MAT1610 - Clase 27

Áreas y distancias

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

20 de mayo del 2024

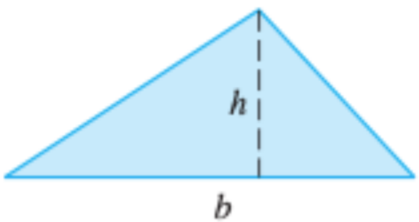
Objetivo

- Motivar la definición de la integral mediante cálculo de área.

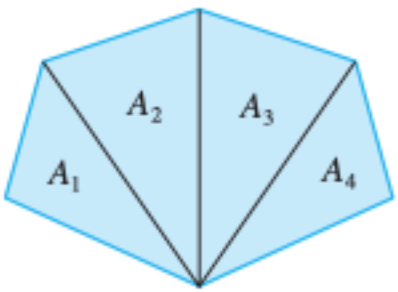
El problema del área

El cálculo de área es fácil para regiones con lados rectos

$A = lw$

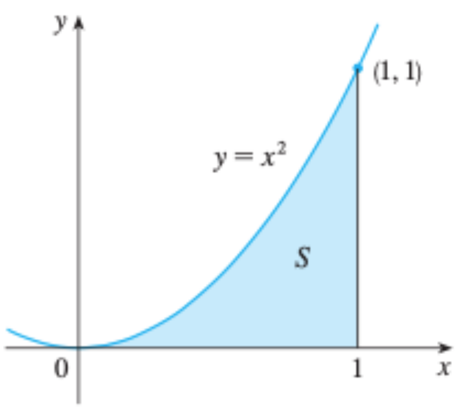


$A = \frac{1}{2}bh$



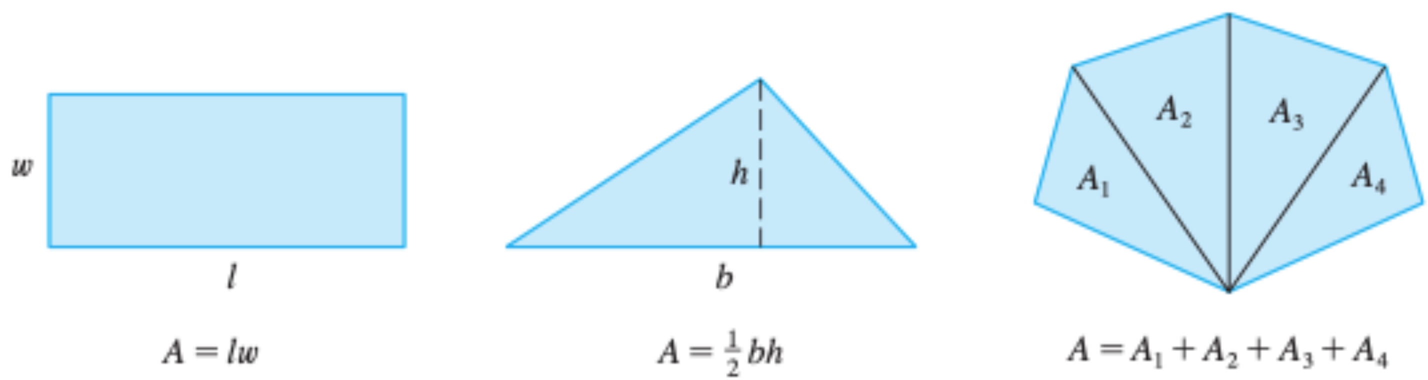
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

¿El cálculo de área en regiones con lados curvos?

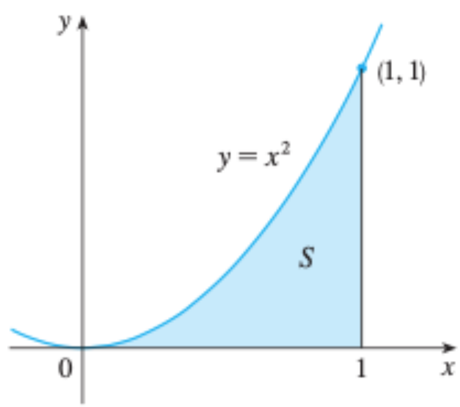


El problema del área

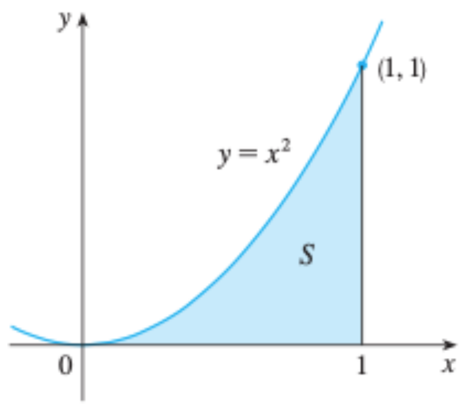
El cálculo de área es fácil para regiones con lados rectos



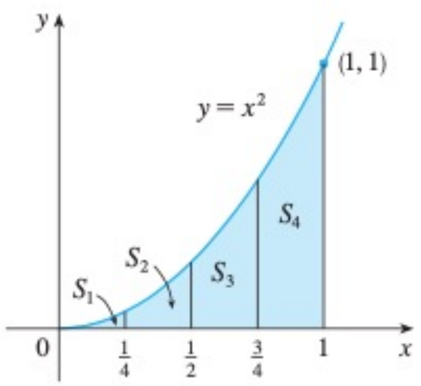
¿El cálculo de área en regiones con lados curvos?

