UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO 2024 – 2

Pauta Evaluación N°3

Álgebra 2 - 525150

Problema 1. (15 puntos)

En el espacio vectorial real $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se define el siguiente producto interior

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Además, sea S el subespacio generado por $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Con respecto al producto interior definido:

(a) Determinar una base ortonormal para S.

Solución: Sea $B_1 = \{A_1, A_2\}$ una base ortogonal para S, la cual la obtendremos utilizando el proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt basándonos en B, como sigue:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortogonal de S. Ahora bien, debemos ortonormalizar los vectores de la base B_1, como sigue:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle^{1/2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow M_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{1/2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow M_2 = \frac{A_2}{\|A_2\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $B_2 = \{M_1, M_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de S.

(b) Determinar $C \in S$, la mejor aproximación de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \in V$, por elementos de S. Luego, calcular el valor de la distancia entre A y S.

Solución: La matriz C corresponde a la proyección ortogonal de A sobre S, como B_1 es una base ortogonal de S se cumple que $\text{Proy}_S(A) = \text{Proy}_{A_1}(A) + \text{Proy}_{A_2}(A)$, donde:

$$\text{Proy}_{A_1}(A) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Proy}_{A_2}(A) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $C = \text{Proy}_S(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = A$, lo que implica que $A \in S$ y por ende la distancia entre A y S es 0.

Problema 2. (15 puntos)

Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar el espectro de A, es decir, $\sigma(A)$.

Solución: Recordemos que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : p_A(\lambda) = 0\}$, luego para determinar los valores propios calculamos el polinomio característico de A, como sigue:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Ahora bien, $p_A(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = -1$ o $\lambda = 1$, y por lo tanto $\sigma(A) = \{-1, 1\}$.

(b) Determinar una base para cada subespacio propio asociado a cada valor propio de A.

Solución: Por definición, se tiene:

$$S_{-1}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0 \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$S_1(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x + y \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Con esto podemos notar que las multiplicidades geométricas son $m_g(-1) = \dim(S_{-1}(A)) = 1$ y $m_g(1) = \dim(S_1(A)) = 2$, ya que los conjuntos generadores $D_1 = \{(0,1,0)^t\}$ y $D_2 = \{(1,0,1)^t, (0,1,1)^t\}$ son linealmente independientes (en el primero el vector es no nulo y en el caso del segundo los vectores son no paralelos).

(c) Verificar que A es diagonalizable y definir la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D semejante con A, de modo que $AP = PD$.

Solución: Notemos que A es diagonalizable ya que $m_a(-1) + m_a(1) = 3$ y además $m_a(-1) = m_g(-1)$ y $m_a(1) = m_g(1)$. Dado esto, podemos construir las matrices P y D como sigue:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Utilizar lo obtenido en (c) para calcular A^{101}.

Solución: Como A es diagonalizable, se tiene que $AP = PD$ y por ende:

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{101} = PD^{101}P^{-1}$$

Ahora bien, notemos que:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así, se tiene:

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{101} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3. (15 puntos)

3.1 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de A, entonces

$$S_{\lambda_1}(A) \cap S_{\lambda_2}(A) = \{\theta\},$$

donde θ es el vector nulo de $\mathbb{K}^n$.

Solución: Sea $v \in S_{\lambda_1}(A) \cap S_{\lambda_2}(A)$, luego por definición de valor propio se tiene que $Av = \lambda_1 v$ y $Av = \lambda_2 v$. Dado esto, se tiene:

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \Leftrightarrow v(\lambda_1 - \lambda_2) = \theta$$

lo cual implica que $v = \theta \ \vee \ \lambda_1 = \lambda_2$, pero por hipótesis se sabe que λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes de A y por ende $S_{\lambda_1}(A) \cap S_{\lambda_2}(A) = \{\theta\}$.

3.2 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases

$$B_1 = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1)\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{x^2, x, 1\}$$

está dada por

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Definir la regla de correspondencia de T.

