Mecánica de Fluidos

Balance Macroscópicos

Definiciones

- **Sistema**: cantidad arbitraria de masa de identidad fija
- **Alrededores**: todo lo externo al sistema
- **Fronteras**: límite entre el sistema y los alrededores
- **Volumen de control**: volumen fijo en el espacio o en movimiento con una velocidad constante a través del cual fluye el continuo (gas, líquido o sólido)

Las leyes de la mecánica establecen las interacciones entre el sistema y su alrededor!!!

Conservación de masa: $m_{sist} = cte \Rightarrow \dfrac{dm_{sist}}{dt} = 0$

Conservación de momentum lineal

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d(m\vec{V})_{sist}}{dt}$$

Conservación de momentum angular

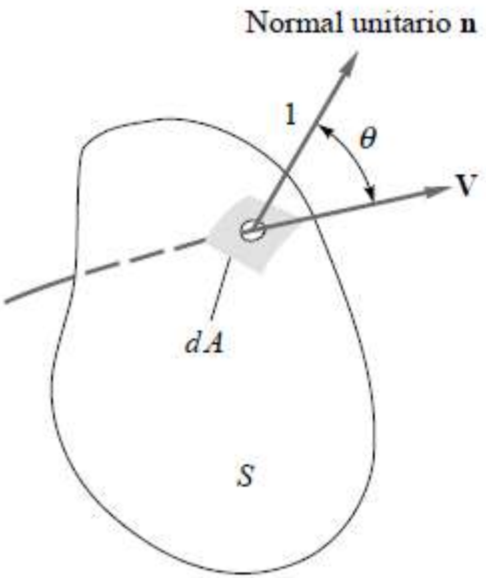
$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{H}_{sist}}{dt}; \quad \text{donde } \vec{H}_{sist} = \int \vec{r}_{CG} \times \vec{V} dm$$

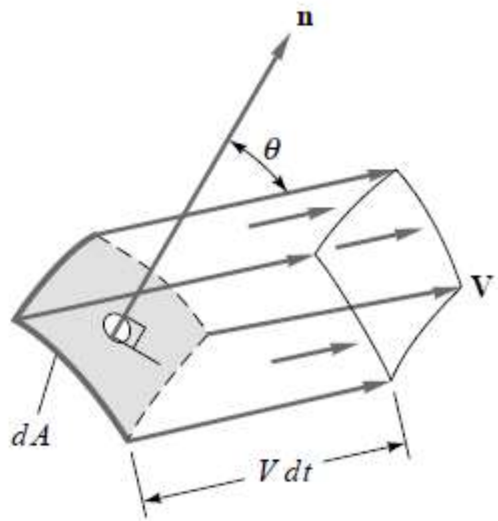
Conservación de energía $\delta Q - \delta W = dE$

$\delta W < 0$ trabajo realizado por los alrededores sobre el sistema

$\delta W > 0$ trabajo realizado por el sistema sobre los alrededores

Desigualdad de entropía $\mathrm{dS} \geq \dfrac{dQ}{T}$





$$Q = \int \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dA$$ flujo volumétrico

$$\dot{m} = \int \rho \left(\vec{V} \cdot \hat{n} \right) dA$$ flujo másico

Ecuaciones de balance

- Idea Central:
- Acumulación de ϕ = entrada de ϕ – salida de ϕ

$$\frac{d}{dt} m_{VC} = \sum_{entradas} \dot{m}_i - \sum_{salidas} \dot{m}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)_{VC} = \sum \vec{F} + \sum_{entradas} \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{salidas} \dot{m}_i \vec{V}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\right) = \sum \vec{T}_0 + \sum_{entradas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i - \sum_{salidas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i$$

- Para poder demostrar estas relaciones intuitivas necesitamos el Teorema de Transporte de Reynolds

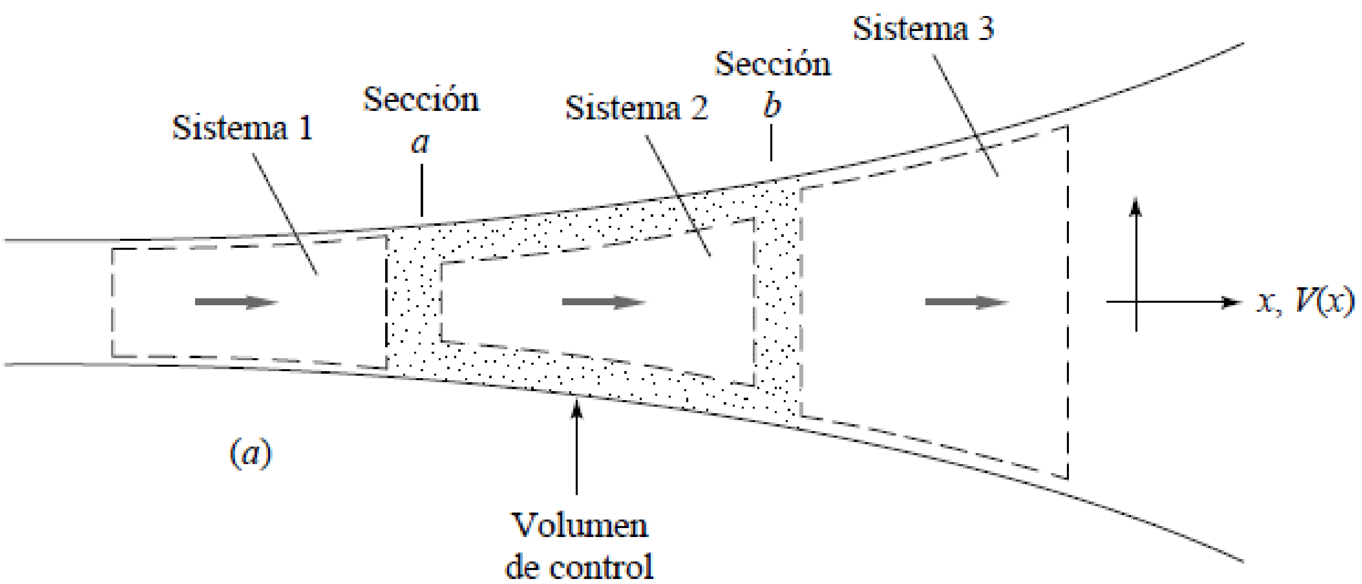
Teorema de Transporte de Reynolds 1D

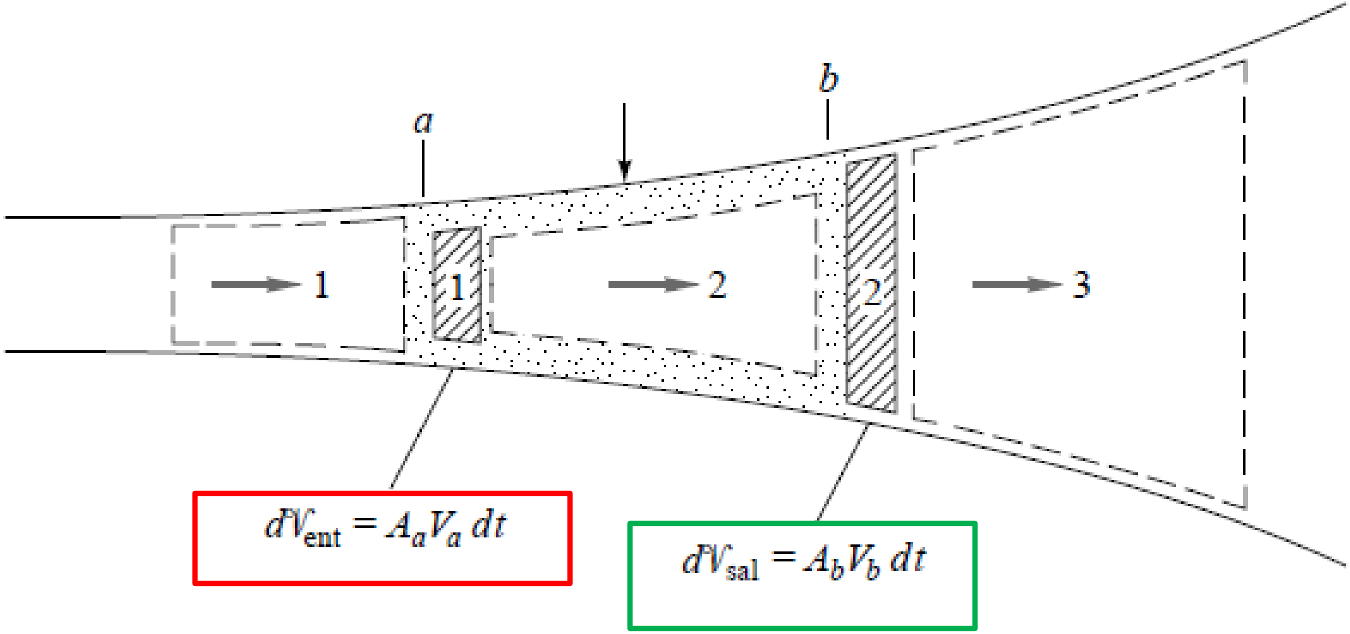
Sea B una propiedad del fluido y β su valor intensivo $\left(\dfrac{dB}{dm}\right)$.

