Clase 4.6. Seminario . jueves 23/10/25

Problema 1: Un gas ideal diatómico, ocupa un volumen V_1 = 2 L. A partir de este estado se realizan las siguientes transformaciones reversibles:

I) Se expande isotérmicamente hasta un valor de volumen V_2 = 8 L.

II) A continuación, desde el estado 2 realiza un proceso a volumen constante (disminuyendo la presión) hasta el estado 3.

III) Finalmente, desde el estado 3, y mediante una compresión adiabática recupera su estado inicial (estado 1).

Datos: T_3 = 300 K ; P_3 = 1 atm ; V_3 = 8 L.

a) Representar el Ciclo en un diagrama presión-volumen

b) Determine el número de moles **n**, la temperatura $\mathbf{T_1}$ y las presiones $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$

c) Determine el trabajo en el proceso adiabático ($\mathbf{W_{31}}$)

d) Determine el flujo de calor en cada etapa del ciclo.

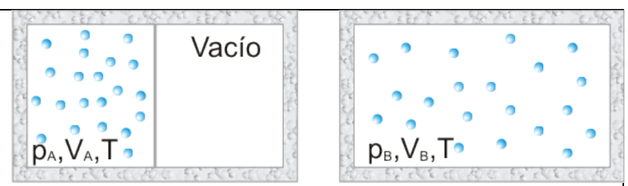
e) Determine el rendimiento del ciclo y compárelo con el rendimiento de un ciclo de Carnot.

Nota: Utilice R= 8.3143 J/ mol K. Convierta los litros a m^3 y las presiones a pascal.

Problema 2: Demostrar que $$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{\kappa}{\beta}$$

Problema 3: Un recipiente rígido y adiabático de volumen 2 m^3, está dividido por una pared interna en dos partes iguales. Un gas ideal ocupa la mitad del recinto y se encuentra a una presión de $1x10^5$ Pa y a una temperatura de 300 K. La otra mitad del recipiente se vacía (se encuentra evacuado). Se retira la pared interna del recipiente, que separa ambas mitades dejando que el gas se expanda libremente. Determine:

a) El W realizado por el gas.
b) La variación de su energía interna.
c) La temperatura final del gas.
d) La presión final del gas.



Resp: a) 0 ; b) 0 ; c) 300 K ; d) 5 x 10^4 Pa

Problema 4: La ecuación de estado de cierto gas es: $(P + b)v = RT$ y su energía interna específica es: $u = u_0 + aT + bv$; en unidades apropiadas (a, b y $u_0 = ctes$).

Determine c_p .

Resp: $\boldsymbol{R + a}$

Problemas resueltos

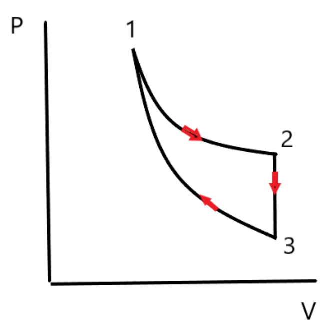
Problema 1: Un gas ideal diatómico, ocupa un volumen V_1 = 2 L. A partir de este estado se realizan las siguientes transformaciones reversibles:
I) Se expande isotérmicamente hasta un valor de volumen V_2 = 8 L.
II) A continuación, desde el estado 2 realiza un proceso a volumen constante (disminuyendo la presión) hasta el estado 3.
III) Finalmente, desde el estado 3, y mediante una compresión adiabática recupera su estado inicial (estado 1).
Datos: T_3 = 300 K ; P_3 = 1 atm ; V_3 = 8 L.

a) Representar el Ciclo en un diagrama presión-volumen
b) Determine el número de moles **n**, la temperatura **T_1** y las presiones **P_1** y **P_2**
c) Determine el trabajo en el proceso adiabático (**W_{31}**)
d) Determine el flujo de calor en cada etapa del ciclo.
e) Determine el rendimiento del ciclo y compárelo con el rendimiento de un ciclo de Carnot.
Nota: Utilice R= 8.3143 J/ mol K. Convierta los litros a m^3 y las presiones a pascal.

