Optimización III (525551)

Módulo IV: Problema del Flujo Máximo

Pr. Julio Aracena.

Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Primer semestre, 2023

Flujo en redes

Un digrafo sin bucles $G = (V, E)$ con una función capacidad en los arcos $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, donde $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se conoce como **red**. Usualmente en una red existe un nodo fuente $s \in V$ (i.e. $d^-(s) = 0$) y un nodo sumidero $t \in V$ (i.e. $d^+(t) = 0$).

Flujo en redes

Un digrafo sin bucles $G = (V, E)$ con una función capacidad en los arcos $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, donde $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se conoce como **red**. Usualmente en una red existe un nodo fuente $s \in V$ (i.e. $d^-(s) = 0$) y un nodo sumidero $t \in V$ (i.e. $d^+(t) = 0$).

Definición (Flujo): Dada una red $G = (V, E)$ con función capacidad c y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente, se dice que una función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ es un $s - t$ **flujo** de G si verifica:

i) $\forall (u, v) \in E,\ 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$.

ii) $\forall v \in V - \{s, t\}, \quad \sum_{u:\,(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{u:\,(v,u)\in E} f(v, u)$ (**propiedad conservativa**).

Flujo en redes

Un digrafo sin bucles $G = (V, E)$ con una función capacidad en los arcos $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, donde $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se conoce como **red**. Usualmente en una red existe un nodo fuente $s \in V$ (i.e. $d^-(s) = 0$) y un nodo sumidero $t \in V$ (i.e. $d^+(t) = 0$).

Definición (Flujo): Dada una red $G = (V, E)$ con función capacidad c y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente, se dice que una función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ es un $s - t$ **flujo** de G si verifica:

i) $\forall (u, v) \in E,\ 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$.

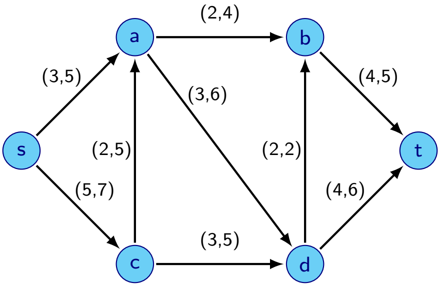
ii) $\forall v \in V - \{s, t\},\ \sum_{u:\,(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{u:\,(v,u)\in E} f(v, u)$ (**propiedad conservativa**).

Un arco $(u, v) \in E$ se dice **saturado** si $f(u, v) = c(u, v)$. El **valor del flujo** f se define por:

$$Val(f) = \sum_{u:\ (s,u)\in E} f(s, u).$$

Flujo en redes

Ejemplo 1:
(G, f, c) :



Aquí, la etiqueta de cada arco (u, v) de G corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. $Val(f) = 8$. El arco (d, b) es el único saturado.

Corte en redes

Definición (Corte): Dada una red $G = (V, E)$ con función capacidad c y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente, una partición ordenada (S, T) $(S \cup T = V \ \wedge \ S \cap T = \emptyset)$ de V se dice un **corte** de G si $s \in S$ y $t \in T$. La capacidad de un corte (S, T) está definido por:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T \colon (u,v) \in E} c(u, v).$$

Observación: Para simplificar la notación podemos suponer para todo $(u, v) \in V \times V$, que si $(u, v) \notin E, \ f(u, v) = c(u, v) = 0$. Así la propiedad conservativa de un flujo f puede escribirse simplemente por:

$$\forall v \in V - \{s, t\}, \ \sum_u f(u, v) = \sum_u f(v, u),$$

y la capacidad de un corte (S, T) por:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v).$$

Corte en redes

Ejemplo: : Para la red del Ejemplo 1 se tiene que si $S = \{s, a, c\}$ y $T = \{b, d, t\}$, entonces (S, T) es un corte de G y $c(S, T) = 15$.

Corte en redes

Ejemplo: : Para la red del Ejemplo 1 se tiene que si $S = \{s, a, c\}$ y $T = \{b, d, t\}$, entonces (S, T) es un corte de G y $c(S, T) = 15$. Si $S = \{s, a, d\}$ y $T = \{b, c, t\}$, entonces $c(S, T) = 19$.

Corte en redes

Ejemplo: : Para la red del Ejemplo 1 se tiene que si $S = \{s, a, c\}$ y $T = \{b, d, t\}$, entonces (S, T) es un corte de G y $c(S, T) = 15$. Si $S = \{s, a, d\}$ y $T = \{b, c, t\}$, entonces $c(S, T) = 19$.

Lema: *Si f es un $s - t$ flujo y (S, T) es un corte de una red $G = (V, E)$ con función capacidad c, entonces*

$$Val(f) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

Corte en redes

Ejemplo: : Para la red del Ejemplo 1 se tiene que si $S = \{s, a, c\}$ y $T = \{b, d, t\}$, entonces (S, T) es un corte de G y $c(S, T) = 15$. Si $S = \{s, a, d\}$ y $T = \{b, c, t\}$, entonces $c(S, T) = 19$.

