Cálculo III
Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ II: aplicaciones
Teorema de Taylor y funciones implícitas
Módulo 3, Presentación 7

Raimund Bürger

17 de abril de 2025

3.1. El Teorema de Taylor

Teorema (Teorema de Taylor para funciones de una variable)
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea I un intervalo , sean $x_0 \in I$ y $m \in \mathbb{N}_0$, y sea la función f por lo menos $m+1$ veces continuamente diferenciable sobre I. Entonces para todo $x \in I$ es válida la fórmula de Taylor

$$f(x) = T_m(x) + R_m(x, x_0)$$

con el polinomio de Taylor

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

y el término residual en su forma de Lagrange:

$$R_m(x, x_0) = \frac{f^{(m+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

para un $\vartheta \in (0, 1)$.

3.1. El Teorema de Taylor

Ahora generalizaremos el Teorema de Taylor a funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definición 3.1 Un polinomio de n variables es una función $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $D(p) = \mathbb{R}^n$ y

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{N} a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n},$$

donde $\nu_1, \ldots, \nu_n, N \in \mathbb{N}_0$ y $a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} \in \mathbb{R}$. El mayor de los números $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ con $a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} \neq 0$ se llama el grado de p.

Definición 3.2 Sea $\vec{h} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ un vector de $\mathbb{V}^n$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $f \in C^k(X)$ para un conjunto $X \subset D(f)$. Entonces definimos el operador diferencial $(\vec{h} \cdot \nabla)^k$ mediante

$$(\vec{h} \cdot \nabla f)^k(x) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k = 1}^{n} h_{\nu_1} h_{\nu_2} \cdots h_{\nu_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2} \cdots \partial x_{\nu_k}}(x)$$

para $k > 0$ y formalmente $(\vec{h} \cdot \nabla f)^0(x) = f(x)$.

3.1. El Teorema de Taylor

Ejemplo 3.1 En el caso $n=2$, $k=2$ el operador diferencial $(\vec{h}\cdot\nabla)^2$ para una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sobre un conjunto $X\subset D(f)$ con $f\in C^2(X)$ es (según la Definición 3.2) dado por

$$\begin{aligned}
(\vec{h}\cdot\nabla f)^2(x) &= \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2(x_1,x_2)\\
&= h_1h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(x_1,x_2)+h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)\\
&\quad + h_2h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2)+h_2h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(x_1,x_2)\\
&= h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2),
\end{aligned}$$

donde utilizamos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}.$$

(ver Teorema 2.9; se presupone $f\in C^2(X)$).

3.1. El Teorema de Taylor

Teorema 3.1 (Teorema de Taylor) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $X \subset D(f)$, y para un $m \in \mathbb{N}_0$ sea $f \in C^{m+1}(X)$. Además sean $x^0 \in X$ y $x \in X$, y sea el segmento lineal $\overline{x^0, x}$ contenido en X. Entonces los siguientes enunciados se tienen para $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}^0$:

1. La función f puede ser representada por la fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\vec{h} \cdot \nabla f)^k (x^0)}{k!} + R_m(x, x^0).$$

2. El término residual $R_m(x, x^0)$ es de la siguiente forma, donde $\vartheta \in (0, 1)$:

$$R_m(x, x^0) = \frac{(\vec{h} \cdot \nabla f)^{m+1}(x^0 + \vartheta \vec{h})}{(m+1)!}.$$

3.1. El Teorema de Taylor

Para $m = 0$, es decir, $f \in C^1(X)$, obtenemos

$$f(x) = f(x^0) + \vec{h} \cdot \nabla f(x^0 + \vartheta \vec{h}), \quad \vartheta \in (0,1) \text{ apropiado.}$$

Esto es el enunciado del Teorema del Valor Intermedio. También aquí el Teorema de Taylor generaliza el Teorema del Valor Intermedio.

