UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

FPV/fpv 28.11.25(13:15) **E2** **MAT 525212/525252** **Tiempo 100 minutos**

P1 (7+8 pts.) Construir en torno a $z_0 = 4$ para la función racional

$$Q(z) = \frac{z^2 - 10z + 25}{z-6} = z - 4 + \frac{1}{z-6}$$

1. La representación en serie de Taylor en la región $|z-4| < 2$
2. La representación en serie de Laurent en la región $2 < |z-4|$.

Solución Propuesta

Previo $\frac{1}{z-6} = \frac{1}{(z-4)-2}$

1. En la región propuesta

$$\begin{aligned} Q(z) &= z - 4 - (\tfrac{1}{2})\frac{1}{1-(\frac{z-4}{2})} \\ &= z - 4 - \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(z-4)^n}{2^{n+1}} \\ &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}(z-4) - \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{(z-4)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

2. En la región propuesta

$$\begin{aligned} Q(z) &= z - 4 + (\tfrac{1}{z-4})\frac{1}{(1-\frac{2}{z-4})} \\ &= z - 4 + \sum_{n=0} \tfrac{2^n}{(z-4)^{n+1}} \\ &= \cdots \frac{2^3}{(z-4)^4} + \frac{2^2}{(z-4)^3} + \frac{2}{(z-4)^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(z-4)}} + (z-4) \end{aligned}$$

P2 (**8+8 pts.**)

1. Los puntos $z_1 = -1, z_2 = -1 + i$ y $z_3 = -2 - 2i$ definen la trayectoria poligonal $[z_1, z_2, z_3]$. Evaluar $\displaystyle\int_{[z_1, z_2, z_3]} \frac{dz}{z}$.

Indicación. Elegir una rama logarítmica que permita asegurar la independencia de la trayectoria.

2. Determinar las singularidades de $f(z) = \frac{z+\cos(\pi z)}{(z-1)(z^2+1)}$ y evaluar $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} f(z)dz$.

Solución Propuesta

1. Basta elegir como primitiva $F(z) = \mathrm{Log}_0(z)$ y $F'(z) = \frac{1}{z}$.
En el dominio de analiticidad de F la integral es independiente de la trayectoria y se verifica el TFC Integral complejo:

$$\begin{aligned}
\int_{[z_1,z_2,z_3]} \frac{dz}{z} &= \int_{z_1}^{z_3} \frac{dz}{z} \\
&= F(z)\Big|_{z_1}^{z_3} \\
&= \left[\tfrac{3}{2}\ln(2) + i\tfrac{5\pi}{4}\right] - \left[\ln(|-1|) + i\pi\right] \\
&= \tfrac{3}{2}\ln(2) + i\tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. Los ceros del denominador son $z = 1, z = \pm i$.
¿Cuáles serán polos?
Sea $g(z) = \frac{z+\cos(\pi z)}{z-1}$ entonces aplicando la Regla de L'Höpital

$$\lim_{z\to 1} g(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1 - \pi \sin(\pi z)}{1 - 0} = 1.$$

Así $z = 1$ es singularidad removible y son polos simple $z = \pm i$. (**4 pts.**)
Finalmente aplicando el criterio visto en clases

$$\oint_{|z-i|=1} f(z)dz = (2\pi i) \lim_{z\to i} \frac{g(z)}{(z^2+1)'} = \frac{2\pi i g(i)}{2i} = \pi g(i). \quad \textbf{(4pts.)}$$

donde $g(i) = \frac{i+\cosh(\pi)}{i-1} = \frac{1}{2}\big(1 - \cosh(\pi) - i(1 + \cosh(\pi)\big)$

P3 (**8+8 pts.**)

1. Establecer que si f y g son dos funciones analíticas salvo en $z = a$, tales que $f(a) = g(a) = g'(a) = 0$ pero $f'(a) \neq 0$ y $g''(a) \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{Res}_1\left(\frac{\mathbf{f}}{g}, a\right) = \frac{\mathbf{2}f'(a)}{g''(a)}.$$

2. Evaluar

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z + \cos(\pi z)}{z^3 - 3z + 2} dz$$

Solución Propuesta

1. Desarrollado en clases.

2. Para aplicar el criterio anterior definimos $f(z) = z + \cos(\pi z)$ y $g(z) = z^3 - 3z + 2$. Como la factorización de $g(z) = (z-1)^2(z+2)$ se concluye que la única singularidad encerrada por el contorno positivamente orientado de integración es $\mathbf{a = 1}$. Así

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z + \cos(\pi z)}{z^3 - 3z + 2} dz = (2\pi i)\frac{\mathbf{2}f'(a)}{g''(a)} = \frac{\mathbf{4}\pi i}{6} = \frac{2\pi i}{3}.$$

P4 (13 pts.) Defina un dominio indentado para determinar el

$$(VP) \qquad a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx.$$

Desarrollado en Clase de Práctica y otras versiones en clase.