



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

---

**Tarea 1**  
ANÁLISIS NUMÉRICO III

---

*Integrantes*

DANAEL ORELLANA  
FRANCISCA CASTRO  
BRAYAN SANDOVAL

*Profesor*  
RAIMUND BÜRGER

*Fecha*  
26 DE ABRIL DE 2022

**Problema 1.** Aplicar el método de Euler explícito, el método de trazado poligonal mejorado y el método de trazado poligonal modificado al problema:

$$y' = y + x^2 - 3, \quad y(0) = 3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

para calcular tres diferentes aproximaciones a  $y(1)$  usando (i)  $h = 0,1$  (ii)  $h = 0,025$ . Comparar el resultado con la solución exacta.

## Solución

El método de Euler tiene la forma:

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

donde:

$$f(x, y) = y + x^2 - 3 \quad y_0 = 3 \quad a = 0 \quad b = 1$$

Comenzamos utilizando  $h = 0,1$

$$h = \frac{b - a}{N} \implies 0,1 = \frac{1 - 0}{N} \iff N = 10$$

Donde el método de Euler con  $h = 0,1$  se expresa:

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 9 \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + 0,1(y_i^h + x_i^2 - 3) \end{aligned}$$

Análogo al caso anterior, consideremos  $h = 0,025$

$$h = \frac{b - a}{N} \implies 0,025 = \frac{1 - 0}{N} \iff N = 40$$

Con el método de Euler

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 39 \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + 0,025(y_i^h + x_i^2 - 3) \end{aligned}$$

El código de Matlab que se tiene para  $h = 0,1$  con el método de Euler Explícito es:

```

1 ysol = @(x) [-x^2 - 2*x + 1 + 2*exp(x)];
2 f = @(x,y) [y + x^2 - 3];
3 y0 = 3;a = 0;b = 1;
4 % h = 0.1
5 h = 0.1;
6 x = a:h:b;
7 y1 = [];
8 y1(1) = y0;
9 % Euler explícito
10 for i = 2:length(x)
11     y1(i) = y1(i-1) + h*f(x(i-1),y1(i-1));
12 end
13 fplot(ysol)
14 hold on

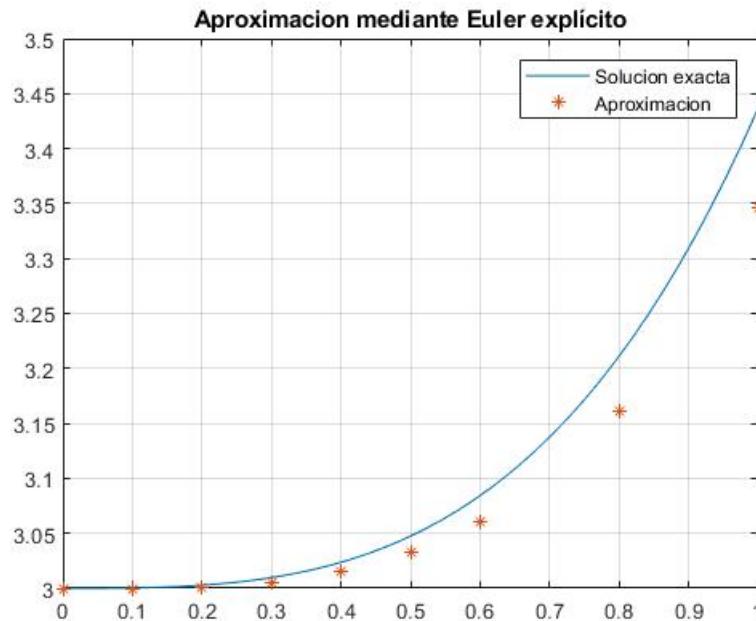
```

```

15 plot(x,y1,'*')
16 grid on
17 legend('Solucion exacta','Aproximacion')
18 title('Aproximacion mediante Euler expl cito')
19 ylim([3,3.5]);
20 xlim([0,1]);
21 hold off

```

Que entregó el gráfico:



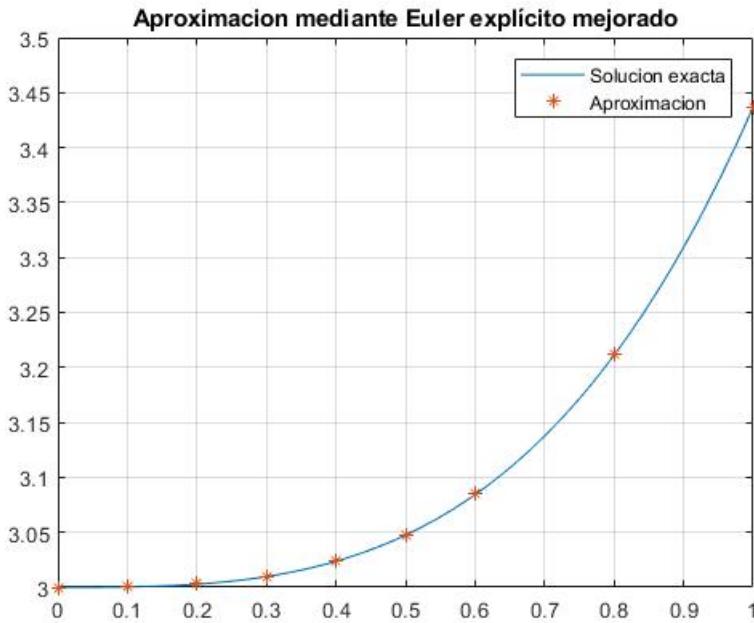
Luego, teniendo en cuenta que tenemos los mismos valores que para Euler Explícito, el código para el método mejorado es:

```

1 % Mejorado
2 y = [];
3 y(1) = y0;
4 for i = 2:length(x)
5     y(i) = y(i-1) + (h/2)*(f(x(i-1),y(i-1)) + f(x(i),y(i-1) + h*f(x(i-1),y(i-1))));
6 end
7 fplot(y)
8 hold on
9 plot(x,y,'*')
10 grid on
11 legend('Solucion exacta','Aproximacion')
12 title('Aproximacion mediante Euler expl cito mejorado')
13 ylim([3,3.5]);
14 xlim([0,1]);
15 hold off

```

Donde su gráfico es:



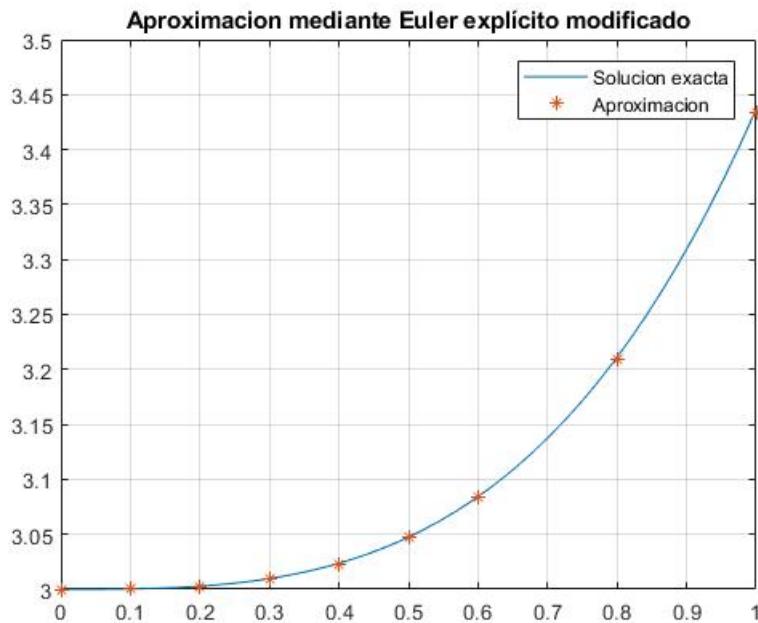
Por último para  $h = 0,1$  se tiene el siguiente código con el método modificado:

```

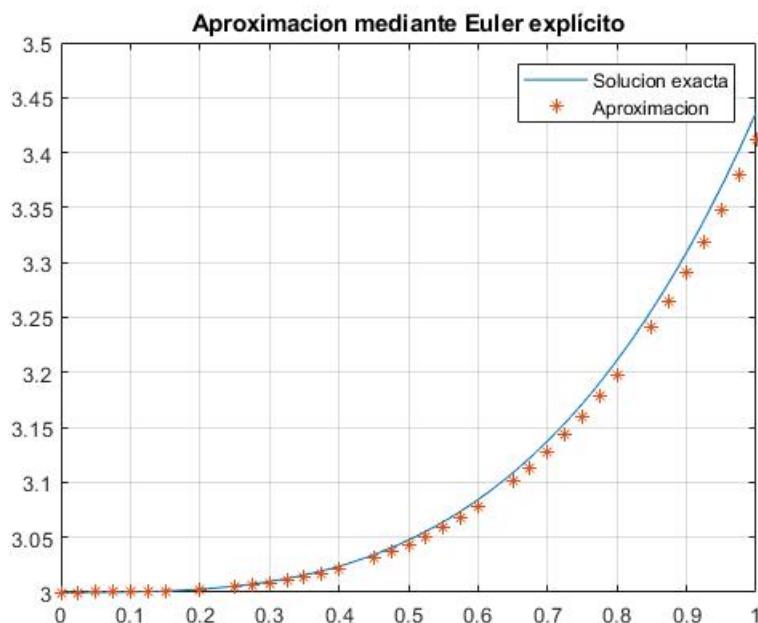
1 % Modificado
2 y2 = [];
3 y2(1) = y0;
4 for i = 2:length(x)
5     y2(i) = y2(i-1) + h*f(x(i-1) + h/2,y(i-1) + (h/2)*f(x(i-1),y(i-1)));
6 end
7 fplot(y2)
8 hold on
9 plot(x,y2,'*')
10 grid on
11 legend('Solucion exacta','Aproximacion')
12 title('Aproximacion mediante Euler expl cito modificado')
13 ylim([3,3.5]);
14 xlim([0,1]);
15 hold off

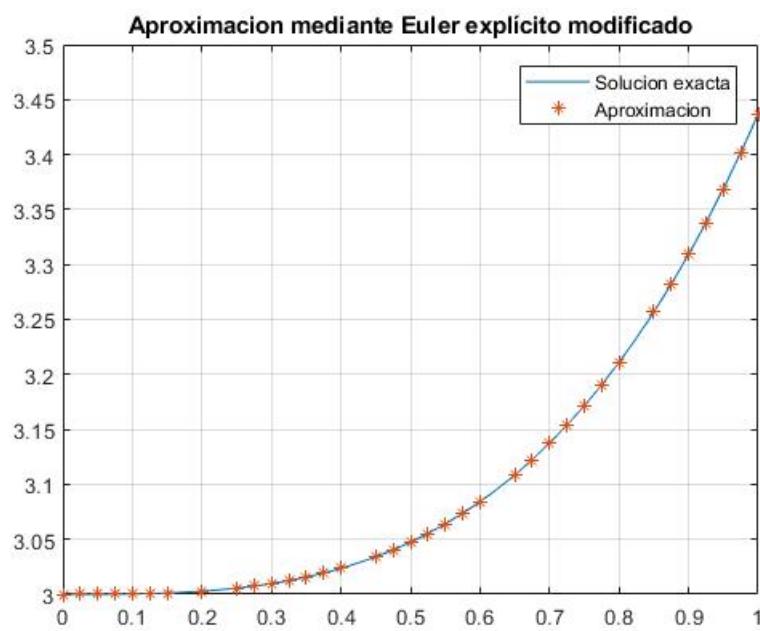
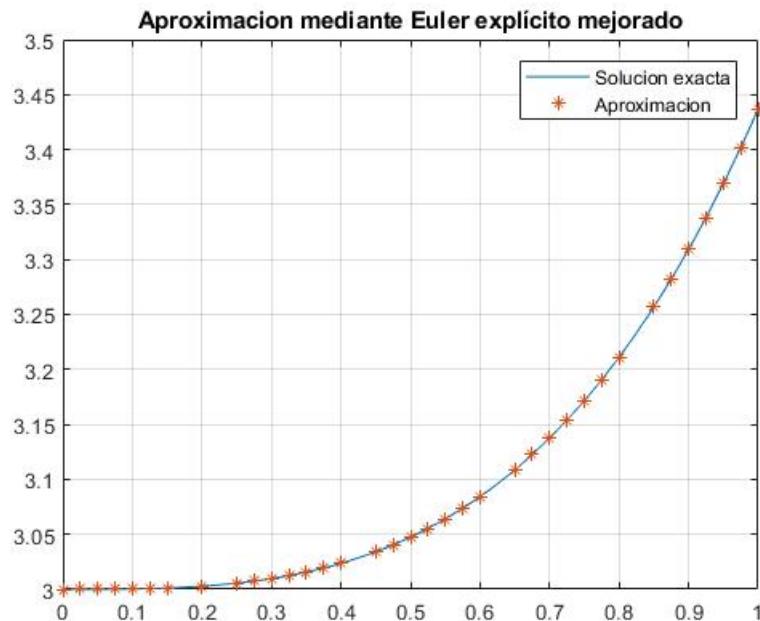
```

