UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA

CERTAMEN 1 — Mecánica de Fluidos

Semestre 2018-A

Profesor: Fernando Betancourt C.
Ayudantes: Vicente Bustamante V., Jaime Manríquez R.

Ejercicio 1. Considere un estanque de peso masa M que descansa sobre una superficie rugosa. Por la izquierda entra un flujo de un fluido ideal de densidad ρ a una velocidad V_{in} por un orificio de diámetro D_{in} de manera horizontal, y sale por un orificio de diámetro D_{out} con un ángulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ con respecto a la dirección de entrada. Asuma flujo estacionario e incompresible. Desprecie el peso del volumen de fluido dentro del estanque.

a) Deduzca una expresión analítica para el coeficiente de roce estático μ_e necesario para que el estanque no deslice.

b) Analice el caso asintótico $M \to 0$. ¿Qué puede concluir?

c) Para ambos casos anteriores, ¿qué sucede cuando $\theta \to 0$?

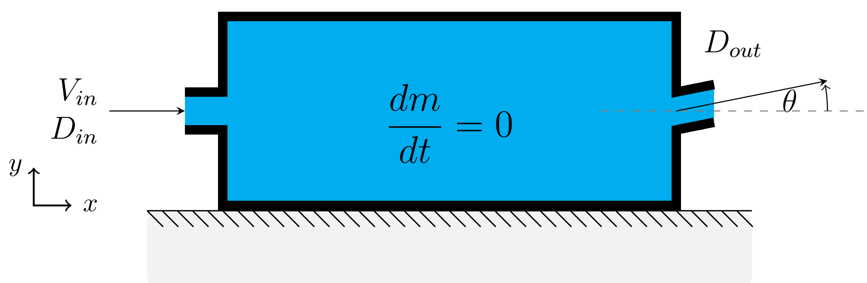
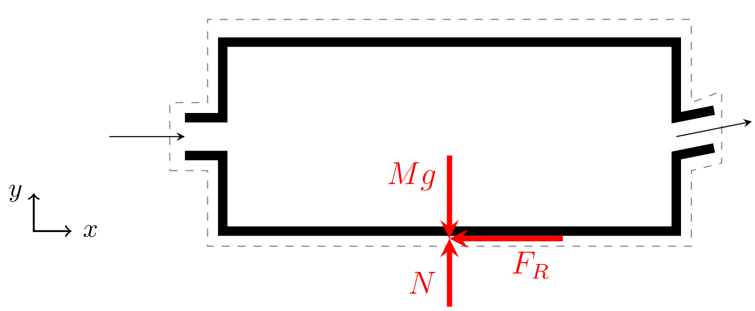


Figura 1: Estanque sobre superficie rugosa

Solución.

a) Tomando un volumen de control alrededor del estanque sin considerar la superficie, tenemos el siguiente DCL:



donde N es la fuerza normal de la superficie sobre el volumen de control, F_R es la fuerza de roce y Mg es el peso del estanque.

De la conservación de masa se obtiene

$$0 = \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} \tag{1}$$

Por tanto podemos considerar $\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \dot{m}$.

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\rho V_{out} \pi D_{out}^2}{4} &= \frac{\rho V_{in} \pi D_{in}^2}{4} \\ \Rightarrow \frac{V_{in}}{V_{out}} &= \frac{D_{out}^2}{D_{in}^2} \end{aligned} \tag{2}$$

De la conservación de momentum en la dirección, asumiendo flujo estacionario incompresible de un fluido ideal, se tiene:

$$\sum \vec{F}_x = \dot{m} V_{out} \cos(\theta) - \dot{m} V_{in} \tag{3}$$

$$\sum \vec{F}_y = \dot{m} V_{out} \sin(\theta) \tag{4}$$

Del DCL se tiene que $\sum \vec{F}_x = -F_R$ y $\sum \vec{F}_y = N - Mg$. Suponiendo que el estanque está a punto de deslizar, se tiene que

$$-F_R = -\mu_e N \tag{5}$$

que, en conjunto con las ecuaciones (3) y (4), implican que

$$\begin{aligned} \dot{m} V_{out} \cos(\theta) - \dot{m} V_{in} &= -\mu_e \left(\dot{m} V_{out} \sin(\theta) + Mg \right) \\ \Leftrightarrow \mu_e &= \frac{V_{in} - V_{out} \cos(\theta)}{V_{out} \sin(\theta) + Mg/\dot{m}} \end{aligned} \tag{6}$$

