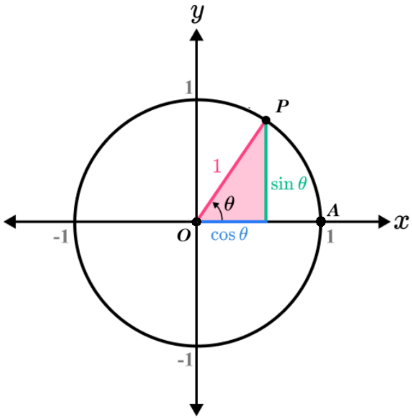
Teorema del Acotamiento y límites trigonométricos

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Seno y coseno

Circunferencia unitaria

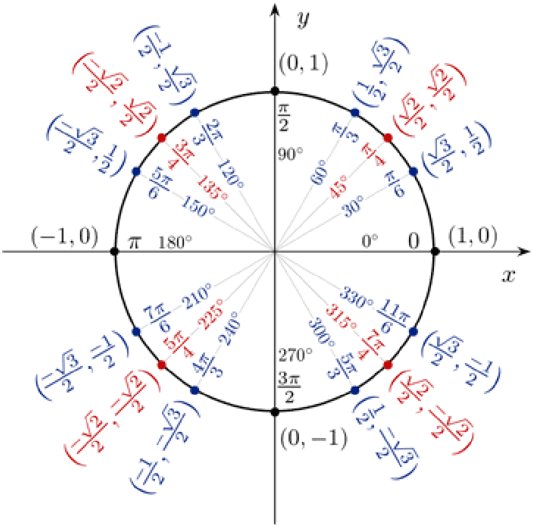


En la imagen aparece una circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, donde θ denota al ángulo formado por los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OP}$. Cada punto $P = (x, y) \in \mathcal{C}$ corresponde al par ordenado $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. De esto, se tiene la identidad trigonométrica

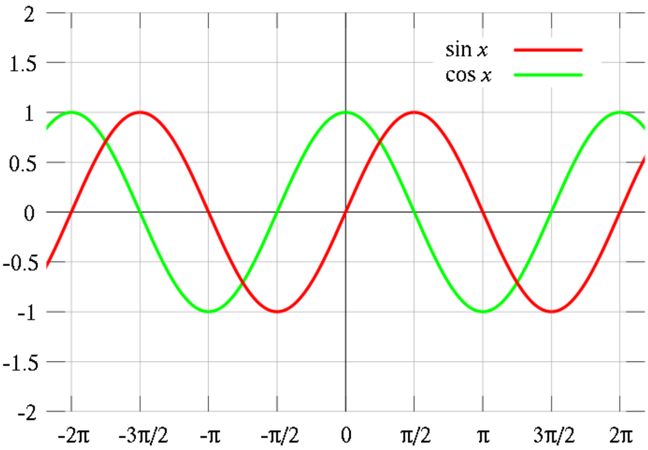
$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Seno y coseno

Ángulos notables



Funciones seno y coseno



Ver `https://www.geogebra.org/m/azzwxBPC`.

Funciones seno y coseno

Propiedades

- Son funciones **acotadas**: $|\sin(\theta)| \leq 1$ y $|\cos(\theta)| \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Coseno es una **función par**: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Seno es una **función impar**: $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Son funciones **periódicas:** $\sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta)$ y $\cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

Teorema del Acotamiento

o "Teorema del Sandwich"

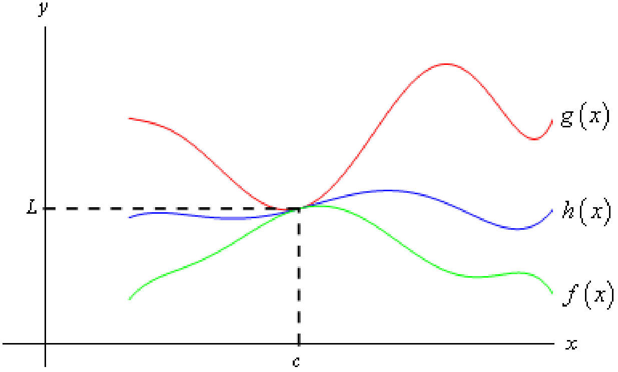
Teorema

Sean f, g y h funciones definidas en un intervalo de la forma $]a-r, a+r[$ con $r >$ (a excepción, posiblemente, del punto a) tales que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in]a-r, a+r[.$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Teorema del Acotamiento



Aplicaciones Teorema del Acotamiento

Límites importantes

El límite $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe dado que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es una función que oscila infinitamente a medida que se x se aproxima a 0. Sin embargo, por el teorema anterior, sí existe $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

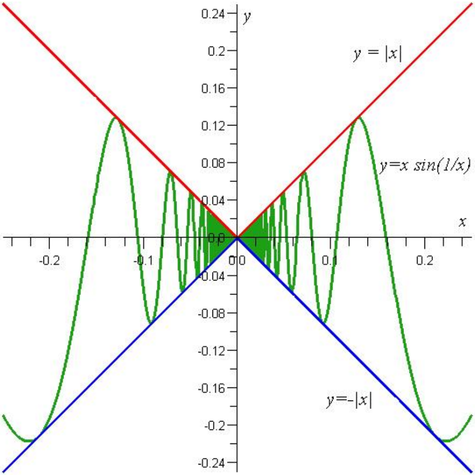
Ejemplo 1. Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple que $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. Luego

$$-|x| \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \qquad x \neq 0$$

Del Teorema del Acotamiento, se concluye que $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Aplicaciones

Gráfica de $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Aplicaciones

Más en general, se tiene el siguiente resultado:

Corolario.

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en $]a - r, a + r[$ para algún $r > 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$