Desarrollo:

Datos: $T_3 = 300\ K\ ;\ \ P_3 = 1\ atm$
$aire: gas\ ideal\ diatómico: c_v = \frac{5}{2}R\ ;\ c_P = \frac{7}{2}R\ ;\quad R = 8.3143\frac{J}{molK}\ ; \gamma = 1.4$
$V_1 = 2L\ \ ;\ V_2 = 8L\ ;\ \ V_3\ = 8\ L\ ;\qquad 1L = 1x10^{-3}m^3$

a) Representar el Ciclo en un diagrama presión-volumen



b) Determine el número de moles n, la temperatura T_1 y las presiones P_1 y P_2

Desarrollo:

i) Cálculo de n

$$n = \frac{P_3V_3}{RT_3} = \frac{1.013x10^5 Pa\ x\ 8\ x10^{-3}m^3}{8.3143\frac{J}{mol\ K}x\ 300\ K} = \mathbf{0.325\ mol}$$

ii) Cálculo de **P_1**

Proceso 3-1 adiabático

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma} \rightarrow P_1 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma} = 1.013x10^5 Pa\ x \left(\frac{8\ x10^{-3}m^3}{2\ x10^{-3}m^3}\right)^{1.4} = \mathbf{7.05\ x\ 10^5 Pa}$$

iii) Cálculo de **T_1**

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{7.05\ x\ 10^5 Pa\ x\ 2\ x10^{-3}m^3}{0.325\ mol\ x\ 8.3143 \frac{J}{molK}} = \mathbf{521.8\ K}$$

iv) Cálculo de **P_2**

$T_1 = T_2 = 521.8\ K$; $V_2 = V_3 = 8\ x10^{-3}m^3$

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{\mathbf{0.325\ mol\ x}\ 8.3143 \frac{J}{molK}\ x\ 521.8\ K}{8\ x10^{-3}m^3} = \mathbf{1.76\ x\ 10^5 Pa}$$

c) Determine el trabajo en el proceso adiabático (W_{31})

Primer Principio $\Delta U = Q - W$; $Q = 0$

$$W_{31} = -\Delta U_{31} = -nc_v(T_1 - T_3) = -0.325\ mol\ x\ \frac{5}{2} x\ 8.3143 \frac{J}{molK} x(521.8\ K - 300\ K)$$

$$W_{31} = \mathbf{-1498.3\ J}$$

Otra forma de calcular W_{31} es utilizando la expresión:

$$W_{31} = \frac{1}{1-\gamma}[P_1 V_1 - P_3 V_3]$$

d) Determine el flujo de calor en cada etapa del ciclo.

i) Proceso 1-2 Isotérmico

$$W_{12} = Q_{12} = nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0.325\ mol\ x\ 8.3143 \frac{J}{molK} x\ 521.8\ K\ x\ ln\left(\frac{8\ x10^{-3}m^3}{2\ x10^{-3}m^3}\right)$$

$$\boldsymbol{Q_{12} = 1954.6\ J}$$

ii) Proceso 2-3 Isocórico

$$Q_{23} = nc_v(T_3 - T_2) = n\frac{5}{2}R(T_3 - T_2) = 0.325\ mol\ x\ \frac{5}{2}\ x\ 8.3143 \frac{J}{molK}\ x\ (300 - 521.8)K$$

$$\boldsymbol{Q_{23} = -1498.3\ J}$$

iii) Proceso 3-1 Adiabático: $\boldsymbol{Q_{31}} = \mathbf{0\ J}$

e) Determine el rendimiento del ciclo y compárelo con el rendimiento de un ciclo de Carnot.