La cantidad de B en el VC es:

$$B_{VC}(t) = \int_{VC} \beta \rho \, dV \qquad \left(\text{válido para todo } t\right)$$

Se desea relacionar B_{VC} y B_{sist} (pues sobre el sist. valen las leyes de la Mecánica)





$$\frac{dB_{VC}}{dt} = \lim \frac{B_{VC}(t+dt) - B_{VC}(t)}{dt}$$

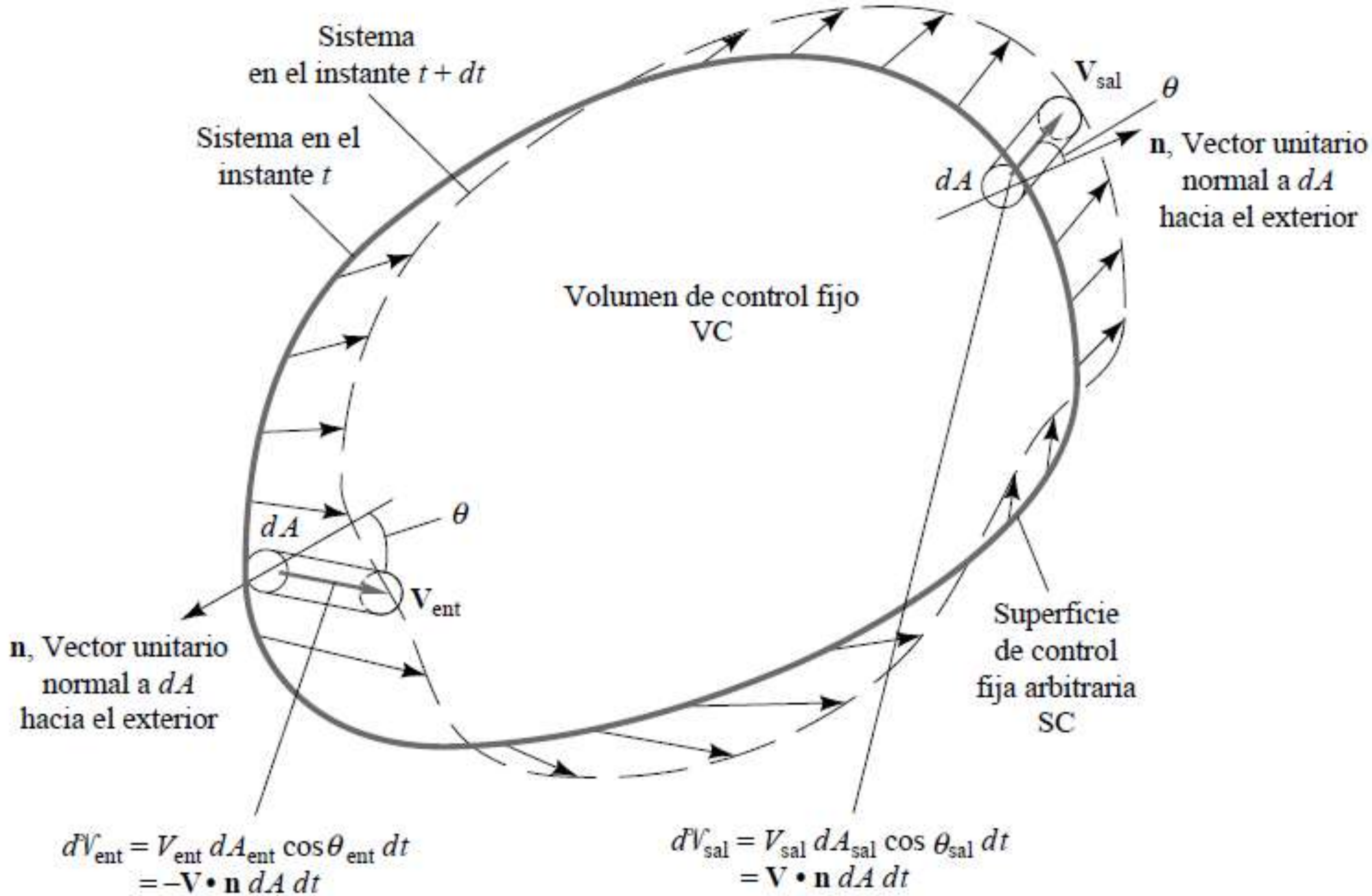
$$= \lim \frac{B_{sist}(t+dt) - \beta\rho A_b V_b dt + \beta\rho A_a V_a dt - B_{sist}(t)}{dt}$$

$$= \lim \frac{B_{sist}(t+dt) - B_{sist}(t)}{dt} - \beta\rho A_b V_b + \beta\rho A_a V_a$$

$$= \frac{dB_{sist}}{dt} - \beta\rho A_b V_b + \beta\rho A_a V_a$$

$$\Rightarrow \frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \underbrace{\beta\rho A_b V_b}_{\text{lo que sale de } \beta} - \underbrace{\beta\rho A_a V_a}_{\text{lo que entra de } \beta}$$

Teorema de Transporte de Reynolds 3D



$$\Rightarrow \frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \beta\rho dV \right) + \oint_{SC} \beta\rho\vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Aproximaciones unidimensionales

Estudiemos el término $\oint_{SC} \beta\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA$

Si suponemos que tiene un número finito de entradas/salidas

y que en cada una de ellas $\vec{V} = cte,$ entonces

$$\oint_{SC} \beta\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA = \sum_{salidas} \beta_i\rho_i V_i^{\perp} A_i - \sum_{entradas} \beta_i\rho_i V_i^{\perp} A_i$$

$$= \sum_{salidas} \beta_i\dot{m}_i - \sum_{entradas} \beta_i\dot{m}_i$$

donde $\dot{m}_i = \rho_i V_i^{\perp} A_i$

$$\Rightarrow \frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \beta\rho dV\right) + \sum_{salidas} \beta_i\dot{m}_i - \sum_{entradas} \beta_i\dot{m}_i$$

Conservación de Masa

Se aplica TTR a $\beta = \frac{dm}{dm} = 1$

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} 1 \cdot \rho dV\right) + \int_{SC} 1 \cdot \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho dV\right) + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

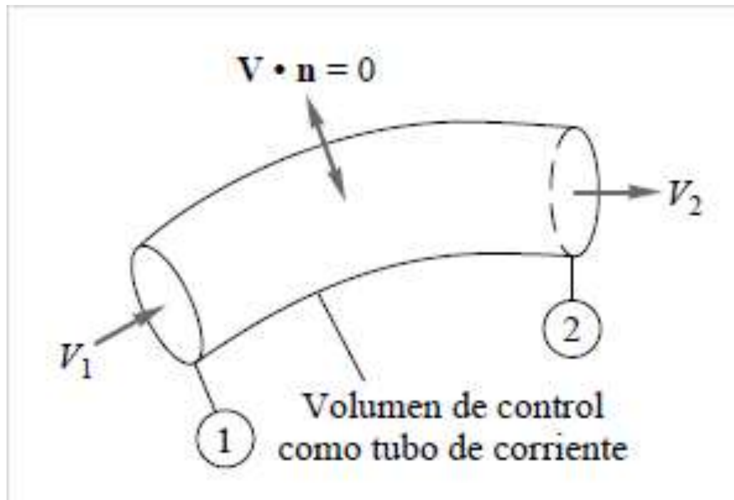
pero $\frac{dm_{sist}}{dt} = 0$ luego

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho dV\right) + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

si se cumplen los supuestos de aproximación unidimensional

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho dV\right) = \sum_{entradas} \dot{m}_i - \sum_{salidas} \dot{m}_i$$

Ejemplo: Escriba la ecuación de conservación de la masa para el flujo estacionario por el interiorde un tubo de corriente (flujo paralelo a la paredes en todo punto) con una entrada unidimensional en 1 y salida unidimensional en 2



$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho dV\right)}_{0 \text{ pues hay EE}} = \sum_{entradas} \dot{m}_i - \sum_{salidas} \dot{m}_i$$

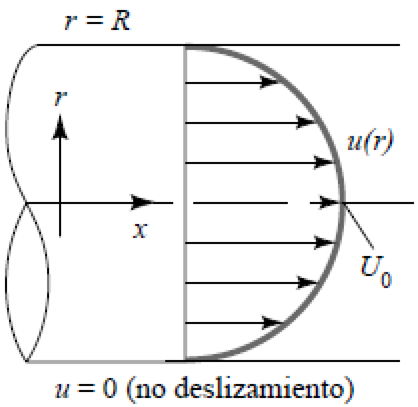
$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Si $\rho_1 = \rho_2$ entonces $V_1 A_1 = V_2 A_2$

Ejemplo: En el flujo estacionario viscoso por un tubo circular , el perfil de velocidad longitudinal viene dado aproximadamente por

$$u(r) = U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m$$

de forma que u varía de cero en la pared ($r = R$), condición de no deslizamiento, hasta un máximo $u = U_0$ en el eje del tubo ($r = 0$). Cuando el flujo es muy viscoso (laminar) $m = 1/2$, mientras que si es muy poco viscoso (turbulento) $m = 1/7$. Calcule la velocidad media si la densidad es constante.



$$V_{prom} = \frac{\int_A u(r)dA}{A} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m rdrd\theta}{\pi R^2}$$

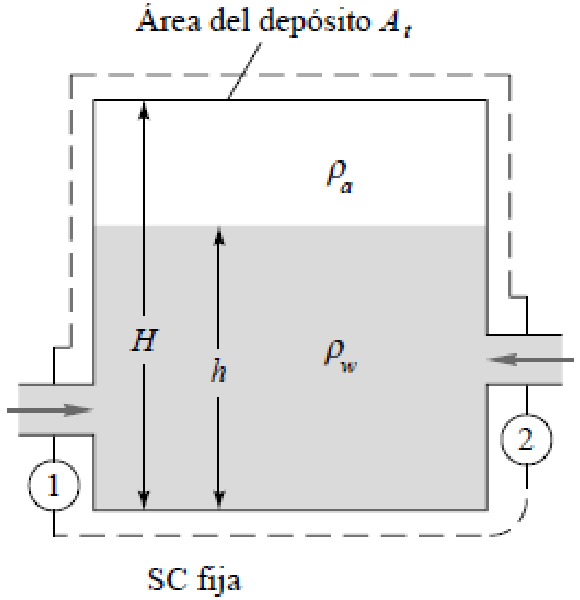
$$V_{prom} = \frac{2\pi U_0}{\pi R^2}\int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m rdr; \text{ c.v. } \quad v = 1 - r/R \quad \Rightarrow dv = -dr/R$$

$$\Rightarrow V_{prom} = \frac{2U_0}{R^2}\int_{v=1}^{v=0} v^m \left(R\left(1-v\right)\right)\left(-Rdv\right)$$

$$V_{prom} = 2U_0 \int_{v=1}^{v=0} v^m \left(v-1\right)dv = 2U_0 \int_{v=1}^{v=0} \left(v^{m+1} - v^m\right)dv$$

$$V_{prom} = 2U_0\left(\frac{-1}{m+2} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{2U_0}{\left(m+2\right)\left(m+1\right)}$$

Ejemplo: El depósito de la figura se está llenando con agua a través de dos entradas bidimensionales. En la parte superior del depósito va quedando aire atrapado. La altura del agua es *h*. Obtenga una expresión para la variación temporal de la altura del agua dh/dt.



