Ayudantía 4.

1. Estudie y Clasifique las sgtes. relaciones.

a) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $x R y \iff x \subseteq y^c$

¿Es R refleja?

Sea $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: x No está contenido en X^c. Luego R No es refleja.
Por lo tanto No es de orden ni equivalencia.

b) En $M_2(\{0,1\})$: $x R y \iff x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- No es refleja pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not R \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, R No es refleja, $\therefore$ No es de orden ni de equivalencia.

c) $R = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$; $E = \{a, b, c\}$

→ R es refleja, pues $\forall x \in E$, $x R x$.

→ R es simetrica.

Si $x, y \in E$: $x R y \iff x = y$
$\iff y = x$
$\iff y R x$.

→ R es transitiva.

$xRy \wedge yRz \Leftrightarrow x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$, pues $=$ es transitiva en $\mathbb{R}$.

→ R es antisimetrica.

$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

Luego R es relación de orden y equivalencia.

d) En $\mathbb{C}$: $(a+bi) R (c+di) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$

Es refleja:

Sea $a+bi \in \mathbb{C}$ $a = a \wedge b \leq b$, luego $(a+bi) R (a+bi)$

Es Transitiva.

Sean $(a+bi)$, $(c+di)$ y $(e+fi) \in \mathbb{C}$: $(a+bi) R (c+di) \wedge (c+di) R (e+fi)$
$\Leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{a<c}_{P_1^1} \vee \underbrace{(a=c \wedge b \leq d)}_{P_1^2})} \wedge (\underbrace{c<e}_{P_2^1} \vee \underbrace{(c=e \wedge d \leq f)}_{P_2^2})$ ...

Caso 1: $P_1^1 \wedge P_2^1 \Leftrightarrow (a<c \wedge c<e) \Rightarrow a<e \Rightarrow (a+bi) R (e+fi)$.

Caso 2: $P_1^1 \wedge P_2^2 \Leftrightarrow (a<c \wedge (c=e \wedge d \leq f)) \Rightarrow a<e \Rightarrow (a+bi) R (e+fi)$

Caso 3: $(P_1^2 \wedge P_2^1) \Leftrightarrow (a=c \wedge b \leq d) \wedge (c<e)) \Rightarrow a<e$

Caso 4: $P_1^2 \wedge P_2^2 \Leftrightarrow (a=c \wedge b \leq d) \wedge (c=e \wedge d \leq f)) \Rightarrow a=e \wedge b \leq f$
$\Leftrightarrow (a+bi) R (e+fi)$

Luego, como ya vimos todos los casos, se concluye que R es transitiva.

Antisimetría

Sean $(a+bi) \in \mathbb{C}$, $(c+di) \in \mathbb{C}$ tales que

$$(a+bi)\, R\, (c+di) \wedge (c+di)\, R\, (a+bi)$$

$$\Leftrightarrow (a<c \vee (a=c \wedge b \leq d)) \wedge (c<a \vee (c=a \wedge d \leq b))$$

Si $a<c$, $c<a$ sería contradictorio. De igual forma la sería $(c=a \wedge d \leq b$ $c<a$ sería contradictorio

Por otro lado si $(a=c \wedge b \leq d)$ $c<a$ sería contradictorio. La única opción que queda es $(a=c \wedge b \leq d) \wedge (c=a \wedge d \leq b) \Rightarrow a=c \wedge b=d$.

$\therefore$ $a+bi = c+di \Leftrightarrow R$ es antisimétrica.

$\therefore$ La relación es de orden.

2. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas sobre un conjunto X. Se define la relación $\leq$ como sigue.

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \leq \{B_j\}_{j=1}^{m}$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,m\}. \ \exists i \in \{1,\dots,n\}. \ B_j \subseteq A_i.$$

a) Pruebe que $\leq$ es de orden.

Dem:

(1) $\leq$ es refleja.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}$ (es decir, $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición finita de X)
Sea $i \in \{1,\dots,n\}$ fijo (pero arbitrario). Tomamos $j := i \in \{1,\dots,n\}$; luego,

$$A_i \subseteq A_j = A_i$$

Es decir $\{A_i\}_{i=1}^{n} \leq \{A_i\}_{i=1}^{n}$.

