

## ANALISIS REAL I (525.301)

### Cap. 2. Aún más ejercicios adicionales.

#### Conejividad.

1. El objeto de este ejercicio es determinar cuáles son todos los conjuntos conexos de la recta.
  - (a) Demuestra que los únicos conjuntos conexos, acotados y no vacíos de  $\mathbb{R}$  son los intervalos (acotados):  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  y  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ ).
  - (b) Demuestra que los únicos conjuntos conexos no acotados de  $\mathbb{R}$  son las semirectas y la recta  $\mathbb{R}$ :  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b)$  y  $(-\infty, +\infty)$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).
  - (c) Concluye describiendo todos los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$ .
2. El objeto de este ejercicio es demostrar que la definición de conjunto conexo (al igual que la de conjunto compacto) es independiente del espacio métrico que contiene al conjunto.

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y \subset X$ , de manera que  $(Y, d)$  también es un espacio métrico.

Dado  $x \in Y$ , para distinguir las bolas de radio  $r > 0$  en  $X$  y en  $Y$ , en este ejercicio las llamaremos  $B_r^X(x)$  y  $B_r^Y(x)$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} B_r^X(x) &:= \{y \in X : d(y, x) < r\}, \\ B_r^Y(x) &:= \{y \in Y : d(y, x) < r\} = B_r^X(x) \cap Y. \end{aligned}$$

Dado  $A \subset Y$ , en este ejercicio llamaremos  $\overline{A}^X$  y  $\overline{A}^Y$  a las clausuras de  $A$  en  $X$  y en  $Y$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \overline{A}^X &:= \{y \in X : \forall r > 0 \ B_r^X(y) \cap A \neq \emptyset\}, \\ \overline{A}^Y &:= \{y \in Y : \forall r > 0 \ B_r^Y(y) \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

- (a) Demuestra que  $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$ .
- (b) Sea  $E \subset Y$ . Demuestra que  $E$  es conexo en  $Y$  si y sólo si es conexo en  $X$ .