Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 3 — miércoles 29 de julio de 2020

Entrega: viernes 7 de agosto de 2020, 23.00 horas

Problema 1. Se considera la ecuación

$$x^2 + y + \sin(xy) = 0.$$

¿Es posible resolver esta ecuación en una vecindad de $(0,0)$ en la forma $y = g_1(x)$ o $x = g_2(y)$? Si posible, calcular las derivadas $g_1'(0)$ y $g_2'(0)$.

Solución sugerida.

1.) Sea $F(x,y) := x^2 + y + \sin(xy)$. Se verifica facilmente que $F(0,0) = 0$ y que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Para las derivadas parciales se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2x + y\cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 1 + x\cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0. \end{aligned}$$

Considerando que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,0) = 0$ y $\partial F/\partial y(0,0) \neq 0$, el Teorema de Funciones Implícitas implica que existen $\delta > 0$ y una función $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ tales que

$$F\bigl(x, g_1(x)\bigr) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-\delta, \delta). \tag{$*$}$$

Es decir, la ecuación puede ser resuelta en fórma única como $y = g_1(x)$ en una vecindad de $(0,0)$.

2.) Como $\partial F/\partial x(0,0) = 0$, el Teorema de Funciones Implícitas no puede ser utilizado para decidir la resolubilidad con respecto a x. Para poder contestar la pregunta en sentido negativo ("no"), demostraremos que para $y < 0$ pequeño la ecuación $F(x,y) = 0$ posee por lo menos dos soluciones. Para tal efecto utilizaremos la función g_1 definida arriba. Insertando $x := 0$ en $(*)$ se tiene $0 + g_1(0) + \sin(0 \cdot g_1(0)) = 0$, luego $g_1(0) = 0$. Para $x \in (\delta, \delta)\backslash\{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + g_1(x) + \sin\bigl(xg_1(x)\bigr) > g_1(x) + \sin\bigl(xg_1(x)\bigr) \geq g_1(x) - \bigl|\sin\bigl(xg_1(x)\bigr)\bigr| \\ &\geq g_1(x) - \bigl|xg_1(x)\bigr|, \end{aligned}$$

donde utilizamos que $|\sin\eta| \leq |\eta|$ para $|\eta| < 1$. Sea $\delta^* := \min\{\delta, 1/2\}$, entonces

$$\bigl|xg_1(x)\bigr| \leq \delta^*\bigl|g_1(x)\bigr| \leq \frac{1}{2}\bigl|g_1(x)\bigr| \quad \text{para todo } x \in [-\delta^*, \delta^*]\backslash\{0\},$$

luego $g_1(x) < 0$, pero $g_1(0) = 0$. Sea ahora $\eta^* := \max\{g_1(-\delta^*), g_1(\delta^*)\}$. De acuerdo al Teorema del Valor Intermedio para cada $0 > y > \eta^*$ existen dos números $x_1 \in (-\delta^*, 0)$ y $x_2 \in (0, \delta^*)$ tales que $g_1(x_1) = y = g_1(x_2)$, es decir para todo $y \in (\eta^*, 0)$ existen $x_1 \neq x_2 \in (-\delta^*, \delta^*)$ tales que $F(x_1, y) = 0 = F(x_2, y)$, lo que demuestra que para $y < 0$ pequeño la ecuación $F(x, y) = 0$ posee por lo menos dos soluciones.

3.) Derivando ambos lados de $(*)$ obtenemos

$$2x + g_1'(x) + \cos\bigl(xg_1(x)\bigr)\bigl(g_1(x) + xg_1'(x)\bigr) = 0,$$

es decir con $x = 0$, $g_1'(0) = 0$.

Problema 2. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Demostrar que en una vecindad de $(2, 5)$ el sistema (1) es resoluble mediante una función continuamente diferenciable $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ tal que $u(2, 5) = -1$ y $v(2, 5) = 0$. Determinar las primeras derivadas de u y v en el punto $(2, 5)$.

Solución sugerida.

1.) Sean $F(x, y, u, v) := x^2 + uy + \mathrm{e}^v$, $G(x, y, u, v) := 2x + u^2 - uv - 5$. Efectivamente, $F(2, 5, -1, 0) = 0$ y $G(2, 5, -1, 0) = 0$, además

$$\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial F/\partial u & \partial F/\partial v \\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \mathrm{e}^v \\ 2u - v & -u \end{vmatrix} = (v - 2u)\mathrm{e}^v - uy,$$

luego

$$\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(2, 5, -1, 0) = 2 + 5 = 7 \neq 0.$$

Como además $F, G \in C^1(\mathbb{R}^4)$, concluimos que el sistema $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$ puede ser resuelto en una vecindad de $(2, 5, -1, 0)$ en forma única en la forma requerida.

