

PAUTA - EVALUACION 2
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218-525221)

Problema 1. Determine la ecuación de la curva integral (curva solución) de la EDO

$$x^3 y''(x) + 5x^2 y'(x) + 4x y(x) = x^2 + 1, \quad x > 0;$$

cuya tangente en el punto $(1, -1)$ de la curva tiene una inclinación de 45 respecto del eje X .

Solución:

Para $x > 0$, el PVI a resolver es:

$$\begin{cases} x^2 y'' + 5x y' + 4y = \frac{x^2 + 1}{x}, & x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Haciendo $x = e^t$, la EDO anterior se reduce a la de coeficientes constantes

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^t + e^{-t}. \quad (2)$$

[3 ptos.]

Determinación de y_h :

$$\begin{aligned} (D^2 + 4D + 4)y(t) &= 0 \\ (D + 2)^2 y(t) &= 0 \\ \Rightarrow y_h(t) &= c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \\ \Rightarrow y_h(x) &= c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln(x) \end{aligned}$$

Determinación de y_p :

El operador $(D - 1)(D + 1)$ es un aniquilador para $e^t + e^{-t}$. Sigue que

$$\begin{aligned} (D - 1)(D + 1)(D + 2)^2 y(t) &= 0 \\ \Rightarrow y_p(t) &= Ae^t + Be^{-t} \end{aligned}$$

[5 ptos.]

Ahora reemplazando $y_p(t)$, $y'_p(t)$ e $y''_p(t)$ en la EDO (2), se obtiene

$$y_p(t) = \frac{1}{9}e^t + e^{-t}$$

y en la variable original

$$y_p(x) = \frac{1}{9}x + x^{-1}.$$

[3 ptos.]

Así, la solución general a la EDO (1), es

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln(x) + \frac{1}{9}x + x^{-1}, \quad (3)$$

y reemplazando las condiciones iniciales en $y(x)$ e $y'(x)$, se obtiene:

$$c_1 = \frac{-19}{9} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-7}{3}.$$

Finalmente, la solución al PVI, es

$$y(x) = \frac{-19}{9}x^{-2} + \frac{-7}{3}x^{-2} \ln(x) + \frac{1}{9}x + x^{-1}.$$

[4 ptos.]

Problema 2. Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} t y'(t) + y(t) = e^{2t} U_1(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Notación: $U_1(t) = H_1(t) = H(t - 1)$.

Solución:

Ya que

$$\mathcal{L}(ty'(t))(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s),$$

aplicando la transformada de Laplace a

$$t y'(t) + y(t) = e^{2t} U_1(t)$$

llegamos a

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) + \mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(e^{2t} U_1(t))(s). \quad (4)$$

Combinando la fórmula de integración por partes con $y(0) = 1$ se obtiene que

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y)(s) - 1,$$

así que

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) = -\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}(y)(s) - 1) = -\mathcal{L}(y)(s) - s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s).$$

Por lo tanto,

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) + \mathcal{L}(y(t))(s) = -s\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s). \quad (5)$$

[6 ptos.]

Por otro lado,

$$\mathcal{L}(e^{2t} U_1(t))(s) = e^{-s}\mathcal{L}(e^{2(t+1)})(s) = e^{-s}e^2\mathcal{L}(e^{2t})(s) = e^{-s}e^2/(s-2). \quad (6)$$

Combinando (4) con (5) y (6) obtenemos que

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^{-s}e^2}{s(s-2)}.$$

Puesto que $-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(t y(t))(s)$,

$$\mathcal{L}(t y(t))(s) = \frac{e^{-s}e^2}{s(s-2)}.$$

[4 ptos.]

Ahora,

$$\begin{aligned} t y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s} e^2}{s(s-2)} \right) (t) \\ &= \frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s}}{s-2} \right) (t) - \frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s}}{s} \right) (t). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s}}{s-2} \right) (t) = \frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(e^{-s} \mathcal{L} (e^{2t}) (s) \right) (t) = \frac{e^2}{2} U_1(t) e^{2t-2}.$$

y

$$\frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s}}{s} \right) (t) = \frac{e^2}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(e^{-s} \mathcal{L} (1)(s) \right) (t) = \frac{e^2}{2} U_1(t).$$

Lo que implica que

$$t y(t) = \frac{e^2}{2} U_1(t) (e^{2t-2} - 1),$$

así que para $t \neq 0$,

$$y(t) = U_1(t) \frac{e^{2t} - e^2}{2t}.$$

[5 ptos.]

