



AYUDANTIA MUY BONITA
CÁLCULO III (525221)

Problema 1. Considere la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 - xy + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analice la continuidad en el punto $(0, 0)$.
2. Calcule, si existen, las derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$.
3. Calcule las derivadas parciales en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
4. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0)$, donde \hat{u} es una dirección de \mathbb{R}^2 .

Problema 2 (Certamen 1. 2017). Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0, 0)$ y en $(1, 1)$.
2. Considere el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcular las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$

Problema 3 (Certamen 1. 2004). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Asuma que f es continua en $(0, 0)$; estudie la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$
2. Pruebe que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$, y que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$
3. ¿ f es de clase \mathcal{C}^2 en $(0, 0)$? Justifique su respuesta.

Problema 4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2y}{|x|^p + |y|^p}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¿Para que valores de p esta función es diferenciable en $(0, 0)$?

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 5. Suponga que usted está en la final de un campeonato de fútbol entre físicos y matemáticos. El partido fue bastante complicado, por lo que se deberá decidir a penales y usted es quien debe patear el siguiente penal, para lo cual utilizará todo el conocimiento adquirido en su curso de Cálculo III. Para esto, usted tiene la siguiente función:

$$G(d, i) = e^{x^2 y} x^2 - \ln(x) y$$

La cuál le indica las coordenadas a las cuales debe patear el penal. Sabiendo que el balón se ubica en el punto $(d, i) = (1, 0)$ antes de ser pateado. Usted debe evaluar a qué dirección es mejor patearlo, si a la $(1, 1)$ o a la $(2, -1)$, sabiendo que donde encuentre el mayor valor es donde deberá patear.

Problema 6. Suponga que la función de propagación del COVID-19 en una comuna i , para un día t es de la forma:

$$f(Cs_{it}, Bv_{it}) = \frac{\alpha^t \cdot e^{Cs_{it}}}{\ln(Bv_{it} - Cs_{it})}$$

donde:

Bv_{it} es el índice de bondad del virus en la comuna i el día t ,

Cs_{it} es la tasa de contactos sociales en la comuna i el día t .

Le piden redefinir la función de contagios de tal forma que esta no explote (se vaya al infinito), por lo que usted la plantea de la siguiente manera:

$$f(Cs_{it}, Bv_{it}) = \begin{cases} \frac{\alpha^t \cdot e^{Cs_{it}}}{\ln(Bv_{it} - Cs_{it})} & \text{si } Bv_{it} \neq Cs_{it} \\ \beta & \text{si } Bv_{it} = Cs_{it} \end{cases}$$

¿Cuánto debe valer β para que la función sea continua en los puntos en que la bondad del virus iguala a la tasa de contactos sociales?

1. $\beta = 0$.

2. $\beta = \lim_{(Bv_{it} - Cs_{it}) \rightarrow (a, a)} \frac{\alpha^t \cdot e^{Cs_{it}}}{\ln(Bv_{it} - Cs_{it})}$.

3. El COVID-19 es un invento de los terraplanistas.

1. No se puede evitar, dado que $\lim_{(Bv_{it} - Cs_{it}) \rightarrow (a, a)} \frac{\alpha^t \cdot e^{Cs_{it}}}{\ln(Bv_{it} - Cs_{it})}$ no existe.

Problema 7. Sea $f(x, y) = \sqrt{x}y$, determine una forma genérica para las derivadas de orden $n \geq 2$ de $f(x, y)$ y determine si estas derivadas son continuas o no:

1. $f_x^n = \frac{-(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n} \cdot x^{\frac{-(2n-1)}{2}} \cdot y; f_y^n = 0 \forall n \geq 2$, ambas derivadas son continuas.

2. $f_x^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n} \cdot x^{\frac{(2n+1)}{2}} \cdot y; f_y^n = 1 \forall n \geq 2$, la derivada con respecto a x es discontinua y con respecto a y es continua.

3. $f_x^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n} \cdot x^{\frac{(2n-1)}{2}} \cdot y; f_y^n = 1 \forall n \geq 2$, ambas derivadas son discontinuas.

4. $f_x^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2^n} \cdot x^{\frac{-(2n-1)}{2}} \cdot y; f_y^n = 0 \forall n \geq 2$, ambas derivadas son continuas.

Problema 8. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^i \frac{1}{j} x_j^j \right)$. Determine $\frac{\partial^n f}{\partial^n x_n^n}$ (Esto es, derivar f parcialmente n veces con respecto a la variable x_n) y estudie su continuidad.

1. $\prod_{j=1}^n x_j^j$, continua para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\frac{\partial^n f}{\partial^n x_n^n} = \prod_{j=1}^{n-1} x_j^j$, continua para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} x_j^j$, continua para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$, donde en 0_n (vector nulo) la función no es continua.
4. $\frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^j$, continua para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$, donde en 0_n (vector nulo) la función no es continua.

Problema 9. Uchuwu, es una isla ubicada al sur de toda civilización, en esta isla existen solo 3 bienes que se producen (los cuales tienen el mismo peso a la hora de formar la producción total), los cuales son:

$$P : \text{pappers} \quad T : \text{Tesis} \quad D : \text{Documentos de trabajo}$$

Siendo por tanto la producción final F :

$$F(M, R) = P + T + D$$

Para los tres bienes, se necesitan principalmente dos insumos:

$$M : \text{Mechones} \quad R : \text{Redbulls}$$

En donde tendremos que la función de producción para cada uno de los bienes que produce uchuwu son:

$$\begin{aligned} P &= M^{1/2} R^{1/2} \\ T &= 4M + 3R \\ D &= 2 \ln(MR) \end{aligned}$$

Dado que en Uchuwu habian 40 mechones y 20 redbull, pero ahora, después de una ardua campaña publicitaria y de búsqueda de financimientto, se consiguió que en Uchuwu hubieran 100 mechones y 40 redbulls más ¿cuál es la dirección de máximmo crecimiento de la producción total? (aproxime los números al tercer decimal), ¿cuanto va a cambiar la producción total en dicha dirección aproximadamente?

1. $\vec{u} = (0, 791; 0, 612)$ y $\partial_{\vec{u}} F(M, R) = 4, 953$
2. $\vec{u} = (0, 783; 0, 621)$ y $\partial_{\vec{u}} F(M, R) = 5, 238$
3. $\vec{u} = (0, 612; 0, 791)$ y $\partial_{\vec{u}} F(M, R) = 26, 171$
4. $\vec{u} = (0, 791; 0, 612)$ y $\partial_{\vec{u}} F(M, R) = 5, 116$