

**Evaluación 1.**  
**Cálculo III.**  
**525211.**  
**16 de Mayo de 2011.**

1. Para los siguientes conjuntos

- (a)  $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 < 9\}$
- (b)  $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < x^2\}$
- (c)  $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{x}\}$

Diga cuál de ellos es abierto? poligonalmente conexo? conexo? región? justifique su respuesta.

Sólo para uno de ellos se puede definir una función  $f(x, y) \neq \text{constante}$  tal que  $\nabla f \equiv 0$ . Diga si se trata de  $R_1$ ,  $R_2$  o  $R_3$ , y dé un ejemplo de tal función  $f$ .

2. Suponga que el centro de la tierra (de masa  $M$ ) está ubicado en  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ , y un astronauta (de masa  $m$ ) está ubicado en  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . El potencial gravitatorio está dado por una función  $\varphi = \Psi \circ f$ , donde  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $r \mapsto \Psi(r) = \frac{GMm}{r}$  (con  $G \equiv \text{Constante Universal}$ ), y donde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

- (a) Pruebe que  $\Delta\varphi = 0$  para todo  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , donde  $\Delta\varphi := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$ .
- (b) Se define el campo de fuerza gravitacional como  $\vec{F} = \nabla\varphi$ ; pruebe que la fuerza de gravedad que la tierra ejerce sobre el astronauta está dirigida hacia el centro de la tierra y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

3. La temperatura de una placa en un punto cualquiera  $(x, y)$  viene dada por la función  $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$ . Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$ , se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?