UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 1
Análisis Real II (525302)
Integral de Riemman-Stieltjes

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

Si no se dice lo contrario, considere $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

Definición 1 Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define la *parte entera* de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, como el mayor entero menor o igual que x, o sea

$$\lfloor x \rfloor = \sup \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x \}$$

Asimismo, se define la parte fraccionaria de x, denotada por $\{x\}$, como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Problema 1 Sean $\bar{x} \in [a, b]$ y $\alpha, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que α es monótonamente creciente en $[a, b]$ y continua en $\bar{x}$, y f está definida de tal forma que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \bar{x} \\ 0 & \text{si } x \neq \bar{x} \end{cases}$$

Demuestre que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y que $\displaystyle\int_a^b f \, d\alpha = 0$.

Problema 2 Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ no negativa. Demuestre que, si $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx = 0$, entonces $f \equiv 0$. Aplique lo anterior para probar que, si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ es tal que para toda función $g \in \mathcal{R}([a, b])$ se cumple que $\displaystyle\int_a^b f(x) g(x) \, dx = 0$, entonces $f \equiv 0$.

Problema 3 Demuestre que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada tal que f^3 es Riemann-integrable, entonces f también lo es. Mediante un ejemplo, muestre que existe una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que no es Riemann-integrable, pero f^2 sí lo es.

Problema 4 Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $(\forall c \in (0, 1))\ f \in \mathcal{R}([c, 1])$. Si el siguiente límite existe y es finito, se define

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x) \, dx$$

Demuestre que, si $f \in \mathcal{R}([0, 1])$, la definición anterior coincide con la definición tradicional.

Problema 5 (Criterio de la Integral para Convergencia de Series) Sea una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de términos no negativos y $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) = a_n$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_1^{\varepsilon} f(x) \, dx = \int_1^{\infty} f(x) \, dx$ existe.

Problema 6 Determine cómo puede aplicarse la Integración por Partes para el cálculo de una integral impropia. Aplique lo anterior para deomstrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{(1+x)^2}\,dx$$

Luego, demuestre que sólo una de ellas es absolutamente convergente.

Problema 7 (Función zeta de Riemann) La función zeta de Riemann, nombrada en honor a Bernhard Riemann, es una función que tiene una importancia significativa en la Teoría de Números (para el estudio de los Números Primos), la Física y la Teoría de Probabilidades, entre otras ramas de la Matemática. Dicha función se define como $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall s > 1)\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Demuestre que

$$\zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}dx = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

Problema 8 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\text{, con } \gcd(m,n) = 1 \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f \in \mathcal{R}([0,1])$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Concluya que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

Problema 9 Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partición de $[a,b]$ tal que $(\forall k \in \{0,1,\ldots,n\})$ $x_k = a + hk$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$ y $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left[a + \frac{k(b-a)}{n}\right] \right)$$

Use este resultado para calcular el valor exacto de

1) $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Problema 10 Aplique el resultado del problema anterior para escribir como una integral definida los siguientes límites. Si es posible, calcúlela.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p\right)$, con $p>0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k+n}\right)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^2}{(n+k)^3}\right)$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+4k/n}}\right)$

Problema 11 Sea $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona y $f\in\mathcal{R}(\alpha)$. Sea $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ partición de $[a,b]$ tal que $(\forall k\in\{0,1,\ldots,n\})\ x_k=a+hk$, donde $h=\dfrac{b-a}{n}$ y $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\left[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\right]$$

Use este resultado para calcular el valor exacto de

1) $\displaystyle\int_0^{10}x\ d\left(x+\lfloor x\rfloor\right)$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\ d\left(x\,|x|\right)$

3) $\displaystyle\int_0^{3}x\ d\{x\}$ (Indicación: separe la integral en intervalos en los que la función $\alpha(x)=\{x\}$ sea creciente)

Problema 12 Sea $f\in\mathcal{R}([0,a])$, con $a>0$. Demuestre que $\displaystyle\int_0^a f(a-x)\ dx=\int_0^a f(x)\ dx$. Use este resultado para hallar el valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\ dx$.

Problema 13 Sea $a>0$ y $f\in\mathcal{R}([-a,a])$. Demuestre que

1) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)\ dx=\int_0^a f(x)\,dx$. Concluya que $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\ dx=2\int_0^a f(x)\ dx$.

2) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)\ dx=-\int_0^a f(x)\,dx=$ y $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\ dx=0$.

Problema 14 Sea $p>0$ y $f\in\mathcal{R}([0,p])$, con $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función $p-$periódica. Demuestre que, para $a\in\mathbb{R}$, se cumple que $f\in\mathcal{R}([a,a+p])$ y

$$\int_0^p f(x)\ dx=\int_a^{a+p}f(x)\ dx$$

Problema 15 Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias. Considere $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ y $\gamma\in\mathbb{R}$. Si es posible, calcule su valor.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\, dx$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\ln(x)|^\beta}{x^\alpha}\, dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 x^\gamma\, |\ln(x)|^\beta\, dx$

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\,(1+\ln(x))^\beta}\, dx$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\gamma x)\cos(\alpha x)\, dx$

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\gamma x)\sin(\alpha x)\, dx$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-\gamma x)\, dx$

Problema 16 (Teorema del Valor Medio para Integrales) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

1) Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\, f(c)$$

2) Sea ahora $g \in \mathcal{R}([a,b])$, con g una función positiva. Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx$$

---

18 de Agosto de 2014