UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL[**6**] -Cálculo IV (MAT 225212 & MAT 225252)

Tema: ***Funciones Analíticas y Armónicas*** **.**

1. Determine el dominio de analiticidad de los siguiente funciones y exprese su derivada

   (a) $f_1(z) = z$

   (b) $f_2(z) = e^{\overline{z}}$

   (**P**) $f_3(x+iy) = 2x + i3y$

   (**P**) $f_4(x+iy) = \frac{y-ix}{x^2+y^2}$

   (c) $f_5(z) = \frac{1}{iz}$

   (d) $f_6(x+iy) = \frac{x^4+i(2xy)(x^2+y^2)-y^4+x-iy}{x^2+y^2}$

(**P**) Expresar la función f_6 en la variable z.
¿Cuál es la función armónica conjugada, v, de $u(x,y) = \mathrm{Re}\,(f_6(x+iy))$?
Encontrar $f_6'(1+i)$.

2a. Usar el Álgebra de Derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones.

   (a) $g_1(z) = ze^z$

   (b) $g_2(z) = (1+e^z)^5$

   (c) $g_3(z) = \sin(z)\cos(z)$

   (**P**) $g_4(z) = \sinh(3z+i)$

2b. En las siguientes funciones compuesta, antes de desarrollar la derivada, es preciso, encontrar el domino de analiticidad.

   (a) $g_5(z) = \mathrm{Ln}(z+1)$ (b) $g_6(z) = \frac{\mathrm{Ln}(3z-1)}{z^2+1}$ (**P**) $g_7(z) = \mathrm{Log}_{\frac{\pi}{2}}(z+1)$

2c. Encontrar las derivadas de las siguientes potencias sobre su rama principal.

   (a) $g_8(z) = z^i$

   (b) $g_9(z) = (z+1)^{1/2}$

   (**P**) $g_{10}(z) = \frac{1}{(z-i)^{1/2}}$

   (c) $g_{11}(z) = z^z$

3. Evaluar los siguientes límites usando la Regla de L'Höpital:

   (a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin(z)}{z}$

   (b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$

   (**P**) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{Ln}(z+1)}{z}$

   (c) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{1+iz}{z(z-i)}$.

4 Sobre la rama principal sobre la cual se define la compuesta, determine la derivada de

$$\mathrm{Tan}^{-1}(z) = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right).$$

(**P**) Si $f = u + iv$ es analítica son un dominio D. Demuestre que si $\mathrm{Re}(f)$ o $\mathrm{Im}(f)$ son constantes sobre D, entonces f debe ser constante sobre D. Infiera que f y $\overline{f}$ son analíticas sobre D, entonces f debe ser constante sobre D.

Septiembre 2025
FPV/fpv