UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Pauta Tarea 4

Sea $\Omega =]0,1[$, considere los datos $\varepsilon > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$ Considere la siguiente E.D.O:
Encontrar $\varphi \in H^2(\Omega)$ talque :

$$\begin{cases} -\varepsilon\varphi'' + \alpha\varphi' + \sigma\varphi &= 1, \text{en } \Omega \\ \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= b \end{cases}$$

Se pide lo siguiente:
1.- Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio V_h^k ;

Multiplicamos la ecuación por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos, luego aplicamos integración por parte la primera expresión:

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\varphi'', v)_{0,\Omega} + \alpha(\varphi', v)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi, v)_{0,\Omega} =& (1, v)_{0,\Omega} \\ \varepsilon(\varphi', v')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi', v)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi, v)_{0,\Omega} =& (1, v)_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

lo que induce a buscar $\varphi \in V_b = \{u \in H^1(\Omega) : u(0) = 0 \wedge u(1) = b\}$. Sin embargo esto no define un problema variacional puesto que V_b no es un sub-espacio de $H^1(\Omega)$ dado que $0 \notin V_b$. Gracias a que $H_0^1(\Omega) \leq H^1(\Omega)$ podemos descomponer

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_b \in H_0^1(\Omega) + [H_0^1(\Omega)]^\perp$$

donde φ_b se considera como un dato. Con estas consideraciones la formulación (1) se reduce a:
Hallar $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$

$$\varepsilon(\varphi_0', v')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi_0', v)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi_0, v)_{0,\Omega} = (1, v)_{0,\Omega} - (\varepsilon(\varphi_b', v')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi_b', v)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi_b, v)_{0,\Omega}) \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Si consideramos $H_0^1(\Omega) \cap V_h^k \leq H_0^1(\Omega)$. Definimos la formulación variacional discreta de (1):
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$\varepsilon(u_h', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(u_h', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(u_h, v_h)_{0,\Omega} = (1, v_h)_{0,\Omega} - (\varepsilon(\varphi_b', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi_b', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi_b, v_h)_{0,\Omega})$$
$\forall v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

se define la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ y el funcional $F(\cdot)$ como sigue:

$$\begin{aligned} a : \left(H_0^1(\Omega)\cap V_h^k\right)^2 &\to \mathbb{R} \\ (u_h, v_h) &\mapsto a(u_h,v_h) = \varepsilon(u_h', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(u_h', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(u_h, v_h)_{0,\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega)\cap V_h^k &\to \mathbb{R} \\ v_h &\mapsto F(v_h) = (1, v_h)_{0,\Omega} - (\varepsilon(\varphi_b', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi_b', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi_b, v_h)_{0,\Omega}) \end{aligned}$$

entonces la formulación discreta queda:
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega)\cap V_h^k$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\cap V_h^k$$

Donde la base de V_h^k es $\{\psi_0, ..., \psi_{Nk}\}$ donde N corresponde al numero elementos de la malla y k al grado polinomial de la base. Entonces podemos expresar $u_h \in V_h^k$ como una combinación lineal de elementos de la base de V_h^k:

$$u_h = \sum_{i=0}^{Nk} C_i \psi_i$$

Donde C_i son coeficientes reales y $C_1 = C_{Nk} = 0$.
Además considerando que mostrar la formulación discreta se cumpla para por todo $v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega)$ es equivalente a mostrar que se cumpla para $\{\psi_1, ..., \psi_{Nk-1}\}$, es decir que la formulación discreta se resume a:
Hallar $C_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{Nk-1} C_i a(\psi_i, \psi_j) = F(\psi_j) \ \ j \in \{1, ..., Nk-1\}$$

2.- Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación discreta de (1);

Continuidad de $a(\cdot,\cdot)$
sea $u_h, v_h \in H_0^1(\Omega)\cap V_h^k$

$$\begin{aligned} |a(u_h,v_h)| &= |\varepsilon(u_h', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(u_h', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(u_h, v_h)_{0,\Omega}| \\ &\leq \varepsilon|(u_h', v_h')_{0,\Omega}| + |\alpha|(u_h', v_h)_{0,\Omega}| + \sigma|(u_h, v_h)_{0,\Omega}| \\ &\leq \varepsilon|u_h|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega}| + |\alpha||u_h|_{1,\Omega}||v_h||_{0,\Omega} + \sigma||u_h||_{0,\Omega}||v_h||_{0,\Omega}| \\ &\leq (\varepsilon + |\alpha| + \sigma)||u_h||_{1,\Omega}||v_h||_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Coercividad de $a(\cdot,\cdot)$
Notemos primero que por integración por parte en $H_0^1(\Omega)$ se obtiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} (u_h', u_h)_{0,\Omega} &= -(u_h, u_h')_{0,\Omega} \\ &= -(u_h', u_h)_{0,\Omega} \end{aligned}$$