$\Delta U = Q - W$

$\Delta U_{ciclo} = 0 \ \rightarrow \ Q_{neto} = W_{neto}$

$W_{neto} = Q_{neto} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = \mathbf{1954.6\,J - 1498.3\ J + 0\,J}$

$$\eta = \frac{W_{neto}}{Q_{absorbido}} == \frac{456.3\ J}{1954.6\ J} = 0.23 \quad (23\%)$$

Rendimiento de Carnot

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{baja}}{T_{alta}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{300\ K}{521.8\ K} = 0.42 \quad (42\%)$$

Problema 2: Demostrar que $\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{\kappa}{\beta}$

Desarrollo:

Sabemos que:

$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$ **y** $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \qquad \textbf{(1)}$$

Además, conocemos (Clases del capítulo 2)

$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -1 \quad (2)$ y las definiciones de los coeficientes $\beta \;\; y \;\; \kappa$

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \;\; ; \;\; \kappa = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

De la ecuación **(2)** se obtiene:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v} = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v = -(-\kappa v)\frac{1}{\beta v} = \frac{\kappa}{\beta} \qquad \textbf{(3)}$$

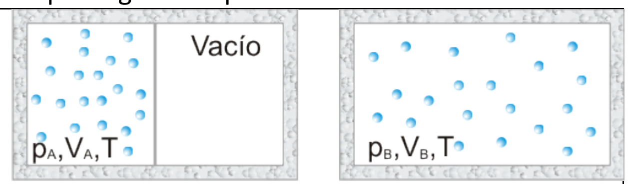
Y reemplazando (3) en (1) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{\kappa}{\beta}}$$

Problema 3: Un recipiente rígido y adiabático de volumen 2 m^3, está dividido por una pared interna en dos partes iguales. Un gas ideal ocupa la mitad del recinto y se encuentra a una presión de $1x10^5$ Pa y a una temperatura de 300 K. La otra mitad del recipiente se vacía (se encuentra evacuado). Se retira la pared interna del recipiente, que separa ambas mitades dejando que el gas se expanda libremente. Determine:

a) El W realizado por el gas.
b) La variación de su energía interna.
c) La temperatura final del gas.
d) La presión final del gas.



Resp: a) 0 ; b) 0 ; c) 300 K ; d) 5 x 10^4 Pa

a) El W realizado por el gas.

$W = 0$. Es una expansión libre

b) La variación de su energía interna.

Por el primer principio de la termodinámica

$\Delta U = Q - W$; $W = 0$ y $Q = 0$. Dato del problema (recipiente adiabático).

$\Delta U = 0$

c) La temperatura final del gas.

Como $\Delta U = 0$, entonces la $T_A = T_B = T = 300\ K$

d) La presión final del gas.

Utilizando la EDE de un gas ideal para $T = cte$

$$P_A V_A = P_B V_B$$

$$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 1x10^5 Pa \left(\frac{1m^3}{2m^3}\right) = 5x10^4 Pa$$

Problema 4: La ecuación de estado de cierto gas es: $(P + b)v = RT$ y su energía interna específica es: $u = u_0 + aT + bv$; en unidades apropiadas $(a, b\ y\ u_0 = ctes)$.
Determine c_p .
Resp: $\boldsymbol{R + a}$

Desarrollo

a) Sabemos que:

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

$$c_p = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + c_v \qquad \textbf{(1)}$$

$u = u_0 + aT + bv$ y $(P + b)v = RT \rightarrow v = \frac{RT}{(P+b)}$

$$\boldsymbol{c_v} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = a \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = b \ \text{ y } \ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{(P+b)} \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando las expresiones (2) en la Ec. (1), se obtiene:

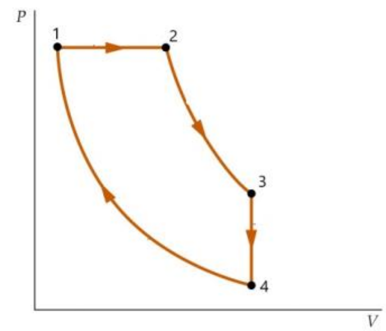
$$c_p = [b + p]\frac{R}{(P+b)} + a$$

$$\boldsymbol{c_p = R + a}$$

Problema 5: Un mol de un gas monoatómico ideal realiza el ciclo que se describe en la figura. Además, conocemos los datos de la Tabla dada. El proceso 1-2 tiene lugar a presión constante, el proceso 2-3 es adiabático, el proceso 3-4 es a volumen constante y el proceso 4-1 es isotérmico. a) Completar los datos de la tabla. b) Calcule el flujo de calor en cada uno de los procesos. c) Calcule el trabajo neto realizado en un ciclo.
d) Si una máquina térmica operara con este ciclo, determine el rendimiento de la máquina.

