UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Trabajo Práctico 2 - Análisis Real I (525301)

Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Para cada uno de las tres propiedades de la definición de métrica, da un ejemplo de una función que no la satisface, pero satisface las otras dos.

Demostración. Recordemos las propiedades de una métrica $d : E \times E \to [0, +\infty)$:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall z \in E$

Consideremos las funciones $D_i : E \times E \to [0, +\infty)$ definidas como:

- $D_1(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$, con $E = \mathbb{R}$
- $D_2(x, y) = x - y$ cuando $x \geq y$, y $D_2(x, y) = 1$ e.o.c., con $E = \mathbb{R}$
- $D_3(x, y) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, con $E = \mathbb{R}^2$

De aquí podemos probar que D_i no satisface la propiedad $i = 1, 2, 3$, pero sí las otras dos. ∎

Ejercicio 3. Da un ejemplo de dos conjuntos discretos cuya unión no sea un conjunto discreto.

Demostración. Consideremos $E = \mathbb{R}$ y d la métrica usual. Sean los conjuntos $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $B = \{0\}$, ambos discretos. En efecto, $A' = \{0\}$ y $A' \cap A = \emptyset$; y B es un singleton.

Es fácil ver que $A \cup B$ no es discreto pues 0 es un punto de acumulación del mismo. ∎

Ejercicio 4. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Luego, $\exists \alpha \in A$ tal que $x \in G_\alpha$. Como G_α es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset G_\alpha$. De aquí, se sigue que $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. En otras palabras, x es un punto interior de $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Como x fue escogido arbitrariamente, se concluye que todo punto de $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es un punto interior de $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Es decir, $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es abierto. ∎

(c) Si $G_1, \ldots, G_N$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^{N} G_i$ es un conjunto abierto. Da un ejemplo que muestre que la intersección de infinitos conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto.

Demostración. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{N} G_i$. Luego, $x \in G_i$, $\forall i = 1, \ldots, N$.

Como cada G_i es abierto, tenemos que $\exists r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(x) \subset G_i$. Tomando $r := \min\{r_1, \ldots, r_N\} > 0$, se verifica que

$$B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

y por tanto $B_r(x) \subset G_i$, $\forall i = 1, \ldots, N$, de lo cual concluimos que x es punto interior de la intersección $\bigcap_{i=1}^{N} G_i$. De aquí se deduce que $\bigcap_{i=1}^{N} G_i$ es, efectivamente, un conjunto abierto. ■

Ejercicio 5. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$ y por lo tanto no es un conjunto cerrado;

Demostración. Como $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset (0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset (0, 1]$$

Por otro lado, sea $x \in (0, 1]$. Es decir, $0 < x \leq 1$. Luego, por principio arquimediano existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \leq x \leq 1$. Por tanto $x \in \left[\frac{1}{m}, 1\right]$ y

$$(0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

De las inclusiones anteriores se concluye lo pedido. ■

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right) = (-1, 0]$ y por lo tanto no es un conjunto abierto;

Demostración. Como $(-1, 0] \subset \left(-1, \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$(-1, 0] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right)$$

Por otro lado, sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right)$. Es decir, $-1 < x < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \notin (-1, 0]$. Claramente x no puede ser menor o igual a 1 por hipótesis. Así, el único caso que requiere un mayor análisis es $x > 0$.

Así, sea $x > 0$. Sin embargo, por principio arquimediano debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < x$, lo cual contradice la hipótesis.

Por tanto, $x \in (-1, 0]$. Es decir,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right) \subset (-1, 0]$$

De las inclusiones anteriores se concluye lo pedido. ■

(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$

Demostración. Supongamos que exista $x \in bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Es decir, $0 < x < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Es fácil ver que ésto es una contradicción del principio arquimediano, pues de la desigualdad anterior tendríamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ (dado que $x > 0$),

$$n < \frac{1}{x}$$

lo cual no es cierto (¡los naturales no están acotados superiormente!).

■

Ejercicio 6. Demuestra que $\text{int}(X)$ es el mayor conjunto abierto contenido en X.

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto abierto. Luego, todos los puntos de A son puntos interiores de A y, por tanto, puntos interiores de X. Por definición de interior (el conjunto de todos los puntos abiertos de X), concluimos $A \subset \text{int}(X)$. Es decir, X es maximal (c.r. a $\subset$) en los conjuntos abiertos contenidos en X, i.e. es el mayor abierto contenido en X. ■

Ejercicio 7. Demuestra que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas.

