UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218-525221)

Listado $N°2$.

Aplicaciones EDO de primer orden.

Problemas a resolver en práctica

1. El siguiente problema de mezcla ocurre en un tanque de 100 [l] de capacidad, y consta de dos fases. En la primera fase el volumen es constante, en la segunda el volumen es variable. De manera precisa el problema es el siguiente:

   En un inicio entra al tanque a una velocidad de 4 [l/min] una solución salina (agua con sal), a una concentración de 0,1 [kg/l]. El tanque contiene inicialmente 20 [l] de la citada mezcla a una concentración de 0,8 [kg/l]. Desde el tanque fluyen al exterior 4 [l/min] de solución salina.

   Las condiciones de la primera parte del problema se mantienen hasta que la concentración salina al interior del tanque desciende a 0,4 [kg/l]. En ese instante que denominamos t_C, el flujo de entrada al tanque aumenta a 6 [l/min], manteniendose el flujo de salida al exteior en 4 [l/min]. Asuma que la mezcla en el tanque se mantiene siempre uniformemente homogénea.
   Formule los dos PVI de las fases correspondientes. Resuelva.

Solución

Antes que nada, definamos las siguientes variables de trabajo:

t : medido en minutos,
$x(t)$: cantidad de sal en kg en el instante t,
$V(t)$: volumen dentro del tanque en litros en el instante t,
$\rho(t)$: concentracin de sal en la mezcla dentro del tanque medida en kg/l en el instante t.

El problema constan de dos etapas (una entre $0 \leq t \leq t_C$ y otra cuando $t_C \leq t \leq t_d$, siendo t_d el tiempo de derrame) las cuales describimos a continuacin.

Etapa 1: Como al principio el volumen dentro del tanque es de 20 litros y en esta etapa el volumen es constante, entonces se deduce que

$$V(t) = 20, \qquad 0 \leq t \leq t_C,$$

siendo t_C el instante indicado en el enunciado. Por otro lado, usando los datos del enunciado, la cantidad de sal en la mezcla $x(t)$, est gobernada por el siguiente PVI:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& (4)\,(0.1) - 4\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \quad 0 \leq t \leq t_C, \\ x(0) &=& V(0)\,\rho(0). \end{array} \right. \tag{1}$$

el cual, dado que al principio $\rho(0) = 0.8$ kg/l, se reduce al siguiente PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) + \dfrac{x(t)}{5} & = & 0.4, \qquad 0 \le t \le t_C, \\ x(0) & = & 16\,\mathrm{kg}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Un factor integrante para la EDO dada por (2) está dado por (omitiendo la constante de integración)

$$\mu_1(t) = \exp\left(\int \frac{dt}{5} \right) = \mathrm{e}^{t/5}, \qquad 0 \le t \le t_C.$$

Multiplicando la EDO de (2) por $\mu_1(t)$, se obtiene

$$\mathrm{e}^{t/5}\, x'(t) + \frac{\mathrm{e}^{t/5}}{5}\, x(t) = 0.4\,\mathrm{e}^{t/5} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{t/5}\, x(t) \right] = 0.4\,\mathrm{e}^{t/5}.$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$\mathrm{e}^{t/5}\, x(t) = 2\,\mathrm{e}^{t/5} + C \Longleftrightarrow \boxed{x(t) = 2 + C\,\mathrm{e}^{-t/5}, \quad 0 \le t \le t_C.}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 16$ kg, se obtiene

$$x(0) = 2 + C = 16 \Longrightarrow C = 14\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = 2 + 14\,\mathrm{e}^{-t/5}, \qquad \text{para } 0 \le t \le t_C. \tag{3}$$

Para obtener t_C, se debe cumplir que (recuerde que $\rho(x) = x(t)/V(t)$)

$$\begin{aligned} \rho(t_C) = 0.4\,\mathrm{kg}/l \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{x(t)}{V(t)} = 0.4 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{10} + \frac{7}{10} e^{-t_C/5} = \frac{2}{5} \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{7}{10} e^{-t_C/5} = \frac{3}{10} \\ & \Longleftrightarrow \quad e^{-t_C/5} = \frac{3}{7} \\ & \Longleftrightarrow \quad -\frac{t_C}{5} = \ln\left(\frac{3}{7}\right) \\ & \Longleftrightarrow \quad t_C = 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right) \ \text{min} \end{aligned}$$

