Procesos Estocásticos : Cadenas de Márkov en tiempo discreto

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Procesos de Márkov : El concepto

Los procesos estocásticos Markovianos tienen la característica que la distribución X_{n+1} sólo depende de la distribución de X_n y no depende de $\{X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\}$ ni del “futuro" $\{X_{n+2}, X_{n+3}, \ldots\}$. En otras palabras :

“El estado futuro del proceso sólo depende del estado presente y no del resto de estados pasados."

o bien,

“Dado el presente, el futuro y el pasado son independientes."

Procesos de Márkov : Definición

- Un proceso $\{X_t : t \in T\}$ es Markoviano si $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, se verifica

$$\begin{aligned} & P\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\} \\ = \; & P\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} \leq x_n\}. \end{aligned}$$

- Si las trayectorias c.s. continuas, tal proceso Markoviano se llama *difusión* (Ej. : proceso de Wiener).
- Si E es discreto, la definición se simpifica :

$$\begin{aligned} & P\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} \\ = \; & P\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n\}. \end{aligned}$$

Outline

Ejemplo

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso aleatorio con E discreto.
X_n : estado de un auto y $E = \{x_1, \ldots, x_7\}$, con

1. x_1 : Todo OK.
2. x_2 : Existe un problema no identificado.
3. x_3 : Se identificó el problema, se está buscando su causa.
4. x_4 : Se encontró la causa, se está arreglando.
5. x_5 : Chequeo del auto post-reparación.
6. x_6 : Revisión técnica.
7. x_7 : Pérdida total de vehículo.

Probabilidad de transición

Hagamos los siguientes supuestos :

1. El auto puede estar en sólo uno de los estados $x_1, \ldots, x_7$.
2. $x_1, \ldots, x_7$ son todos estados posibles.

- Definimos $p_i(n) = P(X_n = x_i)$ como la probabilidad de estar en el estado i en el momento n.
- **Probabilidad de transición** es

$$p_{ij}(n) = P(X_n = x_j | X_{n-1} = x_i),$$

la probabilidad de pasar al estado j desde el estado i en el momento n.

- En general, $p_{ij}(n) \neq p_{ji}(n)$.

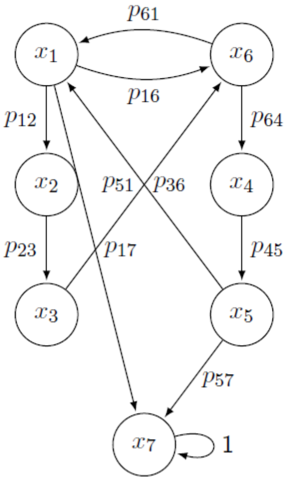
Probabilidad de transición

- Los cambios de estado de este tipo de procesos se llaman transiciones.
- Las probabilidades de cambiar de un estado i a uno j se llaman probabilidades de transición y se denotan $p_{ij}(n)$.
- Se dice que el proceso $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una Cadena de Markov (en tiempo discreto) si el proceso es Markoviano (i.e. tiene la propiedad de Markov) de tiempo discreto y con espacio de estados discreto.
- Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P(X_{n+1} = j | X_1 = k, X_2 = m, \ldots, X_n = i) \\ &= P(X_{n+1} = j | X_n = i). \end{aligned}$$

- Cuando $p_{ij}(n) = p_{ij}$, las probabilidades de transición no dependen del tiempo n, la cadena se denomina *homogénea*. En este caso son procesos estacionarios.

Ejemplo de la reparación del vehículo



Ejemplo

- Sea $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. independientes con valores en $\mathbb{N}_0$.

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i.$$

- Entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una cadena de Markov, aunque $X_0, X_1, \ldots$ no son independientes.

- Si además ξ_i son independientes, entonces la cadena es hommogénea.

Máas definiciones...

- Sea p_{ij} la probabilidad de transición en una cadena homogénea. Si $p_{ij} > 0$, se dice que el estado x_i comunica con x_j.

- En adelante, supongamos que el conjunto de estados E sea finito.

- La matriz $\mathbb{P} = (p_{ij})$, formada por las probabilidades de transición se denomina matriz de transición (en un paso).

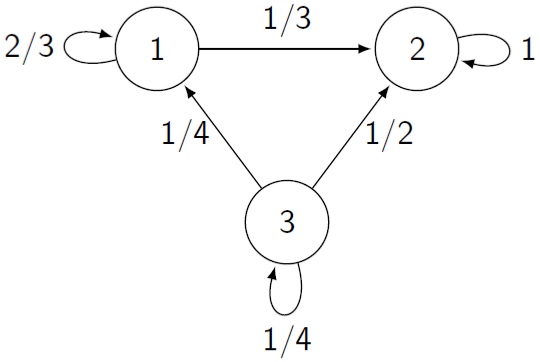
- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden m, tal que $0 \leq a_{ij} \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$, se denomina *matriz estocástica*.

- Cualquier potencia $\mathbb{P}^n$, $n \geq 1$ de una matriz de transición es una matriz estocástica.

- La matriz $\mathbb{P}^n$ se denomina matriz de transición en n pasos.

