UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°2

Álgebra 2 - 525150

Considere las siguientes definiciones:

Definición 1:

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la **traza** de A es la suma de los elementos de la diagonal, es decir

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Definición 2:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es **involutiva** si y solo si $A^2 = I_n$ (I_n es la matriz identidad de orden n).

Definición 3:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es **idempotente** si y solo si $A^2 = A$.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $f(x) = x^{30} - x^{20} + x^{10}$. Determinar A^n, con $n \in \mathbb{N}$, y calcule $\operatorname{tr}(f(A))$.

2. Demostrar lo siguiente:

   (a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz involutiva e I_n es la matriz identidad, entonces:

   $$B = \tfrac{1}{2}(I_n + A) \quad \text{y} \quad C = \tfrac{1}{2}(I_n - A)$$

   son matrices idempotentes.

   (b) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son matrices conmutativas ($AB = BA$), A es idempotente y B es una matriz involutiva, entonces:

   $$(A + B)^3 + (A - B)^3 = 8A.$$

   (c) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A + B^{-1}$ y $A^{-1} + B$ son matrices no singulares, entonces

   $$(A^{-1} + B)^{-1} = A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$$

3. Encuentre la matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que satisface la siguiente ecuación matricial

   $$XA^t + C = XB$$

   donde A, B y C son las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$