UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°3$ (EDO de Orden Superior: Parte II).

Problemas a resolver en práctica

1. Determine la solución general de la EDO lineal homogénea de cuarto orden $y^{(iv)}(t) + 2\,y^{(iii)}(t) - 11\,y''(t) - 52\,y'(t) = 0.$

   Solución:
   Al buscar soluciones del tipo $y(t) = e^{\alpha t}$, se observa que α debe ser raíz del polinomio

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \alpha^4 + 2\alpha^3 - 11\alpha^2 - 52\alpha \\ &= \alpha\,(\alpha-4)(\alpha^2+6\alpha+13) \\ &= \alpha(\alpha-4)[\alpha-(-3-2i)][\alpha-(-3+2i)]. \end{aligned}$$

   Por tanto, los valores admisibles de α son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= 4, \\ \alpha_3 &= -3-2i, \\ \alpha_4 &= -3+2i \end{aligned}$$

   y en consecuencia, toda solución $y(x)$ de la EDO lineal homogénea de cuarto orden dada, es

$$y(x) = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{4x} + c_3\,\mathrm{e}^{-3x}\cos(2x) + c_4\,\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{sen}(2x).$$

   donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes reales arbitrarias.

2. Encuentre la solución general de la EDO

$$Ly(x) = 0,$$

   donde:

   (i) $L = (D^3 + D^2 - 6D + 4)^2(D^2 + D - 12)^2.$
   (ii) $L = (D^2 - 4D + 8)^2(D^2 + D - 12)^3.$

   Solución:
   (ii) Observamos que el operador diferencial lineal $L = L_1\,L_2$ donde

$$L_1 = (D^2 - 4D + 8)^2 \text{ y } L_2 = (D^2 + D - 12)^3.$$

Además, los polinomios asociados a L_1 y L_2 son respectivamente p_1 y p_2 donde

$$\begin{aligned} p_1(\alpha) = & \quad (\alpha^2 - 4\alpha + 8)^2 \\ = & \quad [\alpha - (2-2i)]^2[\alpha - (2+2i)]^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_2(\alpha) = & \quad (\alpha^2 + \alpha - 12)^3 \\ = & \quad (\alpha+4)^3(\alpha-3)^3. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del problema $L(y) = L_1\, L_2(y) = 0$, es

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}cos(2t) + (c_3 + c_4 t)e^{2t}sin(2t) + (c_5 + c_6 t + c_7 t^2)e^{-4t} + (c_8 + c_9 t + c_{10} t^2)e^{3t}$$

donde c_1, c_2, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9 y c_{10} son constantes reales arbitrarias.

3. Determine una EDO de coeficientes constantes:

   a) Que tenga a $y_1(x) = xe^{4x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple esos requisitos?
   b) De orden 4 que tenga entre sus soluciones a $y_1 = e^{4x}$ e $y_2 = x^2e^{-2x}$.
   c) De orden 6 que tenga entre sus soluciones a $y_1(x) = e^{-3x}\cos(2x)$ e $y_2(x) = x^3e^{4x}$.
   d) De orden 7 que tenga entre sus soluciones a $y_1(x) = e^{-3x}\cos(2x)$ e $y_2(x) = x^3e^{4x}$.

   Solución:

   a) La EDO solicitada resulta del operador $L = L_1 \cdot L_2$ donde $L_1 = (D-4)^2$ y $L_2 = (D+2)$.
   b) La EDO solicitada resulta del operador $L = L_1 \cdot L_2$ donde $L_1 = (D-4)$ y $L_2 = (D+2)^3$.
   c) La EDO solicitada resulta del operador $L = L_1 \cdot L_2$ donde $L_1 = (D^2+6D+13)$ y $L_2 = (D-4)^4$.
   d) La EDO solicitada resulta del operador $L = L_1 \cdot L_2$ donde $L_1 = (D^2+6D+13)$ y $L_2 = (D-4)^5$.

4. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = (D-1)^2(D+1)^2$. Sabiendo que la función f definida por $f(x) = 2x^3 - 2x$ es una solución particular de $L(y) = 2\,x^3 - 26\,x$, determine la solución general de la EDO lineal no homogénea $y^{(iv)} - 2y'' + y = 2x^3 - 26\,x$.