Notemos que son 2 fluidos (aire y agua), luego podemos hacer balance de masa para la mezcla y una especie, o un balance por cada especie

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho_W dV\right) = \frac{d(\rho_W A_t h)}{dt} = \rho_W \left(A_1 V_1 + A_2 V_2\right)$$

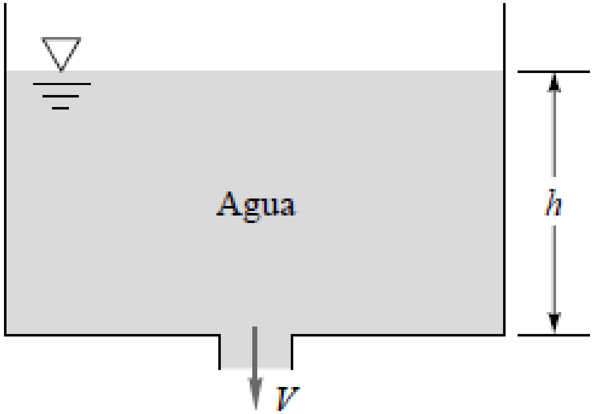
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{A_1 V_1 + A_2 V_2}{A_t}$$

No sería necesario el balance para el aire.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho_A dV\right) = \frac{d\left(\rho_A A_t \left(H-h\right)\right)}{dt} = 0 \text{ (pues no entra aire)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\rho_A h\right)}{dt} = 0, \text{ el aire se comprime y no entrega información relevante}$$

Ej: De acuerdo con el teorema de Torricelli, la velocidad de un fluido que descarga por el orificio de un depósito es $V = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura de agua sobre el orificio. Si el orificio tiene una sección A_0 y el depósito es cilíndrico con una sección transversal de área $A_b \gg A_0$, obtenga una fórmula para el tiempo que el depósito tardará en vaciarse completamente si la altura inicial de agua es h_0.



$$\frac{d\left(\rho h(t) A_b\right)}{dt} = 0 - \rho A_0 \sqrt{2gh(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{A_0\sqrt{2g}}{A_b} h^{1/2}$$

$$\Rightarrow -\frac{A_b}{A_0\sqrt{2g}} \frac{dh}{h^{1/2}} = dt$$

$$\Rightarrow t = \frac{A_b}{A_0\sqrt{2g}} h^{1/2}$$

Conservación de Momentum lineal

Se aplica TTR a $B = m\vec{V}$ o sea $\beta = \vec{V}$

$$\frac{d\left(m\vec{V}\right)_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V}\rho dV\right) + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA$$

pero $\frac{d\left(m\vec{V}\right)_{sist}}{dt} = \sum \vec{F}$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V}\rho dV\right) + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA$$

si se cumplen los supuestos de aproximación unidimensional

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V}\rho dV\right) + \sum_{salidas} \dot{m}_i\vec{V}_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i\vec{V}_i$$

Analicemos las fuerzas que actúan

Peso $\vec{F}_{peso} = \int_{VC} \rho g dV$

Fuerzas viscosas $\vec{F}_{\mu}$

Presión $\vec{F}_{presión} = -\int_{SC} p\hat{n} dA$

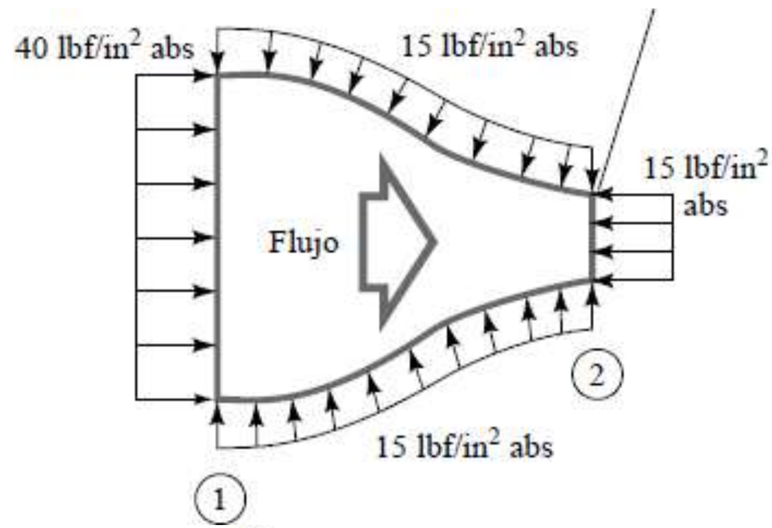
Notemos que si p es constante

$$\vec{F}_{presión} \cdot \hat{e} = -\int_{SC} p\hat{n} dA \cdot \hat{e} = -p \int_{SC} \hat{n} \cdot \hat{e} dA$$

$$= -p \int_{SC} \hat{e} \cdot \hat{n} dA = -p \oint_{VC} \left(\nabla \cdot \hat{e} \right) dV$$

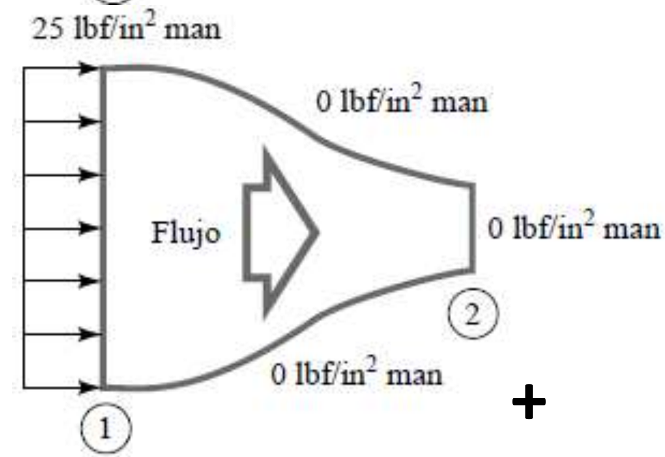
$$= 0 \Rightarrow \vec{F}_{presión} = 0$$

Ejemplo: Un volumen de control de una tobera tiene presiones absolutas de 40 $lb_f\ /\ in^2$ en la sección 1 y de 15 $lb_f\ /\ in^2$ en la sección 2 y en las paredes laterales exteriores.
Calcule la resultante de las fuerzas de presión si $D_1 = 3\ in$ y $D_2 = 1\ in.$

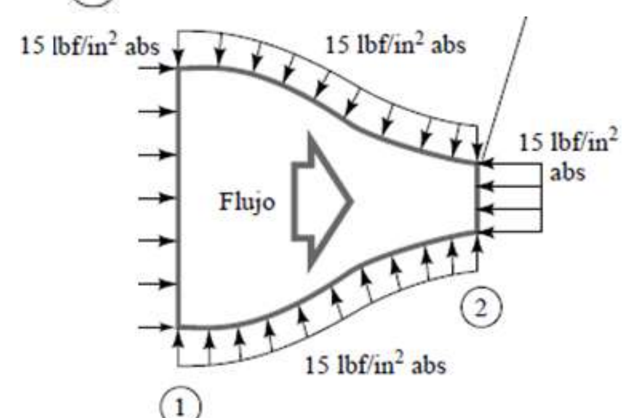


Si aplicamos el principio de Superposición se puede descomponer el VC en dos, uno con presión de 15 $lb_f\ /\ in^2$ en toda su superficie y otro con presión de 25 $lb_f\ /\ in^2$ en la sección 1 y 0 en el resto.
Del apartado anterior $\vec{F}_{presión} = 0$ en el primer VC.
Para el otro se obtiene

$$\vec{F}_{presión} = 25\frac{lb_f}{in^2}\times\frac{\pi\cdot 3^2}{4}in^2 = 177 lb_f\ \ \hat{i}$$

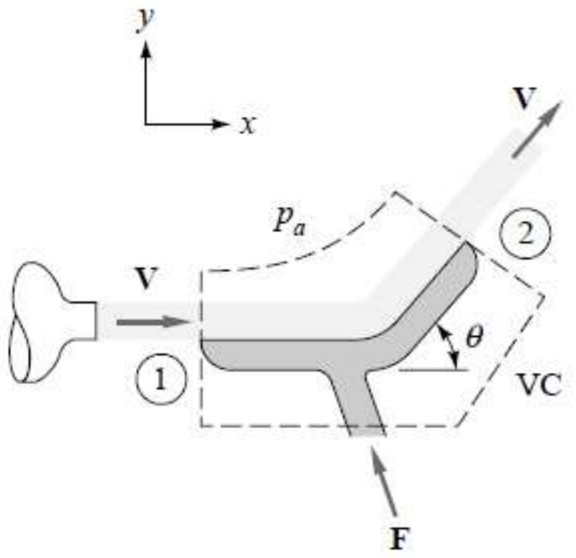


+



Ejemplo: Un álabe fijo deflecta un chorro de agua de área A un ángulo θ sin cambiar la magnitud de su velocidad. El flujo es estacionario, la presión es p_{at} en todas partes y la fricción sobre el álabe es despreciable.