Demostración. Sea X un conjunto abierto. Proponemos que $X = \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$, donde $r_x > 0$ son tal que $B_{r_x}(x) \subset X$, los cuales están bien definidos pues $\forall x \in X$, x es punto interior de X.

Es fácil ver que $X \subset \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$. Por otro lado, $\bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x) \subset X$ ya que el lado izquierdo es una unión de subconjuntos de X. Así, hemos demostrado lo pedido. ■

Ejercicio 8. Sea $a \in E$. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $\{a\}$ es cerrado;

Demostración. Recordemos que x es punto de acumulación de un conjunto A si y sólo si para toda bola centrada en x existen infinitos puntos de A contenidas en ésta.

De la caracterización anterior es fácil ver que si A es un conjunto finito, entonces $A' = \emptyset$, pues ninguna bola puede contener infinitos puntos de A.(¡No hay suficientes!).

Luego, como $\{a\}$ es finito, es cerrado. ■

(b) $\{a\}$ es abierto si y sólo si a es un punto aislado

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{a\}$ es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \{a\}$. Además, $\{a\} \subset B_r(a)$ (por definición de bola abierta). Luego,

$$B_r(a) = \{a\} \iff B_r(a) \cap E = \{a\}.$$

Es decir, a es punto aislado.

($\Leftarrow$) Sea a un punto aislado. Por lo tanto, existe una bola abierta $B_r(a)$ centrada en a tal que $B_r(a) \cap E = \{a\}$. Como $B_r(a) \cap E = B_r(a)$ (cuando consideramos sólo puntos en el espacio métrico (E, d) en la definición de bola), tenemos que $B_r(a) = \{a\}$. Luego, $\{a\}$ es una bola abierta y por tanto es un conjunto abierto. ■

Ejercicio 9. Se recuerda la definición de la frontera de un conjunto $X \subset E$:

$$\partial X := \{x \in E : \forall r > 0, B_r(x) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset\}$$

Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $E = \text{int}(X) \dot{\cup} \partial X \dot{\cup} \text{int}(X^c)$;

Demostración. Recordemos que

$$\text{int}(X) := \{x \in E : \exists r > 0, B_r(x) \subset X\}$$

Lo cual es equivalente a

$$\text{int}(X) := \{x \in E : \exists r > 0, B_r(x) \cap X^c = \emptyset\}$$

Luego, es claro que $\text{int}(X) \cap \partial X = \emptyset$. Así mismo, notando que $\partial X = \partial X^c$, tenemos que $\partial X \cap \text{int}(X^c) = \emptyset$. Además, como $\text{int}(X) \subset X$ y $\text{int}(X^c) \subset X^c$, tenemos que $\text{int}(X) \cap \text{int}(X^c) = \emptyset$. Así, las uniones son efectivamente disjuntas.

Para probar que $E = \text{int}(X)\dot{\cup}\partial X\dot{\cup}\text{int}(X^c)$, basta probar que $\text{int}(X)^c = \partial X\dot{\cup}\text{int}(X^c)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x \in \text{int}(X)^c &\iff (\forall r > 0) : B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset \\
&\iff (B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset) \wedge (B_r(x) \cap X = \emptyset \vee B_r(x) \cap X \neq \emptyset) \\
&\iff (B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap X = \emptyset) \vee (B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap X \neq \emptyset) \\
&\iff (B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset \wedge B_r(x) \subset X^c) \vee (B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap X \neq \emptyset) \\
&\iff (x \in \text{int}(X^c)) \vee (x \in \partial X) \\
&\iff x \in (\text{int}(X^c)\dot{\cup}\partial X)
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido.

■

(b) $\overline{E} = \text{int}(E) \cup \partial E$;

Demostración. Recordemos que

$$\overline{X} := \{x \in E : \forall r > 0,\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Notamos que $\forall x \in \overline{X}$, se pueden dar dos casos: $x \in X$ o $x \in X^c$. Si $x \in X^c$, se tendrá entonces que $x \in \partial X$. Si $x \in X$ se puede dar el caso que exista $r > 0$ para $B_r(x) \subset X$. Si se da ésto, entonces $x \in \text{int}(X)$, de lo contrario $x \in \partial X$, ya que no hay r para inducir una bola contenida en X (i.e. $B_r(X) \cap X^c \neq \emptyset$). Por lo tanto, $\overline{X} \subset \text{int}(X) \cup \partial X$.