Lema: *Si f es un $s - t$ flujo y (S, T) es un corte de una red $G = (V, E)$ con función capacidad c, entonces*

$$Val(f) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

Dem: Como $d^-(s) = 0$, entonces se tiene que:

$$Val(f) = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

Además, por propiedad conservativa de f se tiene que

$$\forall u \in S,\ u \neq s,\ \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) = 0 \Longrightarrow \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(v, u) = 0.$$

Corte en redes

Dem (continuación): Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
Val(f) &= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) \\
&= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \sum_{v \in V} f(v,u) \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,v) + \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(v,u) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u) \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u) \\
&= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u). \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Corte en redes

Teorema: *Si f es un $s - t$ flujo y (S, T) un corte de una red $G = (V, E)$ con función capacidad c, entonces*

$$Val(f) \leq c(S, T).$$

Corte en redes

Teorema: *Si f es un $s-t$ flujo y (S,T) un corte de una red $G=(V,E)$ con función capacidad c, entonces*

$$Val(f) \leq c(S,T).$$

Dem: Como $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$, entonces del lema anterior:

$$\begin{aligned} Val(f) &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\ &\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) = C(S,T). \blacksquare \end{aligned}$$

Flujo Máximo - Corte Mínimo

Observación: Como el resultado anterior es válido para todo $s - t$ flujo f y corte (S, T), entonces se tiene que:

$$\max_{f} Val(f) \leq \min_{(S,T)} c(S, T).$$

Más adelante probaremos que $\max_{f} Val(f) = \min_{(S,T)} c(S, T)$.

Flujo Máximo - Corte Mínimo

Observación: Como el resultado anterior es válido para todo $s - t$ flujo f y corte (S, T), entonces se tiene que:

$$\max_f Val(f) \leq \min_{(S,T)} c(S, T).$$

Más adelante probaremos que $\max_f Val(f) = \min_{(S,T)} c(S, T)$.

Corolario:

$$Val(f) = \sum_v f(v, t).$$

Flujo Máximo - Corte Mínimo

Observación: Como el resultado anterior es válido para todo $s-t$ flujo f y corte (S,T), entonces se tiene que:

$$\max_f Val(f) \leq \min_{(S,T)} c(S,T).$$

Más adelante probaremos que $\max_f Val(f) = \min_{(S,T)} c(S,T)$.

Corolario:

$$Val(f) = \sum_v f(v,t).$$

Dem: Sea $T=\{t\}$ y $S=V-T$. Luego, (S,T) es un corte y por lema anterior:

$$\begin{aligned} Val(f) &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\ &= \sum_{u\in S} f(u,t) - \sum_{u\in S} f(t,u) = \sum_{u\in S} f(u,t) = \sum_{u\in V} f(u,t). \blacksquare \end{aligned}$$

Problema del Flujo Máximo

Definición: Sea $G = (V, E)$ una red, c una función de capacidad y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero de G. El **Problema de Flujo Máximo (PFM)** consiste en encontrar un $s - t$ flujo de G de valor máximo.

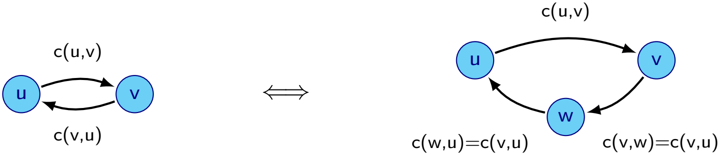
Un forma de resolver PFM es mediante el método de Ford-Fulkerson. Para ello, en adelante supondremos que G no tiene ciclos de largo 2. i.e. los ciclos de G son de largo al menos 3.

Problema del Flujo Máximo

Definición: Sea $G = (V, E)$ una red, c una función de capacidad y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero de G. El **Problema de Flujo Máximo (PFM)** consiste en encontrar un $s - t$ flujo de G de valor máximo.

Un forma de resolver PFM es mediante el método de Ford-Fulkerson. Para ello, en adelante supondremos que G no tiene ciclos de largo 2. i.e. los ciclos de G son de largo al menos 3.

Observación: Si G tiene un ciclo de largo 2, entonces podemos reemplazarlo por un ciclo de largo 3, sin cambiar el valor máximo de un $s - t$ flujo, como sigue:



Red residual y caminos de aumento de flujo

Definición (Red residual): Sea (G, c, s, t) una instancia de PFM. Dado f un $s-t$ flujo de G, se define la red residual $G_f = (V_f = V, E_f)$ con función capacidad residual $c_f : E_f \to \mathbb{R}_0^+$ por $\forall (u, v) \in E$:

- Si $f(u, v) < c(u, v)$, entonces $(u, v) \in E_f$ y $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$.
- Si $f(u, v) > 0$, entonces $(v, u) \in E_f$ y $c_f(v, u) = f(u, v)$.
- Todos los arcos de E_f y sus respectivas capacidades residuales son generados sólo por los casos anteriores.

Red residual y caminos de aumento de flujo

Definición (Red residual): Sea (G, c, s, t) una instancia de PFM. Dado f un $s - t$ flujo de G, se define la red residual $G_f = (V_f = V, E_f)$ con función capacidad residual $c_f : E_f \to \mathbb{R}_0^+$ por $\forall (u, v) \in E$:

- Si $f(u, v) < c(u, v)$, entonces $(u, v) \in E_f$ y $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$.
- Si $f(u, v) > 0$, entonces $(v, u) \in E_f$ y $c_f(v, u) = f(u, v)$.
- Todos los arcos de E_f y sus respectivas capacidades residuales son generados sólo por los casos anteriores.

Todo camino p de s a t en G_f se dice **camino de aumento de flujo**.