lo que implica que $(u_h', u_h)_{0,\Omega} = 0$. sea $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$:

$$\begin{aligned}
a(u_h, u_h) &= \varepsilon(u_h', u_h')_{0,\Omega} + \alpha(u_h', u_h)_{0,\Omega} + \sigma(u_h, u_h)_{0,\Omega} \\
&= \varepsilon(u_h', u_h')_{0,\Omega} + \sigma(u_h, u_h)_{0,\Omega} \\
&\geq \varepsilon(u_h', u_h')_{0,\Omega} \\
&\geq \varepsilon|u_h|_{1,\Omega}^2 \\
&= \varepsilon\left(\frac{1}{2}|u_h|_{1,\Omega}^2 + (\frac{1}{2}|u_h|_{1,\Omega}^2\right) \\
&\geq \varepsilon\left(\frac{1}{2}|u_h|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2Cp}||u_h||_{0,\Omega}^2\right) \\
&\geq \varepsilon \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp}\right\}||u_h||_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

<u>Continuidad de $F(\cdot)$</u>

sea $v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$\begin{aligned}
|F(v_h)| &= |(1, v_h)_{0,\Omega} - (\varepsilon(\varphi_b', v_h')_{0,\Omega} + \alpha(\varphi_b', v_h)_{0,\Omega} + \sigma(\varphi_b, v_h)_{0,\Omega})\,| \\
&\leq |(1, v_h)_{0,\Omega}| + |\varepsilon(\varphi_b', v_h')_{0,\Omega}| + |\alpha(\varphi_b', v_h)_{0,\Omega}| + |\sigma(\varphi_b, v_h)_{0,\Omega}| \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}||v_h||_{0,\Omega} + \varepsilon|\varphi_b|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega} + |\alpha||\varphi_b|_{1,\Omega}||v_h||_{0,\Omega}| + \sigma||\varphi_b||_{0,\Omega}||v_h||_{0,\Omega} \\
&\leq (|\Omega|^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon + |\alpha| + \sigma)||\varphi_b||_{1,\Omega})||v_h||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Por lo tanto gracias al Teorema de "Lax-Milgram" el problema variacional de:
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \;\; \forall v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$$

tiene solución única y además.

$$||u_h||_{1,\Omega} \leq \frac{(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon + |\alpha| + \sigma)||\varphi_b||_{1,\Omega})}{\varepsilon \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp}\right\}}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
||\varphi_h|| &\leq ||u_h||_{1,\Omega} + ||\varphi_b||_{1,\Omega} \\
&\leq \frac{(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + (\varepsilon + |\alpha| + \sigma)||\varphi_b||_{1,\Omega})}{\varepsilon \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp}\right\}} + ||\varphi_b||_{1,\Omega} \\
&= \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp}\right\}} + \left(\frac{(\varepsilon + |\alpha| + \sigma)}{\varepsilon \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp}\right\}} + 1\right)||\varphi_b||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

3.-Considere el caso $\alpha = \sigma = b = 0$, encuentre una estimación de error óptima para $||u - u_h||_{0,\Omega}$. Consideremos el siguiente problema auxiliar:
Hallar $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-w'' &=& u - u_h, \text{en } \Omega \\
w(0) &=& 0 \\
w(1) &=& 0
\end{array}\right.$$

Cuya formulación variacional es :

$$(w', v')_{0,\Omega} = (u - u_h, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

esta ultima formulación variacional cumple las hipótesis del teorema "Lax-Milgram". Tomando en particular $v = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$(w', (u - u_h)')_{0,\Omega} = ||u - u_h||_{0,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Probemos la siguiente condición de ortogonalidad $(v_h', (u - u_h)')_{0,\Omega} = 0$
<u>Problema Continuo</u>:
Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$

$$(u', v_h') = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega) \qquad (*)$$