Para una función $f(x, y)$ definida en $\mathbb{R}^2$ y $m = 1$, la fórmula de Taylor escrita detalladamente es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&f(x_0 + h, y_0 + k) \\
&= \frac{1}{0!} f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^1 (x_0, y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \\
&= f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \big(h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + 2hk f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \\
&\qquad\qquad + k^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \big).
\end{aligned}$$

3.1. El Teorema de Taylor

Demostración del Teorema 3.1

1. Note que X es abierto (según Definición 2.9 de $C^k(X)$). Para $t \in [0,1]$ consideremos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$\varphi(t) = f(x^0 + t\vec{h}).$$

Esta función es $m+1$ veces continuamente diferenciable sobre $[0,1]$, y según el Teorema de Taylor para funciones de una variable existe un $\vartheta \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}. \qquad (3.1)$$

2. La regla de la cadena entrega las siguientes derivadas de φ:

$$\varphi^{(0)}(t) = f(x^0 + t\vec{h}) = (\vec{h} \cdot \nabla f)^0 (x^0 + t\vec{h}),$$

3.1. El Teorema de Taylor

Demostración del Teorema 3.1 (continuación)

2.
$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(x^0 + t\vec{h})}{\partial x_i} = (\vec{h} \cdot \nabla f)(x^0 + t\vec{h}),$$
$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f(x^0 + t\vec{h})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = (\vec{h} \cdot \nabla f)^2 (x^0 + t\vec{h}), \quad \text{etc.}$$

3. En general obtenemos
$$\varphi^{(k)}(t) = (\vec{h} \cdot \nabla f)^k (x^0 + t\vec{h}), \quad k = 0, 1, \ldots, m+1,$$
y por lo tanto
$$\varphi^{(k)}(0) = (\vec{h} \cdot \nabla f)^k (x^0), \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$
$$\varphi^{(m+1)} = (\vec{h} \cdot \nabla f)^{m+1} (x^0 + \vartheta\vec{h}).$$
Insertando esto en (3.1) obtenemos el enunciado del Teorema 3.1. ∎

3.1. El Teorema de Taylor

Ejemplo 3.2 Sea la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z)=\mathrm{e}^x\sin y\cos z.$$

a) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(x,y,z)$ de f correspondiente al punto de desarrollo $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$.
b) Determinar el termino residual $R_2(x,y,z,x_0,y_0,z_0)$ correspondiente.
c) Sea

$$B:=\bigl\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1\leqslant x\leqslant 1,-\pi/4\leqslant y\leqslant\pi/4,\\ -\pi/4\leqslant z\leqslant\pi/4\bigr\}.$$

Determinar una constante $C>0$ tal que

$$\max_{(x,y,z)\in B}\bigl|R_2(x,y,z,x_0,y_0,z_0)\bigr|\leqslant C.$$

3.1. El Teorema de Taylor

Ejemplo 3.2 (continuación)—Solución sugerida

a) Aquí calculamos las derivadas en $(0,0,0)$:

$$
\begin{aligned}
f &= 0, & f_{xy} &= \mathrm{e}^x \cos y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 1,\\
f_x &= \mathrm{e}^x \sin y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 0, & f_{xz} &= -\mathrm{e}^x \sin y \sin z\big|_{(0,0,0)} = 0,\\
f_y &= \mathrm{e}^x \cos y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 1, & f_{yz} &= -\mathrm{e}^x \cos y \sin z\big|_{(0,0,0)} = 0,\\
f_z &= -\mathrm{e}^x \sin y \sin z\big|_{(0,0,0)} = 0, & f_{yy} &= -\mathrm{e}^x \sin y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 0,\\
f_{xx} &= \mathrm{e}^x \sin y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 0, & f_{zz} &= -\mathrm{e}^x \sin y \cos z\big|_{(0,0,0)} = 0. \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) &= f(0,0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\dots) + z\frac{\partial f}{\partial z}(\dots)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\dots) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\dots) + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\dots)\right.\\
&\quad \left. + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\dots) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\dots) + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\dots)\right]\\
&= y + \frac{1}{2}\cdot 2xy = y + xy.
\end{aligned}
$$

