UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2 (521218)

Problema 1. Un objeto que pesa 20 N estira en 40 cm un resorte que cuelga de un techo. Considerando que se reemplaza el objeto por otro que pesa 25 N y que, una vez en equilibrio,se tira del objeto hacia abajo en 1 m y que luego se suelta :

(i) Establezca el PVI que modela el movimiento del objeto si se lo sumerge en un medio amortiguador de constante c = 2.5 kg/s y que es sometido a una fuerza de exitacin $F(t) = 5\cos(2t)$. (SUPONGA g = 10 m/s^2 para facilitar cálculos).

(ii) Resuelva este PVI e indique cuál es la solución de estado estacionario

(iii) Explique si el sistema está o no en resonancia.

Desarrollo:

(a) Rigidez del resorte: $k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{20}{0{,}4} = 50[Kg/s^2]$
Masa $m = \frac{mg}{g} = \frac{25[N]}{10[m/s^2]} = 2,5[Kg]$
Frecuencia natural: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50[Kg/s^2]}{2{,}5}} = 2\sqrt{5}[1/s]$
Ecuación del movimiento:

$$\begin{aligned} my''(t) + cy'(t) + ky(t) &= 5\cos(2t) \\ 2,5\ y''(t) + 2,5\ y'(t) + 50y(t) &= 5\cos(2t) \end{aligned}$$

y el PVI en cuestión, es :

$$\begin{cases} y''(t) & + \quad y'(t) + 20y(t) = 2\cos(2t) \\ y(0) & = \quad 1 \\ y'(0) & = \quad 0 \end{cases}$$

(b) Determinación de y_h

$$r^2 + r + 20 = 0$$

tiene raíces $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{79}}{2}$, de donde

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right) + C_2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right).$$

Determinación de y_p:

Mínimo aniquilador de 2cos$(2t)$, es el operador D^2+4. Así, de

$$(D^2+4)(D^2+D+20)y=0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A\,\text{sen}(2t)+B\cos(2t) \\ y_p'(t) &= 2A\cos(2t)-2B\,\text{sen}(2t) \\ y_p''(t) &= -4A\,\text{sen}(2t)-4B\cos(2t). \end{aligned}$$

Reemplazando en el PVI, obtenemos:

$$-4A\,\text{sen}(2t)-4B\cos(2t)+2A\cos(2t)-2B\,\text{sen}(2t)+20A\,\text{sen}(2t)+20B\cos(2t)=2\text{cos}(2t)$$

de donde se obtiene que $A=\frac{1}{65}$, $B=\frac{8}{65}$, esto es,

$$y_p(t)=\frac{1}{65}\text{sen}(2t)+\frac{8}{65}\cos(2t).$$

teniendo presente las condiciones iniciales $y(0)=1$ e $y'(0)=0$, obtenemos la solución general

$$y(t)=\frac{53}{65\sqrt{79}}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right)+\frac{57}{65}\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{79}}{2}t\right)+\frac{1}{65}\text{sen}(2t)+\frac{8}{65}\cos(2t).$$

Ahora la solución de estado estacionario, se obtiene en la expresión anterior para tiempo t "grande", esto es,

$$y_\infty(t)=\frac{1}{65}\text{sen}(2t)+\frac{8}{65}\cos(2t).$$

(c) El sistema no está en resonancia, pues el valor de la frecuencia de excitación es diferente al de la frecuencia natural

$$\omega=2 \text{ es distinto de } 2\sqrt{5}=\omega_0.$$

Pregunta 2.

(2.1) En dos tanques A y B de 800 litros de capacidad cada uno, se tienen respectivamente 400 lts de agua pura y 200 lts de agua con sal a una concentración de 0,1 Kg/lt. Desde el externo ingresan al tanque A 8 lt/min de agua con sal a una concentración de 0,1 Kg/lt. Contemporaneamente desde el tanque B ingresan al tanque A 2 lt/min de agua y sal, y desde el tanque A ingresan al tanque B 6 lt/min de mezcla. Suponiendo que en todo instante la mezcla de ambos tanques son homogéneas, y si del tanque B se pierden al externo 4 lt/min, detemine (JUSTIFICADAMENTE) el sistema de EDO que rige el proceso anterior, hasta el momento del rebalse. **No se pide resolver el sistema**.

(2.2) Tranforme le ecuación escalar $tx^{iv}(t) - t^2x^{iii}(t) + 2t^3x''(t) - tx'(t) - t^2x(t) = \mathrm{e}^t$ en un sistema de ecuaciones diferenciales de cuatro por cuatro.

Desarrollo:

(2.1) Sean $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque A e $y(t)$ la cantidad de sal en el tanque B.

En el tanque A se tiene que $\Delta V_A = 10 - 6 = 4$, de donde

$$V_A(t) = 4t + 400$$

En el tanque B tenemos $\Delta V_B = 6 - 6 = 0$, esto es;

$$V_B(t) = 200.$$

Como la capacidad de ambos tanques es de 800 litros, en el tanque A tendremos rebalse para t tal que $4t + 400 = 800$, es decir, para $t = 100$ minutos.