2.) Para calcular las derivadas parciales solicitadas notamos primero que

$$\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(2, 5, -1, 0)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 15 \end{bmatrix},$$

además

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(2, 5, -1, 0) = \begin{bmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2, u=-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este punto,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix} = -\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right),$$

es decir

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(2, 5) = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. Se consideran las curvas

$$g_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0\big\}, \quad g_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = -1\big\}.$$

Determinar puntos $P = (x_1, y_1) \in g_1$ y $Q = (x_2, y_2) \in g_2$ tales que la distancia euclidiana $d(P,Q)$ es mínima.

Solución sugerida. La función que debe asumir su extremo es

$$\tilde{d}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big)^{1/2},$$

o bien su radicando $d(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, bajo las restricciones

$$P \in g_1 \Rightarrow x_1 y_1 = 1, \quad Q \in g_2 \Rightarrow x_2 + 2y_2 = -1,$$

las cuales podemos expresar como

$$h_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1 y_1 - 1 = 0, \quad h_2(x_1.y_2, x_2, y_2) := x_2 + 2y_2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Notamos que

$$\nabla h_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = (y_1, x_1, 0, 0), \quad \nabla h_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 1, 2),$$

por lo tanto, si λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a la primera y la segunda de las restricciones (2), respectivamente, obtenemos a partir de

$$\nabla d - \lambda_1 \nabla h_1 - \lambda_2 \nabla h_2 = \mathbf{0}$$

las cuatro ecuaciones

$$2x_1 - 2x_2 - \lambda_1 y_1 = 0, \tag{3}$$

$$2y_1 - 2y_2 - \lambda_1 x_1 = 0, \tag{4}$$

$$-2x_1 + 2x_2 - \lambda_2 = 0, \tag{5}$$

$$-2y_1 + 2y_2 - 2\lambda_2 = 0. \tag{6}$$

Sumando las ecuaciones (3) y (5), y (4) y (6), respectivamente, obtenemos

$$-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 = 0, \tag{7}$$

$$\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0. \tag{8}$$

Utilizando $y_1 = 1/x_1$ y sumando (7) y (8) obtenemos

$$\lambda_1 \left(-x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = 0.$$

La solución no puede ser $\lambda_1 = 0$, porque en este caso (3) y (4) entregarían $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, es decir $P = Q$, lo que se contradice con $g_1 \cap g_2 = \varnothing$. Igualando el segundo factor a cero obtenemos $x_1 = -\sqrt{2}$ o $x_1 = \sqrt{2}$. La primera de estas soluciones es decartada porque se pide $x = 0$ (definición de g_1). Para $x_1 = \sqrt{2}$ obtenemos, sucesivamente, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

luego, insertando los valores de x_1 e y_1 y $2y_2 = -1 - x_2$ en (5) y (6),

$$-2\sqrt{2} + 2x_2 - \lambda_2 = 0, \quad -\sqrt{2} - 1 - x_2 - 2\lambda_2 = 0,$$

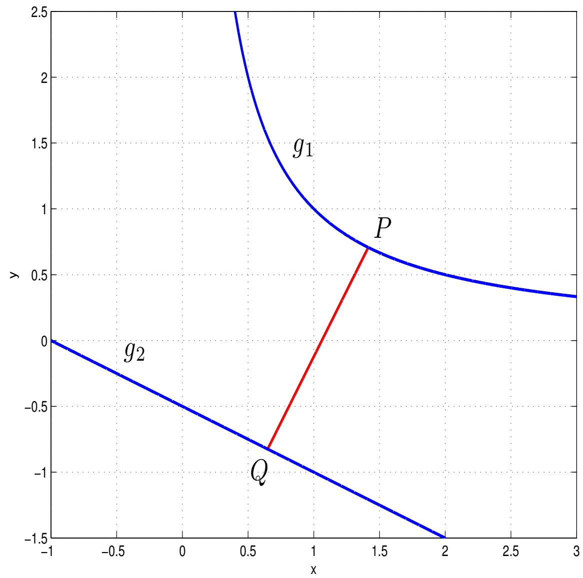

FIGURA 1. Solución del Problema 3

de lo cual despejamos

$$x_2 = \frac{3\sqrt{2}-1}{5} \approx 0{,}6485, \quad y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \approx -0{,}8243,$$

es decir $Q \approx (0{,}6485, -0{,}8243)$.

Problema 4. ¿Cuál es el volúmen de cada uno de los siguientes cuerpos?

a) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \mathrm{e}^z)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi z)))^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$
b) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - \mathrm{e}^y| \leq y, |z - \cos(5\pi y)| \leq 2y, \quad 0 \leq y \leq 1\}$

Solución sugerida.

