

Conjuntos compactos.

- Conjuntos compactos y no compactos.
- Carácter intrínseco de la noción de compacidad.
- Propiedades básicas de conjuntos compactos.
- Sucesiones encajadas de compactos.
- Subconjuntos infinitos de un compacto.

Conjuntos compactos y no compactos.

Recordemos:

Def.: Un conjunto K es **compacto** si **todo** cubrimiento por abiertos de K tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplo: $(0, 1)$ no es compacto.

Dem.: Veremos un cubrimiento por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito:

$$(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right). \quad \boxed{\text{Ej.}}$$

Este cubrimiento no tiene un subcubrimiento finito, pues

$$\forall n_1 < \dots < n_K \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=1}^K \left(\frac{1}{n_k}, 1\right) = \left(\frac{1}{n_K}, 1\right) \not\supset (0, 1). \quad \square$$

Ejemplo: \mathbb{R} no es compacto.

Dem.: Procederemos como antes. Sea

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n). \quad \boxed{\text{Ej.}}$$

Este cubrimiento por abiertos no tiene un subcubrimiento finito, pues

$$\forall n_1 < \dots < n_K \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=1}^K (-n_k, n_k) = (-n_K, n_K) \not\supset \mathbb{R}. \quad \square$$

Carácter intrínseco de la noción de compacidad.

Sea d una métrica en X . Sea $Y \subset X$ dotado de la métrica inducida d .

Sea $K \subset Y$. Como la noción de compacidad se define a partir de abiertos, a priori el que K sea compacto en X o en Y parecerían cosas distintas:

- K es compacto en X si todo cubrimiento por **abiertos en X** de K tiene un subcubrimiento finito;
- K es compacto en Y si todo cubrimiento por **abiertos en Y** de K tiene un subcubrimiento finito.

Sin embargo, veremos que la noción de compacidad es **intrínseca de K** y no depende del espacio métrico, X o Y , en el que se lo mire.

Teor.: Sea $K \subset Y \subset X$. K es compacto en X si y sólo si es compacto en Y .

Por esa razón, tiene sentido decir que **un espacio métrico es compacto**, mientras que no tiene sentido decir que un espacio métrico es abierto o cerrado, pues ambas propiedades dependen de cual es el espacio métrico que se considere.

Dem.: $\boxed{\implies}$ Sea K compacto en Y . Veremos que es compacto en X .

Sean G_α , $\alpha \in A$, abiertos en X : $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Como $K \subset Y$, entonces $K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y)$.

Como los $(G_\alpha \cap Y)$ son abiertos en Y y K es compacto en Y ,
entonces $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$: $K \subset \bigcup_{n=1}^N (G_{\alpha_n} \cap Y) \subset \bigcup_{n=1}^N G_{\alpha_n}$

$\implies K$ es compacto en X .

$\boxed{\impliedby}$ Sea K compacto en X . Veremos que es compacto en Y .

Sean V_α , $\alpha \in A$, abiertos en Y : $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.

V_α abierto en $Y \implies \exists G_\alpha$ abierto en X : $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$

$\implies K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Como los G_α son abiertos en X y K es compacto en X , entonces

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$: $K \subset \bigcup_{n=1}^N G_{\alpha_n}$ y, como $K \subset Y$, entonces

$K \subset \left(\bigcup_{n=1}^N G_{\alpha_n}\right) \cap Y = \bigcup_{n=1}^N (G_{\alpha_n} \cap Y) = \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$

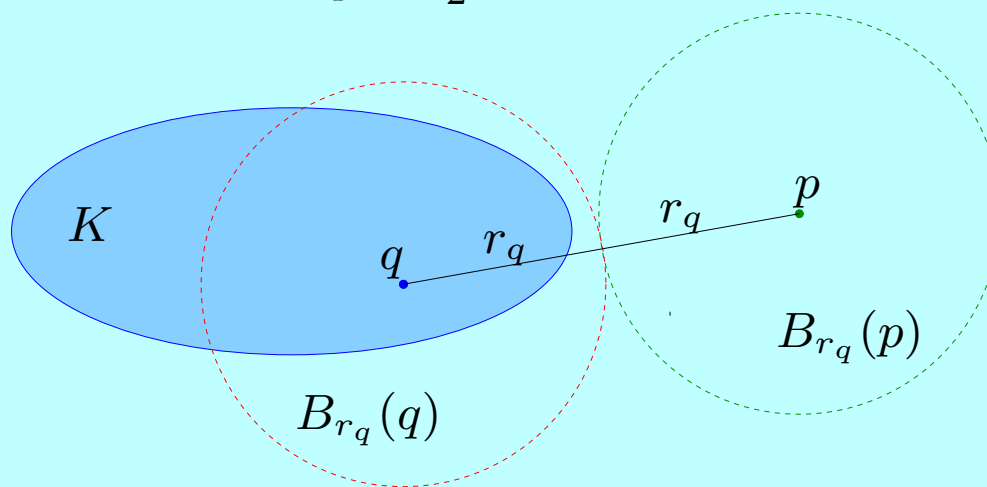
$\implies K$ es compacto en Y . \square

Propiedades básicas de conjuntos compactos.

