

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 3. Más ejercicios adicionales.

1. Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ en los siguientes casos:

(a) $a_n := \sqrt{n(n+1)} - n$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{ \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \right\}$; (b) $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$; (c) $\left\{ \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right\}$.

3. (a) Demuestra que si $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge.
(b) Da un ejemplo que muestre que la hipótesis $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ es necesaria.

4. Estudia la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2-1}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$.

5. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada una de las siguientes series, o bien demuestra que es convergente o bien da un ejemplo que demuestre que no necesariamente lo es:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$.

6. Determina rigurosamente para qué $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

7. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de números reales convergentes.

- (a) Demuestra que si una de ellas converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge absolutamente.
- (b) Da un ejemplo que muestre que si las dos series convergen, pero ninguna de ellos lo hace absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede no converger.

8. Estudia la convergencia de las siguientes series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n^2} - 1 \right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{n + 1}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1)}{n}$.

9. (a) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(b) En caso que la serie anterior converja, calcula el valor al que converge.

10. (a) Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(b) Da un ejemplo de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ no converge.