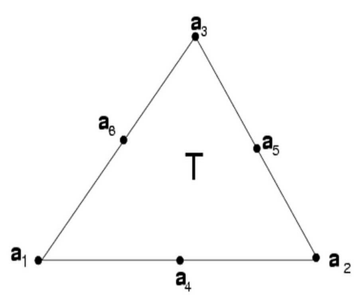
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos (521537)

Evaluación 2

1. Sea Ω un subconjunto abierto, acotado, conexo, de frontera poligonal de $\mathbb{R}^2$. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, lo que significa, entre otras cosas, que existe $\sigma > 0$ tal que
$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \forall h > 0\,.$$
Sea $H_h := \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\,:\, v_{h|_T} \in \mathbb{P}_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap H_0^1(\Omega) \quad (k \geq 1)$ subespacio de dimensión finita de $H := H_0^1(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de h, tal que:
$$C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla v_h\|_{0,T}^2 \leq \|v_h\|_{0,\Omega}^2 \qquad \forall v_h \in H_h.$$
02 puntos

2. Considere el siguiente triángulo $T \in \mathcal{T}_h$



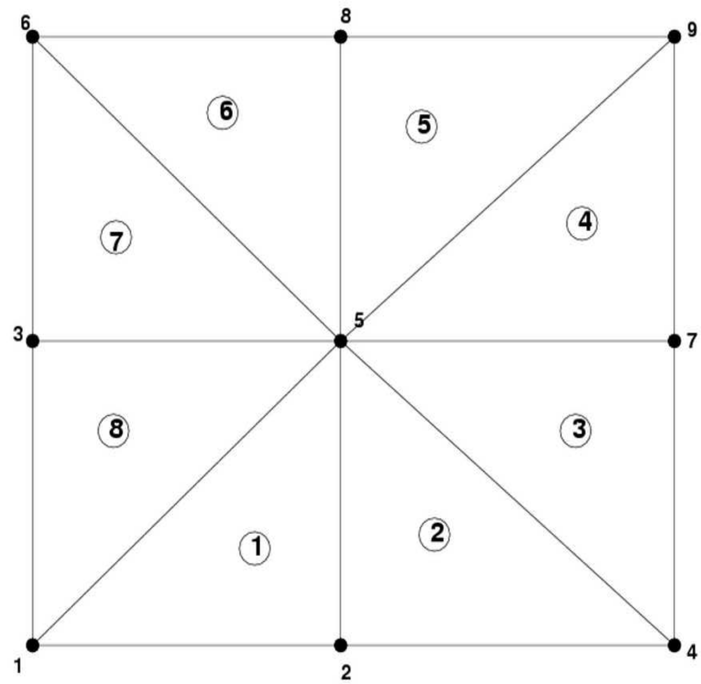
donde $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ son los vértices de T y $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ y $\boldsymbol{a}_6$ son los puntos medios de los lados. Denotamos por $\mathbb{P}_2(T)$ al subespacio de todos los polinomios, definidos sobre T, de grado total a lo mas 2, y por $\Sigma_2 := \{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$.

(2.1) Demuestre que $(T, \mathbb{P}_2, \Sigma_2)$ es un elemento finito de Lagrange.

(2.2) Calcule una base $\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_6\}$ de $\mathbb{P}_2(\hat{T})$ tal que $\hat{p}_i(\hat{\boldsymbol{a}}_j) = \delta_{ij}$. ($\hat{T}$ es el triángulo de referencia).

02 puntos

3. Dada la siguiente malla de elementos finitos del abierto $\Omega :=]0,1[\times]0,1[$,



donde la conectividad de los elementos está dada por la siguiente tabla

elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
nodo 1	1	2	4	7	9	8	6	3
nodo 2	2	4	7	9	8	6	3	1
nodo 3	5	5	5	5	5	5	5	5

Suponiendo que el problema a resolver es $-\Delta u + u = f$, con condición de Neumann en toda la frontera de Ω, usando una aproximación $\mathbb{P}_1$.

(3.1) Muestre quién contribuye al cálculo de los elementos $K_{5,5}$ y $K_{2,4}$ de la matriz de rigidez global.

(3.2) Si todos los nodos son incógnitas, haga un mapa de la ubicación de los elementos no nulos de K y calcule cuántos son.

02 puntos