Por lo tanto, en esta primera etapa se tiene:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2 + 14e^{-t/5} \qquad , \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min}\\
V(t) &= 20 \qquad , \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min}\\
\rho(t) &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10}e^{-t/5} \qquad , \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min}
\end{aligned}$$

Etapa 2: Ahora, el flujo de entrada pasa a ser 6 l/min en lugar de 4 l/min, con lo cual la diferencia entre las nuevas razones de entrada y salida está dada por $\Delta V = 6 - 4 = 2$ litros. Por lo tanto, el volumen de la mezcla en el tanque para $t \ge t_d$ verifica el siguiente PVI,

$$\left\{\begin{aligned}
V'(t) &= 2, & t_C \le t \le t_d,\\
V(t_C) &= V(t_C^-) = 20\,\text{litros}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

siendo $t_d > 0$ el tiempo de derrame. Observemos que la solución general de la EDO dada en (4) está dada por

$$V(t) = 2\,t + \widetilde{C}, \qquad \widetilde{C} \in \mathbb{R},$$

y como $V(t_C) = 20$ litros, tenemos que

$$V(t_C) = 2\,t + \widetilde{C} = 20 \Longrightarrow \boxed{\widetilde{C} = 20 - 2\,t_C} = 20 - 10\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{litros} \approx 11.53\,\text{litros}.$$

Por tanto,

$$V(t) = 2\,(t - t_C) + 20, \qquad t_C \le t \le t_d,$$

Por otro lado, el tiempo de derrame ocurre cuando la mezcla ocupa el tanque por completo, es decir

$$\begin{aligned}
V(t_d) = 2\,(t_d - t_C) + 20 = 100\,\text{litros} \quad &\Longrightarrow \quad \boxed{t_d = t_C + 40}\\
&\Longrightarrow \quad t_d = \left[5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right) + 40\right]\ \text{minutos} \approx 44.24\,\text{minutos}.
\end{aligned}$$

Así,

$$V(t) = 2\,(t - t_C) + 20, \qquad t_C \le t \le t_d.$$

Usando nuevamente los datos del enunciado, el nuevo flujo de entrada y el hecho que la cantidad de sal debe ser una función continua, entonces, para $t_C \le t \le t_d$, el PVI que gobierna a $x(t)$ está dado por:

$$\begin{cases} x'(t) &= (6)\,(0.1) - 4\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \qquad t_C \leq t \leq t_d, \\ \\ x(t_C) &= x(t_C^-) \;=\; V(t_C^-)\,\rho(t_C^-). \end{cases}$$

el cual, dado que $\rho(t_C) = 0.4$ kg/l, se reduce al siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{2}{t - t_C + 10}\,x(t) &= 0.6, \qquad t_C \leq t \leq t_d, \\ \\ x(t_C) &= 8\,\text{kg}. \end{cases} \tag{5}$$

Un factor integrante para la EDO dada por (5) está dado por (omitiendo la constante de integración)

$$\mu_2(t) = \exp\left(\int \frac{2}{t - t_c + 10}\,dt\right) = (t - t_C + 10)^2, \qquad t_C \leq t \leq t_d.$$

Multiplicando la EDO de (5) por $\mu_2(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\Big[(t - t_C + 10)^2\,x(t)\Big] = 0.6\,(t - t_C + 10)^2.$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$(t - t_C + 10)^2\,x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10)^3 + C, \quad t_C \leq t \leq t_d.$$

lo cual equivale a tener,

$$\boxed{x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10) + \frac{C}{(t - t_C + 10)^2}, \quad t_C \leq t \leq t_d.}$$

Usando la condición inicial $x(t_C) = 8$ kg, se obtiene

$$x(t_C) = 2 + \frac{C}{100} = 8 \Longrightarrow C = 600.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10) + \frac{600}{(t - t_C + 10)^2}, \qquad \text{para } t_C \leq t \leq t_d. \tag{6}$$

En resumen,

$$x(t)=\begin{cases} 2+14\,\mathrm{e}^{-t/5} & ,0\le t<5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{5}\left[t-5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+10\right]+600\left[t-5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+10\right]^{-2} & ,5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\le t\le 5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+40\end{cases}$$

$$V(t)=\begin{cases} 20 & ,0\le t<5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\\[2ex] 2\left[t-5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+10\right] & ,5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\le t\le 5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+40\end{cases}$$

$$\rho(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}e^{-t/5} & ,0\le t<5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{10}+300\left[t-5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+10\right]^{-3} & ,5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)\le t\le 5\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)+40\end{cases}$$

