Análisis Numérico III
Problemas de valores iniciales y de frontera para EDPs hiperbólicas y parabólicas
Módulo 5, Presentación 10

Raimund Bürger

30 de mayo de 2022

5.1. Teoría de las características

Este capítulo trata de la solución numérica de aquellos tipos de EDPs de segundo orden que normalmente describen procesos que dependen del tiempo:

- las ecuaciones hiperbólicas describen procesos de radiación (por ejemplo, la propagación de ondas), mientras que
- las ecuaciones parabólicas describen procesos de difusión (por ejemplo, la conducción del calor).

Para estos tipos de ecuaciones introduciremos el concepto importante de las características.

Nos limitaremos a sistemas de dos ecuaciones escalares de primer orden y a ecuaciones escalares de segundo orden, y a ecuaciones con solamente dos variables independientes.

5.1. Teoría de las características

5.1.1 Ecuaciones cuasi-lineales escalares de segundo orden Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ una solución de la siguiente ecuación cuasi-lineal definida en G:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f, \tag{5.1}$$

donde $a, b, c, f : G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones suficientemente suaves de x, y, u y ∇u.

Además, se supone que $a \neq 0$ en $G \times \mathbb{R}^3$. Sea $\Gamma \subset G$ una curva suave, por ejemplo representada por una parametrización

$$\big(x(\sigma), y(\sigma)\big) : \mathbb{R} \supset [0,1] \to \Gamma \subset G \subset \mathbb{R}^2.$$

Supondremos que siempre $\mathrm{d}x(\sigma)/\mathrm{d}\sigma \neq 0$, es decir, en ningún punto Γ posee una tangente vertical, asi que están bien definidos los conceptos de los puntos "arriba" y "debajo" de Γ.

5.1. Teoría de las características

Para un punto arbitrario $P \in \Gamma$ nos preguntamos si el comportamento de la solución de (5.1) en una vecindad de P arriba de Γ (o tambíen debajo de Γ) es definido en forma única por el conocimiento de la solución y de sus primeras derivadas en una vecindad de P a lo largo de Γ.

En otras palabras, ¿se pueden determinar las segundas derivadas u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} en $P \in \Gamma$ en forma única si conocemos u, u_x y u_y en $P \in \Gamma$?

Formando para u_x y u_y las derivadas tangenciales $\mathrm{d}(u_x)$ y $\mathrm{d}(u_y)$ en $P \in \Gamma$, es decir, las derivadas en la dirección de la curva Γ, obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(u_x) &= u_{xx}\,\mathrm{d}x + u_{xy}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}(u_y) &= u_{xy}\,\mathrm{d}x + u_{yy}\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1. Teoría de las características

Combinando (5.1) y (5.2) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 \\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \mathrm{d}(u_x) \\ \mathrm{d}(u_y) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Claramente, la pregunta debe ser contestada por "no" si y sólo si el sistema (5.3) no posee una solución única. Esto sucede si y sólo si el determinante de la matriz en (5.3) desaparece, es decir, si

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ en } P, \quad \mathrm{d}x \neq 0. \tag{5.4}$$

La ecuación (5.4) se llama ecuación característica de (5.1) y es una ecuación cuadrática en $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x(P)$. Las soluciones de (5.4) se llaman direcciones características de (5.1) en el punto P.

5.1. Teoría de las características

Definición 5.1 En el punto $P \in G$, la ecuación diferencial (5.1) se llama

a) elíptica, si (5.4) no posee soluciones reales, es decir, si $b^2 - 4ac < 0$,

b) hiperbólica, si (5.4) posee dos soluciones reales, es decir, si $b^2 - 4ac > 0$,

b) parabólica, si (5.4) posee exactamente una solución real, es decir, si $b^2 - 4ac = 0$.

5.1.2 Sistemas cuasi-lineales de primer orden Consideremos en $G \subset \mathbb{R}^2$ un sistema cuasi-lineal de primer orden $(a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0)$:

$$\begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y &= f_1, \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= f_2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde a_i, b_i, c_i y d_i $(i = 1, 2)$ son funciones de x, y, u y v. Se supone que los valores u, v de la solución están dados sobre $\Gamma \subset G$.

5.1. Teoría de las características

Fijamos un punto $P \in \Gamma$ y preguntamos si las primeras derivadas u_x, u_y, v_x y v_y pueden ser determinadas en forma única en el punto P. Formando las derivadas de u y v en $P \in \Gamma$ en la dirección de Γ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v &= v_x \, \mathrm{d}x + v_y \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Combinando (5.5) y (5.6) obtenemos el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}.$$

Su determinante desaparece si y sólo si las primeras derivadas de la solución no son unicamente determinadas en P.