	1	2	3	4
P (Pa)				**1.013x10^6**
V (m^3)	**1x10^{-3}**	**2x10^{-3}**	**2.46x10^{-3}**	**2.46x10^{-3}**
T(K)				**300**

Datos: **Utilice R = 8.31 J/mol K**



Resp. a)		1	2	3	4
	P (Pa)	$2.493 \, x \, 10^6$	$2.493 \, x \, 10^6$	$1.764 \, x \, 10^6$	**1.013x10^6**
	V (m^3)	**1x10^{-3}**	**2x10^{-3}**	**2.46x10^{-3}**	**2.46x10^{-3}**
	T(K)	300	600	522.2	**300**

Resp. b) $\mathbf{Q_{12} = 6232.5\ J}$ **;** $\mathbf{Q_{23} = 0}$ **;** $\mathbf{Q_{34} = -2769.7\ J}$ **;** $\mathbf{Q_{41} = -2244.1\ J}$ **; c)** $\mathbf{1218.7\ J}$ **; d) 19.5%.**

Desarrollo:

a) Cálculos para completar la Tabla

Proceso 4-1 isotérmico: $T_1 = T_4 = 300$ K

Proceso 1-2 isobárico $P_1 = P_2$

$$P_1 = P_2 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{1 \, mol \, x \, 8.31 \, \frac{J}{mol \, K} x \, 300 \, K}{1 \, x \, 10^{-3} m^3} = 2.493 \, x \, 10^6 \, Pa$$

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{2.493 \, x \, 10^6 \, Pa \, x \, 2 \, x \, 10^{-3} m^3}{1 \, mol \, x \, 8.31 \, \frac{J}{mol \, K}} = 600 \, K$$

Proceso 2-3 adiabático

$$\gamma = \frac{c_P}{c_v} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \quad \rightarrow \quad P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1.67} = 2.493 \, x \, 10^6 \, Pa \, x \left(\frac{2 \, x \, 10^{-3} m^3}{2.46 \, x \, 10^{-3} m^3}\right)^{1.67}$$

$$P_3 = 1.764 \, x \, 10^6 \, Pa$$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{1.764 \, x \, 10^6 \, Pa \, x \, 2.46 \, x \, 10^{-3} m^3}{1 \, mol \, x \, 8.31 \, \frac{J}{mol \, K}} = 522.2 \, K$$

Tabla completa

	1	2	3	4
P (Pa)	$2.493\ x\ 10^6$	$2.493\ x\ 10^6$	$1.764\ x\ 10^6$	$1.013x10^6$
V (m^3)	$1x10^{-3}$	$2x10^{-3}$	$2.46x10^{-3}$	$2.46x10^{-3}$
T(K)	300	600	522.2	300

b) Calcule el flujo de calor en cada uno de los procesos.

Proceso 1-2 isobárico

$$Q_{12} = nc_p(T_2 - T_1) = n\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = 1\ mol\ x\frac{5}{2}x\ 8.31\ \frac{J}{mol\ K}x\ (600 - 300)K$$

$$\boldsymbol{Q_{12} = 6232.5\ J}$$

Proceso 2-3 adiabático

$$\boldsymbol{Q_{23} = 0}$$

Proceso 3-4 isocórico

$$Q_{34} = nc_v(T_4 - T_3) = n\frac{3}{2}R(T_4 - T_3) = 1\ mol\ x\frac{3}{2}x\ 8.31\ \frac{J}{mol\ K}x\ (300 - 522.2)K$$

$$\boldsymbol{Q_{34} = -2769.7\ J}$$

Proceso 4-1 isotérmico

Primer Principio $\Delta U = Q - W$; $\Delta U = 0$ Para un proceso isotérmico gas ideal

$$Q_{41} = W_{41}$$

EdE gas ideal $PV = nRT$

$$Q_{41} = W_{41} = \int_{V_4}^{V_1} PdV = \int_{V_4}^{V_1} \frac{nRT}{V}dV = nRT_1\ ln\frac{V_1}{V_4}$$

$$Q_{41} = 1\ mol\ x\ 8.31\ \frac{J}{mol\ K}\ x\ 300\ K\ x\ \ ln\left(\frac{1\ x\ 10^{-3}m^3}{2.46\ x\ 1\ x\ 10^{-3}m^3}\right)$$

$$\boldsymbol{Q_{41} = -2244.1\ J}$$

c) Calcule el trabajo neto realizado en un ciclo.

