Conceptos Básico de Matrices

M. Sepúlveda

Marzo, 2021

Definiciones Básicas[1]

Sea $\mathbb{C}^{n\times n}$, el espacio de las matrices cuadradas de orden n en el cuerpo $\mathbb{C}$, mientras que cuando los coeficientes pertenezacab al cuerpo $\mathbb{R}$, usaremos la notación $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Definición

Para $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *se definen la matriz transpuesta como la matriz* $\mathbf{B}$ *de elementos* $b_{ij} := a_{ji}$, *y la matriz conjugada transpuesta (o adjunta) de* $\mathbf{A}$, *como la matriz* $\mathbf{C}$ *de elementos* $c_{ij} := \overline{a}_{ji}$. *Notación:* $\mathbf{A}^T := \mathbf{B}$ *y* $\mathbf{A}^* := \mathbf{C}$.

Definición

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *se dice simétrica si* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, *hermitiana si* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, *ortogonal si* $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, *y unitaria si* $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}$. *La matriz* $\mathbf{A}$ *se dice normal si* $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

[1] R. Bürger & R. Bustinza. Análisis Numérico II, Apuntes de Curso 525441, 2015

Definiciones Básicas: valores y vectores propios y matriz inversa

Definición

Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ *se dice un valor propio de una matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *si existe* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$ *tal que* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. *En tal caso, el vector* $\mathbf{x}$ *se llama vector propio de* $\mathbf{A}$ *asociado a* λ.

Definición

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ *un valor propio de* $\mathbf{A}$. *Se llama espacio propio asociado a* λ *al conjunto* $L(\lambda) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$. *El número* $r_i = \dim(L(\lambda_i))$, *se denomina mutiplicidad geométrica del valor propio* λ_i, $i = 1, \ldots, k$.

Definición

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es invertible si existe una matriz (la cual es única si es que exsite), denotada por* $\mathbf{A}^{-1}$, *y llamada inversa de la matriz* $\mathbf{A}$, *tal que satisface* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. *En caso contrario la matriz* $\mathbf{A}$ *se dice singular.*

$$(\mathbf{AB})^{-1}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T, \qquad (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*.$$

Propiedades espectrales, de traza y determinante[2]

Definición

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *de valores propios* $\lambda_i(mathbf A)$, $i = 1, \ldots, n$. *Se define el espectro de* $\mathbf{A}$, *al conjunto*

$$\mathit{sp}(\mathbf{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbf{A})\}.$$

El radio espectral de la matriz $\mathbf{A}$ *es un número no negativo definido por:*

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max\{.|\lambda_i(\mathbf{A})| : i = 1, \ldots, n\}$$

Recordemos algunas relaciones:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}), \qquad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}),$$
$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}), \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}),$$
$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}),$$

[2] Ciarlet, Phillipe G. Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation, Cambridge University Press. 1989.

Polinomio Característico y multiplicidad algebraica

Lema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. *Un escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *es un valor propio de* $\mathbf{A}$ *si y sólo si*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Prueba

Ver R. Bürger & R. Bustinza (2015).

La expresión $f_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es un polinomio de grado n que se llama polinomio característico de $\mathbf{A}$, y tiene la forma $f_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0)$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, son los ceros del poinomio característico, entonces $f_{\mathbf{A}}(\lambda)$ puede factorizarse como

$$f_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)_1^{\beta}(\lambda - \lambda_2)_2^{\beta} \cdots (\lambda - \lambda_k)_k^{\beta}$$

El número β_i, $i = 1, \ldots, k$ se llama multiplicidad algebraica de λ_i.

Matrices similares

Definición

Sean $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Las matrices* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *se dicen similares si existe una matriz* $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *invertible tal que*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{1}$$

Lema

Sean $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son similares, entonces ellas tienen los mismos* n *valores propios, contando su multiplicidad algebraica. Además, si* $\mathbf{x}$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$, *entonces* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ *es vector propio de* $\mathbf{B}$, *con* $\mathbf{P}$ *que satisface* (1)

Prueba

Ver R. Bürger & R. Bustinza (2015).

Forma Normal de Schur

Teorema (Forma normal de Schur)

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Entonces existen* $\mathbf{U}, \mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*,* $\mathbf{U}$ *unitaria, y* $\mathbf{T}$ *triangular superior, tales que* $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$*. Es decir,* $\mathbf{A}$ *es unitariamente similar a una matriz triangular superior. Más aún,*

1. *Si* $\mathbf{A}$ *es normal, entonces* $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ *es diagonal.*
2. *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica, entonces* $\mathbf{U}$ *se puede escoger de modo que sea ortogonal y* $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ *es diagonal.*

Acerca de la Demostración, comparasiones, consecuencias y ejemplos.

- Demostración de la primera parte: Ver R. Bürger & R. Bustinza (2015).
- Segunda parte: Ver Ph. Ciarlet (1992).
- Utilidad?
- Diferencias con la Forma canónica de Jordan ?
- Ejemplos con Matlab.

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema (SVD)

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Entonces existen dos matrices ortogonales* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tales que*

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\mu_i) \quad \textit{(es matriz diagonal)}.$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces existen dos matrices unitarias* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tales que*

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\mu_i) \quad \textit{(es matriz diagonal)}.$$