Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 5: Producto cartesiano de conjuntos. Relaciones. Relaciones funcionales. Dominio y recorrido de funciones reales

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas cuyo nivel de complejidad es superior al esperado en este curso, inténtalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Sean A y B los siguientes conjuntos, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) $|A \times B| = 8$.
   (b) $(a, a) \in (A \cup B) \times B$.
   (c) $(A \cap B) \times B = \emptyset$.
   (d) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   (e) $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^4 \cdot 2^2$.

2. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Decida si las siguientes relaciones entre A y B son funciones.

   (a) $f = \{(0, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$,
   (b) $g = \{(0, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$,
   (c) $h = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y \leq 5\}$.
   (d) $r = \{(x, y) \,:\, x \in A \,\wedge\, y \in B \,\wedge\, x + y = 5\}$.

3. Represente gráficamente las siguientes relaciones:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, xy \text{ es par}\}$.
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, xy = 0\}$.
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = x\} \times \{x \in \mathbb{N} \,:\, x^2 = x\}$.
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, y = |x|\}$.

   Decida, justificadamente, si son o no funciones.

4. Determine dominio y recorrido de las siguientes funciones.

   (a) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (b) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que $x \mapsto 1$.
   (c) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$.
   (d) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = |x|$.
   (e) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$.

5. Determine el recorrido de las siguientes funciones.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{, si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{, si } n \text{ es impar.} \end{cases}$
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(m) = 2m + 1$.

2. Problemas intermedios

1. Represente gráficamente, en el plano cartesiano, los siguientes productos cartesianos:

   (a) $\mathbb{N} \times \{2n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) $[-1, 1] \times \{0, 1\}$.

   (c) $[-1, 1] \times [0, 1]$.

   (d) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times \mathbb{N}$.

2. Represente gráficamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

   (a) $X = [-1, 3] \times [0, 2]$, $Y = [0, 3] \times [1, 4]$,

   (b) $X = [1, 3] \times [1, 3]$, $Y = [2, 4] \times [2, 4]$.

   En cada caso represente además los conjuntos $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.

3. Represente gráficamente las siguientes relaciones:

   (a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, xy^2 = 1\right\}$.

   (b) $\left\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,:\, \dfrac{ab}{3} = 1\right\}$,

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,:\, x^2 - y = 16\}$,

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x = |y|\}$,

   (e) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x^2 = y^2\right\}$.

   (f) $\left\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, a^2 + 3b^2 = 2\right\}$,

   (g) **(A)** $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, |x| + |y| = 1\}$,

   (h) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, \text{máx}\{|x|, |y|\} = 1\}$.

   Decida, justificadamente, si son o no funciones.

4. Determine dominio y recorrido de las siguientes funciones.

   (a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x + 1}{x - 2}}$.

   (b) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

   (c) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{|1 - x|}$,

   (d) $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{1}{|1 - x^2|}$,

   (e) **(A)** $h : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$,

   (f) $k : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $k(x) = \sqrt[3]{2 - x^4}$,

   (g) $m : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + |x|}}$.

   (h) **(A)** $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 1$.

5. ¿Cuál es el recorrido de las siguientes funciones?

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con $f(x) = |x| + 2$.

   (b) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{Z}$ tal que $f(X) = |X|$.

   (c) $f : [2, 3] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x - 1$.

   (d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,

   (e) $h : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

   (f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

   $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{si } n \text{ es par}, \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

(g) **(A)** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} 2(n+1), & \text{si } n \geq 0, \\ -(2n+1), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 2x, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(i) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{si } x < 0, \\ x^2 - 2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

6. Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si y solo si $\forall\, a, b \in A \,:\, f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b$. Una función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si y solo si $\forall\, b \in B \,:\, \exists\, a \in A \,:\, f(a) = b$.

   Analice si las siguientes relaciones entre A y B son relaciones funcionales. Si lo son, decida si son inyectivas y si son sobreyectivas.

   (a) $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ y $f = \{(p, 0), (q, 1), (r, 2), (s, 2)\}$.
   (b) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f = \{(0, 3), (1, 3), (2, 4), (4, 2)\}$.
   (c) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f = \{(a, 2), (b, 2), (c, 4), (d, 5)\}$.
   (d) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f = \{(a, 2), (b, 2), (c, 4), (c, 5), (d, 5)\}$.

   Observación: Analizar si las funciones en este problema son inyectivas o sobreyectivas no es un problema tipo intermedio en general, se considera intermedio en este momento porque las definiciones de inyectividad y sobreyectividad aún no se han visto en algunas secciones.

3. Problemas avanzados

1. Represente gráficamente los productos cartesianos $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$? ¿Es $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

   Observación: Puede utilizar la representación gráfica de los productos cartesianos dados para reconocer qué pares pertenecen a su unión y qué pares pertenecen a la intersección.

2. **(A)** Un muro, de 10 pies de altura, se encuentra a 5 pies de un edificio. Una escalera, apoyada al muro, toca el edificio, como se muestra en la figura 1. Exprese la longitud de la escalera como una función de x, la distancia entre el muro y uno de sus extremos.

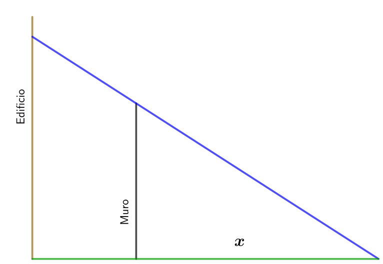

Figura 1: Figura asociada a problema 2.

3. El producto de dos números reales positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los dos números.

4. Observe la figura 2. Escriba una función para el área del rectángulo en función de $a \in [0, 4]$.

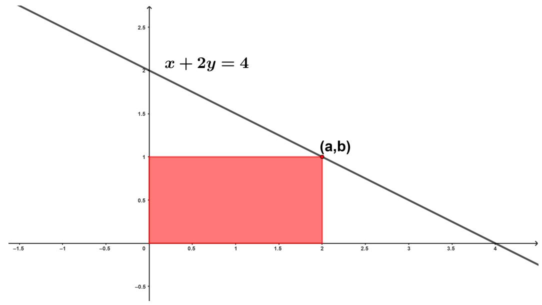

Figura 2: Figura asociada a problema 4.

5. A 30 pies de una farola que tiene 25 pies de altura se planta un árbol. Determine una función para describir la longitud l de la sombra del árbol en función de su altura $x \in [0, 25[$. Vea la figura 3.

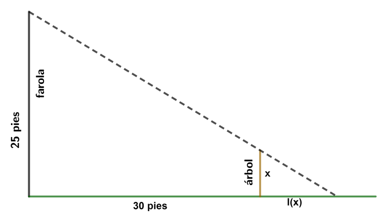

Figura 3: Figura asociada a problema 5.

6. Observe la figura 4. Escriba una función para el área de la región sombreada en función de $x \in [0, 5]$.

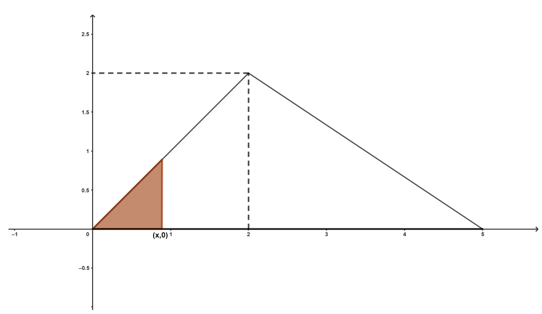

Figura 4: Figura asociada a problema 6.