Límites infinitos y Asíntotas

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Límites infinitos

Definición 1

Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, $a \in I$ con I un intervalo abierto tal que $I - \{a\} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \iff \text{Dado } M > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) : a < x < a + \delta \implies f(x) > M$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff \text{Dado } M < 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) : a < x < a + \delta \implies f(x) < M$$

Similarmente, se define $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Ejemplo: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Álgebra de Límites

Propiedades de límites infinitos

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones reales y $a \in I$, con I un intervalo abierto tal que $I - \{a\} \subseteq D$.

1. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$ entonces

$$\lim_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty \text{ y } \lim_{x \to a^+} [f(x)g(x)] = +\infty$$

2. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$ entonces
   - $\lim_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty$
   - $\lim_{x \to a^+} [f(x)g(x)] = +\infty$ si $L > 0$
   - $\lim_{x \to a^+} [f(x)g(x)] = -\infty$ si $L < 0$

Análogamente para $x \to a^-$ o $x \to a$.

Álgebra de Límites

Operaciones

Se cumplen las siguientes operaciones:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $L \cdot (+\infty) = +\infty$ si $L > 0$
- $L \cdot (+\infty) = -\infty$ si $L < 0$
- $L \cdot (-\infty) = -\infty$ si $L > 0$
- $L \cdot (-\infty) = +\infty$ si $L < 0$

Formas indeterminadas

Las siguientes expresiones no se pueden determinar a menos de realizar operaciones algebraicas en el límite:

$$0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0 \text{ y } 1^\infty.$$

Asíntotas Verticales

Definición 2

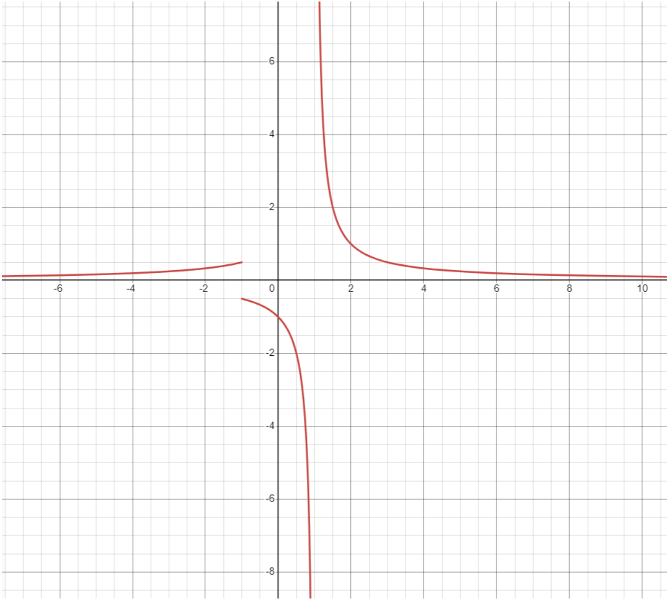
En cualquiera de los 4 casos de la Definición 1, la recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** del gráfico de $y = f(x)$.

Ejemplo 1: Notar que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} = +\infty$. Luego, el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ tiene como asíntota vertical la recta $x = a$.

Ejemplo 2: El gráfico de la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2-3}$ tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

Ejemplo 3: El gráfico de la función $g(x) = \dfrac{|x+1|}{x^2-1}$ tiene como asíntota vertical $x = 1$.

Ejemplo 3



Límites al infinito

Definición 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L, L \in \mathbb{R} \iff \text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } M > 0 \text{ tal que}$$
$$\forall x : \ x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L, L \in \mathbb{R} \iff \text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } M < 0 \text{ tal que}$$
$$\forall x : \ x < M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observación. Los teoremas de límites y sus propiedades también se aplican para límites al infinito.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Asíntotas Horizontales

Definición 4

En cualquiera de los casos de la Definición 3, la recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** del gráfico de f.

Ejemplo 1. El gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$.