Y su gráfico correspondiente es:



Luego se calcula con el valor de  $h = 0,025$  de la misma manera que para el valor anterior pero que entrega los siguientes gráficos:





**Problema 2.**

- a) Demostrar que el orden de consistencia del método de Heun

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

y del método clásico de Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

es  $p = 3$  y  $p = 4$ , respectivamente.

**Solución:**

En primer lugar, notemos que el método de Heun tiene la siguiente forma

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h\Phi(x_i, y_i^h; h)$$

Donde

$$\begin{aligned} \Phi(x_i, y_i^h; h) &= \left( \frac{1}{6}k_1^{(i)} + \frac{2}{3}k_2^{(i)} + \frac{1}{6}k_3^{(i)} \right) \\ k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i^h) \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right) \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + h, y_i^h + 2\left(-k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right)\right) \end{aligned}$$

Considerando lo anterior lo que se debe demostrar es lo que sigue

$$\rho(x, y(x); h) := \frac{1}{h}(y(x+h) - y(x)) - \Phi(x_i, y_i^h; h) = \mathcal{O}(h^3)$$

Para poder demostrar esto primero encontraremos el desarrollo en series de Taylor de  $y$  con respecto a  $h$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

Pero

$$\begin{aligned} y' &= f \\ y'' &= \frac{d}{dx}f = f_x + f_y \cdot f \\ y''' &= \frac{d}{dx}[f_x + f_y \cdot f] = f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 \cdot f_{yy} + f_y(f_x + f_y \cdot f) \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior se tiene

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2} [f_x + f_y \cdot f] + \frac{h^3}{6} [f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 \cdot f_{yy} + f_y (f_x + f_y \cdot f)] + \mathcal{O}(h^4)$$

Lo anterior se puede reescribir como sigue

$$\frac{1}{h} (y(x+h) - y(x)) = f + \frac{h}{2} [f_x + f_y \cdot f] + \frac{h^2}{6} [f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 \cdot f_{yy} + f_y (f_x + f_y \cdot f)] + \mathcal{O}(h^3)$$

Ahora buscaremos el desarrollo de Taylor en 2 variables para  $f$  respecto a  $(h, k)$

$$f(x+h, y+k) = f + f_x h + f_y k + \frac{1}{2} [f_{xx} h^2 + f_{yy} k^2] + f_{xy} kh + \mathcal{O}(h^2, k^2)$$

Considerando  $h = \frac{h}{2}$  y  $k = \frac{h}{2}f$ , se tiene

$$k_2 = f \left( x+h, y + \frac{h}{2}f \right) = f + f_x \frac{h}{2} + \frac{h}{2}f \cdot f_y + \frac{1}{2} \left[ f_{xx} \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} f^2 \cdot f_{yy} \right] + \frac{h^2}{4} f \cdot f_{xy} + \mathcal{O}(h^2, h^2)$$

Considerando  $h = h$  y  $k = h (-f + f(x+h, y+\frac{h}{2}f)) = h (-f + k_2)$ , se tiene

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x+h, y+h(-f+k_2)) \\ &= f + f_x h + h f_y (-f+k_2) + \frac{1}{2} [f_{xx} h^2 + f_{yy} h^2 (-f+k_2)^2] + f_{xy} h^2 (-f+k_2) + \mathcal{O}(h^2, h^2) \end{aligned}$$

Juntando todo se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(x, y(x); h) &= f + \frac{h}{2} [f_x + f_y \cdot f] + \frac{h^2}{6} [f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 \cdot f_{yy} + f_y (f_x + f_y \cdot f)] + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - \frac{1}{6} f - \frac{2}{3} \left[ f + f_x \frac{h}{2} + \frac{h}{2} f \cdot f_y + \frac{1}{2} \left[ f_{xx} \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} f^2 \cdot f_{yy} \right] + \frac{h^2}{4} f \cdot f_{xy} + \mathcal{O}(h^2, h^2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[ f + f_x h + h f_y (-f+k_2) + \frac{1}{2} [f_{xx} h^2 + f_{yy} h^2 (-f+k_2)^2] \right. \\ &\quad \left. + f_{xy} h^2 (-f+k_2) + \mathcal{O}(h^2, h^2) \right] \\ &= \frac{h^2}{3} f_{xy} \cdot f + \frac{h^2}{6} f_y f_x + \frac{h^2}{6} f_y^2 \cdot f + \frac{h}{3} f \cdot f_y - \frac{h}{6} f_y k_2^2 \\ &\quad - \frac{h^2 k_2}{12} f_{yy} + \frac{1}{6} f_{yy} \cdot f h^2 k_2 - \frac{f_{xy} h^2 k_2}{6} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Notar que los elementos restantes están siendo multiplicados por  $h$ , así para  $h$  suficientemente pequeño esos valores se irán a cero, por lo que se pueden considerar parte de  $\mathcal{O}(h^3)$ . Por tanto, se tiene que el método de Heun tiene orden de consistencia  $p = 3$ .

- b) Verifique que los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton efectivamente poseen los ordenes de consistencia señalados en los marcos (páginas 23 y 24).

**Solución:**

- Métodos de Adams-Bashforth
  - $p = 0$ , Euler explícito. El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h)$$

Luego, el error de truncación viene dado por

$$\begin{aligned}\rho(x, y(x); h) &= \frac{1}{h} (y(x+h) - y(x)) - \Phi(x, y(x); h) \\ &= \frac{1}{h} (y(x+h) - y(x)) - f(x, y(x)) = \mathcal{O}(h)\end{aligned}$$

Lo anterior se debe a que

$$\begin{aligned}y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) \iff \frac{1}{h} [y(x+h) - y(x)] &= y'(x) + \mathcal{O}(h) \\ &= f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h)\end{aligned}$$

Por lo que el método de Adams-Bashforth con  $p = 0$  es consistente de primer orden.

- $p = 1$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h \left( \frac{3}{2}f(x_i, y_i) - \frac{1}{2}f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right)$$

El cual se puede reescribir como

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i y_{i-1}^h = \sum_{i=0}^2 \beta_i f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1 \\ \beta_0 &= -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = 0.\end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= -\xi + \xi^2 \\ \sigma(\xi) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi\end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

◊  $j = 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(-1 + 2\xi) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \wedge \rho_2(1) = 1\sigma_1(1)$$

Por tanto el método es al menos consistente de primer orden.

◊  $j = 2$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) &= \xi(-1 + 4\xi) \implies \rho_3(1) = 3 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(\frac{3}{2}\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1)$$

Por tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

◊  $j = 3$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi(-1 + 8\xi) \implies \rho_4(1) = 7 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(\frac{3}{2}\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) \neq 3\sigma_3(1)$$

Por tanto el método no es consistente de tercer orden.

Por teorema 1.3 se deduce que el método de Adams-Bashforth tiene consistencia de segundo orden.

○  $p = 2$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h \left( \frac{23}{12}f(x_i, y_i) - \frac{16}{12}f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{5}{12}f(x_{i-2}, y_{i-2}) \right)$$

El cual se puede reescribir como

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i y_{i-2}^h = \sum_{i=0}^3 \beta_i f(x_{i-2}, y_{i-2})$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1 \\ \beta_0 &= \frac{5}{12}, \quad \beta_1 = -\frac{16}{12}, \quad \beta_2 = \frac{23}{12}, \quad \beta_3 = 0.\end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \\ \sigma(\xi) &= \frac{5}{12} - \frac{16}{12}\xi + \frac{23}{12}\xi^2\end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

$$\diamond \quad j = 1$$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(-2\xi + 3\xi^2) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \quad \wedge \quad \rho_2(1) = 1 = \sigma_1(1)$$

Por tanto el método es al menos consistente de primer orden.

$$\diamond \quad j = 2$$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) &= \xi(-4\xi + 9\xi^2) \implies \rho_3(1) = 5 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(-\frac{16}{12} + \frac{46}{12}\xi\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{30}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1) = 5$$

Por tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

$$\diamond \quad j = 3$$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi(-8 + 27\xi^2) \implies \rho_4(1) = 19 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(\frac{-16}{12} + \frac{92}{12}\xi\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{76}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) = 3\sigma_3(1) = 19$$

Por tanto el método es al menos consistente de tercer orden.

$$\diamond \quad j = 4$$

$$\begin{aligned}\rho_5(\xi) &= \xi(-8 + 81\xi^2) \implies \rho_5(1) = 73 \\ \sigma_4(\xi) &= \xi\left(\frac{-16}{12} + \frac{184}{12}\xi\right) \implies \sigma_4(1) = \frac{168}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_5(1) = 73 \neq 56 = 4\sigma_4(1)$$

Por tanto el método no es consistente de cuarto orden.

Por teorema 1.3 se deduce que el método de Adams-Bashforth tiene consistencia de segundo orden.

- $p = 3$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h \left( \frac{55}{24}f(x_i, y_i) - \frac{59}{24}f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{37}{24}f(x_{i-2}, y_{i-2}) - \frac{9}{24}f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right)$$

El cual se puede reescribir como

$$\sum_{i=0}^4 \alpha_i y_{i-3}^h = \sum_{i=0}^4 \beta_i f(x_{i-3}, y_{i-3})$$

Donde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = 1 \\ \beta_0 &= -\frac{9}{24}, \quad \beta_1 = \frac{37}{24}, \quad \beta_2 = -\frac{59}{24}, \quad \beta_3 = \frac{55}{24}, \quad \beta_4 = 0. \end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguiente polinomios

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -\xi^3 + \xi^4 \\ \sigma(\xi) &= -\frac{9}{24} + \frac{37}{24}\xi - \frac{59}{24}\xi^2 + \frac{55}{24}\xi^3 \end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

$$\diamond \quad j = 1$$

$$\begin{aligned} \rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(-3\xi^2 + 4\xi^3) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1 \end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \quad \wedge \quad \rho_2(1) = 1\sigma_1(1)$$

Por tanto el método es al menos consistente de primer orden.

$$\diamond \quad j = 2$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\xi) &= \xi(-9\xi^2 + 16\xi^3) \implies \rho_3(1) = 7 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(\frac{37}{24} - \frac{118}{24}\xi + \frac{165}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{84}{24} \end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1) = 7$$

Por tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

◇  $j = 3$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi(-27\xi^2 + 64\xi^3) \implies \rho_4(1) = 37 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(\frac{37}{24} - \frac{236}{24}\xi + \frac{495}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{296}{24}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) = 3\sigma_3(1) = 37$$

Por tanto el método es al menos consistente de tercer orden.

