UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Sobre la dimensión de $\mathcal{L}(V,W)$ cuando V y W son finito dimensionales

Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $A := \{v_1, ..., v_n\}$ y $B := \{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente $(n\,, m \in \mathbb{N})$.

1. $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$, se define la función $T_{ij} : V \to W$, tal que $\forall\, k \in \{1,...,n\}$: $T_{ij}(v_k) := \begin{cases} \Theta_W & k \neq i \\ w_j & k = i\,. \end{cases}$ Determinar la regla de correspondencia de T_{ij}, para cada $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$. Luego, demostrar que $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$.

   Demostración: La regla de correspondencia de la función propuesta es $T_{ij}(x) := \alpha_i\, w_j$, para cualquier vector $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, v_k \in V$ (Por qué?). En efecto, se verifica que $\forall\, l \in \{1,...,n\}$: $T_{ij}(v_l) := \begin{cases} \Theta_W & l \neq i \\ w_j & l = i\,. \end{cases}$

   A continuación, para $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$, mostramos que T_{ij} es lineal. Sean $x\,, y \in V$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos que $\exists\{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $x = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l\, v_l \in V$. Asimismo, $\exists\{\beta_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $y = \sum_{l=1}^{n} \beta_l\, v_l \in V$. Luego, $\lambda\, x + y = \sum_{l=1}^{n} (\lambda\, \alpha_l + \beta_l)\, v_l \in V$, con lo cual resulta

   $$T_{ij}(\lambda\, x + y) = (\lambda\, \alpha_i + \beta_i)\, w_j = \lambda\, \alpha_i\, w_j + \beta_i\, w_j = \lambda\, T_{ij}(x) + T_{ij}(y)\,,$$

   de donde se concluye que $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$.

2. ¿Será $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}$ una base de $\mathcal{L}(V,W)$? Justifique/demuestre según su respuesta.

   Desarrollo:
   Afirmación 1: $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}$ es l.i.

   Consideremos la combinación lineal de la aplicación lineal nula $\Theta \in \mathcal{L}(V,W)$:

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, T_{ij} = \Theta\,,$$

   con $\{\alpha_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}} \subseteq \mathbb{K}$. Consideremos $l \in \{1,...,n\}$. Entonces

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, T_{ij}(v_l) = \Theta(v_l) = \Theta_W \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, T_{ij}(v_l)}_{= \alpha_{lj} w_j} = \Theta_W \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj} w_j = \Theta_W\,,$$

   de donde, dado que $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ es una base, se desprende que $\forall\, j \in \{1,...,m\}$: $\alpha_{lj} = 0$. Siendo $l \in \{1,...,n\}$ fijo pero arbitrario, se concluye que $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$: $\alpha_{lj} = 0$, y queda establecida la independencia lineal del conjunto $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}$.

   Afirmación 2: $\langle\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}\rangle = \mathcal{L}(V,W)$. Se hará por doble inclusión.

   En vista que $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$, se infiere que $\langle\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}\rangle \subseteq \mathcal{L}(V,W)$.

   Veamos que $\mathcal{L}(V,W) \subseteq \langle\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}\rangle$: Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$, y $x \in V$. Entonces $\exists\{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $x = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l\, v_l \in V$. Luego, tenemos por ser T lineal

   $$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, T(v_i)\,,$$

pero para cada $i \in \{1, ..., n\} \, : \, T(v_i) \in W$, entonces $\exists \, \{\beta_{i,j}\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{K} \, : \, T(v_i) \, = \, \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, w_j$. De esta manera resulta

$$T(x) \, = \, \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, w_j \, = \, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, (\alpha_i \, w_j) \, = \, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, T_{ij}(x) \, = \, \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, T_{ij} \right) (x) \, .$$

Como $x \in V$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $T \, = \, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \, T_{ij}$, y por lo tanto se tiene que $\mathcal{L}(V, W) \, \subseteq \, \langle \{T_{ij}\}_{(i,j) \in \, \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \rangle$.

CONCLUSIÓN: $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \, \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}}$ una base de $\mathcal{L}(V, W)$. Como consecuencia, se tiene que $\dim(\mathcal{L}(V, W)) \, = \, m \, n$.

RBP/rbp 10.05.2021