

## Solución Evaluación 1

1. Dado  $u \in \mathbb{R}^n$ , considere la relación  $\preceq$  en  $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ , definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow [ (u^t x < u^t y) \vee (x = y) ]$$

- a) (7 puntos) Demuestre que es una relación de orden.

**Solución.** Demostremos las 3 propiedades que debe cumplir para ser relación de orden.

**Refleja.** Sea  $x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ , p.d.q.  $x \preceq x$

Es decir, p.d.q.  $u^t x < u^t x \vee (x = x)$ , lo cual se cumple pues  $x = x$ .

**Transitiva.** Sean  $x, y, z \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$  vemos que

$$\begin{aligned} x \preceq y \wedge y \preceq z &\Rightarrow (u^t x < u^t y \vee x = y) \wedge (u^t y < u^t z \vee y = z) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t y \wedge u^t y < u^t z) \vee (u^t x < u^t y \wedge y = z) \vee \\ &\quad (x = y \wedge u^t y < u^t z) \vee (x = y \wedge y = z) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t z) \vee (u^t x < u^t z) \vee (u^t x < u^t z) \vee (x = z) \\ &\Rightarrow x \preceq z \end{aligned}$$

**Antisimétrica.** Sean  $x, y, z \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$  vemos que

$$\begin{aligned} x \preceq y \wedge y \preceq x &\Rightarrow (u^t x < u^t y \vee x = y) \wedge (u^t y < u^t x \vee y = x) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t y \wedge u^t y < u^t x) \vee (u^t x < u^t y \wedge y = x) \vee \\ &\quad (x = y \wedge u^t y < u^t x) \vee (x = y \wedge y = x) \\ &\Rightarrow F \vee F \vee F \vee (x = x) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- b) (8 puntos) Considere  $n = 2$  y  $u = (1, 0)$ , demuestre que  $(0, 13)$  es minimal pero que no es mínimo ¿hay mínimo? ¿ $\preceq$  es de orden parcial o total?

**Solución.** En este caso la relación queda como sigue.

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Leftrightarrow (10)x < (10)y \vee x = y \\ &\Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee x = y \end{aligned}$$

Veamos que  $(0, 13)$  es minimal.

$$\begin{aligned}
x \preceq (0, 13) &\Leftrightarrow x_1 < 0 \vee x = (0, 13) \\
&\Leftrightarrow F \vee x = (0, 13) \\
&\Leftrightarrow x = (0, 13)
\end{aligned}$$

Vemos que no es mínimo pues por ejemplo  $(0, 13) \not\preceq (0, 0)$  ya que  $0 \not< 0 \wedge (0, 13) \neq (0, 0)$ .

No hay mínimo pues de haberlo tendría que coincidir con el minimal y ya probamos que un minimal que tenemos no es mínimo. No es de orden total pues si lo fuera, todo minimal sería mínimo y sabemos que  $(0, 13)$  es minimal y no es mínimo, por lo tanto la relación es de orden parcial.

2. Dado un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , y un operador lineal  $T : V \rightarrow V$ , se define la siguiente relación en  $V$ , que resulta ser una relación de equivalencia (no lo demuestre).

$$u R v \Leftrightarrow T(u) = T(v)$$

- a) (4 puntos) Demuestre que  $(\forall u, v \in V) u R v \Leftrightarrow u - v \in \text{Ker}(T)$ .

**Solución.** Sean  $u, v \in V$ .

$$\begin{aligned}
u R v &\Leftrightarrow T(u) = T(v) \\
&\Leftrightarrow T(u) - T(v) = \Theta \\
&\Leftrightarrow T(u - v) = \Theta \\
&\Leftrightarrow u - v \in \text{Ker}(T)
\end{aligned}$$

- b) (4 puntos) Calcule  $[\Theta]_R$ .

**Solución.**

$$\begin{aligned}
[\Theta]_R &= \{u \in V : u R \Theta\} \\
&= \{u \in V : u - \Theta \in \text{Ker}(T)\} \\
&= \{u \in V : u \in \text{Ker}(T)\} \\
&= \text{Ker}(T)
\end{aligned}$$

- c) (7 puntos) Demuestre que para cada  $v \in V$  se cumple lo siguiente

$$[v]_R = \{v + u : u \in \text{Ker}(T)\}$$

Indicación: use la parte a).

