UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS: CURSO DE REPASO (525315)
Listado Nº 4 (Funciones de varias variables: integrales sobre curvas y superficies)

1. Dado un entero $n > 0$, sea $\mathcal{C}_n$ la curva orientada de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\sigma_n(t) = (t, t^n)$, $t \in [0, 1]$. Evalue
$$\int_{\mathcal{C}_n} \big(y dx + (3y^3 - x) dy\big) \ .$$

2. Sea la curva orientada $\mathcal{C}$ parametrizada por $\sigma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (hipocicloide).
   (a) Determine la pendiente de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $\sigma(t_0)$ cuando $t_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.
   ¿ Cuales son los límites de p_0 cuando $t_0 \to 0$ ó π y cuando $t_0 \to \frac{\pi}{2}\pm$ ó $\frac{3\pi}{2}\pm$?
   (b) Estudie las simetrías de $\mathcal{C}$. Traze la curva $\mathcal{C}$ en el plano.
   (c) Calcule la longitud de $\mathcal{C}$.
   (d) Halle el promedio de la función $f(x, y) = |x|$ a lo largo de $\mathcal{C}$.
   (e) Determine $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xyz\, e^{x^2} \\ z\, e^{x^2} \\ y\, e^{x^2} \end{pmatrix}$.

   Halle $f(1, 1, 2)$ sabiendo que $f(0, 0, 0) = 5$.

4. El campo de fuerzas gravitacionales describiendo la interacción de una masa M en el origen con una masa puntual m en el punto $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3$ está dada por:
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \ ,$$
   donde $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $G > 0$ es la constante gravitacional.
   (a) Muestre que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ deriva de un potencial, es decir, existe una función potencial $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r} \in \Omega$. Determine $V(\mathbf{r})$.
   (b) Muestre que el trabajo realizado al mover la masa puntual desde $\mathbf{r}_A \in \Omega$ hasta $\mathbf{r}_B \in \Omega$ a lo largo de cualquiera curva contenida en Ω sólo depende de $\|\mathbf{r}_A\|$ y $\|\mathbf{r}_B\|$. Calcule este trabajo.

5. Un ciclista de masa M sube una montaña descrita por una paraboloida de revolución $z = h - x^2 - y^2$, con $h > 0$. Suponiendo que se puede despreciar el roce, determine el trabajo realizado por el ciclista para subir la montaña.

6. Dado $r, R \in \mathbb{R}$, $0 < r < R$, considere la superficie paramétrica definida por

$$\phi(s,t) = \big((R + r\cos s)\cos t, (R + r\cos s)\sin t, r\sin s\big)\ ,\ (s,t) \in [0, 2\pi]^2\ .$$

   (a) Muestre que para todo (s_0, t_0), los vectores tangentes $T_s(s_0, t_0)$ y $T_t(s_0, t_0)$ a las curvas $s \mapsto \phi(s, t_0)$ y $t \mapsto \phi(s_0, t)$ en el punto $\phi(s_0, t_0)$ son perpendiculares entre sí. Deduzca que la superficie paramétrica ϕ es suave.

   (b) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie en $(R + r/\sqrt{2}, 0, r/\sqrt{2})$.

   (c) ¿ Que tipo de superficie parametriza ϕ ?

7. Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica de clase C^1 cerrada simple tal que la curva $\mathcal{C} = \sigma([a, b])$ está contenida en el semiplano vertical $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y = 0, x \geq 0\}$ (NOTA: decimos que una curva cerrada σ es simple si $\sigma(\tau) \neq \sigma(\tau')$ si $\tau \neq \tau'$, $\forall\, \tau, \tau' \in]a, b[$). Sea $\mathcal{S}$ la superficie obtenida al rotar $\mathcal{C}$ alrededor del eje z.

   (a) Muestre el Teorema de Pappus: $\text{Area}(\mathcal{S}) = 2\pi \langle x \rangle_{\mathcal{C}}\, \ell(\mathcal{C})$, donde $\langle x \rangle_{\mathcal{C}}$ es el valor promedio de la coordenada x de los puntos de $\mathcal{C}$ y $\ell(\mathcal{C})$ es la longitud de $\mathcal{C}$.

   (b) Deduzca el valor del area de la superficie considerada en el Problema 6.

8. Determine el centro de masa de una placa metalica muy delgada en forma triangular con vertices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, de densidad es $\rho(x, y, z) = \alpha(2 - z)$ [kg/m^2], con $\alpha > 0$.

9. El elipsoide de semiejes de longitud a, b y $c > 0$ está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ .$$

   (a) Determine una parametrización del elipsoide usando coordenadas esféricas. Muestre que esta parametrización es suave salvo en los "polos" $(0, 0, \pm c)$.

   (b) Determine el area del elipsoide de revolución obtenida cuando $a = b$. *Indicación:* distinguir los dos casos $a = b > c$ y $a = b < c$.

10. Sea $g : D \to \mathbb{R}$ una función de 2 variables de clase C^1 en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Muestre que si $\mathcal{S}$ es la gráfica de g y $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ es una función vectorial continua sobre $\mathcal{S}$, con $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, luego

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \Big(F_x(-\partial_x g) + F_y(-\partial_y g) + F_z\Big) dx\, dy\ .$$

11. (a) Un fluido homogéneo (lluvia fuerte) fluye hacia abajo con una velocidad $\mathbf{v} = -v_0\, \mathbf{e}_z$ a través de un cono $\mathcal{S}$ de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq h^2$, con $v_0, h > 0$. Calcule el flujo de agua $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$.

    (b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado con un ángulo de 45°, con una velocidad $\mathbf{v} = -v_0(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. ¿ Cual es ahora el flujo a través del cono ?

12. El campo eléctrico está dada por $\mathbf{E}(x, y, z) = \alpha(x\, \mathbf{e}_x + y\, \mathbf{e}_y + z\, \mathbf{e}_z)$. Halle el flujo eléctrico a través la superficie cerrada formada por un cilíndro de eje z, radio $R > 0$ y altura $h > 0$, junto con sus dos bases horizontales.

Junio 1, 2022, DS/ds