

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 3. Más ejercicios adicionales.

1. Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ en los siguientes casos:

$$(a) \quad a_n := \sqrt{n(n+1)} - n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (b) \quad a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$(a) \quad \left\{ \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \right\}; \quad (b) \quad \left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}; \quad (c) \quad \left\{ \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right\}.$$

3. (a) Demuestra que si $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge.
 (b) Da un ejemplo que muestre que la hipótesis $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ es necesaria.

4. Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2 - 1}; \quad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

5. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con $0 < a_n < 1, n \in \mathbb{N}$. Para cada una de las siguientes series, o bien demuestra que es convergente o bien da un ejemplo que demuestre que no necesariamente lo es:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2; \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}; \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}.$$

6. Determina rigurosamente para qué $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$ converge.

7. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de números reales convergentes.

- (a) Demuestra que si una de ellas converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge absolutamente.
- (b) Da un ejemplo que muestre que si las dos series convergen, pero ninguna de ellos lo hace absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede no converger.

8. Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n^2} - 1 \right)^n; & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}; & \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \\ \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}; & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n+1}; & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}. \end{array}$$

9. (a) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(b) En caso que la serie anterior converja, calcula el valor al que converge.

10. (a) Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(b) Da un ejemplo de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ no converge.