UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525214, 525523)
Listado N$^{\mathrm{o}}$ 3 (Series de Fourier)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. **(¿ Todas las series de cosenos y senos son series de Fourier?)**
¿ Existe una función 2π-periódica integrable sobre $[-\pi, \pi]$ cuya serie de Fourier esta dada por
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos(nt) + \sin(nt) \big) \quad ?$$
Justifique su respuesta.

2. **(Asociatividad del producto de convolución).** Muestre que si $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son T-periódicas e integrables, luego
$$(f * g) * h = f * (g * h) \ .$$

3. **(Resolución de una EDO mediante series de Fourier).** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua 2π-periódica. Considere la ecuación diferencial ordinaria
$$-y''(t) + y(t) = f(t) \ . \tag{1}$$
   (a) Muestre que si y es una solución 2π-periódica de clase $C^2(\mathbb{R})$ de (1), luego sus coeficientes de Fourier complejos $c_{y,n}$ satisfacen
   $$c_{y,n} = \frac{c_{f,n}}{1+n^2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$
   donde $c_{f,n}$ son los coeficientes de Fourier complejos de f.
   (b) Determine los coeficientes de Fourier complejos de la extensión 2π-periódica de $g(t) = \cosh(|t| - \pi)$, $-\pi \le t \le \pi$. Muestre que su serie de Fourier converge uniformemente y que su suma $S_g(t) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
   (c) Deducir de las preguntas anteriores que (1) tiene una única solución 2π-periódica de clase $C^2(\mathbb{R})$, dada por
   $$y(t) = \frac{\pi}{\sinh(\pi)} \, f * g(t) \ .$$

4. **(Cálculo de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).** Determine la serie de Fourier de la función f definida en $[-\pi, \pi]$ por $f(t) = t$, $-\pi \le t \le \pi$. ¿ Esta serie converge uniformemente? Deduzca la fórmula
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{2}$$

5. **(Convergencia uniforme).**

   (a) Determine si la convergencia de las series de Fourier de los Problemas 1, 4, 5(a) y 5(b) del Listado N^o 2 es uniforme o solamente puntual.

   (b) En cada caso, determine los supremos en el intervalo $[-a,a]$ de los términos de la serie de Fourier y discute si la convergencia de la serie es normal en $[-a,a]$, donde $a > 0$ es arbitario (recuerda que una serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n(t)$ converge normalmente en $[-a,a]$ si $\sum_{n\geq 1} \sup_{t\in[-a,a]} |f_n(t)| < \infty$).

6. **(Integración término a término de series de Fourier).**

   (a) Deduzca de la serie de Fourier de la función f del problema 4 que

$$\pi - t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \quad , \quad 0 < t < 2\pi \; .$$

   (b) Muestre que la serie en el miembro derecho puede ser integrada término a término. Deduzca la serie de Fourier de la extensión 2π-periódica de la función F definida en $[0,2\pi]$ por $F(t) = (\pi - t)^2/2$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (*Indicación:* usar la fórmula (2)). Muestre que esta serie converge uniformemente.

7. **(Criterio de Lipschitz para la convergencia puntual de la serie de Fourier).**

   (a) Usando el teorema de Riemann-Lebesgue, demostrar el siguiente teorema: *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, integrable sobre $[-\pi,\pi]$ y continua en un intervalo $[t-\delta, t+\delta]$ para cierto $\delta > 0$. Si f satisface la condición de Lipschitz en el punto t, esto es, si existe $M > 0$ tal que*

$$|f(t+u) - f(t)| \leq M|u| \quad , \quad \forall\, u \in]-\delta, \delta[\; ,$$

   luego la serie de Fourier de f en t converge y su suma $S_f(t)$ es igual a $f(t)$. *Indicación:* Seguir argumentos similares a los vistos en clase para demostrar el teorema de Dirichlet: (i) Usar la igualdad

$$S_{f,N}(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(f(t+u) + f(t-u) - 2f(t)\big) D_N(u)\, \mathrm{d}u \; ,$$

   donde $S_{f,N}(t)$ es la suma parcial de la serie de Fourier de f en t y D_N es el núcleo de Dirichlet, $D_N(u) = \sin((N+1/2)u)/\sin(u/2)$. (ii) Mostrar que la integral sobre $[\delta,\pi]$ tiende a 0 cuando $N \to \infty$ para cualquier $0 < \delta < \pi$. (iii) Reescribir el integrante en una forma apropiada para aplicar el teorema de Riemann-Lebesgue a la integral sobre $[0,\delta]$.

   (b) Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} t\sin(1/t) & \text{si } t \in [-\pi, 0[\cup]0,\pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   Muestre que f es continua en $[-\pi,\pi]$. Deducir del teorema de la pregunta anterior que la serie de Fourier de f en $t = 0$ converge y que su suma es igual a $f(0) = 0$. ¿ Se puede aplicar el teorema de Dirchlet para mostrar este resultado?

