Energía de un Sistema

Física I - 510140

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física
Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

1 Introducción

Hay ciertas situaciones de dinámica de cuerpos que al abordarlas sólo con las leyes de Newton, las leyes del movimiento, resultan complejas de tratar.

En el presente capítulo se replantearán algunos de los problemas vistos en el capítulo anterior con base en el concepto abstracto de energía. Este concepto- usado cotidianamente de manera intuitiva- cuando aplicado a situaciones de dinámica- permite simplificar los cálculos en la solución de los problemas.

Coloquialmente, **energía** se asocia a combustibles, electricidad, alimentos, etc. **Sin tener una definición formal del concepto, sabemos que los combustibles son necesarios para hacer ciertos trabajos y que proporcionan algo que llamamos energía.**

Todos los procesos físicos que ocurren en el universo involucran energía y **transferencia** o **transformaciones** de ella.

2 Sistema y Entorno

En los capítulos anteriores se usó el **modelo de partícula**.

En este nuevo planteamiento ponemos atención sobre un **sistema** y se desarrollan técnicas para aplicarlas a un **modelo de sistema**.

En este modelo centramos la atención en una pequeña parte del universo, el **sistema**, ignorando detalles del resto del Universo (entorno) fuera del sistema. En primer lugar debemos **identificar al sistema**.

Ejemplos de sistemas válidos pueden ser:

- Un objeto simple o partícula.
- Un conjunto de objetos o de partículas.
- Una región del espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil).
- Con variación en tamaño y forma (como una bola de goma que se deforma al golpear una pared).

Identificado el sistema, se identifica una **frontera del sistema** (superficie imaginaria, no necesariamente coincidiendo con una superficie física) que separa al sistema del **entorno** que lo rodea.

Existen algunos mecanismos mediante los cuales un sistema recibe influencia de su entorno. Investigaremos, en primer lugar uno de ellos llamado **trabajo**.

3 Trabajo Ralizado por Una Fuerza Constante

En física el significado del término *trabajo* difiere del usado cotidianamente.

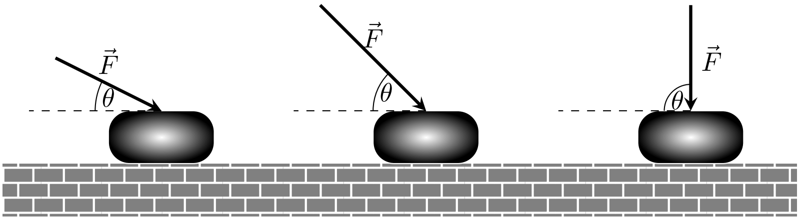

Figura 3.1 Una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un objeto empujándolo a lo largo de una superficie. La fuerza actúa a diferentes ángulos respecto de la horizontal.

Imagine que quiere mover el bloque de la Figura 3.1. Aplica una fuerza con distintos ángulos de inclinación. El movimiento depende del ángulo en el que se aplica la fuerza y la naturaleza vectorial de la fuerza. La aplicación de la fuerza, produce un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ del objeto.

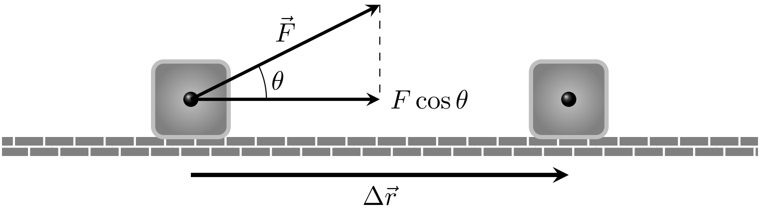

Figura 3.2 La fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre el objeto lo mueve a lo largo de una superficie horizontal. El desplazamiento del objeto es $\Delta\vec{r}$.

El trabajo (W) realizado sobre un sistema por un agente externo que ejerce una fuerza constante sobre él es igual al producto escalar entre dos vectores.

El valor de W (un escalar) es el producto de la magnitud de F, la magnitud de Δr y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ (fuerza) y $\Delta\vec{r}$ (desplazamiento):

$$\boxed{W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta \equiv F\Delta r\,\cos\theta}. \tag{1}$$

El trabajo realizado por la fuerza normal y la fuerza gravitacional sobre el cuerpo son ambos cero ($\vec{n} \perp \Delta\vec{r}$ y $\vec{F}_g \perp \Delta\vec{r}$), porque esas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento del objeto.

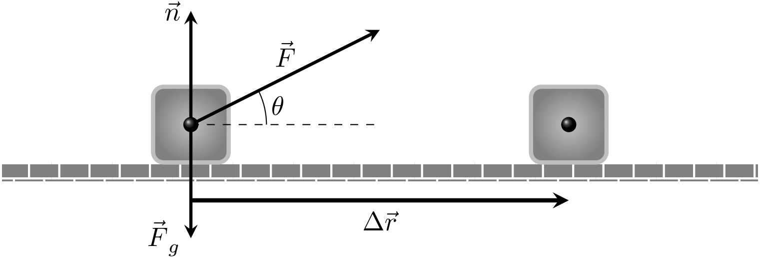

Figura 3.3 La fuerza normal y la fuerza garvitacional no realizan trabajo sobre el objeto que se desplaza $\Delta\vec{r}$ horizontalmente.

Cuando $\vec{F}$ se aplica en la misma dirección de $\Delta\vec{r}$, se tiene:

$$W = F\Delta r; \qquad \vec{F} \parallel \Delta\vec{r}; \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 1.$$

Ejemplo 1: Un objeto es movido, a través de una cuerda atada a él, aplicando una fuerza $\vec{F}$ de magnitud $F = 50.0\,\mathrm{N}$ que forma un ángulo de $30.0°$ con la horizontal (ver Fig.3.4). Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto cuando se desplaza $3.00\,\mathrm{m}$ hacia la derecha.

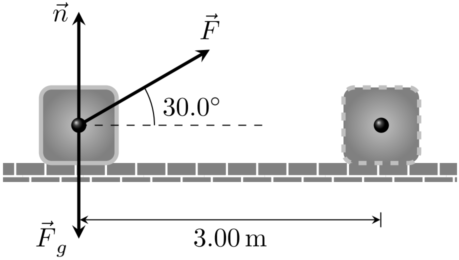

Figura 3.4 Ilustración para el Ejemplo 1.

