UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 1 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Se recuerda que $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.
Se recuerda la definición de RELACIÓN DE ORDEN LEXICOGRÁFICO**:** Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados. En $A \times B$, se define la relación $\leq_{\texttt{lex}}$ por :

$$\forall\,(a,b),(c,d) \in A \times B : (a,b) \leq_{\texttt{lex}} (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a <_A c) \vee \Big(a = c \wedge b \leq_B d\Big)\,. \tag{1}$$

Duración: 110 minutos. Adicionalmente, contarán con 40-50 minutos para enviar su desarrollo, en formato pdf, por CANVAS/E-mail.

Problema 1. Sean A, B, C subconjuntos no vacíos de cierto conjunto universo $\mathcal{U}$. Interesa establecer las equivalencias:

$$B \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \times B \subseteq A \times C \quad \Leftrightarrow \quad B \times A \subseteq C \times A\,.$$

Para ello, demostrar las siguientes implicaciones encadenadas (RESPETAR EL ORDEN): **(15 puntos)**

$$B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \times B \subseteq A \times C \quad \Rightarrow \quad B \times A \subseteq C \times A \quad \Rightarrow \quad B \subseteq C\,.$$

Comentario general: *La mayoría, por alguna extraña razón, redacta sus demostraciones mezclando conectivos lógicos con operadores de pertenencia o de inclusión. Esto ciertamente no tiene sentido matemático alguno, y suele decantar en un error grave. En este problema en particular, cada implicación involucraba demostrar una inclusión entre dos conjuntos. Algunas demostraciones redactadas en el test, hace uso del método de* REDUCCIÓN AL ABSURDO*, el cual es una opción. Aunque en este caso, eso podría alargar la demostración, pero si está todo coherente, es válida.*
A título personal, la demostración natural de estas inclusiones, comienza tomando un elemento (fijo pero arbitrario) en el universo tal que pertenezca al primer conjunto. A partir de allí se debe INFERIR *que dicho elemento pertenece al otro conjunto, invocando la* HIPÓTESIS *respectiva y/o aplicando propiedades/definiciones conocidas (vistas en clases) para la deducción. Finalmente, se concluye la inclusión de los conjuntos.*

Procedemos, entonces, a demostrar cada una de las tres implicaciones indicadas:

- Veamos que $B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \times B \subseteq A \times C$:
  Sea $(x,y) \in A \times B$ (fijo pero arbitrario). Tenemos, invocando la HIPÓTESIS: $B \subseteq C$, que

  $$x \in A \wedge y \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A \wedge y \in C \quad \Rightarrow \quad (x,y) \in A \times C\,.$$

  Luego, en vista que $(x,y) \in A \times B$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $A \times B \subseteq A \times C$.

- Probemos ahora que $A \times B \subseteq A \times C \quad \Rightarrow \quad B \times A \subseteq C \times A$:
  Sea $(x,y) \in B \times A$ (fijo pero arbitrario). Se tiene

  $$x \in B \wedge y \in A \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in A \times B \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in A \times C \quad \Rightarrow \quad (x,y) \in C \times A\,.$$

  Como $(x,y) \in B \times A$ es fijo pero arbitrario, se infiere que $B \times A \subseteq C \times A$.

- Establezcamos que $B \times A \subseteq C \times A \quad \Rightarrow \quad B \subseteq C$:
  Sea $x \in B$ (fijo pero arbitrario). Como $A \neq \emptyset$, $\exists\, z \in A$. De esta forma, tenemos

  $$(x,z) \in B \times A \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in C \times A \quad \Rightarrow \quad x \in C\,.$$

  De esta manera, siendo $x \in B$ fijo pero arbitrario, concluimos que $B \subseteq C$.

Finalmente, queda establecido así la EQUIVALENCIA planteada al principio.

Problema 2. Sobre $\mathbb{N}$ se define la relación $\mathcal{R}$ por

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N} \,:\, x\,\mathcal{R}\,y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \,\le\, y \quad \wedge \quad x \text{ e } y \text{ son pares}\,, \\ y \,\le\, x \quad \wedge \quad x \text{ e } y \text{ son impares}\,. \end{cases}$$

2.1) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden. **(10 puntos)**

Comentario general: *La mayoría tuvo claro cómo desarrollar esta parte. Quizás a algunos desarrollos le faltaron analizar con más cuidado los casos posibles.*

Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

- Establezcamos que $\mathcal{R}$ es Refleja: Sea $x \in \mathbb{N}$ (fijo pero arbitrario). Aquí notamos que sea x par o impar, se cumple $x \,\le\, x$. En consecuencia, dado que $x \in \mathbb{N}$ es fijo pero arbitrario, se cumple $\forall\, x \in \mathbb{N} \,:\, x\,\mathcal{R}\,x$, i.e. $\mathcal{R}$ es Refleja.
- Probemos ahora que $\mathcal{R}$ es Antisimétrica: Sean $x, y \in \mathbb{N}$ (fijos pero arbitrarios), tales que $x\,\mathcal{R}\,y \,\wedge\, y\,\mathcal{R}\,x$. La definición de $\mathcal{R}$ nos permite afirmar que x e y son ambos pares o impares a la vez.
  Si x e y son ambos pares, entonces $x \,\le\, y \,\wedge\, y \,\le\, x \quad \Rightarrow \quad x \,=\, y$.
  Si x e y son ambos impares, entonces $y \,\le\, x \,\wedge\, x \,\le\, y \quad \Rightarrow \quad y \,=\, x$.
  En vista que $x, y \in \mathbb{N}$ son fijos pero arbitrarios, hemos establecido que
  $\forall\, x, y \in \mathbb{N} \,:\, \big(x\,\mathcal{R}\,y \,\wedge\, y\mathcal{R}x \,\Rightarrow\, x \,=\, y\big)$, i.e. $\mathcal{R}$ es Antisimétrica.
- Veamos ahora que $\mathcal{R}$ es Transitiva: Sean $x, y, z \,\in\, \mathbb{N}$ (fijos pero arbitrarios), tales que $x\,\mathcal{R}\,y \,\wedge\, y\,\mathcal{R}\,z$. Como $x\,\mathcal{R}\,y$, entonces x e y son ambos pares o impares a la vez. Esto conduce a dos casos:
  Caso x e y son pares. En vista que $y\,\mathcal{R}\,z$, se deduce que z debe ser par. De esta manera, resulta $x \,\le\, y \,\wedge\, y \,\le\, z$, lo cual implica que $x \,\le\, z$, es decir $x\,\mathcal{R}\,z$.
  Caso x e y son impares. En vista que $y\,\mathcal{R}\,z$, se deduce que z debe ser impar. De esta manera, resulta $y \,\le\, x \,\wedge\, z \,\le\, y$, lo cual implica que $z \,\le\, x$, es decir $x\,\mathcal{R}\,z$.
  Siendo $x, y, z \in \mathbb{N}$ fijos pero arbitrarios, se ha deducido que
  $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N} \,:\, \big(x\,\mathcal{R}\,y \,\wedge\, y\,\mathcal{R}\,z \,\Rightarrow\, x\,\mathcal{R}\,z\big)$, i.e. $\mathcal{R}$ es Transitiva.

De esta forma, concluimos que $\mathcal{R}$ es una Relación de Orden. Por ello, en lo que sigue la denotaremos por $\lesssim$.

2.2) ¿Es esta relación de orden $\mathcal{R}$ total o parcial? Fundamente su respuesta apropiadamente. **(02 puntos)**

Comentario general: *El objetivo de la pregunta apunta a si tienen claro el concepto de relación de orden total y parcial.*

Considerando $1, 2 \,\in\, \mathbb{N}$, se nota que $1 \,\not\lesssim\, 2$ y $2 \,\not\lesssim\, 1$, i.e. existen elementos en $\mathbb{N}$ que no son comparables con respecto a la relación de orden $\lesssim$ definida. En consecuencia, estamos frente a una Relación de orden parcial.

2.3) Determinar, si existen, los elementos maximal, minimal, máximo y mínimo de $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$. **(08 puntos)**
Comentario general: *El objetivo aquí es medir si tienen asimilado los conceptos de maximal, minimal, máximo y mínimo de una relación de orden parcial. La mayoría desafortunadamente ha olvidado tener en cuenta la regla de la relación de orden dada, para poder aplicar correctamente la teoría y dar respuesta debidamente justificada.*

- Maximal: Notamos que 1 es un elemento maximal. Como 1 es impar, sólo se puede relacionar con números naturales impares. Así, para cualquier $a \in \mathbb{N}$ impar (¿por qué?), se tiene que $1 \,\le\, a$. Esto significa que $\forall\, a \in \mathbb{N}$, impar, se tiene $a \,\lesssim\, 1$. De existir $b \in \mathbb{N}$, impar, tal que $1 \,\lesssim\, b$, se tendría que $b \,\le\, 1$. Esto implica que $b = 1$, con lo cual se establece que 1 es elemento maximal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$.

  Veamos si existen otros elementos maximales. Supongamos ahora que $c \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ es otro maximal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$. Dos casos posibles:

CASO c es par. Como $c+2 \in \mathbb{N}$ es tal que $c \lesssim c+2$ (¿por qué?), se descarta c como candidato a ser elemento maximal.
CASO c es impar, de donde $1 \leq 3 \leq c$. Esto muestra que $c \lesssim 1$, con lo cual c también queda descartado como elemento maximal.

