

PAUTA CERTAMEN 1 - CÁLCULO II

Lunes 6 de Agosto de 2012

■ **Problema 1** (15 puntos)

Considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- a) Determine, por definición, si F es continua en 1.
- b) Demuestre que F es derivable en 1.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{1} = 0 = F(1).$

Donde la segunda igualdad es válida por la regla de L'Hopital y por el TFC.
Luego f es continua en 1.

- b) Por definición de derivada

$$\begin{aligned} F'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^{x-1} \sin(t^2) dt}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos((x-1)^2) \cdot 2(x-1)}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde la tercera y cuarta igualdad se justifican con la regla de L'Hopital y el TFC.
Por lo anterior, F es derivable en 1 y $F'(1) = 0$.

■ **Problema 2** (20 puntos)

- a) Muestre que la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge usando la definición.
- b) Haga un estudio del comportamiento de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$ utilizando el ítem anterior.

Solución:

- a) Reescribimos la integral impropia de la siguiente manera

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Para $c > 0$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1$$

Para $b > 0$, se tiene lo siguiente

$$\lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +0} \left(-1 + \frac{1}{b}\right) = \infty$$

Por lo que $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge. Así, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge.

- b) Primero notamos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$$

Ahora, $\int_0^1 \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$ es una integral definida, pues el integrando es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, por lo que sólo resta analizar el comportamiento de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$.

Las funciones $f(x) = \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$ son continuas y no negativas en el intervalo $[1, +\infty[$. Observemos que para $x \geq 1$:

$$0 \leq \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} \leq \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{x^2}{x^4} \leq \frac{1}{x^2}$$

Método 1:

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (ítem anterior), concluimos por el criterio de comparación directa que $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$ converge. Por lo tanto $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$ converge.

Método 2:

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^4 + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4 + 1} = 1 > 0$$

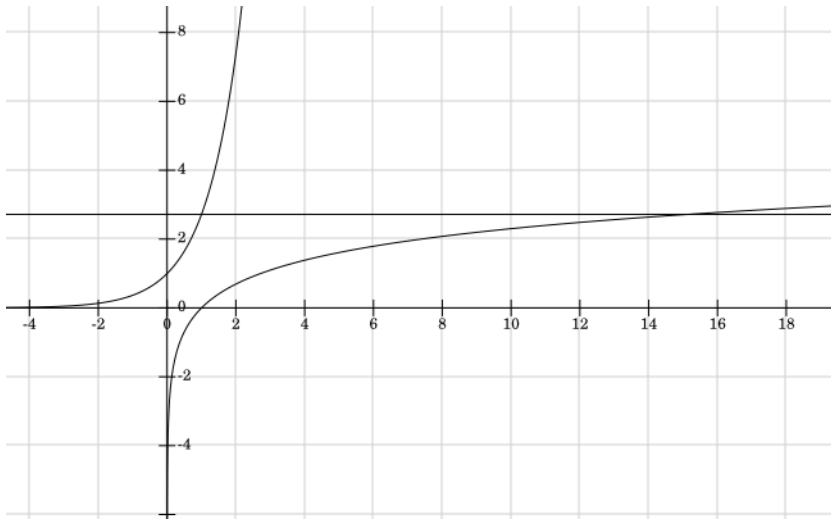
Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (ítem anterior), por el criterio de comparación al límite, también lo hace $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$. Ahora, por el criterio de comparación directa, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} dx$ converge. Por lo tanto, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} dx$ converge.

■ **Problema 3** (25 puntos)

Considere la región R del primer cuadrante acotada por las curvas $y = e^x$, $y = \ln x$ y la recta $y = e$.

- Haga un bosquejo de la región y calcule su área.
- Suponga que la región R gira alrededor de la recta $y = -1$. Escriba la fórmula integral que permite calcular el volumen del sólido de revolución generado por medio de:
 - el método de los discos
 - el método de los cilindros (capas, anillos).
- Suponga que la región R es la base de un sólido cuyas secciones transversales paralelas al eje Y son rectángulos de altura 6. Calcule el volumen del sólido.

Solución:



a)

El área A de la región R es

$$A = \int_0^1 e^x dx + \int_1^{e^e} (e - \ln x) dx = e^x \Big|_0^1 + (ex - x \ln x + x) \Big|_1^{e^e} = e - 1 + e^{e+1} - e^{e+1} + e^e - e - 1 = e^e - 2$$

b) Las fórmulas integrales son:

$$(i) \int_0^1 \pi[(e^x + 1)^2 - (1^2)] dx + \int_1^{e^e} \pi[(e + 1)^2 - (\ln x + 1)^2]$$

$$(ii) \int_0^1 2\pi(y + 1)(e^y) dy + \int_1^e 2\pi(y + 1)(e^y - \ln y) dy$$

c) Por el método de las secciones transversales, el volumen V del sólido está dado por:

$$V = \int_0^1 6e^x dx + \int_1^{e^e} 6(e - \ln x) dx = 6e^e - 12$$