

Listado 01: Euclides, Bézout y los números primos
Teoría de Números (527288)

1. Escribir las divisiones euclidianas de -71 dividido 12 y de 100 dividido -7 .
2. Determinar los valores de $\text{MCD}(314, 159)$, $\text{MCD}(6188, 4709)$, $\text{MCD}(234, 432)$.
3. Resolver en \mathbb{Z} las ecuaciones siguientes.

(a) $14x + 77y = 20$	(c) $314x - 159y = 5$
(b) $14x + 77y = 21$	(d) $252x + 588y = -168$
4. Determinar un valor de k tal que $277k$ sea el sucesor de un múltiplo de 364 .
5. Mostrar: si $ab = cd$ y $a \mid d$, entonces $c \mid b$.
6. Suponer que a, b son coprimos y que c, d también son coprimos. Mostrar: si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ es entero, entonces $b = \pm d$.
7. Mostrar: para $n > 1$, su segundo menor divisor positivo es primo.
8. Mostrar: un número natural $n > 1$ es un cuadrado perfecto si y sólo si cada primo aparece un número par de veces en la factorización prima de n .
9. Consecuencia de lo anterior: si a, b son coprimos positivos y el producto ab es un cuadrado perfecto, entonces a y b son ambos cuadrados perfectos.
10. Consecuencia de lo anterior: $\sqrt{2}$ no es un número racional. (*Sugerencia: si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, eliminar denominadores y raíces.*)
11. ¿Es válido el resultado anterior si se reemplaza 2 por otro número primo?

Mínimo común múltiplo

Si a, b son positivos, su *mínimo común múltiplo* es el menor número positivo que es múltiplo de ambos. En los siguientes ejercicios se descubrirá una fórmula que conectará el mínimo común múltiplo con el máximo común divisor. Fijamos notaciones: a, b dos números positivos, D su máximo común divisor y M su mínimo común múltiplo.

12. Mostrar: $M \mid ab$. (*Sugerencia: suponer que no. ¿Qué ocurriría con el resto de la división?*)
13. Sea $L = \frac{ab}{M}$. Mostrar que L es divisor común de a y de b . (*Sugerencia: usar el problema 5.*)
14. Mostrar: $\frac{ab}{D}$ es múltiplo común de a y de b .
15. Combinar los dos ejercicios anteriores para concluir que $M = \frac{ab}{D}$. (*Sugerencia: ¿qué ocurre con el valor de una fracción si el denominador crece?*)
16. Calcular el mínimo común múltiplo de 234 y 432 utilizando esta fórmula.