Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Evaluación 1 (PAUTA)
Algebra Lineal (527108-2)

1. Para los siguientes ejercicios se considera la siguiente definición: Una matriz A se dice idempotente si satisface que $A^2 = A$.

   a) Determinar los valores de a y b de manera que

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ -1 & 4 & b \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

   sea una matriz idempotente.

   Solución: Para encontrar los valores se debe igualar $A^2 = A$:

   $$\begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ -1 & 4 & b \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ -1 & 4 & b \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ -1 & 4 & b \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} -a-1 & 6a+15 & 10+ab \\ -6 & -a-3b+16 & 5 \\ 1 & a & 11-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & -5 \\ -1 & 4 & b \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

   De donde se puede ver que $a = -3$ y $b = 5$.

   (7 puntos)

   b) Probar que si B es una matriz idempotente cualquiera, entonces $det(B) = 1$ o $\det(B) = 0$.

   Solución: Si B es una matriz idempotente, entonces $B^2 = B$. Luego $det(B^2) = det(B)$ y por lo tanto $det(B)^2 - \det(B) = 0$. Las soluciones de esa ecuación es que $det(B) = 0$ o $det(B) = 1$.

   (8 puntos)

2. Sean $\ell : (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3),\ \lambda \in \mathbb{R}$ una recta y $\pi : ax + by + cz = d$ un plano. Demuestre que si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es perpendicular al vector normal del plano, entonces $\ell \cap \pi$ es vacío o ℓ está contenido en π.

   Solución: Se tiene que $v \cdot (a, b, c) = 0$, luego $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Luego intersectamos la recta con el plano:

   $$\begin{aligned} a(x_0 + \lambda v_1) + b(y_0 + \lambda v_2) + c(z_0 + \lambda v_3) &= d \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + \lambda(av_1 + bv_2 + cv_3) &= d \\ ax_0 + by_0 + cz_0 &= d \end{aligned}$$

   Por lo tanto, si la última igualdad es verdadera, entonces $\ell \subset \pi$ y si la última igualdad es falsa, entonces $\ell \cap \pi$ es vacía.

(15 puntos)

3. Para los siguientes ejercicios se considera la siguiente definición: Dos planos se dicen perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares.

   Considere los puntos $Q_1(1,2,0)$, $Q_2(2,0,0)$, $Q_3(3,3,2)$.

   a) Encuentre la ecuación del plano Π que pasa por Q_1, Q_2, Q_3.

   Solución: Calculamos los vectores $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (1,-2,0)$ y $\overrightarrow{Q_1Q_3} = (2,1,2)$. Un vector normal a Π es perpendicular a ambos, así que podemos tomar

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4,2,-5).$$

   Luego, como Π pasa por Q_2 y tiene vector normal $\overrightarrow{n}$, la ecuación de Π es $4x+2y-5z=8$.

(6 puntos)

   b) Sea L la recta que pasa por Q_1 y Q_2. Encuentre un plano Π' que contenga a L y sea perpendicular a Π.

   Solución: Notemos que $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (1,-2,0)$ es un vector director para L. El vector normal $\overrightarrow{m}$ a Π' debe ser perpendicular a $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, así que podemos tomar

$$\overrightarrow{m} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (10,5,10).$$

   Luego, como Π' pasa por Q_2, su ecuación es $10x+5y+10z=20$, o, equivalentemente, $2x+y+2z=4$.

(9 puntos)

4. Sean $k, c \in \mathbb{R}$. Considere los planos

$$\Pi_1 : x+7y+3z=2, \qquad \Pi_2 : x+5y+2z=1, \qquad \Omega_{k,c} : 2x-2y+kz=c.$$

   Encuentre los valores de k, c de modo que

   a) $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Omega_{k,c}$ sea vacío,

   b) $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Omega_{k,c}$ sea un punto,

   c) $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Omega_{k,c}$ sea una recta,

   d) $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Omega_{k,c}$ sea un plano.

Solución: Los puntos que están simultáneamente en los tres planos son las soluciones del sistema de ecuaciones en 3 incógnitas

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & kz & = & c \end{array}\right|$$

cuya matriz ampliada es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & k & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & k & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & k-4 & c-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & c+4 \end{array}\right)$$

(5 puntos)

Este sistema tiene solución única si $k \neq -2$, porque en ese caso $\det(A) = 3$ y, por tanto, $\det(A) = \det(A|B) = 3$. Si $k = -2$, hay dos casos: si $c \neq -4$, el sistema es incompatible. Si $c = -4$, el sistema tiene $\det(A) = \det(A|B) = 2 < 3$, así que tiene infinitas soluciones (en un grado de libertad).

(5 puntos)

Es decir, geométricamente, la intersección de los tres planos

a) es vacía si $k = -2$ y $c \neq -4$,

b) es un punto si $k \neq -2$,

c) es una recta si $k = -2$ y $c = -4$,

d) nunca puede ser un plano.

(5 puntos)

Tiempo: 100 minutos