<u>Problema Discreto</u>:
Hallar $u_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega)$

$$(u_h', v_h') = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega) \qquad (**)$$

restando (*) y (**) nos queda:

$$(v_h', (u - u_h)')_{0,\Omega} = 0 \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega)$$

luego la formulación anterior es equivalente a:

$$((w - v_h)', (u - u_h)')_{0,\Omega} = ||u - u_h||_{0,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

aplicando cauchy-schwarz sigue:

$$||u - u_h||_{0,\Omega}^2 = ((w - v_h)', (u - u_h)')_{0,\Omega} \leq |w - v_h|_{1,\Omega} |u - u_h|_{1,\Omega}$$

Tomando $v_h = \mathcal{I}_h(w)$ y considerando las siguientes cotas para el interpolante:

Sea $u \in H^2(\Omega)$ y $h > 0$ se satisface
1. $||u - \mathcal{I}_h(u)||_{0,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{2,\Omega}$
2. $|u - \mathcal{I}_h(u)|_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}$

donde C es una constante positiva

entonces se sigue:

$$\begin{aligned} ||u - u_h||_{0,\Omega}^2 \leq & |w - \mathcal{I}_h(w)|_{1,\Omega} |u - u_h|_{1,\Omega} \\ \leq & hC||w''||_{0,\Omega} |u - u_h|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Notemos que según la E.D.O auxiliar $-w'' = u - u_h$, se sigue entonces

$$
\begin{aligned}
&||u-u_h||_{0,\Omega}^2 \leq hC||u-u_h||_{0,\Omega}|u-u_h|_{1,\Omega} \\
\Rightarrow &||u-u_h||_{0,\Omega} \leq hC|u-u_h|_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

y Mayorando agregando un termino ($C||u-u_h||_{0,\Omega}$) positivo se obtiene

$$||u-u_h||_{0,\Omega} \leq C(||u-u_h||_{0,\Omega} + h|u-u_h|_{1,\Omega})$$

y finalmente tomando $u_h = \mathcal{I}_h^k(u)$ y considerando la cota del interpolante de grado $k > 1$

> Sea $u \in H^{k+1}(\Omega)$ y $h > 0$ se satisface:
>
> $$||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{0,\Omega} + h|u-\mathcal{I}_h^k(u)|_{1,\Omega} = Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}$$

se sigue:

$$
\begin{aligned}
||u-u_h||_{0,\Omega} &\leq C(||u-u_h||_{0,\Omega} + h|u-u_h|_{1,\Omega}) \\
&\leq C(||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{0,\Omega} + h|u-\mathcal{I}_h^k(u)|_{1,\Omega}) \\
&\leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}
$$

4.- Encuentre una estimación de error óptima para $||u-u_h||_{1,\Omega}$.

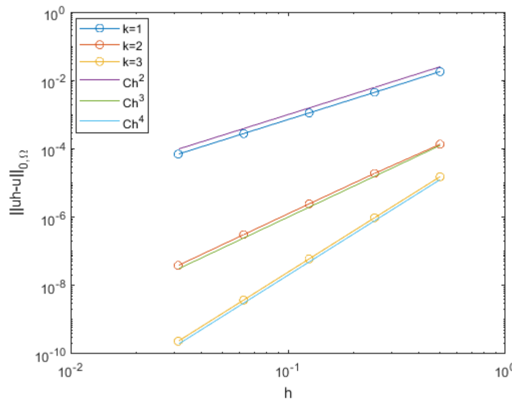
$$
\begin{aligned}
||u-u_h||_{1,\Omega} &\leq \frac{M}{\gamma}\inf_{v_k}||u-v_k||_{1,\Omega} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{1,\Omega} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{0,\Omega}^2 + |u-\mathcal{I}_h^k(u)|_{1,\Omega}^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{(Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega})^2 + (Ch^k|u|_{k+1,\Omega})^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{(h^{k+1}+h^k)^2(C|u|_{k+1,\Omega})^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}Ch^k|u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}
$$

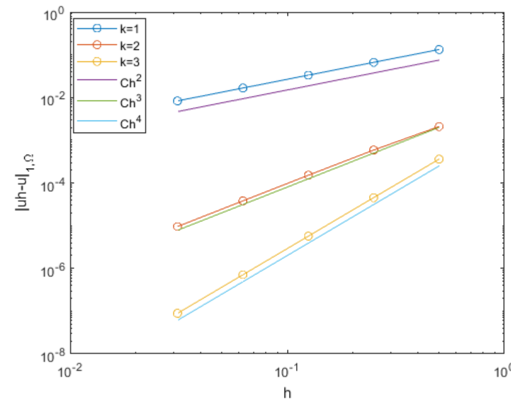
5.-Implemente un código de elementos finitos para la formulación discreta anteriormente definida.
Rubrica:

El programa corre correctamente	2
la formulación variacional esta implantado correctamente	4
condiciones no homogéneas implementadas correctamente	4

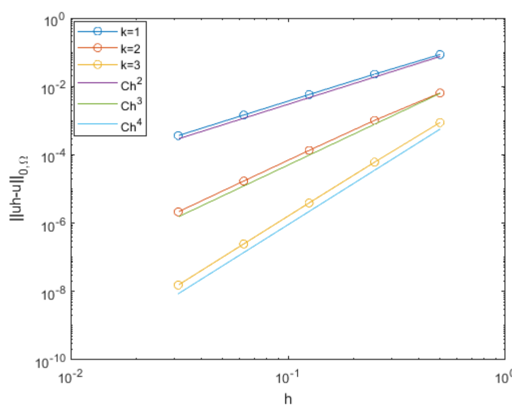
6.- Presente curvas de convergencia (con al menos 5 puntos) y soluciones (con un $h > 0$ fijo de su elección) para $b = 0$, $k = 1, 2, 3$ considerando los siguientes casos:

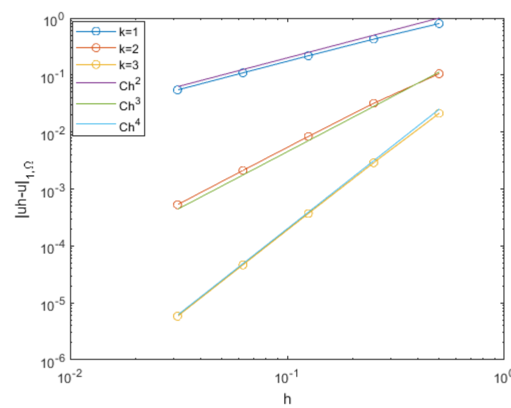
a) $\alpha = 0$, $\sigma = 1$, $\varepsilon \in \{1, 1e-1, 1e-3, 1e-6\}$
Caso 1 $\varepsilon = 1$