5.1. Teoría de las características

$$(a_1c_2 - a_2c_1)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b_1d_2 - b_2d_1 = 0 \quad \text{con } a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0. \tag{5.7}$$

Ésta es la ecuación característica asociada a (5.6). Sus soluciones son las direcciones características en P. El discriminante de (5.7) es

$$D(P) = (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2 - 4(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1). \tag{5.8}$$

Definición 5.2 En el punto $P \in G$ el sistema (5.5) se llama

a) elíptico si $D(P) < 0$: en P no existe ninguna dirección característica (real),

b) hiperbólico si $D(P) > 0$: en P existen dos direcciones características diferentes,

b) parabólico si $D(P) = 0$: en P existe exactamente una dirección característica.

5.1. Teoría de las características

Si transformamos una ecuación

$$az_{xx} + bz_{xy} + cz_{yy} = f$$

a un sistema de primer orden (5.5) mediante la transformación

$$u := z_x, \quad v := z_y,$$

las Definiciones 5.1 y 5.2 deben ser equivalentes.

Efectivamente son equivalentes: las ecuaciones características (5.4) y (5.7) son idénticas, y por lo tanto el sistema posee las mismas direcciones características que la ecuación diferencial escalar de segundo orden.

5.1. Teoría de las características

Las mismas consideraciones pueden ser aplicadas a ecuaciones escalares de primer orden del tipo

$$au_x + bu_y = f, \quad a \neq 0. \tag{5.9}$$

Derivando en $P \in \Gamma$ a lo largo de Γ obtenemos

$$\mathrm{d}u = u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y, \tag{5.10}$$

y combinando (5.9) y (5.10) llegamos a la ecuación característica

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a},$$

es decir, la ecuación diferencial posee en cada punto sólo una dirección característica, lo es el resultado esperado ya que las ecuaciones del tipo (5.9) describen fenómenos de convección.

5.1. Teoría de las características

5.1.3 Características de ecuaciones hiperbólicas Consideremos el caso donde en cada punto del dominio de definición existen dos direcciones características diferentes.

Si los coeficientes en (5.1) y (5.5) son continuos, entonces la solución de las ecuaciones características (5.4) y (5.7), respectivamente, entrega dos campos de direcciones continuos sobre el dominio considerado. Estos campos de direcciones definen dos familias de curvas, las llamadas características de las ecuaciones diferenciales respectivas (5.1) y (5.5). La suavidad de los coeficientes en (5.1) y (5.5) se refleja en la suavidad de las características.

Las características son portadores de información de la solución; en otras palabras, a lo largo de las características se realizan fenómenos físicos de propagación.

5.1. Teoría de las características

Teorema 5.1 Una solución de la EDP hiperbólica (5.1) (respectivamente, del sistema hiperbólico (5.5)) dada sobre $\Gamma \subset G$ (en el caso de (5.1), se supone que también las primeras derivadas están dadas sobre Γ) es determinada localmente y unicamente mas allá de Γ si y sólo si en ningún punto de Γ, la curva Γ coincide con una de las direcciones características de (5.1) (respectivamente, (5.5)); en otra palabras, si y sólo si intersecta las características bajo un ángulo positivo.

Espacio:

5.1. Teoría de las características

Si los coeficientes de la ecuación diferencial son suficientemente suaves, un PVI hiperbólico posee una solución unicamente determinada si los valores iniciales están dados sobre una curva no característica.

Consideremos ahora PVIs de ecuaciones diferenciales hiperbólicas de segundo orden y de sistemas hiperbólicos de primer orden. Sea Γ una curva suave en el plano (x, y), y supongamos que en cada punto Γ posee una pendiente finita, o sea, existe una parametrización $(x(\sigma), y(\sigma))$ de Γ con $\mathrm{d}x \neq 0$ sobre la totalidad de Γ. Además, sea Γ una curva no característica de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

Espacio:

5.1. Teoría de las características

Ahora estamos buscando soluciones de los problemas

$$\begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y &= f_1 \quad \text{para } (x,y) \in G \text{ arriba de } \Gamma, \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= f_2 \quad \text{para } (x,y) \in G \text{ arriba de } \Gamma, \\ u(x,y) &= u_0(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \Gamma, \\ u_y(x,y) &= u_1(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{5.11}$$

o alternativamente,

$$\begin{aligned} au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} &= f \quad \text{para } (x,y) \in G \text{ arriba de } \Gamma, \\ u(x,y) &= u_0(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \Gamma, \\ u_y(x,y) &= u_1(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5.12}$$

En (5.12) en lugar de u_y se puede especificar alguna otra derivada direccional de u sobre Γ, siempre que ésta no coincida con la derivada en la dirección de Γ, dado que esta derivada ya es dada por u sobre Γ.

