UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo III Joaquín Riquelme, Javier Salinas Concepción 2025, Mayo

CÁLCULO III

Listado (Integrales múltiples y cambios de variable)

Ejercicios para la práctica

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas por trozos. Muestre que

$$\iint_R f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right),$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua por trozos. Usando el teorema de Fubini, muestre que

$$\iint_{T_1} f(x)f(y)\,dxdy = \iint_{T_2} f(x)f(y)\,dxdy,$$

donde T_1 y T_2 son los triángulos

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le x \le b\}, \quad T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le y \le b\}.$$

Usando esta fórmula y el resultado del Problema ??, deduzca que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(x)f(y)\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.$$

3. Sea Q la región acotada por los planos $z = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$. Calcule

$$\iiint_Q x\,dxdydz.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xyze^{x^2} \\ ze^{x^2} \\ ye^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Halle $f(1,1,2)$ sabiendo que $f(0,0,0) = 5$.

5. Calcule la integral de línea

$$\int_C \sin z\, dx + \cos z\, dy - y\sqrt{z}\, dz,$$

sobre la parametrización $C : (x, y, z) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, con $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. calcule la integral de línea

$$\int_C dx + dy + dz, \quad \text{a lo largo de } C : x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y - z + 1 = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Al calcular por doble integración el volumen del sólido situado bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y limitado inferiormente por una cierta región D del plano, se llega a la siguiente suma de integrales:

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Dibuje la región de integración, calcule el volumen del sólido con otro orden de integración.

2. Considere la región R comprendida entre 4 parábolas cofocales:

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 - 1; \\ 2y &= \frac{x^2}{4} - 4; \\ 2y &= -\frac{x^2}{4} + 4; \\ 2y &= -\frac{x^2}{6} + 6 \end{aligned}$$

y ubicada en el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(2.1) Dibuje la región R, y verifique que se convierte en un rectángulo $\hat{R}$ mediante el cambio de variables $x = uv$, $y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$ (coordenadas parabólicas) y suponiendo $u > 0$ y $v > 0$.

(2.2) Calcule el área $\iint\limits_R d(x, y)$ de la región R, mediante sustitución a coordenadas parabólicas.

3. Un trompo de madera de masa $M = 0{,}25$ [kg] tiene forma de esferoide, descrita por la ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

con $a = 5$ [cm] y $c = 4$ [cm]. Se supone que la densidad es constante dentro del trompo delimitado por este esferoide (se desprecia el peso de la punta). Calcule el momento de inercia del trompo con respecto al eje z.

Indicación: recuerde que el momento de inercia de un sólido Ω con respecto al eje z está definido por

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

donde ρ es la densidad (en kg/m^3).

4. Calcular el momento de inercia I_z del sólido arriba del plano xy acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, suponiendo que a y la densidad de masa son constantes.

5. Determine el momento de inercia de un sólido en forma de cono recto con base circular al respecto a su eje de simetría, suponiendo una densidad uniforme.

6. Parametrizar las siguientes curvas:

1. $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,\ r > 0.$
2. $\mathcal{C} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0.$
3. $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{C}$ es el cuadrado de vértices $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.
4. $\mathcal{C} : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, llamado hipercicloide.

7. Calcule las siguientes integrales de línea:

1. $\int_{\mathcal{C}} (x + y)\, dr$, donde $\mathcal{C}$ es el borde del triángulo con vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.
2. $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dr$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.
3. $\int_{\mathcal{C}} f\, dr$, donde $f(x, y, z) = xyz$ y $\mathcal{C}$ una vuelta de la hélice de radio r y de paso 2π.

Cambios de varible usuales

1. **Coordenadas Polares:** $\Psi : [0,+\infty[\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Psi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

2. **Coordenadas Cilíndricas:** $\Psi : [0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Psi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

3. **Coordenadas Esféricas:** $\Psi : [0,+\infty[\times[0,2\pi]\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi), \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\sin\varphi$$

Aplicaciones

(1) **Volumen**

$$V(S) = \iiint_S dV$$

(2) **Masa** (Denotamos $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la densidad del sólido S)

$$m(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)\ dV$$

(3) **Densidad Media**

$$\bar{\rho}(x,y,z) = \frac{m(S)}{V(S)}$$

(4) **Masa Puntual**

$$M_x(S) = \iiint_S x\rho(x,y,z)\ dV$$
$$M_y(S) = \iiint_S y\rho(x,y,z)\ dV$$
$$M_z(S) = \iiint_S z\rho(x,y,z)\ dV$$

(5) **Centro de Gravedad (Masa)**

$$\text{Centro de Masa: } \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$$

(6) **Momentos de Inercia**

$$I_x(S) = \iiint_S \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\ dV$$
$$I_y(S) = \iiint_S \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\ dV$$
$$I_z(S) = \iiint_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\ dV$$