Teor.: Los conjuntos compactos son cerrados.

Dem.: Sea $K \subset X$, K compacto. Si $K = X$, no hay nada que demostrar. Si $K \neq X$, veremos que K^c es abierto (lo que implica K cerrado).

Sea $p \in K^c$. $\forall q \in K$, sea $r_q := \frac{1}{2}d(p, q) > 0$.



Como $K \subset \bigcup_{q \in K} B_{r_q}(q) \implies \exists q_1, \dots, q_N \in K : K \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n)$.

Sea $r := \min_{1 \leq n \leq N} r_{q_n} > 0$. Entonces, $\forall n = 1, \dots, N$, $B_r(p) \subset B_{r_{q_n}}(p)$

$$\implies B_r(p) \cap B_{r_{q_n}}(q_n) = \emptyset \implies B_r(p) \cap \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n) = \emptyset$$

$$\implies B_r(p) \cap K = \emptyset \implies B_r(p) \subset K^c \implies K^c \text{ abierto. } \square$$

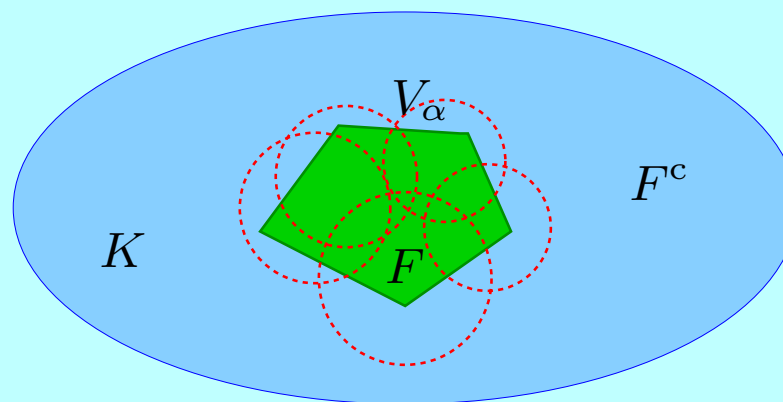
Prop.: Los conjuntos compactos son acotados.

Dem.: Ej.

Teor.: Los subconjuntos cerrados de un compacto son compactos.

Dem.: Sean K compacto y $F \subset K$ cerrado. Veremos que F es compacto.

Sea $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}$ un cubrimiento por abiertos de F .



Como F^c es abierto, $K \subset F^c \cup \bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}$ es un cubrimiento por abiertos de K .

$$\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A : K \subset F^c \cup \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$$

$$\implies F = K \cap F \subset (F^c \cap F) \cup \bigcup_{n=1}^N (V_{\alpha_n} \cap F) \subset \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$$

$\implies F$ es compacto. \square

Sucesiones encajadas de compactos.

Def.: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión encajada de conjuntos** si $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

Teor.: Sea $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión encajada de conjuntos compactos no vacíos. Entonces, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Dem.: Por el absurdo. **Supongamos que** $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$.

$$\implies K_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} K_n = \emptyset \implies K_1 \subset \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} K_n \right)^c = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_n^c.$$

Como K_n^c son abiertos y K_1 compacto, $\exists n_1 < \dots < n_K : K_1 \subset \bigcup_{k=1}^K K_{n_k}^c$

$$\implies K_1 \subset \left(\bigcap_{k=1}^K K_{n_k} \right)^c = K_{n_K}^c \quad (\text{pues } K_{n_1} \supset \dots \supset K_{n_K})$$

$$\implies K_{n_K} = K_1 \cap K_{n_K} = \emptyset. \quad \triangleright=\triangleleft \quad \square$$

Ejemplos: de la necesidad de la **hipótesis de compacidad** en este teorema.

- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ **Ej.** $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ **no compactos** pues no son cerrados.
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty) = \emptyset$ **Ej.** $[n, +\infty)$ **no compactos** pues no son acotados.

Subconjuntos infinitos de un compacto.

Teor.: Todo subconjunto infinito de un conjunto compacto tiene un punto de acumulación en el compacto.

Dem.: Sean K compacto y $E \subset K$ infinito.

Por el absurdo, **supongamos que ningún punto de K es punto de acumulación de E .**

$$\text{Entonces, } \forall q \in K, \exists r_q > 0 : B_{r_q}(q) \cap E = \begin{cases} \{q\}, & \text{si } q \in E, \\ \emptyset, & \text{si } q \notin E. \end{cases} \quad (*)$$

Ahora bien, como $K \subset \bigcup_{q \in K} B_{r_q}(q)$ y es compacto, entonces,

$$\begin{aligned} & \exists q_1, \dots, q_N : K \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n) \\ \implies E &= K \cap E \subset \left(\bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n) \right) \cap E = \bigcup_{n=1}^N (B_{r_{q_n}}(q_n) \cap E). \end{aligned}$$

Pero vimos en **(*)** que $B_{r_{q_n}}(q_n) \cap E \subset \{q_n\}$

$$\implies E \subset \{q_1, \dots, q_N\}, \text{ que es un conjunto finito } \implies \textbf{E finito. } \triangleright=\triangleleft \quad \square$$