UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

PRACTICA 1 (Generalidades)

Problemas a resolver en práctica

1. Indique si las EDO que siguen son lineales o no lineales; además indique el orden de la EDO:

   (a) $y(x)y''(x) - (y(x))^2\,(y'(x))^3 = x^3$,

   (b) $x(y'(x))^2 - \mathrm{e}^x(y(x))^4 - x^3 = 0$,

   (c) $t\,x'(t) - \mathrm{e}^t x(t) - t^5 = 0$,

   (d) $x(y'(x))^2 + x^2\mathrm{e}^x\,(y(x))^4 = \mathrm{e}^x[y(x)]^{1/2}$.

   Respuesta

   (a) Vemos que al aparecer $y(x)y''(x)$ y $(y(x))^2\,(y'(x))^3$ nos muestra que la EDO no es lineal; la EDO es de orden 2.

   (b) Por $(y'(x))^2$ y $(y(x))^4$ la EDO no es lineal. Es de orden 1.

   (c) Es lineal y de orden 1.

   (d) Por $(y'(x))^2$, $(y(x))^4$ y $[y(x)]^{1/2}$ la EDO es no lineal y de orden 1.

2. Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.

   (a) $v(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$; $y(t)\,y'(t) \;=\; t(1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}$.

   (b) $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$; $\;y' - 2xy = 1$.

   (c) $z(x) = x\,\mathrm{e}^x$; $y''(x) - x\,y'(x) + x\,y(x) \;= 2\,\mathrm{e}^x$.

   Respuesta

   (a) Tenemos $v(t) = t\mathrm{e}^{-t}$, luego de esto $v'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$. Asi

   $$v(t)v'(t) = t(1-t)\mathrm{e}^{-2t}$$

   Lo cual no muestra que se cumple la igualdad, es decir, v es solución de la EDO.

   (b) Tenemos $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$, de esto sacamos $y'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1$. Ahora

   $$y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1 - 2x(\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt) = 1$$

Asi y es solución de la EDO.

(c) Tenemos $z(x) = x\mathrm{e}^x$, de esto obtenemos $z'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$ y $z''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$. Ahora

$$z''(x) - x\,z'(x) + x\,z(x) = (2+x)\mathrm{e}^x - x(1+x)\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

Y vemos que es solución de la EDO.

3. Determine la ecuación diferencial de menor orden que tiene por solución general la función $y = y(x)$ dada a continuación (tener presente que C, con o sin índices, denotará una constante real):

(a) $x^2 - y^2 = C$ (b) $x^2y^2 \,+\, x^3\,\mathrm{e}^{2y} \,=\, C\,x^3\,.$

Respuesta

(a) Para encontrar la ecuación diferencial de menor orden tenemos que derivar implicítamente la ecuación

$$2x - 2yy' = 0$$

Así obtenemos la EDO de menos orden que cumple lo pedido

(b) Primero notemos que de la relación dada

$$C = \frac{x^2y^2 \,+\, x^3\,\mathrm{e}^{2y}}{x^3}.$$

Ahora derivando implícitamente como en el item anterior, sigue

$$2xy^2 + 2x^2yy' + 3x^2\mathrm{e}^{2y} + x^3\mathrm{e}^{2y}\,2y' = 5Cx^4 \iff y'\,(2x^2y + 2x^3\mathrm{e}^{2y}) + 2xy^2 = 5Cx^4.$$

Reemplazando el valor de C , obtenemos

$$y'(x) = \frac{5(x^3y^2 + x^4\,e^{2y}) \,-\, 2x\,y^2}{2x^2y + 2x^3\mathrm{e}^{2y}}$$

Obteniendo la EDO solicitada. Se trata de una EDO no lineal de primer orden.

4. Resolver:

(a) $(x^2+1)y'(x) \,=\, x\,y(x)\,.$

(b) $y'(x) \,+\, y(x) \,=\, \mathrm{e}^{-x}\,.$

(c) $(x^2+1)y'(x) \,+\, xy(x) = \frac{x}{x^2+1}\,, x > 0$

Respuesta

(a) Normalizando la EDO dada, se obtiene que

$$y'(x) - \frac{x}{x^2+1}y(x) = 0 \quad \text{(note que } (x^2+1) \text{ es siempre positivo).}$$

Determinemos el Factor de Integración $\mu(x) = \mathrm{e}^{A(x)}$ donde $A'(x) = -\frac{x}{x^2+1}$. Se obtiene $\mu(x) = (x^2+1)^{-1/2}$

Multiplicamos la EDO por $\mu(x)$, sigue

$$\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} y'(x) - \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} y(x) = 0,$$

que es equivalente a escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} y(x)\right] = 0.$$

Del Teorema Fundamental del Cálculo se obtiene

$$y(x) = C(x^2+1)^{1/2} \quad , C \in \mathbb{R}$$

(b) Ya está normalizada asi que calcularemos μ

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int dx} = \mathrm{e}^{x}$$

Multiplicamos la EDO con $\mu(x)$ y los escribimos como la derivada del producto

$$\frac{d}{dx}[y(x)\mathrm{e}^{x}] = 1$$

Finalmente Integramos y despejamos

$$y(x) = (x + C)\mathrm{e}^{-x} \quad , C \in \mathbb{R}$$

(c) Normalizamos

$$y'(x) + \frac{x}{x^2+1} y(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Calcularemos μ

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{x}{x^2+1}} = (x^2+1)^{1/2}$$

Multiplicamos la EDO por $\mu(x)$

$$(x^2+1)^{1/2} y'(x) + \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}} y(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Lo escribimos como el producto de la derivada e integramos.

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^{1/2}y(x)\right] = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+1)^{1/2}y(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Finalmente calculamos la integral despejamos y

$$(x^2+1)^{1/2}y(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = -\frac{1}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x^2+1)^{1/2}} \quad , C \in \mathbb{R}$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.
   (a) $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \;\; y'(x) \;=\; -2x\, y(x),$
   (b) $y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$, $y''(x) + 10y'(x) + 25y(x) = 0,$
   (c) $y(x) = \ln(x)$, $y'(x) \;=\; \mathrm{e}^{-y(x)}.$
   (d) $u(t) = \cos(t)$; $z'''(t) + z'(t) + z(t) = \cos(t)\,.$

2. Verifique que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada.
   (a) $\begin{cases} y(t) := \dfrac{-1}{(t+c)}\,, c \in \mathbb{R} \text{ constante} \\ y'(t) = y^2(t) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} y(x) := x\,\mathrm{e}^{-x}, \\ x\,y''(x) - 2y'(x) - xy(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

3. Resolver el PVI: $t(t^2+1)y'(t) \;-\; (t^2+1)y(t) \;=\; t$, $y(1) = 0.$

4. Resolver: $(t + |t|)\, y'(t) \;-\; t\, y(t) \;=\; t \;+\; t^2\,.$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:
   (a) $t\, y'(t) \;-\; y(t) \;=\; t^2\,\mathrm{e}^{-3t}\,, t > 0,$
   (b) $\cos(x)\, y'(x) \;+\; \mathrm{sen}(x)\, y(x) = \; 1\,, |x| \;<\; \pi/2\,.$
   (c) $xy'(x) \;+\; 4y(x) \;=\; x^3 - x\,,\; x > 0.$

---

24 Abril 2020.
MDT/JMS/CMG/DS/IMM//jms/imm