2. A un tanque de 600 $[l]$ de capacidad, entran 6 $[\frac{l}{min}]$ de una solución salina (agua y sal) a una concentración de 0.01 $[\frac{kg}{l}]$. Además, por una llave lateral desde el tanque se pierden al exterior 3 $[\frac{l}{min}]$ de la solución salina. Suponiendo que la mezcla dentro del tanque es siempre homogénea, que las paredes del tanque son suficentemente regulares y que inicialmente dentro del tanque hay 60 $[l]$ de agua, justificando sus respuestas, determine:
   - (i) La cantidad de sal en el tanque hasta el instante del derrame.
   - (ii) Si al momento del derrame se cierra el flujo de entrada, conservando el flujo de salida en 3 $[\frac{l}{min}]$. Determine la cantidad de sal dentro del tanque, hasta que este queda vacio. En qué momento se produce el vacio?

Solución:

Sean:

$$\begin{aligned} t &: \text{ tiempo medido en minutos,}\\ V(t) &: \text{ volumen de la mezcla dentro del tanque en litros en el instante } t,\\ x(t) &: \text{ cantidad de sal presente en la mezcla en gramos en el instante } t,\end{aligned}$$

(i) Notemos que la diferencia entre la razón de entrada y salida de sal es $\Delta V=6-3=3$ litros. Por lo tanto, el volumen de la mezcla en el tanque en instante t verifica el siguiente PVI,

$$\begin{cases} V'(t) = 3, & 0\le t\le t_d,\\ V(0) = 60\,\text{litros.} \end{cases} \tag{7}$$

siendo $t_d>0$ el tiempo de derrame.

Observemos que la solución general de la EDO para V está dada por

$$V(t) = 3t + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

y como $V(0) = 60$ litros, tenemos que $C = 60$ litros. Por tanto,

$$V(t) = 3\,t + 60, \qquad 0 \leq t \leq t_d,$$

Por otro lado, el tiempo de derrame ocurre cuando la mezcla ocupa el tanque por completo, es decir

$$V(t_d) = 3\,t_d + 60 = 600 \Longrightarrow t_d = \frac{540}{3}\,\text{minutos} = 180\,\text{minutos}.$$

Así,

$$V(t) = 3\,t + 60, \qquad 0 \leq t \leq 180 \text{ min}.$$

Ahora, utilizando el modelo visto en clases, la cantidad de sal $x(t)$, verifica el siguiente PVI:

$$\begin{cases} x'(t) &= (6)\,(0.01) - 3\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \quad 0 \leq t \leq 180, \\ x(0) &= 0\,\text{kg}. \end{cases} \tag{8}$$

pues al principio la mezcla no posee sal ($x(0) = 0$ kg). De (8) se obtiene

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{x(t)}{t+20} &= 0.06, \quad 0 \leq t \leq 180, \\ \\ x(0) &= 0\,\text{kg}. \end{cases}$$

Para resolver la EDO para x, observemos que un factor integrante está dado por (donde se omite la constante de integración)

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{dt}{t+20}\right) = \mathrm{e}^{\ln|t+20|} = |t+20| = t+20, \qquad 0 \leq t \leq 180\,\text{min}.$$

Así, multiplicando la EDO normalizada para x por $\mu(x)$, se llega a la siguiente EDO,

$$(t+20)\,x'(t) + x(t) = 0.06\,(t+20) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[(t+20)\,x(t)\Big] = 0.06\,(t+20).$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$(t+20)\,x(t) = \frac{0.06}{2}\,(t+20)^2 + C \Longleftrightarrow \boxed{x(t) = 0.03\,(t+20) + \frac{C}{t+20}, \quad 0 \leq t \leq 180.}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 0$ kg, se obtiene

$$x(0) = 0.6 + \frac{C}{20} = 0 \Longrightarrow C = -12.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = 0.03\,(t+20) - \frac{12}{t+20}, \qquad \text{para } 0 \le t \le 180\,\text{min}, \tag{9}$$

y as, se concluye que la cantidad de sal en el instante del derrame est dada por

$$x(t_d) = x(180\,\text{min}) = \left[0.03\,(180+20) - \frac{12}{180+20}\right]\,\text{kg} = 5.94\,\text{kg}.$$

