Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 2 — viernes 5 de junio de 2020

Entrega: lunes 15 de junio de 2020, 23.00 horas

Problema 1. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la siguiente función es diferenciable en $(0,0)$?

$$f_p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+y)}{|x|^p + |y|^p} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución sugerida. Analizaremos primeramente para qué valores de p existen las derivadas parciales de f. Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial f_p}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_p(h,0) - f_p(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3}{|h|^p} = \lim_{h \to 0} |h|^{2-p},$$

este límite puede existir sólo si $h \leq 2$. Por otro lado,

$$\frac{\partial f_p}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_p(0,h) - f_p(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{0}{|h|^p} = 0,$$

es decir f_y existe para todo valor de p y queda por discutir $p \leq 2$. Para demostrar que f_p es diferenciable en $(0,0)$, según la Definición 2.7 hay que demostrar que existe una función f_p^0 que satisface las siguientes identidades:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_p^0(x,y) = 0, \tag{1}$$

$$f_p(x,y) = f_p(0,0) + \nabla f_p(0,0)(x,y) + \|(x,y)\|_2 f_p^0(x,y). \tag{2}$$

A partir de (2) obtenemos

$$f_p^0(x,y) = \frac{f_p(x,y) - f_p(0,0) - \nabla f_p(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|_2}.$$

Para $p = 2$ esta función no satisface (1). Para ver esto, tomamos en cuenta que $\nabla f_2(0,0) = (1,0)$, luego

$$\begin{aligned} \frac{f_2(x,y) - f_2(0,0) - \nabla f_2(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|_2} &= \frac{1}{\|(x,y)\|_2} \left(\frac{x^2 + x^2 y}{x^2 + y^2} - (1,0)(x,y) \right) \\ &= \frac{x^2 y - x y^2}{(x^2 + y^2)\|(x,y)\|_2} = \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

El límite de $f_2(x,y)$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ no existe. Para ver esto, consideremos la sucesión $(x_k,y_k)=(1/k,0)$, para la cual

$$\lim_{k\to\infty} f_2(x_k,y_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{0}{k^3},$$

mientras que para $(x_k,y_k)=(1/k,2/k)$,

$$\lim_{k\to\infty} f_2(x_k,y_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{-\dfrac{2}{k^3}}{\left(\dfrac{25}{k^2}\right)^{3/2}}=-\frac{2}{5\sqrt{5}}\neq 0.$$

Por otro lado, para $p<2$ se tiene

$$\begin{aligned}0\leq\left|f_p^0(x,y)\right|&=\left|\frac{x^3+x^2y}{(|x|^p+|y|^p)\|(x,y)\|_2}\right|\leq\left|\frac{x^3+x^2y}{|x|^p\|(x,y)\|_2}\right|\leq\frac{|x|^3+x^2|y|}{|x|^p\|(x,y)\|_2}\\&\leq\frac{|x|^{3-p}}{\|(x,y)\|_2}+\frac{|x|^{2-p}|y|}{\|(x,y)\|_2}\leq 2\|(x,y)\|_2^{2-p}=2(x^2+y^2)^{1-p/2}.\end{aligned}$$

Como $p<2$, efectivamente tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2(x^2+y^2)^{1-p/2}\to 0,$$

por lo tanto (1) es válido, y concluimos que efectivamente f_p es diferenciable en $(0,0)$, para $p<2$.

Problema 2. Sea la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z)=\begin{cases}xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y,z)\notin C,\\ 0 & \text{si } (x,y,z)\in C,\end{cases}\qquad \text{donde } C:=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}.$$

a) Demostrar que f es continua en C.
b) Si $(x,y,z)\in C$, ¿es f diferenciable en (x,y,z)?
c) Si $(x,y,z)\in C$, calcular, si existen, $f_{yx}(x,y,z)$ y $f_{xy}(x,y,z)$.
d) ¿Es f de clase C^2 en vecindades de $(0,0,1)$? ¿de $(0,0,0)$?

