# Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

# Tema Nº3: Números Complejos
# Clase N°23 - 30/05/2024

**Texto Guía:** Álgebra Primer Curso.

# Números Complejos

## Definición

Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el conjunto de todos los pares ordenados $(a, b)$ de números reales. Se definen en $\mathbb{C}$ dos operaciones binarias, suma $+$ y producto $\cdot$, dadas por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El conjunto $\mathbb{C}$ con estas dos operaciones se denomina **sistema de los números complejos**

# Números Complejos

Dadas las dos operaciones definidas, podemos deducir las siguientes propiedades:

C1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

# Números Complejos

Dadas las dos operaciones definidas, podemos deducir las siguientes propiedades:

C1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

C2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

C3. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 + 0 = z_1$, donde $0 = (0, 0)$

C4. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 + (-z_1) = 0$, donde $-z_1 = (-a, -b)$

C5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

# Números Complejos

Dadas las dos operaciones definidas, podemos deducir las siguientes propiedades:

C1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

C2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

C3. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 + 0 = z_1$, donde $0 = (0, 0)$

C4. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 + (-z_1) = 0$, donde $-z_1 = (-a, -b)$

C5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

C6. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

C7. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot 1 = z_1$, donde $1 = (1, 0)$

C8. $\forall z_1 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot z_1^{-1} = 1$, donde $z_1 \neq 0$.

C9. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

# Números Complejos

**Observaciones:**

1. Los números complejos con segunda componente nula se denominan **complejos reales**.

2. Los números complejos con primera componente nula se denominan **imaginarios puros**.

3. Dado un complejo $z = (a, b)$, se denominan parte real de $z$ a la primera componente y parte imaginaria a la segunda componente.

# Ejercicios

1. Calcule la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:
   (a) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}+5i$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

   (c) $7i-\left[\frac{(i-1)^6(i+1)^7}{i}\right]^2$
2. Dado un complejo $z=a+ib$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Considere la siguiente igualdad

$$2z=i(a-5)+\mathrm{Re}^2(z)+i\mathrm{Im}(z)$$

   Determine el o los $z$ que cumplen la igualdad.