UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la evaluación 2, “Análisis: curso de repaso” (525315), 2022-1

PROBLEMA 1. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2z \\ x^2y \end{pmatrix} \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, .$$

1. Calcule el valor de $\int_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, donde $\overrightarrow{AB}$ es el segmento de recta entre los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,2,4)$.
2. Muestre que $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ y deduzca que existe una función escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde ∇f es el gradiente de f.
   Halle la función f.
3. Determine el valor de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ para cualquiera curva orientada C^1 por trozos de punto de partida $(1,1,2)$ y punto de llegada $(1,2,4)$.

Solución: 1. $\sigma(t) = (1, 1+t, 2+2t)$, $t \in [0,1]$, es una parametrización de $\overrightarrow{AB}$, luego

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1+t)(2+2t) \\ 2+2t \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 6 \, . \qquad [5 \text{ puntos}]$$

2. $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (\partial_y(x^2y) - \partial_z(x^2z))\,\mathbf{e}_x + (\partial_z(2xyz) - \partial_x(x^2y))\,\mathbf{e}_y + (\partial_x(x^2z) - \partial_y(2xyz))\,\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$.
   Por el resultado del Problema 4 del listado de ejercicios N^o 5, se deduce que existe una función potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Para hallar f, re-escribemos $\mathbf{F} = \nabla f$ como un sistema de 3 ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \partial_x f &= 2xyz \\ \partial_y f &= x^2z \\ \partial_z f &= x^2y \end{cases} .$$

   Integrando la primera ecuación y reemplazando en la segunda, se obtiene $f(x,y,z) = x^2yz + g(y,z)$ y $\partial_y g(y,z) = 0$. Por tanto la función g solamente depende de z, $g(y,z) = h(z)$. Substituyendo en la tercera ecuación del sistema se sigue $x^2y + h'(z) = x^2y$, entonces $h(z) = c$ es constante. Por ende,

$$f(x,y,z) = x^2yz + c \, . \qquad [6 \text{ puntos}]$$

3. Usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(1,2,4) - f(1,1,2) = 8 - 2 = 6 \, .$$

Este resultado concuerda con el valor de la integral obtenido anteriormente en el caso de la curva de la pregunta 1. [4 puntos]

PROBLEMA 2. Suponga que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio tales que para cada $(x, y) \in D$, la ecuación

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

tiene una única solución $z = g(x, y)$, con $g : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea Ω la región de $\mathbb{R}^3$ definida por $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\,(x, y) \in D\}$. Sea $\mathcal{S}$ la intersección de Ω con la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$ de f.

1. Muestre que $\mathcal{S}$ es la gráfica de la función g.
   Muestre que si $(x, y) \in D$, luego $(\nabla f)(x, y, g(x, y))$ es un vector normal a $\mathcal{S}$.
2. Muestre que
$$\iint_{\mathcal{S}} \big|\partial_z f\big|\, \mathrm{d}\Sigma = \iint_D \big\|(\nabla f)(x, y, g(x, y))\big\|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\;. \tag{2}$$
3. ¿ Como se modifica la fórmula (2) cuando para todo $(x, y) \in D$ la ecuación (1) tiene exactamente dos soluciones $z = g_1(x, y)$ y $z = g_2(x, y)$, con g_1 y g_2 de clase C^1 en D ?

Solución:

1. Como para todo $(x, y) \in D$ tenemos $z = g(x, y)$ si y solo si $f(x, y, z) = 0$, la superficie gráfica de g está dada por
$$\mathcal{S} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\,(x, y) \in D\,,\ f(x, y, z) = 0\big\} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ f(x, y, z) = 0\big\} \cap \Omega\;,$$
donde el primer conjunto en el lado derecho es la superficie de nivel de f con el valor 0. Sabemos que el gradiente $\nabla f(x, y, z)$ es ortogonal a la superficie de nivel de f pasando por (x, y, z), por consiguiente $\nabla f(x, y, g(x, y))$ es un vector normal a $\mathcal{S}$. [4 puntos]

