

## Evaluación 2

1. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) **(5 puntos)** Determine su polinomio característico, polinomio minimal y espectro.  
b) **(5 puntos)** Calcule  $A^{-1}$ .  
c) **(10 puntos)** Encuentre un vector  $v \in \mathbb{R}^6$  tal que  $m_v(x) = m(x)$ .
2. Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal no degenerada y  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal.
- a) Demuestre que  $Im(T)^\circ = Ker(T')$ .  
b) Suponga ahora que  $V = W$  y que la matriz representante de  $B$  respecto a una base dada  $\mathcal{B}$  es antisimétrica. Demuestre que entonces para todo  $v \in V$ ,  $B(v, v) = 0$ .
3. Considere el siguiente producto interno en el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 4 con coeficientes reales  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ .

$$\langle p(x); q(x) \rangle = \sum_{i=0}^4 p(i)q(i)$$

- a) **(4 puntos)** Considere la siguiente base de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ :  $\{q_0(x), q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$ , donde.

$$q_j(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-j)}$$

Demuestre que esta base es ortogonal.

- b) **(6 puntos)** Considere el operador  $U : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  definido por  $U(p(x)) = p(4-x)$ . Calcule la matriz representante de  $U$  respecto a base de la parte a) ¿cual es el operador adjunto de  $U$ ? ¿es  $U$  unitario?
- c) **(10 puntos)** Diagonalice  $U$  indicando la base de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  que logra la forma diagonal.