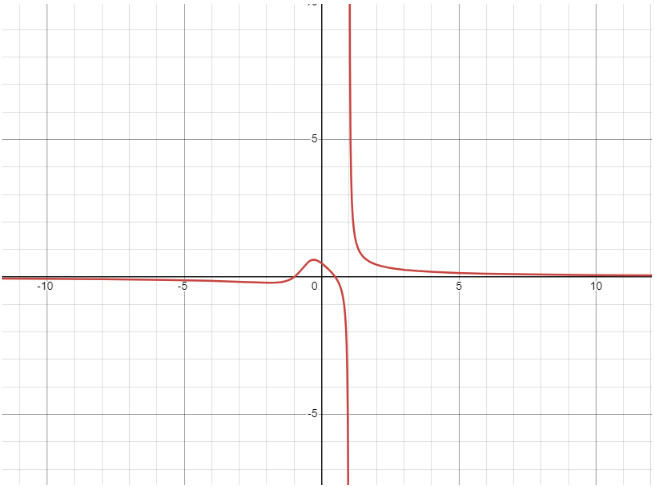
Ejemplo 2. El gráfico de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene dos asíntotas horizontales de ecuaciones $y = 1$ y $y = -1$.

Ejemplo 3. El gráfico de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - x - 2}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = \dfrac{2}{3}$.

Ejemplo 4. El gráfico de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{3x^3 - x - 2}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$.

Ejemplo

Notar que la función en el ejemplo 4 también tiene una asíntota vertical $x = 1$. A continuación, vemos su gráfica.



Asíntotas Oblicuas

Definición 5

Sea f una función real. Diremos que la recta $y = mx + n$ es **asíntota oblicua** del gráfico de f si se verifica

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Observación. Notar que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n.$$

Asíntotas oblicuas

Luego, $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m \right] = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = m.$

En consecuencia, la curva $y = f(x)$ tendrá una asíntota oblicua si y sólo si existen los límites

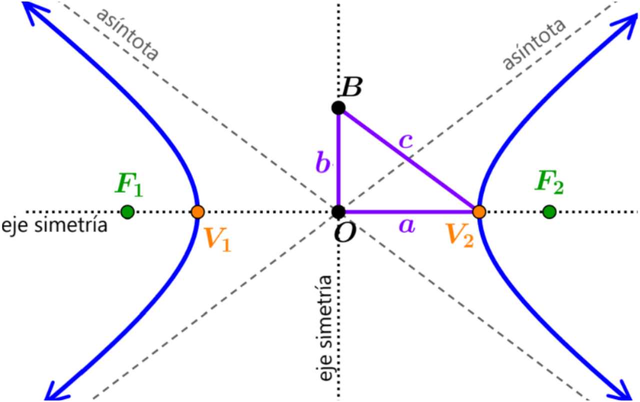
$$m = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \text{ y } n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

La observación es análoga en el caso $\lim_{x \to -\infty}$.

Hipérbola

Una hipérbola *horizontal* $\mathcal{H}$ centrada en el $(0,0)$ tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Asíntotas de una hipérbola

- Las asíntotas de una hipérbola horizontal con centro (h, k) son dos rectas de pendiente $\pm\dfrac{b}{a}$ y que se intersectan en el punto (h, k).
- En el caso de una hipérbola vertical con centro (h, k), sus asíntotas tienen pendiente $\pm\dfrac{a}{b}$ y se intersectan en (h, k).

Limites infinitos en el infinito

De la definición 1 [p. 2] y 3 [p. 7], se tiene la siguiente:

Definición 6

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \text{Dado } N > 0, \text{ existe } M > 0 \text{ tal que}$$
$$\forall x : \; x > M \implies f(x) > N$$

Similarmente, se define $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Ejemplo: $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Ejercicios

1. Calcular los siguientes límites
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$
   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3+x-1}{3x^2-x-2}$
   c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{|1-x|}$

2. Calcular todas las asíntotas de las siguientes funciones
   a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$
   b) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x-1}$
   c) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2-3}$