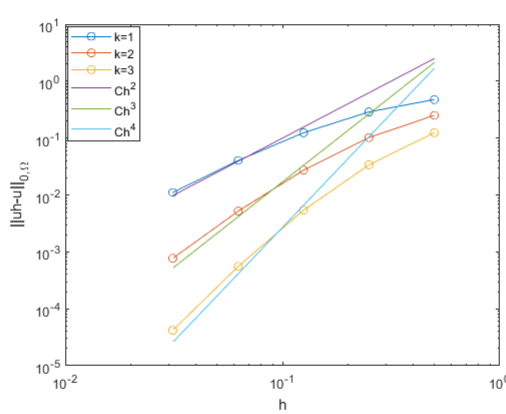


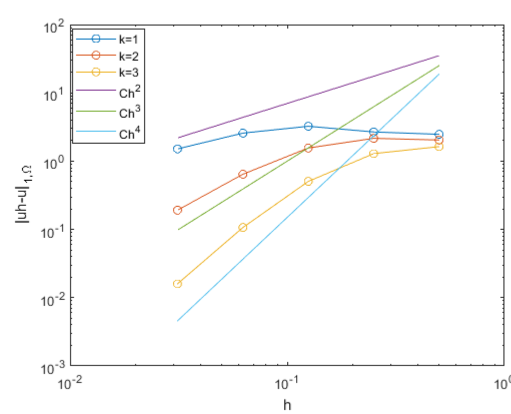
Caso 2 $\varepsilon = 1e-1$





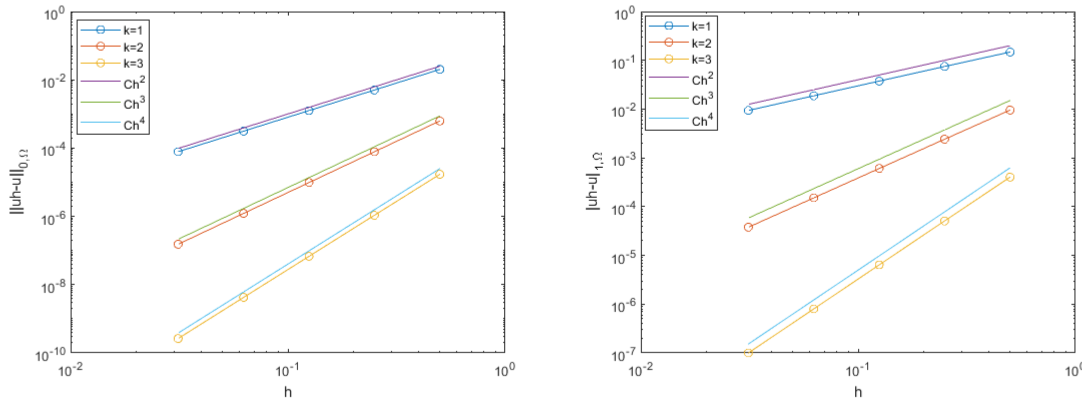
Caso 3 $\varepsilon = 1e-3$



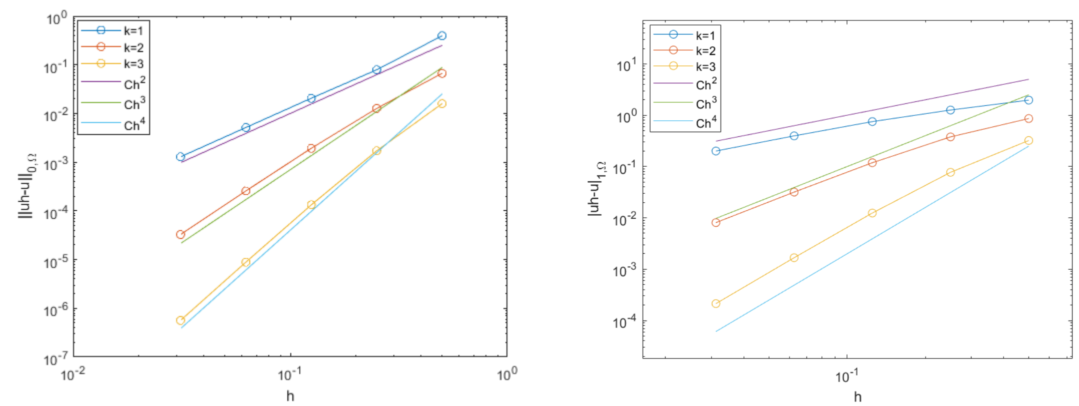


b) $\alpha = 1$, $\sigma = 0$, $\varepsilon \in \{1, 1e-1, 1e-2, 1e-3\}$

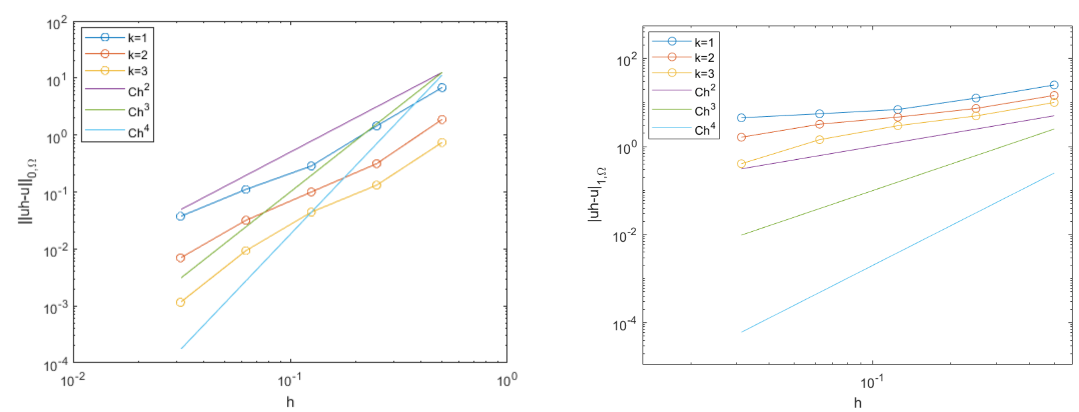
Caso 1 $\varepsilon = 1$



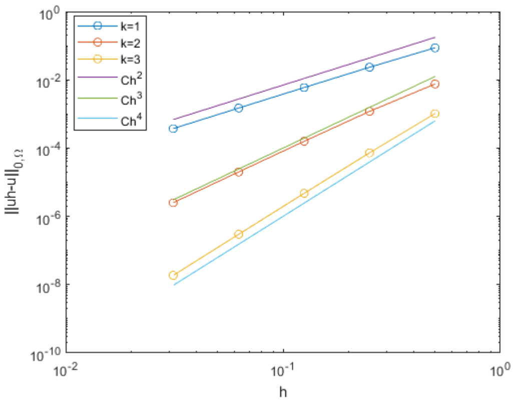
Caso 2 $\varepsilon = 1e-1$

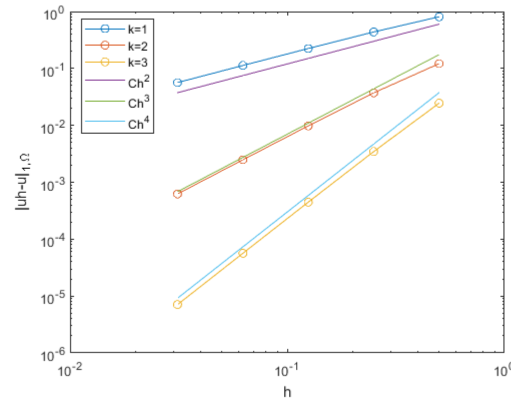


