UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525214)
Listado Nº 4 (Resolución de PVIFs para la propagación del calor)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. **(Cálculo de la temperatura en una barra metálica)**
Considere una barra metálica cuasi uni-dimensional de longitud $L = 1\,\mathrm{m}$, de superficie lateral aíslada térmicamente, cuya extremidades en $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a temperaturas $T_0 = 0°\mathrm{C}$ y $T_1 = 50°\mathrm{C}$, respectivamente. La barra tiene inicialmente una temperatura uniforme de 25°C. Determine la temperatura $T(x,t)$ (en °C) en una sección de la barra de posición $x \in [0, L]$ al tiempo $t > 0$.
Si $k = 1.28 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1}$, represente gráficamente los perfiles de temperatura en la barra para $t = 100\,\mathrm{s}$, $t = 1000\,\mathrm{s}$ y $t \to \infty$ con la ayuda de un computador.
Para $t = 1000\,\mathrm{s}$, ¿ cual es el número mínimo de términos por sumar en la serie para que el error sea inferior a 0.02°C ?

En los siguientes problemas se estudia la propagación del calor en una barra cuasi uni-dimensional de longitud L, de superficie lateral aíslada térmicamente, para varias condiciones de frontera. Denotamos $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ el perfil inicial de temperatura y definimos

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < L, t > 0\} \quad , \quad \overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}\ .$$

2. **(Ambas extremidades aísladas térmicamente).**
Si ambas extremidades de la barra están aísladas térmicamente, el PVIF modelizando la propagación del calor es (ver Problema 1, listado Nº 1)

$$\text{(PVIF2)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ \partial_x T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

con $k > 0$. Se supone que f es continua en $[0, L]$, de clase C^1 en $]0, L[$ y tal que f' es derivable en $]0, L[$ salvo quizá en un número finito de puntos, f'' es continua por trozos (CPT) en $[0, L]$ y $f'(0) = f'(L) = 0$.
Recuerda que mediante separación de variables y el principio de superposición se obtiene que para todo $N \in \mathbb{N}^\star$ y $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ (ver Problema 1, Certamen 1),

$$T_N(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\, \mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \quad \text{con} \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\ , \tag{1}$$

es solución del problema con valores de frontera.

(a) Muestre que la extensión $2L$-periódica *par* $\tilde{f}_p$ de f es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y tal que $\tilde{f}_p'$ es derivable en $]-L, L[$ salvo quizá en un número finito de puntos y $\tilde{f}_p''$ es CPT en $[-L, L]$.

(b) Suponga que las constantes a_n, $n \in \mathbb{N}$, están dadas por los coeficientes de Fourier de la *serie de cosenos* de f.
Deduzca de (a) que las series de cosenos y de senos

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad \sum_{n\geq 1} n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

convergen normalmente en $\mathbb{R}$.

(c) Muestre que la series

$$\begin{aligned} T_\infty(x,t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \\ \partial_x T_\infty(x,t) &= -\frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \,\mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \end{aligned}$$

convergen uniformemente en $\overline{D}$ y sus sumas son continuas en $\overline{D}$.

(d) Muestre que $T_\infty(x,t)$ es de clase C^2 en D y es solución de (PVIF2).
Indicación: usar los mismos argumentos que aquellos vistos en cátedra para establecer el resultado para condiciones de frontera de Dirichlet.

(e) Muestre que para todo $x \in [0, L]$, $T_\infty(x,t) \to T_{\text{prom}}$ cuando $t \to \infty$, donde $T_{\text{prom}} = (1/L) \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$ es la temperatura inicial promedia de la barra.

3. **(Condiciones de frontera mixtos).**
Se supone que la extremidad derecha de la barra está áislada térmicamente y la extremidad izquierda está conectada a un termostato con temperatura $T_0 = 0°$C. En este caso, la propagación del calor se modeliza por el PVIF

$$\text{(PVIF3)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \,. \end{cases}$$

Se supone que f es continua en $[0, L]$, derivable en $]0, L[$, de derivada f' CPT en $[0, L]$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(L) = 0$.

