

## Práctica 7 - Álgebra III (525201)

---

**Ejercicio 1.** Dada  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos no vacíos, se define la familia  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k. \quad (1)$$

a) Demuestre que  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia decreciente de conjuntos, es decir, se verifica que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} \subseteq B_n.$$

*Demostración.* Como

$$\underbrace{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k}_{B_{n+1}} = \underbrace{\left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right)}_{B_n} \cap A_{n+1}$$

se sigue que  $B_{n+1} \subseteq B_n$  por propiedad de la intersección de conjuntos. ■

b) Pruebe que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

*Demostración.* Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k$ . Luego,  $x \in A_k$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Como lo anterior se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se cumple para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De aquí se desprende que  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ , esto es,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .

Sea  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ . Luego,  $x$  pertenece a toda subfamilia  $\{A_k\}_{k=1}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,  $x \in B_n$  para todo número natural  $n$ . Se sigue que  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , esto es,  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

De las dos inclusiones anteriores concluimos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ . ■

c) Dé un ejemplo de familia  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que los conjuntos de la familia  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definidos según la ecuación (1), sean todos distintos.

*Solución.* Considere la familia  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definida por

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k = \left[ \frac{1}{k}, 1 \right]$$

Como  $A_i \cap A_j = A_j$ , para todo  $i < j$ , es fácil ver que

$$\begin{aligned} B_n &= \bigcap_{k=1}^n A_k \\ &= A_n \end{aligned}$$

Luego, los conjuntos de la familia  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son todos distintos pues los conjuntos de la familia  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  lo son. ■

**Ejercicio 2.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Se define la relación  $R_X$  en  $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$  por:

$$\forall A, B, C, D \subseteq X, \quad (A, B)R_X(C, D) \iff A \subseteq C \wedge D \subseteq B.$$

- a) Pruebe que  $R_X$  es relación de orden.

*Demostración.* Para probar que  $R_X$  es relación de orden, debemos probar que es *reflexiva, antisimétrica y transitiva*.

**Reflexividad:** Sean  $A, B \subseteq X$ . Luego, como  $A \subseteq A \wedge B \subseteq B$  se sigue que  $(A, B)R_X(A, B)$ .

**Antisimetría:** Sean  $A, B, C, D \subseteq X$  tales que  $(A, B)R_X(C, D)$  y  $(C, D)R_X(A, B)$ . Luego,  $A \subseteq C \wedge D \subseteq B$  y  $C \subseteq A \wedge B \subseteq D$ . Así,  $A = C$  y  $B = D$ , por lo cual  $(A, B) = (C, D)$ .

**Transitividad:** Sean  $A, B, C, D, E, F \subseteq X$  tales que  $(A, B)R_X(C, D)$  y  $(C, D)R_X(E, F)$ . Luego,  $A \subseteq C \wedge D \subseteq B$  y  $C \subseteq E \wedge F \subseteq D$ . Así,  $A \subseteq C \subseteq E \wedge F \subseteq D \subseteq B$ . Luego,  $A \subseteq E \wedge F \subseteq B$ . Es decir,  $(A, B)R_X(E, F)$ .

De las tres propiedades anteriores concluimos que  $R_X$  es una relación de orden. ■

- b) Muestre que  $R_X$  es relación de orden parcial y que, sin embargo, se verifica que:

$$\exists A', B' \subseteq X, \forall A, B \subseteq X, \quad (A', B')R_X(A, B).$$

*Demostración.* Para mostrar que  $R_X$  es relación de orden parcial debemos mostrar dos elementos  $(A, B), (C, D)$  que no estén relacionados. Para este propósito, basta considerar  $(X, X)$  y  $(\emptyset, \emptyset)$ . En efecto,  $X \not\subseteq \emptyset$ , pues  $X$  es no vacío y por tanto se tiene que  $(X, X) \not\sim R_X(\emptyset, \emptyset)$  y  $(\emptyset, \emptyset) \not\sim R_X(X, X)$ , por la primera componente en el primer caso y por la segunda en el segundo.

Sin embargo, como  $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$  se tiene que  $\emptyset \subseteq A$  y  $B \subseteq X$  se verifica que

$$\emptyset \subseteq A \wedge B \subseteq X \implies (\emptyset, X)R_X(A, B)$$

■

**Ejercicio 3.** Sean  $V, W$  e.v. sobre  $\mathbb{K}$  y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal.

- a) Sea  $M$  un s.e.v. de  $V$ . Se define la siguiente relación en  $V$ :

$$v \sim_M w \iff v - w \in M$$

Demuestre que  $\sim_M$  es relación de equivalencia en  $V$ .

*Demostración.* Para probar que  $\sim_M$  es relación de equivalencia en  $V$ , debemos probar que es *reflexiva, simétrica y transitiva*.