Calcule las componentes F_x y F_y de la fuerza aplicada al álabe



$$\sum \vec{F} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V} \rho dV\right)}_{\text{0 por EE}} + \sum_{salidas} \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \vec{V}_i$$

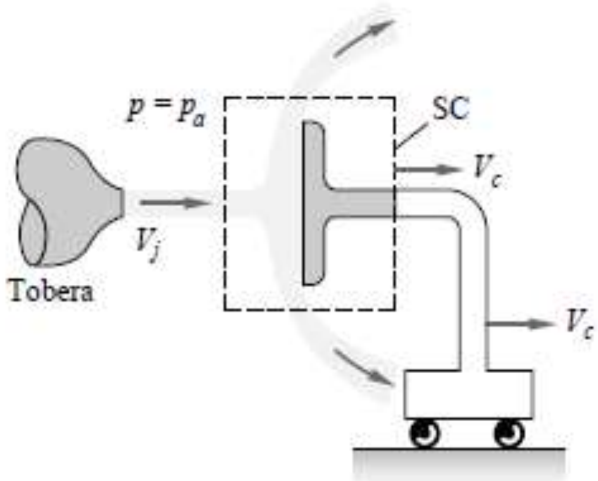
$$\sum \vec{F} = \dot{m}_2 \vec{V}_2 - \dot{m}_1 \vec{V}_1 = \dot{m}_2 V_2 \cos\theta \hat{i} + \dot{m}_2 V_2 \sin\theta \hat{j} - \dot{m}_1 V_1 \hat{i}$$

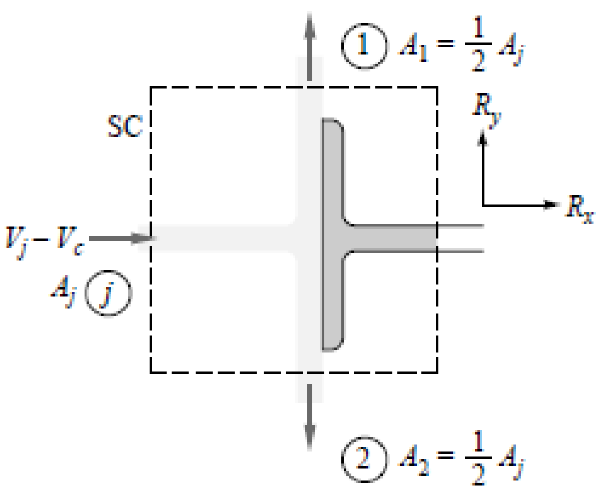
Por conservación de la masa $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho A V$

$$\Rightarrow F_X = \rho A V^2 \left(\cos\theta - 1\right)$$

$$\Rightarrow F_Y = \rho A V^2 \sin\theta$$

Ejemplo: Un chorro de agua de velocidad $\vec{V} = V_j \hat{i}$ golpea una superficie plana que se mueve a una velocidad $\vec{V} = V_C \hat{i}$. Encuentre la fuerza necesaria para mantener la superficie moviéndose a velocidad constante.Desprecie el peso del chorro y de la placa y suponga que el chorro se divide en dos chorros iguales, uno hacia arriba y otro hacia abajo.





Partamos con la conservación de la masa

$$\dot{m}_j = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 2\dot{m}_1$$

$$\rho A_j \left(V_j - V_C \right) = \rho A_1 V_1 + \rho A_2 V_2 = 2\rho A_1 V_1$$

$$\Rightarrow A_j \left(V_j - V_C \right) = 2 A_1 V_1$$

La conservación de momentum

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V} \rho dV \right)}_{\text{0 por EE}} + \sum_{salidas} \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \vec{V}_i$$

$$\sum \vec{F} = \dot{m}_1 \left(V_C \hat{i} + V_1 \hat{j} \right) + \dot{m}_2 \left(V_C \hat{i} - V_2 \hat{j} \right) - \dot{m}_j V_j \hat{i}$$

$$\sum \vec{F} = 2\dot{m}_1 V_C \hat{i} - \dot{m}_j V_j \hat{i} = \dot{m}_j \left(V_C - V_j \right) \hat{i}$$

$$\sum \vec{F} = -\rho A_j \left(V_j - V_C \right)^2 \hat{i}$$

Factor de corrección Momentum Lineal

Notemos que si la velocidad no es uniforme en la secciones de entrada y salida se tiene que:

$$\left|\int \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA\right| \neq \dot{m}V_{prom} = \rho V_{prom}^{2}A \qquad \left(\text{piense que } \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \neq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

Se define el factor de corrección del momentum lineal por:

$$\left|\int \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA\right| = \beta\rho V_{prom}^{2}A \Rightarrow \beta = \frac{\left|\int \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA\right|}{\rho V_{prom}^{2}A}$$

Para determinar β se necesita saber el perfil de velocidad.

En un perfil laminar en una tubería $\qquad V = V_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow \beta = \frac{3}{4}$

En un perfil turbulento $\qquad V = V_0\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7} \Rightarrow \beta = 1.02 \approx 1$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{V}\rho dV\right) + \sum_{salidas} \beta_i \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{entradas} \beta_i \dot{m}_i \vec{V}_i$$

Conservación de Momentum angular

Se aplica TTR sobre el vector momentun angular $\vec{H}_0$

$$\vec{H}_0 = \int \vec{r} \times \vec{V} dm \Rightarrow \beta = \frac{d\vec{H}_0}{dm} = \vec{r} \times \vec{V}$$

obteniéndose

$$\frac{d\left(\vec{H}_0\right)_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\right) + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

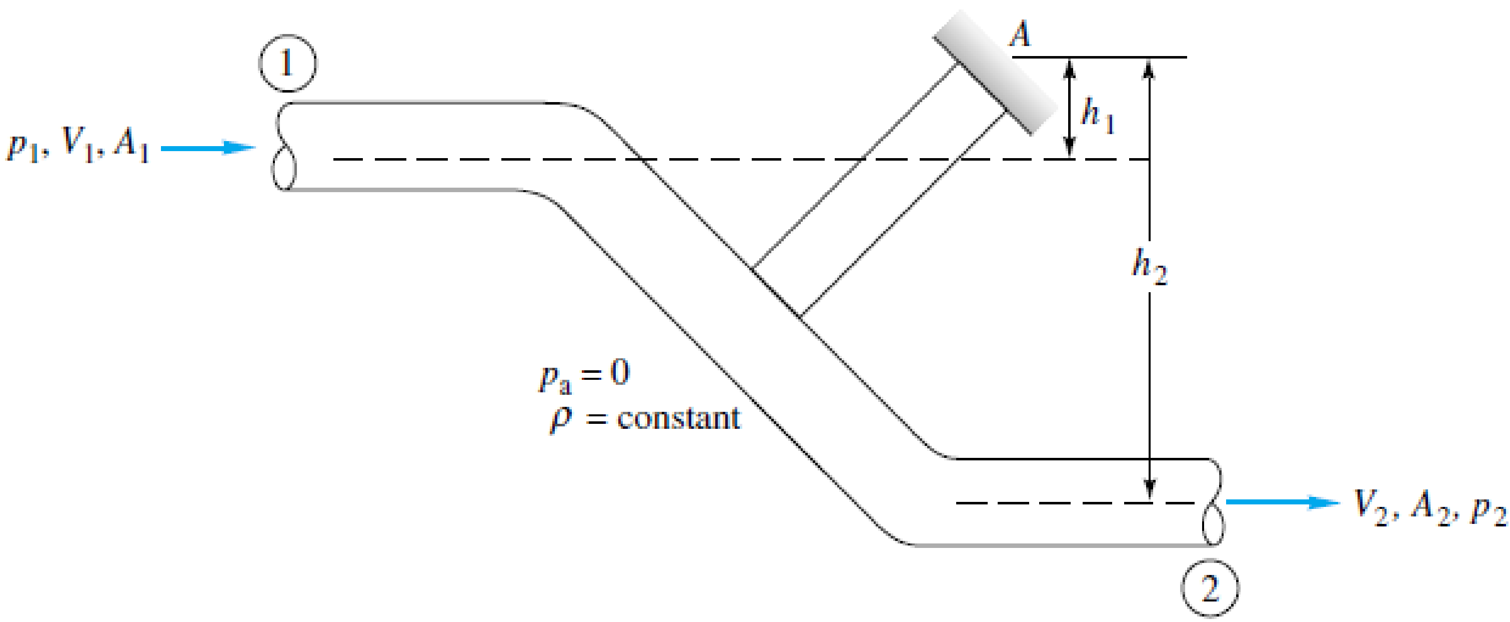
pero $\dfrac{d\left(\vec{H}_0\right)_{sist}}{dt} = \sum \vec{T}_0$

$$\Rightarrow \sum \vec{T}_0 = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\right) + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

si se cumplen los supuestos de aproximación unidimensional

$$\sum \vec{T}_0 = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\right) + \sum_{salidas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i$$

Ejemplo: La Figura muestra dos codos de un conducto sujetos al punto A y conectados al resto de la instalación mediante acoplamientos flexibles en 1 y 2. ρ es constante y la presión ambiente p_a es nula. Calcule el torque que debe resistir el soporte en A, en función de las propiedades del flujo en las secciones 1 y 2 y las distancias h_1 y h_2.



Aplicamos la conservación de masa

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 := \dot{m} = V_1 A_1 \rho = V_2 A_2 \rho$$

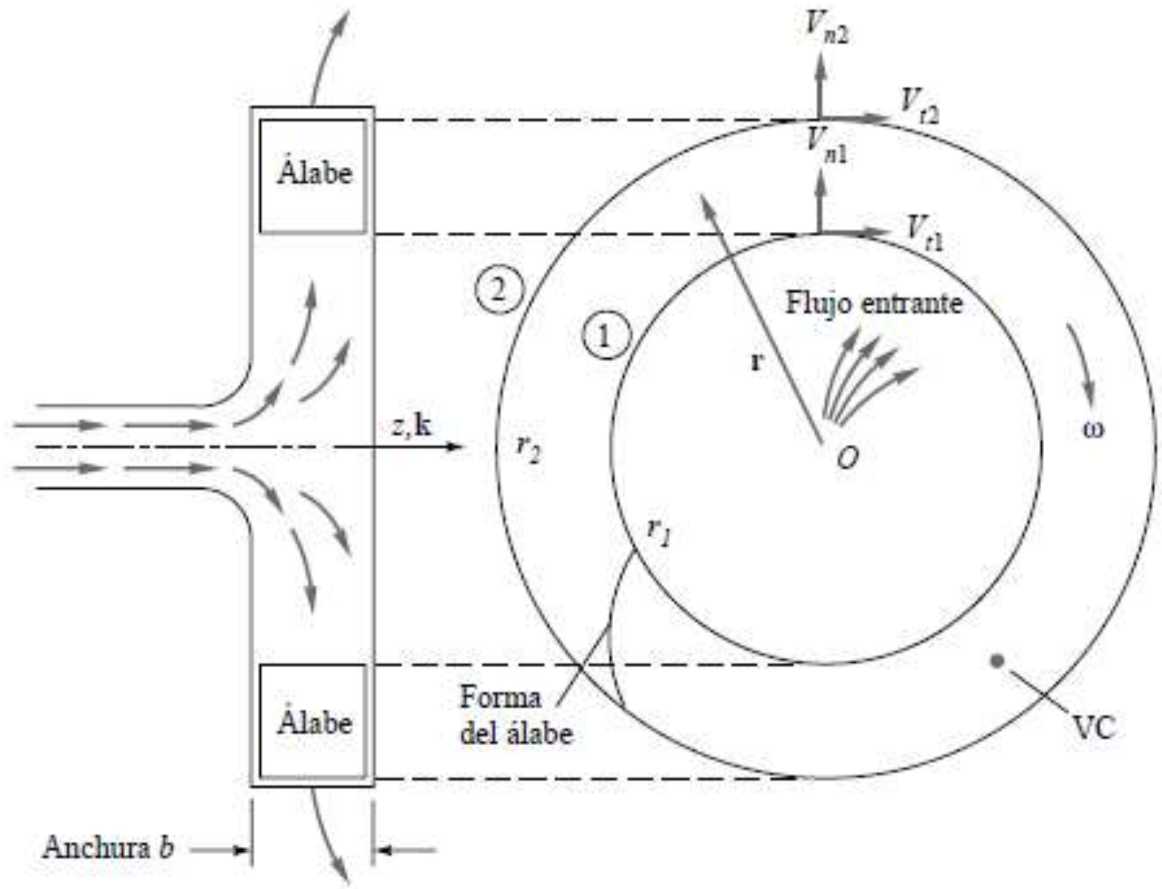
Se cumplen los supuestos de aproximación unidimensional