En el otro sentido, $\forall x \in \text{int}(X) \cup \partial X$ se tiene que $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap X \neq \emptyset$, ya que si está en el interior, entonces pertenece a X (intersección x), y si está en la frontera, entonces por definición se tiene la intersección no nula. Por lo tanto $\overline{X} \supset \text{int}(X) \cup \partial X$. ■

(c) ∂E es un conjunto cerrado.

Demostración. Del ejercicio (a) sabemos que $(\partial X)^c$ es la unión de dos conjuntos abiertos (interiores). Por lo tanto, $(\partial X)^c$ es abierto y su complemento es cerrado. ■

Ejercicio 10. Dados dos conjuntos acotados X e Y, demuestra las siguientes propiedades:

(a) si $X \subset Y$, entonces $\text{diam}(X) \leq \text{diam}(Y)$;

Demostración. Como X es subconjunto de Y, tendremos entonces que $\forall x, y \in X \Rightarrow x, y \in Y$. Por lo tanto, si definimos los conjuntos $D_x := \{d(x, y) : x, y \in X\}$ y $D_y := \{d(a, b) : a, b \in Y\}$, tendremos necesariamente que $D_x \subset D_y$. Supongamos que $\text{diam}(X) > \text{diam}(Y)$. Esto es equivalente a decir $\sup D_x > \sup D_y$, lo que sabemos que lleva a una contradicción (rápidamente por inspección notamos que $\sup D_y$ acota a D_x, generando una cota menor al supremo). ■

(b) si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $\text{diam}(X \cup Y) \leq \text{diam}(X) + \text{diam}(Y)$.

Demostración. Sea $p \in X \cap Y$. Luego, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ se cumple $d(p,x) \leq \text{diam}(X)$ y $d(p,y) \leq \text{diam}(Y)$. Por desigualdad triangular tendremos $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,p) + d(p,y) \\ &\leq \text{diam}(X) + \text{diam}(Y) \end{aligned}$$

Luego se tiene que $\text{diam}(X) + \text{diam}(Y)$ es una cota superior para el cojnjunto $D_{xy} := \{d(x,y) : x, y \in X \cup Y\}$. Dado que $\text{diam}(X \cup Y) = \sup D_{xy}$, como menor cota superior tendremos que $\text{diam}(X \cup Y) \leq \text{diam}(X) + \text{diam}(Y)$. ■

Ejercicio 11. Demuestra que todo espacio métrico es unión numerable de conjuntos acotados.

Demostración. Sea $x \in E$ un punto arbitrario, tomemos las bolas $B_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$U := \bigcup_{n \in N} B_n(x).$$

La inclusión $U \subset E$ es trivial. En el otro sentido, notamos que $\forall p \in E$ se tiene que $r_p := d(x,p) \in \mathbb{R}$. Por propiedad arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r_p$. Esto implica entonces que $p \in B_n(x) \subset U$. ■

Ejercicio 12. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r$, pero no necesariamente $\text{diam}(B_r(a)) = 2r$;

Demostración. Por desigualdad triangular, $\forall x, y \in B_r(a)$, $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) = r + r = 2r$. Para la métrica discreta, se toma una bola de radio 2 y se obtiene diámetro 1. ■

(b) en un espacio vectorial normado, $\text{diam}(B_r(a)) = 2r$.

Demostración. Sabemos, del ejercicio anterior, que $\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r$. Supongamos que $\text{diam}(B_r(a)) < 2r$. Sea $\hat{u}$ un vector unitario, y sea $\text{diam}(B_r(a)) < d < 2r$. Sean, además, $x = a + \frac{d}{2}\hat{u}$ e $y = a - \frac{d}{2}\hat{u}$. Verificamos que ambos están en $B_r(a)$.

$$||x - a|| = \frac{d}{2} < r \qquad ||y - a|| = \frac{d}{2} < r$$

Sin embargo, notamos que:

$$||x - y|| = ||d\hat{u}|| = d > \text{diam} B_r(a)$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\text{diam}(B_r(a)) = 2r$. ■