5.1. Teoría de las características

Los PVIs del tipo (5.11) y (5.12) conducen a soluciones determinadas en forma única. Analizaremos solamente el problema (5.12); las consideraciones para (5.11) son análogas.

Las soluciones de la ecuación cuadrática entregan las direcciones características de (5.12); aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1 &= \alpha = \frac{1}{2a}\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2 &= \beta = \frac{1}{2a}\left(b-\sqrt{b^2-4ac}\right), \quad a \neq 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

A lo largo de las curvas características el determinante del sistema (5.3) desaparece, por lo tanto en este caso (5.3) posee soluciones solamente si no crece el rango de la matriz extendida en (5.3). Por ejemplo se debe satisfacer

$$\begin{vmatrix} a & f & c \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}(u_x) & 0 \\ 0 & \mathrm{d}(u_y) & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = 0.$$

5.1. Teoría de las características

Es decir,

$$a\,\mathrm{d}(u_x)\,\mathrm{d}y - f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}(u_y)\,\mathrm{d}x = 0;$$

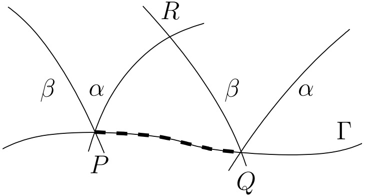
por lo tanto, utilizando (5.13) obtenemos las ecuaciones ($a \neq 0$:)

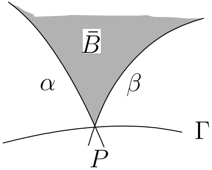
$$\begin{aligned} a\alpha\,\mathrm{d}(u_x) + c\,\mathrm{d}(u_y) - f\,\mathrm{d}y &= 0, \\ a\beta\,\mathrm{d}(u_x) + c\,\mathrm{d}(u_y) - f\,\mathrm{d}y &= 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Estas ecuaciones describen condiciones que la solución de (5.12) debe satisfacer a lo largo de las características α, β. Hay que tomar en cuenta que las derivadas $\mathrm{d}(u_x)$, $\mathrm{d}(u_y)$ y $\mathrm{d}y$ se refieren a las direcciones características α y β, respectivamente. (Las ecuaciones (5.14) dan origen a un método de construcción de soluciones.)

5.1. Teoría de las características

El comportamiento de la solución $u(x,y)$ de (5.12) depende solamente de los datos iniciales especificados en el segmento $[P,Q] \subset \Gamma$, es decir una modificación de los datos iniciales en $\Gamma \backslash [P,Q]$ (fuera de $[P,Q]$) no afecta el valor de la solución $u(R)$. El segmento $[P,Q]$ se llama intervalo de dependencia del punto R:





Sea $P \in \Gamma$, y $B \subset G$ el domino arriba de Γ entre las dos características que pasan por P. Su clausura $\bar{B}$ es el conjunto de aquellos puntos donde $u(x,y)$ depende de los valores iniciales puestos en P. El valor de u en algún punto fuera de $\bar{B}$ no es afectado por una modificación de las condiciones iniciales en $P \in \Gamma$ (y en una vecindad $\mathcal{U}(P) \subset \Gamma$). El dominio B se llama dominio de influencia de $P \in \Gamma$.

5.1. Teoría de las características

Si a las ecuaciones (5.13) y (5.14) se agrega la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}u = u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y,$$

donde hay que tomar las derivadas en una de las dos direcciones características, entonces la solución de (5.12) junto con los datos iniciales está determinada únicamente si suponemos que $a \neq 0$ y $c \neq 0$ en $G \times \mathbb{R}^3$.

5.2. Métodos de características numéricos

Podemos calcular soluciones de PVIs de ecuaciones hiperbólicas por un método que usa una malla característica compuesta por los puntos de intersección de líneas características. Este método origina en un trabajo de Massau (1899).

