525140 – Álgebra 1 – Propuesta de Solución Evaluación 2 (26.05.2023)

Problema 1. (15 puntos)

Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \dfrac{8-x}{x-2}$.

1.1) Determine dominio y recorrido de f. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Justifique.

1.2) Restrinja dominio y/o codominio de f de modo que la función resultante sea biyectiva y defina su inversa.

Solución:

1.1) Primero obtenemos el dominio directamente, solo debemos evitar la división por cero.

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \ :\ \frac{8-x}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Y para obtener el recorrido recordamos su definición

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathrm{Dom}(f) \ :\ \ f(x) = y\},\\
&= \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \ :\ \frac{8-x}{x-2} = y\},\\
&= \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \ :\ 8-x = y(x-2)\},\\
&= \{y \in \mathbb{R} :\ \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \ :\ 8+2y = x(y+1)\},\\
&= \left\{y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} : \frac{8+2y}{y+1} \neq 2\right\}.
\end{aligned}$$

Dado que para todo $y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ el número $\frac{8+2y}{y+1}$ es distinto de 2, se tiene que

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Para verificar si la función es inyectiva consideramos $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{8-x_1}{x_1-2} = \frac{8-x_2}{x_2-2},\\
&\iff (8-x_1)(x_2-2) = (8-x_2)(x_1-2)\\
&\iff 8x_1 - \cancel{16} - \cancel{x_1x_2} + 2x_1 = 8x_1 - \cancel{16} - \cancel{x_1x_2} + 2x_2,\\
&\iff 6x_1 = 6x_2,\\
&\iff x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es inyectiva.

Por otro lado, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \neq \mathbb{R} = \text{Cod}(f)$, por lo que la función no es sobreyectiva.

(9 puntos)

1.2) Para poder definir la inversa necesitamos que la función sea sobreyectiva, lo cual se obtiene simplemente restringiendo el codominio para que coincida con el recorrido, para esto definimos la función

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \; x \mapsto \frac{8-x}{x-2},$$

la cual es una función biyectiva y, por lo tanto, invertible.

La fórmula de la inversa de $\tilde{f}$ fue obtenida al estudiar el recorrido, así

$$\tilde{f}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, \; x \mapsto \frac{8+2x}{x+1}.$$

(6 puntos)

Problema 2. (15 puntos)

2.1) Demuestre que la siguiente identidad trigonométrica es válida para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$

2.2) Determine los valores de $x \in [0, \pi]$ que satisfacen la siguiente ecuación.

$$4\sin(x)\cos^3(x) - 4\sin^3(x)\cos(x) = \sin\left(\frac{20\pi}{7}\right).$$

Indicación: En el item **2.2** podría utilizar las identidades de seno y coseno del ángulo doble, es decir, las identidades para $\sin(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$.

Solución:

2.1) En primer lugar, sabemos que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \tag{1}$$

Utilizando (1) y debido a que la función coseno es par y la función seno es impar, se tiene que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + (-\beta)) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

Utilizando estas igualdades se tiene que

$$\begin{aligned}\cos(x-y)-\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)-(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))\,,\\ &= 2\sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo por dos la igualdad anterior,

$$\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)=\sin(x)\sin(y)$$

que es lo que debíamos demostrar.

(6 puntos)

2.2) Modifiquemos la parte izquierda de la ecuación que debemos resolver

$$4\sin(x)\cos^3(x)-4\sin^3(x)\cos(x)=4\sin(x)\cos(x)(\cos^2(x)-\sin^2(x)).$$

Dado que para todo número real x se cumple que $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ y $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}4\sin(x)\cos^3(x)-4\sin^3(x)\cos(x) &= 2\sin(2x)(\cos^2(x)-\sin^2(x)),\\ &= 2\sin(2x)\cos(2x).\end{aligned}$$

Ahora, notemos que la última expresión también puede ser vista como la identidad del seno del ángulo doble. De lo anterior se obtiene que

$$4\sin(x)\cos^3(x)-4\sin^3(x)\cos(x)=\sin(4x).$$

Reemplazando en la expresión original se llega a la ecuación $\sin(4x)=\sin(20\pi/7)$.