2. Una parametrización de la gráfica de g está dada por $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$ con $(x, y) \in D$. Los vectores normales a $\mathcal{S}$ para esta parametrización son $\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{T}_x(x, y) \wedge \mathbf{T}_y(x, y) = (-\partial_x g(x, y), -\partial_y g(x, y), 1)^T$ para cada $(x, y) \in D$, por un cálculo visto en clase. Luego
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \big|\partial_z f\big|\, \mathrm{d}\Sigma &= \iint_D |\partial_z f|(\phi(x, y))\sqrt{\big(\partial_x g(x, y)\big)^2 + \big(\partial_y g(x, y)\big)^2 + 1}\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \Big[\Big(\partial_z f(x, y, g(x, y))\,\partial_x g(x, y)\Big)^2 + \Big(\partial_z f(x, y, g(x, y))\,\partial_y g(x, y)\Big)^2 \\
&\qquad + \Big(\partial_z f(x, y, g(x, y))\Big)^2\Big]^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\;.
\end{aligned} \tag{3}$$
Al derivar la igualdad $f(x, y, g(x, y)) = 0$ con respecto a x y y se obtiene, usando la regla de la cadena,
$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x\big[f(x, y, g(x, y))\big] = (\partial_x f)(x, y, g(x, y)) + (\partial_z f)(x, y, g(x, y))\,\partial_x g(x, y) \\
0 &= \partial_y\big[f(x, y, g(x, y))\big] = (\partial_y f)(x, y, g(x, y)) + (\partial_z f)(x, y, g(x, y))\,\partial_y g(x, y)\;.
\end{aligned} \tag{4}$$

En virtud de estas dos relaciones y de (3), resulta

$$\iint_{\mathcal{S}} \left|\partial_z f\right| \mathrm{d}\Sigma \;=\; \iint_D \Big[\big(\partial_x f\big)^2(x,y,g(x,y)) + \big(\partial_y f\big)^2(x,y,g(x,y)) +$$
$$+\big(\partial_z f\big)^2(x,y,g(x,y))\Big]^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \iint_D \big\|(\nabla f)(x,y,g(x,y))\big\| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Solución alternativa: Sabemos por la pregunta 1. que $\nabla f(x,y,g(x,y))$ es un vector normal a $\mathcal{S}$ en el punto $\phi(x,y) = (x,y,g(x,y))$. Por lo tanto

$$\mathbf{N}(x,y) = \lambda(x,y)\nabla f(\phi(x,y)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\partial_x g(x,y) \\ -\partial_y g(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(x,y) \begin{pmatrix} (\partial_x f)(\phi(x,y)) \\ (\partial_y f)(\phi(x,y)) \\ (\partial_z f)(\phi(x,y)) \end{pmatrix}$$

con $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponiendo que $(\partial_z f)(\phi(x,y)) \neq 0$ e igualando la tercera componente en la identidad vectorial sigue que $\lambda(x,y) = (\partial_z f)(\phi(x,y))^{-1}$. Las igualdades sobre las dos primeras componentes se reducen a las ecuaciones (4). Se concluye con el cálculo detallado arriba. [9 puntos]

3. Si la ecuación $f(x,y,z) = 0$ tiene exactamente k ($k = 2$) soluciones $z = g_1(x,y), \ldots, z = g_k(x,y)$ para cada $(x,y) \in D$, luego $\mathcal{S}$ es la unión de las gráficas $\mathcal{S}_i$ de las funciones de dos variables g_i. Por aditividad de la integral y por el resultado de la pregunta 2.,

$$\iint_{\mathcal{S}} \left|\partial_z f\right| \mathrm{d}\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\mathcal{S}_i} \left|\partial_z f\right| \mathrm{d}\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \iint_D \big\|(\nabla f)(x,y,g_i(x,y))\big\| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

[2 puntos]

PROBLEMA 3. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ las partes de la esfera de radio 1 y centro $(0,0,0)$ contenidas respectivamente adentro y afuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, donde $0 < a < 1$. En otros términos, las superficies $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ estan incluidas en la esfera unitaria, tienen la misma frontera dada por la unión de las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2, z = \pm\sqrt{1-a^2}$, y contienen respectivamente los dos polos y el ecuador (notese que $\mathcal{S}_1$ consta de dos regiones disjuntas).

1. Calcule el cociente $\mathrm{Area}(\mathcal{S}_1)/\mathrm{Area}(\mathcal{S}_2)$ de los áreas de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
¿ Para cual valor del parámetro a estos áreas son iguales ?

2. Sea $\mathbf{F} : B_r \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en una bola $B_r \subset \mathbb{R}^3$ de centro $(0,0,0)$ y radio $r > 1$. Muestre que

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = -\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}\ .$$

Solución:

1. Sea $\mathcal{S}_1^+$ ($\mathcal{S}_1^-$) la parte de la esfera unitaria adentro del cilindro que contiene el polo norte (el polo sur). Luego $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1^+ \cup \mathcal{S}_1^-$. Por simetría, $\text{Area}(\mathcal{S}_1) = \text{Area}(\mathcal{S}_1^+) + \text{Area}(\mathcal{S}_2^-) = 2\text{Area}(\mathcal{S}_1^+)$. Usando coordenadas cilíndricas, parametrizamos $\mathcal{S}_1^+$ de la siguiente forma