Solución sugerida.

a) Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\backslash C$ se tiene que

$$0\leq\left|f(x,y,z)\right|=\left|xyz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leq|xyz|,$$

luego para todo $z^0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,z^0)} f(z,y,z)=0.$$

Como $f(0,0,z^0)=0$, esto demuestra que f es efectivamente continua en C.

b) Sea $(x,y,z)=(0,0,z^0)\in C$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,z^0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,z^0)-f(0,0,z^0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,z^0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h,z^0)-f(0,0,z^0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,z^0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0,z^0+h)-f(0,0,z^0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.
\end{aligned}$$

Así, podemos concluir que las derivadas parciales existen y que $\nabla f(0,0,z^0)=(0,0,0)$. Para concluir que f es diferenciable en $(x,y,z)\in C$, hay que demostrar la función

$$\begin{aligned}
f^0(x,y,z) &= \frac{f(x,y,z)-\nabla f(0,0,z^0)(z,y,z-z^0)-f(0,0,z^0)}{d((x,y,z),(0,0,z^0))}\\
&= \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z^0)^2}}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),
\end{aligned}$$

definida en una vecindad de $(0,0,z^0)$, satisface

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,z^0)} f^0(x,y,z)=0. \tag{3}$$

Tomando en cuenta que

$$0\le \left|f^0(x,y,z)\right| = \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z^0)^2}}\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le |yz|$$

concluimos que (3) efectivamente es válido, por lo tanto f es diferenciable en los puntos $(0,0,z^0)$, $z^0\in\mathbb{R}$.

c) Para $(x,y,z)\notin C$ obtenemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2yz}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2xy^2z}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}$$

Para un punto $(0,0,z^0)$, $z^0\in\mathbb{R}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
f_{xy}(0,0,z^0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h,z^0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,z^0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{hz^0\sin(1/h^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} z^0\sin\frac{1}{h^2},\\
f_{yx}(0,0,z^0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0,z^0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,z^0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{hz^0\sin(1/h^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} z^0\sin\frac{1}{h^2}.
\end{aligned}$$

Estos límites existen sólo si $z^0=0$, es decir $f_{xy}(x,y,z)$ y $f_{yx}(x,y,z)$ no existen para $(x,y,z)\in C$ con $z\neq 0$.

d) Para que f sea de clase C^2 en una vecindad de $(0,0,1)$ es necesario que f_{xy} exista en una vencidad de $(0,0,1)$, lo que no se cumple de acuerdo a lo demostrado en (c) ($f_{xy}(0,0,1+\gamma)$ no existe para $0 \leq |\gamma| < 1$. Análogamente, $f_{xy}(0,0,\gamma)$ no existe para $|\gamma| > 0$, es decir f no es de clase C^2 en ninguna vecindad de $(0,0,1)$ o $(0,0,0)$.

Problema 3. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f_x y f_y en $(0,0)$.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$? ¿Es de clase C^1?
c) ¿Se tiene $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$? Justifique su respuesta.

Solución sugerida.

a) Para puntos $(x,y) \neq (0,0)$ obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Concluimos que f_x y f_y no son continuas. Para ver esto, consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, 0)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = \frac{2}{k}\sin k - \cos k$$

no converge a ningn límite cuando $k \to \infty$. Entonces f_x no es continua en $(0,0)$. Un argumento similar es válido para f_y.

b) Calculemos primeramente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/|h|)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{|h|} = 0.$$

Asimismo, $(\partial f/\partial y)(0,0) = 0$; entonces $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Para demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$, definamos la función f^0 a través de

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)(x,y) + \|(x,y)\|_2 f^0(x,y).$$

Esta función debe satisfacer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^0(x,y) = 0. \tag{4}$$

En nuestro caso,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^0(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|_2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Como

$$0 \leq \left| \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0),$$

se tiene (4), luego f es diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, como f_x y f_y no son continuas en $(0,0)$ (de acuerdo a la parte (a)), f no es de clase C^1.

c) Se calcula

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0)\right) = 0,$$

luego $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

Problema 4.

a) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(x)$ para la función

$$\varphi : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1,x_2) = -\ln(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$$

con $x_0 = (0,1)$ y el término residual $R_2(x,x_0)$ correspondiente.

b) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(x)$ para la función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2y + 2xz^3 + (\sin x)\cdot \mathrm{e}^{yz}$$

con $x_0 = (0,0,0)$ y el término residual $R_2((x,y,z),x_0)$ correspondiente.

c) Acotar $R_2((x,y,z),x_0)$ sobre la bola $B_1 := \{w \in \mathbb{R}^3 : \|w\|_\infty \leq 1\}$.

