Problema 1. *Sea* $K := [-1,1]^2$. *Definimos* $\mathbb{Q}_1(K) := \{p : \ p(x,y) = p(x)q(y), \quad (x,y) \in K\}$ *donde* p *y* q *son polinomios de grado a lo más uno en las variables* x *e* y *respectivamente. Notar que dim* $\mathbb{Q}_1(K) = 4$.
Sea $\mathcal{N} := \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

a) *Suponga que los elementos de* $\mathcal{N}$ *están determinados por la evaluación de* $p \in \mathbb{Q}_1(K)$ *en los vértices de* K. *Muestre que* $(K, \mathbb{Q}_1(K), \mathcal{N})$ *es un elemento finito.*

b) *Construir las bases nodales* $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ *de* $\mathbb{Q}_1(K)$.

c) *Suponga que los elementos de* $\mathcal{N}$ *están determinados por la evaluación de* $p \in \mathbb{Q}_1(K)$ *en los* ***puntos medios*** *de los lados de* K. *Muestre que* $(K, \mathbb{Q}_1(K), \mathcal{N})$ ***no*** *es un elemento finito.*

Demostración. *a)* Dado que K es cerrado, no vacio y de frontera suave a trozos, y que dim $\mathbb{Q}_1(K) = 4$, solo resta probar la unisolvencia del elemento, para esto, se define $v_1 := (1,1)$, $v_2 := (-1,1)$, $v_3 := (-1,-1)$ y $v_4 := (1,-1)$ los vértices de K. Sea $p \in \mathbb{Q}_1(K)$, es decir, existen $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que $p(x,y) = (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 y)$, además, asuma que $N_i(p) = 0$ para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, con esto se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} N_1(p) = p(v_1) &= (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = 0 \\ N_2(p) = p(v_2) &= (a_0 - a_1)(b_0 + b_1) = 0 \\ N_3(p) = p(v_3) &= (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = 0 \\ N_2(p) = p(v_4) &= (a_0 + a_1)(b_0 - b_1) = 0 \end{aligned}$$

del cual se deduce que $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$. Por tanto $p \equiv 0$, teniendo así la unisolvencia del elemento.

b) Se propone como base nodal al conjunto $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ donde

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= \frac{(x+1)(y+1)}{4}, \\ \phi_2(x,y) &= \frac{(1-x)(y+1)}{4}, \\ \phi_3(x,y) &= \frac{(x-1)(y-1)}{4}, \\ \phi_4(x,y) &= \frac{(x+1)(1-y)}{4}. \end{aligned}$$

Por construcción $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$.
Veamos que $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ es una base de $\mathbb{Q}_1(K)$. Dado que $\phi_j \in \mathbb{Q}_1(K)$ para todo $j \in \{1,2,3,4\}$, se tiene que $\langle\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}\rangle \subset \mathbb{Q}_1(K)$. Por otro lado, sea $p \in \mathbb{Q}_1(K)$, se define $p_I \in \langle\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}\rangle$ de la forma

$$p_I(x,y) = \sum_{j=1}^{4} N_j(p)\phi_j(x,y)$$

A continuación veremos que $p_I \equiv p$. Sea ξ un polinomio de dos variables en K de grado a lo más 2 definido por

$$\xi(x,y) := p(x,y) - p_I(x,y), \quad \forall (x,y) \in K$$

Por la propiedades intrínsecas de los espacios vectoriales, dado que p y p_I son elementos de $\mathbb{Q}_1(K)$, se tiene que $\xi \in \mathbb{Q}_1(K)$, además,

$$N_i(\xi) = 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}.$$

Por la unisolvencia del elemento $\xi \equiv 0$, es decir,

$$p(x,y) = p_I(x,y) = \sum_{j=1}^{4} N_j(p)\phi_j(x,y), \quad (x,y) \in K.$$

Luego, $\mathbb{Q}_1(K) \subset \langle\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}\rangle$. Concluyendo así la igualdad. deseada.
Por tanto, $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ es una base nodal de $\mathbb{Q}_1(K)$.

c) Considere el polinomio $p(x,y)=xy$, es claro que $p\in\mathbb{Q}_1(K)$, además

$$\begin{aligned}N_1(p)&=p(0,1)=0,\\ N_2(p)&=p(-1,0)=0,\\ N_3(p)&=p(0,-1)=0,\\ N_4(p)&=p(1,0)=0.\end{aligned}$$

Como existe un polinomio no nulo en $\mathbb{Q}_1(K)$ el cual cumple que se anula en los puntos medios de los lados de K, se deduce que el elemento no cumple con la unisolvecia y por tanto $(K,\mathbb{Q}_1(K),\mathcal{N})$ no es un elemento finito.

