UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 6 ALGEBRA III 525201-0: Espacios vectoriales con producto interno. Diagonalización ortogonal/ortonormal. Forma canónica de Jordan. Aplicaciones.

1. Sea $A \in V := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalizable, y sea $\{v_k\}_{k=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ formada por vectores propios de A. Además, para cada $i \in \{1, ..., n\} : (\lambda_i, v_i)$ es un autopar de A. Se define ahora la aplicación lineal $L : V \to V$, tal que $V \ni B \mapsto L(B) := A\,B$. Sea $\{C_{ij}\}_{i,j=1}^n \subseteq V$ una familia finita de matrices de orden n, tal que dados $i, j \in \{1, ..., n\} : C_{ij}$ es tal que su j-ésima columna es el vector v_i, y las demás son nulas.
   (a) Pruebe que $\forall\, i, j \in \{1, ..., n\} : L(C_{ij}) = \lambda_i\, C_{ij}$.
   (b) Demuestre que L es diagonalizable, es decir, existe una base B de vectores propios de V. Exhiba dicha base, y la estructura de $[L]_B^B$.

2. Sea la matriz $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Es A diagonalizable? ¿lo es ortogonalmente? Determine en cada caso, si corresponde, la matriz que diagonaliza, y la matriz diagonal semejante con A.

3. Determinar todos los subespacios de $\mathbb{K}^2$ que sean invariantes respecto a la aplicación lineal:
   (a) $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $T(x, y) := (4x + 2y, -3x + 11y)$.
   (b) $L : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $L(x, y) := (-y, x)$.

   Hint: analizar los dos casos posibles para $\mathbb{K}$.

4. Para cada una de las matrices siguientes, diga (justificadamente) si es semejante a una matriz de Jordan (Forma canónica de Jordan) en $\mathbb{R}$. En caso de serlo, determne esta matriz de Jordan. Caso contrario, determine su forma canónica de Jordan compleja, y su forma canónica de Jordan real. Identifique en cada caso, los polinomios característicos y minimal de A, en el cuerpo complejo y real.

$$a)\ A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\ A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c)\ A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d)\ A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sea $B \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, cuya forma de Jordan es $J := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Determine el polinomio característico de B.
   (b) Determine los valores propios de B.
   (c) ¿Cuál es la multiplicidad geométrica y algebraica de estos valores propios?
   (d) ¿Cuántos espacios B-invariantes de dimensión 1 existen?
   (e) Determine la dimensión de todos los núcleos iterados de B.
   (f) Determine el polinomio minimal de B.

6. Aplique el Teorema de Cayley-Hamilton, para determinar
   (a) $A^3 - A2 + 2A - I$, siendo $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Además, determine A^{-1}, si existe.
   (b) A^{1000}, para $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Demuestre que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el conjunto de matrices $\{A^k\}_{k=0}^n$, es linealmente dependiente.
8. Determine todas las formas posibles de Jordan para una matriz cuyo polinomio característico es $p(\lambda) := (3-\lambda)^2\,(2+\lambda)^3$.
9. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que V admite una base formada por vectores propios de T si y sólo si el polinomio minimal de T no tiene raíces repetidas.
10. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejantes. Demuestre las siguientes implicaciones:
    (a) $\sigma(A) = \sigma(B)$, con igualdad de multiplicidad algebraica para cada valor propio.
    (b) Loa sucesión de núcleos iterados de A asociado a $\lambda \in \sigma(A)$ tienen la misma dimensión que la sucesión de núcleos iterados de B asociado al mismo $\lambda \in \sigma(B)$.

    Luego, demuestre que el recíproco también es cierto. Esto da una estrategia para identificar matrices semejantes.
11. Aplicando la equivalencia dada en el Ejercicio 10, determine si las siguientes parejas de matrices son o no semejantes:
$$a)\ A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$b)\ A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
    En caso hayan matrices semejantes, indique, si es posible la matriz de semejanza. Además, en cada caso, identifique los polinomios característico y minimal asociados a A y a B, respectivamente.
12. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demueste que T es un isomorfismo si y sólo si el término constante del polinomio minimal de $[T]_B^B$, en alguna base B de V, es no nulo.

    Importante: Una de las aplicaciones más relevantes de la descomposición de Jordan está relacionada con calcular la exponencial de una matriz cuadrada, i.e. la generalización de la función exponencial real para matrices. La matriz exponencial tiene utilidad en ciertos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Definición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se define la exponencial de A, denotada por e^A o también por $\exp(A)$, como aquella matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definida por la serie de potencias:
$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$
    Remark: para que la definición esté bien dada, ha de probarse primero que la serie indicada siempre converge en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Asumiremos que esto es cierto, pues su demostración escapa a los contenidos del curso.

    Evidentemente, no es recomendable aplicar ciegamente la definición entregada para el cálculo de la exponencial de una matriz. Conviene tener en cuenta las siguientes propiedades.
13. Sean $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cualesquiera. Demuestre que
    (a) Si C es no singular, entonces $\mathrm{e}^{CBC^{-1}} = C\,\mathrm{e}^B\,C^{-1}$.
    (b) Si $BC = CB$, entonces es válido el Teorema del Binomo para calcular $(B+C)^s$, para cualquier $s \in \mathbb{N}$. Esto permite deducir $\mathrm{e}^{B+C} = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^C = \mathrm{e}^C\,\mathrm{e}^B$.
    (c) Si B es matriz diagonal, $B := \mathrm{diag}(\mathrm{b}_1, ..., \mathrm{b}_\mathrm{n})$, entonces $\mathrm{e}^B = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{b_1}, ..., \mathrm{e}^{b_n})$.
    (d) Si B es matriz diagonal por bloques, i.e. $B := \mathrm{diag}(B_1, ..., B_m) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donde $\forall\, j \in \{1, ..., m\} : B_j$ es cuadrada, entonces $\mathrm{e}^B = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{B_1}, ..., \mathrm{e}^{B_m})$.
14. Aplicación: Determine la matriz exponencial de las siguientes matrices.
$$a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
    Hint: deducir la forma canónica de Jordan, J, en cada caso. Luego descomponer $J = D + N$, donde $D := \mathrm{diag}(J)$ (matriz diagonal asociada a J). Luego, aplique las propiedades indicadas en el Ejercicio 13. Tener presente que la matriz N resulta ser Nilpotente, lo cual significa que $\exists\, s \in \mathbb{N} : N^s = \Theta$.

RBP/rbp 09.07.2020