$$\sum \vec{T}_0 = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV \right)}_{0 \text{ por E.E.}} + \sum_{salidas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V} \right)_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V} \right)_i$$

$$T_A + h_1 A_1 P_1 - h_2 A_2 P_2 = \dot{m} h_2 V_2 - \dot{m} h_1 V_1 \qquad (\text{todo en } \hat{k})$$

$$\Rightarrow T_A \hat{k} = \left[h_2 \left(A_2 P_2 - \dot{m} V_2 \right) - h_1 \left(A_1 P_1 - \dot{m} V_1 \right) \right] \hat{k}$$

Ej.: Se muestra el esquema de una bomba centrífuga. El fluido entra axialmente y pasa a traves de unos álabes que giran a velocidad angular ω. La velocidad del fluido cambia de V_1 a V_2 y la presión de p_1 a p_2. (a) Calcule el torque que hay que aplicar a los álabes para producir este flujo. (b) La potencia suministrada a la bomba. (Potencia=torque$\times\omega$)



$$\vec{V} = V_r\hat{r} + V_\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{V} = \left(\vec{V}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} + \left(\vec{V}\cdot\hat{\theta}\right)\hat{\theta}$$

Aplicamos la conservación de masa

$$\dot{m}_{entra} = \rho\left(\vec{V}_1 \cdot \hat{r}\right) = \dot{m}_{sale} = \rho\left(\vec{V}_2 \cdot \hat{r}\right) := \rho Q$$

Se cumplen los supuestos de aproximación unidimensional

$$\sum \vec{T}_0 = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\right)}_{0 \text{ por E.E.}} + \sum_{salidas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V}\right)_i$$

$$\sum \vec{T}_0 = \dot{m}_{sale} r_2 \hat{r} \times \left[\left(\vec{V}_2 \cdot \hat{r}_2\right)\hat{r} + \left(\vec{V}_2 \cdot \hat{\theta}\right)\hat{\theta}\right]$$

$$- \dot{m}_{entra} r_1 \hat{r}_1 \times \left[\left(\vec{V}_1 \cdot \hat{r}_1\right)\hat{r} + \left(\vec{V}_1 \cdot \hat{\theta}\right)\hat{\theta}\right]$$

$$\sum \vec{T}_0 = \rho Q\left[r_2 \cdot \left(\vec{V}_2 \cdot \hat{\theta}\right) - r_1 \cdot \left(\vec{V}_1 \cdot \hat{\theta}\right)\right]\hat{k}$$

$$\sum \vec{T}_0 = \rho Q\left[r_2 \cdot r_2 \omega - r_1 \cdot r_1 \omega\right]\hat{k} = \rho Q \omega\left[r_2{}^2 - r_1{}^2\right]\hat{k}$$

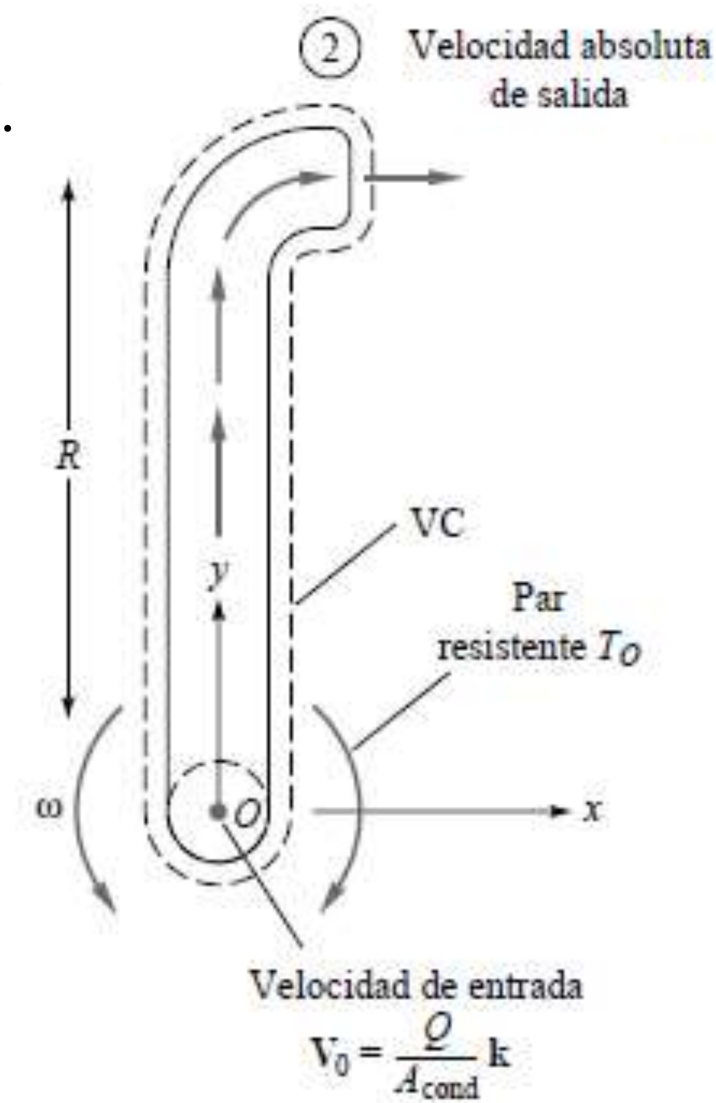
$$\Rightarrow \text{Pot} = \rho Q \omega^2\left[r_2{}^2 - r_1{}^2\right]$$

Ej.: Se muestra el brazo de un aspersor visto desde arriba.

El brazo gira a velocidad angular constante ω alrededor de O. El flujo volumétrico que entra en el brazo en O es Q, y el fluido es incompresible.

Existe un torque por fricción en O, de valor $T_0\hat{k}$.

Calcule la velocidad de giro ω en función de la geometría y de las propiedades del flujo.



Aplicamos la conservación de masa

$$\dot{m}_{entra} = \rho Q = \dot{m}_{sale} = \rho A V_{salida} \Rightarrow V_{salida} = \frac{Q}{A}$$

Notemos que

$$\vec{V}_2 = -V_{salida}\hat{\theta} + R\omega\hat{\theta}$$

Luego

$$\sum \vec{T}_0 = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}\rho dV\right)}_{0 \text{ por E.E.}} + \sum_{salidas} \dot{m}_i\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_i$$

$$-T_0\hat{k} = \dot{m}_{sale}\left(R\hat{r}\times\left(-V_{salida} + R\omega\right)\hat{\theta}\right) - \dot{m}_{entra}\cdot \underbrace{(0)}_{\text{brazo nulo}}$$

$$-T_0\hat{k} = \rho Q\left(R\hat{r}\times\left(-\frac{Q}{A} + R\omega\right)\hat{\theta}\right) = \left(-\frac{\rho R Q^2}{A} + \rho Q R^2\omega\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{Q}{RA} - \frac{T_0}{\rho Q R^2}$$

Conservación de Energía

Se aplica TTR sobre $B = E$, luego $\beta = \dfrac{dE}{dm} = e$

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} e\rho dV\right) + \int_{SC} e\rho \vec{V}\cdot \hat{n} dA$$

usando la 1° ley de la Termodinámica

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} e\rho dV\right) + \int_{SC} e\rho \vec{V}\cdot \hat{n} dA$$

donde $\dot{Q}>0$ es calor adicionado al sistema

y $\dot{W}>0$ es trabajo realizado por el sistema.

Por otro lado consideraremos: $e = u + \dfrac{V^2}{2} + gz$

Para el trabajo sólo usaremos el realizado por la presión y por las máquinas externas (bomba, turbina, compresor, ventilador, etc), es decir,

$$\dot{W} = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_p .$$

Notemos que

$$d\dot{W}_p = -p\left(-\vec{V} \cdot \hat{n}\right) dA \Rightarrow \dot{W}_p = \int_{SC} p\left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) dA$$

OBS: El trabajo viscoso se omite pues consideraremos en las paredes condición de no-deslizamiento

$$\Rightarrow \dot{W} = \dot{W}_{eje} + \int_{SC} p\left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) dA$$

Reemplazamos en la ecuación de balance

$$\dot{Q}-\left(\dot{W}_{eje}+\int_{SC} p\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA\right)=\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} e\rho dV\right)+\int_{SC} e\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dA$$

$$\Rightarrow \dot{Q}-\dot{W}_{eje}=\frac{d}{dt}\left(\int_{VC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho dV\right)+\int_{SC}\left(\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho+p\right)\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_{eje}=\frac{d}{dt}\left(\int_{VC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho dV\right)+\int_{SC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\int_{VC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho dV\right)+\int_{SC}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)dA$$

donde $h=u+\frac{p}{\rho}$. La aproximación unidimensional en este caso se escribe

