Cap. 1: Lógica proposicional

Rommel Bustinza Pariona
e-mail: rbustinza at udec.cl

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

13 de Marzo de 2024

Conceptos

Los valores de verdad VERDADERO (V) y FALSO (F) son los conceptos primitivos de la lógica.

Una proposición es una sentencia declarativa que **posee un único valor de verdad**, pudiendo ser **verdadera** (V) o **falsa** (F).
Usualmente se denotan por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Son proposiciones:

- Hoy es lunes.
- Está nevando.
- Si el sistema solar está formado sólo por estrellas, entonces la Tierra es una estrella.

No son proposiciones:

- ¿Hace frío?
- Ven a desayunar.
- $9x < 2x$.

Conectivos lógicos

Un conectivo lógico es un operador que nos permite obtener nuevas proposiciones a partir de otras dadas.

Denotemos por p a la proposición hoy es martes y por q, a la proposición los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de Cálculo I.

Los conectivos básicos son cinco: negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional.

- **negación: no** en castellano, se representa por $\sim$.

  La proposición hoy no es martes es la negación de p y se representa mediante $\sim p$.

- **conjunción: y** en castellano, se representa por $\wedge$.

  La proposición hoy no es martes y los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de Cálculo I es la conjunción de $\sim p$ y q y se representa mediante $\sim p \wedge q$.

- **disyunción (inclusiva): o** en castellano, se representa por $\vee$.

  La proposición hoy es martes o los estudiantes de la Facultad de Ingeniería no tienen clase de Cálculo I es la disyunción de p y $\sim q$ y se representa mediante $p \vee \sim q$.

Conectivos lógicos

Hemos denotado por p a la proposición hoy es martes y por q, a la proposición los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de Cálculo I.

- **condicional: si** . . ., **entonces** . . . en español, se representa por $\rightarrow$.

  La proposición si hoy es martes, entonces los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de Cálculo I es el condicional entre p y q y se representa mediante $p \rightarrow q$.

  En $p \rightarrow q$ la proposición p se llama antecedente y q, consecuente. La proposición $p \rightarrow q$ también se lee p **es condición suficiente para** q, o bien, q **es condición necesaria para** p.

- **bicondicional: si y sólo si** en español, se representa por $\leftrightarrow$.

  La proposición hoy no es martes si y sólo si los estudiantes de la Facultad de Ingeniería no tienen clase de Cálculo I es el bicondicional entre $\sim p$ y $\sim q$ y se representa mediante $\sim p \leftrightarrow \sim q$.

  La proposición $p \leftrightarrow q$ también se lee p **es condición necesaria y suficiente para** q.

- Otro conectivo utilizado. **disyunción exclusiva: ó** en español, se representa por $\veebar$. Otros autores emplean Δ.

  La proposición hoy es martes ó los estudiantes de la Facultad de Ingeniería no tienen clase de Cálculo I es la disyunción exclusiva de p y $\sim q$ y se representa mediante $p \veebar \sim q$. Considerando la notación alternativa, también puede denotarse por $p \, \Delta \sim q$.

Las proposiciones se clasifican en simples y compuestas. Las proposiciones simples no incluyen conectivos lógicos y las compuestas, sí los incluyen.

Ejercicio 1: Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son **proposiciones**. De cada proposición diga si es simple o compuesta y determine su valor de verdad justificando adecuadamente.

1. $\sqrt{25-9} = \sqrt{25} - \sqrt{9}$,
2. $(y+5)^2 = y^2 + 5^2$,
3. $\dfrac{2x+y}{x} = 2 + \dfrac{y}{x}$,
4. 3 es un número par,
5. ¿A qué hora sales de clases?,
6. si 3 es un número par, entonces 9 también lo es,
7. 2 es un número impar si y sólo si 4 también lo es.

El valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman.
En una tabla de verdad se muestran los posibles valores de verdad de una proposición compuesta teniendo en cuenta todas las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que la forman.

Tablas de verdad de las proposiciones compuestas $\sim p$, $p \vee q$ y $p \wedge q$.

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tablas de verdad.