◇  $j = 4$

$$\begin{aligned}\rho_5(\xi) &= \xi(-81\xi^2 + 256\xi^3) \implies \rho_5(1) = 175 \\ \sigma_4(\xi) &= \xi\left(\frac{37}{24} - \frac{472}{24}\xi + \frac{1485}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_4(1) = \frac{1050}{24}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_5(1) = 4\sigma_4(1) = 175$$

Por tanto el método es al menos consistente de cuarto orden.

◇  $j = 5$

$$\begin{aligned}\rho_6(\xi) &= \xi(-243\xi^2 + 1024\xi^3) \implies \rho_6(1) = 781 \\ \sigma_5(\xi) &= \xi\left(\frac{37}{24} - \frac{944}{24}\xi + \frac{4455}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_5(1) = \frac{3548}{24}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_6(1) = 781 \neq 739 = 5\sigma_5(1)$$

Por tanto el método es al menos consistente de cuarto orden.

Por teorema 1.3 se deduce que el método de Adams-Bashforth tiene consistencia de segundo orden.

Por tanto se tiene que los métodos Adams-Bashforth efectivamente poseen los ordenes de consistencia señalados en los marcos.

■ métodos Adams-Moulton

- $p = -1$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^h)$$

El cual se puede ver como

$$\sum_{i=0}^1 \alpha_i y_i^h = h \sum_{i=0}^1 \beta_i f(x_i, y_i)$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -1, \quad \alpha_1 = 1 \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_1 = 1.\end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= -1 + \xi \\ \sigma(\xi) &= \xi\end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

- $j = 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) = \xi(1) &\implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \wedge \rho_2(1) = 1 \sigma_1(1) = 1$$

Por lo tanto el método es al menos consistente de primer orden.

- $j = 2$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) = \xi(1) &\implies \rho_3(1) = 1 \\ \sigma_2(\xi) = \xi(1) &\implies \sigma_2(\xi) = 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_2(1) = 1 \neq 2 = 2\sigma_2(1)$$

Por lo tanto el método es consistente de primer orden.

- $p = 0$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i))$$

El cual se puede ver como

$$\sum_{i=0}^1 \alpha_i y_i = h \sum_{i=0}^1 \beta_i f(x_i, y_i)$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -1, \quad \alpha_1 = 1 \\ \beta_0 = \beta_1 &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= -1 + \xi \\ \sigma(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

- $j = 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(1) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \wedge \rho_2(1) = 1 \sigma_1(1) = 1$$

Por lo tanto el método es al menos consistente de primer orden.

- $j = 2$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) &= \xi(1) \implies \rho_3(1) = 1 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(\frac{1}{2}\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1) = 1$$

Por lo tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

- $j = 3$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi(1) \implies \rho_4(1) = 1 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(\frac{1}{2}\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4 = 1 \neq \frac{3}{2} = 3\sigma_3(1)$$

Por lo tanto el método es consistente de segundo orden.

- $p = 1$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h \left( \frac{5}{12}f(x_{i+1}, y_{i+1}^h) + \frac{8}{12}f(x_i, y_i^h) - \frac{1}{12}f(x_{i-1}, y_{i-1}^h) \right)$$

El cual se puede ver como

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i y_{i-1}^h = h \sum_{i=0}^2 \beta_i f(x_{i-1}, y_{i-1}^h)$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1 \\ \beta_0 &= -\frac{1}{12}, \quad \beta_1 = \frac{8}{12}, \quad \beta_2 = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}\rho(\xi) &= -\xi + \xi^2 \\ \sigma(\xi) &= -\frac{1}{12} + \frac{8}{12}\xi + \frac{5}{12}\xi^2\end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi\rho'_j(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi\sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

- o  $j = 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(-1 + 2\xi) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1\end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \quad \wedge \quad \rho_2(1) = 1 \quad \sigma_1(1) = 1$$

Por tanto el método es al menos consistente de primer orden.

- o  $j = 2$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) &= \xi(-1 + 4\xi) \implies \rho_3(1) = 3 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(\frac{8}{12} + \frac{10}{12}\xi\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{18}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1) = 3$$

Por tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

- o  $j = 3$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi(-1 + 8\xi) \implies \rho_4(1) = 7 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(\frac{8}{12} + \frac{20}{12}\xi\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{28}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) = 4\sigma_3(1) = 7$$

Por tanto el método es al menos consistente de tercer orden.

- o  $j = 4$

$$\begin{aligned}\rho_5(\xi) &= \xi(-1 + 16\xi) \implies \rho_5(1) = 15 \\ \sigma_4(\xi) &= \xi\left(\frac{8}{12} + \frac{40}{12}\xi\right) \implies \sigma_4(1) = \frac{48}{12}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_5(1) = 15 \neq 16 = 4\sigma_4(1)$$

Por tanto el método es consistente de tercer orden.

- $p = 2$ . El método viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h \left( \frac{9}{24} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{19}{24} f(x_i, y_i) - \frac{5}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) \right)$$

El cual se puede ver como

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i y_{i-2}^h = h \sum_{i=0}^3 \beta_i f(x_{i-2}, y_{i-2})$$

Donde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1 \\ \beta_0 &= \frac{1}{24}, \quad \beta_1 = -\frac{5}{24}, \quad \beta_2 = \frac{19}{24}, \quad \beta_3 = \frac{9}{24}. \end{aligned}$$

Luego, se tienen los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \\ \sigma(\xi) &= \frac{1}{24} - \frac{5}{24}\xi + \frac{19}{24}\xi^2 + \frac{9}{24}\xi^3 \end{aligned}$$

Además, se define

$$\rho_1(\xi) = \rho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) = \sigma(\xi), \quad \rho_{j+1}(\xi) = \xi \rho'_j(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) = \xi \sigma'_j(\xi), \quad j \in \mathbb{N}$$

Ahora aplicaremos el teorema 1.3 para probar el orden de consistencia del método

$$\circ \quad j = 1$$

$$\begin{aligned} \rho_1(1) &= -1 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi(-2\xi + 3\xi^2) \implies \rho_2(1) = 1 \\ \sigma_1(1) &= 1 \end{aligned}$$

Así

$$\rho_1(1) = 0 \quad \wedge \quad \rho_2(1) = 1 \quad \sigma_1(1) = 1$$

$$\circ \quad j = 2$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\xi) &= \xi(-4\xi + 9\xi^2) \implies \rho_3(1) = 5 \\ \sigma_2(\xi) &= \xi\left(-\frac{5}{24} + \frac{38}{24}\xi + \frac{27}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_2(1) = \frac{60}{24} \end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1) = 5$$

Por tanto el método es al menos consistente de segundo orden.

$$\circ \quad j = 3$$

$$\begin{aligned} \rho_4(\xi) &= \xi(-8\xi + 27\xi^2) \implies \rho_4(1) = 19 \\ \sigma_3(\xi) &= \xi\left(-\frac{5}{24} + \frac{76}{24}\xi + \frac{81}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_3(1) = \frac{152}{24} \end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) = 3\sigma_3(1) = 19$$

Por tanto el método es al menos consistente de tercer orden.

o  $j = 4$

$$\begin{aligned}\rho_5(\xi) &= \xi(-16\xi + 81\xi^2) \implies \rho_4(1) = 65 \\ \sigma_4(\xi) &= \xi\left(-\frac{5}{24} + \frac{152}{24}\xi + \frac{243}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_4(1) = \frac{390}{24}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_5(1) = 4\sigma_4(1) = 65$$

Por tanto el método es al menos consistente de cuarto orden.

o  $j = 5$

$$\begin{aligned}\rho_6(\xi) &= \xi(-32\xi + 243\xi^2) \implies \rho_4(1) = 211 \\ \sigma_4(\xi) &= \xi\left(-\frac{5}{24} + \frac{304}{24}\xi + \frac{729}{24}\xi^2\right) \implies \sigma_4(1) = \frac{1028}{24}\end{aligned}$$

Así

$$\rho_6(1) = 211 \neq \frac{5140}{24} = 5\sigma_5(1)$$

Por tanto el método es consistente de cuarto orden.

Por tanto se tiene que los métodos de Adams-Moulton efectivamente poseen los ordenes de consistencia señalados en los marcos.

**Problema 3.** Supongamos que la función  $f = f(x, y)$  satisface una condición de Lipschitz con respecto a  $y$  con la constante  $L$ . Demostrar que el método clásico de Runge-Kutta, aplicado al PVI de la EDO

$$y' = f(x, y), \quad x > 0; \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

satisface las suposiciones del Teorema 1.1. (Aviso: demostrar sucesivamente que las cantidades  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  son Lipschitz-continuas con respecto a  $y$ .)

### Demostración

Se define la función

$$\Phi(x_i, y_i^h; h) = \frac{1}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right),$$

donde

$$\begin{aligned}k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i^h), \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right) \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_2^{(i)}\right) \\ k_4^{(i)} &= f\left(x_{i+1}, y_i^h + hk_3^{(i)}\right)\end{aligned}$$

A continuación probaremos que  $\Phi$  es Lipschitz-continua en  $y_i^h$ , para esto probaremos que  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  son Lipschitz-continuas con respecto a  $y_i^h$ .

- $k_1^{(i)}$ .

Notemos que  $k_1^{(i)}$  es Lipschitz-continua pues

$$|k_1^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)}| = |f(x_i, y_i^h) - f(x_i, \tilde{y}_i^h)| \leq L|y_i^h - \tilde{y}_i^h|$$

- $k_2^{(i)}$ .

Sea  $y_i^h, \tilde{y}_i^h \in I$ , además sea  $x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} |k_2^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}| &= \left| f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right) - f\left(x_i + \frac{h}{2}, \tilde{y}_i^h + \frac{h}{2}\tilde{k}_1^{(i)}\right) \right| \\ &\leq L \left| y_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)} - \tilde{y}_i^h - \frac{h}{2}\tilde{k}_1^{(i)} \right| \\ &= L \left| y_i^h - \tilde{y}_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)} - \frac{h}{2}\tilde{k}_1^{(i)} \right| \\ &= L \left| (y_i^h - \tilde{y}_i^h) + \frac{h}{2}(k_1^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)}) \right| \\ &\leq L|y_i^h - \tilde{y}_i^h| + L\frac{h}{2}|k_1^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)}| \\ &\leq L|y_i^h - \tilde{y}_i^h| + LL\frac{h}{2}|y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\ &= \underbrace{\left( \frac{2L + L^2h}{2} \right)}_{L_1} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\ &= L_1 |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \end{aligned}$$

- $k_3^{(i)}$ .