Solución: Note, en primer lugar, que el desplazamiento es a lo largo de la dirección horizontal, de modo tal que el trabajo realizado por la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ sobre el objeto son ambas cero.

$$W_{F_g} = 0; \quad \vec{F}_g \perp \Delta\vec{r}; \quad \theta = 270^\circ \quad \therefore \quad \cos\theta = 0.$$
$$W_n = 0; \quad \vec{n} \perp \Delta\vec{r}; \quad \theta = 90^\circ \quad \therefore \quad \cos\theta = 0$$

En este caso la solución se obtiene por aplicación directa de la Ec.(1), con $F = 50.0\,\mathrm{N}$, $\Delta r = 3.00\,\mathrm{m}$ y $\theta = 30.0^\circ$ se tiene

$$\begin{aligned} W_F =& F\Delta r\,\cos\theta = (50.0\,\mathrm{N})(3.00\,\mathrm{m})\cos(30.0^\circ) \\ &= (50.0\,\mathrm{N})(3.00\,\mathrm{m})(0.866) = 130\,\mathrm{Nm}. \end{aligned}$$

4 Trabajo Como Producto Escalar Entre Dos Vectores

El producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{B}$, es una cantidad escalar dada por

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \tag{2}$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Comparando esa definición de producto punto con la Ec.(1), vemos que el trabajo es el producto escalar entre la fuerza aplicada sobre un objeto y el desplazamiento que le produce,

$$\boxed{W = F\Delta r\,\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}.} \tag{3}$$

En términos de los vectores unitarios

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \quad \text{y} \quad \Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$$

entonces, el trabajo se escribe como

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

Ejemplo 2: Una partícula móvil en el plano xy se somete a un desplazamiento conocido por $\Delta\vec{r} = (2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$ cuando una fuerza constante $\vec{F} = (5.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$ actúa sobre ella. (a) Calcule la magnitud de la fuerza y del desplazamiento. (b) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre la partícula. (c) Calcule el ángulo entre $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$.

Solución: (a) La magnitud de la fuerza y del desplazamiento son, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2}\,\mathrm{N} = \sqrt{29}\,\mathrm{N}, \quad F = 5.4\,\mathrm{N}.$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{13}\,\mathrm{m}, \quad \Delta r = 3.6\,\mathrm{m}.$$

(b) El trabajo realizado por la fuerza sobre el sistema es

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y = [(5.0)(2.0) + (2.0)(3.0)]\,\mathrm{Nm}, \quad W = 16\,\mathrm{Nm}.$$

(c) El ángulo entre $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{W}{|\vec{F}||\Delta\vec{r}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{16\,\mathrm{Nm}}{(5.4\,\mathrm{N})(3.6\,\mathrm{m})}\right) = 35^\circ$$

5 Trabajo Realizado por Una Fuerza Variable

Una partícula se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía en función de la posición.

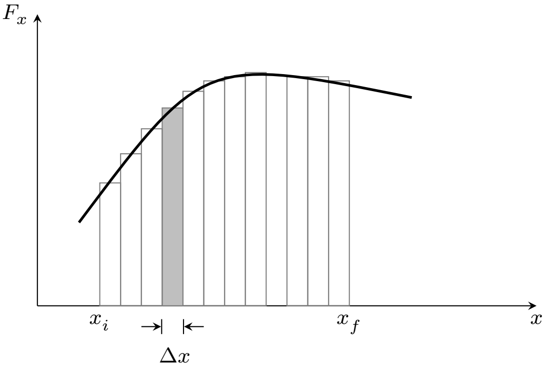

Figura 3.5 El trabajo realizado por la componente F_x de la fuerza sobre el desplazamiento Δx es $F_x \Delta x$ igual al área del rectángulo coloreado.

La partícula se desplaza en la dirección positiva del eje x, desde $x = x_i$ a $x = x_f$. Con el fin de calcular el trabajo realizado por la fuerza, se considera una porción muy pequeña del desplazamiento total, Δx, donde la componente x de la fuerza, F_x, es, aproximadamente, constante, luego,

$$\approx F_x \Delta x$$

es el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$, en este pequeño intervalo de distancia.

Observamos que el área del rectángulo gris mostrado en la Fig.3.5(a) corresponde aproximadamente al trabajo en ese intervalo bajo la supoción de $F \equiv F_x$.

Equivalentemente, podemos repetir este proceso para otros intervalos igualmente espaciados y sumarlos para tener un cálculo aproximado del trabajo total desde $x = x_i$ a $x = x_f$, es decir,

$$W \approx \sum_{x=x_i}^{x=x_f} F_x \Delta x$$

Este cálculo aproximado es más exacto mientras más pequeños sean los intervalos considerados.

Paralelamente, en los cursos de matemáticas aprenderá que cuando esta suma considera intervalos infinitesimalmente pequeños, se corresponde con una integral. Es decir, Si $\Delta x \to 0$, $\sum \to$ "infinitos términos",

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=x_i}^{x=x_f} F_x \Delta x = \int_{x=x_i}^{x=x_f} F_x \, dx$$

Con $\left(\sum F\right)_x$ el *trabajo neto* sobre la partícula es

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x=x_i}^{x=x_f} \left(\sum F\right)_x \, dx.$$

En término del producto escalar,

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x=x_i}^{x=x_f} \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r}. \qquad (4)$$

En la Ec.(4) la integral es tomada sobre la trayectoria que sigue la partícula a través del espacio. En sistema más complicados (sistema de múltiples partículas en movimientos unas con respecto de las otras), la Ec.(4) no es aplicable: Fuerzas diferentes sobre el sistema pueden hacer que partes del sistema se muevan a través de diferentes desplazamientos. Es conveniente evaluar el trabajo realizado por cada fuerza por separado y después sumar algebráicamente los trabajos para encontrar el trabajo neto sobre el sistema.

Veremos que para calcular el trabajo de una fuerza variable, no siempre es necesario integrar, sino que basta con usar geometría simple.

Ejemplo 3: Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x como se muestra en la Fig.3.6. Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula conforme se traslada desde $x = 0$ a $x = 6.0\,\text{m}$.

