UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 1
Análisis Real II (525302)

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

- Envíe las soluciones en PDF escritas correctamente en LaTeX al correo `jorgeaguayo@udec.cl` a más tardar el sábado 27 de septiembre a las 23:59 horas (se considerarán hasta 15 minutos de atraso). Se castigarán las tareas que se entreguen atrasadas con 1.5 puntos de nota por cada 12 horas de atraso.
- Mencione apropiadamente los resultados que aplique en sus soluciones. Sea claro y ordenado. Se aplicarán descuentos en fallas de redacción, ortografía y digitación.
- Trabaje a conciencia. Este trabajo pretende medir cómo se ha preparado para las evaluaciones del curso.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, restringido a la $\sigma-$Álgebra de Borel.

Problema 1 (0.2 puntos por cada ítem) Sean $A, B \in \mathcal{X}$.

a) Demuestre que, si $\mu(A \cap B) < +\infty$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

b) Considere ahora que $\mu(X) = M$, con $M \in (0, +\infty)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{X}$. Demuestre que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - (n-1)M$$

c) Considere ahora que $M = 1$. Entonces, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida de probabilidad. Sea $\lambda : \mathcal{X} \to [0,1]$ una medida de probabilidad tal que para todo $A \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(A) \leq \frac{1}{2}$, se cumple que $\mu(A) = \lambda(A)$. Demuestre que $\lambda = \mu$.

d) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$(\forall i, j \in \mathbb{N}) \;\; m(A_i \cap A_j) + m(A_i \cup A_j) = m(A_i) + m(A_j)$$

e) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que, si $i \neq j$, entonces $m(A_i \cap A_j) = 0$. Demuestre que

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Problema 2 (1 punto) Demuestre que μ es una medida $\sigma-$finita si y sólo si existe una función $f : X \to (0, +\infty)$ medible e integrable.

Problema 3 Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función definida por

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \in \mathbb{Q} \vee x \in (-\infty, 0) \vee (1, +\infty) \\ \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

a) **(0.3 puntos)** Demuestre que f es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $-$medible.

b) **(0.7 puntos)** Demuestre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \; dm = +\infty$.

Problema 4 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definida por

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \, (\forall x \in \mathbb{R}) \;\; f_n(x) = n\chi_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x)$$

a) **(0.5 puntos)** Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n = f \equiv 0$, pero que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \neq \int_{\mathbb{R}} f \; dm$$

b) **(0.5 puntos)** ¿Este resultado contradice los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada? Justifique cuáles de las hipótesis no se cumplen en cada caso.

Problema 5 Considere el siguiente teorema.

Teorema 1 (Desigualdad de Chebyshev) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible e integrable. Entonces,*

$$(\forall a > 0) \;\; \mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int |f| \; d\mu$$

---

a) **(0.3 puntos)** Demuestre la desigualdad de Chebyshev.

b) **(0.3 puntos)** Sean $f : X \to [0, +\infty)$ una función medible y $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $E_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}, +\infty\right)$. Demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \; d\mu = \int f \; d\mu$$

c) **(0.4 puntos)** Usando los resultados de a) y b), demuestre que, si $\displaystyle\int f \; d\mu < +\infty$, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists A \in \mathcal{X}) \;\; \mu(A) < +\infty \wedge \int f \; d\mu < \int_A f \; d\mu + \varepsilon$$

Problema 6 (1 punto) Calcule $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-nx)}{\sqrt{x}} \; dx$.

---

17 de Septiembre de 2014