3.1. El Teorema de Taylor

Ejemplo 3.2 (continuación)—Solución sugerida

b) Con notación simplificada, las terceras derivadas son

$$
\begin{aligned}
f_{xxx} &= \mathrm{e}^x \sin y \cos z, & f_{xzz} &= -\mathrm{e}^x \sin y \cos z,\\
f_{xxy} &= \mathrm{e}^x \cos y \cos z, & f_{yyy} &= -\mathrm{e}^x \cos y \cos z,\\
f_{xxz} &= -\mathrm{e}^x \sin y \sin z, & f_{yyz} &= \mathrm{e}^x \sin y \sin z,\\
f_{xyy} &= -\mathrm{e}^x \sin y \cos z, & f_{yzz} &= -\mathrm{e}^x \cos y \cos z,\\
f_{xyz} &= -\mathrm{e}^x \cos y \sin z, & f_{zzz} &= \mathrm{e}^x \sin y \sin z.
\end{aligned}
$$

El término residual es, en este caso,

$$
\begin{aligned}
&R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)\\
&= \frac{1}{6}\big(x^3 f_{xxx} + y^3 f_{yyy} + z^3 f_{zzz} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy}\\
&\quad + 3x^2 z f_{xxz} + 3xz^2 f_{xzz} + 3y^2 z f_{yyz} + 3yz^2 f_{yzz} + 6xyz f_{xyz}\big),
\end{aligned}
$$

donde las terceras derivadas son evaluadas en algún punto (ξ, η, ζ) con $0 \leqslant \xi \leqslant x$, $0 \leqslant \eta \leqslant y$ y $0 \leqslant \zeta \leqslant z$.

3.1. El Teorema de Taylor

Ejemplo 3.2 (continuación)—Solución sugerida

b) Es decir,

$$\begin{aligned}
&R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)\\
&= \frac{e^{\xi}}{6}\big(x^3 \sin\eta\cos\zeta - y^3\cos\eta\cos\zeta + z^3\sin\eta\sin\zeta\\
&\quad + 3x^2y\cos\eta\cos\zeta - 3xy^2\sin\eta\cos\zeta - 3x^2z\sin\eta\sin\zeta\\
&\quad - 3xz^2\sin\eta\cos\zeta + 3y^2z\sin\eta\sin\zeta - 3yz^2\cos\eta\cos\zeta\\
&\quad - 6xyz\cos\eta\sin\zeta\big).
\end{aligned}$$

c) Como $|\sin\alpha| \leqslant 1/\sqrt{2}$ para $-\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$,

$$\begin{aligned}
&\big|R_2(x, y, z, x_0, y_0, z_0)\big|\\
&\leqslant \frac{e}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi^3}{128} + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} + \frac{3\pi^3}{128} + \frac{3\pi^3}{64} + \frac{6\pi^2}{16\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{e}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{8} + \frac{(9\sqrt{2}+6)\pi^2}{32} + \frac{3\pi^3}{32}\right) \leqslant 5{,}855.
\end{aligned}$$

3.2. Funciones implícitas

Estudiaremos ahora la solución de sistemas de ecuaciones, empezando con sistemas lineales. Sea un sistema lineal dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m &= 0, \quad \text{donde } n > m. \end{aligned}$$

Suponemos que el rango de la matriz $(a_{\mu\nu})$ es m, es decir, depués de un posible cambio de numeración de las variables,

$$\det(a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,m} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

En este caso podemos despejar $x_1, \dots, x_m$ del sistema lineal, es decir, existen coeficientes c_μ y $c_{\mu\nu}$ tales que

$$x_1 = c_1 + \sum_{\nu=m+1}^{n} c_{1\nu}x_\nu, \dots, x_m = c_m + \sum_{\nu=m+1}^{n} c_{m\nu}x_\nu.$$

3.2. Funciones implícitas

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x) = f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

donde las funciones f_μ estén todas definidas en una vecindad n-dimensional $U(x^0)$ de un punto x^0, es decir,

$$U(x^0) \subset \bigcap_{\mu=1}^{m} D(f_\mu).$$

Buscamos todos los puntos $x \in U(x^0)$ que son soluciones del sistema. Tal punto no necesariamente debe existir.

3.2. Funciones implícitas

Ejemplo 3.3 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_3^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Aquí $n = 3$, $m = 2$. El sistema de ecuaciones no está satisfecho para ningún punto.

