Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº2: Funciones Reales
Clase N°9 - 02/04/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Producto Cartesiano

Definición

Dados dos objetos x e y, se define un par ordenado a través de la notación (x, y). En éste se distingue la primera componente: x, y la segunda componente: y.

Producto Cartesiano

Definición

Dados dos objetos x e y, se define un par ordenado a través de la notación (x, y). En éste se distingue la primera componente: x, y la segunda componente: y.

Definición:

Dados dos conjuntos A y B, se define un conjunto, llamado producto cartesiano de A con B, denotado $A \times B$, como sigue:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplos

Represente graficamente los siguientes productos cartesiano.

1. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, donde

$$A = \{k, l, m\} \qquad \text{y} \qquad B = \{q, r\}$$

Ejemplos

Representa graficamente los siguientes productos cartesiano.

1. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, donde

$$A = \{k, l, m\} \qquad \text{y} \qquad B = \{q, r\}$$

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplos

Represente graficamente los siguientes productos cartesiano.

1. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, donde

$$A = \{k, l, m\} \qquad \text{y} \qquad B = \{q, r\}$$

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$.

3. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplos

Represente graficamente los siguientes productos cartesiano.

1. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, donde

$$A = \{k, l, m\} \qquad \text{y} \qquad B = \{q, r\}$$

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplos

Representе graficamente los siguientes productos cartesiano.

1. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, donde
$$A = \{k, l, m\} \qquad \text{y} \qquad B = \{q, r\}$$
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.
5. $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$, donde
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} \qquad \text{y} \qquad B = \{y \in \mathbb{Z} : |x| \leq 5\}$$

Relaciones y Funciones

Definición:

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **relación binaria** o simplemente **relación** de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Ejemplos:

Consideremos los conjuntos A y B, dados por:

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{0, 3, 4, 5, 6, 8, 12\}$$

Analizaremos las siguientes relaciones,

1. Si $x \in A$ e $y \in B$, se tiene que:
$$xRy \Leftrightarrow x = y$$
2. Si $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que:
$$aRb \Leftrightarrow a \text{ es múltiplo de } b$$
3. Si $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que:
$$aRb \Leftrightarrow a \geq b$$
4. Si $x \in A$ e $y \in B$, se tiene que:
$$xRy \Leftrightarrow y = 2x + 4$$

Funciones

Definición:

Una **función** de A en B, es una relación de A en B, de modo que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B, esta función se denota por:

$$f : A \to B, x \mapsto y = f(x)$$

donde $f(x)$ corresponde al único elemento y de B relacionado con x de A, y se lee "f de x", en este caso, decimos que $f(x)$ es la imagen de x, también podemos decir que x es la preimagen de $f(x)$.

Funciones

Imagen de un Conjunto

Sean $f : A \to B$ una función y $X \subseteq A$. La **imagen** de X por f se define por:

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \wedge y = f(x)\} = \{f(x) \in B : x \in X\}$$

Funciones

Preimagen o Imagen Recíproca

Sea $f : A \to B$ una función y sea $Y \subseteq B$. La **preimagen** o **imagen recíproca** de Y por f se define por:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : y = f(x),\ y \in Y\} = \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

Ejercicios

1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$$

   Determine:
   (a) $f(4)$, $f(0)$ y $f(-5)$.
   (b) $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-2)$ y $f^{-1}(4)$.
   (b) el dominio y recorrido de f.

2. Determine el dominio y recorrido de cada función:
   (a) $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$
   (b) $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 9$
   (c) $h : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x+1 & , x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & , x > 1 \end{cases}$