Problema 3. Un resorte experimenta una alargamiento de 2.5 [mt] al suspender de él un cuerpo de masa unitaria. Luego de alcanzar el punto de equilibrio, sobre el cuerpo que se libera desde el reposo 1 mt por abajo de ese punto, se aplica una fuerza de $f(t) = e^{-t}$ [N].

Suponiendo que el amortiguamiento es despreciable y si luego de π segundos la masa recibe un golpe súbito hacia abajo de 2 unidades de momento lineal, determine el desplazamiento del sistema.

Ind: Considere la aceleración de gravedad $g = 10$ [m/s^2]

Solución:

El PVI que gobierna el problema descrito viene dado por

$$\begin{cases} m x''(t) + K x(t) = f(t) + 2\delta(t - \pi) \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

donde $m = 1$, $f(t) = e^{-t}$ y la constante K del resorte se calcula por la ley de Hooke

$$mg = K s,$$

donde $s = 5/2$. Tomando $g = 10$ [m/s^2] se obtiene $K = 4$.

Así, el PVI a resolver es:
$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = f(t) + 2\delta(t - \pi) \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

[4 ptos.]

Poniendo $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ y $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, se obtiene:

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = F(s) + 2e^{-\pi s},$$

es decir,

$$(s^2 + 4) X(s) = F(s) + 2e^{-\pi s} + s.$$

Así,

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)} \{F(s) + 2e^{-\pi s} + s\}$$

[5 ptos.]

Ahora aplicando transformada inversa, obtenemos:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 4)} \{F(s) + 2e^{-\pi s} + s\} \right] (t),$$

es decir,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 4)} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2e^{-\pi s}}{(s^2 + 4)} \right] (t) + \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 4)} \right] * \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \right) (t).$$

[3 ptos.]

Observar que

$$\left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 4)} \right] * \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \right) (t) = \frac{1}{2} (g * f) (t) = \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^t e^u \sin(2u) du$$

$$(f(t) = e^{-t} \text{ y } g(t) = \sin(2t)).$$

Así,

$$x(t) = \cos(2t) + H(t - \pi) \sin(2(t - \pi)) + \frac{1}{10} \sin(2t) - \frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{1}{5} e^{-t}.$$

[3 ptos.]

Problema 4. Usando **valores propios** resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x' = -7x + 6z, & x(0) = -3, \\ y' = 5y, & y(0) = 2, \\ z' = 6x + 2z, & z(0) = -1. \end{cases}$$

Solución : El sistema EDO escrito en forma matricial es:

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Cálculo de **valores propios de \mathbf{A}** :

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \dots = -(\lambda - 5)^2(\lambda + 10),$$

de donde los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$.

[3 ptos.]

2) Cálculo de **vectores propios**:

2.1) Para $\lambda_1 = -10$, el espacio propio asociado es

$$S_{\lambda_1} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Pero,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \mathbf{A} + 10\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde el sistema lineal homogéneo equivalente a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2t \\ b = 0 \\ c = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

De esta manera, $S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y escogemos $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1)^T$.

[3 ptos.]

2.2) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$, el espacio propio asociado es

$$S_{\lambda_2} := \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \}$$

Pero,

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+1/2f_1} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde el sistema lineal homogéneo equivalente a resolver es:

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2a = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t \\ b = s \\ c = 2t \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

De esta manera, $S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y escogemos $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^T$.

[6 ptos.]

3) Solución General Sistema Lineal Homogéneo:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{-10t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

4) Imponiendo la condición inicial:

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2c_1 + c_2 \\ c_3 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1; c_2 = -1; c_3 = 2.$$

Finalmente, la solución del PVI dado es:

$$\mathbf{X}(t) = e^{-10t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-10t} - e^{5t} \\ 2e^{5t} \\ e^{-10t} - 2e^{5t} \end{pmatrix}.$$

[3 ptos.]