Tenemos que exigir que por lo menos para un punto $x \in U(x^0)$ el sistema no lineal esté satisfecho. Además necesitaremos otra condición que se convierte en (3.2) para el caso especial de un sistema lineal.

3.2. Funciones implícitas

Teorema 3.2 (Teorema Principal de Funciones Implícitas)

Sean dadas $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $\mu = 1, \ldots, m$ con $m < n$. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto; $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$; $f_\mu \in C^1(X)$ para $\mu = 1, \ldots, m$, y

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1^0, \ldots, x_n^0) &= 0. \end{aligned}$$

Además, sea la matriz

$$F(x^0) = \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0) \right)_{\mu,\nu=1,\ldots,m} \tag{3.3}$$

no singular. En este caso, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x) = f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

es localmente resoluble para $x_1, \ldots, x_m$.

3.2. Funciones implícitas

Teorema 3.2 (continuación) Esto significa lo siguiente: existen una vecindad abierta Y del punto $\xi^0 = (x^0_{m+1}, \dots, x^0_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ y m funciones unicamente definidas $\varphi_\mu : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ $(\mu = 1, \dots, m)$ de las variables $x_{m+1}, \dots, x_n$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

todas de ellas definidas sobre Y. Estas funciones satisfacen:

1. $\varphi_\mu \in C^1(Y)$ para $\mu = 1, \dots, m$.
2. Para todo $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_1\big(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n\big) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m\big(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n\big) &= 0. \end{aligned}$$

3.2. Funciones implícitas

Teorema 3.2 (continuación)

3. Las matrices

$$\phi(\xi^0) = \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}(\xi^0) \right)_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=m+1,\dots,n}} \quad \text{y} \quad \tilde{F}(x^0) = \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0) \right)_{\substack{\mu=1,\dots,m \\ \nu=m+1,\dots,n}}$$

satisfacen la relación

$$\phi(\xi^0) = -\big(F(x^0)\big)^{-1} \cdot \tilde{F}(x^0).$$

Ejemplo 3.4 Consideremos la ecuación

$$f(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - \mathrm{e}^z - 4 = 0$$

y queremos resolverla para z en una vecindad de $(0, \mathrm{e}, 2)$. Para la matriz F obtenemos aquí

$$\det F = \frac{\partial f}{\partial z}(0,\mathrm{e},2) = (x + 2z - \mathrm{e}^z)\big|_{(0,\mathrm{e},2)} = 4 - \mathrm{e}^2 \neq 0.$$

Según el Teorema 3.2, esta ecuación puede ser resuelta en una vecindad de $(0, \mathrm{e})$ en la forma $z = z(x,y)$ de tal manera que $z(0, \mathrm{e}) = 2$.

3.2. Funciones implícitas

Ejemplo 3.4 (continuación)

Queremos calcular las derivadas $\partial z/\partial x(0,\mathrm{e})$ y $\partial z/\partial y(0,\mathrm{e})$. Aplicando la regla de la cadena a $f(x,y,z)=0$ obtenemos por derivación implícita con respecto a x e y las ecuaciones

$$0 = z + x\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - \mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}, \quad 0 = 2y + x\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} - \mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial y},$$

es decir,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x+2z-\mathrm{e}^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x+2z-\mathrm{e}^z}.$$

Insertando $x=0$, $y=e$ y $z=z(0,\mathrm{e})=2$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\mathrm{e}) = -\frac{2}{4-\mathrm{e}^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,\mathrm{e}) = -\frac{2\mathrm{e}}{4-\mathrm{e}^2}.$$

Note que ha sido posible calcular estas derivadas parciales sin conocer explícitamente la función $z(x,y)$; solamente necesitamos conocer el valor de $z(x,y)$ en el punto $(0,\mathrm{e})$.

Ejemplo 3.5

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_3 + x_2x_4^2 = 0, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_4^3 + x_2^2x_3^6 = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Evidentemente el sistema está satisfecho en el punto

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (0,1,0,0).$$

¿Podemos resolver (*) para $x_3 = x_3(x_1,x_2)$, $x_4 = x_4(x_1,x_2)$? Aquí

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2x_4 \\ 6x_2^2x_3^5 & 3x_1x_4^2 \end{bmatrix}.$$

Para el punto considerado, $\det F = 3x_1^2x_4^2 - 12x_2^3x_3^5x_4 = 0$. El Teorema 3.2 no nos entrega ninguna información acerca de la existencia y unicidad de una solución del sistema en una vecindad del punto considerado.