Red residual y caminos de aumento de flujo

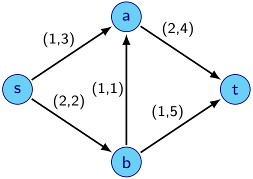
Definición (Red residual): Sea (G, c, s, t) una instancia de PFM. Dado f un $s - t$ flujo de G, se define la red residual $G_f = (V_f = V, E_f)$ con función capacidad residual $c_f : E_f \to \mathbb{R}_0^+$ por $\forall (u, v) \in E$:

- Si $f(u, v) < c(u, v)$, entonces $(u, v) \in E_f$ y $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$.
- Si $f(u, v) > 0$, entonces $(v, u) \in E_f$ y $c_f(v, u) = f(u, v)$.
- Todos los arcos de E_f y sus respectivas capacidades residuales son generados sólo por los casos anteriores.

Todo camino p de s a t en G_f se dice **camino de aumento de flujo**.

Ejemplo 4:

(G, c, f) :



$\Longrightarrow$

Red residual y caminos de aumento de flujo

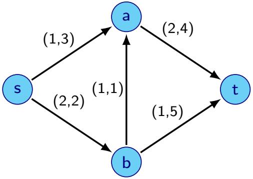
Definición (Red residual): Sea (G, c, s, t) una instancia de PFM. Dado f un $s - t$ flujo de G, se define la red residual $G_f = (V_f = V, E_f)$ con función capacidad residual $c_f : E_f \to \mathbb{R}_0^+$ por $\forall (u, v) \in E$:

- Si $f(u, v) < c(u, v)$, entonces $(u, v) \in E_f$ y $c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$.
- Si $f(u, v) > 0$, entonces $(v, u) \in E_f$ y $c_f(v, u) = f(u, v)$.
- Todos los arcos de E_f y sus respectivas capacidades residuales son generados sólo por los casos anteriores.

Todo camino p de s a t en G_f se dice **camino de aumento de flujo**.

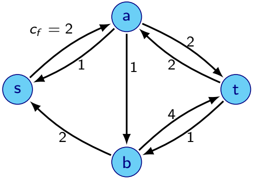
Ejemplo 5:

$(G, c, f):$



$\Longrightarrow$

$(G_f, c_f):$



Método de Ford-Fulkerson

Dado f un $s-t$ flujo y p un camino de aumento de flujo, si denotamos $\bar{c} = \text{mín}\{c_f(u,v) : (u,v) \in E(p)\}$ la capacidad mínima residual de p, donde $E(p)$ es el conjunto de arcos de p, entonces podemos definir un nuevo $s-t$ flujo $\bar{f}$ de G por: $\forall (u,v) \in E$,

$$\bar{f}(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \cap E(p), \\ f(u,v) - \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \wedge (v,u) \in E(p), \\ f(u,v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

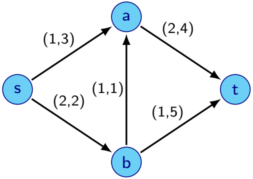
Método de Ford-Fulkerson

Dado f un $s-t$ flujo y p un camino de aumento de flujo, si denotamos $\bar{c} = \text{mín}\{c_f(u,v) : \ (u,v) \in E(p)\}$ la capacidad mínima residual de p, donde $E(p)$ es el conjunto de arcos de p, entonces podemos definir un nuevo $s-t$ flujo $\bar{f}$ de G por: $\forall (u,v) \in E$,

$$\bar{f}(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \cap E(p), \\ f(u,v) - \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \wedge (v,u) \in E(p), \\ f(u,v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo: Para la red del Ejemplo 2 se tiene que $p : s, a, b, t$ es un camino de aumento de flujo y $\bar{c} = 1$. Luego, se tiene lo siguiente:

(G, c, f) :



$\Longrightarrow$

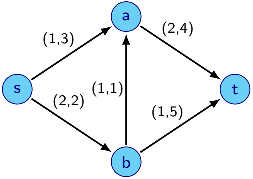
Método de Ford-Fulkerson

Dado f un $s-t$ flujo y p un camino de aumento de flujo, si denotamos $\bar{c} = \min\{c_f(u,v) : \ (u,v) \in E(p)\}$ la capacidad mínima residual de p, donde $E(p)$ es el conjunto de arcos de p, entonces podemos definir un nuevo $s-t$ flujo $\bar{f}$ de G por: $\forall (u,v) \in E$,

$$\bar{f}(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \cap E(p), \\ f(u,v) - \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \wedge (v,u) \in E(p), \\ f(u,v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

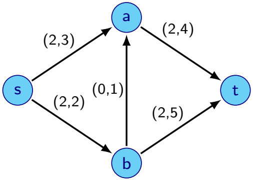
Ejemplo: Para la red del Ejemplo 2 se tiene que $p : s, a, b, t$ es un camino de aumento de flujo y $\bar{c} = 1$. Luego, se tiene lo siguiente:

(G, c, f) :



$\Longrightarrow$

$(G, c, \bar{f})$:



Método de Ford-Fulkerson

Lema: *$\bar{f}$ es un $s-t$ flujo y $Val(\bar{f}) = Val(f) + \bar{c}$*

Dem: Sea $G = (V, E)$ una red con capacidad c y f un $s-t$ flujo. Dado $p : s, u_1, \ldots, u_k = t$ un camino de aumento de flujo y $\bar{c}$ la mínima de las capacidades de sus arcos, sea $\bar{f}$ es el nuevo flujo definido a partir de p y $\bar{c}$. Recordar que:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{si } f(u,v) < c(u,v) \\ f(u,v) & \text{si } f(u,v) > 0. \end{cases}$$