(a) Usando separación de variables y el principo de superposición, muestre que $\forall\, N \in \mathbb{N}^\star$, $\forall\, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$,

$$T_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \,\mathrm{e}^{-k\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right) \tag{2}$$

es solución del problema con valores de frontera.
Suponiendo que la serie converge, escriba la condición inicial para $T_\infty(x,0) = \lim_{N\to\infty} T_N(x,0)$. ¿ Se puede usar la teoría de Fourier para obtener los coeficientes b_n ?

(b) Considere la función $\tilde{f} : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ f(2L - x) & \text{si } L \leq x \leq 2L. \end{cases}$$

Sea $\overline{D}_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq 2L, t \geq 0\}$. Sea $\tilde{T}(x,t)$ la única solución de

$$(*) \qquad \begin{cases} \partial_t \tilde{T}(x,t) = k\, \partial_x^2 \tilde{T}(x,t) \quad , \quad 0 < x < 2L, t > 0 \\ \tilde{T}(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \tilde{T}(2L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \tilde{T}(x,0) = \tilde{f}(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 2L \,. \end{cases}$$

Usando el resultado establecido en la cátedra, determine la solución de $(*)$ en la forma de una suma de una serie uniformemente convergente en $\overline{D}_2$.
Muestre que esta solución satisface $\partial_x \tilde{T}(L,t) = 0$, $t \geq 0$.

(c) Sea la función $T : \overline{D} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,t) = \tilde{T}(x,t) \;\; \forall\, (x,t) \in \overline{D}$. Muestre que T es continua en $\overline{D}$, de clase C^2 en D, y es solución de (PVIF3).
Muestre que $T(x,t)$ es el límite de la serie (2) cuándo $N \to \infty$ con la siguiente elección de los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\Big)\, \mathrm{d}x \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star \,.$$

(d) Muestre que $T(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todo $x \in [0, L]$.
Muestre que $T \geq 0$ si $f \geq 0$.

4. **(Convexión en una extremidad).**
Se supone que la extremidad izquierda de la barra está conectada a un termostato con temperatura T_0 y se mantiene un flujo térmico en la extremidad derecha con una densidad de corriente $j_Q^{\rm der}$ al tiempo t proporcional a $T(L,t) - T_{\rm aere}$, donde $T_{\rm aere}$ es la temperatura del medio ambiente (la cual se supone constante). En este caso la propagación del calor se modeliza por

$$(\text{PVIF4}) \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\, \partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = T_0 \quad , \quad t > 0 \\ \partial_x T(L,t) = h(T_{\rm aere} - T(L,t)) \quad , \quad t > 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \,, \end{cases}$$

donde $k > 0$, $h > 0$.

(a) Determine la solución estacionaria $T_{\rm e}(x)$ de (PVIF4).

(b) Muestre que si $T(x,t)$ es solución de (PVIF4) luego $T(x,t) = T_{\rm e}(x) + T_{\rm tr}(x,t)$, donde $T_{\rm tr}(x,t)$ es solución del problema homogéneo

$$(\text{PVIFH}) \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\, \partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \partial_x T(L,t) = -hT(L,t)) \quad , \quad t > 0 \\ T(x,0) = f(x) - T_{\rm e}(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \,, \end{cases}$$

(c) Usando separación de variables y el principo de superposición, muestre que $\forall\, N \in \mathbb{N}^\star$, $\forall\, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$,

$$T_{\mathrm{tr},N}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n\, \mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) \tag{3}$$

es solución de (PVIFH) si los $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ son soluciones positivas de una ecuación implícita por determinar. Usando argumentos geométricos, muestre que dicha ecuación tiene una infinidad numerable de soluciones positivas λ_n tales que

$$\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star \;. \tag{4}$$

¿ La serie (3) para $t = 0$ y $N = \infty$ es una serie de Fourier?

(d) Muestre que

$$\int_0^L \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x) \sin(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{Lh + \cos^2(\sqrt{\lambda_n} L)}{2h} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

(e) Suponga que $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ es tal que existen coeficientes $b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) - T_{\mathrm{e}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \;,$$

donde *se asume que la serie converge normalmente en* $\mathbb{R}$.