Solución sugerida.

a) Para la función dada y suponiendo que $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ obtenemos

$$\varphi(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) \quad \Rightarrow \varphi(0,1) = 0$$

y las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_1}(x_1,x_2) &= -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \quad \Rightarrow \varphi_{x_1}(0,1) = 0,\\
\varphi_{x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \quad \Rightarrow \varphi_{x_2}(0,1) = -1,\\
\varphi_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \quad \Rightarrow \varphi_{x_1x_1}(0,1) = -1,\\
\varphi_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \quad \Rightarrow \varphi_{x_2x_2}(0,1) = 1,\\
\varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \quad \Rightarrow \varphi_{x_1x_2}(0,1) = 0.
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, obtenemos el polinomio de Taylor

$$T_2(x_1,x_2,0,1) = \varphi(0,1) + x_1\varphi_{x_1}(0,1) + (x_2-1)\varphi_{x_2}(0,1)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\big(x_1^2 \varphi_{x_1x_1}(0,1) + 2x_1(x_2-1)\varphi_{x_1x_2}(0,1) \\
&\quad + (x_2-1)^2 \varphi_{x_2x_2}(0,1)\big) \\
&= 1 - x_2 + \frac{1}{2}\big(-x_1^2 + (x_2-1)^2\big) = 1 - x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2-1)^2.
\end{aligned}
$$

Para el término residual necesitamos las terceras derivadas:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{x_1x_1x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) = \frac{-2x_1^3 + 6x_1x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}, \\
\varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) = \frac{2x_2^3 - 6x_1^2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}
\end{aligned}
$$

y por simetría,

$$
\varphi_{x_1x_2x_2}(x_1,x_2) = \frac{2x_1^3 - 6x_1x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}, \quad \varphi_{x_2x_2x_2}(x_1,x_2) = \frac{-2x_2^3 + 6x_1^2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}.
$$

Así obtenemos que el término residual es dado por

$$
\begin{aligned}
R_2(x_1,x_2,0,1) = \frac{1}{6}\big(&x_1^3\varphi_{x_1x_1x_1}(\xi,\eta) + 3x_1^2(x_2-1)\varphi_{x_1x_1x_2}(\xi,\eta) \\
&+ 3x_1(x_2-1)^2\varphi_{x_1x_2x_2}(\xi,\eta) + (x_2-1)^3\varphi_{x_2x_2x_2}(\xi,\eta)\big)
\end{aligned}
$$

para algún ξ entre 0 y x_1 y η entre 1 y x_2

b) Para este ejemplo, $f(0,0,0) = 0$, además

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 2xy + 2z^3 + (\cos x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_x(0,0,0) = 1, \\
f_y(x,y,z) &= x^2 + z(\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_y(0,0,0) = 0, \\
f_z(x,y,z) &= 6xz^2 + y(\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_z(0,0,0) = 0, \\
f_{xx}(x,y,z) &= 2y - (\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{xx}(0,0,0) = 0, \\
f_{yy}(x,y,z) &= z^2(\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{yy}(0,0,0) = 0, \\
f_{zz}(x,y,z) &= 12xz + y^2(\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{zz}(0,0,0) = 0, \\
f_{xy}(x,y,z) &= 2x + z(\cos x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{xy}(0,0,0) = 0, \\
f_{xz}(x,y,z) &= 3z^2y(\cos x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{xz}(0,0,0) = 0, \\
f_{yz}(x,y,z) &= (1+yz)(\sin x)\mathrm{e}^{yz} \quad \Rightarrow f_{yz}(0,0,0) = 0,
\end{aligned}
$$