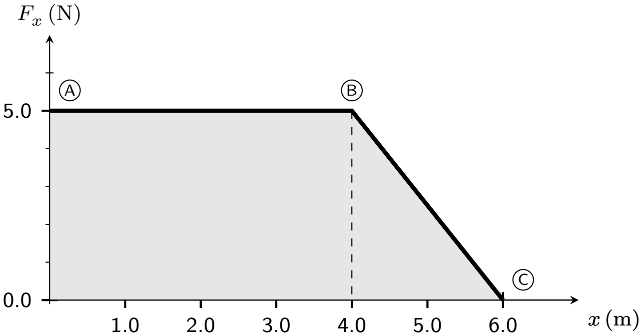

Figura 3.6 Fuerza variable actuando sobre una partícula que se desplaza a lo largo del eje x.

Solución: Desde el punto Ⓐ al punto Ⓑ la componente x de la fuerza es constante $F_x = 5.0\,\mathrm{N}$, luego el área bajo la curva es un rectángulo

$$W_{AB} = (5.0\,\mathrm{N})(4.0\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{Nm}$$

Desde el punto Ⓑ al punto Ⓒ la fuerza varía proporcionalmente con la posición, luego el área bajo la curva es un triángulo

$$W_{BC} = \frac{1}{2}(5.0\,\mathrm{N})[(6.0 - 4.0)\,\mathrm{m}) = 5.0\,\mathrm{Nm}$$

El trabajo total realizado sobre la partícula, W_{neto}, es

$$W_{\mathrm{neto}} = 20\,\mathrm{J} + 5.0\,\mathrm{J} = 25\,\mathrm{Nm}.$$

Un caso últil de estudio de una fuerza variable en función de la posición es el de un resorte que puede comprimirse o estirarse.

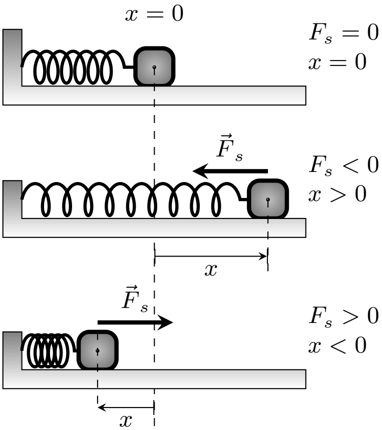

Figura 3.7 Fuerza variable efectuada por un resorte sobre un bloque. (a) $x = 0$, $F_s = 0$ (longitud natural del resorte). (b) $x > 0$, $F_s < 0$ (resorte estirado). (c) $x < 0$, $F_s > 0$ (resorte comprimido).

El resorte es un elemento capaz de almacenar energía. Un modelo físico muy simple y eficaz es el modelo del resorte ideal (pequeñas compresiones o estiramientos, no alteran las propiedades del resorte).

En forma vectorial, la fuerza ejercida por un resorte se escribe, en el caso de la dirección del eje x para la compresión o estiramiento del resorte, como

$$\vec{F}_s = -kx\hat{\imath}, \tag{5}$$

donde x es la posición del bloque con relación a su posición de equilibrio $(x = 0)$ y k es una constante positiva llamada **constante de fuerza** o **constante del resorte**. Notar que la magnitud de la fuerza es simétrica con respecto al punto de equilibrio.

El signo negativo indica que la fuerza ejercida por un resorte es siempre **contraria** a la posición desde el equilibrio. **Fuerza de restitución**.

El valor de k puede ser interpretado como la *rigidez* del resorte. Esta ley de fuerza se conoce como **Ley de Hooke**. Resortes rígidos (amortiguadores de los automóviles) tienen valores de k grandes, mientras que los resortes ligeros tienen pequeños valores de k (se pueden comprimir o estirar fácilmente). De la Ec.(5),se ve que las unidades SI de k son $\mathrm{N/m}$.

Si se comprime el resorte a una posición $-x_{\text{máx}}$ y se libera desde el reposo $(v_i = 0)$, sobre el bloque (sistema), el trabajo W_s realizado por el resorte conforme el bloque se traslada desde $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$, es

$$
\begin{aligned}
W_s &= \int \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\imath}) \cdot (dx\hat{\imath}) = -k \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} x dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{-x_{\text{máx}}}^{0} \\
&= -\frac{1}{2}k\left(0^2 - (-x_{\text{máx}})^2\right) = \frac{1}{2}kx^2_{\text{máx}} \,, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

En este caso el trabajo realizado por el resorte es positivo $(W_s > 0)$; la fuerza que el resorte ejerce apunta en la misma dirección del desplazamiento del bloque.

En $x = 0$ el bloque pasa con cierta rapidez y continuará moviéndose hasta llegar a una posición $+x_{\text{máx}}$. Desde $x = 0$ a $x = x_{\text{máx}}$

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2_{\text{máx}},$$

de modo que el trabajo ejercido por el resorte es negativo $(W_s < 0)$; la fuerza y el desplazamiento apuntan en direcciones opuestas.

En consecuencia, el trabajo neto sobre el bloque, realizado por el resorte, para desplazarlo desde $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = +x_{\text{máx}}$ es **cero**.

$$W_{s,\text{neto}} = \frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 + \left(-\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2\right) = 0$$

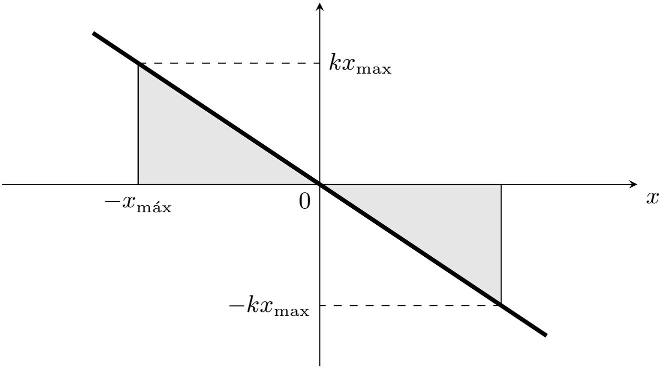

Figura 3.8. Gráfico de la fuerza ejercida por un resorte en función de la posición.