Solución: Para definir la regla de correspondencia de T, primero consideremos que $[T]_{B_1}^{B_3}$ es su matriz representante con respecto a las bases indicadas y por ende se cumple que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1 = x^2 + x$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = x + 2$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2 \cdot 1 = x^2 - 2$$

Además, como B_1 es base $\mathbb{R}^3$, se puede asegurar que existe una única transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que cumple las condiciones anteriores. Ahora bien, como B_1 es base de $\mathbb{R}^3$ existen únicos escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c - b \\ \beta = a + b - c \\ \gamma = b \end{cases}$$

así, se infiere que:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (c-b)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (a+b-c)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = cx^2 + ax + 2a - 2c$$

Finalmente, la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ está definida por:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = cx^2 + ax + 2a - 2c$$

(b) Determinar una base para $\mathrm{Im}(T)$. ¿Es T es un isomorfismo?

Solución: Por definición, se tiene:

$$\mathrm{Im}(T) = \left\langle \left\{ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \{x^2 + x,\ x + 2,\ x^2 - 2\} \right\rangle$$

podemos observar que el conjunto $B_3 = \{x^2+x,\ x+2,\ x^2-2\}$ es linealmente dependiente, ya que $x^2+x = 1(x+2)+1(x^2-2)$, por ende $B_4 = \{x+2, x^2-2\}$ es linealmente independiente, ya que los vectores que los componen son no paralelos. Así, se tiene que una base para la $\mathrm{Im}(T)$ es B_4. Por otro lado, la $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ y por ende $\mathrm{Im}(T) \neq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dado esto concluimos que T no es sobreyectiva y por lo tanto T no es un isomorfismo.

Problema 4. (15 puntos)

4.1 Sea $L : \mathbb{C} \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ una aplicación definida por:

$$L(z) = z^2(x+1)$$

¿Es L una transformación lineal?

Solución: Notemos lo siguiente:

$$L(2i) = (2i)^2(x+1) = -4(x+1) \quad \text{y} \quad 2L(i) = 2i^2(x+1) = -2(x+1)$$

es claro que $L(2i) \neq 2L(i)$, por ende L no es una transformación lineal.

4.2 Sean B_1, B_2 y B_3 las siguientes bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \{1+x,\ 2x,\ x^2-1\} \quad \text{y} \quad B_3 = \{2, i\},$$

de los espacios vectoriales reales $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. Además, sean $T_1 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ y $T_2 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ transformaciones lineales tales que:

$$[T_1]_{B_2}^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b+d)x + c$$

(a) Calcular la matriz representante de T_2 con respecto a las base B_1 y B_2, es decir, $[T_2]_{B_1}^{B_2}$.

Solución: Consideremos las siguientes matrices de B_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz $[T_2]_{B_1}^{B_2}$, debemos calcular las coordenadas de $T_2(A_1)$, $T_2(A_2)$, $T_2(A_3)$ y $T_2(A_4)$, con respecto a la base B_2, como sigue:

$$T_2(A_1) = x^2+1 = 2(x+1) - (2x) + 1(x^2-1) \Rightarrow [T_2(A_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2(A_2) = 1+x = 1(1+x) + 0(2x) + 0(x^2-1) \Rightarrow [T_2(A_2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(A_3) = 1+x = 1(1+x) + 0(2x) + 0(x^2-1) \Rightarrow [T_2(A_3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(A_4) = 1 = 1(1+x) - \tfrac{1}{2}(2x) + 0(x^2-1) \Rightarrow [T_2(A_4)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado lo anterior, se tiene:

$$[T_2]_{B_1}^{B_2} = \big([T_2(A_1)]_{B_2} \quad [T_2(A_2)]_{B_2} \quad [T_2(A_3)]_{B_2} \quad [T_2(A_4)]_{B_2}\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Demostrar que $T_1 \circ T_2$ es lineal y calcular $(T_1 \circ T_2)(A)$ con $[A]_{B_1} = (1,1,1,1)^t$.

Solución: Notemos que $T_1 \circ T_2$ es una transformación lineal, ya que es una composición de dos transformaciones lineales. Por otro lado, para determinar $(T_1 \circ T_2)(A)$ consideremos lo siguiente:

$$[(T_1 \circ T_2)(A)]_{B_3} = [T_1 \circ T_2]_{B_1}^{B_3} [A]_{B_1} = [T_1]_{B_1}^{B_2} [T_2]_{B_2}^{B_3} [A]_{B_1}$$

dado esto, se tiene:

$$[(T_1 \circ T_2)(A)]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(T_1 \circ T_2)(A) = 4 \cdot 2 + 1 \cdot i = 8 + i$.