UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

# Listado 3: Análisis Numérico II, 2021

*Soluciones Sugeridas*

**Problema 1.** Demostrar que la inversa de una matriz triangular inferior, también es triangular inferior. Mostrar además que la inversa de las matrices $E_k$ definidas en la página 130 del libro de Ciarlet;

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\pi_k^{-1}\alpha_{k+1,k}^k & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\pi_k^{-1}\alpha_{nk}^k & & & 1 \end{bmatrix}$$

es de la forma

$$E_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \pi_k^{-1}\alpha_{k+1,k}^k & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \pi_k^{-1}\alpha_{nk}^k & & & 1 \end{bmatrix}$$

*Solución.*

- Primero probaremos que la inversa de una matriz triangular inferior invertible también es triangular inferior. Sea $L \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz triangular inferior no singular de elementos $l_{ij}$. Escribamos

  $$L^{-1} = \big[y_1\big|\cdots\big|y_n\big]$$

  donde cada $y_j$ es un vector columna. Si denotamos a la matriz identidad utilizando los vectores canónicos;

  $$I = \big[e_1\big|\cdots\big|e_n\big]$$

  Entonces, para cada $k \in \{1,\dots,n\}$,

  $$LL^{-1} = I \iff Ly_k = e_k$$

  Como $L$ es triangular inferior, y cada elemento sobre la fila $k$ en el vector $e_k$ es igual a cero, podemos realizar algo similar a una sustitución progresiva,

  $$Ly_k = e_k \iff \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k^{(1)} \\ y_k^{(2)} \\ \vdots \\ y_k^{(n)} \end{bmatrix} = e_k \implies \begin{cases} l_{11}y_k^{(1)} = 0 \\ l_{21}y_k^{(1)} + l_{22}y_k^{(2)} = 0 \\ \vdots \\ l_{k1}y_k^{(1)} + \cdots l_{kk}y_k^{(k)} = 1 \\ \vdots \\ l_{n1}y_k^{(1)} + \cdots l_{nn}y_k^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Como la matriz $L$ es invertible, todos los elementos de la diagonal deben ser distintos de cero. La primera ecuación, permite establecer que $y_k^{(1)} = 0$, utilizando esto en la segunda, tenemos que $y_k^{(2)} = 0$ y así hasta la ecuación $k-1$, obteniendo que $y_k^{(k-1)} = 0$. En resumen, esto nos dice que los primeros $k-1$ elementos de cada vector columna $y_k$ de la matriz $L^{-1}$ son cero. Esta información nos permite deducir que la matriz $L^{-1}$ es triangular inferior, concluyendo así la demostración.

- Para simplificar la notación, escribiremos a la matriz de eliminación como

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación, es fácil verificar que la matriz señalada efectivamente corresponde a la inversa de la matriz $E_k$. Podemos aprovechar la oportunidad para probar un resultado un poco más general.

Notemos que para toda matriz por bloques de la forma

$$B = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ F & I_{n-k} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Al ser multiplicada por la matriz

$$M = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -F & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

se puede trabajar como si fuera el producto usual de matrices,

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ F & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -F & I_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} = I_n \implies M = B^{-1}$$

Considerando la matriz $F$,

$$F := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -l_{k+1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -l_{n,k} \end{pmatrix}$$

Se tiene que $B = E_k$ y que $B^{-1} = (E_k)^{-1}$, lo que demuestra que la inversa de $E_k$ es, en efecto, la matriz $(E_k)^{-1}$ definida.

**Problema 2.** Ciarlet demuestra que $U = MA$, donde $M = E_{k-1}P_{k-1}\cdots E_1P_1$. Luego, para obtener $LU = PA$, bastaría probar que

$$U = (E_{k-1}P_{k-1}\cdots E_1P_1)A = (E^s_{k-1}\cdots E^s_1)(P_{k-1}\cdots P_1)A = L^{-1}PA \tag{2}$$

Donde $E^s_i$, para $i = 1,\ldots,k_1$ son matrices de eliminación (triangulares inferiores). Demuestre que en el proceso de eliminación Gaussiana los $E_k$ y $P_j$ pueden ser ordenados de la manera señalada en (2).

*Solución.* Supongamos que mediante el proceso de eliminación Gaussiana, llegamos a una descomposición de la forma

$$U = (E_{k-1}P_{k-1}\cdots E_1P_1)A \tag{3}$$

Donde $U$ es triangular superior, y las matrices $E_k, P_k$ corresponden a matrices de eliminación y permutación, respectivamente. Queremos observar qué es lo que ocurre al premultiplicar $E_i$ por una matriz $P_j$, con $i < j$.