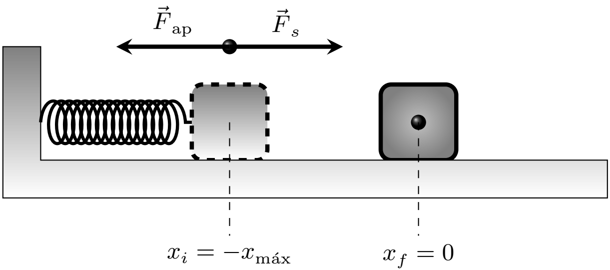

Figura 3.9. Bloque unido a un resorte moviéndose sobre una superficie sin fricción a medida que se aplica una fuerza $\vec{F}_{\text{ap}}$.

Considere el trabajo realizado por un **agente externo** sobre el sistema bloque-resorte: El bloque se mueve muy lentamente desde $x_i = -x_{\text{máx}}$ hasta $x_f = 0$.

Para cualquier valor de la posición x la fuerza aplicada sobre el bloque es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza aplicada por el resorte sobre el bloque.

$$\vec{F}_{\text{ap}} = -\vec{F}_s = -(-kx)\hat{\imath} = kx\hat{\imath}$$

Luego, el trabajo realizado por la fuerza aplicada (agente externo) en el sistema bloque-resorte es

$$W_{\text{ap}} = \int \vec{F}_{\text{ap}} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{\imath}) \cdot (dx\hat{\imath}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2.$$

O sea, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es igual al negativo del trabajo realizado por el resorte para el desplzamiento considerado.

Para un bloque que se desplaza desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$, el trabajo realizado por la fuerza externa sobre el sistema bloque-resorte es

$$W_{\text{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx)dx = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \tag{7}$$

Y el trabajo realizado por el resorte, para el mismo desplazamiento, es

$$W_s = -W_{\rm ap} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2). \tag{8}$$

Observe que el trabajo del resorte sólo depende del valor final e inicial de la posición del bloque (x_i, x_f).

Ejemplo 4: Cálculo de la constante de un resorte.

Una técnica aplicada comúnmente para medir la constante de fuerza de un resorte es mostrada en la Fig.3.10. El resorte cuelga verticalmente [Fig.3.10(a)] y un objeto de masa m se une a su extremo inferior. Bajo la acción de la "carga" mg, el resorte se estira una distancia d desde su posisición de equilibrio [Fig.3.10(b)].

(a) Si un resorte se estira 2.0 cm por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?

(b) ¿Cuánto trabajo realiza el resorte sobre el objeto conforme se estira esta distancia?

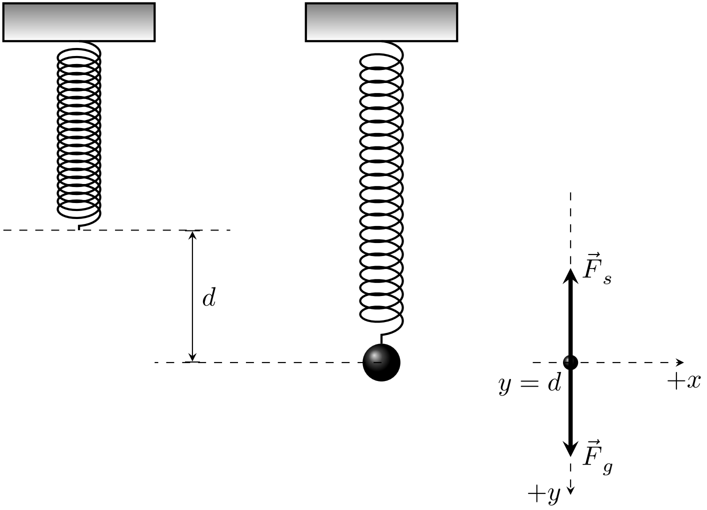

Figura 3.10 (a) Resorte en equilibrio. (b) Resorte con carga. (c) Diagrama del cuerpo libre de la carga.

Solución: Consideremos el eje del desplazamiento como el eje-y con $y = 0$ en la posición de equilibrio del resorte y desplazamientos hacia abajo como positivos.

(a) Con la carga el resorte se ha estirado desde $y = 0$ a $y = d$ de modo que la fuerza aplicada por el resorte es

$$F_s = -ky = -kd.$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la carga en $y = d$ se tiene, para el eje-y,

$$\sum F_y = -kd + mg = 0, \quad kd = mg$$

De las expresiones anteriores se llega a

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{0.020\,\mathrm{m}} \quad \therefore \quad k = 2.7 \times 10^2\,\mathrm{N/m}.$$

(b) El trabajo realizado por el resorte es,

$$\begin{aligned} W_s &= \int_0^d \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_0^d (-ky\hat{\jmath}) \cdot (dy\hat{\jmath}) = -k \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^d \\ &= -\frac{1}{2} \left(2.7 \times 10^2\,\mathrm{N/m}\right) (0.020\,\mathrm{m})^2 \quad \therefore \quad W_s = -5.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{Nm}. \end{aligned}$$

6 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía Cinética

Coherentemente con la primera ley de Newton, toda fuerza que ejerce trabajo, modifica el estado de movimiento de un sistema.

Estudiaremos cómo el trabajo ejercido muda la rapidez del sistema. .

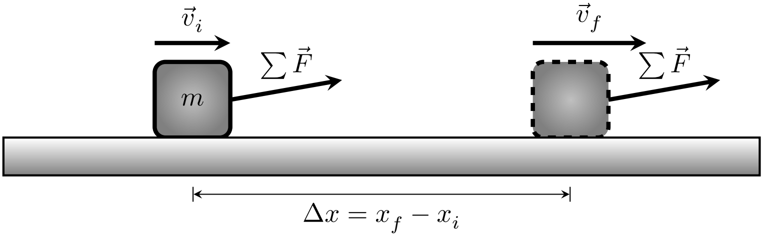

Figura 3.11 Bloque de masa m que se desplaza $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath}$ bajo la acción de la fuerza neta constante $\sum \vec{F}$.