(i) Determine los coeficientes b_n en función de f.

(ii) Muestre que la serie (3) converge normalmente en $\overline{D}$ cuando $N \to \infty$ y su suma $T_{\mathrm{tr},\infty}(x,t)$ es continua en $\overline{D}$.

(iii) Sea $g_n(x,t) = b_n \mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$ y $t_0 > 0$. Muestre que las series

$$\sum_{n \geq 1} \partial_t g_n(x,t) \quad , \quad \sum_{n \geq 1} \partial_x g_n(x,t) \quad , \quad \sum_{n \geq 1} \partial_x^2 g_n(x,t)$$

convergen normalmente en $D_{t_0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < L, t > t_0\}$.
Indicación: usar las desigualdades (4) y $\sup_{n \in \mathbb{N}^\star} |b_n| < \infty$.

(iv) Muestre que $T_{\mathrm{tr},\infty}(x,t)$ es de clase C^2 en D y satisface (PVIHF).

(v) Determine una solución de (PVIF4). Muestre que esta solución satisface $T(x,t) \to T_{\mathrm{e}}(x)$ cuando $t \to \infty$ para todo $0 \leq x \leq L$.

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

5. Resolver

$$\text{(PVIF5)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\, \partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = T_0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(L,t) = T_1 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x^2}{L^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq L \;. \end{cases}$$

6. Resolver

$$(\text{PVIF6}) \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = \dfrac{x}{L} - \dfrac{1}{2\pi}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) \quad , \quad 0 \leq x \leq L\,. \end{cases}$$

7. Suponga que la extremidad derecha de la barra está áislada térmicamente y la extremidad izquierda está conectada a un termostato con temperatura $T_0 \neq 0$. Resolver el PVIF modelizando la propagación del calor

$$(\text{PVIF7}) \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(0,t) = T_0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f_0(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

donde el perfil inicial de temperatura $f_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ es continuo en $[0,L]$, derivable en $]0,L[$, de derivada f_0' CPT en $[0,L]$ y tal que $f_0(0) = T_0$ y $f_0'(L) = 0$.
Muestre que la solución $T(x,t)$ satisface $\lim_{t\to\infty} T(x,t) = T_0$, $0 \leq x \leq L$.
Indicación: usar los resultados del Problema 3.

8. Dos barras metálicas de longitud $L = 5\,\text{cm}$ tienen inicialmente temperaturas uniformes $T_1 = 50°\text{C}$ y $T_2 = 0°\text{C}$. Al tiempo $t = 0$, estas barras se ponen en contacto en dos de sus extremidades para formar una sola barra de longitud $2L$, de superficie lateral áislada térmicamente y de extremidades en contacto con termostatos con temperaturas $0°\text{C}$. Se supone que el punto de contacto entre las dos barras es perfecto.
Escribir y resolver el PVIF que modeliza el propagación del calor a tiempos $t > 0$.
Represente graficamente lors perfiles de temperaturas para $t = 10\,\text{s}$, $30\,\text{s}$ y $60\,\text{s}$, sabiendo que $k = 0.128$ $\text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$.

9. (**Evaluación 2, 2024-1**).
Considere (PVIF2) para una barra con extremidades áisladas térmicamente (ver Problema 2). Para $\tau > 0$, sea $D_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < L, 0 < t \leq \tau\}$ y $\overline{D}_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \tau\}$. Suponga que el siguiente principio del máximo es cierto:
Si $T(x,t)$ es continua en $\overline{D}_\tau$ y es solución de la ecuación del calor en D_τ con valores de frontera $\partial_x T(x,t) = \partial_x T(L,t) = 0$, $t \geq 0$, luego T alcanza sus máximo y mínimo en $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, t = 0\}$.

   (a) Muestre que (PVIF2) tiene una única solución $T(x,t)$.

   (b) Muestre que (PVIF2) es estable con respeto a cambios en la condición inicial. Deduzca que (PVIF2) es bien planteado.

   (c) Muestre que si $f \geq 0$, luego $T(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in \overline{D}$.

Octubre 18, 2025.
DS/ds