(2) $\leq$ es antisimétrica.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n} \wedge \{B_j\}_{j=1}^{m} \in \mathcal{P}$ tales que

$$\underbrace{\{A_i\}_{i=1}^{n} \leq \{B_j\}_{j=1}^{m}}_{*} \wedge \underbrace{\{B_j\}_{j=1}^{m} \leq \{A_i\}_{i=1}^{n}}_{**}$$

Sea $i \in \{1,\dots,n\}$ fijo. Por $(**)$ $\exists j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $A_i \subseteq B_j$.
Luego, para este j por $(*)$ $\exists i^* \in \{1,\dots,n\}$ tal que $B_j \subseteq A_{i^*}$

Probemos que Necesariamente $i = i^*$. En efecto, si $i \neq i^*$, $A_i \cap A_{i^*} = \emptyset$
por que $\{A_i\}$ es partición. Pero $A_i \cap A_{i^*} = A_i \neq \emptyset$.
Como $A_i \cap A_{i^*} = \emptyset$ y $A_i \cap A_{i^*} = A_i \neq \emptyset$ se llega a una contradicción.

Por lo tanto $i^* = i$ y así, $A_i = A_{i^*}$, Pero $A \subseteq B_j \wedge B_j \subseteq A_i$
$\Rightarrow A_i = B_j$.

Analogamente, si repitieramos la Dem. a partir de fijar $j \in \{1, \dots, m\}$ en lugar $i \in \{1, \dots, n\}$, concluiríamos.

$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad A_j = B_j$.

y tenemos $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. $\quad A_i = B_i$

$\Rightarrow n = m$ y $A_i = B_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
$\Leftrightarrow \{A_i\}_{i=1}^{n} = \{B_j\}_{j}^{m}$

(3) Es transitiva.

Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $\{B_j\}_{j=1}^{m}$, $\{C_k\}_{k=1}^{l}$ tales que.
$\{A_i\}_{i=1}^{n} \leq \{B_j\}_{j=1}^{m}$ (*) $\wedge$ $\{B_j\}_{j=1}^{m} \leq \{C_k\}_{k=1}^{l}$ (**)

Sea $k \in \{1, \dots, l\}$ fijo:

Por (**) $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ tq $C_k \subseteq B_j$

Para este j, por (*) $\exists i \in \{1, \dots, n\}$. tq $B_j \subseteq A_i$.

Por transitividad de $\subseteq$ y como k era arbitrario.

$\forall k \in \{1, \dots, l\}$ $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ $C_k \subseteq A_i$.

Por def equivale a $\{A_i\}_{i=1}^{n} \leq \{C_k\}_{k=1}^{l}$

---

(6) Muestra que si $|X| \geq 3$, $\leq$ No es orden total

$X = \{a, b, c, d\}$

$A_1 = \{a, b\}$. $A_2 = \{c, d\}$. $B_1 = \{a\}$ $B_2 = \{b, c, d\}$.

Problema 3: $F = \{ f : A \to B : f \text{ es función} \}$.

R una relación de orden en B.

Se define en F la relación como:

$$f R^* g \iff \forall a \in A \;,\; f(a) R g(a).$$

a) Pruebe que R^* es de orden.

> Refleja: Sea $f \in F$. Como R es refleja, $\forall a \in A$, $f(a) R f(a)$
$\iff f R^* R$.

> Transitiva: $f, g, h \in F$ tq:

$$f R^* g \wedge g R^* h.$$

$\iff \forall a \in A$, $f(a) R g(a) \wedge g(a) R h(a)$. Como R es transitiva.

$\Rightarrow \forall a \in A$, $f(a) R h(a) \Rightarrow f R^* h$

> Antisimetría. $f, g \in F$ tq $f R^* g \wedge g R^* f$.

$\iff \forall a \in A$ $f(a) R g(a)$, como R es antisimétrica.
$\Rightarrow \forall a \in A$; $f(a) = g(a)$
$\iff f = g$.