En la Fig.3.11 un bloque de masa m se desplaza en la dirección positiva del eje-x bajo la acción de la fuerza neta $\sum \vec{F}$. El trabajo neto realizado sobre la partícula por la componente de la fuerza $\sum \vec{F}$ a lo largo del eje-x es

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F\right)_x dx. \tag{9}$$

Reemplazando $(\sum F)_x = ma_x$, se tiene

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} ma_x dx = \int_{x_i}^{x_f} m\left(\frac{dv_x}{dt}\right) dx = \int_{x_i}^{x_f} m\left(\frac{dx}{dt}\right) dv_x = \int_{v_i}^{v_f} mv_x dv_x$$

$$\boxed{W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_{xf}^2 - \frac{1}{2}mv_{xi}^2} \tag{10}$$

donde v_{xi} es la rapidez del bloque en la posición $x = x_i$ y v_{xf}, la rapidez en la posición $x = x_f$.

El trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores final e inicial de la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$; **energía cinética**:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2. \tag{11}$$

La energía cinética es una cantidad escalar con las mismas unidades del trabajo. En el SI la unidad de la energía cinética es el joule $(\mathrm{J}):\ 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm}$.

La Ec.(10) establece que el trabajo realizado sobre una partícula por la componente de la fuerza neta $\sum \vec{F}$ a lo largo del desplazamiento de la partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Esa ecuación es convenientemente escrita como

$$\boxed{W_{\mathrm{neto}} = \Delta K = K_f - K_i} \qquad \text{o} \qquad \boxed{K_f = K_i + W_{\mathrm{neto}}.} \tag{12}$$

O sea, la energía cinetica final de una partícula es igual a su energía cinética inicial más el trabajo realizado sobre ella por la componente de la fuerza neta a lo largo del desplazamiento de la partícula.

La Ec.(12) se conoce como el **teorema trabajo-energía cinética**:

Cuando se relaliza trabajo sobre un sistema, y el único cambio en el sistema es su rapidez, el trabajo neto realizado sobre el sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema.

$$W_{\text{neto}} = \Delta K = K_f - K_i.$$

La rapidez de un sistema **aumenta** si el trabajo neto realizado sobre él es **positivo**; la rapidez de un sistema **disminuye** si el trabajo neto realizado sobre el sistema es **negativo**.

Cuando se realiza trabajo neto W_{neto} sobre un sistema, el resultado es una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El resultado en el sistema, en el caso de la Ec.(12), es un cambio ΔK en la energía cinética del sistema.

Ejemplo 5: Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se tira hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m.

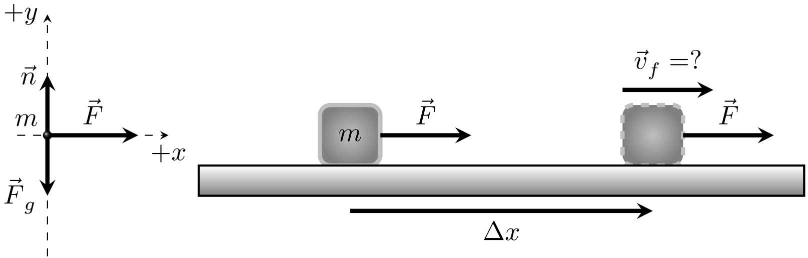

Figura 3.12 Diagrama para el Ejemplo 1.4.

Solución: No hay desplazamiento en el eje y, así $(\sum F)_y = 0$ por lo tanto $W_n = W_{F_g} = 0$.

La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de $12\,\mathrm{N}$ de magnitud que tira al bloque hacia la derecha. El trabajo realizado sobre el bloque por esa fuerza es

$$W_F = F\Delta x = (12\,\mathrm{N})(3.0\,\mathrm{m}), \quad \therefore \quad W_F = 36\,\mathrm{Nm}.$$

Del teorema del trabajo-energía cinética se tiene

$$\frac{1}{2}mv_{xf}^2 = \frac{1}{2}mv_{xi}^2 + W_F, \quad v_{xf} = \sqrt{\frac{2W_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\,\mathrm{Nm})}{6.0\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{12\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}$$

de lo cual se llega a

$$v_f = 3.5\,\mathrm{m/s}.$$

Situación de análisis: Considere un sistema bola-Tierra en el que una bola cae hacia la Tierra. En una muy buena aproximación, la energía cinética total del sistema puede ser considerada simplemente como la energía cinética de la bola, porque en este ejemplo, la Tierra se mueve tan lentamente que podemos ignorar su energía cinética.

Por otro lado, la energía cinética de un sistema formado por dos electrones debe incluir la energía cinética de ambos electrones, porque sus masas son iguales.

7 Energía Potencial de un Sistema

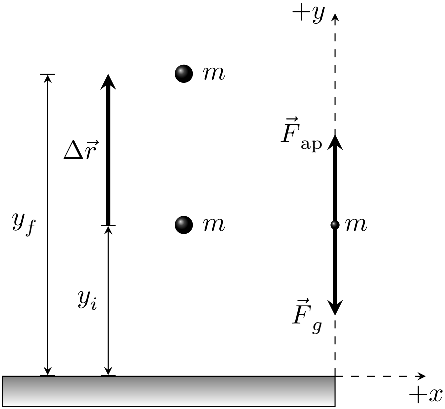

Figura 3.13 Trabajo realizado por una fuerza externa $\vec{F}_{\text{ap}}$ para levantar una esfera desde la posición inicial y_i hasta la posición final y_f.

Sea la magnitud de $\vec{F}_{\rm ap}$ en todo momento igual a la magnitud de $\vec{F}_g$ (partícula en equilibrio). El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_{\rm ap}$ sobre la esfera para desplazarla desde y_i hasta y_f, es

$$W_{\rm neto} = \vec{F}_{\rm ap} \cdot \Delta\vec{r} = (mg\hat{\jmath}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\jmath}] = mgy_f - mgy_i, \qquad (13)$$

donde se usó la expresión "neto" para el trabajo porque la fuerza aplicada es la única fuerza externa aplicada sobre el sistema: bola-tierra.

La cantidad mgy es la **energía potencial gravitacional** $U_g(y)$:

$$U_g(y) \equiv mgy. \qquad (14)$$

En el SI las unidades de la energía potencial gravitacional (escalar) son el joule (J). La Ec.(13) se aplica en regiones cercanas a la superficie de la Tierra, donde g es aproximadamente constante.

