Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 2 — martes 18 de agosto de 2020

Entrega: hasta las 19.00 horas (cierre de CANVAS)

Fundamentar la respuesta a cualquier sub-problema puesto en forma de pregunta. Se puede utilizar sin demostración que si $X = x^2 - a^2$, entonces

$$\int \sqrt{X}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{X} - a^2 \ln\Big(x + \sqrt{X}\Big)\Big) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

y si $X = x^2 + a^2$,

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{X} - a \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Problema 1. (12 puntos)

a) Se considera la función

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3.$$

Analizar si la función posee un extremo local en algún punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y determinar su naturaleza (máximo o mínimo).

b) Determinar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

Problema 2. (12 puntos)

a) Se consideran las funciones

$$f_1(x, y, u, v) = x + y\mathrm{e} - \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v, \quad f_2(x, y, u, v) = xy\mathrm{e} - u\mathrm{e}^u - v\mathrm{e}^v.$$

Analizar si cerca de $P_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 1)$ las ecuaciones

$$f_i(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad i = 1, 2$$

definen funciones $u = \varphi_1(x, y)$ y $v = \varphi_2(x, y)$ tales que en una vecindad de P_0,

$$f_i\big(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\big) = 0, \quad i = 1, 2.$$

b) Calcular las derivadas parciales $\partial \varphi_k / \partial x$ y $\partial \varphi_k / \partial y$, $k = 1, 2$, en (x_0, y_0) si existen.

c) Se considera la función $\boldsymbol{f} = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \big((x+y)^3, (x-y)^3\big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Se puede aplicar el Teorema de Funciones Implícitas en $(x_0 = 0, y_0 = 0)$? ¿La funcíon $\boldsymbol{f}$ es invertible sobre $\mathbb{R}^2$, es decir se pueden despejar x e y a partir de $\boldsymbol{f}(x, y) = (u, v)$?

Problema 3. (12 puntos) Se considera la curva

$$C : \ [1, t_1] \ni t \mapsto \boldsymbol{\alpha}(t) := \left(\int_1^t \frac{\cos u}{u} \, \mathrm{d}u, \int_1^t \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u, 4\sqrt{t} \right) \in \mathbb{R}^3$$

entre $t = 1$ y $t = t_1$, donde $\boldsymbol{\alpha}(t_1)$ es el punto donde $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ es paralelo al plano (y, z); $1 < t_1 < 2$.

a) Determinar t_1.

b) Calcular la longitud de C.

c) Se considera el campo vectorial

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y, z) &= \{V_1, V_2, V_3\}(x, y, z) \\ &= \big\{2xy^4 \sin(yz), x^2y^3(4 \sin yz + yz \cos(yz)), x^2y^5 \cos(yz)\big\}. \end{aligned}$$

Calcular la integral de línea

$$\int_C V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y + V_3 \, \mathrm{d}z.$$

d) Calcular $\operatorname{rot} \vec{V}$.

Problema 4. (12 puntos)

a) Determinar el área de la región exterior al círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ e interior al círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 12x$, limitada por las rectas $y = x$ e $y + \sqrt{3}x = 0$.

b) Encontrar el centro de masa del sólido dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. (La densidad del volumen es constante.)

Problema 5. (12 puntos)

a) Determinar el área de la superficie

$$S = \left\{ (x, y, z) \, \middle| \, x^2 + y^2 = \frac{z^4}{256}, \ 0 \le z \le 4 \right\}.$$

b) Se considera una esfera K del radio $R > 0$ y el centro $(0, 0, 0)$. Partiendo de

$$\begin{aligned} K = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ & x = R \sin\theta \cos\varphi, \ y = R \sin\theta \sin\varphi, \ z = R\cos\theta, \\ & 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi\big\}, \end{aligned}$$

demostrar que K posee el área de superficie $4\pi R^2$.