UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CÁLCULO III (525211)

Pauta Evaluación 1
2017-I

Problema 1

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en $(1,1)$. [**10 puntos**]

b) Considere el vector $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcular las derivadas direccionales $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$. [**10 puntos**]

Solución:

a)

- **Continuidad**: f es continua en $(1,1)$ ya que es división de polinomios y el denominador evaluado en $(1,1)$ es distinto de cero.

  f es continua en $(0,0)$. En efecto, para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos que
  $$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{||(x,y)||^3+||(x,y)||^3}{||(x,y)||^2} \leq 2||(x,y)||.$$
  Luego, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$.

- **Diferenciabilidad:** f es diferenciable en $(1,1)$ ya que es división de funciones diferenciables y la diferencial del denominador evaluada en $(1,1)$ es distinta de cero.

  f no es diferenciable en $(0,0)$. En efecto, primero calculamos las derivadas parciales:
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{\cdot}h^2}{h} = 1$$
  Luego, calculamos el límite
  $$L := \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\cdot(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-h_1-h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$$
  $$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 - h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = -\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$
  Considerado la trayectoria $h_2 = h_1$ obtenemos que
  $$L = -\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{2h_1^3}{(2h_1^2)^{3/2}} = -\frac{2}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0.$$
  Así, f no es diferenciable en $(0,0)$.

b) Como f es diferenciable en $(1,1)$, tenemos que

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot \vec{u} = (1/2,1/2)\cdot \vec{u} = \sqrt{2}/2.$$

Por otro lado, notemos que f no es diferenciable en $(0,0)$, por lo tanto no podemos calcular $D_{\vec{u}}f(1,1)$ como en el paso anterior. Por lo tanto, utilizando la definición de derivada direccional,

$$D_{\vec{u}}f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{u}h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(h/\sqrt{2})^3+(h/\sqrt{2})^3}{(h/\sqrt{2})^2+(h/\sqrt{2})^2}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 2

Sean A_1 y A_2 abiertos. Demostrar que $A_1\cap A_2$ es abierto. **[6 puntos]**

Solución: Recordemos que un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ es abierto si cada punto de A es un punto interior de A, es decir, para cada $y\in A$, existe un radio $\epsilon>0$ tal que $U_\epsilon(y)\subset A$, donde $U_\epsilon(y)$ es una vecindad de radio ϵ en torno a y.

Sea $y\in A_1\cap A_2$. Debemos demostrar que existe un radio $\epsilon>0$ tal que $U_\epsilon(y)\subset A_1\cap A_2$.

Como A_1 es abierto, existe $\epsilon_1>0$ tal que la vecindad $U_{\epsilon_1}(y)$ de y está contenida en A_1. Del mismo modo, como A_2 es abierto, existe $\epsilon_2>0$ tal que la vecindad $U_{\epsilon_2}(y)$ está contenida en A_2. Sea $\epsilon=\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$. Entonces, la vecindad $U_\epsilon(y)$ está contenida en $A_1\cap A_2$. Por lo tanto, como y es arbitrario, se concluye que $A_1\cap A_2$ es abierto.

Problema 3

Sean g y $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciables, $u(x,y)=x/y$ y $v(x,z)=h(x)g(z)$. Definimos $H(x,y,z)=f(u(x,y),v(x,z))$, donde $f(u,v)=u^2+v^2$. Utilizar la Regla de la Cadena para calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y,z)$ y $\frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z)$. **[10 puntos]**

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u(x,y)}{y}+2v(x,y)h'(x)g(z) = \frac{2x}{y^2}+2h(x)h'(x)g(z)^2.\\
\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2u(x,y)x}{y^2} = -\frac{2x^2}{y^3}.\\
\frac{\partial H}{\partial z}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = 2v(x,y)h(x)g'(z) = 2h(x)^2g(z)g'(z).
\end{aligned}$$

Problema 4

Considere la ecuación $x^2+y^2+z^2=27$ y el punto $(x_0,y_0,z_0)=(3,3,-3)$.

a) Justifique la existencia de una función g tal que $z=g(x,y)$ en torno a (x_0,y_0,z_0) y calcule $Dg(x,y)$ en torno a (x_0,y_0).**[10 puntos]**

b) Calcular el polinomio de Taylor de grado dos de la función g en torno al punto $(3,3)$. **[14 puntos]**

Solución:

a) Sea $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-27$. Notemos que f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y que $f(x_0,y_0,z_0)=f(3,3,-3)=0$. Además, $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=(2x_0\quad 2y_0\quad 2z_0)=(6\quad 6\quad -6)$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial z}(3,3,-3)\neq 0$. De este modo, gracias al Teorema de la Función Implícita, existen vecindades $U(3,3)$ de $(3,3)$ y $V(-3)$ de -3, y $g:U(3,3)\to V(3)$ tales que $z=g(x,y)$. Además, g es de clase $\mathcal{C}^1(U(3,3,))$ y para $(x,y)\in U(3,3)$ se tiene que

$$Dg(x,y) = -\left.\frac{D_xf(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}\right|_{z=g(x,y)} = -\begin{pmatrix}\frac{x}{g(x,y)} & \frac{y}{g(x,y)}\end{pmatrix}.$$

b) El polinomio de Taylor de grado dos de la función g en torno al punto $(3,3)$ está dado por

$$\begin{aligned} Tg(x,y) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\big(\nabla f \cdot (x-3, y-3)\big)^k}{k!} \\ &= g(3,3) + \big(\nabla g(3,3)\cdot(x-3,y-3)\big)^1 + \frac{1}{2}\big(\nabla g(3,3)\cdot(x-3,y-3)\big)^2. \end{aligned}$$

Por otro lado,

- $g(3,3) = -3$.
- De a), $\nabla g(3,3) = -\begin{pmatrix} \dfrac{3}{g(3,3)} & \dfrac{3}{g(3,3)} \end{pmatrix} = (1 \quad 1)$. Luego,

$$\big(\nabla g(3,3)\cdot(x-3,y-3)\big)^1 = \nabla g(3,3)\cdot(x-3,y-3) = x+y-6.$$

- Por último,

$$\big(\nabla g(3,3)\cdot(x-3,y-3)\big)^2 = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(3,3)(x-3)^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(3,3)(x-3)(y-3) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(3,3)(y-3)^2.$$

Calculamos las segundas derivadas parciales de g utilizando $Dg(x,y)$ obtenido en a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{g(x,y)}\right) = -\frac{g(x,y)^2 + x^2}{g(x,y)^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(3,3) = \frac{2}{3}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{g(x,y)}\right) = -\frac{xy}{g(x,y)^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(3,3) = \frac{1}{3}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{g(x,y)}\right) = -\frac{g(x,y)^2 + y^2}{g(x,y)^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(3,3) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Así,

$$Tg(x,y) = -3 + (x+y-6) + \frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{1}{3}(x-3)(y-3) + \frac{1}{3}(y-3)^2.$$