# Matriz asociada

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 29, 2020

# Matriz Representante (Notar: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{m\times n}$)

Sean $(V,+,\cdot)$ y $(W,\oplus,\odot)$ e.v. sobre $\mathbb{K}$, tales que $\dim(V) = n \wedge \dim(W) = m$, $(n\,,m \in \mathbb{N})$. Esto implica la existencia de al menos una base $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$ y de otra base $B_W := \{w_1, ..., w_m\}$ para $W$.

1. $\forall\, v \in V : \exists\,!\, \alpha_1\,, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j$. Entonces al vector

$$[v]_{B_V} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$$

se le llama vector de coordenadas de $v$ c/r a la base $B_V$ de $V$. En forma análoga, se define $\forall\, w \in W : [w]_{B_W} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, el vector de coordenadas de $w$ c/r a la base $B_W$ de $W$.

2. Dada una transformación lineal $T : V \to W$, se define la matriz representante de $T$ c/r a $B_V$ y $B_W$, denotada por $[T]_{B_V}^{B_W} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, como

$$\forall\, j \in \{1, ..., n\} : \left([T]_{B_V}^{B_W}\right)_{\bullet j} := [T(v_j)]_{B_W}\,.$$

Esto nos dice que la columna $j$ de $[T]_{B_V}^{B_W}$ es $[T(v_j)]_{B_W}$. Esto permite expresar

$$[T]_{B_V}^{B_W} = \Big[[T(v_1)]_{B_W} \mid \cdots \mid [T(v_n)]_{B_W}\Big] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\,.$$

# Ejemplos

1. Sean $B_1 := \{(1,1), (-1,1))\}$ y $B_2 := \{(1,2)(-2,1)\}$ dos bases (distintas) del espacio vectorial real $V := \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces, considerando $v = (-1,3) \in \mathbb{R}^2$ se deduce que

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B_1$ y $B_2$ son dos bases distintas de $V$, entonces $\forall\, v \in V \backslash \{\Theta_V\} : [v]_{B_1} \neq [v]_{B_2}$.

2. Sean $B_1 := \{(1,0),(1,1)\}$ y $B_2 := \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Definamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) := (x+y, x-y, 2x+y)$, el cual resulta ser una transformación lineal (VERIFICARLO!). Tenemos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0) = (1,1,2) = 1\cdot(1,1,0) + 0\cdot(0,1,1) + 2\cdot(0,0,1) \\ T(v_2) &= T(1,1) = (2,0,3) = 2\cdot(1,1,0) + (-2)\cdot(0,1,1) + 5\cdot(0,0,1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [T]_{B_1}^{B_2} = \Big( [T(v_1)]_{B_2} \,|\, [T(v_2)]_{B_2} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

## ¿Cómo calcular T(v) a partir de $[T]_{B_V}^{B_W}$?

Sea $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$ y $B_W := \{w_1, ..., w_m\}$ una base de $W$. Sea $v \in V$, entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j \Leftrightarrow [v]_{B_V} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Así, $T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(v_j)$. Siendo $[T]_{B_V}^{B_W} := (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se tiene

$$\forall j \in \{1, ..., n\} : T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, w_i$$

$$\Rightarrow T(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \alpha_j\right) w_i\right)$$

$$\Rightarrow T(v) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, w_i \,, \qquad \text{donde } \forall\, i \in \{1, ..., m\} : \beta_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \alpha_j \,.$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = [T]_{B_V}^{B_W} \, [v]_{B_V} \,.$$

# Ejemplo

Consideremos la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 := \{(1,0),(1,1)\}$ y $B_2 := \{1, x, x^2\}$ (de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente) es $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Determinar $T(2,1)$.
2. Determinar $T(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Determinar $\mathrm{Ker}(T)$.
4. Determinar $\mathrm{Im}(T)$.
5. Determinar la imagen de la transformación, pero sin utilizar la definición de $T(x,y)$.
6. Determinar el núcleo de la transformación $T$, pero sin utilizar $T(x,y)$.

Sean $V$ y $W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con $\dim(V) = n \wedge \dim(W) = m$. Se recuerda que $\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \to W \mid T$ es t.l.$\}$, y que además $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces, $\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Demostración:

Sean $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ y $B_W := \{w_1, ..., w_m\}$ bases de $V$ y $W$, respectivamente.
Definimos ahora la función $\Phi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, de modo que
$\forall\, T \in \mathcal{L}(V, W) : \Phi(T) := [T]_{B_V}^{B_W}$.

