UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Elementos Finitos 521237

Listado N°6

1. Sea α un multi-índice tal que $|\alpha| < m$ y $u \in W_1^{|\alpha|}(B_\rho(\mathbf{x}_0))$, con $B_\rho(\mathbf{x}_0)$ una bola de radio ρ centrada en $\mathbf{x}_0$. Demostrar que

$$D^\alpha Q^m u = Q^{m-|\alpha|} D^\alpha u,$$

donde recordemos que $Q^m u$ es el polinomio de Taylor ponderado de grado $m-1$ de u. **Indicación:** Proceder por densidad.

2. Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un dominio estrellado y $\widehat{K} = \{\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/d_K : \boldsymbol{x} \in K \subset \mathbb{R}^n\}$, donde d_K es el diámetro de K. Recordamos que, dada una función v, definimos $\widehat{v}(\widehat{\boldsymbol{x}}) := v(\boldsymbol{x})$. Sea $u \in W_p^{|\alpha|}(K)$, con α un multiíndice tal que $|\alpha| < m$. Demostrar que

a)
$$D_{\widehat{x}}^\alpha \, \widehat{u}(\widehat{x}) = d_K^{|\alpha|} \, D_x^\alpha \, u(x),$$

b)
$$\widehat{Q}^m \widehat{u} = \widehat{Q^m u}.$$

3. [**Proyección Ortogonal** L^2]. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un dominio estrellado de diámetro h_K. Denotemos por Π^k a la proyección ortogonal L^2 sobre $\mathbb{P}_k(K)$. Demostrar que, si $v \in H^s(K)$ para $s \in \{0, ..., k+1\}$, entonces existe $C > 0$, independiente de h_K tal que

$$|v - \Pi^k v|_{H^m(K)} \leq C h_T^{s-m} |v|_{H^s(K)} \quad \forall m \in \{0, ..., s\}.$$

4. [**Desigualdad de traza continua**] Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un símplex de diámetro $h_K = \operatorname{diam}(K)$ y F una de sus caras. Demostrar que existe una constante $C > 0$, independiente de h_F, tal que

$$\|v\|_{L^2(F)} \leq C \left(h_T^{-1/2} \|v\|_{L^2(K)} + h_T^{1/2} \|v\|_{H^1(K)} \right) \quad \forall v \in H^1(K). \tag{1}$$