La Ec.(13) puede ser escrita como

$$\boxed{W_{\text{neto}} = W_{\text{ap}} = \Delta U_g(y),} \tag{15}$$

el trabajo realizado sobre un sistema aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

La energía potencial gravitacional depende sólo de la altura vertical del objeto sobre la superficie de la Tierra

En la resolución de problemas es conveniente elegir una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional del sistema tenga algún valor de referencia que, normalmente, es cero. Esta elección de referencia es completamente arbitraria debido a que lo importante es la **diferencia** en energía potencial, la que no depende de la elección de la configuración de referencia.

Ejemplo 6: Una bola de boliche de 7.0 kg de masa sostenida por un bolichista descuidado se desliza de su mano desde una altura de 0.50 m y cae sobre un dedo de su pie. La superficie del dedo del pie está a 0.030 m sobre el nivel del suelo. Si elije el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, determine el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra.

Solución: Se nos pide calcular ΔU_g, esto es,

$$\begin{aligned}\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} &= mgy_f - mgy_i \\ &= (7.0\,\mathrm{kg})\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)[(0.030 - 0.50)\,\mathrm{m}] \\ \Delta U_g &= -32\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Considere el sistema bloque-resorte de la Fig.3.14.

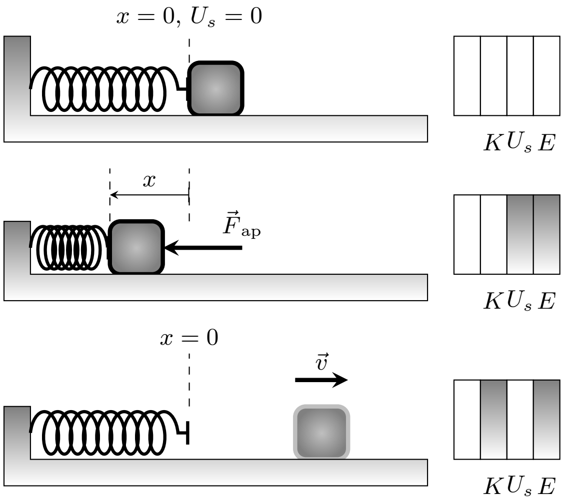

Figura 3.14 (a) Resorte en equilibrio. (b) Resorte comprimido. (c) Energía potencial elástica transformada a energía cinética.

La fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque es $\vec{F}_s = -kx\hat{\imath}$. El trabajo realizado por una fuerza externa aplicada $\vec{F}_{\text{ap}} = -\vec{F}_s$ para comprimir el resorte desde una posición inicial x_i a una posición final x_f es

$$W_{\text{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_{\text{ap}} \cdot d\vec{r} = k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2, \qquad (16)$$

donde x_i y x_f son medidas desde la posición de equilibrio ($x = 0$).

El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre el sistema bloque-resorte es igual a la diferencia de una cierta cantidad relacionada con la configuración del sistema. Se define la función **energía potencial elástica** asociada al sistema bloque-resorte como

$$\boxed{U_s(x) \equiv \frac{1}{2}kx^2.} \qquad (17)$$

Energía almacenada en el resorte deformado (comprimido o estirado). La energía potencial elástica es siempre positiva.

8 Fuerzas Conservativas y no Conservativas

Un objeto se mueve hacia la derecha sobre una superficie rugosa. El objeto desacelera debido a la fuerza de fricción. Consideremos a la *superficie* como un sistema que está recibiendo energía; producto del trabajo externo del objeto.

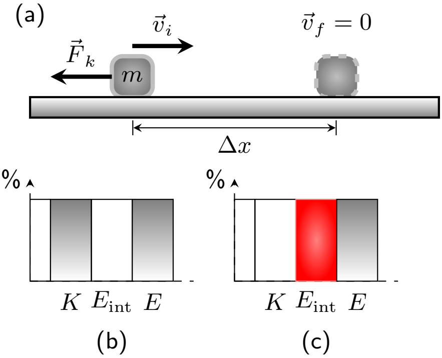

Figura 3.15 (a) Un objeto se mueve hacia la derecha sobre una superficie con fricción. (b) y (c) gráfica de barras de energía.

Un observador parado en la superficie verá que hay una fuerza de fricción frenando al objeto. De acuerdo a la ley de acción y reacción, el objeto también ejerce fricción sobre la superficie al deslizarse. Dicha fuerza, sobre la superficie, apunta hacia la derecha, al igual que el desplazamiento de su punto de aplicación.

Si bien, el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre la superficie (sistema) es positivo, este no se manifiesta como un cambio en el estado de movimiento de la superficie como cuerpo. ¿Contradice la ley de inercia?... NO

La experiencia cotidiana nos muestra que las superficies se **calientan**. El trabajo positivo realizado sobre la superficie permitió calentarla sin aumentar su rapidez o mudar la configuración del sistema ni su energía potencial.

A la energía asociada con la temperatura (vibración molecular) de un sistema se le llama **energía interna**, E_{int}.

En este caso, el trabajo realizado sobre la superficie es la energía transferida hacia el interior del sistema; aparece como energía interna y no como energía cinética o potencial.

Considerando al sistema como la superficie más el bloque, los diagramas de energía de la Fig.3.15 permiten identificar que:

De la Fig.3.15(b): La energía cinética inicial del sistema es igual a la energía total del sistema ($K_i = E,\ E_{int,\,i} = 0$).

De la Fig.3.15(c): La energía interna del sistema es igual a la energía total del sistema ($E_{int,\,f} = E,\ K_f = 0$).

Esta igualdad será descrita mediante el principio de **conservación de la energía**, el cual será visto en el siguiente capítulo.

Para entender el principio de conservación, es conveniente distinguir las fuerzas entre aquellas que mantienen constante la energía interna del sistema (conservativas) y aquellas que la modifican (no-conservativas).

Fuerzas Conservativas

Presentan estas dos propiedades equivalentes:

- El trabajo realizado sobre una partícula móvil entre dos puntos cualquiera es independiente de la trayectoria seguida por la partícula (no hay disipación de energía).
- El trabajo realizado sobre una partícula móvil a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. (El punto inicial es el mismo que el punto final).