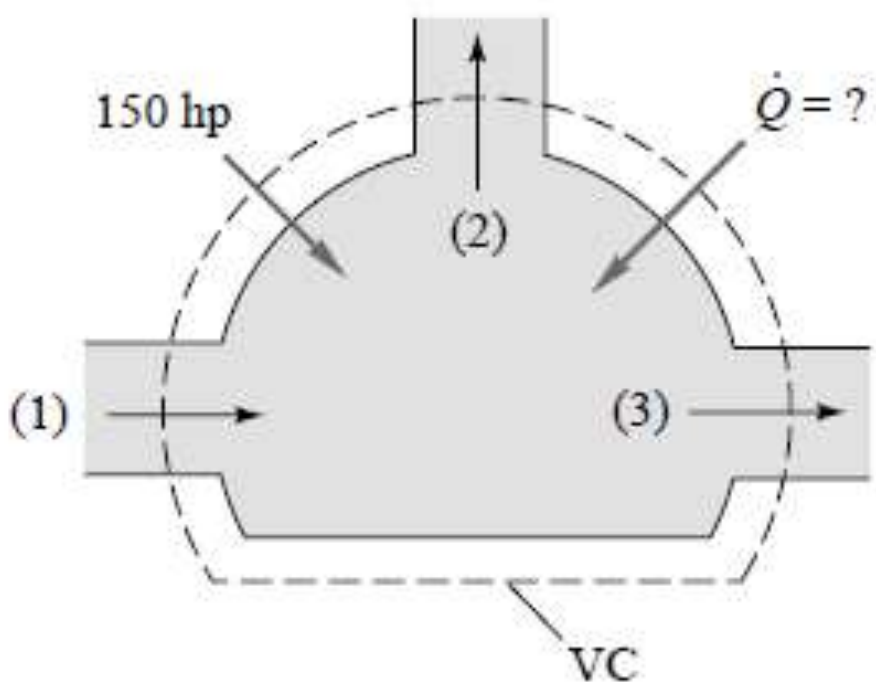
$$\dot{Q}-\dot{W}_{eje}=\frac{d}{dt}\left(\int_{VC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho dV\right)+\sum_{salidas}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\dot{m}$$

$$-\sum_{entradas}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\dot{m}$$

Ej.: Una máquina toma aire en EE por la sección 1 y lo descarga por las secciones 2 y 3. La máquina comunica al aire una potencia de 150 HP. Calcule la presión p_3 y el calor transferido $\dot{Q}$. Suponga que el aire es un gas perfecto con

$R = 1716\ ft \cdot lb_f / (slug{\cdot}°R)$ y $c_p = 6003\ ft \cdot lb_f / (slug{\cdot}°R)$.

Sección	A, ft²	Q, ft³/s	T, °F	p, lbf/in² abs	z, ft
1	0,4	100	70	20	1,0
2	1,0	40	100	30	4,0
3	0,25	50	200	?	1,5



$$\rho_i = \frac{p_i}{RT_i} \Rightarrow \rho_1 = 0,00317\,\frac{slug}{ft^3};\rho_2 = 0,0045\,\frac{slug}{ft^3}$$

Conservación de masa

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3$$

$$\Rightarrow \rho_3 = 0,00274\,\frac{slug}{ft^3} \Rightarrow p_3 = \rho_3 R T_3 = 21,5\,\frac{lb_f}{in^2}$$

Por otro lado

$$V_i = \frac{Q_i}{A_i} \Rightarrow V_1 = 250\,\frac{ft}{s};V_2 = 40\,\frac{ft}{s};V_3 = 200\,\frac{ft}{s}$$

Conservación de la energía

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} = \sum_{salidas}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m} - \sum_{entradas}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m}$$

Para gases ideales $h_i = c_p T_i$, reemplazando en ec. anterior

$$\dot{Q} = 49520 \frac{lb_f\ ft}{s}$$

Ecuación de energía en EE 1D

Consideremos un VC con una entrada y una salida, luego

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} = \dot{m}_2 \left(h_2 + \frac{V_2^{\,2}}{2} + g z_2 \right) - \dot{m}_1 \left(h_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2} + g z_1 \right)$$

por otro lado de la conservación de la masa $\dot{m}_2 = \dot{m}_1 := \dot{m}$. Dividiendo por $\dot{m}$

$$h_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2} + g z_1 = h_2 + \frac{V_2^{\,2}}{2} + g z_2 - q + w; \quad \text{donde } q = \frac{d\dot{Q}}{d\dot{m}} \text{ y } w = \frac{d\dot{W}_{eje}}{d\dot{m}}.$$

Diviendo por g se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1}{g} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2}{g} + \frac{V_2^{\,2}}{2g} + z_2 + \frac{w}{g} - \frac{q}{g}$$

Se define usualmente $h_{maq} = \dfrac{w}{g}$ y $h_f = \dfrac{u_2 - u_1 - q}{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2g} + z_2 + h_f - h_{maq}}$$

Ecuación de Bernoulli

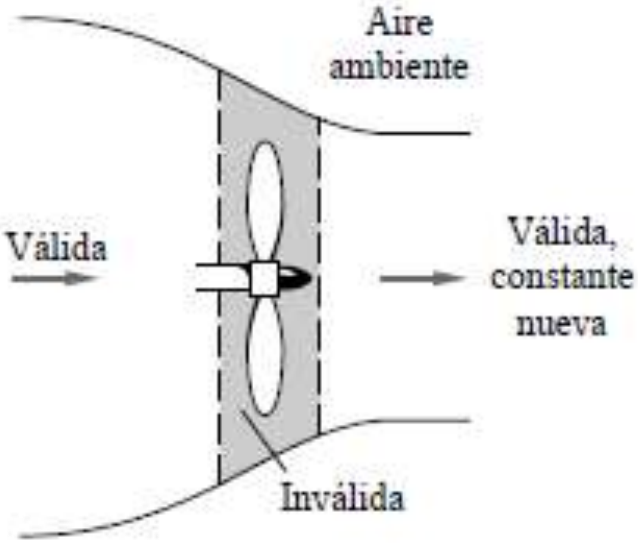
Observaciones:

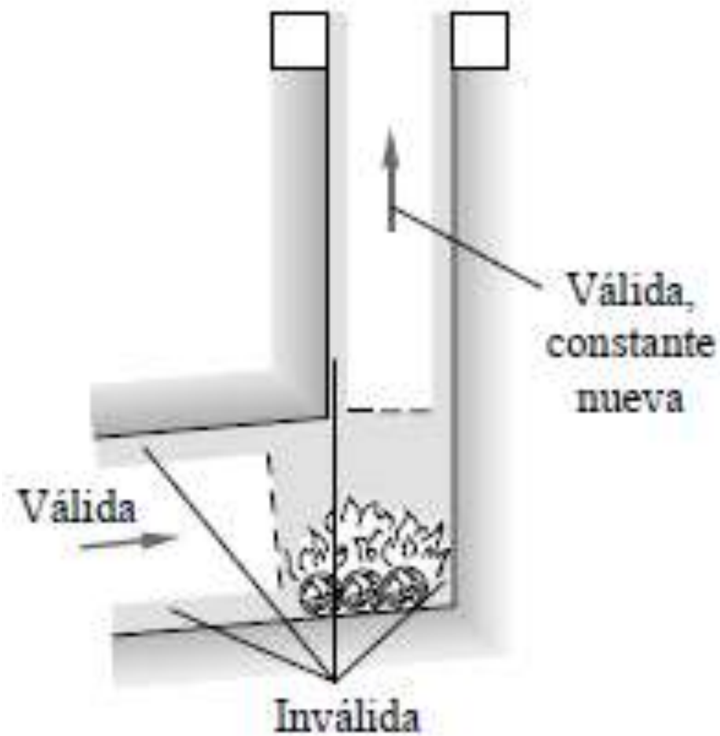
i) $h_{maq} > 0$ si la máquina es una bomba, ventilador o compresor

ii) $h_{maq} < 0$ si la máquina es una turbina

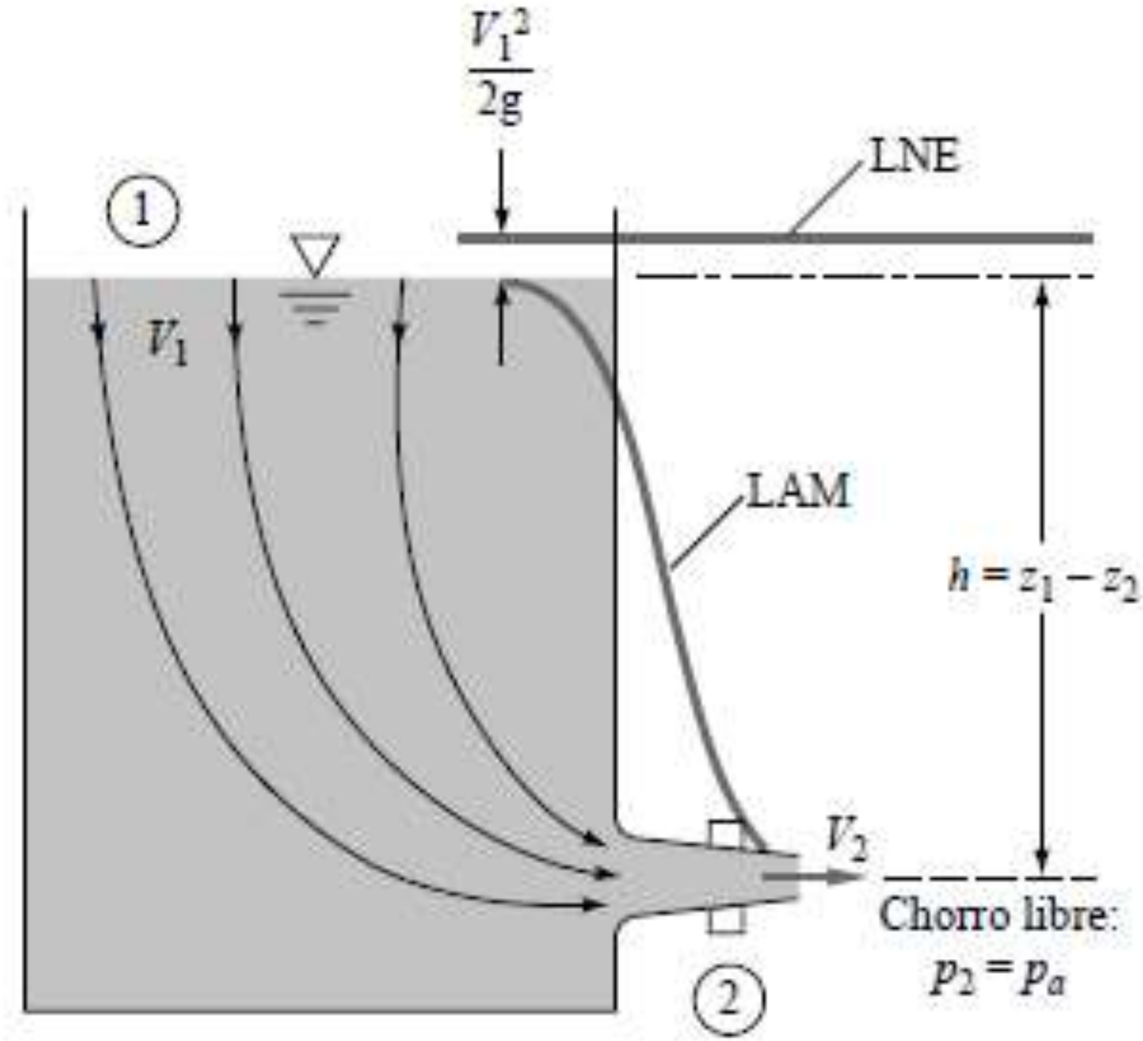
iii) $h_f = f \dfrac{LV^2}{2gD}$ donde f es el factor de fricción (Capítulo 6 del curso)

