

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PL2: TALLER R.M. I (MAT 525115)
Tema 2: Razonamientos & Demostraciones (I).

En cada problema, una vez identificadas la proposición \mathcal{P} que modela las hipótesis y \mathcal{Q} la tesis o conclusión, se debe indicar si la argumentación de la demostración corresponde a

▪ *Método directo:*
 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

▪ *Reducción al absurdo:*
 $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$

▪ *Contrareciproco:*
 $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \Leftrightarrow [\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}]$

Establecer o refutar:

P1 Si a, b y c son tres números positivos entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1.$$

(\mathcal{P}) En los siguientes ejercicios, puede usar más de un método de demostración.

(i) Razonar por reducción al absurdo. Probar que las dos rectas

$$L_1 : y = x + 1 \quad \wedge \quad L_2 : y = x - 1$$

son paralelas

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ y n^2 es un número par entonces n también es un número par.

(iii) Sean A, B y C son tres subconjuntos de un mismo conjunto universo \mathcal{U} . Probar que

$$a) \quad A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$b) \quad B = C \Leftrightarrow B \triangle C = \emptyset$$

$$c) \quad B \neq C \Leftrightarrow \left[B \cap C^c \neq \emptyset \vee C \cap B^c \neq \emptyset \right]$$

$$(iv) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A = A \cap B$$

P3 Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow [(x = 0) \wedge (y = 0)]$$

¿Se puede inferir fundadamente que $x^2 + y^2 > 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$?

(\mathcal{P}) Si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Entonces

$$[n \cdot m \in 2\mathbb{N}] \Leftrightarrow [(n \in 2\mathbb{N}) \vee (m \in 2\mathbb{N})].$$

¿Se puede inferir fundadamente que la multiplicación de números impares es impar y recíprocamente?

P5 Sean $A; B$ y C tres subconjuntos de un mismo conjunto universo. Probar

1. $\left[A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \right] \Leftrightarrow B = C.$
2. $A \triangle B = A \triangle C \Leftrightarrow B = C.$

(P) Para todo par (a,b) de números reales no negativos se tiene que las siguientes proposiciones son equivalentes

I: $a < b$

II: $a^2 < b^2$

III: $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Ind. Recordar $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ y $(a - b) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

P7 Sean A y B subconjuntos de un mismo conjunto universo U . Establecer, las siguientes propiedades:

1. $A^c - B^c = B - A$
2. $A \cup B = B \iff A = A \cap B.$
3. $A \subset B \iff B^c \subset A^c.$
4. $[(A \cap B^c)]^c \cup (B \cap A^c) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$

P8 Sean A, B y C subconjuntos de un mismo conjunto universo U . Usando (P7.4) establecer, la identidad fundamental

$$(A \triangle B) \triangle C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C)$$

Alternativamente defina las funciones proposicionales p, q y r e infiera de la tabla de verdad de $(p \vee q) \vee r$ el lado derecho de la identidad. Visualizar $(p \vee q) \vee r$ como un circuito lógico. Comentar la situación presentada.

P9 (Continuación P8) Establecer

1. $A \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle A$
2. $(A \triangle B) \triangle C = (B \triangle C) \triangle A$
3. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

Notas.(i) La identidad 1 establece conmutatividad de la diferencia simétrica y basta considerar dos subconjuntos para establecerla $X \triangle Y = Y \triangle X$ y aún más recordar que $p \vee q = q \vee p$, etc.
(ii) Entre (2) y (3) ¿Cuál es la propiedad asociativa de la operación \triangle ?
(iii) El objetivo del problema es demostrar de manera conjuntista esa propiedad.