Clase 6: Teorema Fundamental del Cálculo.

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Teorema 6.1

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notación frecuente: $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Regla de Barrow

Demostración.

Sea $P = \{x_0 = a, ..., x_n = b\}$ partición de $[a, b]$. Si F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces $F' = f$. Como F es derivable en $]a, b[$, en particular lo es en cada subintervalo $]x_{k-1}, x_k[\subseteq]a, b[$ y por ende es continua en dichos subintervalos. Luego, por TVM existe x_k^* en cada subintervalo $]x_{k-1}, x_k[$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

o equivalentemente,

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\Delta x_k$$

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Regla de Barrow

Luego, para $k = 1, 2, ..., n$ tenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*)\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*)\Delta x_2 \\ \vdots &= \vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*)\Delta x_n \end{aligned}$$

Sumando las columnas previas,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Finalmente, tomando el límite cuando $||P|| \to 0$, se prueba que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Proposición 6.2

Dado f, g continuas en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, las siguientes son ciertas:

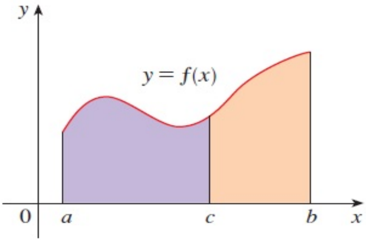
1. $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b-a)$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
5. $\displaystyle\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$

Propiedades de la integral definida

Propiedades elementales

6. Si $c \in \text{int}([a,b])$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Idea geométrica.



7. Si $g(x) \leq f(x)$, para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplos

Integrales definidas

(a) Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x^2 - x + 1)\, dx$

(b) Para $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si} \quad 3 < x \leq 6 \end{cases}$.

Calcular $\displaystyle\int_{1}^{6} f(x)\, dx$

(c) Determine el valor de $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x - 1| + 1\, dx$

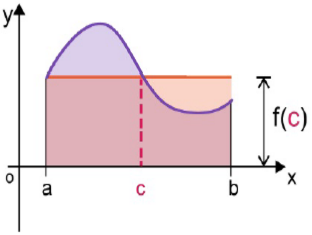
Propiedades de la integral definida

TVM para integrales

8. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

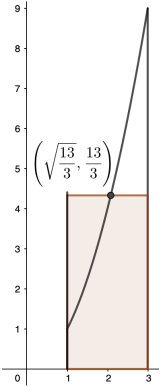
$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$$

Idea geométrica (con f no negativa).



Ejemplo 6.3

Sea $f(x) = x^2$ y sea R la región acotada por el gráfico de f, el Eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Encontrar $c \in [1, 3]$ tal que $A(R)$ sea igual al área de un rectángulo de base la longitud del intervalo $[1, 3]$ y altura $f(c)$.



Propiedades de la integral definida

TVM para integrales

Demostración.

Como f es continua en $[a, b]$, por Teorema de los valores extremos f alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$. Sean m, M sus respectivos valores de mínimo y máximo, respectivamente. Luego,

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \quad \forall x \in [a, b]$$

De donde sigue que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx \Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

Así,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

Propiedades de la integral definida

TVM para integrales

Enseguida, por Teorema del valor intermedio (Cálculo I), existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

De esto último se cumple lo pedido.

Valor promedio

Definición

Definición 6.4

El valor

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

que nos proporciona el TVM se denomina **valor promedio** f en $[a,b]$.

Teorema del valor medio

Estimación de $\int_a^b f(x)dx$

La demostración anterior entrega una cota para estimar el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, esto es

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \text{(Propiedad de comparación)}$$

donde m, M corresponden al mínimo y máximo de f en $[a,b]$, respectivamente (los cuales existen por el teorema de los valores extremos).

Ejemplo 6.5

Utilice la propiedad de comparación para estimar el valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$$

Teorema 6.6

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in I$. Entonces, la función G definida por

$$G(x) = \int_c^x f(t)\, dt \ \ , \ x \in I.$$

es derivable en I y $G'(x) = f(x)$.

Este Teorema nos indica que toda función f continua sobre I posee una **Antiderivada** o **Primitiva**.

Dem: Debemos ver que $G'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$.

Notar que $G(x+h) - G(x) = \displaystyle\int_c^{x+h} f(t)\, dt - \int_c^x f(t)\, dt$. Luego,

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Por otro lado, por TVM para integrales, existe $c \in [x, x+h]$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c)h$$

Así, $G'(x) = f(x)$.

Ejemplos

Aplicación del 1^{er} TFC

1. Determine $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_2^x t^5\ dt\right)$ y $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^\pi t^2 e^t\ dt\right)$.
2. Encuentre $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^{x^3} t\cos(t)\ dt\right]$
3. Sea g una función derivable y sea $c \in \mathbb{R}$. Generalice el ejemplo previo, mostrando que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^{g(x)} f(t)\ dt\right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

4. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{3x-x^2} e^{\cos(t)} dt$$

Tarea

Generalización del 1^{er} TFC

Sean u y v funciones derivables sobre un intervalo I. Encuentre una fórmula que permita calcular la siguiente derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right)$$

A continuación, utilice dicha fórmula para calcular

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\, dt\right)$$

Para finalizar, observamos a continuación que es posible probar la regla de Barrow haciendo uso del 1^{er} TFC.

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Demostración de la regla de Barrow haciendo uso del 1^{er} TFC

Demostración: Notar que la función $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es tal que

$$G(a) = 0 \text{ y } G(b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Luego,

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$$

Ahora, como F y G son dos antiderivadas de f, entonces se cumple que $G(x) = F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$