Elementos Finitos

Tarea 4

Prof. Manuel Solano

23 de mayo de 2024

Fecha de entrega: 6 de junio de 2024.

1. Sea $K := [-1,1]^2$. Definimos $\mathbb{Q}_1(K) := \{p : p(x,y) = p(x)q(y),\ (x,y) \in K\}$ donde p y q son polinomios de grado a lo más uno en las variables x e y respectivamente. Notar que $dim\, \mathbb{Q}_1(K) = 4$. Sea $\mathcal{N} := \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

   a) Suponga que los elementos de $\mathcal{N}$ están determinados por la evaluación de $p \in \mathbb{Q}_1(K)$ en los vértices de K. Muestre que $(K, \mathbb{Q}_1(K), \mathcal{N})$ es un elemento finito.

   b) Construir las bases nodales $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ de $\mathbb{Q}_1(K)$. **Indicación.:** Recordar que las bases nodales satisfacen $N_j(\phi_i) = \delta_{ij}$.

   c) Suponga que los elementos de $\mathcal{N}$ están determinados por la evaluación de $p \in \mathbb{Q}_1(K)$ en los **puntos medios** de los lados de K. Muestre que $(K, \mathbb{Q}_1(K), \mathcal{N})$ **no** es un elemento finito.

2. Sea $\widehat{K} = \{\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/h : \boldsymbol{x} \in K \subset \mathbb{R}^n\}$, donde h es el diámetro de K. Sean además $u \in W_p^m(K)$, $p \geq 1$ y k tal que $0 \leq k \leq m$. Denotando por $\widehat{u}(\widehat{\boldsymbol{x}}) := u(\boldsymbol{x}d)$, probar que

$$|\widehat{u}|_{W_p^k(\widehat{K})} = h^{k-n/p} |u|_{W_p^k(K)}. \tag{1}$$

3. **[Desigualdad inversa]** Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que su diámetro es proporcional a h, con $0 < h \leq 1$ y $\mathcal{P}$ un espacio de dimensión finita $\mathcal{P} \subset W_p^l(K) \cap W_q^m(K)$, con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $0 \leq m \leq l$. Demostrar que existe $C > 0$, independiente de h tal que

$$\|v\|_{W_p^l(K)} \leq C h^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{W_q^m(K)} \quad \forall v \in \mathcal{P}. \tag{2}$$

   Indicación: Lleve K al elemento de referencia $\widehat{K}$ definido en el Problema 2 y utilice (1). Luego use equivalencia de normas en espacios de dimensión finita.