Caso 3 $\varepsilon = 1e-2$

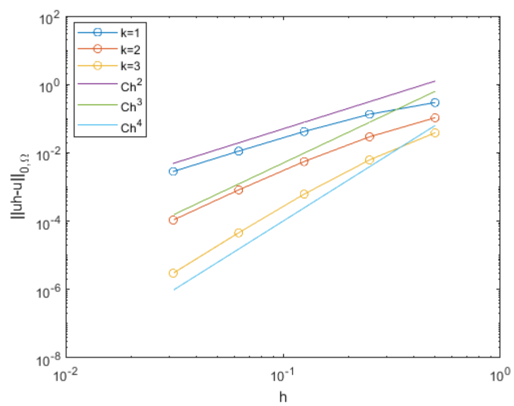


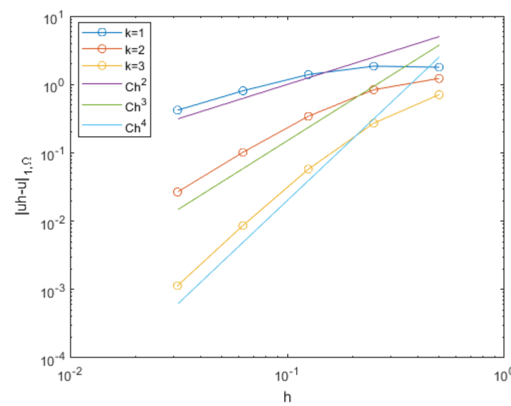
c) $\alpha = 1e-1$, $\sigma = 1$, $\varepsilon \in \{1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4\}$
Caso 1 $\varepsilon = 1$



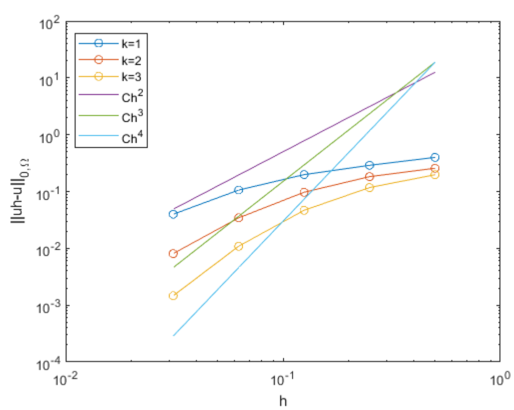


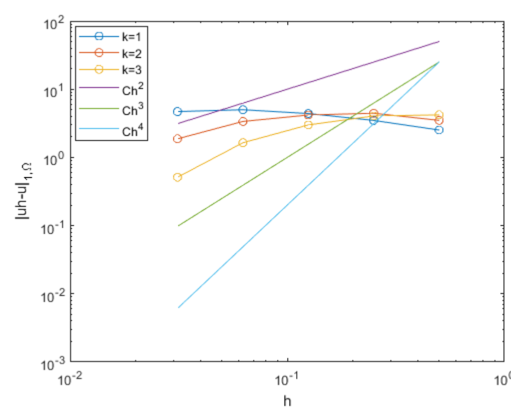
Caso 2 $\varepsilon = 1e-1$





Caso 3 $\varepsilon = 1e-2$





Concepción, martes 23 de marzo de 2021

DPC/CCB/ccb .