Entonces para antes del rebalse, el sistema viene descrito por.

$$\begin{cases} x'(t) = 8 \cdot 0,1 + 2\frac{y(t)}{200} - 6\frac{x(t)}{4t+400}; \quad t \in [0, 100] \\ y'(t) = 6\frac{x(t)}{4t+400} - (2+4)\frac{y(t)}{200}; \quad t \in [0, 100] \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 20 \end{cases}$$

(2.2) Haciendo

$$\begin{cases} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ x_3 &= x'' \\ x_4 &= x^{(iii)} \\ x_5 &= x^{(iv)} \end{cases} \text{ resulta } \begin{cases} x_1' &= x' = x_2 \\ x_2' &= x'' = x_3 \\ x_3' &= x^{(iii)} = x_4 \\ x_4' &= tx_4 - 2t^2x_3 + x_2 + tx_1 + \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{cases}$$

En forma matricial podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & -2t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{pmatrix}$$

Problema 3. Usando valores propios determine la solución del siguiente PVI:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x'(t) & = & 3x(t) \,+\, 2y(t)\,; & \qquad x(0) = 1 \\ y'(t) & = & -2x(t) \,-\, y(t)\,; & \qquad y(0) = 1 \end{array} \right.$$

Desarrollo:
De $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, se obtienen los autovalores del problema $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
Las soluciones del sistema se obtienen de

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \,+\, t(A-\lambda I) \,+\, 1/2\, t^2 (A-\lambda I)^2 \,+\, 1/6\, t^3 (A-\lambda I)^3 \,+\, \cdots \Big\} u$$

para u autovector genearalizado asociado a $\lambda = 1$.

De $(A - \lambda I)u_1 = (0,0,0)^t$ obtenemos el primer autovector generalizado , que resulta ser $u_1 = (1,-1)^t$. Así, la primera solución para el sistema proviene de

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \Big\} u_1 = \mathrm{e}^{\lambda t} u_1$$

esto es,

$$X_1(t) \;=\; \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora de $(A - \lambda I)^2 u_2 = (0,0,0)^t$ se obtiene $u_2 = (x,y)$ con x e y libres en $\mathbb{R}$ pero con la condición que $\{u_1, u_2\}$ debe ser linealmente independiente. De este modo, elegimos $u_2 = (1,0)^t$.

Ahora, la segunda solución para el sistema se encuentra de

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \,+\, t(A-\lambda I) \Big\} u_2,$$

realizando las respectivas operaciones se obtiene

$$X_2(t) \;=\; \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Así, toda solución del sistema homogéneo está dada por

$$X_h(t) = c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Teniendo presente que $X_h(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se obtiene

$$c_1 \;=\; -1 \;\text{ y }\; c_2 \;=\; 2$$

de donde la única solución al PVI dado, es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-1)\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Problema 4. Aplicando transformada de Laplace, resuelva el PVI:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \delta(t-\pi) + \quad f(t) \text{ donde } f(t) \quad = \begin{cases} \text{sen}(t) & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases} \\ y(0) = 1\,, y'(0) = -3 \end{cases}$$

Desarrollo: Primero observamos que $f(t)$ puede expresarse en términos de funciones escalón unitaria (o funciones de Heaviside), de modo que

$$f(t) = \text{sen}(t) - \text{sen}(t)H(t-2\pi) \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

Luego, aplicando transformada de Laplace a la EDO y sus propiedades, se tiene

$$\Big(s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0)\Big) + 9\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)](s) + \mathcal{L}[\text{sen}(t)](s) - \mathcal{L}[H(t-2\pi)\text{sen}(t-2\pi)]\,,$$

el cual, una vez que se incorporan las condiciones iniciales y se aplica la segunda propiedad de traslación, nos queda

$$\Big(s^2+9\Big)\mathcal{L}[y](s) = s - 3 + \mathrm{e}^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1}\,.$$

De esta manera resulta

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s-3}{s^2+9} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+9} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+9)}\,,$$

de donde, aplicando la transformada inversa de Laplace, y su propiedad de linealidad, se deduce

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+9}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+9}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+9)}\right](t)\,.$$

Definimos ahora $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+9}\right](t)$, $k(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right](t)$. Así, aplicando la segunda propiedad de traslación, tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+9}\right](t) + H(t-\pi)g(t-\pi) + k(t) - H(t-2\pi)k(t-2\pi)\,.$$

Determinando $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2+9}\right](t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+9}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right](t) = \cos(3t) - \text{sen}(3t)\,.$$

Determinando $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+9}\right](t)$

$$g(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right](t) = \frac{1}{3}\text{sen}(3t)\,.$$

Determinando $k(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right](t)$ Por fracciones parciales (considerando el cambio $r = s^2$):

$$\frac{1}{(r+1)(r+9)} = \frac{A}{r+1} + \frac{B}{r+9} \quad \Rightarrow \quad A = 1/8\,, B = -1/8\,,$$

con lo cual

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{1}{8(s^2+1)} - \frac{1}{8(s^2+9)}$$

y así

$$k(t) = \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1^2}\right](t) - \frac{1}{24}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right](t) = \frac{1}{8}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{24}\mathrm{sen}(3t)\,.$$

De esta manera, nos queda, reemplazando

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \cos(3t) - \mathrm{sen}(3t) + \frac{1}{3}H(t-\pi)\mathrm{sen}(3(t-\pi)) + \frac{1}{8}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{24}\mathrm{sen}(3t) \\ &\quad -H(t-2\pi)\left(\frac{1}{8}\mathrm{sen}(t-2\pi) - \frac{1}{24}\mathrm{sen}(3(t-2\pi))\right) \end{aligned}$$

Simplificando, reduciendo al primer cuadrante, nos queda

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \cos(3t) - \mathrm{sen}(3t) - \frac{1}{3}H(t-\pi)\mathrm{sen}(3t) + \frac{1}{8}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{24}\mathrm{sen}(3t) \\ &\quad -H(t-2\pi)\left(\frac{1}{8}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{24}\mathrm{sen}(3t)\right) \end{aligned}$$

RBP/HMM/JMS/LNB//jms.
15/06/2009.