Sea  $y_i^h, \tilde{y}_i^h \in I$ , además sea  $x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} |k_3^{(i)} - \tilde{k}_3^{(i)}| &= \left| f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_2^{(i)}\right) - f\left(x_i + \frac{h}{2}, \tilde{y}_i^h + \frac{h}{2}\tilde{k}_2^{(i)}\right) \right| \\ &\leq L \left| y_i^h + \frac{h}{2}k_2^{(i)} - \tilde{y}_i^h - \frac{h}{2}\tilde{k}_2^{(i)} \right| \\ &= L \left| y_i^h - \tilde{y}_i^h + \frac{h}{2}k_2^{(i)} - \frac{h}{2}\tilde{k}_2^{(i)} \right| \\ &= L \left| (y_i^h - \tilde{y}_i^h) + \frac{h}{2}(k_2^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}) \right| \\ &\leq L|y_i^h - \tilde{y}_i^h| + L\frac{h}{2}|k_2^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}| \\ &\leq L|y_i^h - \tilde{y}_i^h| + LL_1\frac{h}{2}|y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\ &= \underbrace{\left( \frac{2L + LL_1h}{2} \right)}_{L_2} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\ &= L_2 |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \end{aligned}$$

- $k_4^{(i)}$ .

Sea  $y_i^h, \tilde{y}_i^h \in I$ , además sea  $x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
|k_4^{(i)} - \tilde{k}_4^{(i)}| &= \left| f\left(x_{i+1}, y_i^h + hk_3^{(i)}\right) - f\left(x_{i+1}, \tilde{y}_i^h + h\tilde{k}_3^{(i)}\right) \right| \\
&\leq L \left| y_i^h + hk_3^{(i)} - \tilde{y}_i^h - h\tilde{k}_3^{(i)} \right| \\
&= L \left| y_i^h - \tilde{y}_i^h + hk_3^{(i)} - h\tilde{k}_3^{(i)} \right| \\
&\leq L |y_i^h - \tilde{y}_i^h| + Lh |k_3^{(i)} - \tilde{k}_3^{(i)}| \\
&\leq L |y_i^h - \tilde{y}_i^h| + hLL_2 |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\
&= \underbrace{(L + hLL_2)}_{L_3} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\
&= L_3 |y_i^h - \tilde{y}_i^h|
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que las cantidades  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ , son Lipschitz-continua con respecto a  $y$ . Ahora veamos que  $\Phi(x_i, y_i^h; h)$  es Lipschitz-continua con respecto a  $y_i^h$ . Sea  $y_i^h, \tilde{y}_i^h \in I$ , además sea  $x > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
|\Phi(x_i, y_i^h) - \Phi(x_i, \tilde{y}_i^h)| &\leq \left| \frac{1}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right) - \frac{1}{6} \left( \tilde{k}_1^{(i)} + 2\tilde{k}_2^{(i)} + 2\tilde{k}_3^{(i)} + \tilde{k}_4^{(i)} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{6} \left| k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)} - 2\tilde{k}_2^{(i)} - 2\tilde{k}_3^{(i)} - \tilde{k}_4^{(i)} \right| \\
&= \frac{1}{6} \left| (k_1^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)}) + 2(k_2^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}) + 2(k_3^{(i)} - \tilde{k}_3^{(i)}) + (k_4^{(i)} - \tilde{k}_4^{(i)}) \right| \\
&\leq \frac{1}{6} |k_1^{(i)} - \tilde{k}_1^{(i)}| + \frac{2}{6} |k_2^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}| + \frac{2}{6} |k_3^{(i)} - \tilde{k}_3^{(i)}| + \frac{1}{6} |k_4^{(i)} - \tilde{k}_4^{(i)}| \\
&\leq \frac{1}{6} L |y_i^h - \tilde{y}_i^h| + L_1 \frac{2}{6} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| + L_2 \frac{2}{6} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| + L_3 \frac{1}{6} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\
&= \underbrace{\left( \frac{L + 2L_1 + 2L_2 + L_3}{6} \right)}_{\hat{L}} |y_i^h - \tilde{y}_i^h| \\
&= \hat{L} |y_i^h - \tilde{y}_i^h|
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Phi$  es Lipschitz-continua respecto a  $y_i^h$ , entonces  $\Phi$  es continua en  $y_i^h$ . Además se tiene que  $\Phi$  es continua en  $x_i$  ya que  $\Phi$  esta compuesta por la suma de funciones continuas en  $x_i$ , así  $\Phi$  satisface la hipótesis de continuidad. También se sabe por el problema 2 de la presente tarea que el método de Runge-Kutta es consistente de orden 4. Por tanto El método satisface las hipótesis del teorema 1.1, entonces el método de Runge-Kutta converge del orden 4.

**Problema 4.** Resolver numéricamente el problema

$$y(x) + y''(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{(x + 2)^3}, \quad x \in [1, 5]; \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 3/4$$

utilizando el método de Euler implícito con  $h = 0,5, h = 0,25, h = 0,1$  y  $h = 0,025$ . Comparar con la solución exacta. ¿Los resultados numéricos confirman que el método es de primer orden?

### Solución:

Dado que se la EDO del problema es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, se necesitara hacer un cambio de variable para poder transformarla en un sistema de EDO de primer orden, dicho cambio de variable es

$$\begin{aligned}y_1(x) &= y(x) \\y_2(x) &= y'(x)\end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned}y'_1(x) &= y'(x) = y_2(x) \\y'_2(x) &= y''(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{(x+2)^3} - y_1(x)\end{aligned}$$

De esta forma el sistema en forma matricial viene dada:

$$\begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2 + 4x + 6}{(x+2)^3} \end{pmatrix}$$

El método de Euler implícito para este problema es:

$$\begin{aligned}y_{1,i+1}^h &= y_{1,i}^h + hy_{2,i+1}^h; \\y_{2,i+1}^h &= y_{2,i}^h - hy_{1,i+1}^h + \frac{x_{i+1}^2 + 4x_{i+1} + 6}{(x_{i+1} + 2)^3}; \quad i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Reescribiendo el método:

$$\mathbf{A}(h) \begin{pmatrix} y_{1,i+1}^h \\ y_{2,i+1}^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,i}^h \\ y_{2,i}^h + \frac{x_{i+1}^2 + 4x_{i+1} + 6}{(x_{i+1} + 2)^3} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{A}(h) := \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante;  $\det \mathbf{A}(h) = 1 + h^2 > 0$ , luego  $\mathbf{A}(h)$  es invertible para todo  $h$ . Finalmente reescribimos el método de euler implícito como un método de euler explícito como sigue:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_{1,i+1}^h \\ y_{2,i+1}^h \end{pmatrix} &= \mathbf{A}(h)^{-1} \begin{pmatrix} y_{1,i}^h \\ y_{2,i}^h + \frac{x_{i+1}^2 + 4x_{i+1} + 6}{(x_{i+1} + 2)^3} \end{pmatrix} \\&= \frac{1}{1 + h^2} \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,i}^h \\ y_{2,i}^h + \frac{x_{i+1}^2 + 4x_{i+1} + 6}{(x_{i+1} + 2)^3} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

El código utilizado para el desarrollo es:

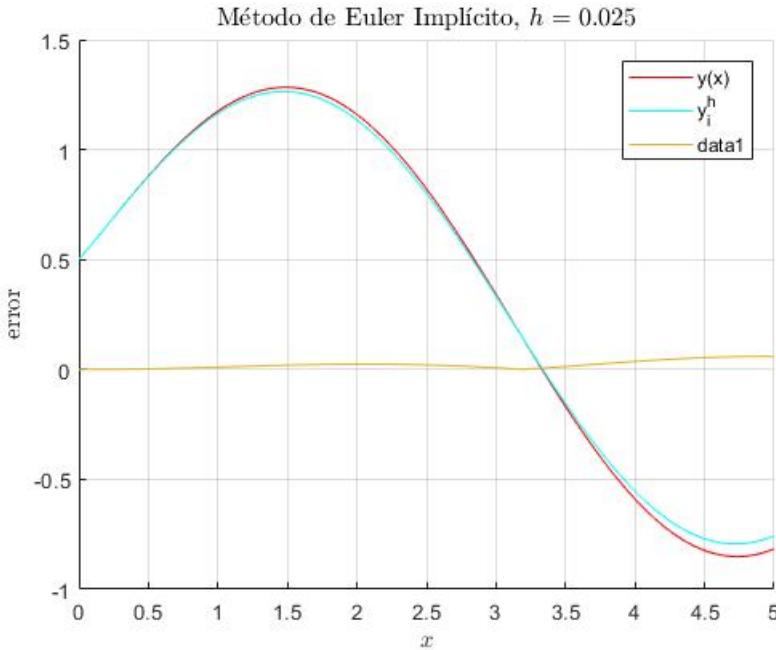
```

1 a = 0;
2 b = 5;
3 y1 = 1/2;
4 y2 = 3/4;
5 h = 0.025;
6 h1 = [0.5 0.25 0.1 0.025];
7 n = 2;
8 t_1 = a:h:b;
9 t_2 = a:h:b;
10 Y = zeros(n,length(t_1));
11 Y(:,1) = [y1; y2];
12 F = @(x,y) [y(2);(x^2+4*x+6)/(x+2)^3-y(1)];
13 for i=2:length(t_1)

14
15 % Ecuacion de Euler implicito: y_{i}-(y_{i-1}+hF(t_i,y_i))=0
16 f = @(y) y- Y(:,i-1) -h*F(t_1(i),y);
17
18 % Resolucion ecuacion anterior
19 Y(:,i) = fsolve(f,Y(:,i-1));
20 end
21
22 for i = 1:length(t_2)
23 YEx(:,i) = [sin(t_2(i))+1/(t_2(i)+2);
24 cos(t_2(i))-1/(t_2(i)+2)^.2];
25 end
26
27 hold on
28
29 plot(t_2,YEx(1,:),'Color','r')
30 plot(t_1,Y(1,:),'Color','c')
31
32 legend('y(x)', 'y^h_i', 'Interpreter', 'Latex')
33 title('Metodo de Euler Implicito, $h = 0.025$', 'fontsize',12,
      'interpreter','latex')
34 grid on
35 xlabel('$x$', 'Interpreter', 'Latex')
36 ylabel('$y$', 'Interpreter', 'Latex')
37
38 %%
39 v_abs = abs(Y(1,:)-YEx(1,:));
40 max(v_abs)
41 plot(t_2,v_abs)
42 xlabel('$x$', 'Interpreter', 'Latex')
43 ylabel('error', 'Interpreter', 'Latex')

```

El cual nos entrega el siguiente gráfico:



**Problema 5.** Se considera el método de dos pasos

$$y_{j+2}^h = -4y_{j+1}^h + 5y_j^h + h (4f(x_{j+1}, y_{j+1}^h) + 2f(x_j, y_j^h)). \quad (2)$$

- a) Demostrar que este método es consistente de tercer orden.