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \ , \ y(r,\theta) = r\sin\theta \ , \ z(r,\theta) = \sqrt{1-r^2} \tag{5}$$

con $(r,\theta) \in [0,a] \times [0,2\pi]$. Los vectores normales a $\mathcal{S}_1$ para esta parametrización son

$$\mathbf{N}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \\ z(r,\theta) \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{S}_1) &= 2\int_0^a \int_0^{2\pi} \|\mathbf{N}(r,\theta)\|^2 \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4\pi \int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi \big[-\sqrt{1-r^2}\,\big]_0^a \\ &= 4\pi\big(1-\sqrt{1-a^2}\big) . \end{aligned}$$

Notese que $\text{Area}(\mathcal{S}_1)$ concuerda con el aréa de la esfera unitaria en el límite $a \to 1$. Asímismo, una parametrización de la parte de $\mathcal{S}_2$ contenida en el hemisferio norte está dada por (5) con $(r,\theta) \in [a,1] \times [0,2\pi]$. Se obtiene

$$\text{Area}(\mathcal{S}_2) = 2\int_a^1 \int_0^{2\pi} \|\mathbf{N}(r,\theta)\|^2 \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4\pi\sqrt{1-a^2} .$$

Notese que $\text{Area}(\mathcal{S}_2)$ concuerda con el aréa de la esfera unitaria en el límite $a \to 0$. Concluimos que

$$\frac{\text{Area}(\mathcal{S}_1)}{\text{Area}(\mathcal{S}_2)} = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} .$$

[8 puntos]

Los dos areas son iguales si y solo si $1-\sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-a^2}$. Resolviendo esta ecuación, resulta

$$\text{Area}(\mathcal{S}_1) = \text{Area}(\mathcal{S}_2) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

[2 puntos]

2. Aplicando el teorema de Stokes, resulta

$$\iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \int_{\partial\mathcal{S}_i} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad , \quad i = 1,2 .$$

Como $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen la misma frontera $\partial\mathcal{S}_1 = \partial\mathcal{S}_2$ con orientaciones opuestas (ver la regla de orientación del teorema), se tiene que

$$\int_{\partial\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\partial\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} .$$

El resultado sigue. [5 puntos]

Solución alternativa: Observando que $\mathrm{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{F})) = 0$ (ver listado N^o 5), podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradski a la bola unitaria $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ de frontera $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Se obtiene

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iint_{\partial B_1} \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iiint_{B_1} \mathrm{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{F}))\, \mathrm{d}V = 0 \, .$$

PROBLEMA 4. Sea $\mathcal{S}$ la superficie orientada formada por la parte de un paraboloide de revolución contenida entre los planos horizontales $z = 0$ y $y = 1$, de ecuación

$$x^2 + y^2 = z \quad , \quad 0 \leq z \leq 1 \, .$$

La orientación de $\mathcal{S}$ es tal que los vectores normales a $\mathcal{S}$ tienen una componente negativa segun el eje z. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x^2 z \end{pmatrix} \, .$$

1. Determine el valor de la integral

   $$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} \, ,$$

   donde $\partial\Omega$ es la frontera de la región acotada de $\mathbb{R}^3$ definida por $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, orientada con sus normales hacia afuera de Ω.
   Indicación: usar el teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradski.

2. Deduzca de la pregunta anterior el valor de $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}$.

Solución:

1. Calculamos $\mathrm{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = x^2$. Sea Ω la región delimitada por el paraboloide y el plano $z = 1$,

   $$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\} \, .$$

   La frontera de Ω, $\partial\Omega$, es la unión de $\mathcal{S}$ y del disco $D_1(0, 0, 1)$ de centro $(0, 0, 1)$ y radio 1 contenido en el plano $z = 1$. Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski al campo vectorial $\mathbf{F}$ (el cual es C^1 en $\mathbb{R}^3 \supset \Omega$), se obtiene

   $$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \, .$$

   Para evaluar la integral triple usamos coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z$):

   $$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 (r^2 \cos^2\theta) r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3(1 - r^2) \, \mathrm{d}r \, . \end{aligned}$$

La integral sobre θ vale $\left[\frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$ y la integral sobre r vale $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Así

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \frac{\pi}{12} \,.$$

[9 puntos]

2. Como $\partial\Omega = \mathcal{S} \cup D_1(0,0,1)$, sigue que

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} + \iint_{D(0,0,1)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} \,,$$

donde la orientación del disco $D(0,0,1)$ es tal que sus vectores normales apuntan hacia arriba. A continuación evaluamos la integral sobre este disco, que puede ser parametrizado con coordenadas polares $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = 1)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Los vectores normales estan dirigidos segun el eje z, $\mathbf{N}(r,\theta) = \mathbf{T}_r(r,\theta) \wedge \mathbf{T}_\theta(r,\theta) = (0,0,r)^T$. Calculamos

$$\begin{aligned} \iint_{D(0,0,1)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ 1 \\ r^2\cos^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} - \iint_{D(0,0,1)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} \,.$$

[6 puntos]