Ejemplo de una cadena de Markov de 3 estados

Supongamos una cadena de Markov dada por un grafo :



Ejemplo. Cont.

Entonces la matriz de transición está dada por

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema

- Una cadena de Markov homogénea está completamente definida por su matriz de transición $\mathbb{P}$ y la distribución inicial de probabilidades

$$p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

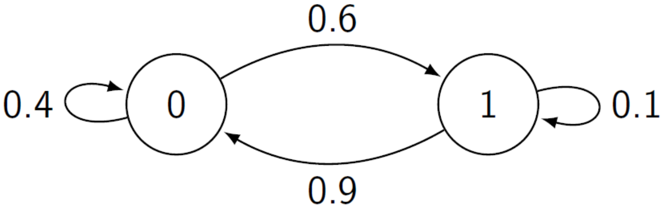
Ejemplo

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una cadena de Markov de dos estados, i.e. $E = \{0, 1\}$ con su matriz de transición

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \;\;\;1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo de una cadena de Markov de 2 estados

Su grafo es :



Ejemplo. Cont.

Dada una distribución inicial $p^{(0)} = (0.3, 0.7)$, esto es, $P(X_0 = 0) = 0.3$ y $P(X_0 = 1) = 0.7$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 0; X_0 = 0) &= P(X_1 = 0 | X_0 = 0) \cdot P(X_0 = 0) \\
&= p_{00} \cdot p_0^{(0)} = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X_2 = 0; X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&= \frac{P(X_2 = 0; X_1 = 1; X_0 = 0) \cdot P(X_1 = 1; X_0 = 0)}{P(X_0 = 0) \cdot P(X_1 = 1; X_0 = 0)} \\
&= P(X_2 = 0 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&= p_{10} \cdot p_{01} = 0.6 \cdot 0.9 = 0.54.
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Cont.

$$
\begin{aligned}
P(X_0 = 0 | X_1 = 1) &= \frac{P(X_0 = 0; X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} \\
&= \frac{P(X_1 = 1; X_0 = 0)}{P(X_1 = 1)} \\
&= \frac{P(X_1 = 1 | X_0 = 0) \cdot P(X_0 = 0)}{P(X_1 = 1)} \\
&= \frac{p_{01} \cdot p_0^{(0)}}{p_1^{(1)}} = \frac{0.6 \cdot 0.3}{0.25} = 0.72,
\end{aligned}
$$

puesto que

$p_1^{(1)} = P(X_1 = 1) = p_{01} \cdot p_0^{(0)} + p_{11} \cdot p_1^{(0)} = 0.6 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.25.$

Teorema

- Dada la distribución inicial $p^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots)$, la distribución de probabilidades en el momento k está dada por

$$p^{(k)} = p^{(0)} \cdot \mathbb{P}^k$$

Ejemplo : Lluvia en Concepción

- Suponga que la probabilidad de que llueva hoy es 0.4 si durante los últimos dos días no llovió y 0.6 si en al menos uno llovió.
- Sea Y_n el clima en el n-ésimo día, "L" lluvioso y "S" soleado.
- ¿Es $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov ?
- **R. :** No es markoviano, pero $\{X_n = (Y_{n-1}, Y_n)\}$ sí es Markoviano.

- Construya la matriz de transición y calcule la distribución del clima de un Jueves, dado que no llovió Lunes pero sí Martes.
- Definimos los estados $E = \{(SS), (LS), (SL), (LL)\}$. Se tiene la siguiente distribución para las configuraciones de tres días :
  - SSL — 0.4
  - LLL — 0.6
  - LSL — 0.6
  - SLL — 0.6

Por tanto, la matriz de transición viene dada por :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ (SS) \\ (LS) \\ (SL) \\ (LL) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (SS) & (LS) & (SL) & (LL) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dado que llovió Martes, es el estado (SL). Por tanto, tenemos una distribución inicial $p^{(0)} = (0\,0\,1\,0)$. Al Jueves existen dos pasos, por lo que la distribución de la pareja (Miércoles,Jueves) estará dada por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (SS) & (LS) & (SL) & (LL) \end{array} \\ (0\,0\,1\,0)\mathbb{P}^2 = & \begin{pmatrix} 0.16 & 0.24 & 0.24 & 0.36 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **R. :** Así, la probabilidad de que esté soleado el Jueves es $0.16 + 0.24 = 0.4$ y que llueva es $0.24 + 0.36 = 0.6$.

Def. La probabilidad de transición en k pasos

- Se define la probabilidad de transición en k pasos del estado i al j para una cadena homogénea como

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(k)} &= P(X_{n+k} = j | X_n = i) \\
&= P(X_k = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{m} P(X_k = j; X_{k-1} = l | X_0 = i) \qquad \forall k \geq 2
\end{aligned}
$$

Teorema de Chapman-Kolmogorov

- Para una cadena homogénea se tiene que

1. $p_{ij}^{(n)} = \sum_{l} p_{il}^{n-k} p_{lj} \qquad \forall k < n$
2. $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{n-k} \cdot \mathbb{P}^k$