iv) los puntos 1 y 2 deben estar conectados





<u>Ejemplo</u>: Obtenga una relación entre la velocidad de descarga V_2 y la altura de la superficie libre *h.* Suponga flujo estacionario sin fricción.



Conservación de la masa

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Conservación de la energía

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\ 2}}{2g} + z_2$$

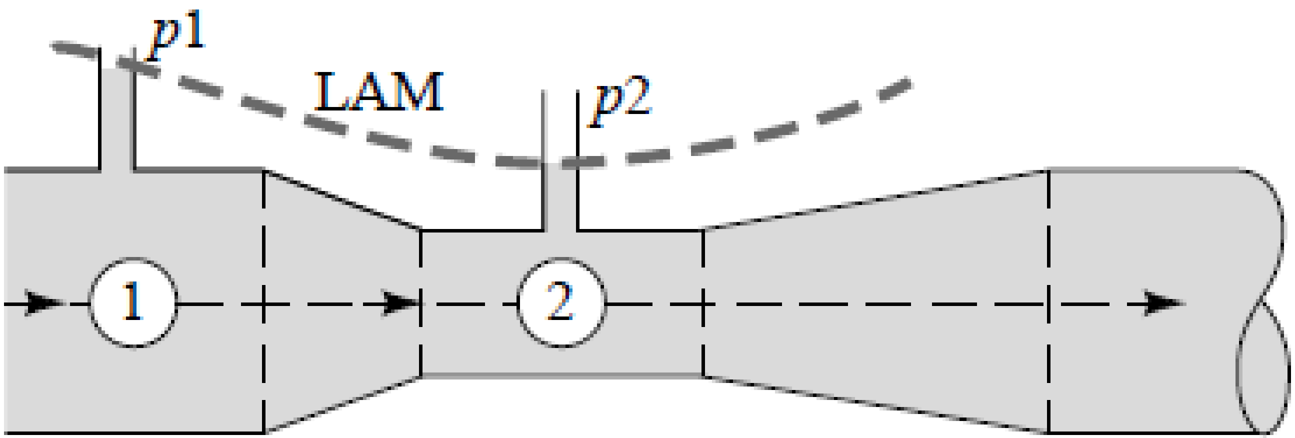
$$\Rightarrow h = \frac{V_2^{\ 2}}{2g} - \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = \frac{V_2^{\ 2}}{2g}\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Si $A_1 >> A_2$

$$V_2 = \sqrt{2gh} \qquad \text{(Torricelli 1644)}$$

Ejemplo: Un estrechamiento en un conducto produce un aumento de la velocidad y una disminución de presión en la garganta. La disminución de presión da una medida del caudal o flujo volumétrico en el conducto. Halle una expresión que relacione el flujo másico con la disminución de presión. (tubo Venturi)



Conservación de la masa

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Conservación de la energía

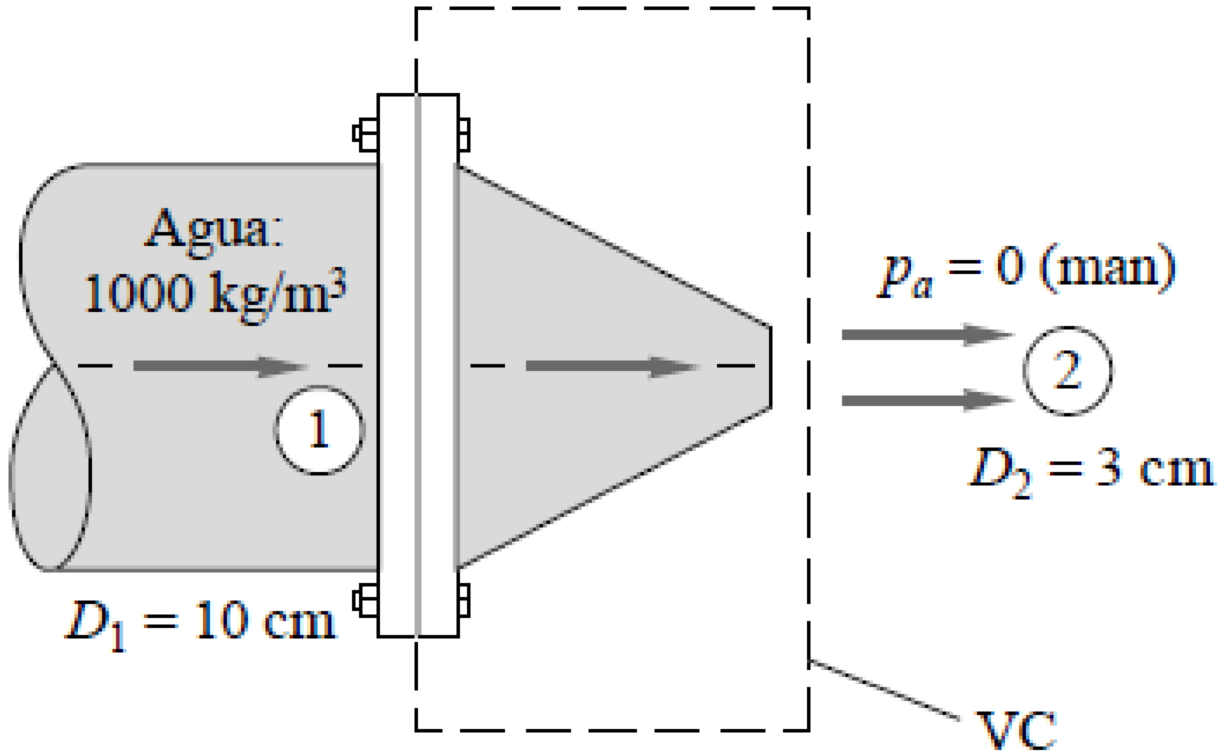
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\ 2}}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V_2^{\ 2}}{2g} - \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = \frac{V_2^{\ 2}}{2g}\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right]}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho A_2 V_2 = \frac{\pi D_2^{\ 2}}{4}\sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}}$$

Ejemplo: Una manguera de 10 cm de diámetro tiene una tobera de 3 cm por donde se descargan 1,5 m^3/min. Suponiendo flujo sin fricción, halle la fuerza F_B que se ejerce sobre los tornillos que sujetan la tobera a la manguera.



Conservación de la masa

$$\rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 = 1{,}5 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$V_i = \frac{Q}{A_i} \Rightarrow V_1 = 3.2 \text{ m/s}; \quad V_2 = 35.4 \text{ m/s}$$

Conservación de la energía

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^{\,2}}{2g} - \frac{V_1^{\,2}}{2g} \qquad \left(p_1 \text{ manométrica} \right)$$

$$\Rightarrow p_1 = 620{,}000 \text{ Pa}$$

Conservación de Momentum lineal

$$\sum \vec{F} = \sum_{salidas} \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \vec{V}_i$$

$$-F_B + p_1 A_1 = \dot{m}\left(V_2 - V_1\right) \Rightarrow F_B = 4067 \text{ N}$$

Factor de corrección Energía Cinética

Si la velocidad no es uniforme en la secciones de entrada y salida:

$$\left| \int \frac{V^2}{2} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \right| \neq \frac{1}{2} \dot{m} V_{prom}^2$$

Se define el factor de corrección de la energía cinética por:

$$\left| \int \frac{V^2}{2} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \right| = \frac{\alpha}{2} \dot{m} V_{prom}^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\left| \int V^2 \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \right|}{\rho V_{prom}^3 A}$$

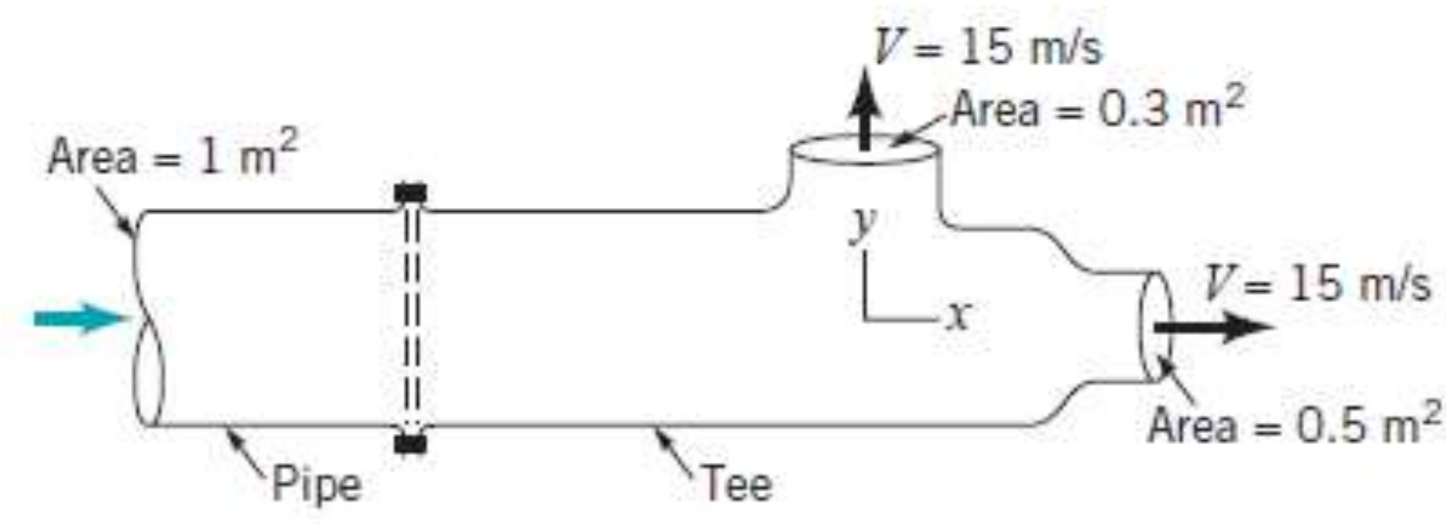
Para determinar α se necesita saber el perfil de velocidad.