□

Problema 2. *Sea* $\hat{K}=\{\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}/h:\quad \boldsymbol{x}\in K\subset\mathbb{R}^n\}$*, donde* h *es el diámetro de* K*. Sean además* $u\in W_p^m(K)$*,* $p\geq 1$ *y* k *tal que* $0\leq k\leq m$*. Denotando por* $\hat{u}(\hat{\boldsymbol{x}}):=u(\boldsymbol{x})$*, probar que*

$$|\hat{u}|_{W_p^k(\hat{K})}=h^{k-n/p}\,|u|_{W_p^k(K)}\,. \tag{1}$$

Demostración. Sea $v\in W_p^m(K)\cap C^\infty(K)$, Mediante principio de inducción matemática sobre el orden de diferenciación, se puede probar que

$$\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})=\frac{1}{h^k}\partial^\alpha\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\iff\partial^\alpha\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})=h^m\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})$$

donde α es un multi indice tal que $|\alpha|=m$. En efecto, para $|\alpha|=1$, usando regla de la cadena

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_j}\frac{\partial\hat{x}_j}{\partial x_i}=\frac{1}{h}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}_i}$$

Suponga que para $|\alpha|=m-1$, se tiene que

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha v(\boldsymbol{x})=h^{1-m}\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}^\alpha\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

Para $|\alpha|=m$, sean β y γ multi indices tales que $|\beta|=1$ y $|\gamma|=m-1$, y que $\alpha=\beta+\gamma$ luego

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha v(\boldsymbol{x})=\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta\partial_{\boldsymbol{x}}^\gamma v(\boldsymbol{x})=h^{1-m}\partial_{\boldsymbol{x}}^\beta\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}^\gamma\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})=h^{1-m}\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}^\beta\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}^\gamma\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})h^{-1}=h^{-m}\partial_{\hat{\boldsymbol{x}}}^\alpha\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

Probando así lo deseado.

Con lo anterior, y usando el teorema del cambio de variable para integrales en $\mathbb{R}^n$, se deduce que

$$\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p=\int_{\hat{K}}|\partial^\alpha\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})|^p\;\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}=\int_K\left|h^k\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})\right|^p h^{-n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=h^{kp-n}\int_K|\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=h^{kp-n}\,\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^p(K)}^p$$

Luego, para $0\leq k\leq m$, se tiene

$$|\hat{v}|_{W_p^k(\hat{K})}=\left(\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p\right)^{1/p}=\left(h^{kp-n}\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha v\|_{L^p(K)}^p\right)^{1/p}=h^{k-n/p}\,|v|_{W_p^k(K)} \tag{2}$$

Lo anterior es valido para $1\leq p<\infty$. Si $p=\infty$, entonces para α un multi indice tal que $|\alpha|=k$, se tiene que

$$\lim_{p\to\infty}\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}=\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})}\,,$$

pero

$$\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}=h^{k-n/p}\,\|\partial^\alpha v\|_{L^p(K)}\,,$$

entonces,

$$h^k\,\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}=\lim_{p\to\infty}h^{k-n/p}\,\|\partial^\alpha v\|_{L^p(K)}=\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})}$$

de esta forma se tiene

$$|\hat{v}|_{W_\infty^k(\hat{K})}=\max_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})}=\max_{|\alpha|=k}h^k\,\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}=h^k\max_{0<|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}=h^k\,|v|_{W_\infty^k(K)}$$

Para $u \in W_p^m(K)$, por densidad, existe una sucesión $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset W_p^m(K) \cap C^\infty(K)$, tal que

$$\|u - u_i\|_{W_p^m(K)} \longrightarrow 0$$

Además, de (2) es directo notar que

$$|\hat{u}_i - \hat{u}_j|_{W_p^k(\hat{K})} = h^{kp-n} |u_i - u_j|_{W_p^k(K)} \leq \max\{h^{kp-n}, 1\} \|u_i - u_j\|_{W_p^m(K)} \longrightarrow 0$$

con $0 \leq k \leq m$. De lo anterior se deduce que $\{\hat{u}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W_p^k(\hat{K})$ y como este espacio es Banach, entonces existe un $\hat{u} \in W_p^k(\hat{K})$ tal que