b) Cuando $M \to 0$, la expresión (6) se convierte en:

$$\begin{aligned} \mu_e &= \frac{V_{in} - V_{out} \cos(\theta)}{V_{out} \sin(\theta)} \\ &= \frac{D_{out}^2 / D_{in}^2 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} && \text{(A partir de (2))} \\ &= \frac{D_{out}^2 - D_{in}^2 \cos(\theta)}{D_{in}^2 \sin(\theta)} && (7) \end{aligned}$$

Una observación que puede hacerse es que, cuando la masa del estanque es despreciable, el coeficiente de roce está dado por la geometría del estanque (diámetros y ángulo), independiente de las características del flujo (velocidad y densidad).

c) Para el primer caso, cuando $\theta \to 0$, la expresion (6) se convierte en:

$$\mu_e = \frac{\dot{m} V_{in}}{Mg} \left(1 - \frac{D_{in}^2}{D_{out}^2} \right)$$

De aquí notamos que si $D_{in} > D_{out}$, entonces la fuerza de roce F_R tiene sentido opuesto al propuesto al comienzo (en este caso sería hacia la derecha). Además, si $D_{in} = D_{out}$ se tiene $\mu_e = 0$, ya que el sistema siempre se encuentra en equilibrio si la velocidad de entrada iguala a la de salida.

Para el segundo caso, cuando $M \to 0$ y $\theta \to 0$, de la expresión (7) se tiene que, para $D_{in} \neq D_{out}$

$$\lim_{\theta \to 0} \mu_e = +\infty$$

Es decir, el sistema no puede mantenerse en equilibrio para estas condiciones.

Sin embargo, para el caso $D_{in} = D_{out}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \mu_e &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Igual que en el caso anterior, ésto quiere decir que el sistema siempre está en equilibrio.

Ejercicio 2. Considere un estanque lleno de agua con dos compuertas de peso despreciable a los lados, sujetas por los pasadores A y B respectivamente.

La compuerta de la izquierda es plana, mientras que la derecha es un cuarto de circunferencia de radio 1 m. En sus extremos se unen por un cable que pasa por una polea ideal. Calcule la carga P necesaria para mantener el sistema en equilibrio. Asuma grosor unitario para ambas compuertas.

Datos: $\gamma_w = 9790\,\mathrm{N\,m^{-3}}$, $p_{atm} = 101\,325\,\mathrm{N\,m^{-2}}$

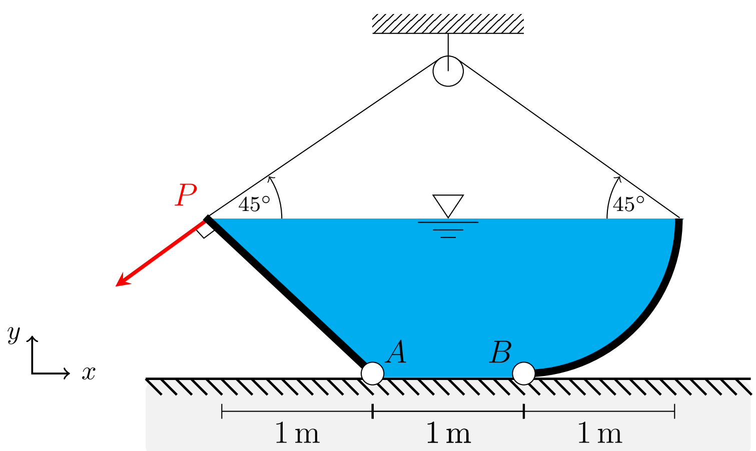
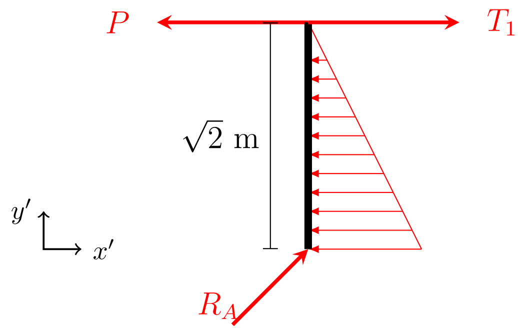