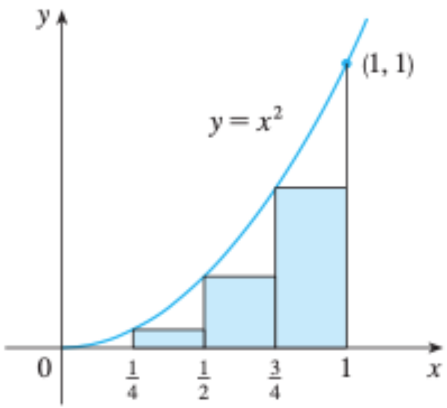


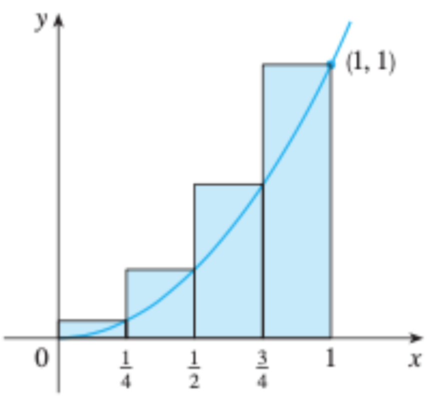
Ejemplo: Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1



Utilicemos 4 franjas

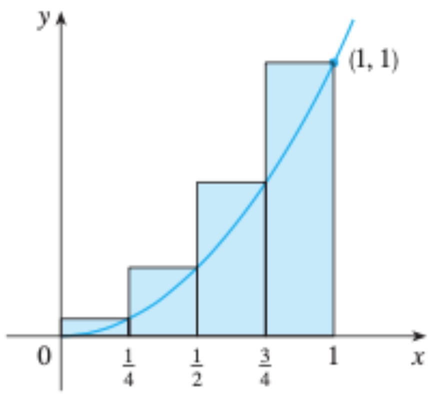






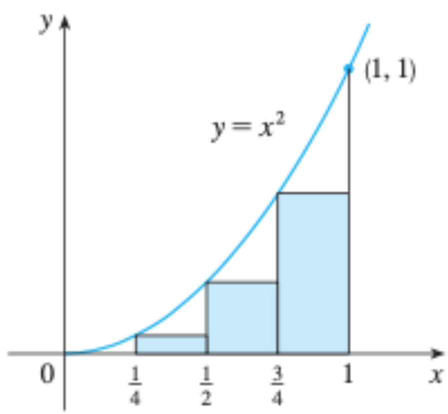
Diferentes formas de definir los rectángulos

Ejemplo: Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1



Las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot(1)^2 = 0{,}46875$$



Las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la izquierda

$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot(0)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}21875$$

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

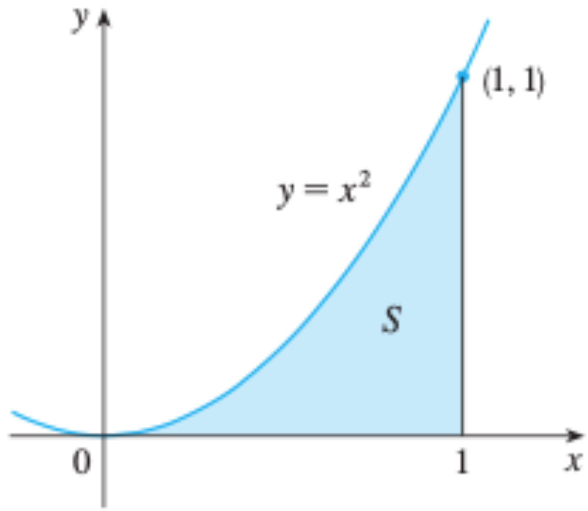
Ejemplo: Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1

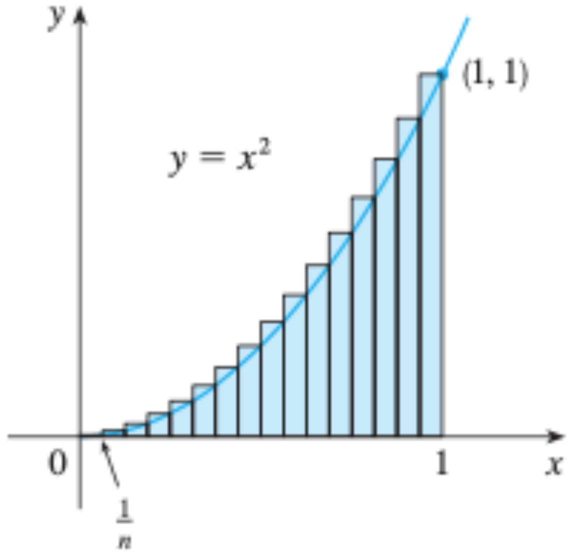
Utilizando más franjas

	L_n	R_n
8 franjas	0,2734375	0,3984375
10 franjas	0,285	0,385
50 franjas	0,3234	0,3434
100 franjas	0,32835	0,33835
1000 franjas	0,3328335	0,3338335