Luego, en cualquier caso $c_f(u,v) > 0$ y así $\bar{c} > 0$. Un análisis por caso permite probar que $\forall (u,v) \in E, 0 \leq \bar{f}(u,v) \leq c(u,v)$ y que $\bar{f}$ tiene la propiedad conservativa en todos los nodos distintos de s y t. Es decir, $\bar{f}$ es un $s-t$ flujo.
Mostremos ahora que $Val(\bar{f}) = Val(f) + \bar{c}$. En efecto,

$$\begin{aligned} Val(\bar{f}) &= \sum_{u \in V} \bar{f}(s,u) = \sum_{u \in V,\ u \neq u_1} \bar{f}(s,u) + \bar{f}(s,u_1) \\ &= \sum_{u \in V,\ u \neq u_1} f(s,u) + f(s,u_1) + \bar{c} = Val(f) + \bar{c} > Val(f). \blacksquare \end{aligned}$$

Observación: Si f y c son de valores enteros no negativos, entonces $\bar{c}$ es un entero no negativo y por consiguiente el flujo $\bar{f}$ es también de valores enteros no negativos.

Método de Ford-Fulkerson

Algorithm Ford-Fulkerson (G,c,s,t)

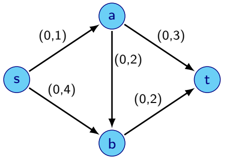
Input: $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2, c función capacidad y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente

```
f ← 0
while ∃p camino de aumento de flujo en G_f do
    c̄ ← mín{c_f(u, v) : (u, v) ∈ E(p)}
    f ← f̄
end while
return f
```

Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

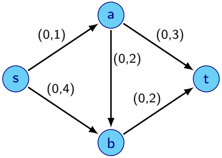
$t = 0.$ $\quad (G, c, f):$



Método de Ford-Fulkerson

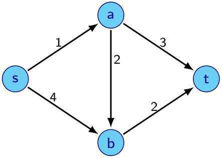
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



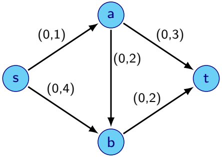
$p : s, a, b, t$

$\bar{c} = 1$

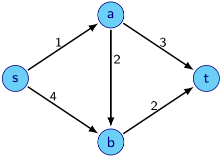
Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 0.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



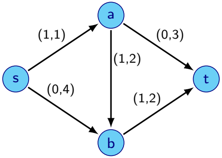
$\Longrightarrow$



$p : s, a, b, t$

$\bar{c} = 1$

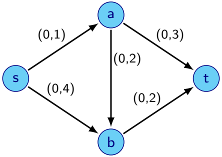
$t = 1.$ (G, c, f) :



Método de Ford-Fulkerson

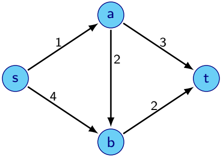
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

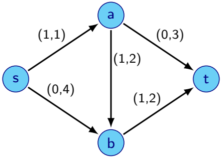
(G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

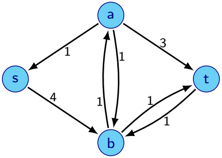
$\bar{c} = 1$

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



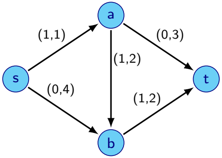
$p : s, b, a, t$

$\bar{c} = 1$

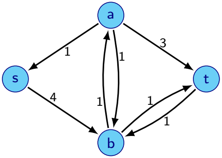
Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 1.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$\Longrightarrow$



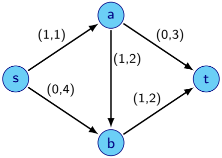
$p : s, b, a, t$

$\bar{c} = 1$

Método de Ford-Fulkerson

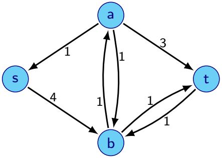
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 1.$ $(G, c, f):$



$\Longrightarrow$

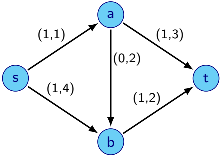
$(G_f, c_f):$



$p: s, b, a, t$

$\bar{c} = 1$

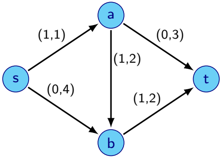
$t = 2.$ $(G, c, f):$



Método de Ford-Fulkerson

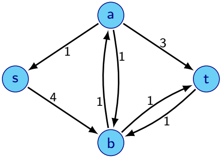
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 1$. (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

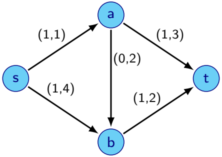
(G_f, c_f) :



$p : s, b, a, t$

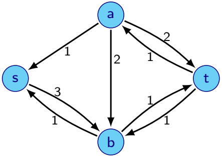
$\bar{c} = 1$

$t = 2$. (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



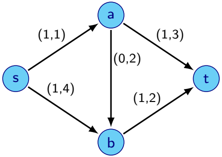
$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1$

Método de Ford-Fulkerson

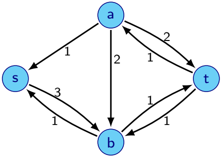
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 2.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



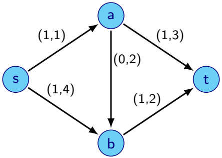
$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1$

Método de Ford-Fulkerson

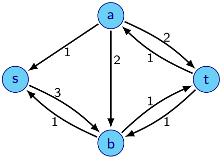
Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 2.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

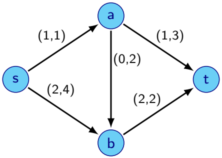
(G_f, c_f) :