5.2.1 Método de características aproximado

Queremos estudiar este método para el ejemplo de un problema de valores iniciales del tipo (5.12). Sea la curva inicial Γ no característica. El sistema que debe ser aproximado numéricamente es

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1 = \alpha = \frac{1}{2a}\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \tag{5.15}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2 = \beta = \frac{1}{2a}\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \tag{5.16}$$

$$a\alpha\,\mathrm{d}(u_x) + c\,\mathrm{d}(u_y) - f\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5.17}$$

$$a\beta\,\mathrm{d}(u_x) + c\,\mathrm{d}(u_y) - f\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5.18}$$

$$\mathrm{d}u - u_x\,\mathrm{d}x - u_y\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5.19}$$

donde $a, b, c, f : G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones dadas de x, y, u y ∇u.

5.2. Métodos de características numéricos

Las derivadas que aparecen en (5.17) y (5.18) se toman en las direcciones características α y β, respectivamente, mientras que las derivadas en (5.19) se toman en una de estas direcciones (α o β). Además, se supone que

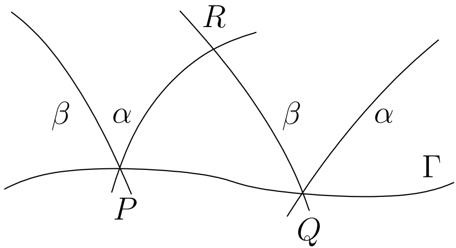
$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{(hiperbolicidad)}, \quad ac \neq 0 \quad \text{en } G \times \mathbb{R}^3. \tag{5.20}$$

El caso $c = 0$ requiere un análisis separado.

Las ecuaciones (5.15)–(5.19) junto con los valores iniciales en Γ determinan la solución de (5.12) de manera única y por lo tanto son equivalentes a (5.12).

5.2. Métodos de características numéricos

Ahora la curva Γ se particiona por un número de puntos, y sean P y Q puntos de partición vecinos. Sea R el punto de intersección de la α-característica por P con la β-característica por Q.



Aproximando las derivadas en (5.15)–(5.19) por cuocientes de diferencias y formando promedios para obtener los valores de promedio de los valores de las funciones restantes, obtenemos...

5.2. Métodos de características numéricos

Datos: x, y, u, u_x, u_y en P y Q Incógnitas: x, y, u, u_x, u_y en R

$$y(R) - y(P) - \frac{1}{2}\big(\alpha(R) + \alpha(P)\big)\big(x(R) - x(P)\big) = 0, \tag{5.21}$$

$$y(R) - y(Q) - \frac{1}{2}\big(\beta(R) + \beta(Q)\big)\big(x(R) - x(Q)\big) = 0, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(a(R)\alpha(R) + a(P)\alpha(P)\big)\big(u_x(R) - u_x(P)\big) \\ + \frac{1}{2}\big(c(R) + c(P)\big)\big(u_y(R) - u_y(P)\big) \\ - \frac{1}{2}\big(f(R) + f(P)\big)\big(y(R) - y(P)\big) = 0, \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(a(R)\beta(R) + a(Q)\beta(Q)\big)\big(u_x(R) - u_x(Q)\big) \\ + \frac{1}{2}\big(c(R) + c(Q)\big)\big(u_y(R) - u_y(Q)\big) \\ - \frac{1}{2}\big(f(R) + f(Q)\big)\big(y(R) - y(Q)\big) = 0, \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} u(R) - u(P) - \frac{1}{2}\big(u_x(R) + u_x(P)\big)\big(x(R) - x(P)\big) \\ - \frac{1}{2}\big(u_y(R) + u_y(P)\big)\big(y(R) - y(P)\big) = 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

5.2. Métodos de características numéricos

En lugar de (5.25) podríamos también considerar una aproximación en la dirección β:

$$u(R) - u(Q) - \frac{1}{2}\big(u_x(R) + u_x(Q)\big)\big(x(R) - x(Q)\big) - \frac{1}{2}\big(u_y(R) + u_y(Q)\big)\big(y(R) - y(Q)\big) = 0.$$

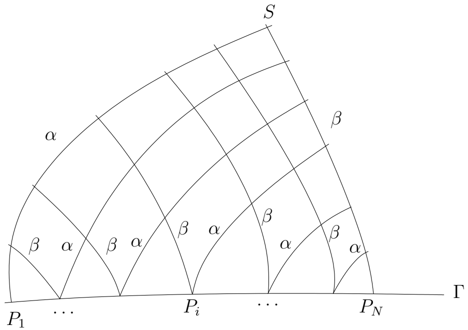
Las ecuaciones de diferencias (5.21)–(5.25) entregan un método que es consistente de segundo orden con (5.15)–(5.19) si todos los tamaños de paso se eligen del mismo orden de magnitud. En virtud de los datos iniciales puestos sobre Γ, todos los valores de funciones en los puntos P y Q son conocidos (Tarea). Las cantidades que hay que determinar son las cinco incógnitas

$$x(R), y(R), u(R), u_x(R), u_y(R). \tag{5.26}$$

$\Rightarrow$ sistema de 5 ecuaciones no lineales en 5 incógnitas.