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2

Procedemos por inducción sobre el número de ecuaciones μ. Después de posiblemente renumerar las funciones f_μ y las m primeras variables $x_1, \dots, x_m$ podemos suponer que todos los subdeterminantes principales de (3.3) satisfacen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

1. Sea $\mu = 1$. Según hipótesis, $(\partial f_1 / \partial x_1)(x^0) \neq 0$; sin pérdida de la generalidad podemos suponer que $(\partial f_1 / \partial x_1)(x^0) > 0$.
   a) En virtud de la hipótesis $f_1 \in C^1(X)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f_1(x_1^0 - \varepsilon, x_2^0, \dots, x_n^0) < 0, \quad f_1(x_1^0 + \varepsilon, x_2^0, \dots, x_n^0) > 0.$$

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

1. a) Además existe un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ apropiado tal que para cada selección de x_ν con $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$ ($\nu = 2, \ldots, n$),

$$f_1(x_1^0 - \varepsilon, x_2, \ldots, x_n) < 0, \quad f_1(x_1^0 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n) > 0.$$

Eligiendo ε y δ aún más pequeños si fuera necesario, podemos suponer que en el entero intervalo n-dimensional

$$|x_1 - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_\nu - x_\nu^0| < \delta \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

se tiene $(\partial f_1/\partial x_1)(x) > 0$. Ahora sea $(x_2, \ldots, x_n)$ tal que $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$ para $\nu = 2, \ldots, n$. Como $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función monótona creciente de x_1 para $|x_1 - x_1^0| < \varepsilon$, existe exactamente un valor $x_1 = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$ tal que

$$f_1\big(\varphi_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\big) = 0.$$

Esto define una sobre $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$ ($\nu = 2, \ldots, n$) una función $\varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$.

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

1. a) Según la construcción, siempre se tiene que

$$|x_1 - x_1^0| = \left|\varphi_1(x_2, \dots, x_n) - \varphi_1(x_2^0, \dots, x_n^0)\right| < \varepsilon.$$

   Como la misma demostración puede ser realizada para un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, esto implica la continuidad de φ_1 en $(x_2^0, \dots, x_n^0)$. Para cualquier otro punto $(x_2, \dots, x_n)$ tal que $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta$ para $\nu = 2, \dots, n$ resulta la continuidad si repetimos la misma demostración reemplazando x^0 por $(\varphi_1(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$.

   b) El enunciado $\varphi_1 \in C^1$ es una consecuencia del T.V.I. para f_1 aplicado a los puntos $(x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n)$ y $(x_2^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n)$, donde suponemos $|h| < \delta$ para que también el segundo punto pertenezca al dominio de φ_1. Ahora, si escribimos detalladamente en el argumento $(x_2, \dots, x_n)$ solamente la k-ésima componente y definimos $x_1^h := \varphi_1(\dots, x_k^0 + h, \dots)$, se tiene con un $\vartheta \in (0,1)$ lo siguiente.

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

1. b) Con un $\vartheta \in (0,1)$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^h, \dots, x_k^0 + h, \dots) - f_1(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\big(x_1^0 + \vartheta(x_1^h - x_1^0), \dots, x_k^0 + \vartheta h, \dots\big)(x_1^h - x_1^0) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\big(x_1^0 + \vartheta(x_1^h - x_1^0), \dots, x_k^0 + \vartheta h, \dots\big) h. \end{aligned}$$

Después de dividir por h y tomando el límite $h \to 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0), \end{aligned}$$

Esto implica la existencia de $\partial\varphi_1/\partial x_k$ ($k = 2, \dots, n$) en el punto $(x_2^0, \dots, x_n^0)$. Para cualquier otro punto podemos proceder como en (a). Entonces el enunciado $\varphi_1 \in C^1$ es una consecuencia de la presuposición $f_1 \in C^1$.