Ejemplos de fuerzas conservativas son la fuerza gravitacional y la fuerza ejercida por un resorte ideal sobre un cuerpo unido a él.

Se puede asociar una energía potencial para un sistema con una fuerza que actúa entre integrantes del sistema. **Sólo para fuerzas conservativas**.

En general, el trabajo W_{fc}- realizado por una fuerza conservativa- sobre un objeto que forma un sistema conforme el objeto se traslada desde una posición a otra es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final

$$W_{\mathrm{fc}} = U_i - U_f = -\Delta U. \tag{18}$$

Fuerzas no-Conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no cumple las dos propiedades que satisfacen las fuerzas conservativas.

La **energía mecánica**, E_{mec}, de un sistema es definida como la suma de las energías cinéticas y potenciales de un sistema

$$\boxed{E_{\text{mec}} = K + U}, \tag{19}$$

donde K incluye la energía cinética de todos lo miembros móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial del sistema.

La presencia de fuerzas no conservativas provoca un **cambio** en la energía mecánica del sistema: **La energía mecánica no se conserva**.

Un ejemplo de fuerza no conservativa es la **fuerza de fricción**.

9 Correspondencia Entre FCs y Energía potencial

Se puede definir una **función de energía potencial** U_c de modo que el trabajo realizado dentro del sistema por una fuerza conservativa (W_{fc}) sea igual a la disminución en la energía potencial del sistema.

Imagine un sistema de partículas en el que la configuración cambia debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x. El trabajo realizado por una fuerza conservativa $\vec{F}_c$ conforme una partícula se traslada a lo largo del eje x es

$$W_{fc} = \int_{x_i}^{x_f} F_{cx} dx = -\Delta U_c \tag{20}$$

donde F_{cx} es la componente de $\vec{F}_c$ en la dirección del desplazamiento dx. O sea, el trabajo realizado por una fuerza conservativa que actúa entre integrantes de un sistema es igual al **negativo** del cambio de la energía potencial ΔU_c del sistema asociado con dicha fuerza cuando la configuración del sistema muda.

De forma equivalente

$$\boxed{\Delta U_{\rm c} = U_{{\rm c}f} - U_{{\rm c}i} = -\int_{x_i}^{x_f} F_{{\rm c}x} dx.} \tag{21}$$

Si $F_{{\rm c}x}$ y dx están en la misma dirección $\Delta U_{\rm c} < 0$: Por ejemplo, un objeto cayendo en un campo gravitacional o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

En general, se elige una ubicación particualar x_i de un integrante de un sistema como representativo de una configuración de referencia y se miden todas las diferencias en U en relación a él. En ese caso es posible definir la función energía potencial como

$$U_{{\rm c}f}(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_{{\rm c}x} dx + U_{{\rm c}i}. \tag{22}$$

Es común hacer $U_{{\rm c}i} = 0$ en la configuración de referencia:

Sólo cambios en la energía potencial tienen significado físico.

Si el punto de aplicación de la fuerza se somete a un desplazamiento infinitesimal dx, el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema $dU_{\rm c}$ se expresa como

$$dU_{\rm c} = -F_{{\rm c}x}dx.$$

Vemos que, en este caso, la componente x de la fuerza conservativa $\vec{F}_{\rm c}$ se relaciona con la función de energía potencial $U_{\rm c}$ mediante la ecuación

$$\boxed{F_{{\rm c}x} = -\frac{dU_{\rm c}}{dx}} : \tag{23}$$

La componente x de una fuerza conservativa $F_{{\rm c}x}$ que actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo del eje x dentro de un sistema es igual al negativo de la derivada de la función energía potencial $U_{\rm c}$ con respecto a x.

Por ejemplo, para un resorte deformado (estirado o comprimido), $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, luego

$$F_s = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}kx^2\right] = -\frac{1}{2}k\frac{d\left(x^2\right)}{dx} = -kx$$

la cual corresponde a la expresión para la fuerza restauradora del resorte (ley de Hooke).

10 Diagramas de Energía y Equilibrio de un Sistema

Considere $U_s = \frac{1}{2}kx^2$ (sistema bloque-resorte). Un gráfico para esta función es dado en la Fig.3.16(a). La componente en la dirección x de la fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque, F_x, es dada por la Ec.(23)

$$F_x = -kx.$$

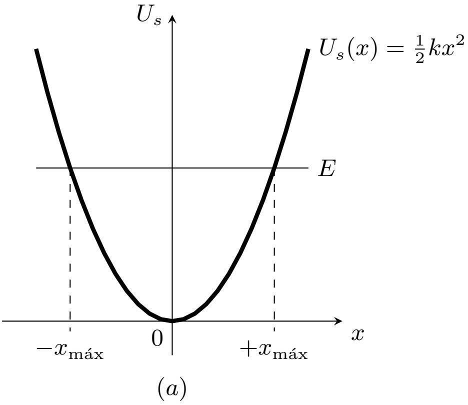

Figura 3.16 (a) Función energía potencial $U_s(x)$ para un sistema bloque-resorte sin fricción mostrado en (b).

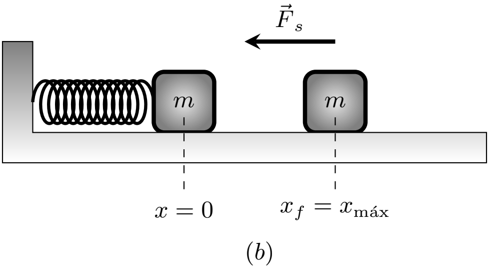

Figura 3.16 (b) Bloque unido a un resorte oscilando entre los puntos de retorno, de coordenadas $x = \pm x_{\text{máx}}$. Note que la fuerza restauradora actúa siempre hacia el equilibrio.

La posición $x = 0$ para el sistema bloque-resorte es aquella de un **equilibrio estable**.

En general:

Las configuraciones de un sistema en **equilibrio estable** corresponden a aquellas en las cuales la función energía potencial U del sistema es o tiene un valor mínimo.

Una partícula se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_{cx}, donde la gráfica $U_c(x)$ es de la forma mostrada en la Fig.3.17.

