UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525151)

Ejercicios de tiempo de ejecución de algoritmos

P1) Sean $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones. Pruebe que:

a) $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \Longrightarrow f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$.

b) $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \Longrightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

c) $f(n) = O(g(n)) \wedge \alpha \geq 0 \Longrightarrow \alpha f(n) = O(g(n))$.
(Obs: El mismo resultado se tiene en el caso de $o, \omega, \Omega, \Theta$).

d) $f(n) + g(n) = \Theta(\text{máx}\{f(n), g(n)\})$.

P2) Muestre que $f(n) = (n! + 3^{n+2} + 3n^{100})(n^n + n2^n) = O(n^{2n})$.

P3) Sea $f, g : \mathbb{N} \to R^+$ funciones.

a) Muestre que: $O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \Longleftrightarrow f(n) = O(g(n))$.

b) Ordene los siguientes conjuntos en forma creciente en cada caso. Justifique su respuesta.

$$O\left(\frac{3}{2}n\right),\ O(n^2\log(n)),\ O(1),\ O(n!),\ O(\sqrt{n}),\ O(2^n),\ O(\log(n)).$$

P4) Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones.

a) Pruebe que si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty$, entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.

b) Sea $f(n) = 3n^2 + 2n + 2$. Use lo anterior para probar que $n^2\log(n) \notin O(f(n)),\ f(n) \in O(n^2)$ y $f(n) = \Omega(n\log(n))$

P5) Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones.

a) Pruebe que si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ con $k > 0$, entonces $f(n) = \Theta(g(n))$.

b) Use lo anterior para probar que $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N},\ (n+a)^b = \Theta(n^b)$.

P6) Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ :\ f \text{ es función}\}$. Se define R_Θ, la relación en $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ inducida por Θ, como sigue:

$$\forall f(n), g(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+),\ f(n)\, R_\Theta\, g(n) \Longleftrightarrow f(n) = \Theta(g(n)).$$

a) Pruebe que R_Θ es relación de equivalencia.

b) Explique por qué las relaciones en $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ inducidas por o, O, ω y Ω no son relaciones de equivalencia.

Solución:

P1) *a*) Recordemos que:

$$f(n) = O(g(n)) \Longleftrightarrow \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq cg(n).$$

Luego, sea $c_1 > 0, c_2 > 0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \geq n_1, f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \quad \wedge \quad \forall n \geq n_2, f_2(n) \leq c_2 g_2(n).$$

Así, eligiendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $c = c_1 + c_2 > 0$ se tiene que:

$$\forall n \geq n_0,\ f_1(n)+f_2(n) \leq c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n) \leq c(g_1(n))+g_2(n)) \Longrightarrow f_1(n)+f_2(n) = O(g_1(n)+g_2(n)).$$

b) Idem al ejercicio anterior.

c) Sea $\alpha \geq 0$ y $c > 0, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall n \geq n_0,\ f(n) \leq cg(n) \Longrightarrow \forall n \geq n_0, \alpha f(n) \leq \alpha \cdot c \cdot g(n) \leq (\alpha c + 1)g(n) = \tilde{c}g(n).$$

Notar que $\tilde{c} = (\alpha c + 1) > 0$ (en la definición de $f(n) = O(g(n)$ la constante no puede ser cero). Luego,

$$\forall n \geq n_0,\ \alpha f(n) \leq \tilde{c}g(n) \Longrightarrow \alpha f(n) = O(g(n)).$$

d) Observar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}.$$

Por lo tanto, $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

P2) Notar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \leq n \cdot n \cdots n = n^n.$$
$$3^{n+2} = 9 \cdot 3^n \leq 9 \cdot n^n,\ n \geq 3.$$
$$3n^{100} \leq 3n^n,\ n \geq 100.$$

En resumen,

$$\forall n \geq 100,\ n! + 3^{n+2} + 3n^{100} \leq n^n + 9 \cdot n^n + 3n^n = 13n^n = O(n^n).$$

Por otro lado, $\forall n \geq 2, n2^n = n \cdot 2 \cdot 2^{n-1} \leq n \cdot 2 \cdot n^n = 2\ n^n = O(n^n)$.

