UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS FUNCIONAL Y APLICACIONES I (525401)
TAREA 1. (Fecha de entrega: 31.08.2009)

Problema 1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función continua, $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que existe $K > 0$ tal que

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leq K|v - w| \quad \forall\, (t,v),(t,w) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Entonces para cualquier $\delta > 0$, el problema de valores iniciales:

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall\, t \in (t_0, t_0 + \delta) \qquad u(t_0) = u_0\,,$$

tiene una única solución $u \in C^1((t_0, t_0 + \delta)) \cap C([t_0, t_0 + \delta])$.

Problema 2. Sean $I := (t_0, t_0 + \delta)$, $f_j : \bar{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, ..., n\}$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
Hallar $\boldsymbol{u} := (u_1, \cdots, u_n)^t \in [C^1(I) \cap C(\bar{I})]^n$ tal que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_j}{dt}(t) &= f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \quad \forall\, t \in I \\ u_j(t_0) &= \tau_j \quad \forall\, j \in 1, ..., n\,, \end{aligned} \right.$$

donde t_0, $\delta > 0$ y τ_j, $j \in \{1, ..., n\}$ son constantes reales dadas. Suponga además que existe $C > 0$ tal que para cualquier $j \in \{1, ..., n\}$:

$$|f_j(t,z) - f_j(t,w)| \leq C\, ||z - w||_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall\, t \in \bar{I}\,.$$

Demuestre que el sistema propuesto tiene una única solución $\boldsymbol{u}(t)$ definida en $\bar{I}$.

Concepto de series en espacios normados. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y sea $\{v_n\}_{n\in I\!N} \subseteq X$ una sucesión en X. Definimos ahora, para cada $n \in I\!N$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} v_k \in X$. Se dice entonces que $\{s_n\}_{n\in I\!N}$ es una sucesión de sumas parciales de $\{v_n\}_{n\in I\!N}$. Ahora bien, en el caso que $\{s_n\}_{n\in I\!N}$ converge en X, a $s \in X$ por ejemplo, se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ es convergente (en X por supuesto) y se denota $s = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} ||v_k||$ converge en $\mathbb{R}$.

Problema 3. Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y $\{v_n\}_{n\in I\!N} \subseteq X$. Demuestre que $\{v_n\}_{n\in I\!N}$ es convergente (en X) si y sólo si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} s_n$, donde $s_1 := v_1$ y $s_n := v_n - v_{n-1}$ para $n \geq 2$, lo es también.

Problema 4. Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y $\{v_n\}_{n\in I\!N} \subseteq X$. Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en X si y sólo si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in I\!N$ tal que $\left\| \sum_{k=n}^{m} v_k \right\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq m \geq N$. Este resultado es conocido como la **Prueba de Cauchy**.

Problema 5. Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y $\{v_n\}_{n\in I\!N} \subseteq X$. Demuestre que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ es absolutamente convergente entonces converge en X.

Problema 6. Considere el espacio vectorial normado $C([-\pi,\pi])$ provisto de la norma usual $||f|| := \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. ¿Se puede decir algo sobre la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}\cos(kt)$? Justifique su respuesta.

Problema 7. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial con producto escalar, donde se verifica la propiedad:

$$||\lambda u + (1-\lambda)v|| = ||u|| \quad \forall\, u, v \in X \quad \forall\, \lambda \in [0,1]\,,$$

donde $||\cdot||$ es la norma inducida por el producto escalar dado. Deduzca que $u = v$.

Problema 8. Rehacer y/o adaptar, con lujo de detalles, la demostración del Teorema 4 en página 81 del texto:
Elements of the theory of functions and functional analysis, A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, Dover Publications,
para probar lo siguiente: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado, no vacío. Demuestre que el espacio vectorial real $L^2(\Omega)$, provisto del producto escalar usual

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega uv\right)^{1/2} \qquad \forall\, u, v \in L^2(\Omega)\,,$$

es completo (por tanto $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert).

Problema 9.(Teorema de Jordan von Neumann, 1935) Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado complejo satisfaciendo la Ley del paralelogramo:

$$\forall\, u, v \in X \;:\; ||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)\,.$$

Demuestre que la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ definida por

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i||u+iv||^2 - i||u-iv||^2\right) \quad \forall\, u, v \in X\,,$$

define un producto interior en X tal que $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ para todo $v \in X$. Averigue cómo sería la versión de este resultado en el caso real e indíquelo.

RBP/rbp 21.08.2009