

Listado 8

1. Encuentre el polinomio minimal de las siguientes matrices. Encuentre además su forma canónica de Jordan, junto con la base que la logra. Finalmente, calcule las potencias de A : A^n , dejándolas expresadas en función de n . Decida si son semejantes o no.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz junto con la base que la logra y su polinomio característico y su polinomio minimal. Calcule además las potencias de A : A^n , dejándolas expresadas en función de n .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Decida si son o no semejantes las siguientes matrices. En caso de serlo encuentre la matriz de cambio de base.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Pruebe que si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio minimal.

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y considere el operador $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por $T(M) = AM$.

- a) Calcule la matriz representante de T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Calcule el polinomio característico de T .
- c) Calcule el polinomio minimal de T .
- d) Demuestre que el polinomio minimal de A y el de T son el mismo, no así el polinomio característico.

6. Considere el siguiente operador lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 :

$$T(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2y, 5x + 5y + z)$$

- a) Calcule los valores propios de T .
- b) Para cada valor propio λ de T y cada $k \in \mathbb{N}$, determine $E_k(\lambda)$.
- c) Encuentre una base de \mathbb{R}^3 formada por elementos de los núcleos iterados de T y calcule la matriz representante de T respecto a esta base.
- d) Determine el polinomio minimal de T .