Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — viernes 6 de julio de 2018

Soluciones sugeridas

Problema 1 (10 puntos)**.** Se considera el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y un vector inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios, indicar un números N de iteraciones de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para el cual se puede garantizar que $\|\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}^*\| \leq 10^{-3}\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\|$, donde $\boldsymbol{x}^*$ es la solución exacta y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Solución sugerida. El método de Jacobi puede ser escrito como

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{J} := \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}),$$

siendo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ la descomposición habitual de $\boldsymbol{A}$. Si $\boldsymbol{x}_*$ es la solución exacta de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, es decir $\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_* &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_* \\ &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_* + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_*) = \ldots = \boldsymbol{J}^k(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*). \end{aligned}$$

Es decir, para $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$,

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| \leq \|\boldsymbol{J}^k\|\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*\| \leq \|\boldsymbol{J}\|^k\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*\|.$$

En nuestro caso,

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{J}\|_\infty = \|\boldsymbol{J}\|_1 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

El número N de iteraciones es el entero menor que satisface $0.5^N \leq 10^{-3}$, es decir $N = \lceil -3/\log_{10} 0.5 \rceil = \lceil 9.9658 \rceil = 10$.

5 puntos

Para el método de Gauss-Seidel obtenemos la iteración

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{H} := (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U},$$

y en forma similar al análisis del método de Jacobi, $\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{H}^k(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*)$. Aquí

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.0625 & 0.3125 \\ 0 & 0.0625 & 0.1125 \end{bmatrix} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 0 & -20 & -20 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{H}\|_\infty = \frac{1}{2} = 0.5, \quad \|\boldsymbol{H}\|_1 = \frac{54}{80} = 0.675,$$

luego se necesitan a lo más $N = \lceil -3/\log_{10} 0.5 \rceil = \lceil 9.9658 \rceil = 10$ iteraciones para lograr la reducción del error en $\|\cdot\|_\infty$ y $N = \lceil -3/\log_{10} 0.675 \rceil = \lceil 17.5751 \rceil = 18$ iteraciones para lograr la reducción del error en $\|\cdot\|_1$. (Se podrán desarrollar mejores cotas considerando $\boldsymbol{J}^2$ y $\boldsymbol{H}^2$, los radios espectrales, etc.)

5 puntos

Problema 2 (10 puntos)**.** Se consideran las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Para cuales de ellas se puede garantizar o excluir la convergencia (a) del método de Jacobi, (b) del método de Gauss-Seidel, (c) del método SOR con $0 < \omega \leq 2$, (d) del método cg de Hestenes y Stiefel, y sin calcular ningún radio espectral?

Solución sugerida.

$\boldsymbol{A}$: (a) Esta matriz es irreduciblemente diagonal dominante y por lo tanto el método de Jacobi **converge.**

(b) La matriz es ordenada consistentemente. Por lo tanto, la convergencia del método de Jacobi implica la del método de Gauss-Seidel.

(c) Los criterios de convergencia contemplan la convergencia del método SOR sólo para $0 < \omega < 2$, es decir no existe ningún criterio que permita establecer a priori la convergencia para $0 < \omega \leq 2$. De hecho, de acuerdo al Teorema 4.10, para $\omega = 2$ se tiene $r_\sigma(\boldsymbol{B}(2)) \geq 1$, lo que **excluye la convergencia** del método SOR para este valor de ω para todo vector inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^5$ (Teorema 4.1). Incluso si contemplamos sólamente $0 < \omega < 2$, no podemos asegurar convergencia del método SOR ya que el Teorema 4.11, que se refiere a esta caso, se aplica solamente a matrices simétricas y definidas positiva, lo que no es el caso aquí.

(d) El método cg de Hestenes y Stiefel puede ser aplicado solamente a matrices simétricas y definidas positivas, lo que no es el caso aquí. Por lo tanto **se excluye su convergencia**.

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

$\boldsymbol{B}$: (a) Esta matriz es irreduciblemente diagonal dominante. Por lo tanto, el método de Jacobi **converge**.

(b) Esta matriz satisface, además, las hipótesis del Teorema de Stein-Rosenberg (en particular, es una L-Matriz). Por lo tanto, la convergencia del método de Jacobi implica que también el método de Gauss-Seidel **converge**.

(c) Los criterios de convergencia contemplan la convergencia del método SOR sólo para $0 < \omega < 2$, es decir no existe ningún criterio que permita establecer a priori la convergencia para $0 < \omega \leq 2$. De hecho, de acuerdo al Teorema 4.10, para $\omega = 2$ se tiene $r_\sigma(\boldsymbol{B}(2)) \geq 1$, lo que **excluye la convergencia** del método SOR para este valor de ω para todo vector inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^5$ (Teorema 4.1). Sin embargo si contemplamos sólamente $0 < \omega < 2$, **podemos asegurar convergencia** del método SOR ya que el Teorema 4.11, que se refiere a esta caso, se aplica a matrices simétricas y definidas positivas, tal como la presente.