En un perfil laminar en una tubería $V = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \Rightarrow \alpha = 2$

En un perfil turbulento $V = V_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7} \Rightarrow \alpha = 1.058 \approx 1$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f - h_{maq}$$

Ejemplo: Agua fluye como dos chorros libres desde la T conectado a la tubería. La velocidad de salida es de 15 m/s. Desprecieando los efectos viscosos y la gravedad, determine los componentes X e Y de la fuerza que la tubería ejerce sobre la T.



Conservación de la masa

$$A_1V_1 = A_2V_2 + A_3V_3 \Rightarrow V_1 = 12\text{m/s}$$

$$\dot{m}_i = \rho A_i V_i$$

Conservación de la energía

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1{}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2{}^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow p_1 = 40500 \text{ Pa (manométrica)}$$

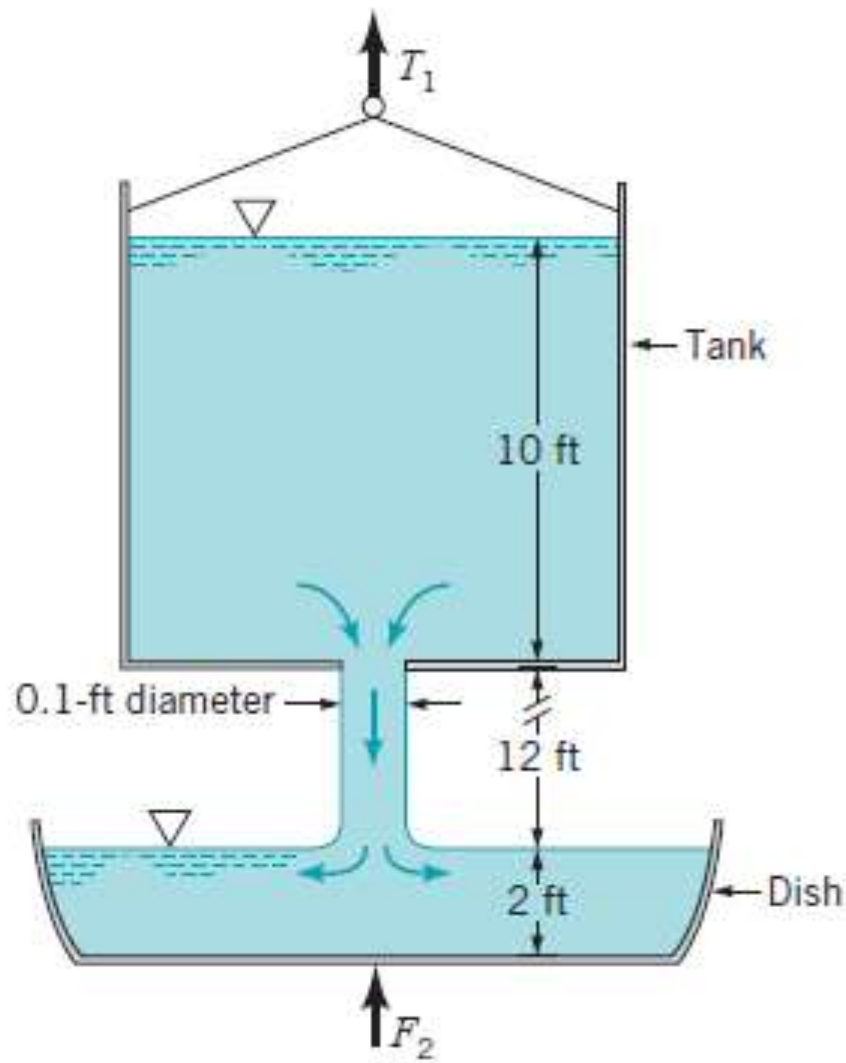
Conservación del momentum lineal

$$\sum \vec{F} = \sum_{salidas} \dot{m}_i \vec{V}_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \vec{V}_i$$

$$F_x + P_1A_1 = \dot{m}_3V_3 - \dot{m}_1V_1 \Rightarrow F_x = -72000\text{N}$$

$$F_y = \dot{m}_2V_2 = 67400\text{N}$$

Ejemplo: Agua fluye desde un estanque de peso W_1 hacia un plato de peso W_2 (ambos incluyen el agua). Para las condiciones indicadas en la figura determine T_1 y F_2.



Hay que utilizar 2 VC, el primero para el estanque superior

C. Masa: $\dot{m}_1 = \rho A_1 V_1$

C. Energía: $V_1 = \sqrt{2gh_1} = 25,4$ ft/s

C. Momentum: $T_1 - W_1 = \dot{m}_1 V_1 \Rightarrow T_1 = W_1 - 9,83\ \text{lb}_\text{f}$

Para el segundo volumen de control

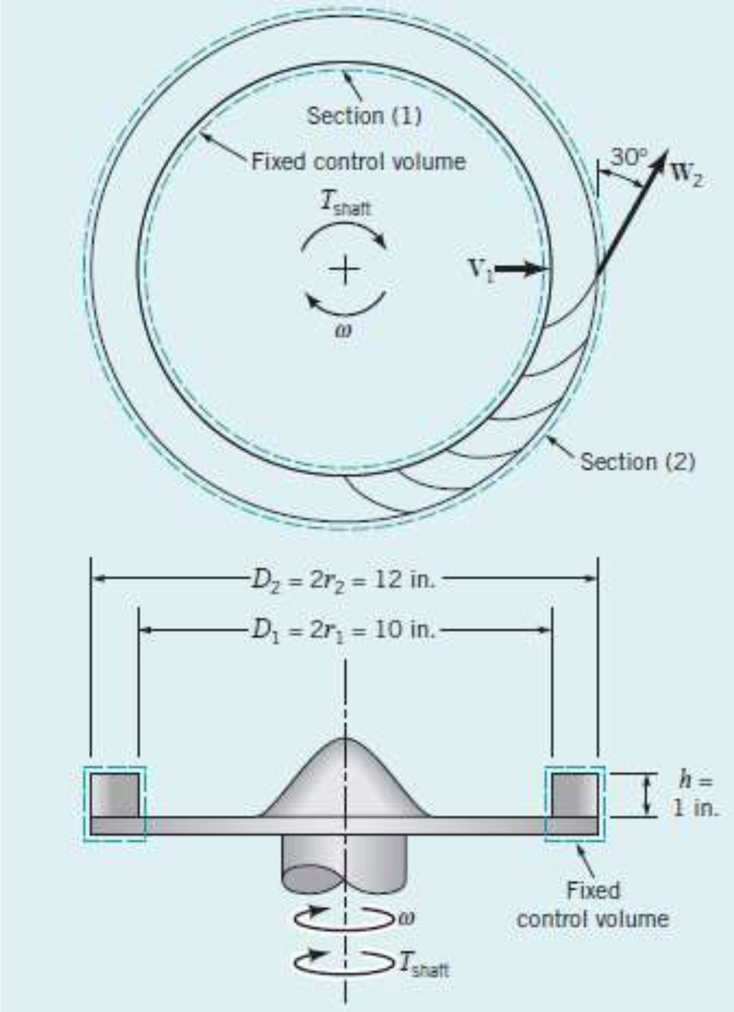
C. Masa: $\dot{m}_1 = \rho A_1 V_1 = \dot{m}_2 = \rho A_2 V_2$

C. Energía: $V_2 = \sqrt{2g\left(h_1 + h_2\right)} = 37,6$ ft/s

C. Momentum: $F_2 - W_2 = \dot{m}_2 V_2 \Rightarrow F_2 = W_2 + 14,55\ \text{lb}_\text{f}$

Ejemplo: Un ventilador de aire tiene un rotor con aspas de 12 pulgadas de diámetro exterior y 10 pulg. diámetro interior. La altura de cada pala del rotor es 1 pulg. desde la entrada de la cuchilla hasta la salida. El caudal es constante e igual a 230 pies^3/min y la velocidad absoluta del aire en la entrada de la cuchilla, V_1 es radial. El ángulo de descarga de la cuchilla es 30° desde la dirección tangencial.

El rotor gira a velocidad constante de 1725 rpm



Conservación de la masa

$$\dot{m}_1 = \rho Q = 0.00912 \text{ slug/s}$$

$$\dot{m}_2 = \rho W \sin 30^\circ \cdot 2\pi r_2 h \qquad \Rightarrow W = 29.3 \text{ ft/s}$$

Notemos que $\vec{V}_2 = \omega r_2 \hat{\theta} + \vec{W} = \omega r_2 \hat{\theta} - W_\theta \hat{\theta} + W_r \hat{r} \quad y \quad \vec{V}_1 = \dfrac{\rho Q}{A_1} \hat{r}$

Conservación de momentum angular

$$\sum \vec{T}_0 = \sum_{salidas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V} \right)_i - \sum_{entradas} \dot{m}_i \left(\vec{r} \times \vec{V} \right)_i$$

$$= \dot{m} \left[r_2 \hat{r} \times \left(\omega r_2 \hat{\theta} - W_\theta \hat{\theta} + W_r \hat{r} \right) - \left(r_1 \hat{r} \times V_1 \hat{r} \right) \right]$$

$$= \dot{m} r_2 \left(\omega r_2 - W \cos 30^\circ \right) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \text{Pot} = T_0 \omega = 0.097 \text{ HP}$$