UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 10
Análisis Real II (525302)
Espacio de Medida Producto

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida con medida exterior inducida μ^* y $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue y $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ es un espacio de medida producto, donde $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ es una $\sigma-$Álgebra que contiene a $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Problema 1 Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espacios de medida finita, donde $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son $\sigma-$Álgebras. Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \mid (\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \mu(E_y) \text{ y } \nu(E_x) \text{ son funciones medibles}\}$$

es una $\sigma-$Álgebra que contiene a la $\sigma-$Álgebra producto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Problema 2 Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espacios de medida $\sigma-$finita y completa. Sea $E \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ medible. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) $(\mu \times \nu)(E) = 0$

b) La función $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \mu(E_y)$ es nula casi seguramente.

c) La función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \nu(E_x)$ es nula casi seguramente.

Problema 3 Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espacio de medida $\sigma-$finita y completa y $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$, donde f es una función no negativa. Demuestre que el conjunto

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times [0, +\infty] \mid 0 \le y \le f(x)\}$$

es un conjunto medible y $(\mu \times \nu)(G(f)) = \displaystyle\int_X f\, d\mu$.

Problema 4 Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Demuestre que la función $h(x, y) = f(x) + g(y)$ es medible y, usando dicha información, demuestre que $G(f)$ es medible.

Problema 5 Sean $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{B}([0, 1])$, $\mu = m$ la medida de Lebesgue restringida a $\mathcal{B}([0, 1])$ y ν la medida de conteo sobre $\mathcal{B}([0, 1])$. Sea $D = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$. Demuestre que

$$\int_X \int_Y \chi_D\, d\nu dm \neq \int_X \int_Y \chi_D\, dm d\nu$$

¿Este resultado contradice los teoremas de Fubini y Tonelli? Justifique.

Problema 6 Sean f y g funciones reales medibles respecto a $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente. Demuestre que la función $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall (x,y) \in X \times Y)\ \ h(x,y) = f(x)\, g(y)$$

es medible respecto a $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Problema 7 Sean $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $g \in L^1(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espacios de medida completa. Demuestre que la función $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall (x,y) \in X \times Y)\ \ h(x,y) = f(x)\, g(y)$$

es integrable en $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ y

$$\int_{X \times Y} h(x,y)\ d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f(x)\ d\mu\right)\left(\int_Y g(y)\ d\nu\right)$$

Problema 8 Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall m,n \in \mathbb{N})\ \ f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sean μ y ν medidas de conteo. Determine el valor de $\displaystyle\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f\ d\mu d\nu$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f\ d\nu d\mu$.

Problema 9 Demuestre que la función real $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ no es integrable. Sin embargo,

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Recuerde que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \exp(-xt)\ dt = 1$ y aplique convenientemente el teorema de Fubini.

Problema 10 Sea $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\ dm(x)\, dm(y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\ dm(y)\, dm(x)$$

pero que $f \notin L^1\left([-1,1]^2, \mathcal{L}([-1,1]), m \times m\right)$. ¿Qué hipótesis del Teorema de Fubini no se cumple?

Problema 11 Sea $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que

$$\int_{[0,1]^2} f\ d(m \times m) = \frac{1}{2}$$

Problema 12 (Producto de Convolución) Una de las herramientas frecuentemente usadas en el análisis de Ecuaciones diferenciales Parciales y el estudio de Espacios de Sobolev es el producto de convolución, el cual será introducido paulatinamente en este problema. Para ello, considere el espacio de medida producto de Lebesgue $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}), m \times m)$.

a) Demuestre que, si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in E\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que la función $F(x,y) = f(x-y)$ es medible respecto a $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que la función $h(x,y) = f(x-y)\, g(y)$ es medible respecto a $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

d) Sea $y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \; dm(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \; dm(x)$$

Indicación: Aplique el Teorema de Convergencia Monótona.

e) Demuestre que, si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces la función $h = f * g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y) \; dm(y)$$

es tal que $h \in L^1(\mathbb{R})$. Esta función h está bien definida casi seguramente, extendiéndose por 0 cuando no quede bien definida, y constituye la convolución de f y g.

f) Demuestre que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) \; dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \; dm(x) \int_{\mathbb{R}} g(y) \; dm(y)$$

---

17 de Noviembre de 2014