Se tiene que la matriz de permutación $P_{i+1}$ corresponde a un intercambio de las filas $i+1$ e $\hat{i}$ sobre la matriz identidad (con $\hat{i} > i+1$, por construcción). En base a esto,

$$P_{i+1}E_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{ni} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{\hat{i},i} & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & \cdots & 0 & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ & & -l_{ni} & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

La matriz $P_{i+1}E_i$ no es triangular inferior, y puede parecer complicado seguir trabajando con ella. Esto nos lleva a definir de manera preliminar

$$\bar{E}_i := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{\hat{i},i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{i+1,i} & & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ & & -l_{ni} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, la matriz $P_{i+1}E_i$, pero con la columna $i+1$ e $\hat{\imath}$ permutadas. Teniendo en cuenta tal efecto se logra al postmultiplicar por una matriz de permutación, podemos escribir

$$P_{i+1}E_iP_{i+1} = \bar{E}_i$$

lo que se extiende de manera directa para todo $j > i$, i.e. la matriz $P_jE_iP_j$ es triangular inferior. Volviendo a (2), definimos

$$\begin{aligned}
E^s_{k-1} &= E_{k-1} \\
E^s_{k-2} &= P_{k-1}E_{k-2}P_{k-1} \\
E^s_{k-3} &= P_{k-1}P_{k-2}E_{k-3}P_{k-2}P_{k-1} \\
&\vdots \\
E^s_1 &= P_{k-1}\cdots P_2E_1P_2\cdots P_{k-1}
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, cada matriz $\bar{E}_i = P_jE_iP_j$, con $i < j$ corresponde a una matriz de eliminación o pivoteo de la forma $E_k$, en la que solo se produjo una permutación de los elementos bajo la diagonal en la $i-$ésima columna, esto también es cierto para cada matriz de eliminación $E^s_k$ definida justo arriba. Volviendo a (2), y usando que $PP_j = I$, se tiene

$$\begin{aligned}
U &= (E_{k-1}P_{k-1}E_{k-2}P_{k-2}\cdots E_1P_1)A \\
&= E_{k-1}(P_{k-1}E_{k-2}P_{k-1})P_{k-1}P_{k-2}E_{k-3}(P_{k-2}P_{k-1}P_{k-1}P_{k-2})\cdots E_1P_1A \\
&= E_{k-1}E^s_{k-2}(P_{k-1}P_{k-2}E_{k-3}P_{k-2}P_{k-1})P_{k-1}P_{k-2}\cdots E_1P_1A \\
&\vdots \\
&= (E^s_{k-1}E^s_{k-2}E^s_{k-3}\cdots E^s_1)(P_{k-1}P_{k-2}\cdots P_1)A \\
&:= L^{-1}PA
\end{aligned}$$

Donde definimos $P := (P_{k-1}P_{k-2}\cdots P_1)$, una matriz de permutación y $L^{-1} = (E^s_{k-1}E^s_{k-2}\cdots E^s_1)$, una matriz triangular inferior, de donde se deduce

$$L = (E^s_1)^{-1}(E^s_2)^{-1}\cdots(E^s_{k-1})^{-1}$$

En conclusión, obtuvimos que las matrices de permutación de filas y de eliminación que se obtienen en una eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, se pueden ordenar de tal manera que a la izquierda queden todas las de eliminación y a la derecha todas las de permutación.

# Extra

## Resultado 1.

Sean $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices por bloques tales que

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}$$

donde $A, E \in \mathbb{R}^{k\times k}$ con $k < n$. Luego,

$$MN = \begin{bmatrix} AE + CF & AG + AH \\ BE + DF & BG + DH \end{bmatrix}$$

donde cada bloque tiene las mismas dimensiones que los de $M$ o $N$.

*Demostración.* En primer lugar, veamos que las multiplicaciones tienen sentido, pues si $A$ es de orden $k$, entonces $B$ es de orden $(n-k)\times k$, $C$ es de orden $k \times (n-k)$ y $D$ es de orden $(n-k)\times(n-k)$, por la definición de una matriz por bloques. Lo mismo ocurre para la matriz $N$. De lo anterior, podemos deducir que el resto de las entradas tienen sentido y preservan los tamaños de los bloques.

Realizamos el producto de matrices para el primer bloque, para el resto de las entradas es análogo. Sean $1 \leq i,\ j \leq k$. Usando la definición usual del producto de matrices,

$$\begin{aligned}
(MN)_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} M_{ir}N_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} M_{ir}N_{rj} + \sum_{r=k+1} M_{ir}N_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} A_{ir}E_{rj} + \sum_{r=1}^{n-k} M_{i(k+r)}N_{(k+r)j} \\
&= \sum_{r=1}^{k} A_{ir}E_{rj} + \sum_{r=1}^{n-k} C_{ir}F_{rj} = (AE)_{ij} + (CF)_{ij} = (AE+CF)_{ij}
\end{aligned}$$

## Problema Extra

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no singular, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$, y sea $\boldsymbol{\delta b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vector de perturbación dado. Considere ahora $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta x}$ en $\mathbb{C}^n$ tales que

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ y } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\delta b}$$

Demuestre que dada $\|\cdot\|$, una norma subordinada de $\mathbb{C}^n$, se cumple

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \left(\frac{\|\boldsymbol{\delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

*Solución.* Dado que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, se tiene que

$$\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|x\| \tag{7}$$

pues la norma es subordinada. Por otro lado, observemos que

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta x}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{A\delta x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\delta b} \implies \boldsymbol{A\delta b} = \boldsymbol{\delta b}$$

Dado que $\boldsymbol{A}$ es no singular, podemos premultiplicar en la igualdad anterior por su inversa, obteniendo que $\boldsymbol{\delta b} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\delta b}$, aplicando norma a ambos miembros, se deduce que

$$\|\boldsymbol{\delta b}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\delta b}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{\delta b}\| \tag{8}$$

A partir de (7) y (8), podemos concluir que

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \left(\frac{\|\boldsymbol{\delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$