   Solución:
   Primero observamos que el operador diferencial lineal L es tal que

$L(y) = y^{(iv)} - 2y'' + y$. De otra parte, sabemos que la solución general $y(x)$ de la EDO lineal

$$y^{(iv)} - 2y'' + y = 2\,x^3 - 26\,x \tag{1}$$

es del tipo

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

donde $y_p(x)$ es una solución cualquiera de $L(y) = f$ e $y_h(x)$ es una solución arbitraria del $\mathrm{Ker}(L)$.

Por hipótesis se tiene que $y_p(x) = 2x^3 - 2x$. Por tanto, solamente debemos buscar la solución general de la EDO homogénea asociada, a saber la solución general de

$$y^{(iv)} - 2y'' + y = 0 \tag{2}$$

Para esto último, el polinomio asociado a la EDO homogénea anterior, es:

$$p(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 \;=\; (\alpha^2 - 1)^2 = \Big[(\alpha - 1)(\alpha + 1)\Big]^2$$

Así, la solución general y_h de (2), es

$$y_h(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,x\,\mathrm{e}^x + c_3\,\mathrm{e}^{-x} + c_4\,x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Finalmente, la solución general de (1), es

$$y(x) = (2x^3 - 2x) \;+\; c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,x\,\mathrm{e}^x + c_3\,\mathrm{e}^{-x} + c_4\,x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes reales arbitrarias.

5. Resolver el PVI

$$\begin{cases} (1+\mathrm{e}^x)\,y''(x) - 3\,(1+\mathrm{e}^x)\,y'(x) + 2\,(1+\mathrm{e}^x)\,y(x) = & \mathrm{e}^x, \\ y(0) = & 0, \\ y'(0) = & 0. \end{cases}$$

Solución:

Haciendo $D = \dfrac{d}{dx}$, la EDO se puede re-escribir en forma de operador como

$$\Big(\,(1+\mathrm{e}^x)\,D^2 - 3\,(1+\mathrm{e}^x)\;D + 2\,(1+\mathrm{e}^x)\Big)[y](x) = \mathrm{e}^x.$$

Puesto que $(1+\mathrm{e}^x)$ es siempre positivo, podemos normalizar (la EDO) obteniendo

$$(D^2 - 3\,D + 2)[y](x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Aquí se identifica

$$g(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO no homogénea dada, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 3\,D + 2)[y_h] = 0.$$

La ecuación característica de la EDO precedente está dada por

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)\,(\lambda - 2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

de donde, la solución general de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar una solución particular usamos el método de variación de parámetros (puesto que no vemos un aniquilador para $g(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$); así, se propone como solución particular a

$$y_p(x) = A_1(x)\,\mathrm{e}^x + A_2(x)\,\mathrm{e}^{2\,x},$$

donde las funciones A_1 y A_2 son tales que sus respectivas derivadas A_1' y A_2' son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2\,x} \\ \mathrm{e}^x & 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 1 & 2\,\mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{bmatrix}$$

donde primero se dividió cada ecuación por e^x y luego se realizó la operación elemental por filas $f_2 \leftarrow f_2 - f_1$. De esta manera, la única ecuación del sistema precedente es

$$A_1'(x) = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad A_2'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, integrando con respecto a x las expresiones precedentes, y considerando el cambio de variable $\mathrm{e}^{-x} = t$, se deduce que

$$A_1(x) = \int -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + K_1 = \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + K_1,$$

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int -\frac{t}{1+t}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t} - 1\right) dt = \ln(1+t) - t + K_2 \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-x} + K_2. \end{aligned}$$

Podemos eligir las constantes de integración tales que $K_1 = K_2 = 0$ pues buscamos **una** solución particular. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \Big(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-x}\Big)\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^{x} \\ &= \widetilde{C_1}\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \ \text{ con } \widetilde{C_1},\, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donde se ha definido $\widetilde{C_1} := C_1 - 1$. Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$y'(x) = \widetilde{C_1}\,\mathrm{e}^{x} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + 2\,\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) &=& 0 \\ y'(0) &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{C_1} + C_2 + 2\,\ln(2) &=& 0 \\ \widetilde{C_1} + 2\,C_2 - 1 + 3\,\ln(2) &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{C_1} &=& -1 - \ln(2) \\ C_2 &=& 1 - \ln(2) \end{array} \right.$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$y(x) = -[1+\ln(2)]\,\mathrm{e}^{x} + [1-\ln(2)]\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

6. Resolver el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = & \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}, \\ y(1) = & 0, \\ y'(1) = & 0 \end{array} \right.$$