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

2. Supongamos ahora que el teorema haya sido demostrado para $\mu - 1$, donde $2 \leqslant \mu \leqslant m$. Según la presuposición sabemos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu-1}}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Según hipótesis de inducción las primeras $\mu - 1$ ecuaciones son localmente resolubles. Es decir existen $\tilde{\delta} > 0$ y $\mu - 1$ funciones

$$x_1 = \tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, x_{\mu-1} = \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n)$$

las que son definidas, continuas y pertenecen a C^1 para $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ para $\nu = \mu, \dots, n$, de modo que allí se tiene que

$$\begin{aligned} f_1\big(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n), x_\mu, \dots, x_n\big) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{\mu-1}\big(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \dots, x_n), x_\mu, \dots, x_n\big) &= 0. \end{aligned}$$

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

2. Tomando la derivada parcial $\partial/\partial x_\mu$ de cada ecuación, obtenemos para todo punto $(x_\mu, \ldots, x_n)$ con $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ para $\nu = \mu, \ldots, n$ las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu-1}}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \cdots + \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Consideremos para $(x_\mu, \ldots, x_n)$ con $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ $(\nu = \mu, \ldots, n)$ la μ-ésima ecuación del sistema, donde remplazamos $x_1, \ldots, x_{\mu-1}$ por las funciones $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_\mu(x_\mu, \ldots, x_n) \\ &= f_\mu\big(\tilde{\varphi}_1(x_\mu, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x_\mu, \ldots, x_n), x_\mu, \ldots, x_n\big) = 0. \end{aligned}$$

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

2. Por supuesto, esta ecuación no está automaticamente satisfecha para puntos arbitrarios $(x_\mu, \ldots, x_n)$ con $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ $(\nu = \mu, \ldots, n)$; más bien hay que despejar x_μ de esta ecuación. Para tal efecto, y para poder aplicar el paso (1) de esta demostración, debemos demostrar primeramente que

$$\frac{\partial \tilde{f}_\mu}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \ldots, x_n^0) \neq 0. \tag{3.5}$$

Pero para $(x_\mu, \ldots, x_n)$ con $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ $(\nu = \mu, \ldots, n)$,

$$\frac{\partial \tilde{f}_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu-1}}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Si esta expresión desaparecería al insertar $(x_\mu^0, \ldots, x_n^0)$, tendríamos junto con (3.4) un sistema homogéneo con la matriz

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

2.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu-1}}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}(x^0) \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}}(x^0) & \frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial x_\mu}(x^0) \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu-1}}(x^0) & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}(x^0) \end{bmatrix}$$

con un determinante no nulo pero con la solución no trivial

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0), \dots, \frac{\partial \tilde{\varphi}_{\mu-1}}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0), 1 \right),$$

una contradicción. Entonces efectivamente, (3.5) es válido:

$$\frac{\partial \tilde{f}_\mu}{\partial x_\mu}(x_\mu^0, \dots, x_n^0) \neq 0.$$

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

2. Entonces existen un $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ y una función

$$x_\mu = \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n) \tag{3.6}$$

la cual es definida, continua, y pertenece a C^1 para $(x_{\mu+1}, \dots, x_n)$ con $|x_\nu - x_\nu^0| < \tilde{\delta}$ para $\nu = \mu+1, \dots, n$ tal que

$$\begin{aligned} f_\mu\Big(&\tilde{\varphi}_1\big(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n\big), \dots, \\ &\tilde{\varphi}_{\mu-1}\big(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n\big), \\ &\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n\Big) = 0. \end{aligned}$$

Si además definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{\varphi}_1\big(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n\big) =: \varphi_1(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_{\mu-1} &= \tilde{\varphi}_{\mu-1}\big(\varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), x_{\mu+1}, \dots, x_n\big) =: \varphi_{\mu-1}(x_{\mu+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

hemos encontrado junto con (3.6) las soluciones buscadas.

3.2. Funciones implícitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

3. La afirmación $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu \in C^1$ sigue de las propiedades correspondientes sobre las funciones φ_μ y $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{\mu-1}$ mediante la aplicación de la regla de la cadena. Asimismo, la afirmación (3) del teorema es una consecuencia de la regla de la cadena.