UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 3 ALGEBRA III 525201-0

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 30 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Considere el espacio vectorial real $V := \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y una base de V, dada por $\tilde{B} := \{r_0, r_1, r_2\}$, siendo $r_0(t) := t(t-1)$, $r_1(t) := t(t+1)$ y $r_2(t) := 1-t$. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, que a un polinomio $q \in V$, definido por $q(t) := a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2$, le asocia $T(q) \in V$, dado por

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, T(q)(t) \,:=\, (a_0 + a_1 + a_2) \,+\, (a_0 + a_1 - a_2)\,t \,+\, (a_0 - a_1 + a_2)\,t^2 \,.$$

1.1) Determine la matriz representante de T con respecto a la base $\tilde{B}$ de V, i.e. $[T]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$. **(10 puntos)**

1.2) Sea $B = \{p_0\,, p_1\,, p_2\}$, con $p_0(t) := 1$, $p_1(t) := t$ y $p_2(t) := t^2$, la base canónica de V. Determine la matriz de cambio de base (matriz de pasaje o de paso) de la base B a la base $\tilde{B}$. **(10 puntos)**

Problema 2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión 3**, y considere $B := \{w_1, w_2, w_3\}$, una base de V. Sabiendo que la matriz representante de cierto endomorfismo $L \in \mathcal{L}(V)$ con respecto a la base B, es

$$[L]_B^B \,:=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \,.$$

Determine los valores y vectores propios de L. ¿Es L diagonalizable? Justifique su respuesta, según el caso. En el caso sea L diagonalizable, indique la base $\tilde{B}$ de V, con respecto a la cual $[L]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$ es diagonal. Debe determinar esta matriz diagonal, si corresponde. **(20 puntos)**

Problema 3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión infinita**, y consideremos $T, S \in \mathcal{L}(V)$ tal que S es un isomorfismo. A continuación se definen $L_1 := T \circ S \in \mathcal{L}(V)$ y $L_2 := S \circ T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que **(10 puntos)**

$$(\lambda, z) \text{ es un autopar de } L_1 \,\Leftrightarrow\, (\lambda, S(z))\,\text{es un autopar de } L_2 \,.$$

Problema 4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión finita** $m \geq 2$, y consideremos $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que $r(T) = 1$. Demuestre que **(10 puntos)**

$$T \text{ es diagonalizable } \,\Leftrightarrow\, \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) \,=\, \{\theta\} \,.$$

RBP/rbp 03.07.2020