UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra III
525201
15 de abril de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 6

1. **Definición:** *Una transformación lineal D se dice idempotente si $D^2 = D$.*

   a) Demuestre que si D es idempotente entonces $Im(D) = S_1$ y $Ker(D) = S_0$.

   b) Concluya que si V es de dimensión finita y D es idempotente, entonces $\sigma(D) = \{0, 1\}$ y D es diagonalizable.

   c) Demuestre que si D es idempotente, entonces $D + id$ es inyectiva.

2. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, 0)$.

   a) Para todo $i = 1, \ldots, n$ hallar un subespacio T-invariante de dimensión i.

   b) Demuestre que no existen S y U subespacios T-invariantes propios tales que $\mathbb{R}^n = S \oplus U$.

3. **Definición.** *Dos operadores E y F se dicen independientes si $E \circ F = \Theta$ y $F \circ E = \Theta$*

   a) Demuestre que si E y F son idempotentes e independientes, entonces $E + F$ es también idempotente.

   b) Encuentre además dos operadores idempotentes no independientes tales que su suma no sea idempotente.

4. Sea la función $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida como sigue.

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)\,dt$$

   a) Muestre que T es lineal.

   b) Muestre que T es inyectiva pero no sobreyectiva.

   c) Considere $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, el operador derivada: $D(p(x)) = p'(x)$. Demuestre que es lineal y que no es inyectivo.

   d) Demuestre que $T \circ D = id$.

   e) Concluya que D es sobreyectivo.

   f) Calcule $D \circ T$ y decida si D y T conmutan o no.

5. **Definición.** *Una transformación lineal $N : V \to V$ se dice* nilpotente *si existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $N^k = 0$.*

   a) Demuestre que los valores propios de una transformación nilpotente son todos nulos.

   b) Demuestre además que si N es nilpotente, pero no es nula, entonces existe $v \in V$ tal que $v \notin Ker(N)$ y $v \in Ker(N^2)$.

6. Sea V un e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y sea $T : V \to V$ un operador lineal cuyos valores propios son todos nulos. Demuestre que T es nilpotente.

7. Dada una transformación lineal $T : V \to V$ y dado un sub espacio vectorial $S \subseteq V$ T-invariante, demuestre que si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ tales que $\lambda v - T(v) \in S$ entonces $S+ < \{v\} >$ es también T-invariante.

8. Sea T un operador lineal y sean S y W dos s.e.v. T-invariantes. Demuestre que $S + W$ y $S \cap W$ son también T-invariantes.

9. Sean T y L dos operadores lineales tales que $T \circ L = L \circ T$ y sea $p(x)$ un polinomio.

   a) Demuestre que L conmuta con $p(T)$.

   b) Demuestre que $Ker(p(T))$ e $Im(p(T))$ son L-invariantes.

10. Considere la siguiente relación en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \ R \ B \ \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \textit{invertible}, MA = B$$

   a) Demuestre que se trata de una relación de equivalencia.

   b) Calcule $[\Theta_{n\times n}]$, la clase de equivalencia de la matriz nula respecto a esta relación.

   c) Calcule $[I_n]$, la clase de equivalencia de la matriz identidad respecto a esta relación.

   d) Demuestre que si $A \ R \ B$, entonces los sistemas $Ax = \Theta$ y $Bx = \Theta$, tienen los mismos conjuntos solución, es decir: $\{x \mid Ax = \Theta\} = \{x \mid Bx = \Theta\}$.

   e) Demuestre que si B es la matriz obtenida luego de realizar operaciones elementales de fila a la matriz A, entonces $A \ R \ B$.

11. Sean $q(x), s(x) \in \mathbb{K}[x]$, y sea $g(x) = MCD\{q(x), s(x)\}$. Sea además V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ un operador lineal en V. Demuestre que

$$Ker(q(T)) \cap Ker(s(T)) = Ker(g(T)).$$

   Concluya que $Ker(q(T))$ y $Ker(s(T))$ están en suma directa si y solo si $q(x)$ y $s(x)$ son primos relativos[1].

12. Considere el siguiente operador $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por

$$F(a, b, c, d) = (2a + b, 2b, c + d, 4d - 2c).$$

   Calcule su espectro, polinomio característico $p(x)$, multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio, además calcule $p(F)(a, b, c, d)$, el polinomio característico evaluado en F, en un vector (a, b, c, d).

[1] Indicación: use que existen $e(x), f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $g(x) = e(x)q(x) + f(x)s(x)$ (Bèzout).