Tablas de verdad de las proposiciones compuestas $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ y $p \underline{\vee} q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejercicio 2

Con la información entregada en cada caso determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

1. $\sim p \to (p \vee q)$, sabiendo que q tiene valor de verdad verdadero. Rpta: V
2. $[p \wedge [(p \to r) \leftrightarrow \sim r]] \leftrightarrow (r \wedge p)$, sabiendo que r tiene valor de verdad falso. Rpta: V
3. $(p \to r) \wedge (\sim p \vee q)$, sabiendo que p tiene valor de verdad falso. Rpta: V
4. $(\sim p \wedge r) \to \sim (\sim q \vee p)$, sabiendo que $(p \wedge q) \to r$ tiene valor de verdad falso. Rpta: V
5. $p \wedge (p \to q)$, sabiendo que $p \leftrightarrow q$ tiene valor de verdad falso. Rpta: F
6. Se sabe que la proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera. Si además se sabe que r y s tienen valores de verdad distintos, determine el valor de verdad (si es posible), de

   a) $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$ Rpta: F

   b) $[\sim (p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$ Rpta: V

   c) $[\sim r \wedge \sim s] \to (p \vee r)] \wedge \sim (r \wedge s)$ Rpta: V

7. Dada la proposición

$$z \ : \ [(p \to q) \to (p \vee (q \wedge r))] \to [q \wedge (p \vee r)] .$$

   Deducir los valores de verdad de p y r, tales que

   a) z es Falsa cuando q es Falsa. Rptas posibles: p: V, r:V; ó p: V, r:F
   b) z es Verdadera cuando q es Verdadera.
   Rptas posibles: p: V, r:V; ó p: V, r:F; ó p: F, r:V; ó p: F, r:F

Otras expresiones que conducen a la negación

- Es falso que ...
- No ocurre que ...
- No es cierto que ...
- No es verdad que ...
- No es el caso que ...
- Es imposible que ...

Otras expresiones que conectan proposiciones con la conjunción

"pero", "a la vez", "sin embargo", "además", "aunque", "no obstante', etc

Otras expresiones para la condicional $p \to q$

- p "sólo si", "por lo tanto", "luego", "en conclusión", "por consiguiente", "de modo que", "por ende" q
- q "porque", "puesto que", "ya que", "si", "cuando", "cada vez que" p

Una proposición compuesta se dice una:

- Tautología (o teorema lógico) si ella es siempre V cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- Contradicción si ella es siempre F cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- Contingencia si ella no es ni tautología ni contradicción.

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que p implica lógicamente q si la proposición $p \to q$ es una tautología.
En tal caso se escribe $p \Rightarrow q$.

Por ejemplo, en la tabla de verdad de $(p \wedge q) \to p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

se observa que $(p \wedge q) \to p$ es V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, por tanto, $(p \wedge q) \to p$ es tautología, es decir, la proposición $p \wedge q$ implica lógicamente a p. Se concluye así $p \wedge q \Rightarrow p$.

Equivalencias lógicas.

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que ellas son lógicamente equivalentes si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología.
En tal caso se escribe $p \Leftrightarrow q$.

Por ejemplo, en la tabla de verdad de $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

se observa que $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, por tanto, $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es tautología, es decir, la proposición $(\sim p \vee q)$ es lógicamente equivalente a $p \rightarrow q$. Se obtiene así $p \rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Algunas tautologías importantes (*Leyes de la lógica proposicional*)

- $\sim(\sim p) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (doble negación),
- $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$ (conmutatividad de $\wedge$),
- $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$ (conmutatividad de $\vee$),
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \leftrightarrow p$ (conmutatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$ (asociatividad de $\vee$),
- $p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de $\wedge$),
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ (asociatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$),
- $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$),
- $\sim(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan para $\wedge$),
- $\sim(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan para $\vee$),
- $p \wedge (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (Ley de absorción para $\wedge$),
- $p \vee (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (Ley de absorción para $\vee$),
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$,
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,
- $p \,\Delta\, q \quad \Leftrightarrow \quad p \underline{\vee} q \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

EJERCICIO: Aplicando leyes de lógica proposicional, simplificar:
$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$.

