Procesos Estocásticos : Listado 2 Problema 5

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Principio de Superposición para procesos de Poisson

Supongamos que eventos ocurren con tasa λ y que además, a los eventos se les puede clasificar en eventos de “tipo 1" y eventos de “tipo 2", que ocurren con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Así, definimos

- $\{N_t : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos en el período t
- $\{N_t^{(i)} : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos del tipo $i, i = 1, 2$ en el período t.

Principio de Superposición para procesos de Poisson

- $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ y $\lambda = p\lambda + (1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)}$ es un proceso de Poisson de tasa $p\lambda$
- $N_t^{(2)}$ es un proceso de Poisson de tasa $(1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)} \perp\!\!\!\perp N_t^{(2)}$.
- Si $N_t^{(1)}, \ldots, N_t^{(k)}$ son procesos de Poisson independientes con tasas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, entonces $N_t := N_t^{(1)} + \ldots + N_t^{(k)}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Outline

Principio de Superposición. Ejemplo

Una empresa tiene tres máquinas que producen (independientemente de otros) ganchos de cortina del mismo tipo con intensidad λ_i, $i = 1, 2, 3$, por día.
A través de la experiencia se sabe que los ganchos de cortina son de buena calidad con probabilidad p_i, $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

1) Calcule la probabilidad de que al menos n_b ganchos de cortina de buena calidad hayan sido producidos al fin del día laboral.
2) Después de 3 días laborales, ¿Cuál es el número total esperado de los ganchos de cortina de buena calidad ? ¿Cuál es el número esperado de los malos ?

Principio de Superposición. Ejemplo

Durante t días laborales cada maquina produce $N_t^{(b,i)}$ buenos ganchos de cortina y $N_t^{(m,i)}$ malos.
Es claro que, el número de $N_t^{(i)}$ de ganchos producidos por una máquina es

$$N_t^{(i)} = N_t^{(b,i)} + N_t^{(m,i)},$$

donde

$$\{N_t^{(b,i)}, t \geq 0\} \text{ y } \{N_t^{(m,i)}, t \geq 0\}$$

son ambos procesos de Poisson independientes con tasas

$$\lambda_i p_i \text{ y } \lambda(1 - p_i)$$

respectivamente.

Principio de Superposición. Ejemplo

Por lo tanto, el número total de ganchos producidos es

$$\begin{aligned} N_t &= \underbrace{N_t^{(1)}}_{N_t^{(b,1)}+N_t^{(m,1)}} + \underbrace{N_t^{(2)}}_{N_t^{(b,2)}+N_t^{(m,2)}} + \underbrace{N_t^{(3)}}_{N_t^{(b,3)}+N_t^{(m,3)}} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{N_t^{(b,i)}}_{de\ tasa\ p_i\lambda_i} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{N_t^{(m,i)}}_{de\ tasa\ (1-p_i)} \end{aligned}$$

Principio de Superposición. Ejemplo

Es decir, $\{N_t^{(b)}, t \geq 0\}$, el número, total de ganchos buenos es el proceso de Poisson de tasa

$$\lambda_b = \sum_{i=1}^{3} p_i \lambda_i$$

independiente del proceso $\{N_t^{(m)}, t \geq 0\}$, el número total de malos, que es un proceso de Poisson de tasa

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^{3} (1 - p_i) \lambda_i .$$

Principio de Superposición. Ejemplo

Entonces,

$$\begin{aligned} P\left(N_1^{(b)} \geq n_b\right) &= 1 - P\left(N_1^{(b)} < n_b\right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n_b-1} \frac{\lambda_b^k e^{-\lambda_b}}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n_b-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^3 p_i\lambda_i\right)^k e^{-\sum_{i=1}^3 p_i\lambda_i}}{k!}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N_3^{(b)}\right] &= 3\lambda_b = 3\sum_{i=1}^{3} p_i\lambda_i, \\ \mathbb{E}\left[N_3^{(m)}\right] &= 3\lambda_m = 3\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(1-p_i). \end{aligned}$$