UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Teorema de Grassmann: Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $(U, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ dos subespacios vectoriales de $(V, +, \cdot)$. Entonces,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) .$$

Demostración.
Primero, como V es de dimensión finita, todos sus subespacios también lo serán. De esta forma, sea $\dim(U \cap W) = m$, $\dim(U) = r$ y $\dim(W) = s$, con $m, r, s \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $B_1 := \{v_1, ..., v_m\}$ una base de $U \cap W$. Como $U \cap W \subseteq U$, se puede completar la base B_1 de manera de inducir el conjunto $B_2 := \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_{r-m}\}$, una base de U. Análogamente, se induce el conjunto $B_3 := \{v_1, ..., v_m, w_1, ..., w_{s-m}\}$, una base de W.
Afirmación 1: El conjunto $B := \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_{r-m}, w_1, ..., w_{s-m}\} \subseteq V$ es l.i.
En efecto, consideremos la combinación lineal de elementos de B que da el vector nulo:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k \, u_k + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l \, w_l = \theta \\ \Rightarrow &\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k \, u_k = - \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l \, w_l =: z \, . \end{aligned}$$

Tenemos que $z \in W$ y también que $z \in U$, en consecuencia $z \in U \cap W = \langle B_1 \rangle$. De esta forma resulta

$$z = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, v_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, v_j + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l \, w_l = \theta \, ,$$

de donde, en vista que B_3 es l.i. (por ser un conjunto base), se desprende que $\forall \, j \in \{1, ..., m\} \, : \, \delta_j = 0$ y $\forall \, l \in \{1, ..., s - m\} \, : \, \gamma_l = 0$. Esto nos permite afirmar que $z = \theta$ y así

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k \, u_k = \theta \, .$$

Invocando el hecho que B_2 es l.i, se infiere que $\forall \, j \in \{1, ..., m\} \, : \, \alpha_j = 0$ y $\forall \, k \in \{1, ..., r - m\} \, : \, \beta_k = 0$. De esta manera. se concluye que el conjunto B es l.i.
Afirmación 2: $\langle B \rangle = U + W$.
Como $B \subseteq U + W$, se deduce que $\langle B \rangle \subseteq U + W$.
Por probar la otra inclusión: $U + W \subseteq \langle B \rangle$. Sea $z \in U + W$, entonces $\exists \, x \in U$, $\exists \, y \in W$ tales que $z = x + y$. Tenemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k \, u_k \, , \\ y &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j \, v_j + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l \, w_l \, , \end{aligned}$$

lo cual implica

$$z = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \tilde{\alpha}_j) \, v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k \, u_k + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l \, w_l \in \langle B \rangle \, .$$

Esto permite deducir que $U + W \subseteq \langle B \rangle$.
En consecuencia, se concluye que $\langle B \rangle = U + W$, y por la Afirmación 1, B es una base de $U + W$.
Conclusión: Tenemos

$$\dim(U + W) = r + s - m = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

RBP/rbp 04.05.2021