

## Series de términos positivos.

- **Series de términos positivos.**
- **Criterio lacunar de Cauchy.**
- **Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.**
- **El número e.**

## Series de términos positivos.

**Teor.:** Una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada.

**Dem.:** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  con  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  una serie de términos positivos.

Sean  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$ , sus sumas parciales.

Entonces,  $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto,  $\{S_n\}$  es una sucesión monótona creciente y ya demostramos que las sucesiones monótonas convergen si y sólo si están acotadas.  $\square$

## Criterio lacunar de Cauchy.

**Teor. [Criterio lacunar de Cauchy]:** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión monótona decreciente de términos positivos.

Entonces,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y sólo si  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  converge.

**Dem.:** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión monótona decreciente de términos positivos:

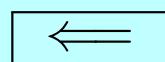
$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0.$$

Sean

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$T_k := a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

las sumas parciales de las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ , respectivamente.



Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $2^{k+1} > n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_2 + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k} \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como por hipótesis  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  converge

$\implies \{T_k\}$  acotada  $\implies \{S_n\}$  acotada  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.



Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 2^k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_2 + \cdots + \underbrace{(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})}_{2^{k-1}} \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^ka_{2^k}) = \frac{1}{2}T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como por hipótesis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge

$\implies \{S_n\}$  acotada  $\implies \{T_k\}$  acotada  $\implies \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  converge. □

## Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.

**Teor.:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si y sólo si  $p > 1$ .

**Dem.:** Si  $p \leq 0$ , entonces  $\frac{1}{n^p} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$   
 $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  no converge.

Si  $p > 0$ , entonces  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Monotonía de potencias)  
 $\implies \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$  es una sucesión monótona decreciente de términos positivos.

Por lo tanto, se puede aplicar el criterio lacunar de Cauchy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} &\iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k}_{\text{serie geométrica}} \text{ converge} \\ &\iff \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \iff p > 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Corol.:** La **serie armónica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, pese a que  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

No hemos definido las **funciones elementales: exp, log, sen, cos, etc.**

Sin embargo supondremos que están definidas y que satisfacen las propiedades básicas que conocemos del curso de Cálculo.

En particular, la función logaritmo natural,

$$\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

es una función biyectiva, estrictamente creciente y satisface  $\log(1) = 0$ .

**Teor.:**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$  converge si y sólo si  $p > 1$ .

**Dem.:** **Ej.** (Ver el Teor. 3.29 del libro de Rudin.)

## El número e.

Veamos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge.

En efecto,  $\forall n \geq 1$ ,  $2^{n-1} = \underbrace{2 \cdots 2}_{n-1} \leq \underbrace{2 \cdots n}_{n-1} = n!$   $\implies \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Entonces, dado que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  es una serie geométrica convergente, por el criterio de comparación  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  también converge.

**Def.:**  $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .

Veamos que  $2 < e < 3$ .

En efecto, por un lado  $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots > 1 + 1 = 2$

y por el otro  $e < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$ .

**Teor.:**  $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

**Dem.:** **Ej.** (Ver el Teor. 3.31 del libro de Rudin.)

El número  $e$  puede calcularse aproximadamente mediante las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  que lo define. Veamos el error que se comete si se aproxima  $e$  por la suma parcial  $n$ -ésima  $S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ :

$$\begin{aligned}
0 \leq e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k}}_{\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n!n}.
\end{aligned}$$

Es decir que

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Ej.**

Calcula  $S_{10}$  y demuestra que  $0 < e - S_{10} < 10^{-7}$ .

En consecuencia,  $S_{10}$  permite determinar las primeras 7 cifras decimales de  $e$ .

**Teor.:** El número  $e$  es irracional.

**Dem.:** Por el absurdo. Supongamos que  $e \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$ .

Sustituimos en la desigualdad anterior:  $0 < \frac{m}{n} - S_n < \frac{1}{n!n}$ .

Multiplicamos por  $n!$ :  $0 < \underbrace{(n-1)!m}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} < \frac{1}{n} < 1$ .

Entonces,  $z := (n-1)!m - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$  satisface  $z \in \mathbb{N}$  y  $0 < z < 1$ .

Pero todos los naturales son mayores o iguales que 1.  $\triangleright=\triangleleft \quad \square$