**Solución.** Sea  $w \in V$ .

$$\begin{aligned}
w \in [v]_R &\Leftrightarrow w R v \\
&\Leftrightarrow w - v \in \text{Ker}(T) \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \text{Ker}(T), u = w - v \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \text{Ker}(T), w = u + v \\
&\Leftrightarrow w \in \{v + u : u \in \text{Ker}(T)\}
\end{aligned}$$

3. **(15 puntos)** Suponga que  $q(x) = x^2 + ax + b$  es un polinomio irreducible en  $\mathbb{K}$  y que  $F : V \rightarrow V$  es un operador tal que  $\text{Ker}(q(F)) \neq \{\Theta\}$ , y sea  $v \in \text{Ker}(q(F)) - \{\Theta\}$ . Demuestre que:

$\langle \{v, F(v)\} \rangle$  es un subespacio  $F$ -invariante.

**Solución.** Debemos demostrar lo siguiente.

$$\forall u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle, F(u) \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$$

Sabiendo que  $q(F)(v) = F^2(v) + aF(v) + bv = \Theta$  (\*) y  $v \neq \Theta$ .

Sea  $u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$ , p.d.q.  $F(u) \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$ .

El que  $u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$  nos dice que existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  tales que  $u = \alpha v + \beta F(v)$ , así

$$\begin{aligned} F(u) &= F(\alpha v + \beta F(v)) \\ &= \alpha F(v) + \beta F^2(v). \end{aligned}$$

Ahora podemos usar (\*) para reemplazar  $F^2(v)$  por  $-aF(v) - bv$ , entonces

$$\begin{aligned} F(u) &= \alpha F(v) - \beta(aF(v) + bv) \\ &= (\alpha - a\beta)F(v) - b\beta v, \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $F(u)$  es una c.l. de  $v$  y  $F(v)$  y por lo tanto está en  $\langle \{v, F(v)\} \rangle$ .

4. **(15 puntos)** Considere la siguiente matriz  $A$ , y tome como dato que su espectro es  $\sigma(A) = \{2, 0\}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule sus núcleos iterados y su polinomio minimal. Calcule a partir de lo anterior (sin usar determinante) las multiplicidades algebraicas y geométricas de 2 y 0, y el polinomio característico de  $A$ .

**Solución.** Partamos calculando los núcleos iterados, con ello encontraremos el .exponente de estabilización”de cada valor propio,  $l_2$  y  $l_0$ , así sabremos que el polinomo minimal es  $m(x) = (2 - x)^{l_2}x^{l_0}$ .

Para el valor propio 0.

$$\begin{aligned} E_1(0) &= \{(a, b, c, d) : 2a + b = 0 \wedge b = 0 \wedge a + b + c + d = 0 \wedge -a + c + d = 0\} \\ &= \{(a, 0, c, d) : 2a = 0 \wedge a + c + d = 0 \wedge -a + c + d = 0\} \\ &= \{(0, 0, c, d) : c + d = 0 \wedge c + d = 0\} \\ &= \langle \{(0, 0, 1, -1)\} \rangle \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la multiplicidad geométrica de 0 es 1. Calculemos el siguiente núcleo iterado. Para ello calculamos la matriz al cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_2(0) &= \{(a, b, c, d) : 4a + 4b = 0 \wedge 4b = 0 \wedge 2a + 4b + 2c + 2d = 0 \wedge -2a + 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : 4a = 0 \wedge 2a + 2c + 2d = 0 \wedge -2a + 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(0, 0, c, d) : 2c + 2d = 0 \wedge 2c + 2d = 0\} \\
&= \langle \{(0, 0, 1, -1)\} \rangle \\
&= E_1(0)
\end{aligned}$$

De donde vemos que  $l_0 = 1$  y que la multiplicidad algebraica de 0 es 1.

**Para el valor propio 2.** Calculamos primero  $A - 2I_4$ .

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_1(2) &= \{(a, b, c, d) : b = 0 \wedge 0 = 0 \wedge a + b - c + d = 0 \wedge -a + c - d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : a - c + d = 0 \wedge -a + c - d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : a + d = c\} \\
&= \langle \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \rangle
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la multiplicidad geométrica de 2 es 2. Sabemos que las multiplicidades algebraicas suman 4, como la de 0 es 1, la de 2 ha de ser 3, por lo tanto es claro que  $l_2 = 2$  y entonces  $m(x) = (2 - x)^2 x^1$  y  $p(x) = (2 - x)^3 x^1$ .

Finalmente, como  $E_1(2) \neq E_2(2)$ , calculemos entonces el siguiente núcleo iterado. Para ello calculamos la matriz  $A - 2I_4$  al cuadrado.

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_2(2) &= \{(a, b, c, d) : 0 = 0 \wedge 0 = 0 \wedge -2a + 2c - 2d = 0 \wedge 2a - 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(a, b, c, d) : -a + c - d = 0\} \\
&= E_1(2) \oplus \langle \{(0, 1, 0, 0)\} \rangle
\end{aligned}$$