Luego, usando la propiedad de P1) *b*) se tiene que:

$$f(n) = O(n^n \cdot n^n) = O(n^{2n}).$$

P3) *a*) $\Longrightarrow$) Notar que como $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq f(n)$, entonces $f(n) \in O(f(n))$. Luego, si $O(f(n)) \subseteq O(g(n))$, entonces $f(n) \in O(g(n))$, i.e. $f(n) = O(g(n))$.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $f(n) = O(g(n))$ y sea $h(n) \in O(f(n))$. Luego,

$$\exists c_1, n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1,\ f(n) \leq c_1 g(n)\ \wedge\ \exists c_2, n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2,\ h(n) \leq c_2 f(n),$$

lo que implica que $\exists c = c_1 c_2 > 0, n_0 = \max\{n_1, n_2\},\ \forall n \geq n_0,\ h(n) \leq cg(n) \Longrightarrow h(n) \in O(g(n))$.

b) Mostremos que:

$$O(1) \subseteq O(\log(n)) \subseteq O(\sqrt{n}) \subseteq O\left(\frac{3}{2}n\right) \subseteq O(n^2\log(n)) \subseteq O(2^n) \subseteq O(n!).$$

Para ello usaremos el siguiente resultado visto en clase:

$$\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Longrightarrow f(n) = O(g(n)). \tag{1}$$

1) $O(1) \subseteq O(\log(n))$: Como $\forall n \geq 2,\ 1 \leq log(n)$, entonces por definición se tiene que $1 = O(\log(n))$ y así por *a*) se tiene que $O(1) \subseteq O(\log(n))$.
2) $O(\log(n)) \subseteq O(\sqrt{n})$: Usando la regla de L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_n \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\ln(2)} \lim_n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\ln(2)} \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.$$

Luego, por (1) se tiene que: $\log(n) = O(\sqrt{n})$, y entonces por *a*), $O(\log(n)) \subseteq O(\sqrt{n})$.
3) $O(\sqrt{n}) \subseteq O\left(\frac{3}{2}n\right)$: Como

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{\frac{3}{2}n} = 0,$$

por (1) se tiene que $\sqrt{n} = O\left(\frac{3}{2}n\right)$, y por *a*) $O(\sqrt{n}) \subseteq O\left(\frac{3}{2}n\right)$.
4) $O\left(\frac{3}{2}n\right) \subseteq O(n^2\log(n))$: Como

$$\lim_n \frac{\frac{3}{2}n}{n^2\log(n)} = \frac{3}{2}\lim_n \frac{n}{n^2\log(n)} = \frac{3}{2}\lim_n \frac{1}{n\log(n)} = 0,$$

por (1) se tiene que $\frac{3}{2}n = O(n^2\log(n))$, y por *a*), $O\left(\frac{3}{2}n\right) \subseteq O(n^2\log(n))$.
5) $O(n^2\log(n)) \subseteq O(2^n)$:
Como $\forall n \in \mathbb{N}, \log(n) \leq n$, entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2\log(n) \leq n^3$. Así,

$$0 \leq \lim_n \frac{n^2\log(n)}{2^n} \leq \lim_n \frac{n^3}{2^n} = 0 \Longrightarrow \lim_n \frac{n^2\log(n)}{2^n} = 0 \Longrightarrow n^2\log(n) = O(2^n),$$

y por *a*) se tiene que $O(n^2\log(n)) \subseteq O(2^n)$.
6) $O(2^n) \subseteq O(n!)$: Notar que $\forall n \geq 2$:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq 2\cdot 2\cdots 2\ (n-1 \text{ veces}) = 2^{n-1} = \frac{1}{2}2^n.$$

Luego por definición, $2^n = O(n!)$ y por *a*) $O(2^n) \subseteq O(n!)$.

P4) *a*) Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones tales que: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty &\Longleftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| > \epsilon \\ &\Longleftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ f(n) > \epsilon g(n) \\ &\Longrightarrow f(n) \neq O(g(n)).\end{aligned}$$

Además, dado $C > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ Cg(n) \leq f(n) \Longrightarrow f(n) = \Omega(g(n))$.

b) Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \log(n)}{3n^2+2n+2} = \infty$ (ejercicio), entonces por lo anterior, $n^2\log(n) \notin O(f(n))$. Por otro lado, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n^2} = 1 \Longrightarrow f(n) = \Theta(n^2) \Longrightarrow f(n) = O(n^2)$.