8. **(Decaimiento de los coeficientes de Fourier).** El propósito de este problema es demostrar el siguiente teorema:
Sea $k \in \mathbb{N}^*$ y f una función T-periódica de clase C^{k-1} en $\mathbb{R}$ tal que $f^{(k-1)}$ es derivable en $]-T/2, T/2[$ salvo en un número finito de puntos y $f^{(k)}$ es continua por trozos en $[-T/2, T/2]$. Luego los coeficientes de Fourier de f satisfacen

$$n^k a_n \to 0 \ , \ n^k b_n \to 0 \ \textit{cuando} \ n \to \infty.$$

   (a) Muestre que bajo las hipótesis del teorema, para todo $q = 1, \ldots, k$, los coeficientes $c_n^{(q)}$ de la serie de Fourier compleja de $f^{(q)}$ satisfacen

$$c_n^{(q)} = \left(\frac{2\mathrm{i}\pi n}{T}\right)^q c_n \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \, . \tag{3}$$

   Indicación: Generalizar los argumentos vistos en clase para demostrar (3) en el caso de una función f de clase $C^k(\mathbb{R})$: (i) descomponer la integral en la definición de $c_n^{(k)}$ en una suma de integrales sobre $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, p$, $-T/2 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < t_{p+1} = T/2$ siendo los puntos donde $f^{(k-1)}$ no es derivable, y (ii) integrar por partes cada integral para mostrar que $c_n^{(k)} = \frac{2\mathrm{i}\pi n}{T} c_n^{(k-1)}$.

   (b) Muestre que bajo las hipótesis del teorema, $c_n^{(k)} \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$.

   (c) Deducir que si las hipótesis del teorema se cumplen luego $|n|^k c_n \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$ y por tanto $n^k a_n \to 0$, $n^k b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

9. **(Serie de Fourier y derivada).**

   (a) Encuentre la serie de Fourier de la función 2π-periódica definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le t \le 0 \\ \sin t & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

   (b) Muestre que la serie es uniformemente convergente.

   (c) Muestre que f satisface las hipótesis del teorema del Problema 8 con $k = 1$. Usando la identidad (3), deduzca de la pregunta (a) la serie de Fourier de

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le t < 0 \\ \cos t & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

   d) ¿ La serie de Fourier de g converge puntualmente ? ¿ uniformemente ?

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

10. (**Evaluación 1, 2024-1**).
Sea f la función 2π-periódica tal que $f(t) = t^2$ si $-\pi < t \leq \pi$.

   a) Encuentre la serie de Fourier de f.

   b) Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

   c) Deduzca el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

   d) Usando la identidad de Parseval, deduzca el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

   e) Determine, a partir de la serie de Fourier de f obtenida en la pregunta 1, la serie de Fourier de
$$g(t) = \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s - \frac{\pi^2}{3} t \ .$$
Deduzca el valor de $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}$.

11. Sea f una función 2π-periodica continua por trozos (CPT) en $[-\pi, \pi]$, de coeficientes de Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Definimos
$$F(t) = \int_0^t f(u)\, \mathrm{d}u - \frac{a_0}{2} t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

   (a) Muestre que F es 2π-periódica y continua en $\mathbb{R}$.

   (b) Sea $t_1 < \ldots < t_p$ los puntos de $]-\pi, \pi[$ donde f es discontinua. Muestre que F es derivable en $]-\pi, \pi[\setminus\{t_1, \ldots, t_p\}$ y que su derivada est CPT en $[-\pi, \pi]$.

   (c) Muestre que la serie de Fourier de F converge puntualmente y que su suma es igual a
$$S_F(t) = F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin(nt) - \frac{b_n}{n} \cos(nt) \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$
¿ La serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$?

   (d) Deduzca que si f es 2π-periódica y CPT en $[-\pi, \pi]$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ converge y es igual a $A_0/2$.

   (e) Usando el resultado de la pregunta anterior, muestre que la serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nt)}{\ln n}$$
no es una serie de una función 2π-periódica CPT en $[-\pi, \pi]$.

12. Muestre que para todo $t \in]0, \pi[$,

$$\cos t = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nt) \; .$$

13. Sea f la función definida en $[0, 1]$ por $f(t) = \mathrm{e}^t$, $0 \leq t \leq 1$. Determine series de Fourier de extensiones periódicas de f tales que:

    (i) la serie no contiene senos;

    (ii) la serie no contiene cosenos;

    (iii) la serie contiene ambos cosenos y senos.

    Muestre que la tres series de Fourier convergen puntualmente y que sus sumas son iguales a $f(t)$ para todo $t \in]0, 1[$.
    ¿ Cual(es) de las tres series converge(n) uniformemente ?

Septiembre 26, 2025.
DS/ds