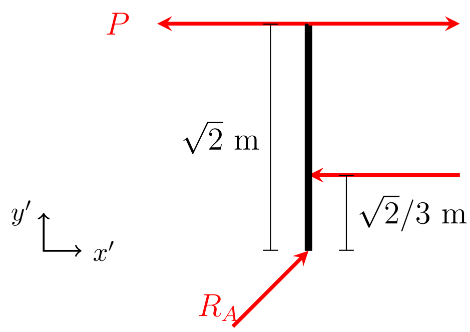
Figura 2: Estanque con dos compuertas

Solución. Dado que las compuertas están abiertas al ambiente, los efectos de la presión atmosférica se anulan par a par, por lo que se excluye del análisis.

De la geometría del problema obtenemos que los cables están perpendiculares a la línea recta que une los pasadores con los extremos de su respectiva compuerta. Por tanto, considerando un sistema de ejes coordenados rotados 45° en sentido anti-horario, el DCL de cada compuerta queda como:



La carga distribuida corresponde a la fuerza hidrostática sobre la compuerta. Por lo tanto, conocemos su magnitud y, como resultado básico de mecánica, sabemos que actúa a un tercio de la longitud desde el punto bajo de la compuerta. Así, el sistema equivalente es



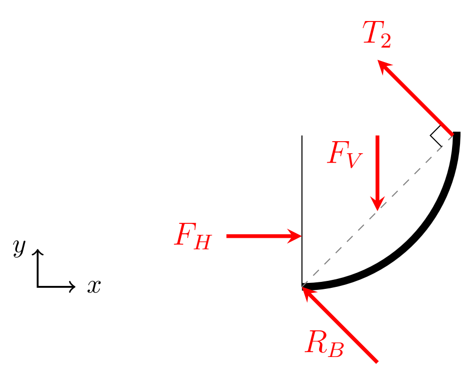
con

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma_w h_{CG} A \\ &= \gamma_w \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(45°) \left(\sqrt{2} \cdot 1\right) \\ &= \frac{\gamma_w}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Calculando la sumatoria de momentos con respecto al punto A, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{2}P - \sqrt{2}T_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}F_1 \\ &= \sqrt{2}P - \sqrt{2}T_1 + \frac{\gamma_w}{3} \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado, considerando los ejes usuales, el DCL (simplificado a las fuerzas equivalentes) de la segunda compuerta es:



donde F_H es la componente horizontal de la fuerza hidrostática, que se calcula sobre la proyección horizontal de la compuerta. Así,

$$\begin{aligned} F_H &= \gamma_w h_{CG} A \\ &= \gamma_w \frac{1}{2}(1 \cdot 1) \\ &= \frac{\gamma_w}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

que actúa a un tercio del punto B.

Por otro lado, la componente vertical F_V se calcula como una fuerza equivalente al peso del volumen de agua sobre la compuerta. Así,

$$\begin{aligned} F_V &= \gamma_w V_w \\ &= \gamma_w (\pi 1^2) \cdot 1 \\ &= \gamma_w \pi \end{aligned} \tag{4}$$

que actúa a una distancia $\bar{x}$ del punto B, dada por la componente x del centroide del volumen de agua. Para un cuarto de círculo, ésto es:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (1)}{3\pi} \tag{5}$$

Calculando sumatoria de momentos con respecto al punto B, recordando que el brazo de la tensión T_2 con respecto a este punto es $\sqrt{2}$ m, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{2}T_2 - \frac{1}{3}F_H - \bar{x}F_V \\ &= \sqrt{2}T_2 - \frac{1}{6}\gamma_w - \frac{4}{3}\gamma_w \\ &= \sqrt{2}T_2 - \frac{3\gamma_w}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Dado que la polea es ideal, se tiene que

$$T_1 = T_2 \tag{7}$$

Por tanto, de las ecuaciones (2) y (6) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{2}P - \frac{3\gamma_w}{2} + \frac{\gamma_w}{2} \\ &= \sqrt{2}P - \frac{\gamma_w}{2} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{\gamma_w}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Con $\gamma_w = 9790$ se obtiene $P \approx 3461\,\mathrm{N}$.