Haciendo el cambio de variable $u=4x$, el problema $\sin(u)=\sin(20\pi/7)$, $u\in\mathbb{R}$, posee las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}u_1 &= \mathrm{Arcsin}(\sin(20\pi/7))+2k\pi, && k\in\mathbb{Z}\\ u_2 &= \pi-\mathrm{Arcsin}(\sin(20\pi/7))+2k\pi, && k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Notemos que $20\pi/7\notin[-\pi/2,\pi/2]$, por lo cual $\mathrm{Arcsin}(\sin(20\pi/7))\neq 20\pi/7$. Sin embargo, sabemos que $\sin(20\pi/7)=\sin(2\pi+6\pi/7)=\sin(6\pi/7)$ y $\sin(6\pi/7)=\sin(\pi-\pi/7)=\sin(\pi/7)$ y este último sí se encuentra en el intervalo deseado. De lo anterior,

$$\mathrm{Arcsin}(\sin(20\pi/7))=\mathrm{Arcsin}(\sin(\pi/7))=\pi/7.$$

Reemplazando este valor en las expresiones u_1 y u_2,

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{\pi}{7}+2k\pi, && k\in\mathbb{Z}\\ u_2 &= \frac{6\pi}{7}+2k\pi, && k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego, basta volver a la variable original para obtener los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación original.

$$\begin{aligned} u_1 = 4x_1 \Rightarrow x_1 &= \frac{\pi}{28} + \frac{k\pi}{2}, && k \in \mathbb{Z} \\ u_2 = 4x_2 \Rightarrow x_2 &= \frac{3\pi}{14} + \frac{k\pi}{2}, && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

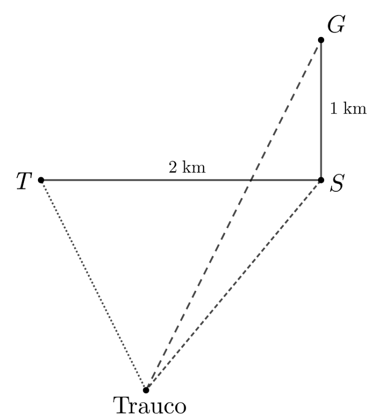
Así, las soluciones de la ecuación en $[0, \pi]$ son las que pertenecen al siguiente conjunto:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{28}, \frac{15\pi}{28} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{14}, \frac{10\pi}{14} \right\}.$$

(9 puntos)

Problema 3. (15 puntos)

En el sur de Chile dos guardabosques, Teresa y Sergio, se encuentran a 2 km de distancia, Sergio al este de Teresa.
En un determinado momento Sergio divisa al Trauco en dirección $S45°O$ y se lo comunica por radio a otro guardabosques, Guillermo, situado a 1 km de él en dirección norte, quien observa al Trauco en dirección $S30°O$.
Determine, justificando sus cálculos, a qué distancia se encuentra cada guardabosques de esta mítica criatura.



Solución:
Consideremos la figura 1.
Debemos determinar las medidas de los segmentos $\overline{VT}$, $\overline{ST}$ y $\overline{CT}$, para esto utilizaremos el teorema del coseno para los dos primeros y el teorema del seno para el tercero, como sigue:

$$\frac{1}{\sin(15°)} = \frac{ST}{\sin(30°)} = \frac{VT}{\sin(135°)}.$$

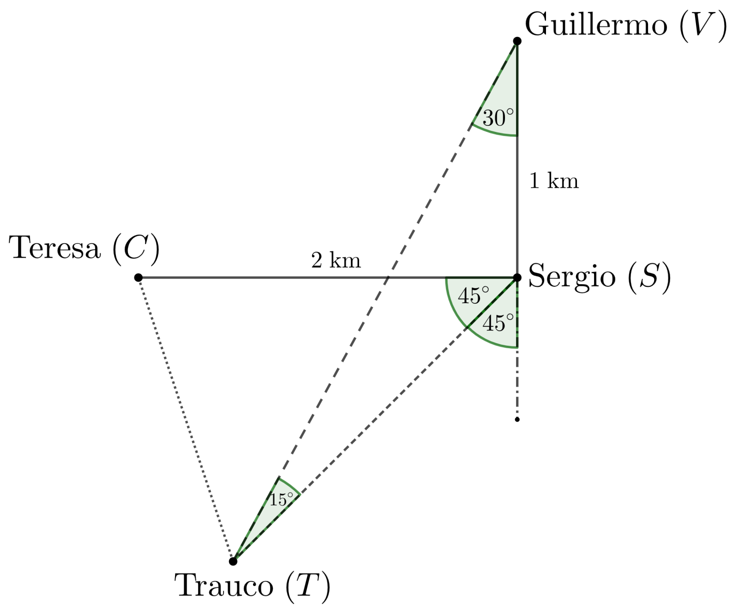


Figura 1: Ángulos según enunciado

Ahora bien, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sin(30°) &= \frac{1}{2},\\
\sin(135°) &= \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
\sin(15°) &= \sin(45° - 30°) = \sin(45°)\cos(30°) - \sin(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Luego, considerando lo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin(15°)} = \frac{ST}{\sin(30°)}, \qquad \wedge \qquad \frac{1}{\sin(15°)} = \frac{VT}{\sin(135°)},\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2 \cdot ST, \qquad \wedge \qquad \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot VT}{\sqrt{2}},\\
\Leftrightarrow \quad & ST = \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \approx 1{,}9, \qquad \wedge \qquad VT = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \approx 2{,}7.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned}
& CT^2 = CS^2 + ST^2 - 2 \cdot CS \cdot ST \cdot \cos(45°), \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}-1}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \frac{4}{2(\sqrt{3}-1)^2} - \frac{4}{\sqrt{3}-1}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \frac{2}{4-2\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}-1}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}-1}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + \frac{2+\sqrt{3}}{1} - \frac{4(\sqrt{3}+1)}{2}, \\
\Leftrightarrow \quad & CT^2 = 4 + 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2, \\
\Leftrightarrow \quad & CT = \sqrt{4-\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, las distancia de cada guardabosques al Trauco es:

$$VT = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \approx 2{,}7 \text{ km}, \quad ST = \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \approx 1{,}9 \text{ km} \quad \text{y} \quad CT = \sqrt{4-\sqrt{3}} \approx 2{,}2 \text{ km}.$$

Problema 4. (15 puntos)

4.1) Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \log(10x), \qquad g(x) = \sqrt{10x}.$$

- Calcule el dominio de $f \circ g$.
- Muestre que $\forall x \in Dom(f \circ g)$,

$$(f \circ g)(x) = 1 + \frac{1}{2} f(x).$$

4.2) Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente inecuación.

$$\log_x(2x) > 2.$$

Solución:

4.1)
- De las definiciones de la función logaritmo y de la función raíz cuadrada se tiene que

$$A = Dom(f) =]0, +\infty[\quad \text{y} \quad B = Dom(g) = [0, +\infty[.$$

Luego,

$$\begin{aligned} Dom(f \circ g) &= \{x \in Dom(g) \,:\, g(x) \in Dom(f)\}, \\ &= \{x \in [0, +\infty[: \sqrt{10x} \in]0, +\infty[\}, \\ &= \{x \geq 0 \,:\, \sqrt{10x} > 0\}, \\ &= \{x \geq 0 \,:\, 10x > 0\}, \\ &=]0, +\infty[. \end{aligned}$$

(3 puntos)

- Primero notamos que

$$f(x) = \log(10x) = \log(10) + \log(x) = 1 + \log(x) \iff \log(x) = f(x) - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{10x}) = \log(10\sqrt{10x}) = \log(10^{3/2}\sqrt{x}) &= \frac{3}{2} + \log(\sqrt{x}), \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log(x), \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(f(x) - 1), \\ &= 1 + \frac{1}{2}f(x). \end{aligned}$$

(4 puntos)

4.2) De la definición de función logaritmo se tiene la siguiente restricción para x:

$$2x > 0 \,\wedge\, x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \iff x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}.$$

Considerando esta restricción para x, resolvemos la inecuación.

$$\log_x(2x) > 2 \iff \log_x(2) + 1 > 2 \iff \log_x(2) > 1.$$

Dado que la base del logaritmo es x, debemos estudiar dos casos.

Caso 1: $0 < x < 1$:

$$\log_x(2) > 1 \iff 2 < x^1 \iff x > 2$$

Así,

$$S_1 = [2, +\infty[\cap]0, 1[= \emptyset.$$

Caso 2: $x > 1$:

$$\log_x(2) > 1 \iff 2 > x^1 \iff x < 2$$

Así,

$$S_2 = [-\infty, 2[\cap]1, +\infty[=]1, 2[.$$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es

$$S = (S_1 \cup S_2) \cap \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} =]1, 2[.$$

(8 puntos)