a) Para cada $\zeta \in [0,1]$, el conjunto

$$\begin{aligned} S_\zeta &= K \cap \{(x,y,z) \mid z = \zeta\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \mathrm{e}^\zeta)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi\zeta)))^2 \leq 1, \, z = \zeta\} \end{aligned}$$

es un disco con centro $(\mathrm{e}^\zeta, \cos(5\sin(\pi\zeta)))$ y radio uno ubicado en el plano $z = \zeta$. Este disco tiene la medida $q(\zeta) = \pi$. Por lo tanto, de acuerdo al principio de Cavalieri, el volúmen solicitado es

$$V = \iiint_K \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} q(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \pi.$$

b) Para cada $\eta \in [0,1]$, el conjunto

$$S_\eta = K \cap \{(x,y,z) \mid y = \eta\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - \mathrm{e}^\eta| \leq \eta,\ |z - \cos(5\pi\eta)| \leq 2\eta,\ y = \eta\}$$

es un rectángulo con centro $(\mathrm{e}^\eta, \cos(5\pi\eta))$ y lados 2η en x y 4η en z. Este rectángulo tiene la medida $q(\eta) = 8\eta^2$. Por lo tanto, de acuerdo al principio de Cavalieri, el volúmen solicitado es

$$V = \iiint\limits_K \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\eta=0}^{\eta=1} q(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 8\int_0^1 \eta^2\,\mathrm{d}\eta = \frac{8}{3}.$$

Problema 5.

a) Determinar la masa del sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\delta(x,y,z) = (x^2+z^2)^{1/2}$.

b) Calcular la masa del sólido limitado por la superficie $(x^2+y^2+z^2)^3 = z^4$ con $z \geq 0$ si su densidad en cada punto $P(x,y,z)$ es $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

Solución sugerida.

a) La masa del sólido es

$$m = \iiint\limits_Q (x^2+z^2)^{1/2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

donde el sólido Q es limitado por $y = 4$ e $y = x^2 + z^2$, es decir

$$Q = \bigl\{(x,y,z) \,|\, x^2+z^2 \leq y \leq 4,\ x^2+z^2 \leq 4\bigr\}.$$

Haciendo la transformación cíndrica en Q definida por $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $y = y$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y definiendo

$$R := \bigl\{(r,\theta,y) \,|\, r^2 \leq y \leq 4,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\bigr\}$$

obtenemos

$$m = \iiint\limits_R r^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{128}{15}\pi \approx 36{,}808257.$$

b) La masa del sólido es

$$m = \iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

donde el sólido Q es limitado por la superficie $S: (x^2+y^2+z^2)^3 = z^4$ con $z \geq 0$. Como la suma $x^2+y^2+z^2$ aparece en el integrando, podemos transformar la integral a coordenadas esféricas:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Así, la ecuación $(x^2+y^2+z^2)^3 = z^4$ se convierte en $\rho = \cos^2\phi$, por lo tanto la nueva región sobre la cual integramos es

$$D = \bigl\{(\rho,\theta,\phi) \,|\, 0 \leq \rho \leq \cos^2\phi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/2\bigr\}.$$

Entonces,

$$m = \iiint_D (\rho^2)^{3/2} \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \iiint_D \rho^5 \sin\phi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\phi \left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^{\cos^2\phi} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{12}\phi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{39} \approx 0{,}0805537.$$

Problema 6. Calcular el volumen y centro de masa del sólido limitado por la superficie $z = y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

Solución sugerida. Sea D el triángulo limitado por $x = 0$, $y = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - \frac{2}{3}x$. Entonces el volumen V solicitado está dado por

$$V = \iint_D \int_{z=0}^{z=y^2} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} \int_{z=0}^{y^2} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{6} \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{x=0}^{6} \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \left[\left(4 - \frac{2}{3}x\right)^4\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^4 = 32.$$

Para calcular el centro de masa obtenemos

$$V_x = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} \int_{z=0}^{y^2} x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} xy^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{6} x \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_{x=0}^{6} x \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^6 x \left(64 - 32x + \frac{16}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^3\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\left[32x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{8}{135}x^5\right]_{x=0}^{x=6} = 38{,}4,$$

$$V_y = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} \int_{z=0}^{y^2} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} y^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{6} \left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_{x=0}^{6} \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} \left[\left(4 - \frac{2}{3}x\right)^5\right]_{x=0}^{x=6} = -\frac{3}{40}(0^5 - 4^5)$$

$$= \frac{3 \cdot 1024}{40} = \frac{384}{5},$$

$$V_z = \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} \int_{z=0}^{y^2} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{4-\frac{2}{3}x} y^4 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int_{x=0}^{6} \left[y^5\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{10}\int_{x=0}^{6} x \left(4 - \frac{2}{3}x\right)^5 \mathrm{d}x = \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} \left[\left(4 - \frac{2}{3}x\right)^6\right]_{x=0}^{x=6} = -\frac{1}{40}(0^6 - 4^6)$$

$$= \frac{512}{5}.$$

En virtud de lo anterior, las coordenadas del centro de masa están dadas por

$$\left(\frac{V_x}{V}, \frac{V_y}{V}, \frac{V_z}{V}\right) = \left(\frac{38{,}4}{32}, \frac{384}{5 \cdot 32}, \frac{512}{5 \cdot 32}\right) = (1{,}2, 2{,}4, 3{,}2).$$