Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales
y
operadores diferenciales

Carlos M. Mora

EDO lineal de orden n

$$a_0(x)\,Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \,]\alpha, \beta[$$

- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, g : \,]\alpha, \beta[\, \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$
- $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in \,]\alpha, \beta[$.

Si $g(x) \equiv 0$, la EDO lineal de orden n es homogénea.

Operador Derivada

El operador diferencial de derivación D asocia a cada función derivable $Y(x)$ su derivada $\frac{d}{dx}Y(x)$. O sea

$$D\,Y = Y'$$

Derivadas de orden superior

$$D^2\,Y = D \circ DY = D\,Y' = Y''$$

$$(D^n\,Y)(x) = \frac{d^n}{dx^n}Y(x)$$

Linealidad del Operador Derivada $D = \frac{d}{dx}$

Si Y, Z son funciones derivables y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

- $D\,(Y + Z) = D\,Y + D\,Z$
- $D\,(c\,Y) = c\,D\,Y$

Asuma que $a\,(x)$ es una función derivable. Entonces

- $(a\,D)\;\; Y = a\,Y'$
- $(D\,a)\;\; Y = a\,Y' + a'\,Y$

Entonces $a\,D \neq D\,a$ salvo que $a\,(x)$ sea constante.

Escritura con operador Derivada $D = \frac{d}{dx}$

$$a_0(x)\,Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \left]\alpha,\beta\right[$$

$$a_0(x)\,D^n\,Y(x) + a_1(x)\,D^{n-1}\,Y(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,D\,Y(x) + a_n(x)\;Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \left]\alpha,\beta\right[$$

$$L := a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x)$$

$$L\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \left]\alpha,\beta\right[$$

$L : \mathcal{C}^n\left(\left]\alpha,\beta\right[,\mathbb{R}\right) \to \mathcal{C}\left(\left]\alpha,\beta\right[,\mathbb{R}\right)$ es una aplicación lineal

Principio de superposición

Para todo $x \in \,]\alpha, \beta[$,

$$(L\,f)\,(x) := a_0\,(x)\,f^{(n)}\,(x) + a_1\,(x)\,f^{(n-1)}\,(x) + \cdots + a_{n-1}\,(x)\,f'\,(x) + a_n\,(x)\,f\,(x)\,.$$

Considere las EDOs

$$L\,Y = g$$

$$L\,Z = h$$

y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces

$$L\,(c_1\,Y + c_2\,Z) = c_1 g + c_2\,h$$

Ejemplo

$$L\,f := (1-t)^2\,f'' + 4\,t\,f' - 4\,f$$

Entonces

- $Y_1\,(t) = e^{2t}$ satisface la EDO
$$LY_1\,(t) = 4\,t^2\,e^{2t}$$
- $Y_2\,(t) = t^2$ satisface la EDO
$$LY_2\,(t) = 6\,t^2 - 4\,t + 2$$

Ejercicio

Construir una solución de:

$$(1-t)^2\,Y''\,(t) + 4\,t\,Y'\,(t) - 4\,Y\,(t) = t^2\,e^{2t} - 3\,t^2 + 2\,t - 1$$

$$Y\,(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t^2$$

Principio de superposición

Considere las EDOs lineales homogéneas

$$L\,Y = 0, \qquad\qquad L\,Z = 0$$

donde

$$(L\,f)(x) := a_0(x)\,f^{(n)}(x) + a_1(x)\,f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,f'(x) + a_n(x)\,f(x)$$

con $a_0(x) \neq 0$ y $a_0, \ldots, a_n$ funciones continuas.
Entonces, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$L(c_1\,Y + c_2\,Z) = 0$$

El conjunto de todas las soluciones de

$$L\,Y = 0$$

forman un subespacio vectorial, llamado el kernel de L y denotado $kern(L)$.
Además, la dimensión del $kern(L)$ es n.

EDO lineal homogénea

Sea $a :]x_i, x_f[\to \mathbb{R}$ una función continua conocida.

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \qquad \forall x \in]x_i, x_f[\,.$$

La solución general es:

$$y(x) = K \exp\left(\int a(x)\, dx \right)$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

Solución general de una EDO lineal de orden n homogénea

Considere la EDO

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]\alpha,\beta[\qquad (1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n : \,]\alpha,\beta[\, \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Un conjunto de n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linealmente independientes de (1) es llamado sistema fundamental de soluciones de (1).

Asumamos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (1). Entonces, para toda solución de (1) existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$Y(x) = C_1\,f_1(x) + C_2\,f_2(x) + \cdots + C_n\,f_n(x).$$

EDO lineal de coeficientes constantes

Fijemos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sea $D = \frac{d}{dx}$.

$$Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Polinomio característico

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Factorización

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ números diferentes

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_q)^{m_q}$$

Ejemplo (raíces reales simples)

Encuentre la solución general de

$$Y''(x) - Y'(x) - Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(D^2 - D - 1\right) Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$.

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right)$

$$D^2 - D - 1 = \left(D - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)\left(D - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right)$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad \frac{d}{dx} \exp(\lambda x) = \lambda \exp(\lambda x) \Leftrightarrow (D - \lambda) \exp(\lambda x) = 0$

La solución general es

$$Y(x) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) x\right)$$

Ejemplo (raíces reales simples)

Encuentre la solución general de

$$Y'''(x) - 7\,Y'(x) + 6\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(D^3 - 7\,D + 6\right)\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\,\lambda + 6 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 3)$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \frac{d}{dx} \exp(\lambda\,x) = \lambda\,\exp(\lambda\,x) \Leftrightarrow (D - \lambda)\exp(\lambda\,x) = 0$

La solución general es

$$Y(x) = C_1\,\exp(x) + C_2\,\exp(2\,x) + C_3\,\exp(-3\,x)$$

con $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.