**Solución:**

$$y_{j+2}^h + 4y_{j+1}^h - 5y_j^h = h [4f(x_{j+1}, y_{j+1}^h) + 2f(x_j, y_j^h)]$$

El método puede ser representado como sigue

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i y_{j+i}^h = h \sum_{i=0}^2 \beta_i f(x_{j+i}; y_{j+i}^h)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -5 & \beta_0 &= 2 \\ \alpha_1 &= 4 & \beta_1 &= 4 \\ \alpha_2 &= 1 & \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos los polinomios, para poder aplicar el Teorema 1.3

$$\rho(\xi) := \sum_{i=0}^2 \alpha_i \xi^i = -5 + 4\xi + \xi^2$$

$$\sigma(\xi) := \sum_{i=0}^2 \beta_i \xi^i = 2 + 4\xi$$

- $j = 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(1) &= -5 + 4 + 1 = 0 \\ \rho_2(\xi) &= \xi\rho'_1(\xi) = \xi[4 + 2\xi] \implies \rho_2(1) = 6 \\ 1\sigma_1(\xi) &= 2 + 4\xi \implies 1\sigma_1(1) = 6\end{aligned}$$

Así

$$\rho_2(1) = 1 \cdot \sigma_1(1)$$

- $j = 2$

$$\begin{aligned}\rho_3(\xi) &= \xi\rho'_2(\xi) = \xi[4 + 4\xi] \implies \rho_3(1) = 8 \\ 2\sigma_2(\xi) &= 2[\xi\sigma'_1(\xi)] = 2\xi \cdot [4] = 8\xi \implies 2\sigma_2(1) = 8\end{aligned}$$

Así

$$\rho_3(1) = 2\sigma_2(1)$$

- $j = 3$

$$\begin{aligned}\rho_4(\xi) &= \xi\rho'_3(\xi) = \xi[4 + 8\xi] \implies \rho_4(1) = 12 \\ 3\sigma_3(\xi) &= 3[\xi \cdot 4] = 12\xi \implies 3\sigma_3(1) = 12\end{aligned}$$

Así

$$\rho_4(1) = 3\sigma_3(1)$$

- $j = 4$

$$\begin{aligned}\rho_5(\xi) &= \xi\rho'_4(\xi) = \xi[4 + 16\xi] = 4\xi + 16\xi^2 \implies \rho_5(1) = 20 \\ 4\sigma_4(\xi) &= 4\xi[4] = 16\xi \implies 4\sigma_4(1) = 16\end{aligned}$$

Así

$$\rho_5(1) \neq 4\sigma_4(1)$$

De esta forma el teorema 1.3 nos confirma que el método es consistente al menos de orden 3.

- b) ¿El método satisface la condición de ceros?

$$\begin{aligned}\rho(\xi) = 0 &\Leftrightarrow \xi^2 + 4\xi - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\xi - 1)(\xi + 5) = 0\end{aligned}$$

Luego existe una raíz de  $\rho(\xi)$  que  $|\xi| < 1$ , entonces el método no satisface la condición de ceros.

- c) Aplicar el método (3) al problema

$$y'(x) = y(x) - 2 \operatorname{sen}(x), \quad x \in [0, 4], \quad y(0) = 1, \tag{3}$$

con la solución  $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$ , usando  $y_0^h = 1$  y  $y_1^h = \sin(h) + \cos(h)$ , para  $h = 1/4$ ,  $h = 1/8$  y  $h = 1/16$ . Comparar los valores numéricos con la solución exacta en  $x = 1$ ,  $x = 2$  y  $x = 4$ . Interpretar el resultado.

**Solución:**

Considerando que

$$f(x, y(x)) = y(x) - \sin(x)$$

La ecuación en diferencias (2) se puede escribir como sigue

$$y_{j+2}^h = -4y_{j+1}^h + 5y_j^h + h(4(y_{j+1}^h - \sin(x_{j+1})) + 2(y_j^h - \sin(x_j)))$$

- Caso  $h = 1/4$  con  $y_0^h = 1$  y  $y_1^h = \sin\left(\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\right)$ . Se tiene el método

$$y_{j+2} = -4y_{j+1} + 5y_j + \frac{1}{4}(4(y_{j+1} - \sin(x_{j+1})) + 2(y_j - \sin(x_j)))$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = \sin\left(\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\right)$$

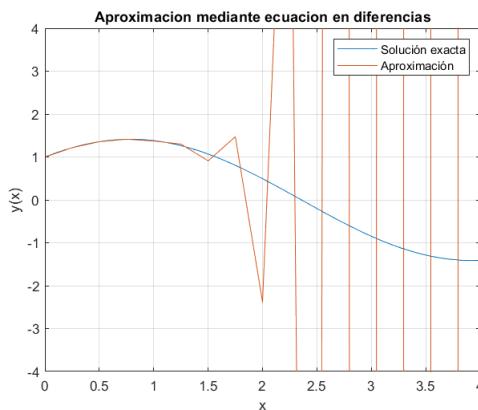
Programando lo anterior en matlab se tiene

```

1 clear all;close all;clc;
2 ysol = @(x) sin(x) + cos(x);
3 f = @(x,y) [y - 2*sin(x)];
4 a = 0;
5 b = 4;
6 %Caso h = 1/4
7 h1 = 1/4;
8 n1 = (b-a)/h1;
9 x1 = [];
10 y1 = [];
11 y1(1) = 1;
12 y1(2) = sin(h1) + cos(h1);
13 x1 = a:h1:b;
14 for i = 1:n1-1
15     y1(i+2) = -4*y1(i+1)+5*y1(i) + h1*(4*f(x1(i+1),y1(i+1)) + 2*f(x1(i),y1(i)));
16 end
17 fplot(ysol,[0,4])
18 hold on
19 plot(x1,y1)
20 grid on
21 legend('Soluci n exacta','Aproximaci n')
22 title('Aproximacion mediante ecuacion en diferencias')
23 xlabel('x')
24 ylabel('y(x)')
25 ylim([-4,4])

```

El siguiente gráfico corresponde a una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema



**Figura 1:** Aproximación del método para  $h = 0,25$ .

- Caso  $h = 1/8$  con  $y_0^h = 1$  y  $y_1^h = \sin\left(\frac{1}{8}\right) + \cos\left(\frac{1}{8}\right)$ . Se tiene el método

$$y_{j+2} = -4y_{j+1} + 5y_j + \frac{1}{8}(4(y_{j+1} - \sin(x_{j+1})) + 2(y_j - \sin(x_j)))$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = \sin\left(\frac{1}{8}\right) + \cos\left(\frac{1}{8}\right)$$

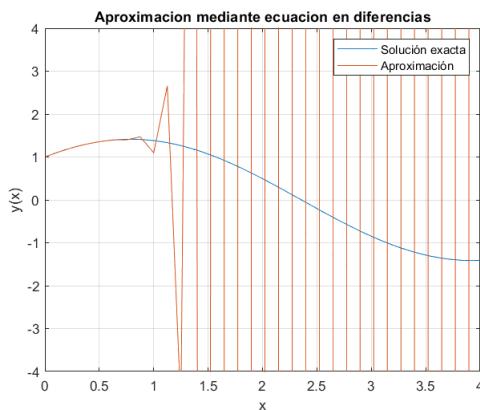
Programando lo anterior en matlab se tiene

```

1 clear all;close all;clc;
2 ysol = @(x) sin(x) + cos(x);
3 f = @(x,y) [y - 2*sin(x)];
4 a = 0;
5 b = 4;
6 h2 = 1/8;
7 n2 = (b-a)/h2;
8 x2 = [];
9 y2 = [];
10 y2(1) = 1;
11 y2(2) = sin(h2) + cos(h2);
12 x2 = a:h2:b;
13 for i = 1:n2-1
14     y2(i+2) = -4*y2(i+1)+5*y2(i) + h2*(4*f(x2(i+1),y2(i+1)) + 2*f(x2(i),y2(i)));
15 end
16 fplot(ysol,[0,4])
17 hold on
18 plot(x2,y2)
19 ylim([-4,4])
20 grid on
21 legend('Soluci n exacta','Aproximaci n')
22 title('Aproximacion mediante ecuacion en diferencias')
23 xlabel('x')
24 ylabel('y(x)')
25 ylim([-4,4])

```

El siguiente gráfico corresponde a una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema



**Figura 2:** Aproximación del método para  $h = 0,125$ .

- Caso  $h = 1/16$  con  $y_0^h = 1$  y  $y_1^h = \sin\left(\frac{1}{16}\right) + \cos\left(\frac{1}{16}\right)$ . Se tiene el método

$$y_{j+2} = -4y_{j+1} + 5y_j + \frac{1}{16} (4(y_{j+1} - \sin(x_{j+1})) + 2(y_j - \sin(x_j)))$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = \sin\left(\frac{1}{16}\right) + \cos\left(\frac{1}{16}\right)$$

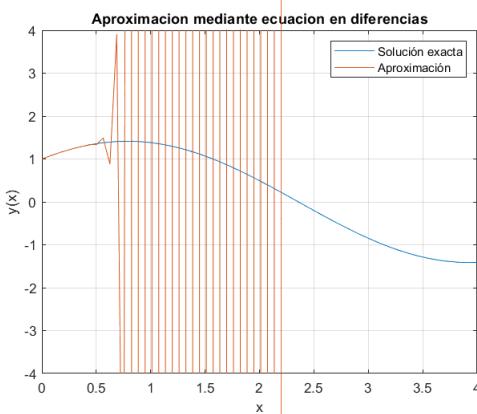
Programando lo anterior en matlab se tiene

```

1 clear all;close all;clc;
2 ysol = @(x) sin(x) + cos(x);
3 f = @(x,y) [y - 2*sin(x)];
4 a = 0;
5 b = 4;
6 h3 = 1/16;
7 n3 = (b-a)/h3;
8 x3 = [];
9 y3 = [];
10 y3(1) = 1;
11 y3(2) = sin(h3) + cos(h3);
12 x3 = a:h3:b;
13 for i = 1:n3-1
14     y3(i+2) = -4*y3(i+1)+5*y3(i) + h3*(4*f(x3(i+1),y3(i+1)) + 2*f(x3(i),y3(i)));
15 end
16 fplot(ysol,[0,4])
17 hold on
18 plot(x3,y3)
19 ylim([-4,4])
20 grid on
21 legend('Soluci n exacta','Aproximaci n')
22 title('Aproximacion mediante ecuacion en diferencias')
23 xlabel('x')
24 ylabel('y(x)')

```

El siguiente gráfico corresponde a una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema



**Figura 3:** Aproximación del método para  $h = 0,0625$ .

d) ¿El resultado es una contradicción al Teorema 1.1?

**Solución:**

El comportamiento del método no es una contradicción al teorema 1.1, porque este teorema está definido para métodos de paso simple y el método mencionado es de pasos múltiples.

**Problema 6.** Resolver el problema de valores iniciales

$$y'(t) = \frac{1-t}{t}y(t), \quad y(1/2) = \frac{1}{2}e^{-1/2} \quad (4)$$

sobre el intervalo  $[1/2, 3]$  usando el siguiente método:

- (1) Determinar los valores iniciales con el método de Runge-Kutta clásico con  $m = 4$ .
- (2) Utilizar el método predictor-corrector (1.39), (1.40) para los demás pasos.

Comparar las soluciones generadas por  $h = 0,25$ ,  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$  con la solución exacta.

