UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
25 de marzo de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 3

1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, considere la siguiente relación en $\mathbb{R}$.

$$x \; R_A \; y \Leftrightarrow (\exists z \in A) \; x + z = y$$

   a) Demuestre que R_A es relación de equivalencia si $A = \mathbb{Z}$ y calcule las clases de equivalencia en ese caso. Demuestre que el conjunto cuociente puede ser puesto en biyección con $[0, 1[$ ¿Qué pasa si $A = \mathbb{Q}$?

   b) Demuestre que R_A es relación de orden si $A = \mathbb{N}$ y de termine si se trata de una relación de orden total o parcial, calcule (si existen) máximos, mínimos, minimales y maximales ¿Qué pasa si $A = \mathbb{R}_-$?

2. Se define la siguiente relación $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

   a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

   b) Caracterice los conjuntos: $[(1, 0)]$ y $[(0, 1)]$.

   c) Caracterice el conjunto $[(a, b)]$, para $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ arbitrario y grafique para varios casos.

3. Dado un natural no nulo p, considere la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$u \; R \; v \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \; kp = u - v$$

   a) Restringiéndose al subconjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine las clases de equivalencias y el conjunto cuociente.

   b) Demuestre que R es relación de equivalencia en el caso $p = 3$ y luego en el caso general.

   c) Calcule $[0]$ y $[1]$ en el caso $p = 3$ y luego en el caso general.

   d) ¿Cuántas clases de equivalencia hay? ¿Puede escoger un representante canónico en cada clase? ¿Qué tienen en común los elementos de una misma clase?

   e) Demuestre que $[i] = \{i + pk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

   f) Si r_i es el resto de dividir i por p, podemos afirmar que $i \; R \; r_i$?

4. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) Considere la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$A \; \mathcal{R} \; B \; \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in B) \; x \leq y$$

   Estudie su reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad. ¿Es relación de equivalencia? ¿Es relación de orden?

b) Si $R \subseteq A \times A$ es refleja y transitiva, entonces la relación dada por:

$$\forall a, b \in A,\ a\ T\ b \iff a\ R\ b\ \wedge\ b\ R\ a$$

es de equivalencia

c) Si $R \subseteq A \times A$ es simétrica y transitiva, entonces es relación de equivalencia.

d) Si $R \subseteq A \times A$ es de orden y de equivalencia, entonces R es la relación de igualdad.

e) Si $R \subseteq A \times A$ es transitiva y $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ son tales que para cada $i \in \{1, ..., 3\}$ se cumple $a_i\ R\ a_{i+1}$ y además $a_4\ R\ a_1$, entonces $R = A \times A$.

5. Estudie, clasifique y grafique las siguientes relaciones:

a) $x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0$, en $\mathbb{R}$

b) $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} = x$, en $\mathbb{N}$

c) $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} = 20$, en $\mathbb{N}$

d) $x\mathcal{R}y \iff x^2 = y$, en $\mathbb{R}$

e) $X\mathcal{R}Y \iff \det(X) \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $\mathcal{M}_{22}(\{0, 1\})$

f) $X\mathcal{R}Y \iff X + Y = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathcal{M}_{nn}(\{0, 1\})$