

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — viernes 6 de julio de 2018

Nombre: _____

Problema 1 (10 puntos). Se considera el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y un vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios, indicar un números N de iteraciones de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para el cual se puede garantizar que $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^*\| \leq 10^{-3}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$, donde \mathbf{x}^* es la solución exacta y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Problema 2 (10 puntos). Se consideran las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Para cuales de ellas se puede garantizar o excluir la convergencia (a) del método de Jacobi, (b) del método de Gauss-Seidel, (c) del método SOR con $0 < \omega \leq 2$, (d) del método cg de Hestenes y Stiefel, y sin calcular ningúna radio espectral?

Problema 3 (15 puntos).

- a) Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

y sea $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ la partición habitual de \mathbf{A} . Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ dado y el método de Jacobi para la aproximación de una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Probar que el método de Jacobi *no* converge para todo vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

- b) Demostrar que aplicando una matriz de permutación \mathbf{P} , se puede reformular el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$, con $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$ y \mathbf{c} definido adecuadamente, tal que el método de Jacobi aplicado a $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ converge para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.
- c) Utilizando el resultado de (b), calcular una solución aproximada \mathbf{x}_2 (dos pasos del método de Jacobi) de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b} = (1, 15, 11)^T$ a partir de $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$.

Problema 4 (10 puntos).

- a) Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz \mathbf{A} tiene tres valores propios reales distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, y determinar números α_i, β_i , $i = 1, 2, 3$, tales que $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de \mathbf{A} .

- b) Sea la matriz \mathbf{B} dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.04 \\ 0.01 & 2 & 0.01 \\ 0.02 & 0.02 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que \mathbf{B} posee tres valores propios reales $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Considerando una transformación de similaridad con $\mathbf{D} = \text{diag}(0.1, 5, 1)$, demostrar que $\lambda_1 \in [0.995, 1.005]$.

Problema 5 (15 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) Demostrar que el método SOR converge para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y a partir de cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, y para valores $0 < \omega < 2$ del parámetro de relajación ω .
- b) Demostrar que el método SOR incluso converge con un parámetro de relajación óptimo, $\omega = \omega_{\text{opt}}$. Calcular ω_{opt} y el valor del radio espectral $r_\sigma(\mathbf{B}(\omega_{\text{opt}}))$.
- c) Sea $\tilde{\omega}$ el valor de ω_{opt} redondeado adecuadamente a dos decimales. Calcular $r_\sigma(\mathbf{B}(\tilde{\omega}))$ y dos pasos del método SOR con $\omega = \tilde{\omega}$ para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$