$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1$

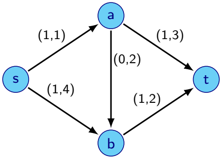
$t = 3.$ (G, c, f) :



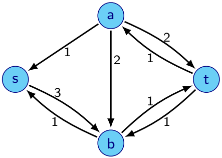
Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 2.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :

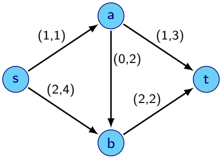


$\Longrightarrow$

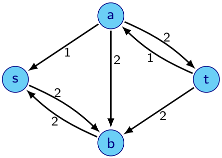


$p : s, b, t$
$\bar{c} = 1$

$t = 3.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$\Longrightarrow$

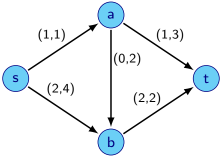


$\nexists p$

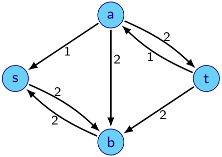
Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 3.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$\Longrightarrow$

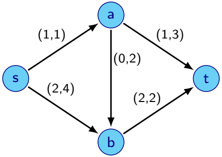


$\nexists p$

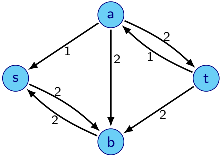
Método de Ford-Fulkerson

Ejemplo: Para cada iteración t del Método de Ford-Fulkerson con instancia (G, c, s, t), en la columna de la izquierda se presenta G con c y un $s - t$ flujo f. La etiqueta de cada arco (u, v) corresponde a $(f(u, v), c(u, v))$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades residuales y un camino de aumento de flujo.

$t = 3.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$\Longrightarrow$



$\nexists p$

Luego, $f^*(s, a) = f^*(a, t) = 1$; $f^*(s, b) = f^*(b, t) = 2$ y $f^*(a, b) = 0$ es un $s - t$ flujo de valor máximo igual a 3, i.e. $Val(f^*) = 3$, y con $(S^* = \{s, b\}, T^* = \{a, t\})$ un corte de capacidad mínimo con $c(S^*, T^*) = 3$.

Método de Ford-Fulkerson

Observaciones:

- Si la función de capacidad c es de valores enteros no negativos, entonces como el flujo inicial $f = 0$ es de valor entero no negativo, entonces por inducción se tiene que en cada iteración del Método de Ford-Fulkerson $\bar{f}$ es también de valores enteros no negativos. Por otro lado, como $Val(f)$ es acotada superiormente por $\min\{c(S,T) : (S,T) \text{ corte de } G\}$ una cantidad que es entera no negativa y $Val(\bar{f}) = Val(f) + \bar{c}$, entonces el método termina en un número finito de iteraciones.

Método de Ford-Fulkerson

Observaciones:

- Si la función de capacidad c es de valores enteros no negativos, entonces como el flujo inicial $f = 0$ es de valor entero no negativo, entonces por inducción se tiene que en cada iteración del Método de Ford-Fulkerson $\bar{f}$ es también de valores enteros no negativos. Por otro lado, como $Val(f)$ es acotada superiormente por $\min\{c(S,T) : (S,T) \text{ corte de } G\}$ una cantidad que es entera no negativa y $Val(\bar{f}) = Val(f) + \bar{c}$, entonces el método termina en un número finito de iteraciones.
- De un lema anterior sabemos que dado un $s - t$ flujo f si existe un camino de aumento de flujo en G_f entonces podemos obtener un flujo de mayor valor. Así, una condición necesaria para que f sea de valor máximo es que no exista camino de aumento de flujo. Veremos que esta condición es también una condición suficiente.

Método de Ford-Fulkerson

Teorema: *Sea* f^* *es un* $s - t$ *flujo. Entonces,* f^* *es de valor máximo si y sólo si* G_{f^*} *no tiene camino de aumento de flujo.*

Método de Ford-Fulkerson

Teorema: *Sea f^* es un $s - t$ flujo. Entonces, f^* es de valor máximo si y sólo si G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo.*

Demo: Por observación anterior se tiene que si f^* es un $s - t$ flujo de valor máximo, entonces G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo, ya que de lo contrario podemos obtener un flujo de mayor valor.

Método de Ford-Fulkerson

Teorema: *Sea f^* es un $s-t$ flujo. Entonces, f^* es de valor máximo si y sólo si G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo.*

Demo: Por observación anterior se tiene que si f^* es un $s-t$ flujo de valor máximo, entonces G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo, ya que de lo contrario podemos obtener un flujo de mayor valor.
Supongamos ahora que G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo. Definamos $S^* = \{u \in V :\ \exists p_{s,u}$ camino de s a u en $G_{f^*}\ \}$. Como $t \notin S^*$, entonces $(S^*, T^* = V - S)$ es un corte de G. Por otro lado, sea $(u,v) \in E$. Si $u \in S^*$ y $v \in T^*$, entonces $f^*(u,v) = c(u,v)$ (i.e. (u,v) es saturado), pues de lo contrario $(u,v) \in E_{f^*}$ y dado que $u \in S^*$, v sería alcanzable desde s, lo que es contradictorio con $v \notin S^*$. Si en cambio $u \in T^*$ y $v \in S^*$, entonces $f^*(u,v) = 0$, pues en caso contrario $(v,u) \in E_{f^*}$ lo que es contradictorio por la misma razón que antes. Así se tiene que:

$$Val(f^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} f^*(u,v) - \sum_{u \in T^*} \sum_{v \in S^*} f^*(u,v) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u,v) = C(S^*, T^*).$$