### Solución:

En primer lugar, se tiene que la solución exacta de la EDO es

$$y(t) = te^{-t}$$

- (1) El método de Runge-Kutta de clásico con  $m = 4$  viene dado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{h}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f\left(t_i, y_i^h\right), \\ k_2^{(i)} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_1^{(i)}\right) \\ k_3^{(i)} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_2^{(i)}\right) \\ k_4^{(i)} &= f\left(t_{i+1}, y_i^h + hk_3^{(i)}\right) \end{aligned}$$

Considerando que

$$f(t, y) = \frac{1-t}{t}y(t)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= \frac{1-t_i}{t_i}y_i^h \\ k_2^{(i)} &= \frac{1-t_i - \frac{h}{2}}{t_i + \frac{h}{2}} \left( y_i^h + \frac{h(1-t_i)y_i^h}{2t_i} \right) \\ k_3^{(i)} &= \frac{1-t_i - \frac{h}{2}}{t_i + \frac{h}{2}} \left( y_i^h + \frac{h(1-t_i - \frac{h}{2})}{2t_i + h} \left( y_i^h + \frac{h(1-t_i)y_i^h}{2t_i} \right) \right) \\ k_4^{(i)} &= \frac{1-t_{i+1}}{t_{i+1}} \left( y_i^h + h \left( \frac{1-t_i - \frac{h}{2}}{t_i + \frac{h}{2}} \left( y_i^h + \frac{h(1-t_i - \frac{h}{2})}{2t_i + h} \left( y_i^h + \frac{h(1-t_i)y_i^h}{2t_i} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

(2) El método predictor-corregidor viene dado por

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{i+1}^h &= y_i^h + \frac{h}{12} (23f(t_i, y_i^h) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2}^h)) \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + \frac{h}{24} (9f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}^h) + 19f(t_i, y_i^h) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) + f(t_{i-2}, y_{i-2}^h))\end{aligned}$$

Considerando que

$$f(t, y) = \frac{1-t}{t}y(t)$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{i+1}^h &= y_i^h + \frac{h}{12} \left( 23y_i^h \left( \frac{1-t_i}{t_i} \right) - 16y_{i-1}^h \left( \frac{1-t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + 5y_{i-2}^h \left( \frac{1-t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + \frac{h}{24} \left( 9\tilde{y}_{i+1}^h \left( \frac{1-t_{i+1}}{t_{i+1}} \right) + 19y_i^h \left( \frac{1-t_i}{t_i} \right) - 5y_{i-1}^h \left( \frac{1-t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + y_{i-2}^h \left( \frac{1-t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right)\end{aligned}$$

Para encontrar los valores iniciales de  $y$  mediante el método de Runge-Kutta clásico con  $m = 4$ , se procederá utilizando los siguientes códigos realizados en matlab

```

1 function [x,y] = RK44(f,y0,a,b,n)
2 h = (b - a)/n;
3 x = [];
4 y = [];
5 y(:,1) = y0;
6 x(1) = a ;
7 for i = 1:n-1
8     x(i+1) = x(i) + h;
9     k1 = h*f(x(i),y(:,i));
10    k2 = h*f(x(i) + h/2,y(:,i) + k1/2);
11    k3 = h*f(x(i) + h/2,y(:,i) + k2/2);
12    k4 = h*f(x(i) + h,y(:,i) + k3);
13    y(:,i+1) = y(:,i) + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
14 end
15 end

```

La función anterior nos entrega valores aproximados de  $y$  en un punto  $x$  dado obtenidos por el método de Runge-Kutta clásico con  $m = 4$ . Luego tomaremos los primeros tres elementos, es decir, los valores iniciales de  $y$ , para luego poder utilizar el método de predictor-corrector

- a) Caso  $h = 0,25$ . Reemplazando  $h = 0,25$  en el método de Runge-Kutta y en el método predictor-corrector, se tiene

- Runge-kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0,25}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= \frac{1 - t_i}{t_i} y_i \\ k_2^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,25}{2}}{t_i + \frac{0,25}{2}} \left( y_i + \frac{0,25(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \\ k_3^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,25}{2}}{t_i + \frac{0,25}{2}} \left( y_i + \frac{0,25(1 - t_i - \frac{0,25}{2})}{2t_i + 0,25} \left( y_i + \frac{0,25(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \\ k_4^{(i)} &= \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \left( y_i + 0,25 \left( \frac{1 - t_i - \frac{0,25}{2}}{t_i + \frac{0,25}{2}} \left( y_i + \frac{0,25(1 - t_i - \frac{0,25}{2})}{2t_i + 0,25} \left( y_i + \frac{0,25(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

- Predictor-corrector

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= y_i + \frac{0,25}{12} \left( 23y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 16y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + 5y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{0,25}{24} \left( 9\tilde{y}_{i+1} \left( \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \right) + 19y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 5y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \end{aligned}$$

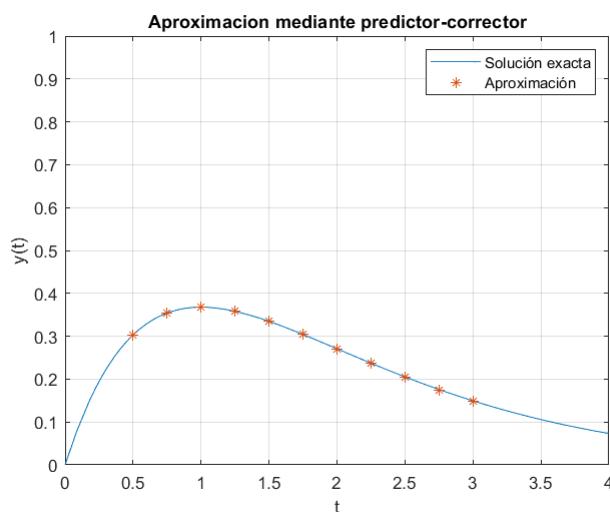
Programando lo anterior en matlab se tiene

```

1 clear all;
2 % h = 0.25
3 ysol = @(t) t*exp(-t);
4 a = 1/2; b = 3;
5 f = @(t,y) (1-t)*y/t;
6 y0 = (1/2)*exp(-1/2);
7 h = 1/4;
8 n = (b-a)/h;
9 [x,yRK44] = RK44(f,y0,a,b,n);
10 y = [];
11 t = a:h:b;
12 y(1) = y0;
13 y(2) = yRK44(2);
14 y(3) = yRK44(3);
15 yp(1) = y(1);
16 yp(2) = y(2);
17 yp(3) = y(3);
18 for i = 3:length(t)-1
19     yp(i+1) = yp(i) + (h/12)*(23*f(t(i),yp(i))-16*f(t(i-1),yp(i-1)) + 5*
20         f(t(i-2),yp(i-2)));
21     y(i+1) = y(i) + (h/24)*(9*f(t(i+1),yp(i+1)) + 19*f(t(i),y(i))-5*f(t(
22         i-1),y(i-1)) + f(t(i-2),y(i-2)));
23 end
24 fplot(ysol)
25 hold on
26 plot(t,y,'*')
27 grid on
28 xlabel('t')
29 ylabel('y(t)')
30 ylim([0,1])
31 xlim([0,4])

```

El siguiente gráfico corresponde a una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema, en donde se combinó el método de Runge-Kutta para obtener los valores iniciales, y el método predictor-corrector para obtener los valores restantes.



**Figura 4:** Aproximación mediante Predictor-corrector con  $h = 0,25$ .

Además, se obtienen los valores iniciales obtenidos con el método de Runge-Kutta.

$t$	0.5	0.75	1
$y(t)$	0.3033	0.3543	0.3679

**Cuadro 1:** Tabla con los valores iniciales.

- b) Caso  $h = 0,1$ . Reemplazando  $h = 0,1$  en el método de Runge-Kutta y en el método predictor-corrector, se tiene

- Runge-kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0,1}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= \frac{1 - t_i}{t_i} y_i \\ k_2^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,1}{2}}{t_i + \frac{0,1}{2}} \left( y_i + \frac{0,1(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \\ k_3^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,1}{2}}{t_i + \frac{0,1}{2}} \left( y_i + \frac{0,1(1 - t_i - \frac{0,1}{2})}{2t_i + 0,1} \left( y_i + \frac{0,1(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \\ k_4^{(i)} &= \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \left( y_i + 0,1 \left( \frac{1 - t_i - \frac{0,1}{2}}{t_i + \frac{0,1}{2}} \left( y_i + \frac{0,1(1 - t_i - \frac{0,1}{2})}{2t_i + 0,1} \left( y_i + \frac{0,1(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

- Predictor-corrector

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= y_i + \frac{0,1}{12} \left( 23y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 16y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + 5y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{0,1}{24} \left( 9\tilde{y}_{i+1} \left( \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \right) + 19y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 5y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Programando lo anterior en matlab se tiene

```

1 clear all;
2 % h = 0.1
3 ysol = @(t) t*exp(-t);
4 a = 1/2; b = 3;
5 f = @(t,y) (1-t)*y/t;
6 y0 = (1/2)*exp(-1/2);
7 h1 = 0.1;
8 n1 = (b-a)/h1;
9 [x1,yRKK441] = RK44(f,y0,a,b,n1);
10 y1 = [];
11 t1 = a:h1:b;
12 y1(1) = y0;
13 y1(2) = yRKK441(2);
14 y1(3) = yRKK441(3);
15 yp1(1) = y1(1);
16 yp1(2) = y1(2);
17 yp1(3) = y1(3);
18 for i = 3:length(t1)-1

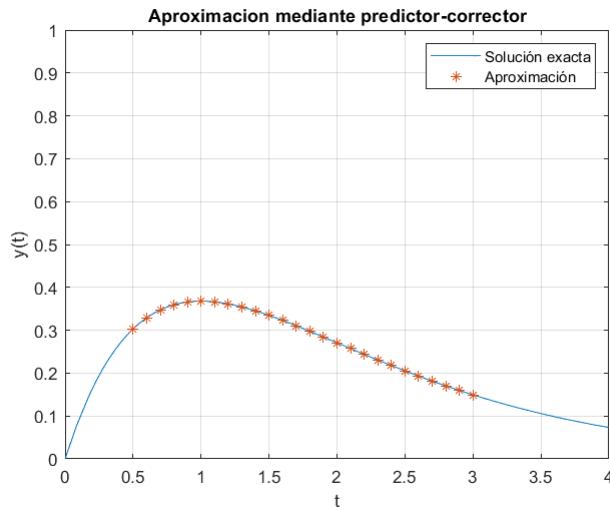
```

```

19     yp1(i+1) = yp1(i) + (h1/12)*(23*f(t1(i),yp1(i))-16*f(t1(i-1),yp1(i-1)) + 5*f(t1(i-2),yp1(i-2)));
20     y1(i+1) = y1(i) + (h1/24)*(9*f(t1(i+1),yp1(i+1)) + 19*f(t1(i),y1(i)) -5*f(t1(i-1),y1(i-1)) + f(t1(i-2),y1(i-2)));
21 end
22 fplot(ysol)
23 hold on
24 plot(t1,y1,'*')
25 grid on
26 legend('Soluci n exacta','Aproximaci n')
27 title('Aproximacion mediante predictor-corrector')
28 xlabel('t')
29 ylabel('y(t)')
30 ylim([0,1])
31 xlim([0,4])

```

Se obtiene el siguiente gráfico, con una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema, en donde se combino el método de Runge-Kutta para obtener los valores iniciales, y el método predictor-corrector pedido en el enunciado.



**Figura 5:** Aproximación mediante Predictor-corrector con  $h = 0,1$ .

Además, se obtienen los valores iniciales obtenidos con el método de Runge-Kutta.