5.2. Métodos de características numéricos

Aplicando el método (5.21)–(5.25) a puntos $P_1, \dots, P_N \in \Gamma$ obtenemos los datos (5.26) en una sucesión de puntos arriba de Γ, y desde allí se puede seguir con el método.



El dominio de computación queda acotado por las dos características límites por P_1 y P_N. Este dominio se llama dominio de determinación de la solución de (5.12) asociado con el segmento $[P_1, P_N] \subset \Gamma$.

El método de características es convergente de segundo orden.

5.2. Métodos de características numéricos

5.2.2 Método predictor-corrector

Discutiremos ahora la solución del sistema de ecuaciones no lineales, proponiendo el método predictor-corrector.

1. Para la computación de la primera solución aproximada (del predictor) utilizamos fórmulas explícitas al lugar de las cuatro ecuaciones implícitas (5.21)–(5.24).
2. Después de la solución de estas ecuaciones, se calcula la primera aproximación de $u(R)$ a partir de (5.25).
3. Con la ayuda de estas primeras soluciones aproximadas y de las ecuaciones (5.21)–(5.25) podemos calcular segundas soluciones aproximadas (el corrector).

5.2. Métodos de características numéricos

1. Definimos las abreviaturas

$$\alpha^{(0)} := \alpha(P), \qquad c_p^{(0)} := c(P),$$
$$\beta^{(0)} := \beta(Q), \qquad c_q^{(0)} := c(Q),$$
$$f_p^{(0)} := f(P), \qquad \phi_p^{(0)} := a(P)\alpha(P),$$
$$f_q^{(0)} := f(Q), \qquad \phi_q^{(0)} := a(Q)\beta(Q),$$

y para $\nu = 1, \dots, K-1$:

$$\alpha^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(\alpha^{(\nu)}(R) + \alpha(P)\big),$$
$$\beta^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(\beta^{(\nu)}(R) + \beta(Q)\big),$$
$$f_p^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(f^{(\nu)}(R) + f(P)\big),$$
$$f_q^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(f^{(\nu)}(R) + f(Q)\big),$$
$$c_p^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(c^{(\nu)}(R) + c(P)\big),$$
$$c_q^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(c^{(\nu)}(R) + c(Q)\big),$$
$$\phi_p^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(a^{(\nu)}(R)\alpha^{(\nu)}(R) + a(P)\alpha(P)\big),$$
$$\phi_q^{(\nu)} := \tfrac{1}{2}\big(a^{(\nu)}(R)\beta^{(\nu)}(R) + a(Q)\beta(Q)\big),$$

5.2. Métodos de características numéricos

1. (continuación) y para $\nu = 0, \ldots, K-1$:

$$\begin{aligned}
\psi_1^{(\nu)} &:= \alpha^{(\nu)} x(P) - y(P), \\
\psi_2^{(\nu)} &:= \beta^{(\nu)} x(Q) - y(Q), \\
\psi_3^{(\nu)} &:= \phi_p^{(\nu)} u_x(P) + c_p^{(\nu)} u_y(P) - f_p^{(\nu)} y(P), \\
\psi_4^{(\nu)} &:= \phi_q^{(\nu)} u_x(Q) + c_q^{(\nu)} u_y(Q) - f_q^{(\nu)} y(Q),
\end{aligned}$$

y para $\nu = 1, \ldots, K-1$:

$$\begin{aligned}
u_x^{(\nu)} &:= \frac{1}{2}\left(u_x^{(\nu)}(R) + u_x(P)\right), & \delta x^{(\nu)} &:= x^{(\nu)}(R) - x(P), \\
u_y^{(\nu)} &:= \frac{1}{2}\left(u_y^{(\nu)}(R) + u_y(P)\right), & \delta y^{(\nu)} &:= y^{(\nu)}(R) - y(P).
\end{aligned}$$