Finalmente, como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n\log(n)} = \infty$, entonces por la parte anterior $f(n) = \Omega(n\log(n))$.

P5) *a*) Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones tales que: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ con $k > 0$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left| \frac{f(n)}{g(n)} - k \right| \leq \epsilon.$$

Como

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - k \right| \leq \epsilon \Longleftrightarrow (-\epsilon + k) \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq (\epsilon + k) \Longleftrightarrow (-\epsilon + k)g(n) \leq f(n) \leq (\epsilon + k)g(n),$$

eligiendo $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon + k) > 0$ se tiene que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ (-\epsilon + k)g(n) \leq f(n) \leq (\epsilon + k)g(n).$$

Es decir, $f(n) = \Theta(g(n))$.

b) Dado $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0,\ (n + a) > 0$. Luego, sea $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ función definida por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}(n) = \begin{cases} (n+a)^b & \text{si } n \geq n_0, \\ (n_0+a)^b & \text{si } 1 \leq n \leq n_0. \end{cases}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\tilde{f}(n)}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+a)^b}{n^b} = 1$ y por la parte anterior, $\tilde{f}(n) = \Theta(n^b)$. Es decir,

$$\exists c_1, c_2 > 0, n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 :\ c_1 n^b \leq \tilde{f}(n) \leq c_2 n^b.$$

Sea $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$. Luego,

$$\forall n \geq n_2,\ c_1 n^b \leq \tilde{f}(n) = f(n) \leq c_2 n^b.$$

Es decir, $\tilde{f}(n) = \Theta(n^b)$.

P6) *a*) Recordemos que:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Longleftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{N}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

Por otro lado, para que R_Θ sea relación de equivalencia se requiere que sea refleja, simétrica y transitiva. Probemos cada una de ellas.

1) Reflexividad: Como $\forall f(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+),\ \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq f(n) \leq f(n)$, entonces R_Θ es refleja.
2) Simetría: Sea $f(n), g(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$, luego

$$\begin{aligned} f(n)\, R_\Theta\, g(n) &\Longleftrightarrow f(n) = \Theta(g(n)) \Longleftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \\ &\Longleftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \\ &\Longleftrightarrow \exists c_1' = \frac{1}{c_1},\ c_2' = \frac{1}{c_1} > 0, n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0',\ c_2' f(n) \leq g(n) \leq c_1' f(n) \\ &\Longleftrightarrow g(n)\, R_\Theta\, f(n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, R_Θ es simétrica.

3) Transitividad: Sea $f(n), g(n), h(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ tal que $f(n)\, R_\Theta\, g(n) \ \wedge \ g(n)\, R_\Theta\, h(n)$. Luego, $\exists c_1, c_2, c_1', c_2' > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\forall n \geq n_1,\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)) \ \wedge \ (\forall n \geq n_2,\ c_1' h(n) \leq g(n) \leq c_2' h(n))$$
$$\Longrightarrow \forall n \geq \text{máx}\{n_1, n_2\},\ c_1 c_1' h(n) \leq f(n) \leq c_2 c_2' h(n) \Longrightarrow f(n)\, R_\Theta\, h(n)$$

Por lo tanto, R_Θ es transitiva.

$b)$ Notar que

$$\forall f(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+),\ \lim_n \frac{f(n)}{f(n)} = 1 \neq 0.$$

Luego por definición de $o(f(n))$ y $\omega(f(n))$ se tiene que $f(n) \neq o(f(n))$ y $f(n) \neq \omega(f(n))$. De aquí, R_o y R_ω no son reflejas (tampoco simétricas) y por lo tanto no son relaciones de equivalencia.

Por otro lado, sea $f(n) = 1,\ g(n) = n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$. Luego, como $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n)$, entonces $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = \Omega(f(n))$. Por otro lado,

$$\lim_n \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_n \frac{n}{1} = \infty \Longrightarrow g(n) \neq O(f(n))$$

y

$$\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_n \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow f(n) \neq \Omega(g(n)).$$

Por lo tanto, R_O y R_Ω no son relaciones simétricas y por ende no son relaciones de equivalencia.