$t$	0.5	0.6	0.7
$y(t)$	0.3033	0.3293	0.3476

**Cuadro 2:** Tabla con los valores iniciales.

- c) Caso  $h = 0,05$ . Reemplazando  $h = 0,05$  en el método de Runge-Kutta y en el método predictor-corregor, se tiene

- Runge-kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0,05}{6} \left( k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= \frac{1 - t_i}{t_i} y_i \\ k_2^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,05}{2}}{t_i + \frac{0,05}{2}} \left( y_i + \frac{0,05(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \\ k_3^{(i)} &= \frac{1 - t_i - \frac{0,05}{2}}{t_i + \frac{0,05}{2}} \left( y_i + \frac{0,05(1 - t_i - \frac{0,05}{2})}{2t_i + 0,05} \left( y_i + \frac{0,05(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \\ k_4^{(i)} &= \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \left( y_i + 0,05 \left( \frac{1 - t_i - \frac{0,05}{2}}{t_i + \frac{0,05}{2}} \left( y_i + \frac{0,05(1 - t_i - \frac{0,05}{2})}{2t_i + 0,05} \left( y_i + \frac{0,05(1 - t_i)y_i}{2t_i} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

- Predictor-corregor

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= y_i + \frac{0,05}{12} \left( 23y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 16y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + 5y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{0,05}{24} \left( 9\tilde{y}_{i+1} \left( \frac{1 - t_{i+1}}{t_{i+1}} \right) + 19y_i \left( \frac{1 - t_i}{t_i} \right) - 5y_{i-1} \left( \frac{1 - t_{i-1}}{t_{i-1}} \right) + y_{i-2} \left( \frac{1 - t_{i-2}}{t_{i-2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Programando lo anterior en matlab se tiene

```

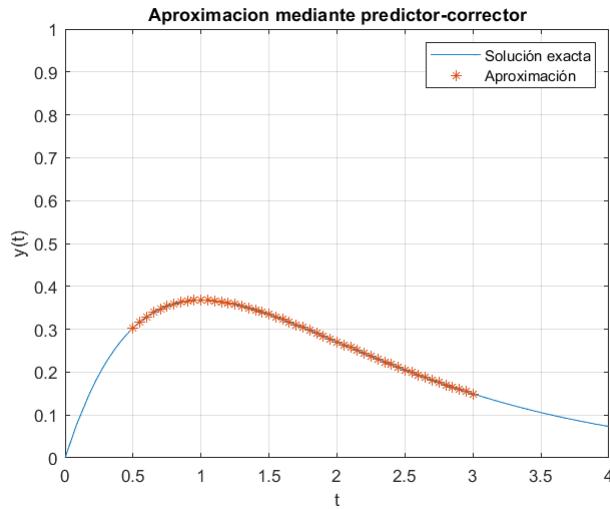
1 clear all;
2 % h = 0.005
3 ysol = @(t) t*exp(-t);
4 a = 1/2; b = 3;
5 f = @(t,y) (1-t)*y/t;
6 y0 = (1/2)*exp(-1/2);
7 h2 = 0.05;
8 n2 = (b-a)/h2;
9 [x2,yRKK42] = RK44(f,y0,a,b,n2);
10 h2 = 0.05;
11 y2 = [];
12 t2 = a:h2:b;
13 y2(1) = y0;
14 y2(2) = yRKK42(2);
15 y2(3) = yRKK42(3);
16 yp2(1) = y2(1);
17 yp2(2) = y2(2);
18 yp2(3) = y2(3);
19 for i = 3:length(t2)-1
20     yp2(i+1) = yp2(i) + (h2/12)*(23*f(t2(i),yp2(i))-16*f(t2(i-1),yp2(i-1)) + 5*f(t2(i-2),yp2(i-2)));
21     y2(i+1) = y2(i) + (h2/24)*(9*f(t2(i+1),yp2(i+1)) + 19*f(t2(i),y2(i)) - 5*f(t2(i-1),y2(i-1)) + f(t2(i-2),y2(i-2)));
22 end
23 fplot(ysol)
24 hold on
25 plot(t2,y2, '*')
```

```

26 grid on
27 legend('Soluci n exacta','Aproximaci n')
28 title('Aproximacion mediante predictor-corrector')
29 xlabel('t')
30 ylabel('y(t)')
31 ylim([0,1])
32 xlim([0,4])

```

El siguiente gráfico corresponde a una aproximación de la solución de la EDO propuesta en el problema, en donde se combinó el método de Runge-Kutta para obtener los valores iniciales, y el método predictor-corrector para obtener los valores restantes.



**Figura 6:** Aproximación mediante Predictor-corrector con  $h = 0,05$ .

Además, se obtienen los valores iniciales obtenidos con el método de Runge-Kutta

$t$	0.5	0.55	0.1
$y(t)$	0.3033	0.3173	0.3293

**Cuadro 3:** Tabla con los valores iniciales.

**Problema 7.** Se considera el sistema de EDOs

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= Ay_1(t) - AB(y_1(t) - R)y_2(t), \quad y_1(0) = y_{1,0} \\ y'_2(t) &= Cy_2(t)(D(y_1(t) - R) - 1), \quad y_2(0) = y_{2,0}, \end{aligned} \quad (5)$$

con constantes  $A, B, C, D, R > 0$ . Este sistema se llama modelo predador-presa de Lotka-Volterra con refugio para la presa. La variable  $t$  denota el tiempo,  $y_1(t)$  es el número de presas (por ejemplo, conejos) en el instante  $t$ , e  $y_2(t)$  es el número de predadores (por ejemplo, zorros) en el instante  $t$ . En el caso de que hay sólo un tipo de predador y un tipo de presa este modelo es una aproximación razonable de la realidad.

- Resolver el modelo (6) utilizando los parámetros  $A = 4, B = 1/2, C = 3$  y  $D = 1/3, R = 0,5, 1, 2$  mediante el método de Euler explícito, para  $0 \leq t \leq 5$ , a partir de  $x(0) := y_1(0) = 3$  y  $y(0) := y_2(0) = 5$ , utilizando  $h = 0,001$  y  $h = 0,0005$ .
- Graficar los resultados  $x(t) := y_1(t)$  e  $y(t) := y_2(t)$  como funciones de  $t$  (para cada valor de  $h$ ) y como  $x$  versus  $y$ . Comentar los resultados (comparando con el Ejemplo 1.8).

### Solución

Para el caso  $A = 4, B = 1/2, C = 3, D = 1/3$  y  $R = 0,5$ . Con el método de Euler explícito para un  $h$  fijo se tiene

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h\vec{F}(t_i, \vec{y}_i)$$

Donde

$$\vec{F}(t_i, \vec{y}_i) = \vec{F}(t_i, x_i^h, y_i^h) = \begin{bmatrix} 4x_i^h - 2(x_i^h - \frac{1}{2})y_i^h \\ 3y_i^h((\frac{x_i^h}{3} - \frac{1}{6}) - 1) \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \vec{y}_i = \begin{bmatrix} x_i^h \\ y_i^h \end{bmatrix}$$

Así, para  $h = 0,001$  y  $h = 0,0005$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,001 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - \frac{1}{2})y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{1}{6}) - 1) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - \frac{1}{2})y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{1}{6}) - 1) \end{bmatrix}$$

respectivamente. Para resolver estos sistemas se utilizaran los siguientes códigos realizados en matlab

```

1 clear all;
2 % Caso R = 0.5
3 A = 4; B = 1/2; C = 3; D = 1/3; R = 0.5;
4 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R);
5 % h = 0.001
6 h1 = 0.001;
7 t1 = a:h1:b;
8 Y1 = zeros(2,length(t1));
9 Y1(:,1) = [3 5];
10 for i = 2:length(t1)
11     Y1(:,i) = Y1(:,i-1) + h1*F(Y1(1,
12         i-1),Y1(2,i-1));
13 end
14 plot(t1,Y1(1,:))
15 hold on
16 plot(t1,Y1(2,:))
17 grid on
18 legend('Aproximacion de x(t)',
        'Aproximacion de y(t)')
19 title('Aproximacion mediante Euler')
```

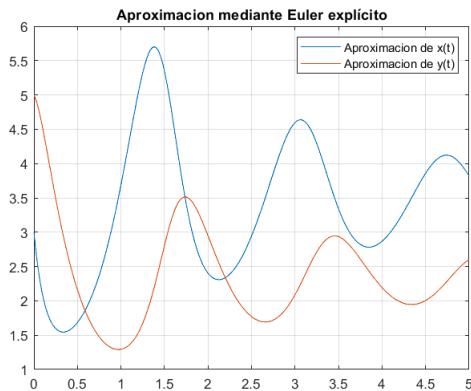
```

    expl cito')
19 hold off
20 plot(Y1(1,:),Y1(2,:))
21 xlabel('x(t)')
22 ylabel('y(t)')
23 title('Número de presas vs número
        de depredadores')
24 grid on

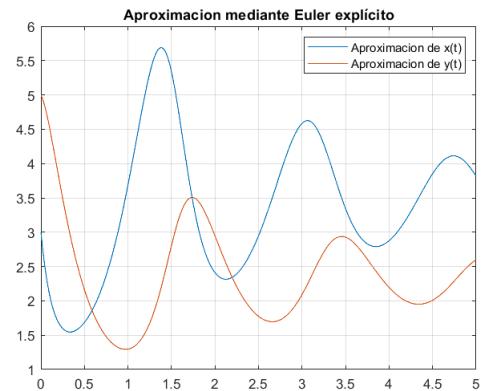
1 clear all;
2 % Caso R = 0.5
3 A = 4;B = 1/2;C = 3;D = 1/3;R = 0.5;
4 a = 0; b = 5;
5 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R);
       C.*y.*(D.*(x-R) - 1)];
6 % h = 0.0005
7 h2 = 0.0005;
8 t2 = a:h2:b;
9 Y2 = zeros(2,length(t2));
10 Y2(:,1) = [3 5];
11 for i = 2:length(t2)
12     Y2(:,i) = Y2(:,i-1) + h2*F(Y2(1,
           i-1),Y2(2,i-1));
13 end
14 plot(t2,Y2(1,:))
15 hold on
16 plot(t2,Y2(2,:))
17 grid on
18 legend('Aproximación de x(t)','
        Aproximación de y(t)')
19 title('Aproximación mediante Euler
        expl cito')
20 hold off
21 plot(Y2(1,:),Y2(2,:))
22 xlabel('x(t)')
23 ylabel('y(t)')
24 title('Número de presas vs número
        de depredadores')
24 grid on

```

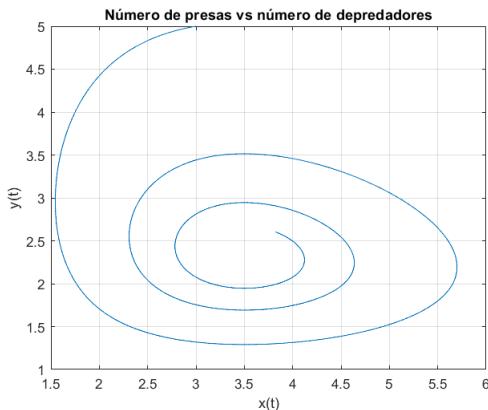
La gráfica de los resultados se presentan a continuación



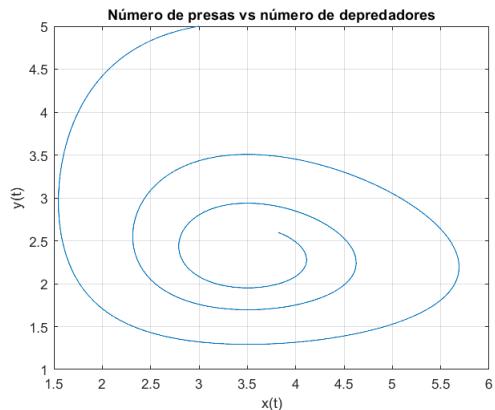
(a) Aproximación con  $h = 0,001$



(b) Aproximación con  $h = 0,0005$



(c) Aproximación con  $h = 0,001$



(d) Aproximación con  $h = 0,0005$

**Figura 7:** Aproximación del modelo predador-presa de Lotka-Volterra con refugio para la presa.

Para el caso  $A = 4$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = 3$ ,  $D = 1/3$  y  $R = 1$ . Con el método de Euler explícito para un  $h$  fijo se tiene

