UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Pauta Tarea 5

Sea $\Omega =]0,1[^2$, Considere la siguiente E.D.O:
Encontrar $\varphi \in H^2(\Omega)$ talque :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi &= f, \quad en \quad \partial\Omega \\ \varphi &= 0, \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde, $f(x,y) = (1+8\pi^2)sin(2\pi x)sin(2\pi y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$ Se pide lo siguiente:
1.- Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio V_h^k ;

Multiplicamos la ecuación por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos, luego aplicamos integración por parte la primera expresión:

formulación (1) se reduce a:
Hallar $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$

$$\varepsilon(\nabla\varphi, \nabla v)_{0,\Omega} + (\varphi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} \, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Si consideramos $H_0^1(\Omega) \cap V_h^k \leq H_0^1(\Omega)$. Definimos la formulación variacional discreta de (1):
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} + (u_h, v_h)_{0,\Omega} = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$$

se define la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ y el funcional $F(\cdot)$ como sigue:

$$a : \left(H_0^1(\Omega) \cap V_h^k\right) \times (H_0^1(\Omega) \cap V_h^k) \to \mathbb{R}$$
$$(u_h, v_h) \mapsto a(u_h, v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} + (u_h, v_h)_{0,\Omega}$$

$$F : H_0^1(\Omega) \cap V_h^k \to \mathbb{R}$$
$$v_h \mapsto F(v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega}$$

entonces la formulación discreta queda:
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$$

2.- Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación discreta de (1);

Continuidad de $a(\cdot,\cdot)$
sea $u_h, v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$\begin{aligned}|a(u_h,v_h)| &= |\varepsilon(\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} + (u_h,v_h)_{0,\Omega}| \\ &\leq |(\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega}| + |(u_h,v_h)_{0,\Omega}| \\ &\leq |u_h|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega}| + ||u_h||_{0,\Omega}||v_h||_{0,\Omega}| \\ &\leq 2||u_h||_{1,\Omega}||v_h||_{1,\Omega}\end{aligned}$$

Coercividad de $a(\cdot,\cdot)$
Notemos primero que por integración por parte en $H_0^1(\Omega)$ se obtiene lo siguiente :

lo que implica que $(u_h', u_h)_{0,\Omega} = 0$. sea $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$:

$$\begin{aligned}a(u_h,u_h) &= (\nabla u_h, \nabla u_h)_{0,\Omega} + (u_h,u_h)_{0,\Omega} \\ &= |u_h|_{1,\Omega}^2 + ||u_h||_{0,\Omega}^2 \\ &= ||u_h||_{1,\Omega}^2\end{aligned}$$

Continuidad de $F(\cdot)$
sea $v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$\begin{aligned}|F(v_h)| &= |(f,v_h)_{0,\Omega}| \\ &\leq ||f||_{0,\Omega}||v_h||_{0,\Omega} \\ &\leq ||f||_{0,\Omega}||v_h||_{1,\Omega}\end{aligned}$$

Por lo tanto gracias al Teorema de "Lax-Milgram" el problema variacional de:
Hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$

$$a(u_h,v_h) = F(v_h) \;\; \forall v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h^k$$

tiene solución única y además.

$$||u_h||_{1,\Omega} \leq ||f||_{0,\Omega}$$

3.- Presente una análisis de convergencia completo para las normas $||\cdot||_{0,\Omega}$ y $||\cdot||_{1,\Omega}$. Consideremos el siguiente problema auxiliar:
Hallar $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta w + w &= u - u_h, \text{en } \Omega \\ w &= 0, \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Cuya formulación variacional es :

$$(\nabla w, \nabla v)_{0,\Omega} + (w,v)_{0,\Omega} = (u-u_h, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

esta ultima formulación variacional cumple las hipótesis del teorema "Lax-Milgram". Tomando en particular $v = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$(w,(u-u_h))_{1,\Omega} = ||u-u_h||_{0,\Omega}^2 \qquad (1)$$

Probemos la siguiente condición de ortogonalidad $(\nabla v_h, \nabla(u - u_h))_{0,\Omega} = 0$
<u>Problema Continuo</u>:
Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$

$$(\nabla u, \nabla v_h)_{0,\Omega} + (u, v_h)_{0,\Omega} = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega) \qquad (*)$$

<u>Problema Discreto</u>:
Hallar $u_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega)$

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) + (u_h, v_h)_{0,\Omega} = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega) \qquad (**)$$

restando (*) y (**) y por simetría nos queda:

$$(v_h, (u - u_h))_{1,\Omega} = 0 \quad \forall v_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega) \qquad (2)$$

luego restando (2) a (1) se obtiene :

$$((w - v_h), (u - u_h))_{1,\Omega} = ||u - u_h||_{0,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

aplicando cauchy-schwarz sigue:

$$||u - u_h||_{0,\Omega}^2 = ((w - v_h), (u - u_h))_{1,\Omega} \leq ||w - v_h||_{1,\Omega}||u - u_h||_{1,\Omega}$$

tomando $v_h = \mathcal{I}_h(w)$ y considerando las cotas del interpolante siguientes:

> Sea $u \in H^2(\Omega)$ y $h > 0$ se satisface
> 1. $||u - \mathcal{I}_h(u)||_{0,\Omega} \leq Ch^2|u|_{2,\Omega}$
> 2. $|u - \mathcal{I}_h(u)|_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}$
>
> donde C es una constante positiva

entonces se sigue:

$$\begin{aligned}||u - u_h||_{0,\Omega}^2 &\leq ||w - \mathcal{I}_h(w)||_{1,\Omega}||u - u_h||_{1,\Omega} \\ &\leq hC|w|_{2,\Omega}||u - u_h||_{1,\Omega} \\ &\leq hC||u - u_h||_{0,\Omega}||u - u_h||_{1,\Omega}\end{aligned}$$

Asumimos que $|w|_{2,\Omega} \leq C||u - u_h||_{0,\Omega}$ esta propiedad es conocida como ”propiedad regularizante”

Por otra parte para el error $||\cdot||_{1,\Omega}$

$$\begin{aligned}
||u-u_h||_{1,\Omega} &\leq \frac{M}{\gamma}\inf_{v_k}||u-v_k||_{1,\Omega} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{1,\Omega} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{||u-\mathcal{I}_h^k(u)||_{0,\Omega}^2+|u-\mathcal{I}_h^k(u)|_{1,\Omega}^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{(Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega})^2+(Ch^k|u|_{k+1,\Omega})^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}\sqrt{(h^{k+1}+h^k)^2(C|u|_{k+1,\Omega})^2} \\
&\leq \frac{M}{\gamma}Ch^k|u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}$$

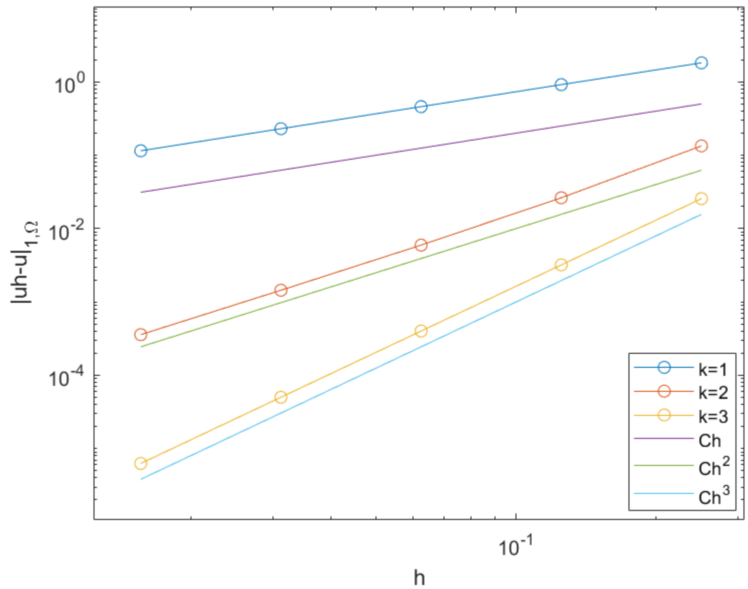
Luego :

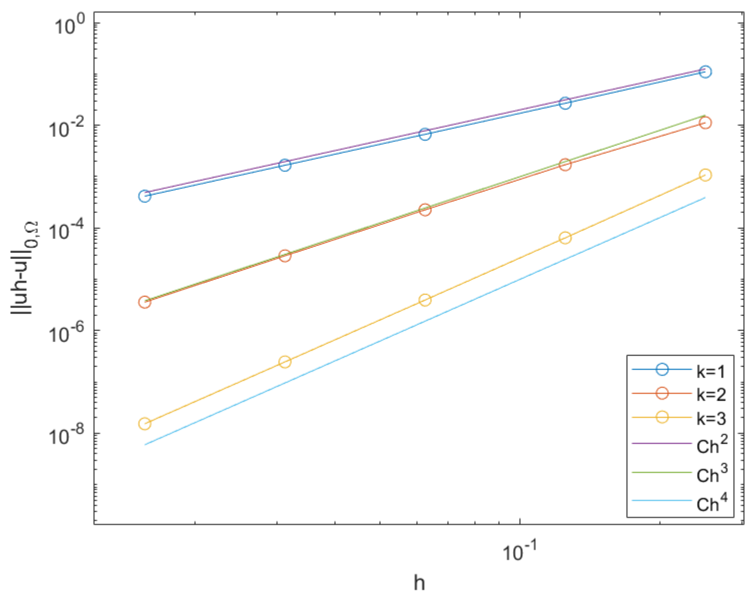
$$\begin{aligned}
||u-u_h||_{0,\Omega}^2 &\leq hC||u-u_h||_{1,\Omega} \\
&\leq hC(h^k|u|_{k+1,\Omega}) \\
&\leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}$$

5.-Implemente un código de elementos finitos para la formulación discreta anteriormente definida.
Rubrica:

El programa corre correctamente	3
El programa muestra la solución discreta correcta	3
El programa muestra errores aceptables	4
(Extra) el programa fue optimizado (escribir las matrices A y b en formato sparse)	2

6.- Presente curvas de convergencia (con al menos 5 puntos) y soluciones (con un $h > 0$ fijo de su elección) para $b = 0$, $k = 1, 2, 3$ considerando los siguientes casos:





Concepción, martes 23 de marzo de 2021

DPC/CCB/ccb .