Procesos Estocásticos : Listado 2 Problems 1 y 2

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Problema 1 del Listado 2

El costo de arreglar un vehículo luego de un accidente sigue una distribución exponencial con media \$100 M.
Si el costo es mayor a \$40 M, la aseguradora cubrirá la diferencia entre el monto total y \$40 M (el monto deducible). Calcule el valor esperado y la desviación estándar del monto pagado por la aseguradora.

Solución

Sea X : Costo de arreglar un vehículo.

$$\mathbb{E}[X] = 100 \text{ y } X \sim Exp(1/100).$$

Luego, $(X-40)_+$: El monto pagado por la cía.
Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-40)_+] &= \mathbb{E}\left[(X-40)_+|X>40\right]P(X>40) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(X-40)_+|X\leq 40\right]P(X\leq 40) \\
&= \mathbb{E}\left[X-40|X>40\right]P(X>40).
\end{aligned}$$

Solución. Cont.

Puesto que

$$P(X > 40) = e^{-\frac{1}{100}40} = e^{-0,4}.$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X - 40|X > 40] &= \int_0^\infty P(X - 40 > x|X > 40)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty P(X > x + 40|X > 40)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty P(X > x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X] = 100.\end{aligned}$$

Por ende,

$$\mathbb{E}[(X - 40)_+] = 100e^{-0,4} \approx 67.$$

Solución. Cont.

Para calcular la desviación estándar, necesitamos :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-40)_+^2] &= \mathbb{E}\left[(X-40)^2|X>40\right] P(X>40)\\ &= 2\times 100^2 e^{-0,4},\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-40)^2|X>40] &= \int_0^\infty P\left((X-40)^2>x|X>40\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\infty P\left(X-40>\sqrt{x}|X>40\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\infty P\left(X^2>x\right)\mathrm{d}x\\ &= Var[X]+(\mathbb{E}[X])^2 = 2\times 100^2.\end{aligned}$$

Solución. Cont.

Finalmente,

$$\begin{aligned} Var[(X-40)_+] &= \mathbb{E}[(X-40)_+^2] - (\mathbb{E}[(X-40)_+])^2 \\ &= 2 \times 100^2 e^{-0,4} - (100^2 e^{-0,4})^2. \\ \sigma &= 100\left(2e^{-0,4} - e^{-0,8}\right)^{1/2} \approx 94.4. \end{aligned}$$

La desviación estándar, aproximadamente, es de 94 mil pesos.

Outline

Problema 2

Pruebe que si X es una v.a. que se distribuye exponencial, entonces

$$\mathbb{E}[X^2 | X > 1] = \mathbb{E}[(X+1)^2]$$

Solución

Notemos que $\mathbb{E}[X^2|X>1]$ implica que $X>0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2|X>1] &= \int_0^\infty P(X^2>x|X>1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty P(X>\sqrt{x}|X>1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty P\left(X>(\sqrt{x}-1)+1|X>1\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty P(X>\sqrt{x}-1)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Acá hemos aplicado la propiedad de falta de memoria.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2|X>1] &= \int_0^\infty P(X>\sqrt{x}-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty P(X+1>\sqrt{x})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty P\left((X+1)^2>x\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{E}\left[(X+1)^2\right].
\end{aligned}
$$