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h\vec{F}(t_i, \vec{y}_i)$$

Donde

$$\vec{F}(t_i, \vec{y}_i) = \vec{F}(t_i, x_i^h, y_i^h) = \begin{bmatrix} 4x_i^h - 2(x_i^h - 1)y_i^h \\ 3y_i^h((\frac{x_i^h}{3} - \frac{1}{3}) - 1) \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \vec{y}_i = \begin{bmatrix} x_i^h \\ y_i^h \end{bmatrix}$$

Así, para  $h = 0,001$  y  $h = 0,0005$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,001 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - 1)y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{1}{3}) - 1) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - 1)y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{1}{3}) - 1) \end{bmatrix}$$

respectivamente. Para resolver estos sistemas se utilizaran los siguientes códigos realizados en matlab

```

1 clear all;
2 % Caso R = 1
3 A = 4;B = 1/2;C = 3;D = 1/3;R = 1; a = 0; b = 5;
4 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R); C.*y.*(D.*(x-R) - 1)];
5 % h = 0.001
6 h1 = 0.001;
7 t1 = a:h1:b;
8 Y1 = zeros(2,length(t1));
9 Y1(:,1) = [3 5];
10 for i = 2:length(t1)
11     Y1(:,i) = Y1(:,i-1) + h1*F(Y1(1,i-1),Y1(2,i-1));
12 end
13 plot(t1,Y1(1,:))
14 hold on
15 plot(t1,Y1(2,:))
16 grid on
17 legend('Aproximacion de x(t)', 'Aproximacion de y(t)')
18 title('Aproximacion mediante Euler expl cito')
19 hold off
20 plot(Y1(1,:),Y1(2,:))
21 xlabel('x(t)')
22 ylabel('y(t)')
23 title('Número de presas vs número de depredadores')
24 grid on

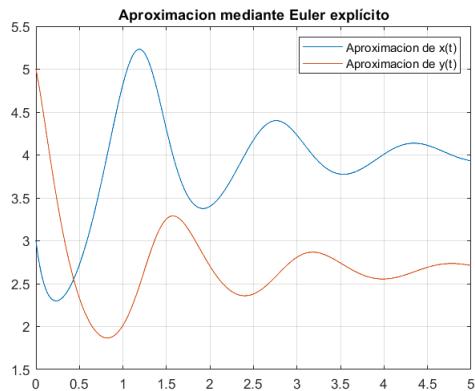
```

```

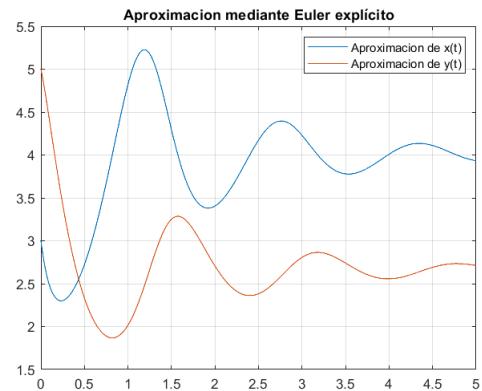
1 clear all;
2 % Caso R = 1
3 A = 4;B = 1/2;C = 3;D = 1/3;R = 1; a = 0; b = 5;
4 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R); C.*y.*(D.*(x-R) - 1)];
5 % h = 0.0005
6 h2 = 0.0005;
7 t2 = a:h2:b;
8 Y2 = zeros(2,length(t2));
9 Y2(:,1) = [3 5];
10 for i = 2:length(t2)
11     Y2(:,i) = Y2(:,i-1) + h2*F(Y2(1,i-1),Y2(2,i-1));
12 end
13 plot(t2,Y2(1,:))
14 hold on
15 plot(t2,Y2(2,:))
16 grid on
17 legend('Aproximacion de x(t)', 'Aproximacion de y(t)')
18 title('Aproximacion mediante Euler expl cito')
19 hold off
20 plot(Y2(1,:),Y2(2,:))
21 xlabel('x(t)')
22 ylabel('y(t)')
23 title('Número de presas vs número de depredadores')
24 grid on

```

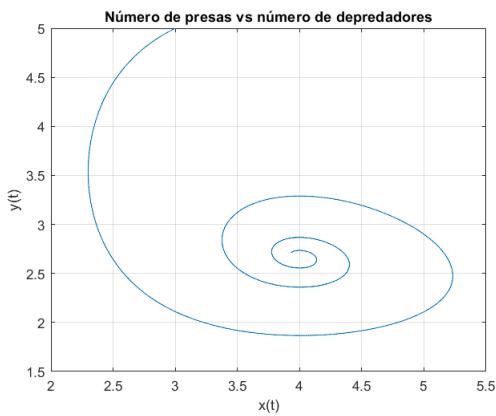
La gráfica de los resultados se presentan a continuación



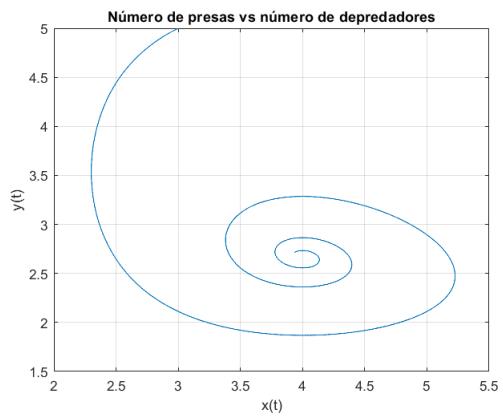
(a) Aproximación con  $h = 0,001$



(b) Aproximación con  $h = 0,0005$



(c) Aproximación con  $h = 0,001$



(d) Aproximación con  $h = 0,0005$

**Figura 8:** Aproximación del modelo predador-presa de Lotka-Volterra con refugio para la presa.

Para el caso  $A = 4$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = 3$ ,  $D = 1/3$  y  $R = 2$ . Con el método de Euler explícito para un  $h$  fijo se tiene

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h\vec{F}(t_i, \vec{y}_i)$$

Donde

$$\vec{F}(t_i, \vec{y}_i) = \vec{F}(t_i, x_i^h, y_i^h) = \begin{bmatrix} 4x_i^h - 2(x_i^h - 2)y_i^h \\ 3y_i^h((\frac{x_i^h}{3} - \frac{2}{3}) - 1) \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \vec{y}_i = \begin{bmatrix} x_i^h \\ y_i^h \end{bmatrix}$$

Así, para  $h = 0,001$  y  $h = 0,0005$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,001 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - 2)y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{2}{3}) - 1) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + 0,0005 \begin{bmatrix} 4x_i - 2(x_i - 2)y_i \\ 3y_i((\frac{x_i}{3} - \frac{2}{3}) - 1) \end{bmatrix}$$

respectivamente. Para resolver estos sistemas se utilizaran los siguientes códigos realizados en matlab

```

1 clear all;
2 % Caso R = 2
3 A = 4;B = 1/2;C = 3;D = 1/3;R = 2; a = 0; b = 5;
4 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R); C.*y.*(D.*(x-R) - 1)];
5 % h = 0.001
6 h1 = 0.001;
7 t1 = a:h1:b;
8 Y1 = zeros(2,length(t1));
9 Y1(:,1) = [3 5];
10 for i = 2:length(t1)
11     Y1(:,i) = Y1(:,i-1) + h1*F(Y1(1,i-1),Y1(2,i-1));
12 end
13 plot(t1,Y1(1,:))
14 hold on
15 plot(t1,Y1(2,:))
16 grid on
17 legend('Aproximacion de x(t)', 'Aproximacion de y(t)')
18 title('Aproximacion mediante Euler expl cito')
19 hold off
20 plot(Y1(1,:),Y1(2,:))
21 xlabel('x(t)')
22 ylabel('y(t)')
23 title('Número de presas vs número de depredadores')
24 grid on

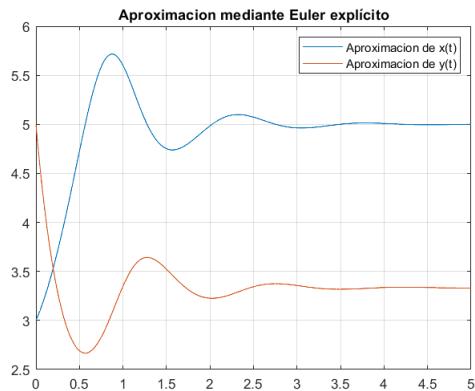
```

```

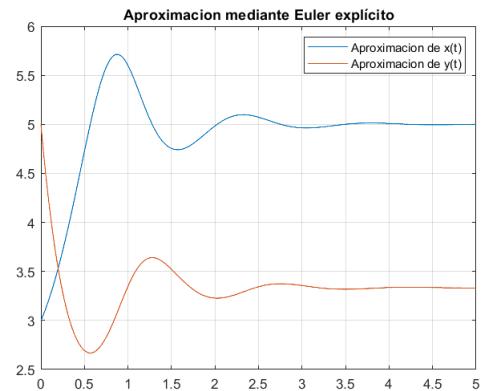
1 clear all;
2 % Caso R = 2
3 A = 4;B = 1/2;C = 3;D = 1/3;R = 2; a = 0; b = 5;
4 F = @(x,y)[A.*x - A.*B.*y.*(x - R); C.*y.*(D.*(x-R) - 1)];
5 % h = 0.0005
6 h2 = 0.0005;
7 t2 = a:h2:b;
8 Y2 = zeros(2,length(t2));
9 Y2(:,1) = [3 5];
10 for i = 2:length(t2)
11     Y2(:,i) = Y2(:,i-1) + h2*F(Y2(1,i-1),Y2(2,i-1));
12 end
13 plot(t2,Y2(1,:))
14 hold on
15 plot(t2,Y2(2,:))
16 grid on
17 legend('Aproximacion de x(t)', 'Aproximacion de y(t)')
18 title('Aproximacion mediante Euler expl cito')
19 hold off
20 plot(Y2(1,:),Y2(2,:))
21 xlabel('x(t)')
22 ylabel('y(t)')
23 title('Número de presas vs número de depredadores')
24 grid on

```

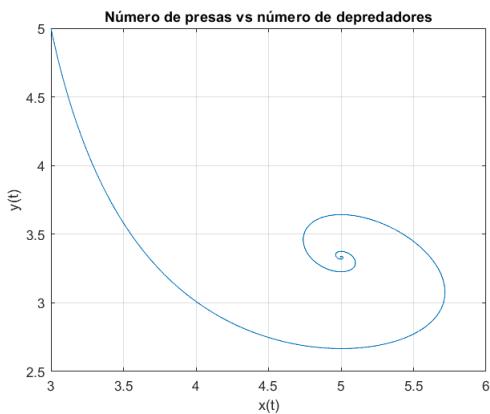
La gráfica de los resultados se presentan a continuación



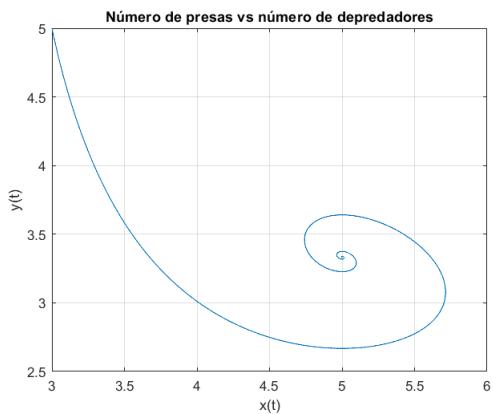
(a) Aproximación con  $h = 0,001$



(b) Aproximación con  $h = 0,0005$



(c) Aproximación con  $h = 0,001$



(d) Aproximación con  $h = 0,0005$

**Figura 9:** Aproximación del modelo predador-presa de Lotka-Volterra con refugio para la presa.