(ii) Si en los 180 minutos se cierra el flujo de entrada manteniéndose el flujo de salida en 3 litros por minuto, entonces

$$\Delta V = -\,3\,\text{litros} \qquad ,$$

y como a los 180 minutos el tanque está lleno, se deduce que para $t \ge 180$ minutos, V verifica el siguiente PVI

$$\begin{cases} V'(t) &= -3, \qquad\qquad 180 \le t \le t_{\emptyset}, \\ V(180^+) &= V(180^-) = 600\,\text{litros}. \end{cases}$$

cuya única solución est dada por (compruebe esto)

$$V(t) = -3\,(t-180) + 600 = -3\,t + 1140, \qquad 180 \le t \le t_{\emptyset},$$

siendo $t_{\emptyset}$ el tiempo cuando el tanque se vacíe, lo cual ocurre cuando el volumen sea nulo, es decir,

$$V(t_{\emptyset}) = 1140 - 3\,t_{\emptyset} = 0 \Longrightarrow t_{\emptyset} = 380 \text{ min}.$$

Bajo estas condiciones, para $t \ge 180$, la cantidad de sal $x(t)$ verifica el siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) &= 0 - 3\,\dfrac{x(t)}{1140-3\,t}, \quad 180 \le t < 380, \\ x(180) &= x(180^-). \end{cases} . \tag{10}$$

De (10) y (12) se obtiene el siguiente PVI simplificado

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{1}{380-t}\,x(t) &= 0, \qquad 180 \le t < 380, \\ x(180) &= 5.94\,\text{kg}. \end{cases} \tag{11}$$

Un factor integrante para la EDO dada en (11) está dado por (se asume constante de integración nula)

$$\mu_1(t) = \exp\left(\int \frac{dt}{380-t}\right) = \mathrm{e}^{-\ln|380-t|} = \frac{1}{380-t}, \qquad 180 \le t < 380.$$

Multiplicando la EDO normalizada dada en (11) por $\mu_1(t)$, se obtiene que

$$\frac{1}{380-t}\,x'(t)+\frac{1}{(380-t)^2}\,x(t)=0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{380-t}\,x(t)\right]=0.$$

Integrando la última ecuación, obtenemos

$$\frac{1}{380-t}\,x(t)=C \Longleftrightarrow \boxed{x(t)=C\,(380-t),\ 180\leq t\leq 380.}$$

Usando la condición inicial $x(180)=5.94$ kg, se obtiene que

$$x(180)=200\,C=5.94\,\text{kg} \Longrightarrow C=0.0297\ \text{kg/min}.$$

Por lo tanto,

$$x(t)=0.0297\,(380-t),\qquad \text{para } 180\leq t\leq 380. \tag{12}$$

Observación: También se pudo haber elegido como factor integrante a

$$\mu_1(t)=\frac{1}{t-380},\qquad 180\leq t\leq 380,$$

pues si ya se tiene un factor integrante válido en el intervalo de trabajo, cualquier múltiplo no nulo de él también será factor integrante.

Problemas para el Estudiante

1. En un tanque de 700 litros de capacidad, hay 100 litros de salmuera (agua con sal) a una concentración de 0,2 g/l. Hacia el interior del tanque, se bombea agua con 0,1 g/l de sal a una tasa de 5 l/min; por una válvula de escape, fluyen al exterior 2 l/min. Suponiendo que la mezcla de agua y sal es homogénea en todo instante, y que en el proceso se está evaporando agua pura a una tasa de 1 l/min, determine la cantidad y concentración de sal en todo instante antes del derrame.

2. Un recipiente contiene 10 [l] de agua pura. Salmuera (agua con sal) que contiene 10 [g] de sal por litro entra a una tasa de 2 [l/min]. El agua bien mezclada se saca a una tasa de 1 [l/min], y adicionalmente se evapora 1 [l/min] (vapor de agua sin sal). Determine la cantidad de sal en el recipiente en función del tiempo.

   Repita todo el problema suponiendo que no hay evaporación y sabiendo que el recipiente se llena a las 10 minutos (encuentre la cantidad de sal para antes y después de los 10 primeros minutos).

Abril, 06 de 2020.
MDT/JMS/CMGF/DS//jms/ahn