(d) La matriz $\boldsymbol{B}$ es simétrica y definida positiva (considerando, por ejemplo, que todos sus valores propios están localizados en el intervalo $[0, 4]$ de acuerdo al Teorema de Gershgorin pero que 0 no puede ser valor propio ya que $\boldsymbol{B}$ es regular de acuerdo al Teorema 4.4). Por lo tanto, el método cg de Hestenes y Stiefel puede ser aplicado y podemos **asegurar su convergencia** (incluso entrega la solución exacta después de un número finito de pasos).

3 puntos

$\boldsymbol{C}$: (a) El método de Jacobi**no puede ser aplicado** directamente, ya que algunos elementos diagonales de $\boldsymbol{C}$ son cero.

(b) El método de Gauss-Seidel **no puede ser aplicado** directamente, ya que algunos elementos diagonales de $\boldsymbol{C}$ son cero.

(c) El método SOR **no puede ser aplicado** por el mismo motivo.

(d) La matriz tampoco es simétrica, así que no podemos aplicar el método cg.

$\boldsymbol{C}$: *Respuesta alternativa*: Esta matriz corresponde a dos sistemas desacoplados formados por las las filas 1-3-5 y 2-4, y las columnas 1-2-4 y 3-5, correspondientes a las matrices

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Ambas matrices son estrictamente diagonal dominantes, por lo tanto el método de Jacobi **converge**.

(b) Como $\boldsymbol{C}_1$ no es simétrica, ni una L-matriz, ni ordenada consistentemente, no tenemos un resultado que asegure la convergencia del método de Gauss-Seidel sin calcular radios de convergencia.

(c) No podemos asegurar convergencia del método de Gauss-Seidel para los dos sistemas desacoplados por motivos similares.

(d) Como $\boldsymbol{C}_1$ no es simétrica, **se excluye** la convergencia del método cg.

2 puntos

$\boldsymbol{D}$: (a, b, c, d) Las columnas de $\boldsymbol{D}$ se suman a $\mathbf{0}$, por lo tanto $\boldsymbol{D}$ es singular y **se excluye convergencia de cualquier de todos los métodos**.

2 puntos

Problema 3 (15 puntos)**.**

a) Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

y sea $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ la partición habitual de $\boldsymbol{A}$. Sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ dado y el método de Jacobi para la aproximación de una solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dado por

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Probar que el método de Jacobi *no* converge para todo vector inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

b) Demostrar que aplicando una matriz de permutación $\boldsymbol{P}$, se puede reformular el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$, con $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$ y $\boldsymbol{c}$ definido adecuadamente, tal que el método de Jacobi aplicado a $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$ converge para todo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

c) Utilizando el resultado de (b), calcular una solución aproximada $\boldsymbol{x}_2$ (dos pasos del método de Jacobi) de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = (1, 15, 11)^{\mathrm{T}}$ a partir de $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Solución sugerida.

a) El método de Jacobi puede ser escrito como $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$, donde en este caso

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Según el Teorema 4.1, el método converge a la solución exacta del sistema para todo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $r_\sigma(\boldsymbol{J}) < 1$. Pero aquí sabemos que

$$|\det \boldsymbol{J}| = \left| 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} + \frac{5}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{31}{2} > 1.$$

Como el determinante es el producto de los valores propios, esto es posible sólo si por lo menos uno de los valores propios posee un valor absoluto mayor que uno, luego $r_\sigma(\boldsymbol{J}) > 1$ y queda demostrado que el método no converge para todo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

b) Conviene mover la primera fila de $\boldsymbol{A}$ al segundo lugar, la segunda fila al tercer lugar, y la tercera fila al primer lugar para obtener un sistema una matriz irreduciblemente diagonal dominante. Precisamente, definimos

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

El vector $\boldsymbol{c}$ está dado por $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Pb}$, luego $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{PAx} = \boldsymbol{Pb} \Leftrightarrow \boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$, y como $\boldsymbol{B}$ es irreduciblemente diagonal dominante, el método de Jacobi (aplicado a $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$) converge para todo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ (Teorema 4.4).

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

c) Sean $\tilde{\boldsymbol{J}}$, $\tilde{\boldsymbol{L}}$, $\tilde{\boldsymbol{D}}$ y $\tilde{\boldsymbol{U}}$ las matrices correspondientes a $\boldsymbol{B}$. Aquí tenemos

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{J}} = \tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Evaluando $\boldsymbol{x}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{x}_k + \tilde{\boldsymbol{D}}^{-1}\boldsymbol{c}$ obtenemos

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -0.9 \\ 4.1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Problema 4 (10 puntos)**.**

a) Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene tres valores propios reales distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, y determinar números α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$, tales que $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$.

b) Sea la matriz $\boldsymbol{B}$ dada por

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.04 \\ 0.01 & 2 & 0.01 \\ 0.02 & 0.02 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que $\boldsymbol{B}$ posee tres valores propios reales $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Considerando una transformación de similaridad con $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(0.1, 5, 1)$, demostrar que $\lambda_1 \in [0.995, 1.005]$.