Condicionales derivadas

Dada una proposición $p \to q$ se obtienen las condicionales derivadas:

- recíproca de $p \to q$ es $q \to p$,
- contrarecíproca de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$,
- contraria o inversa de $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$.

Es fácil probar que

$$(p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim q \to \sim p).$$

Ejercicio 3

Exprese el enunciado de la recíproca de la inversa de la recíproca de la contrarecíproca de: "No es cierto que, Luisa va al supermercado pero no compra frutas, ya que se quedó con las ganas de comer frutas".

Ejercicio 4

Averiguar quiénes están estudiando Álgebra I, si se sabe que:

- Si Jorge está estudiando Álgebra I, Catalina también.
- Pueden estar estudiando Álgebra I, Carlos o Catalina.
- O Jorge o Catalina estudian Álgebra I, pero no ambos.
- Catalina estudia Álgebra I si y sólo si estudia Carlos (Álgebra I).

Se llama argumento lógico (o inferencia lógica) a toda condicional de la forma:

$$\Big(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k\Big) \quad \rightarrow \quad q \tag{1}$$

donde las proposiciones (compuestas) p_1, p_2, ... , p_k son llamadas **PREMISAS o HIPÓTESIS**, y originan como consecuencia otra proposición denotada por q llamada **CONCLUSIÓN**.

Un argumento lógico puede ser una tautología, una contingencia, o una contradicción. Si la condicional (1) es una tautología (i.e. implicación lógica), entonces se dice que estamos frente a un ARGUMENTO VÁLIDO o INFERENCIA VÁLIDA:

$$\Big(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k\Big) \quad \Rightarrow \quad q \tag{2}$$

En caso la condicional (1) no sea tautología, se dirá que es una FALACIA.

Teorema

Si el argumento (1) es válido y las premisas p_1, p_2, ... , p_k son verdaderas, entonces la CONCLUSIÓN q es verdadera.

Método Abreviado o Reducción al absurdo (para validar argumentos lógicos).

Suponer que hay un caso (en la tabla de verdad del argumento lógico) que es Falso. Luego, proceder a deducir los valores de verdad de las proposiciones elementales involucradas.

- Si en ese proceso, aparece una Contradicción, el argumento lógico es Válido.
- Por el contrario, si no hay contradicción alguna, significa que en efecto hay al menos un caso en la tabla de verdad referida que tendrá valor de verdad Falso. En consecuencia, se concluye que el argumento lógico es No Válido.

Ejemplo 1

Determine si el argumento lógico siguiente es o no válido.

$$
\begin{array}{l}
p \wedge q \\
q \rightarrow \sim r \\
r \vee t \\
\hline
t
\end{array}
$$

- Considere la proposición: "Si termino pronto el trabajo, me iré al cine".
  Sean p: Termino pronto el trabajo y q: Iré al cine.
  De esta manera, la simbolización del enunciado en Lógica resulta ser: $p \to q$.
- Ahora analicemos la proposición: "Sólo si termino pronto el trabajo, me iré al cine."
  Esto equivale a decir: "Únicamente si termino pronto el trabajo, me iré al cine."
  A su vez, esto significa también que: "Si no termino pronto el trabajo, no me iré al cine."
  Simbolizando el enunciado, éste nos queda: $\sim p \to \sim q \quad \Leftrightarrow \quad q \to p$.

Ejercicio 5

Validar el siguiente enunciado de argumento lógico

La venta de autos se incrementa sólo si la situación económica es buena o el precio de la bencina no sube. La bencina aumentó de precio y no se incrementó la venta de autos. Por lo tanto, la situación económica no es buena.

Ejercicio 6

Validar el siguiente enunciado de argumento lógico

Si disponemos del auto y el pronóstico es bueno, el fin de semana iremos a la playa o a la montaña. No es cierto que si el pronóstico es bueno iremos a la playa el fin de semana. Por lo tanto, no iremos a la montaña porque no disponemos del auto.