

OPTIMIZACIÓN III (525551)
Ejercicios de complejidad temporal

- P1) La operación de reducción polinomial \leq_p induce una relación en los problemas combinatoriales de decisión, i.e. dos problemas de decisión Q y R están relacionados si $Q \leq_p R$.
- a) Pruebe que la relación inducida por \leq_p es refleja y transitiva.
 - b) Muestre que la relación inducida por \leq_p no es antisimétrica.
 - c) Pruebe que si la relación inducida por \leq_p es simétrica, entonces $P=NP$.
- P2) Sea Q y R problemas combinatoriales de decisión. Pruebe que:
- a) $Q \in P \iff \overline{Q} \in P$.
 - b) $Q \leq_p R \iff \overline{Q} \leq_p \overline{R}$.
 - c) $(Q \leq_p R) \wedge (R \in NP) \implies Q \in NP$.
 - d) Todos los lenguajes NP-completos están en P o ninguno de ellos lo está.
- P3) Pruebe, a partir de resultados vistos en clase, que los problemas CLIQUE y VERTEX-COVER son ambos NP-completos.
- P4) Se sabe que el siguiente problema en grafos dirigidos es NP-hard.
HAMPATH: Dado G un grafo dirigido ¿Tiene G un camino Hamiltoniano?
- a) Muestre que HAMPATH es NP-Completo. Concluya que HAMILTONIAN en grafos dirigidos es también NP-Completo.
 - b) Muestre que $NP=co-NP$ si y sólo si HAMPATH es co-NP.
- P5) Muestre que los siguientes problemas son NP-Completos.
- a) **TOUR CON RESTRICCIÓN:** Dado $k \in \mathbb{N}$ y $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ ciudades diferentes donde la distancia $d(c_i, c_j)$ del trayecto (no necesariamente simétrica) entre cualquier par de ellas es conocida.
¿Es posible definir un orden $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$ de todas las ciudades de C para visitarlas de manera que la distancia del trayecto entre dos ciudades consecutivas a visitar sea menor o igual a k ?
 - b) **FEEDBACK VERTEX SET:** Dado $G = (V, A)$ un grafo dirigido y $k \in \mathbb{N}$ ¿Existe $V' \subseteq V$ un feedback vertex set (FVS) de G , i.e. un subconjunto de vértices tal que todo ciclo dirigido de G contiene algún vértice de V' , con $|V'| \leq k$?