Solución sugerida.

a) De acuerdo al Teorema de Gershgorin, aplicado "por filas", llegamos a la conclusión

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leq 2\}; \\ &\lambda_2, \lambda_3 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-7| \leq 4\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z-13| \leq 3\}, \end{aligned} \tag{1}$$

mientras que su aplicación "por columnas" entrega que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leq 5\}; \\ &\lambda_2 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-7| \leq 2\}, \\ &\lambda_3 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-13| \leq 2\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Como la matriz $\boldsymbol{A}$ posee entradas reales solamente, la única posibilidad de existir un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ corresponde a un par del tipo $\lambda_k = a + b\mathrm{i}$, $\lambda_{k+1} = \bar{\lambda}_k = a - b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Esta situación está excluida aquí porque (2) indica que no puede haber dos valores propios con la misma parte real. Combinando (1) y (2) obtenemos las inclusiones

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -4 \leq \lambda_1 \leq 0 = \beta_1, \\ \alpha_2 = 5 \leq \lambda_2 \leq 9 = \beta_2, \\ \alpha_3 = 11 \leq \lambda_3 \leq 15 = \beta_3. \end{aligned} \tag{3}$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

b) Aplicando el Teorema de Gershgorin por filas, obtenemos los círculos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 0.09\}, \\ \mathcal{K}_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 0.02\}, \\ \mathcal{K}_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| = 0.04\}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$, sabemos que cada uno de los círculos contiene exactamente un valor propio, y por motivos similares a los discutidos en la parte (a) concluimos que los tres valores propios son reales, es decir $\lambda_i \in \mathcal{K}_i \cap \mathbb{R}$, o sea,

$$\lambda_1 \in [0.91, 1.09], \quad \lambda_2 \in [1.98, 2.02], \quad \lambda_3 \in [2.96, 3.04].$$

Para mejorar la inclusión para λ_1 consideremos la matriz

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{DAD}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.004 \\ 0.5 & 2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.004 & 3 \end{bmatrix}$$

que posee los mismos valores propios que $\boldsymbol{A}$. Sus círculos de Gershgorin por filas son nuevamente tres intervalos disjuntos a pares; precisamente obtenemos

$$\lambda_1 \in [0.995, 1.005], \quad \lambda_2 \in [1.45, 2.55], \quad \lambda_3 \in [2.796, 3.204].$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Problema 5 (15 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que el método SOR converge para el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para cualquier $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y a partir de cualquier $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, y para valores $0 < \omega < 2$ del parámetro de relajación ω.
b) Demostrar que el método SOR incluso converge con un parámetro de relajación óptimo, $\omega = \omega_{\text{opt}}$. Calcular ω_{opt} y el valor del radio espectral $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega_{\text{opt}}))$.
c) Sea $\tilde{\omega}$ el valor de ω_{opt} redondeado adecuadamente a dos decimales. Calcular $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\tilde{\omega}))$ y dos pasos del método SOR con $\omega = \tilde{\omega}$ para el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ con

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución sugerida.

a) La convergencia del método SOR para $0 < \omega < 2$ y todo $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ es garantizada para matrices simétricas y definidas positivas (Teorema 4.11), por lo tanto basta verificar que $\boldsymbol{A}$ es efectivamente simétrica y definida positiva. Observamos que $\boldsymbol{A}$ es evidentemente simétrica, y sus valores propios están contenidos en el intervalo $[1, 7]$, por lo tanto es definida positiva.

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

b) Sea $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ la partición habitual de $\boldsymbol{A}$. Calculamos

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\|\boldsymbol{J}\|_\infty = \|\boldsymbol{J}\|_1 = 0.75 < 1$ y $\boldsymbol{J}$ es simétrica, sus valores propios son reales y pertenecen al intervalo $(-1, 1)$. La matriz $\boldsymbol{A}$ es tridiagonal y por lo tanto ordenada consistentemente (Teorema 4.12), por lo tanto existe el parámetro de relajación óptimo ω_{opt}. Para calcular su valor tomamos en cuenta que los valores propios de $\boldsymbol{J}$ son soluciones de $p(\lambda) = 0$, donde

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{16}\lambda = \lambda \left(\frac{5}{16} - \lambda^2 \right),$$

es decir $r_\sigma(\boldsymbol{J}) = \sqrt{5}/4 \approx 0.5590$. Se obtiene

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (r_\sigma(\boldsymbol{J}))^2}} \approx 1.0934003.$$

El radio espectral es $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega_{\text{opt}})) = |\omega_{\text{opt}} - 1| = 0.0934003$.

$\boxed{\textbf{6 puntos}}$

c) El valor de ω_{opt} indicado corresponde a $\tilde{\omega} = 1.10$. Siempre hay que redondear "hacia arriba", luego $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\tilde{\omega})) = |\tilde{\omega} - 1| = 0.1$. Con ese valor obtenemos

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.6500 \\ -2.5713 \\ 0.7858 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.7779 \\ -2.1218 \\ 0.9545 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{6 puntos}}$