Solución:
Tomando $D = \dfrac{d}{dx}$, la EDO se puede re-escribir en forma de operador y a la vez **normalizada** como

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y](x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\,x}, \quad x > 0,$$

y se identifica aquí

$$f(x) := \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\,x}.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y_h] = 0.$$

La ecuación característica de la EDO precedente está dada por

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

de donde, la solución general de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar una solución particular por el método de variación de parámetros, se propone como solución particular a

$$y_p(x) = A_1(x)\,\mathrm{e}^x + A_2(x)\,x\,\mathrm{e}^x,$$

donde las funciones A_1' y A_2' son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\,x} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 + x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\,x} \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\,x} \end{bmatrix}$$

donde primero se dividió cada ecuación por e^x y luego se realizó la operación elemental por filas $f_2 \leftarrow f_2 - f_1$. De esta manera, la única ecuación del sistema precedente es

$$A_1'(x) = -\frac{1}{2}, \qquad A_2'(x) = \frac{1}{2\,x}, \quad x > 0$$

Ahora, integrando con respecto a x las expresiones precedentes, se deduce que

$$A_1(x) = \int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2} + K_1, \quad x > 0$$

$$A_2(x) = \int \frac{1}{2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x) + K_2, \quad x > 0.$$

Sin perdida de generalidad podemos eligir las constantes $K_1 = K_2 = 0$. Por lo tanto,

$$y_p(x) = -\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x.$$

Así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x \\
&= C_1\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, x > 0, \qquad \text{con}\, C_1, \widetilde{C_2} \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

donde se ha definido $\widetilde{C_2} := C_2 - 1/2$. Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$
y'(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{\ln(x)\,\mathrm{e}^x}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, x > 0.
$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} y(1) &=& 0 \\ y'(1) &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}\,C_1 + \mathrm{e}\,\widetilde{C_2} &=& 0 \\[2ex] \mathrm{e}\,C_1 + 2\,\mathrm{e}\,\widetilde{C_2} + \frac{1}{2}\mathrm{e} &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 &=& \dfrac{1}{2} \\[3ex] \widetilde{C_2} &=& -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.
$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$
y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \quad \forall\, x > 0.
$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Determine la solución general de $L(y) = 0$, cuando

    - $L = (D+2)^4(D^2 - 7D + 10)(D-3)^3$
    - $L = D^3(D^2 + 4D + 5)$
    - $L = D^3 + 16D$

2. Considere el operador diferencial lineal L definido por

$$L = (D^2 - 9)(D + 3).$$

    Sabiendo que la función z definida por $z(x) = 3x^2 + 2x$ es una solución particular de $L(y) = 81x^2$, determine la solución general de la EDO lineal no homogénea $y^{(iii)} + 3y'' - 9y' + 27y = 81x^2$.

3. Encuentre una EDO de coeficientes constantes:

    a) Que tenga a $y_1(x) = e^{-3x}\operatorname{sen}(2x)$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple esos requisitos?

    b) De orden 4 que tenga entre sus soluciones a $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = x^2e^{4x}$,

    c) De orden 5 que tenga entre sus soluciones a $y_1(x) = e^{-6x}$, $y_2(x) = x^2e^{4x}$. ¿Cuántas EDO cumplen el requisito anterior?

4. Sea L un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes. Encuentre una solución particular para la EDO dada por:

    (*i*) $L(y) = \cos(x)$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^x - 3\operatorname{sen}(x)) = 7\cos(x)$.

    (*ii*) $L(y) = x^3 + \operatorname{sen}(x)$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^x) = 5\operatorname{sen}(x)$ y $L(\cos(x)) = \frac{1}{4}x^3$.

    (*iii*) $L(y) = 0$ si se sabe que $L(x + \mathrm{e}^x) = \operatorname{sen}(x)$ y $L(\mathrm{e}^{-x}) = 4\operatorname{sen}(x)$.

    (*iv*) $L(y) = \left[\frac{1}{x}\right]^2$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^{3x} + \cos^2(x)) = \frac{1}{x}$.

5. Determine la solución general de

$$(9-2x)y''(x) - 4(x-5)y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 36x + 81\,, \quad x < 0\,,$$

    sabiendo que el kernel (o núcleo) del operador asociado a la EDO tiene una base dada por $\{y_1(x) = x - 5,\, y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}\}$.