Funciones reales medibles.

- Funciones reales medibles.
- Ejemplos de funciones reales medibles.
- Operaciones algebraicas con funciones reales medibles.

Funciones reales medibles.

Def.: Sea $(X, \mathscr{X})$ un espacio medible. $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función medible** (o $\mathscr{X}$**-medible**) si $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((\alpha, +\infty)) := \{x \in X :\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{X}$.

Lema: Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{X}$; (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathscr{X}$;

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \mathscr{X}$; (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathscr{X}$.

Dem.: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $f^{-1}((-\infty, \alpha]) = f^{-1}((\alpha, +\infty)^{\mathrm{c}}) = \left[f^{-1}((\alpha, +\infty))\right]^{\mathrm{c}}$.

Entonces, como $\mathscr{X}$ es cerrado por complementación,

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathscr{X} \iff f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{X}$.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) Idem $\boxed{\textbf{Ej.}}$

(a) $\Longrightarrow$ (c) Como $[\alpha, +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right)$, $\boxed{\textbf{Ej.}}$

se tiene que $f^{-1}([\alpha, +\infty)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$.

Entonces, como $\mathscr{X}$ es cerrado por intersección numerable,

$f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) \in \mathscr{X}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \mathscr{X}$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Idem, usando que $(\alpha, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$. $\boxed{\textbf{Ej.}}$ ■

Ejemplos de funciones reales medibles.

- Las funciones constantes, $\begin{array}{rl} f: X \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto c, \end{array}$ son medibles.

Dem.: ∘ $\forall \alpha \geq c,\ \ f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : \ f(x) = c > \alpha\} = \emptyset \in \mathscr{X}.$

∘ $\forall \alpha < c,\ \ f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : \ f(x) = c > \alpha\} = X \in \mathscr{X}.$

- Dado $E \subset X$, la función característica de E es $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

χ_E es medible si y sólo si E es medible.

Dem.: ∘ $\forall \alpha \geq 1,\ \ \chi_E^{-1}((\alpha, +\infty)) = \big\{x \in X : \ \chi_E(x) > \alpha\big\} = \emptyset \in \mathscr{X}.$

∘ $\forall \alpha \in [0, 1),\ \ \chi_E^{-1}((\alpha, +\infty)) = \big\{x \in X : \ \chi_E(x) = 1\big\} = E.$

∘ $\forall \alpha < 0,\ \ \chi_E^{-1}((\alpha, +\infty)) = \big\{x \in X : \ \chi_E(x) > \alpha\big\} = X \in \mathscr{X}.$

Entonces, χ_E medible $\iff \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \chi_E^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{X} \iff E \in \mathscr{X}.$

Sea $\mathscr{B}$ la σ-álgebra de Borel.

$\bullet\ X = \mathbb{R},\ \mathscr{X} = \mathscr{B}.$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\implies$ f medible.

Dem.: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. f continua $\implies$ $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ abierto en $\mathbb{R}$.
Como todo abierto en $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos y éstos son medibles Borel, entonces $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{B} \implies f$ medible.

$\bullet\ X = \mathbb{R},\ \mathscr{X} = \mathscr{B}.$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona $\implies$ f medible.

Dem.: Sea f monótona creciente. (Idem decreciente. **Ej.**) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \alpha,$ entonces $f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \emptyset \in \mathscr{B}$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > \alpha,$ entonces $f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \mathbb{R} \in \mathscr{B}$.
- Si $\exists x_1 \in \mathbb{R} :\ f(x_1) > \alpha$ y $\exists x_2 \in \mathbb{R} :\ f(x_2) \leq \alpha$, entonces

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > \alpha\} \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > \alpha\} \neq X.$$

Sea $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > \alpha\}$. Entonces, $x_0 \in \mathbb{R}$ y

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > \alpha\} := \begin{cases} [x_0, +\infty), & \text{si } f(x_0) > \alpha, \\ (x_0, +\infty), & \text{si } f(x_0) \leq \alpha. \end{cases}$$

En todos los casos, $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathscr{B} \implies f$ medible.

Operaciones algebraicas con funciones reales medibles.

A lo largo de esta sección, $(X, \mathscr{X})$ es un espacio medible.

Lema: Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces son medibles:
(a) cf, (b) $|f|$, (c) f^2, (d) $f+g$ y (e) fg.

Dem.: (a) ∘ Si $c = 0$, cf es constante y por lo tanto medible.
∘ Si $c > 0$, $\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{X}$.
∘ Si $c < 0$, $\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{X}$.
Entonces, cf es medible.

(b) ∘ Si $\alpha < 0$, $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X \in \mathscr{X}$.
∘ Si $\alpha \geq 0$, $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$
$$= \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : f(x) < -\alpha\} \in \mathscr{X}.$$
Entonces, $|f|$ es medible.

(c) ∘ Si $\alpha < 0$, $\left\{x \in X : f^2(x) > \alpha\right\} = X \in \mathscr{X}$.
∘ Si $\alpha \geq 0$, $\left\{x \in X : f^2(x) > \alpha\right\} = \{x \in X : |f(x)| > \sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{X}$,
como consecuencia de (b). Entonces, f^2 es medible.

(d) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $\{x \in X : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q$,
donde $S_q := \{x \in X : f(x) > q\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - q\} \ \forall q \in \mathbb{Q}$.

Demostraremos la doble inclusión.

- Sea $x \in X : f(x) + g(x) > \alpha \implies f(x) > \alpha - g(x)$.
  Sea $q \in \mathbb{Q} : f(x) > q > \alpha - g(x) \implies f(x) > q$ y $g(x) > \alpha - q$
  $\implies x \in S_q \implies x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q$.
- Sea $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q \implies \exists q \in \mathbb{Q} : x \in S_q$
  $\implies f(x) > q$ y $g(x) > \alpha - q \implies f(x) + g(x) > \alpha$.

Acabamos de demostrar que $\{x \in X : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q$.

Como f y g son medibles,

$\forall q \in \mathbb{Q}, \ S_q := \{x \in X : f(x) > q\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - q\} \in \mathscr{X}$

$\implies \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q \in \mathscr{X} \implies f + g$ es medible.

(e) Como $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$, (d), (c) y (a) $\implies fg$ medible. ■

Def.: Dada $f: X \to \mathbb{R}$, **las partes positiva y negativa de f** se definen, respectivamente, como sigue:

$$\begin{aligned} f^+ : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \max\{f(x), 0\} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f^- : X &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \max\{-f(x), 0\}. \end{aligned}$$

Ej. $\quad f = f^+ - f^- \quad$ y $\quad |f| = f^+ + f^-$.

Prop.: Si f es medible, entonces f^+ y f^- son medibles.

Dem.:

$$\left\{ \begin{aligned} f &= f^+ - f^- \\ |f| &= f^+ + f^- \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} |f| + f &= 2f^+ \\ |f| - f &= 2f^- \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} f^+ &= \tfrac{1}{2}\left(|f| + f\right) \\ f^- &= \tfrac{1}{2}\left(|f| - f\right) \end{aligned} \right.$$

f medible $\implies$ $|f|$ medible $\implies$ f^+, f^- medibles. $\blacksquare$