver el sistema?.  
 c) Utilizar el método recomendado en b) con una tolerancia de  $TOL = 10^{-8}$ , comenzando con  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Bajar desde Canvas el programa respectivo.
8. Se quiere resolver, mediante un esquema iterativo, el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Se descompone  $\mathbf{A}$  como:  $\mathbf{A} = \mathbf{N} - \mathbf{P}$  con  $\mathbf{N}$  invertible y sabemos que el algoritmo del esquema general es:
- ```
Dado el vector inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,
for  $k = 1, 2, \dots$ 
|    $\mathbf{Nx}^{(k)} = \mathbf{Px}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ ,
end
```
- Además, recordemos que la matriz de iteración se define como  $\mathbf{M} := \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$ .
- a) Considere  $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix}$ . Realizar cuatro iteraciones del esquema general partiendo con  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?. **Indicación:** Analizar la matriz de iteración y notar que la solución exacta del sistema es  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- b) Considere  $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Realizar cuatro iteraciones del esquema general con  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.