Aplicaciones de la derivada (parte 1)

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Formas indeterminadas

Problema. ¿Cómo calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$?

Recordemos que las formas indeterminadas son las expresiones del tipo

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \text{ y } 1^\infty$$

en el límite, las cuales no se pueden determinar a menos de operaciones algebraicas en el límite u otras *técnicas*.

Regla de L'Hôpital

Teorema (L'Hôpital).

Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables con $g'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x \to a^+} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ o $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right] = L \implies \lim_{x \to a^+} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = L$$

donde L puede ser un número real (si existe el límite) o bien L puede ser $\pm\infty$ (si el límite diverge).

Dem. La demostración requiere *Teorema del Valor Medio Generalizado* que se verá en una próxima clase.

Regla de L'Hôpital

Observaciones:

- ♢ El teorema también es válido para los límites $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}$.
- ♢ Toda forma indeterminada se puede escribir a la forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ o $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ mediante operaciones algebraicas u composiciones de funciones.
- ♢ Algunas transformaciones requieren algunas propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural, como que son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Además, dada una función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ésta se puede escribir como

$$f(x) = \ln(e^{f(x)}) \qquad \forall x \in Dom(f),$$

y si el recorrido de f es $\mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{\ln(f(x))}$.

Regla de L'Hôpital

Ejemplos

Consideramos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty.$$

Calcular los siguientes límites:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\cot(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-\cos(x))^x$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$

Regla de L'Hôpital

Ejemplos

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ es del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Luego, usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))^x$ es del tipo (0^0). Del hecho que $1-\cos(x) > 0$ $\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$ y la continuidad de e^x en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))^x = e^{[\lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos(x)]}$$

Notar que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\cos(x))}{\frac{1}{x}}$ es del tipo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Usando la regla de L'Hôpital, se obtiene que este límite es 0, y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))^x = e^0 = 1.$$

Observaciones:

- La derivada de $\ln(x)$ en 0 no existe, pero $\ln(x)$ es derivable en $]0,+\infty[$ (por lo que en el ejercicio 3 se puede usar el teorema).
- La función $f(x) = x^x$ tiene dominio y recorrido $]0,+\infty[$, por lo que tiene sentido considerar

$$x^x = e^{x\ln(x)} \qquad x > 0.$$

- El límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)+x$ no existe porque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ no existe. Luego, no se puede usar Regla de L'Hôpital para el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{x}$.

Variaciones relacionadas

Problema: *Un balón esférico se infla mediante un compresor, de manera que su volumen y radio están dados, respectivamente, por las funciones* $V(t)$ *y* $r(t)$ *respecto a la variable de tiempo* t*. ¿Cómo se relaciona el aumento de volumen con el aumento del radio?*

Observaciones:

1. Las variables V y r dependen de t.
2. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ es la fórmula del volumen de una esfera de radio r. Luego, la pelota del problema tiene volumen

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3 \qquad (*)$$

3. **Relación entre** $\dfrac{dV}{dt}$ **y** $\dfrac{dr}{dt}$: derivamos $(*)$ respecto a t

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi[r(t)]^2\frac{dr}{dt}(t) \qquad (**)$$

$(**)$ nos permite calcular una variación mediante la otra.

4. Si el volumen depende del radio y el radio del tiempo, por Regla de la cadena se establece la relación

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \implies \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Ejemplo. Si una pelota se infla a razón de $4\ L/min$, ¿con qué rapidez crece su radio cuando éste es de 10 cm?

Solución. Primero, notar que $4L/min = 4000cm^3/min$. De $(**)$, la variación de su radio está dada por

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{\frac{dV}{dt}(t)}{4\pi(r(t))^2} = \frac{4000}{4\pi r^2(t)}.$$

Variaciones relacionadas

En el instante t_0 tal que $r(t_0) = 10$,

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18 \frac{cm}{min}.$$

que es la rapidez con crece el radio cuando alcanza los 10 centímetros.

Observación final: Todos los problemas denominados de *variaciones relacionadas* tienen en común el hecho que a partir de una relación entre dos funciones, derivando ésta se obtiene una relación entre sus variaciones.