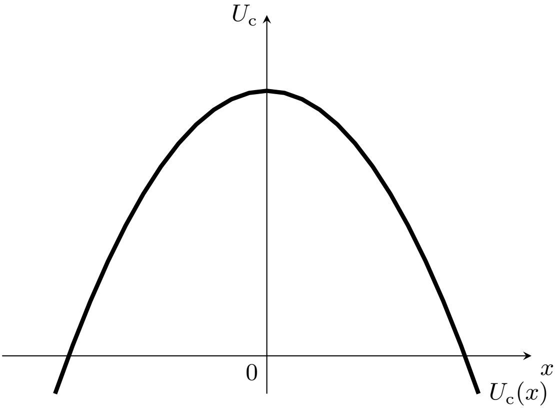

Figura 3.17 Función energía potencial $U_c(x)$ para un sistema que tiene un punto de equilibrio inestable en $x = 0$.

En $x = 0$, $F_{cx} = -dU_c/dx = 0$: Partícula en equilibrio (lápiz equilibrado sobre su punta).

Esa posición es de **equilibrio inestable**:

- Si la partícula se desplaza hacia la derecha $(x > 0)$; la pendiente es negativa: $\therefore F_{cx} = -dU_c/dx > 0$, la partícula acelera alejándose de $x = 0$.
- Si la partícula se desplaza hacia la izquierda $(x < 0)$; la pendiente es positiva: $\therefore F_{cx} = -dU_c/dx < 0$ y, de nuevo, la partícula acelera alejándose de $x = 0$.

En ambos casos, la fuerza empuja a la partícula alejándola de $x = 0$, hacia regiones de menor energía potencial, luego $x = 0$ es un punto de **equilibrio inestable**.

En general:

Las configuraciones de un sistema de **equilibrio inestable** corresponden a aquellas en las cuales la función energía potencial U_c tiene su máximo valor.

Para una configuración de **equilibrio neutro**, $U_c = \text{cte}$ en alguna región. Esfera sobre una superficie horizontal plana.

Ejemplo 7: La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos neutros en una molécula se representa mediante la función energía potencial de Lennard-Jones:

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

donde x es la separación de los átomos. La función $U(x)$ contiene dos parámetros σ y ϵ que están determinados por los experimentos. Valores muestra para la interacción entre dos átomos en una molécula son $\sigma = 0.263\,\mathrm{nm}$ y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22}\,\mathrm{J}$. Con una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

Solución: Hagamos en primer lugar $dU(x)/dx$, se tiene

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\left[\sigma^{12}\frac{d}{dx}(x^{-12}) - \sigma^{6}\frac{d}{dx}(x^{-6})\right] = 4\epsilon\left[-12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right) + 6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]$$

Así F_x (la fuerza entre dos átomos neutros en una molécula) es

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -4\epsilon\left[-12\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{13}}\right) + 6\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right)\right]$$

Para encontrar el punto de equilibrio hacemos $dU(x)/dx = 0$. Esto es:

$$-12\left(\frac{\sigma^{12}}{x_{\mathrm{eq}}^{13}}\right) + 6\left(\frac{\sigma^{6}}{x_{\mathrm{eq}}^{7}}\right) = 0, \quad 2\sigma^{6} = x_{\mathrm{eq}}^{6}, \quad x_{\mathrm{eq}} = \sigma\sqrt[6]{2} = \sigma\left(2^{\frac{1}{6}}\right).$$

o sea

$$x_{\mathrm{eq}} = 0.295\,\mathrm{nm} = 2.95\,\mathrm{\AA},$$

donde $\mathrm{\AA}$ es un armstrong $1\,\mathrm{\AA} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

Para saber si ese punto de equilibrio es estable o inestable hacemos $d^2U(x)/dx^2$ y la evaluamos en ese punto. Esto es

$$\begin{aligned}\frac{d^2U(x)}{dx^2} &= 4\epsilon\left[-12\sigma^{12}\frac{d}{x}\left(x^{-13}\right)+6\sigma^{6}\frac{d}{dx}\left(x^{-7}\right)\right]\\ &= 4\epsilon\left[156\left(\frac{\sigma^{12}}{x^{14}}\right)-42\left(\frac{\sigma^{6}}{x^{8}}\right)\right]\end{aligned}$$

Ahora evaluamos ese resultado en $x = x_{\text{eq}} = \sigma\sqrt[6]{2}$, así

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{\text{eq}} &= \epsilon\sigma^{-2}\left(\frac{624}{2^{\frac{14}{6}}}-\frac{168}{2^{\frac{8}{6}}}\right)\\ &= \frac{\epsilon}{\sigma^2}\left(124-66.7\right) = 57\left(\frac{\epsilon}{\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

Pero σ y ϵ ambos son positivos, luego

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0, \quad \therefore\ x_{\text{eq}} \text{ es un punto de } \textbf{quilibrio estable}!$$

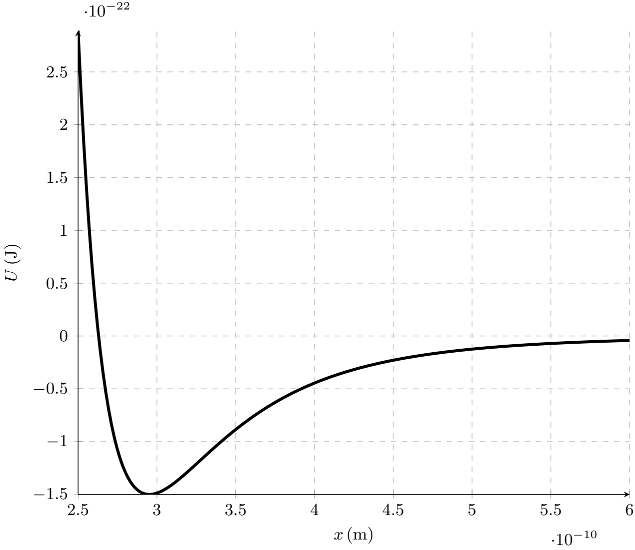

Figura 3.18 Función $U(x)$ para el potencial de Lennard-Jones de una molécula. La distancia x es la separación entre los dos átomos que forman la molécula.