**Reflexividad:** Sea  $u \in V$ . Como  $\theta_V \in M$ , ya que  $M$  es s.e.v. de  $V$ , se tiene que  $u - u = \theta_V \in M$ . Es decir,  $u \sim_M u$ .

**Simetría:** Sean  $u, v \in V$  tales que  $u \sim_M v$ . Es decir,  $u - v \in M$ . Como  $M$  es s.e.v., entonces  $-(u - v) \in M$ . Como  $-(u - v) = v - u$ , se sigue que  $v - u \in M$  y por tanto  $v \sim_M u$ .

**Transitividad:** Sean  $u, v, w \in V$  tales que  $u \sim_M v$  y  $v \sim_M w$ . Es decir,  $u - v \in M$  y  $v - w \in M$ . Como  $M$  es s.e.v., entonces  $(u - v) + (v - w) = u - w \in M$  y por tanto  $u \sim_M w$ .

De las tres propiedades anteriores concluimos que  $\sim_M$  es una relación de equivalencia en  $V$ . ■

b) Adoptando la notación  $V/M = V/\sim_M$ , demuestre que  $V/M$  es un e.v. dotado de las operaciones

$$[u]_M + [v]_M = [u + v]_M \quad \alpha \cdot [u]_M = [\alpha \cdot u]_M$$

para  $[u]_M, [v]_M \in V/M$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Concluya que su elemento neutro es  $[\theta]_M = M$ .

*Demostración.* Para probar que  $V/M$  es e.v., primero demostraremos que las operaciones  $+$  y  $\cdot$  están bien definidas (i.e. no dependen del representante de clase) y luego extenderemos las propiedades de  $V$  a  $V/M$ .

Sean  $u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in V$  tales que  $[u]_M = [\tilde{u}]_M$ ,  $[v]_M = [\tilde{v}]_M$ . Se tiene que  $u - \tilde{u} \in M$  y  $v - \tilde{v} \in M$ , de donde

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} + v - \tilde{v} \in M &\iff (u + v) - (\tilde{u} + \tilde{v}) \in M \\ &\implies (u + v) \sim_M (\tilde{u} + \tilde{v}) \\ &\implies [u + v]_M = [\tilde{u} + \tilde{v}]_M \end{aligned}$$

Por tanto,  $+$  es independiente del representante. Por otro lado, dado  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (u - \tilde{u}) &= \alpha \cdot u - \alpha \cdot \tilde{u} \in M \\ &\implies \alpha \cdot u \sim_M \alpha \cdot \tilde{u} \\ &\implies [\alpha \cdot u] = [\alpha \cdot \tilde{u}] \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene que  $\cdot$  es independiente del representante, también.

Por tanto, todas las propiedades de e.v. de  $V/M$  se pueden probar mediante las propiedades de  $V$  haciendo uso de los representantes de clase. De este modo, tenemos que el nulo en  $V/M$  debe ser la clase del nulo en  $V$ . En efecto,

$$[u]_M + [\theta_V]_M = [u + \theta_V]_M = [u]_M$$

Como  $[\theta_V]_M := \{v \in V : v - \theta_V \in M\}$  y  $v - \theta_V = v$ , se sigue que  $[\theta_V]_M = M$ . ■

c) Demuestre que  $\tilde{T} : V/Ker(T) \rightarrow W$  definida por

$$\tilde{T}([v]) = T(v), \quad \forall [v] \in V/Ker(T)$$

está bien definida y es una transformación lineal inyectiva.

*Demostración.* Para probar que  $\tilde{T}$  está bien definida, debemos demostrar que su que es independiente del representante de clase.

Sean  $u, \tilde{u} \in V$  tales que  $[u] = [\tilde{u}]$ . Es decir,  $u - \tilde{u} \in Ker(T)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{T}([u]) &= T(u) \\ &= T(u) - \theta_W \\ &= T(u) - T(u - \tilde{u}) \\ &= T(u) - T(u) + T(\tilde{u}) \\ &= T(\tilde{u}) \\ &= \tilde{T}([\tilde{u}]) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que  $\tilde{T}$  es independiente del representante y por tanto está bien definida.

Podemos observar que  $\tilde{T}$  es lineal a partir de la linealidad de  $T$ . En efecto, dados  $[u], [v] \in V/Ker(T)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\alpha \cdot [u] + [v]) &= \tilde{T}([\alpha \cdot u + v]) \\ &= T(\alpha \cdot u + v) \\ &= \alpha \cdot T(u) + T(v) \\ &= \alpha \cdot \tilde{T}([u]) + \tilde{T}([v])\end{aligned}$$

Finalmente, para probar que  $\tilde{T}$  es inyectiva basta probar que  $Ker(\tilde{T}) = [\theta_V]$ . Para tal efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\tilde{T}([v]) = \theta_W &\implies T(v) = \theta_W \\ &\implies v \in Ker(T) \\ &\implies [v] = [\theta_V]\end{aligned}$$

■