AFIRMACIÓN 1: $\Phi$ ES LINEAL

Sean $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos

$$\Phi(\lambda T + S) = [\lambda T + S]_{B_V}^{B_W} = \Big( [(\lambda T + S)(v_1)]_{B_W} \,|\, \cdots \,|\, [(\lambda T + S)(v_n)]_{B_W} \Big).$$

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, sean $[T(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ y $[S(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix}$

Por otro lado,

$$(\lambda T + S)(v_j) = \lambda T(v_j) + S(v_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\, w_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\, w_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij} + \beta_{ij}) w_i \,,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}[(\lambda T + S)(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{1j} + \beta_{1j} \\ \vdots \\ \lambda \alpha_{mj} + \beta_{mj} \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix} \\ &= \lambda [T(v_j)]_{B_W} + [S(v_j)]_{B_W} \,.\end{aligned}$$

Así: $\Phi(\lambda T + S) = [\lambda T + S]_{B_V}^{B_W} = \lambda [T]_{B_V}^{B_W} + [S]_{B_V}^{B_W} = \lambda \Phi(T) + \Phi(S)$, de donde se concluye que $\Phi$ es una transformación lineal.

AFIRMACIÓN 2: $\Phi$ ES INYECTIVA

Sea $T \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Entonces $\Phi(T) = [T]_{B_V}^{B_W} = \Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $v \in V$. Invocando la propiedad vista hace poco:

$$[T(v)]_{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = \Theta \in \mathbb{K}^{m\times 1} \Rightarrow T(v) = \Theta_W \,,$$

de donde se deduce que $T = \Theta_{\mathcal{L}(V,W)}$, y por tanto se concluye que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\Theta_{\mathcal{L}(V,W)}\}$, i.e. $\Phi$ es inyectiva.

## AFIRMACIÓN 3: $\Phi$ ES SOBREYECTIVA

Sea $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ Por definir una transformación lineal $T : V \to W$ de modo que

$$\forall\, j \in \{1, \dots, n\} \;:\; [T(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall\, j \in \{1, \dots, n\} \;:\; T(v_j) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i\,,$$

lo cual implicaría que $[T]_{B_V}^{B_W} = A$. Se define $T$ por $\forall\, v \in V \;:\; T(v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, T(v_j)$,

donde $[v]_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. A partir de aquí, no es difícil probar que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (VERIFICARLO!). Esto permite concluir que
$\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \;:\; \exists\, T \in \mathcal{L}(V, W) \;:\; \Phi(T) = A$, i.e. $\Phi$ es sobreyectiva.

CONCLUSIÓN: $\Phi$ es un isomorfismo.

COROLARIO: $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = m \times n$.

Notación: $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$, se le conoce como el espacio de los ENDOMORFISMOS.

Proposición: Sean $U$, $V$, $W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $B_U := \{u_1, ..., u_p\}$, $B_V := \{v_1, ..., v_q\}$, $B_W := \{w_1, ..., w_r\}$ bases de $U$, $V$, $W$, respectivamente. Sean además $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces
$a)$ $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$ $\wedge$ $b)$ $[S \circ T]_{B_U}^{B_W} = [S]_{B_V}^{B_W} [T]_{B_U}^{B_V}$.

Demostración b)

Sean $[S \circ T]_{B_U}^{B_W} := (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times p}(\mathbb{K})$ (existe gracias a la parte a)), $[S]_{B_V}^{B_W} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times q}(\mathbb{K})$, y $[T]_{B_U}^{B_V} := (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$. Por definición de matriz asociada, se tiene

$$\forall j \in \{1, ..., p\} : [(S \circ T)(u_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\} : (S \circ T)(u_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj}\, w_k$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, ..., p\} : (S \circ T)(u_j) = S(T(u_j)) &= S\left(\sum_{i=1}^{q} b_{ij} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q} b_{ij}\, S(v_i) = \sum_{i=1}^{q} b_{ij} \sum_{k=1}^{r} a_{ki}\, w_k \\ &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} b_{ij}\, a_{ki}\, w_k = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{q} a_{ki}\, b_{ij}\, w_k . \end{aligned}$$

En vista que la c.l. de un vector c/r a una base, es ÚNICA, se desprende que

$$\forall\, k \in \{1, ..., r\} \,:\, \forall j \in \{1, ..., p\} \,:\, c_{kj} \,=\, \sum_{i=1}^{q} a_{ki}\, b_{ij} \,\Rightarrow\, [S \,\circ\, T]_{B_V}^{B_W} \,=\, [S]_{B_V}^{B_W}\, [T]_{B_U}^{B_V}\,.$$

Corolario 1: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$, y consideremos la transformación identidad $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$, definido $\forall\, v \in V : \tilde{I}(v) = v$. Entonces $\left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corolario 2: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un automorfismo, entonces se tiene que $[T^{-1}]_{B_V}^{B_V} = ([T]_{B_V}^{B_V})^{-1}$.

Demostración

Recordar que en vista que $T$ es un automorfismo, $\exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(V)$, y es tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \tilde{I}$ (transformación identidad). Aplicando la proposición anterior, se tiene

$$[T^{-1}]_{B_V}^{B_V}\, [T]_{B_V}^{B_V} \,=\, [T^{-1} \,\circ\, T]_{B_V}^{B_V} \,=\, \left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} \,=\, I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$[T]_{B_V}^{B_V}\, [T^{-1}]_{B_V}^{B_V} \,=\, [T \,\circ\, T^{-1}]_{B_V}^{B_V} \,=\, \left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} \,=\, I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,.$$

Luego, por definición de matriz inversa, se concluye que $[T^{-1}]_{B_V}^{B_V} = ([T]_{B_V}^{B_V})^{-1}$.