Luego,

$$Val(f^*) \leq \max_f Val(f) \leq \min_{(S,T)} c(S,T) \leq c(S^*, T^*) = Val(f^*) \Longrightarrow Val(f^*) = \max_f Val(f). \blacksquare$$

Método de Ford-Fulkerson

Teorema: *Sea f^* es un $s-t$ flujo. Entonces, f^* es de valor máximo si y sólo si G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo.*

Demo: Por observación anterior se tiene que si f^* es un $s-t$ flujo de valor máximo, entonces G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo, ya que de lo contrario podemos obtener un flujo de mayor valor.
Supongamos ahora que G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo. Definamos $S^* = \{u \in V: \exists p_{s,u}$ camino de s a u en $G_{f^*}\}$. Como $t \notin S^*$, entonces $(S^*, T^* = V - S)$ es un corte de G. Por otro lado, sea $(u,v) \in E$. Si $u \in S^*$ y $v \in T^*$, entonces $f^*(u,v) = c(u,v)$ (i.e. (u,v) es saturado), pues de lo contrario $(u,v) \in E_{f^*}$ y dado que $u \in S^*$, v sería alcanzable desde s, lo que es contradictorio con $v \notin S^*$. Si en cambio $u \in T^*$ y $v \in S^*$, entonces $f^*(u,v) = 0$, pues en caso contrario $(v,u) \in E_{f^*}$ lo que es contradictorio por la misma razón que antes. Así se tiene que:

$$Val(f^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} f^*(u,v) - \sum_{u \in T^*} \sum_{v \in S^*} f^*(u,v) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u,v) = C(S^*, T^*).$$

Luego,

$$Val(f^*) \leq \max_f Val(f) \leq \min_{(S,T)} c(S,T) \leq c(S^*, T^*) = Val(f^*) \Longrightarrow Val(f^*) = \max_f Val(f). \blacksquare$$

Flujo Máximo-Corte Mínimo

Un corolario directo del teorema anterior es el siguiente.
Corolario: *Sea* (G, c, s, t) *una instancia de PFM donde los valores de* c *son todos enteros no negativos. Entonces, el método de Ford-Fulkerson después de un número finito de operaciones elementales retorna con un* $s - t$ *flujo de valor máximo. Es decir, el método en este caso resuelve el PFM.*

Del teorema anterior también se obtiene directamente el siguiente resultado conocido como teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo.

Teorema (Flujo Máximo-Corte Mínimo):

$$\max_{f} Val(f) = \min_{(S,T)} c(S, T).$$

Flujo Máximo-Corte Mínimo

Un corolario directo del teorema anterior es el siguiente.
Corolario: *Sea* (G, c, s, t) *una instancia de PFM donde los valores de* c *son todos enteros no negativos. Entonces, el método de Ford-Fulkerson después de un número finito de operaciones elementales retorna con un* $s - t$ *flujo de valor máximo. Es decir, el método en este caso resuelve el PFM.*

Del teorema anterior también se obtiene directamente el siguiente resultado conocido como teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo.

Teorema (Flujo Máximo-Corte Mínimo):

$$\max_{f} Val(f) = \min_{(S,T)} c(S, T).$$

Ejemplo: Para la red del ejemplo anterior se observa que solo los vértices s y b son alcanzables desde s. Luego, definiendo $S^* = \{s, b\}$ y $T^* = \{a, t\}$ se tiene que (S^*, T^*) es un corte de capacidad mínima y $c(S^*, T^*) = \max_f Val(f) = Val(f^*) = 3$.

Tiempo de ejecución del método de Ford-Fulkerson

Sea $(G = (V, E), c, s, t)$ una instancia de PFM donde los valores de c son todos enteros no negativos. Entonces el número de operaciones elementales del método de Ford-Fulkerson está dado por:

- Inicialización: $f \leftarrow 0$ requiere a lo más $O(|E|)$ operaciones de asignación.

Tiempo de ejecución del método de Ford-Fulkerson

Sea $(G = (V, E), c, s, t)$ una instancia de PFM donde los valores de c son todos enteros no negativos. Entonces el número de operaciones elementales del método de Ford-Fulkerson está dado por:

- Inicialización: $f \leftarrow 0$ requiere a lo más $O(|E|)$ operaciones de asignación.
- El número de iteraciones del ciclo depende del $Val(f^*)$ donde f^* es un $s - t$ flujo de valor máximo. En el peor caso en cada iteración $\bar{c} = 1$ y así el número de iteraciones es $O(Val(f^*))$.

Tiempo de ejecución del método de Ford-Fulkerson

Sea $(G = (V, E), c, s, t)$ una instancia de PFM donde los valores de c son todos enteros no negativos. Entonces el número de operaciones elementales del método de Ford-Fulkerson está dado por:

- Inicialización: $f \leftarrow 0$ requiere a lo más $O(|E|)$ operaciones de asignación.
- El número de iteraciones del ciclo depende del $Val(f^*)$ donde f^* es un $s - t$ flujo de valor máximo. En el peor caso en cada iteración $\bar{c} = 1$ y así el número de iteraciones es $O(Val(f^*))$.
- En cada iteración: Calcular G_f requiere $O(|E|)$ operaciones y encontrar un camino p de aumento de flujo requiere $O(|V| + |E|)$. Determinar $\bar{c}$ requiere $O(|E_f|) = O(|E|)$ operaciones de comparación. Finalmente, actualizar f requiere $O(|E|)$ operaciones.