$\Delta U_{ciclo} = 0 \rightarrow \quad Q_{ciclo} = W_{ciclo}$

$W_{ciclo} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$

$W_{ciclo} = 6232.5\,J + 0 - 2769.7\,J - 2244.1\,J$

$\boldsymbol{W_{ciclo} = 1218.7\,J}$

d) Calcule el rendimiento de la máquina térmica

$$\eta = \frac{W_{neto}}{Q_{absorbido}} = \frac{1218.7\,J}{6232.5\,J} = \mathbf{0.195} \quad (19.5\%)$$

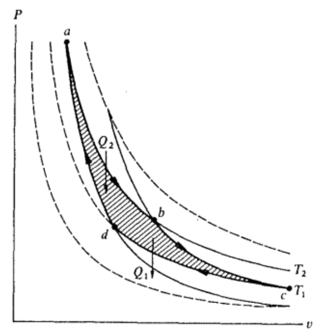
Problemas propuestos

Problema 6: Supongamos que 0.2 moles de un gas diatómico ideal (γ = 1.4) experimenta un ciclo de Carnot con temperatura T_2 = 400 K y T_1 = 300 K. La presión inicial (punto **a**) es 10×10^5 Pa, y durante la expansión isoterma a temperatura T_2 el volumen se duplica.

a) Halle la presión y el volumen en los puntos a, b, c y d de la figura.

b) Halle Q, W y ΔU en cada paso del ciclo.

c) Determine el rendimiento del ciclo.



Resp: a)

	a	b	c	d
P (Pa)	10×10^5	5×10^5	1.83×10^5	3.65×10^5
V (m^3)	6.65×10^{-4}	13.3×10^{-4}	27.3×10^{-4}	13.65×10^{-4}

b)

	ab	bc	cd	da
W (J)	461	415.7	-345.8	-415.7
Q(J)	461	0	-345.8	0
ΔU (J)	0	-415.7	0	415.7

c) 0.25

Problema 7: Un motor lleva 1 mol de un gas monoatómico ideal durante el ciclo que se describe en la figura. El proceso AB tiene lugar a volumen constante, el proceso BC es adiabático y el proceso CA es a presión constante.

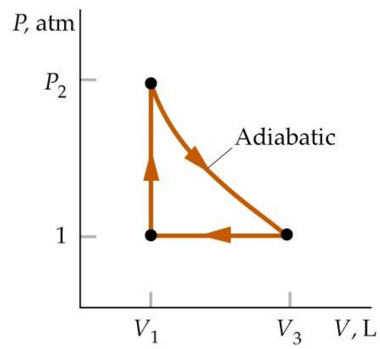
a) Si la presión en el punto A es de 1 atm, encuentre la presión y volumen en los puntos B y C.

b) Calcule el trabajo, flujo de calor y variación de energía interna en los tres procesos y en el ciclo en general.

c) Determine el rendimiento del motor en un ciclo.

Datos: Utilice 1 atm = 1.013×10^5 Pa ; R = 8.314 J/mol K

$T_A = 300$ K ; $T_B = 600$ K ; $T_C = 455$ K



Resp: a) Punto B: 2.026×10^5 Pa ; 0.0246 m^3 ; Punto C: 1.013×10^5 Pa ; 0.0373 m^3

b) $W_{AB} = 0$; $W_{BC} = 1799.2$ J ; $W_{CA} = -1286.5$ J

$Q_{AB} = 3741.3$ J ; $Q_{BC} = 0$; $Q_{CA} = -3221.7$ J

$\Delta U_{AB} = 3741.3$ J ; $\Delta U_{BC} = -1799.2$ J ; $\Delta U_{CA} = -1935.2$ J

En el Ciclo: $\Delta U = 0$; Q = W = 519.6 J.

c) Rendimiento: 0.139 (13.9%).