Con esto obtenemos

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z,0,0,0) &= f(0,0,0) + xf_x(0,0,0) + yf_y(0,0,0) + zf_z(0,0,0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(x^2 f_{xx}(0,0,0) + y^2 f_{yy}(0,0,0) + z^2 f_{zz}(0,0,0) \\
&\qquad + 2xyf_{xy}(0,0,0) + 2xzf_{xz}(0,0,0) + 2f_{yz}(0,0,0)\big) \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Para evaluar el término residual necesitamos las terceras derivadas:

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y,z) &= -(\cos x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{xxy}(x,y,z) &= 2 - z(\sin x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{xxz}(x,y,z) &= -y(\sin x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{xyy}(x,y,z) &= z^2(\cos x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{xzz}(x,y,z) &= 6z + y^2(\cos x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{xyz}(x,y,z) &= yz(\cos x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{yyy}(x,y,z) &= z^3(\sin x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{yyz}(x,y,z) &= z(2+yz)(\sin x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{yzz}(x,y,z) &= (2y + y^2 z)(\sin x)\mathrm{e}^{yz},\\
f_{zzz}(x,y,z) &= 12x + y^3(\sin x)\mathrm{e}^{yz}.
\end{aligned}$$

Esto significa que el término residual es dado por

$$\begin{aligned}
&R(x,y,z,0,0,0)\\
&= \frac{1}{6}\bigl(x^3 f_{xxx} + y^3 f_{yyy} + z^3 f_{zzz} + 3x^2 y f_{xxy} + 3x^2 z f_{xxz} + 3xy^2 f_{xyy} + 3xz^2 f_{xzz}\\
&\qquad + 3y^2 z f_{yyz} + 3yz^2 f_{yzz} + 6xyz f_{zzz}\bigr),
\end{aligned}$$

donde todas las terceras derivadas parciales son evaluadas en un punto (ξ,η,ζ).

c) Para $(\xi,\eta,\zeta) \in B_1$ podemos acotar las terceras derivadas que aparecen en $R(x,y,z,0,0,0)$ como

$$\begin{aligned}
&|f_{xxz}|, |f_{xyy}|, |f_{xxx}|, |f_{xyz}|, |f_{yyy}| \leq \mathrm{e}, \quad |f_{xxy}| \leq 2+\mathrm{e}, \quad |f_{xzz}| \leq 6+\mathrm{e},\\
&|f_{zzz}| \leq 12+\mathrm{e}, \quad |f_{yzz}|, |f_{yyz}| \leq 3\mathrm{e},
\end{aligned}$$

luego para $(x,y,z) \in B_1$,

$$\bigl|R(x,y,z,0,0,0)\bigr| \leq \frac{1}{6}(36 + 39\mathrm{e}) = 6 + \frac{13}{2}\mathrm{e}.$$

Problema 5. Determinar constantes $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad w(\boldsymbol{x},t) = t^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right)$$

es una solución de la EDP

$$w_t - (w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} + \cdots + w_{x_nx_n}) = 0 \quad \text{(ecuación del calor n-dimensional).}$$

Solución sugerida. Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = 2x_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = t^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) \cdot \frac{2\beta x_i}{t} = 2\beta t^{\alpha-1} x_i \exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right), \quad i = 1,\dots,n,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} &= 2\beta t^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right)\right) = 2\beta t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right)\left(1+\frac{2\beta x_i^2}{t}\right)\\ &= (2\beta t^{\alpha-1} + 4\beta^2 t^{\alpha-2} x_i^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right),\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = (2n\beta t^{\alpha-1} + 4\beta^2 t^{\alpha-2}\|\boldsymbol{x}\|_2^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right).$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\alpha-2}\|\boldsymbol{x}\|_2^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right),$$

es decir

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = \big((\alpha - 2n\beta)t^{\alpha-1} + (-1-4\beta)\beta t^{\alpha-2}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\big)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right).$$

Esta expresión se anula si $\beta = 0$ y $\alpha = 0$, lo que corresponde a la solución trivial $w \equiv 1$, o si $\beta = -1/4$ y $\alpha = 2n\beta = -n/2$.