MAT1610 - Clase 36

Sustituciones trigonómetricas
Integración mediante Fracciones Parciales (Parte I)

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

14 de junio del 2024

Objetivos

- Abordar sustituciones trigonométricas
- Empezaremos a abordar la metodología de fracciones parciales

Sustitución trigonométrica

Sea la integral

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Una opción es usar una sustitución $u = a^2 - x^2$ para resolver la integral.

¿Qué pasaría si buscamos resolver $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$?

Una posible sustitución sería $x = a\, sen(t)$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable anterior) y la sustitución $x = a\, sen(t)$ (la variable anterior es una función de la nueva).

Sustitución trigonométrica

En general, podemos hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar a la inversa la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, suponemos que tiene una función inversa; es decir, es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x, y x por t en la regla de sustitución, se tiene

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

Este tipo de sustitución se llama **sustitución inversa**.

Puede hacerse la sustitución inversa $x = \ a\,sen(t)$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto puede llevarse a cabo restringiendo al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Tabla de sustitución trigonométrica

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot sen(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2(\theta) = cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \cdot tan(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot sec(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \vee \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$sec^2(\theta) - 1 = tan^2(\theta)$

Ejemplo 1: Determine

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

Ejemplo 2: Encuentre el área encerrada por una elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ejemplo 3: Determine

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

Ejemplo 4: Determine

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

Ejemplo 5: Determine

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad a > 0$$

Ejemplo 6: Determine

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$$

Ejemplo 7: Determine

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$$

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Es un método para integrar funciones racionales (razón de polinomios) al expresarla como una suma de fracciones simples, llamadas **fracciones parciales**.

Ejemplo 8: Determine

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$$

Sabiendo que

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son funciones polinomiales.

Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q (fracción racional propia).

Si f es impropia, esto es, $gr(P) \geq gr(Q)$, entonces debemos tomar el paso preliminar de dividir P entre Q (por división larga) hasta obtener el residuo $R(x)$ de manera que $gr(R) \leq gr(Q)$.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde S y R son funciones polinomiales.

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Ejemplo 9: Determine

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$$

Solución: A partir de división de polinomios,

$$x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx &= \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx\\ &= \int (x^2+x+2)dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\,ln(|x-1|)+C\end{aligned}$$

Conclusión

- Abordamos sustituciones trigonométricas
- Empezamos a aprender técnica de fracciones parciales

Libro guía

- Págs. 478-485.