5.2. Métodos de características numéricos

2. Luego, para $\nu = 0, 1, \ldots, K-1$ se resuelven las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(\nu)} & -1 & 0 & 0 \\ \beta^{(\nu)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -f_p^{(\nu)} & \phi_p^{(\nu)} & c_p^{(\nu)} \\ 0 & -f_q^{(\nu)} & \phi_q^{(\nu)} & c_q^{(\nu)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{(\nu+1)}(R) \\ y^{(\nu+1)}(R) \\ u_x^{(\nu+1)}(R) \\ u_y^{(\nu+1)}(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(\nu)} \\ \psi_2^{(\nu)} \\ \psi_3^{(\nu)} \\ \psi_4^{(\nu)} \end{pmatrix}, \qquad (5.27)$$

$$u^{(\nu+1)}(R) = u(P) + u_x^{(\nu+1)} \delta x^{(\nu+1)} + u_y^{(\nu+1)} \delta y^{(\nu+1)}.$$

Los coeficientes de la matriz y las entradas del lado derecho son funciones de a, b, c y f y por lo tanto funciones de x, y, u y ∇u en los puntos P, Q y $R^{(\nu)}$. Se calculan utilizando la solución determinada en el paso anterior (con el índice ν).

3. Ponemos

$$x(R) := x^{(K)}(R), \quad y(R) := y^{(K)}(R),$$
$$u_x(R) := u_x^{(K)}(R), \quad u_y(R) := u_y^{(K)}(R), \quad u(R) = u^{(K)}(R).$$

5.2. Métodos de características numéricos

La elección de K depende de la precisión con la cual queremos resolver el sistema no lineal. $K = 2$: una solución corrector.

La ecuación (5.27) implica que las primeras dos ecuaciones pueden ser resueltas independientemente de las demás ecuaciones. Estas ecuaciones sirven para la computación de las características.

Geometricamente, (5.21) y (5.22) significan que las curvas características son reemplazadas por segmentos de parábolas.

Si la ecuación (5.12) es lineal o semilineal, se puede anticipar la computación completa de las características, dado que en este caso para la solución de las primeras dos ecuaciones no es necesaria la computación de los valores $u(R)$, $u_x(R)$ y $u_y(R)$.

Frecuentemente, en este caso también es posible integrar directamente las EDOs (5.15) y (5.16); se evita utilizar las aproximaciones (5.21) y (5.22). En el caso lineal, además, no se requiere aplicar el método predictor-corrector, dado que solamente hay resolver un sistema de ecuaciones lineales para cada punto de la malla.

5.2. Métodos de características numéricos

Las condiciones (5.20) implican que las matrices que aparecen en (5.27) son no singulares, es decir, existe una solución única. El método no funciona bien para valores pequeños de $b^2 - 4ac$, es decir, si las dos familias características casí coinciden, en otras palabras, si la malla caracteristíca es muy degenerada.

En el caso límite ($b^2 - 4a = 0$), es decir, en el caso parabólico, ya no se puede ejecutar el método de características.

En aquellos puntos en los cuales $c = 0$ (siempre suponiendo que $a \neq 0$) la ecuación (5.18) ya no aparece (puesto que $\beta = 0$ y $\mathrm{d}y = 0$). Para la discretización esto implica que (5.27) se pone singular, y ya no podemos determinar u_y. Sin embargo podemos utilizar el método en el caso lineal (Tarea).

5.2. Métodos de características numéricos

Ejemplo 5.1 Consideremos dos ejemplos elementales de ecuaciones diferenciales lineales que permiten la computación de la malla característica "a priori".

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Las ecuaciones (5.15) y (5.16) inmediatamente implican que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, es decir, las características son dos familias paralelas de rectas.

   Ecuación de la onda:

   $$u_{tt} - C^2 u_{\xi\xi} = 0 \quad (t\text{: tiempo, } \xi\text{: coordenada espacial})$$

   Equivalencia: $x = t$, $y = \xi$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -C^2$; luego $\alpha = C$, $\beta = -C$.

5.2. Métodos de características numéricos

Ejemplo 5.1

2. Sean $a \equiv x^2$, $b \equiv 0$, $c \equiv -1$, $G := \{(x,y) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, y $\Gamma := \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\} \subset G$. Las ecuaciones (5.15) y (5.16) implican

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{1,2} = \pm\frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

   Integrando obtenemos para $(x,y) \in G$ las siguientes ecuaciones de las características:

$$y_1(x) = \log x + d, \quad y_2(x) = -\log x + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$