Ejercicio 3. El manómetro inclinado de la figura contiene Tetracloruro de Carbono (CCl_4). Inicialmente la diferencia de presiones entre los tubos, que contienen Salmuera (SG = 1.1) es cero. Luego, la diferencia de presiones en el tubo es de 0.1 [psi]. Debido a ésto, la diferencia de alturas medidas es de 12 [in]. Determine el ángulo de inclinación θ.

Datos: $\gamma_w = 62.4\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}$, $\gamma_{\text{CCl}_4} = 99.5\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}$

Indicación: Marque claramente la altura de referencia $z = 0$.

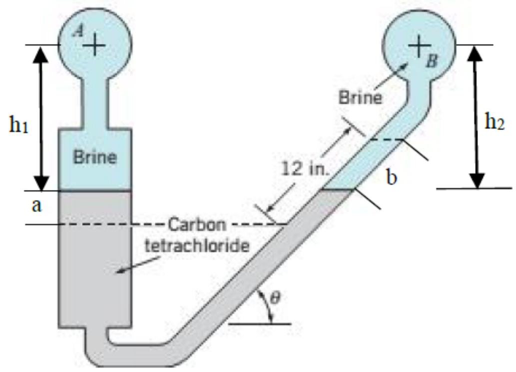


Figura 3: Manómetro con dos fluidos

Solución. Tomando como referencia la línea isobárica de la situación inicial se aplica la relación hidrostática para la situación inicial:

$$\begin{aligned} P_A - P_1 &= -\gamma_{\text{sal}}(h_1 - 0) \\ P_1 - P_2 &= -\gamma_{\text{CCl}_4}(0 - 0) \\ P_2 - P_B &= -\gamma_{\text{sal}}(0 - h_2) \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones se obtiene:

$$P_A - P_B = \gamma_{\text{sal}}(h_1 - h_2) \tag{1}$$

Para la situación final:

$$\begin{aligned} P'_A - P_1 &= -\gamma_{\text{sal}}(h_1 - (-a)) \\ P_1 - P_2 &= -\gamma_{\text{CCl}_4}(-a - b \cdot \sin(\theta)) \\ P_2 - P_B &= -\gamma_{\text{sal}}(b\sin(\theta) - h_2) \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones se obtiene:

$$P'_A - P_B = \gamma_{\text{sal}}(h_1 + a + b\sin(\theta) - h_2) + \gamma_{\text{CCl}_4}(a + b\sin(\theta)) \tag{2}$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} P_A - P'_A &= \gamma_{\text{sal}}(a + b\sin(\theta)) - \gamma_{\text{CCl}_4}(a + b\sin(\theta)) \\ &= (a + b\sin(\theta)) \cdot (\gamma_{\text{sal}} - \gamma_{\text{CCl}_4}) \end{aligned} \tag{3}$$

De la figura se obtiene la relación (en pulgadas):

$$12 = \frac{a}{\sin(\theta)} + b$$

De aquí se despeja una de las variables. En nuestro caso se despejará a en función de b. Así,

$$a = 12\sin(\theta) - b\sin(\theta) \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} P_A - P'_A &= (12\sin(\theta) - b\sin(\theta) + b\sin(\theta)) \cdot (\gamma_{\text{sal}} - \gamma_{\text{CCl}_4}) \\ &= 12\sin(\theta) \cdot (\gamma_{\text{sal}} - \gamma_{\text{CCl}_4}) \\ \Rightarrow \sin(\theta) &= \frac{P_A - P'_A}{12 \cdot (\gamma_{\text{sal}} - \gamma_{\text{CCl}_4})} \end{aligned}$$

Reemplazando los datos (cuidando las unidades de medida), se obtiene:

$$\sin(\theta) = \frac{-0.1 \left[\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}\right] \cdot 144 \left[\frac{\text{in}^2}{\text{ft}^2}\right]}{12[\text{in}] \cdot \frac{1}{12}\left[\frac{\text{ft}}{\text{in}}\right] \cdot \left(1.1 \cdot 62.4 \left[\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}\right] - 99.5 \left[\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}\right]\right)}$$

Finalmente,

$$\sin(\theta) = 0.467 \Rightarrow \theta = \arcsin(0.467) = 27.81^\circ$$