CONCLUSIÓN: 1 es el único elemento maximal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$.

- MÁXIMO: El único candidato a ser elemento máximo es 1 (¿por qué?) En vista que $2 \not\lesssim 1$, concluimos que 1 no puede ser máximo de $(\mathbb{N}, \lesssim)$. Por tanto, no existe elemento máximo en este caso.

- MINIMAL: Se observa que 2 es un elemento minimal. En efecto, como 2 es par, sólo se puede relacionar con números naturales pares. Esto conduce a afirmar que cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$, par (¿por qué?), se tiene que $2 \leq p$. Es decir $\forall\, p \in \mathbb{N}$, par, se cumple $2 \lesssim p$. De haber $q \in \mathbb{N}$, par, tal que $q \lesssim 2$, se tendría que $q \leq 2$. De esto se infiere que $q = 2$, estableciéndose que 2 es elemento minimal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$.

  VEAMOS SI EXISTEN OTROS ELEMENTOS MINIMALES. Supongamos ahora que $r \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$ es otro minimal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$. Dos casos posibles:
  CASO r es par, con $2 < r$. Esto descarta a r como candidato a ser elemento minimal.
  CASO r es impar. Como $r+2 \lesssim r$ (¿por qué?), entonces r queda descartado como candidato a ser elemento minimal.

  CONCLUSIÓN: 2 es el único elemento minimal de $(\mathbb{N}, \lesssim)$.

- MÍNIMO: El único candidato a ser elemento mínimo es 2 (¿por qué?) En vista que $1 \not\lesssim 2$, se concluye que 2 no puede ser mínimo de $(\mathbb{N}, \lesssim)$. Por tanto, no existe elemento mínimo en este caso.

Problema 3.
Considere los conjuntos ordenados $(\, D_{48}, |\,)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$, con los cuales se construye el conjunto ordenado $(D_{48} \times \mathbb{N}, \leq_{\texttt{lex}})$. Sea ahora $S := \{(2,2), (2,3), (3,2), (6,3), (6,1), (4,2)\} \subseteq D_{48} \times \mathbb{N}$.

3.1) De un bosquejo del diagrama de Hasse asociado a S con respecto a la relación de orden dada. (**05 puntos)**

Comentario general: *varios olvidaron respetar la definición de la relación lexicográfica o tomaron en cuenta otra relación, y erraron completamente.*

Primero, en vista que el conjunto S es finito, construimos el DIAGRAMA DE HASSE que representa a $(\, S, \leq_{\texttt{lex}}\,)$. Esto conduce a la Figura 1 (¡HACERLO!)

3.2) Determinar, si existen, el conjunto de mayorantes, conjunto de minorantes, supremo e ínfimo de S con respecto a $(D_{48} \times \mathbb{N}, \leq_{\texttt{lex}})$. Recuerde justificar apropiadamente sus hallazgos. **(10 puntos)**

Comentario general: *El objetivo aquí es medir si tienen asimilado los conceptos de conjunto de mayorantes, conjunto de minorantes, supremo e ínfimo de un subconjunto de una relación de orden parcial. La mayoría desafortunadamente ha olvidado tener en cuenta la regla de la relación de orden dada, para poder aplicar correctamente la teoría y dar respuesta debidamente justificada.*

En primer lugar, expresamos D_{48} por extensión.

$$D_{48} := \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}\,.$$

- COTAS SUPERIORES O MAYORANTES DE S: Del Diagrama de Hasse, $(a, b) \in D_{48} \times \mathbb{N}$ será cota superior de S si y sólo si

$$\begin{array}{c} (4,2) \leq_{\texttt{lex}} (a,b) \;\Leftrightarrow\; (4\,|\,a \,\wedge\, 4 \neq a) \vee (4 = a \,\wedge\, 2 \leq b) \\ \wedge \\ (6,3) \leq_{\texttt{lex}} (a,b) \;\Leftrightarrow\; (6\,|\,a \,\wedge\, 6 \neq a) \vee (6 = a \,\wedge\, 3 \leq b)\,. \end{array}$$