Tiempo de ejecución del método de Ford-Fulkerson

Sea $(G = (V, E), c, s, t)$ una instancia de PFM donde los valores de c son todos enteros no negativos. Entonces el número de operaciones elementales del método de Ford-Fulkerson está dado por:

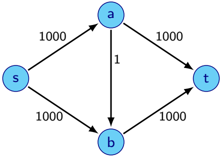
- Inicialización: $f \leftarrow 0$ requiere a lo más $O(|E|)$ operaciones de asignación.
- El número de iteraciones del ciclo depende del $Val(f^*)$ donde f^* es un $s - t$ flujo de valor máximo. En el peor caso en cada iteración $\bar{c} = 1$ y así el número de iteraciones es $O(Val(f^*))$.
- En cada iteración: Calcular G_f requiere $O(|E|)$ operaciones y encontrar un camino p de aumento de flujo requiere $O(|V| + |E|)$. Determinar $\bar{c}$ requiere $O(|E_f|) = O(|E|)$ operaciones de comparación. Finalmente, actualizar f requiere $O(|E|)$ operaciones.
- En total se requiere:
  $= O(Val(f^*)) \cdot (O(|V| + |E|) + O(|E|) + O(|E|) + O(|E|))$
  operaciones elementales. Luego, el tiempo de ejecución es $O(Val(f^*) \cdot (|V| + |E|)$ (i.e. no es polinomial en el peor caso).

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

(G, c) :



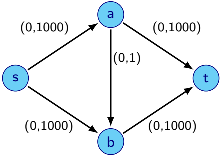
Método de Ford-Fulkerson:

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 0.$ (G, c, f) :

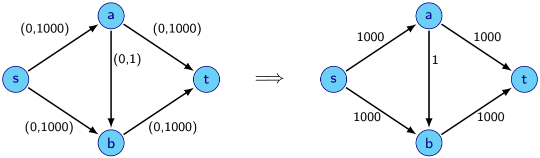


Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 0.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

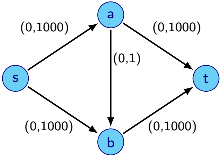
$\bar{c} = 1$

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

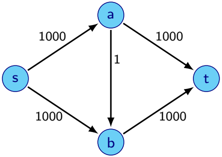
Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

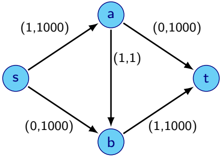
(G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

$\bar{c} = 1$

$t = 1.$ (G, c, f) :

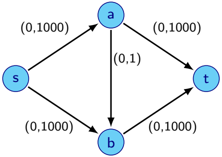


Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

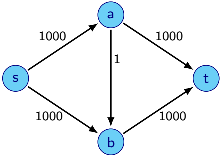
Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

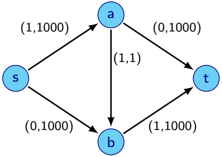
(G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

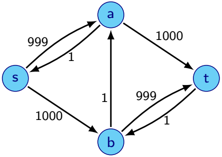
$\bar{c} = 1$

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



$p : s, b, a, t$

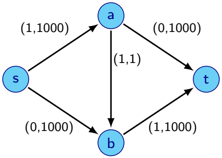
$\bar{c} = 1$

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

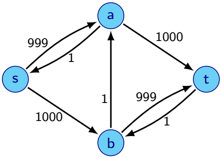
Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



$p : s, b, a, t$

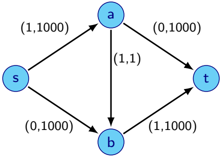
$\bar{c} = 1$

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

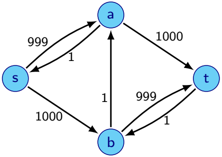
Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

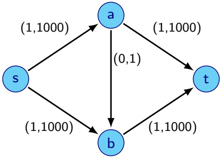
(G_f, c_f) :



$p : s, b, a, t$

$\bar{c} = 1$

$t = 2.$ (G, c, f) :

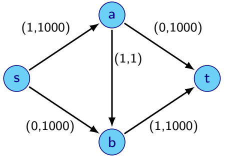


Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

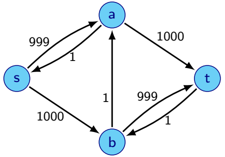
Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

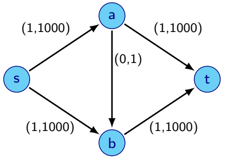
(G_f, c_f) :



$p : s, b, a, t$

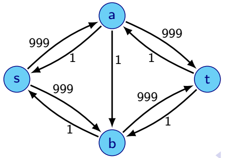
$\bar{c} = 1$

$t = 2.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

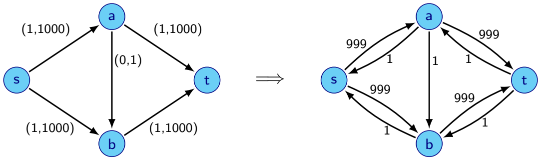
$\bar{c} = 1$

Algoritmo de Edmonds-Karp

Definición: El algoritmo de Edmonds-Karp corresponde al método de Ford-Fulkerson donde en cada iteración se elige un camino de aumento de flujo de largo mínimo (i.e. con el menor número de arcos).

Ejemplo: Dada (G, c, s, t) una instancia de PFM por la figura de abajo, primero mostramos el método de Ford Fulkerson con caminos que no son de largo mínimo. Posteriormente se resuelve PFM con Edmonds-Karp.