$$\|\hat{u} - \hat{u}_i\|_{W_p^k(\hat{K})} \longrightarrow 0$$

Como,

$$|\hat{u}_i|_{W_p^k(\hat{K})} = h^{k-n/p} |u_i|_{W_p^k(K)}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. tomando límite, se obtiene

$$|\hat{u}|_{W_p^k(\hat{K})} = h^{k-n/p} |u|_{W_p^k(K)} .$$

Análogamente, se deduce para $u \in W_\infty^m(K)$

$$|\hat{u}|_{W_\infty^k(\hat{K})} = h^k |u|_{W_\infty^k(K)} .$$

□

Problema 3. *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que su diámetro es proporcional a h, con $0 < h \leq 1$ y $\mathcal{P}$ un espacio de dimensión finita $\mathcal{P} \subset W_p^l(K) \cap W_q^m(K)$, con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $0 \leq m \leq l$. Demostrar que existe $C > 0$, independiente de h tal que*

$$\|v\|_{W_p^l(K)} \leq C h^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{W_q^m(K)} \quad \forall v \in \mathcal{P}. \tag{3}$$

Demostración. Sea $v \in \mathcal{P}$, $1 \leq p, q < \infty$ y sea $\rho := \text{diam}(K)$. Suponga que $m = 0$, por equivalencia de normas

$$\|\hat{v}\|_{W_\infty^l(\hat{K})} \leq \hat{C} \|\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})} ,$$

por lo hecho en el **Problema 2**

$$|v|_{W_p^j(K)} \rho^{j-n/p} \leq \hat{C} \|v\|_{L^q(K)} \rho^{-n/q}, \tag{4}$$

para todo $0 \leq j \leq l$, usando la proporcionalidad de h con el diámetro de K, se obtiene

$$|v|_{W_p^j(K)} \leq \hat{C} h^{-j+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)} , \tag{5}$$

para todo $0 \leq j \leq l$. Dado que $0 < h \leq 1$, entonces

$$\|v\|_{W_p^j(K)} \leq |v|_{W_p^j(K)} . \tag{6}$$

Juntando (5) con (6), se obtiene

$$\|v\|_{W_p^j(K)} \leq \hat{C} h^{-j+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)} . \tag{7}$$

Considerando $j = l$, se deduce

$$\|v\|_{W_p^l(K)} \leq \hat{C} h^{-j+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)} ,$$

lo que demuestra lo pedido para $m = 0$.

Considere el caso $0 < m \leq l$. Para $l - m \leq k \leq l$. Sea α, β y γ multi indices tales que $|\alpha| = k$, $|\beta| = l - m$ y $|\gamma| = k + m - l$, luego

$$\|\partial^\alpha v\|_{L^p(K)} = \left\|\partial^\beta \partial^\gamma v\right\|_{L^p(K)} \leq \|\partial^\gamma v\|_{W_p^{l-m}(K)}$$

por lo demostrado en le caso $m = 0$, se obtiene

$$\|\partial^\alpha v\|_{L^p(K)} \leq \hat{C} h^{-(l-m)+n/p-n/q} \|\partial^\gamma v\|_{L^q(K)} \leq \hat{C} h^{-(l-m)+n/p-n/q} \|\partial^\gamma v\|_{W_q^{k+m-l}(K)},$$

y como α era arbitrario, se deduce

$$|v|_{W_p^k(K)} \leq C h^{-(l-m)+n/p-n/q} |v|_{W_q^{k+m-l}(K)}, \tag{8}$$

para todo $k \in [l-m, l]$. En particular, para m, se obtiene

$$|v|_{W_p^k(K)} \leq C h^{-(l-m)+n/p-n/q} \|v\|_{W_q^m(K)},$$

para todo $k \in [l-m, l]$. Reemplazando $j = l - m$ en (7)

$$\|v\|_{W_p^{l-m}(K)} \leq \hat{C} h^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)}$$

luego

$$\|v\|_{W_p^l(K)} \leq \|v\|_{W_p^{l-m}(K)} + \sum_{k=l-m}^{l} |v|_{W_p^k(K)} \leq \tilde{C} h^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{W_q^m(K)}.$$

Con $\tilde{C}$ una constante positiva que depende de $\hat{K}, p, q, l$ y la constante de proporcionalidad. $\square$