Corolario 3: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $B_V$ una base de $V$. Entonces, para cualquier $T \in \mathcal{L}(V)$ se cumple $\forall\, p \in \mathbb{N} : [T^p]_{B_V}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_V}\right)^p$. Si además, $T$ es un automorfismo, entonces $\forall\, p \in \mathbb{Z} : [T^p]_{B_V}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_V}\right)^p$.

# Matriz de paso o cambio de base

Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $B_1 := \{v_1, ..., v_n\}$, $B_2 := \{w_1, ..., w_n\}$ dos bases de $V$. Se define la transformación lineal $\tilde{I} : (V, B_1) \to (V, B_2)$ tal que $\forall\, v \in V \,:\, \tilde{I}(v) := v$. Se define la matriz de paso o de cambio de base de $B_1$ a $B_2$, denotada por $P_{B_1,B_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o $P_{B_1}^{B_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y definida como

$$P_{B_1}^{B_2} := P_{B_1,B_2} := \left[\tilde{I}\right]_{B_1}^{B_2} = \left([\tilde{I}(v_1)]_{B_2} \mid \cdots \mid [\tilde{I}(v_n)]_{B_2}\right) = \left([v_1]_{B_2} \mid \cdots \mid [v_n]_{B_2}\right) .$$

Como resultado, se cumple

$$\forall\, v \in V \,:\, P_{B_1,B_2}\,[v]_{B_1} = [v]_{B_2} .$$

Observación: $P_{B_1,B_2}$ es invertible (no singular), y $(P_{B_1,B_2})^{-1} = P_{B_2,B_1}$.

Ejemplo: Sean $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Determine la matriz de paso de $B_1$ a $B_2$.
2. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es el vector de coordenadas de una matrix $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respecto de la base $B_1$, determine $[A]_{B_2}$, sin calcular $A$.
3. Determine la matriz de paso de $B_2$ a $B_1$.

Propiedad importante: Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $\forall\, w \in \mathbb{K}^{n\times 1} \,:\, A\,w = B\,w$. Entonces $A = B$.

Demostración: Recordamos que la matriz identidad $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puede expresarse como $I_n = \left( e_1 \,|\, \ldots \,|\, e_n \right)$, donde $e_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ es el $j$-ésimo vector canónico de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. De esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} A = A\, I_n = A \left( e_1 \,|\, \ldots \,|\, e_n \right) &= \left( A\, e_1 \,|\, \ldots \,|\, A\, e_n \right) \\ &= \left( B\, e_1 \,|\, \ldots \,|\, B\, e_n \right) = B \left( e_1 \,|\, \ldots \,|\, e_n \right) = B\, I_n = B\,, \end{aligned}$$

y así se concluye el resultado.

## Resultado importante

Sean $V$ y $W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $B_V$, $B'_V$ bases de $V$, y $B_W$, $B'_W$ bases de $W$. Sea también $T \in \mathcal{L}(V, W)$. El objetivo es relacionar $[T]_{B_V}^{B_W}$ y $[T]_{B'_V}^{B'_W}$. Para esto, se recuerda que $\forall\, v \in V$ :

$$[T(v)]_{B'_W} = [T]_{B'_V}^{B'_W}\, [v]_{B'_V}\,. \tag{1}$$

$$[T(v)]_{B'_W} = P_{B_W}^{B'_W}\, [T(v)]_{B_W}\,. \tag{2}$$

$$[v]_{B'_V} = P_{B_V}^{B'_V}\, [v]_{B_V}\,. \tag{3}$$

$$[T(v)]_{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W}\, [v]_{B_V}\,. \tag{4}$$

De (4) en (2): $[T(v)]_{B'_W} = P_{B_W}^{B'_W}\, [T]_{B_V}^{B_W}\, [v]_{B_V}$.
De (3) en (1): $[T(v)]_{B'_W} = [T]_{B'_V}^{B'_W}\, P_{B_V}^{B'_V}\, [v]_{B_V}$.
De las dos últimas igualdades, se desprende:
$\forall\, [v]_{B_V} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ : $[T]_{B_V}^{B_W}\, [v]_{B_V} = \left(\left(P_{B_W}^{B'_W}\right)^{-1} [T]_{B'_V}^{B'_W}\, P_{B_V}^{B'_V}\right) [v]_{B_V}$. Luego, aplicando la propiedad importante previa, se concluye que $[T]_{B_V}^{B_W} = \left(P_{B_W}^{B'_W}\right)^{-1} [T]_{B'_V}^{B'_W}\, P_{B_V}^{B'_V}$.