$t = 2.$ (G, c, f) : (G_f, c_f) :



$p : s, a, b, t$

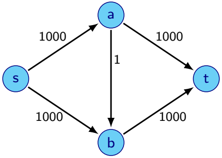
$\bar{c} = 1$

Escogiendo $\bar{c} = 1$ en cada iteración, el método realizará 2000 iteraciones antes de terminar!

Algoritmo de Edmonds-Karp

Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

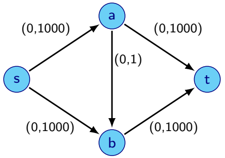
(G, c) :



Algoritmo de Edmonds-Karp

Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

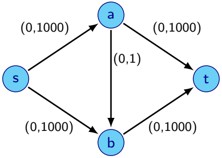
$t = 0.$ $\quad (G, c, f):$



Algoritmo de Edmonds-Karp

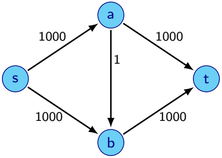
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 0.$ $\quad (G, c, f)$:



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



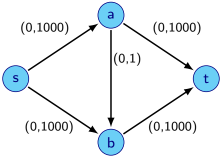
$p : s, a, t$

$\bar{c} = 1000$

Algoritmo de Edmonds-Karp

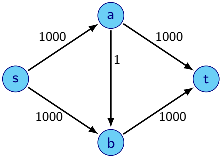
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

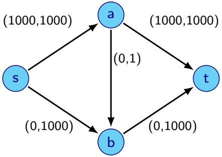
(G_f, c_f) :



$p : s, a, t$

$\bar{c} = 1000$

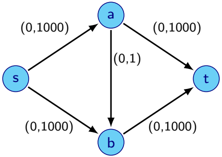
$t = 1.$ (G, c, f) :



Algoritmo de Edmonds-Karp

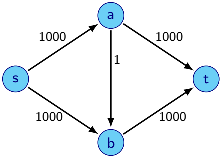
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 0.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

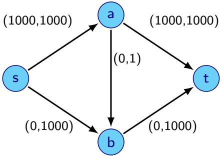
(G_f, c_f) :



$p : s, a, t$

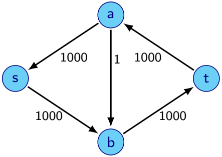
$\bar{c} = 1000$

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



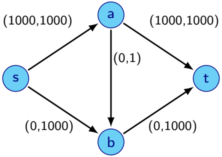
$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1000$

Algoritmo de Edmonds-Karp

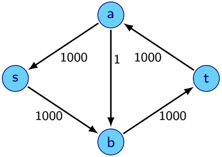
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :



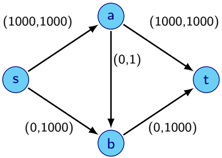
$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1000$

Algoritmo de Edmonds-Karp

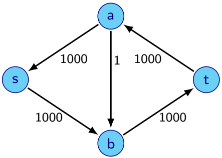
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 1.$ $\quad (G, c, f):$



$\Longrightarrow$

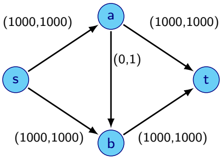
$(G_f, c_f):$



$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1000$

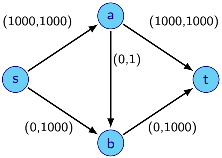
$t = 2.$ $\quad (G, c, f):$



Algoritmo de Edmonds-Karp

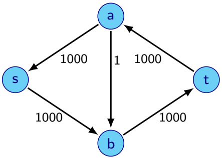
Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 1.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

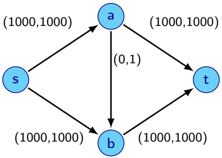
(G_f, c_f) :



$p : s, b, t$

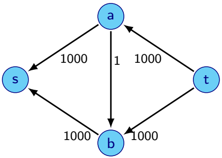
$\bar{c} = 1000$

$t = 2.$ (G, c, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f) :

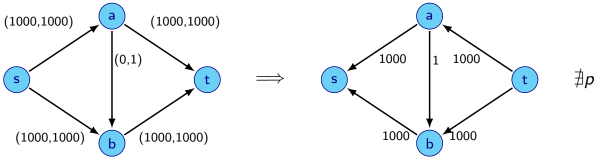


$\nexists p$

Algoritmo de Edmonds-Karp

Ejemplo: Según el algoritmo de Edmonds-Karp:

$t = 2.$ $(G, c, f):$ $(G_f, c_f):$



Como no hay camino de aumento de flujo, entonces f es de valor máximo con $Val(f) = 2000$ y el algoritmo retorna este flujo después de dos iteraciones.

Algoritmo de Edmonds-Karp

Teorema: *El algoritmo de Edmonds-Karp resuelve el PFM con capacidades enteras no negativas con un tiempo de ejecución* $O(|V| \cdot |E|^2)$.

Formulación lineal del PFM

Dado $G = (V, E)$ un digrafo con $V = \{1, \ldots, n\}$, donde s y t son nodo fuente y sumidero respectivamente, y $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ una función de capacidad, el PFM desde s a t puede ser formulado de la siguiente manera:

$$\text{máx } Val(f)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = \begin{cases} Val(f) & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -Val(f) & \text{si } i = t \end{cases}$$

$$\forall i, j = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq x_{ij} \leq c(i, j).$$

donde x_{ij} representa el s-t flujo f en el arco (i, j) (i.e. $f(i, j) = x_{ij}$) y $Val(f) = \sum_{j=1}^{n} x_{sj}$.