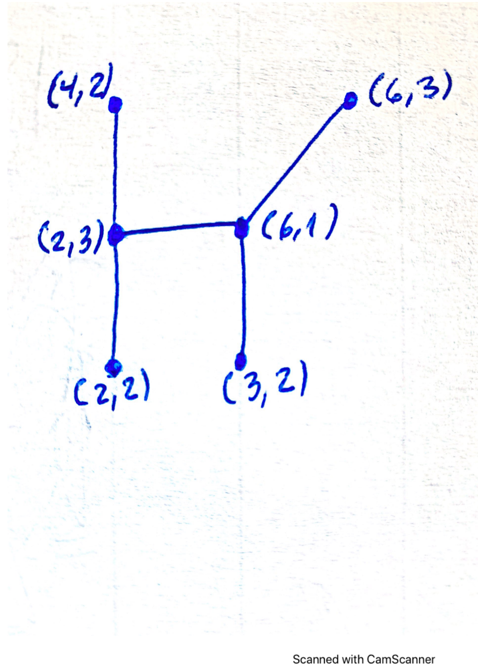

Figure 1: Diagrama de Hasse de $(\, S, \leq_{\texttt{lex}}\,)$

Esto nos conduce a buscar a tal que $4 \,|\, a \,\wedge\, 6 \,|\, a$, lo que implica que $12 \,|\, a$, pudiendo b tomar cualquier valor en $\mathbb{N}$. Esto permite establecer que el Conjunto Mayorante de S en $D_{48} \times \mathbb{N}$ viene dado por

$$C^{\texttt{Ma}} := \bigcup_{k \in \{1,2,4\}} \{(12\,k, b) \,:\, b \in \mathbb{N}\}\,.$$

- Supremo de S: En vista que $(12,1) \in C^{\texttt{Ma}}$ y $\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, b \in \mathbb{N} \,:\, (12,1) \leq_{\texttt{lex}} (12\,k, b)$, se concluye que S admite Supremo, y $\sup(S) = (12,1)$.
- Cotas Inferiores o Minorantes de S: Del Diagrama de Hasse, $(c,d) \in D_{48} \times \mathbb{N}$ será cota inferior de S si y sólo si

$$\begin{array}{c} (c,d) \leq_{\texttt{lex}} (2,2) \;\Leftrightarrow\; (c \,|\, 2 \,\wedge\, c \neq 2) \vee (c = 2 \,\wedge\, d \leq 2) \\ \wedge \\ (c,d) \leq_{\texttt{lex}} (3,2) \;\Leftrightarrow\; (c \,|\, 3 \,\wedge\, c \neq 3) \vee (c = 3 \,\wedge\, d \leq 2)\,. \end{array}$$

Esto nos conduce a buscar c tal que $c \,|\, 2 \,\wedge\, c \,|\, 3$, lo que implica que $c = 1$, pudiendo d tomar cualquier valor en $\mathbb{N}$. Esto permite establecer que el Conjunto Minorante de S en $D_{48} \times \mathbb{N}$ viene dado por

$$C_{\texttt{mi}} := \{(1,d) \,:\, d \in \mathbb{N}\}\,.$$

- Ínfimo de S: En vista que $\forall\, d \in \mathbb{N} \,:\, (1,d) \leq_{\texttt{lex}} (1, d+1)$, se desprende que $C_{\texttt{mi}}$ no tiene Elemento Máximo. En consecuencia, S no posee Ínfimo.

Problema 4. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida por:

$$\forall\, x, y \,\in\, \mathbb{Z} \,:\, x\,\mathcal{R}\,y \,\Leftrightarrow\, x^2 + x \,=\, y^2 + y\,.$$

4.1) Determine $[0]_{\mathcal{R}}$ explícitamente. **(04 puntos)**

Comentario general: *La mayoría supo aplicar la definición correctamente, resolviendo esta parte satisfactoriamente.*

Aplicando la definición de CLASE DE EQUIVALENCIA, resulta

$$[0]_{\mathcal{R}} \,=\, \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x\,\mathcal{R}\,0\} \,=\, \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 \,+\, x \,=\, 0\} \,=\, \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x(x+1) \,=\, 0\} \,=\, \{0, -1\}\,.$$

4.2) Determine explícitamente la partición de $\mathbb{Z}$ inducida por $\mathcal{R}$. **(06 puntos)**

Comentario general: *La mayoría alcanzó a obtener las clases de equivalencia existentes, pero tuvieron dificultades para expresar correctamente el conjunto cociente.*

Sea $m \in \mathbb{Z}$, fijo pero arbitrario. Invocando nuevamente la definición de CLASE DE EQUIVALENCIA, tenemos

$$\begin{aligned}[m]_{\mathcal{R}} &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x\,\mathcal{R}\,m\} \,=\, \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 \,+\, x \,=\, m^2 \,+\, m\} \,=\, \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x^2 \,+\, x \,-\, (m^2 \,+\, m) \,=\, 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, (x-m)\,(x+m+1) \,=\, 0\} \,=\, \{m, -(1+m)\} \,=\, [-(1+m)]_{\mathcal{R}}\,.\end{aligned}$$

De esta forma, se deduce que

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} \,=\, \Big\{\, \{m, -(1+m)\} \,:\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,\Big\}\,,$$

es la partición de $\mathbb{Z}$ inducida por $\mathcal{R}$.