Parece que R_n y L_n tiende a $1/3$ conforme usamos más cantidad de franjas. Demostremos esto!

Ejemplo 2: Demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores tiende a $1/3$





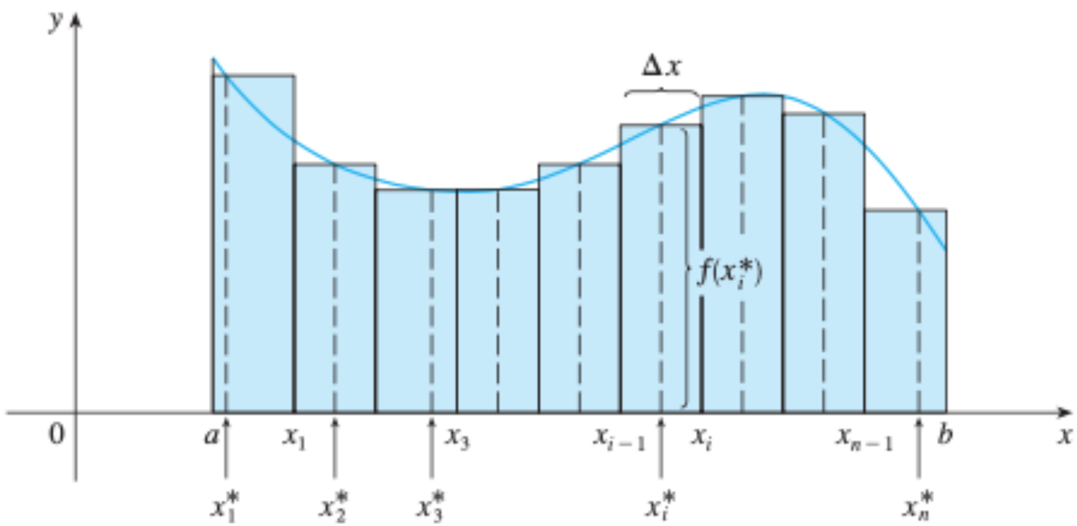
Área bajo la curva

El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

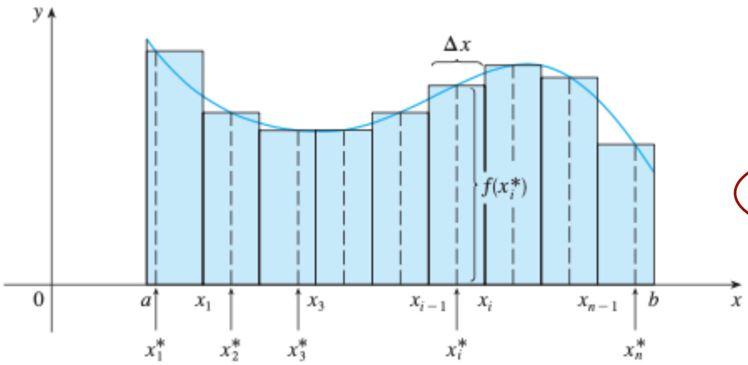
$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$



Área bajo la curva



$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

Con,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Luego, con notación de sumatoria

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Ejemplo 3: Sea A el área de la región que está bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$, con los puntos extremos de la derecha, encuentre una expresión para A como un límite.

El problema de la distancia

Consideremos ahora el problema de la distancia: halle la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo de tiempo, si se conoce la velocidad del objeto en todo momento.

- ¿Si la velocidad no varía?
- ¿Si la velocidad varía?

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

El problema de la distancia

- En general, supongamos que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde
- $a \leq t \leq b$ y $f(t) \geq 0$.

- Tomemos las lecturas de la velocidad en los instantes t_0 $(= a), t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(= b)$ de modo que la velocidad sea aproximadamente constante sobre cada subintervalo.

- Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es t $(b - a)/n$.

- Durante el primer intervalo de tiempo, la velocidad es aproximadamente $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)$ Δt.

- Siguiendo esa lógica, la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

- Ahora, usando la velocidad en los puntos extremos de la derecha, se obtiene

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

El problema de la distancia

Cuanto mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas son las estimaciones, así que parece plausible que la distancia exacta recorrida sea el límite de esas expresiones:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Conclusión

- Aprendimos sobre el problema del área y de la distancias

Libro guía

- Págs. 360-369.