UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
 PAUTA E1 **MAT 225212**

P1 (**15 pts.**)

Asuma que a y b son constantes reales y n es un entero positivo. Probar que la soluciones z de la ecuación

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a+ib$$

son reales si y solamente si $a^2+b^2=1$.

Indicación: 1º $z=0$ es solución entonces $|a+ib|^2=1$. Debe establecer
2º Si $z=x\in\mathbb{R}$ es solución debe inferir en tal caso que $|a+ib|^2=1$
3º Si $|a+ib|^2=1$ y $z=x+iy$ es solución entonces infiera que $\mathrm{Im}(z)=0$.

Solución Propuesta

Siguiendo la indicación, se re escribe la ecuación

$$\left(\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^2\right)^n = a^2+b^2 \tag{1}$$

($\Longrightarrow$) Si $z=x\in\mathbb{R}$ es solución, y $|1+ix| = \left|\overline{1+ix}\right| = |1-ix|$, entonces se infiere directamente de (1) que

$$a^2+b^2=1.$$

($\Longleftarrow$) Si $a^2+b^2=1$ entonces de (1) se infiere directamente (el argumento de la potencia n-ésima es un número real)

$$\begin{aligned} |(1-y)+ix|^2 &= |(1+y)-ix|^2 \\ -2y &= 2y \\ y &= 0. \end{aligned}$$

P2 (**7+4+4 pts.**)

1. Usar la definición de límite para probar que
$$\lim_{z\to 1-i} \overline{z}^2 = (1+i)^2.$$
2. Establecer

(a) $\mathrm{Ln}(1+i)^2 = 2\mathrm{Ln}(1+i)$ **(b)** $\mathrm{Ln}(-1+i)^2 \neq 2\mathrm{Ln}(-1+i)$.

Solución Propuesta

(**2.**) Como $(1+\pm i)^2 = \pm 2i$:

$$(a)\begin{cases} \mathrm{Ln}(1+i)^2 = \ln(2)+i\frac{\pi}{2} \\ \wedge \\ 2\mathrm{Ln}(1+i) = 2\left(\frac{\ln(2)}{2}+i\frac{\pi}{4}\right)\end{cases} \qquad (b)\begin{cases} \mathrm{Ln}(-1+i)^2 = \ln(2)-i\frac{\pi}{2} \\ \wedge \\ 2\mathrm{Ln}(-1+i) = 2\left(\frac{\ln(2)}{2}-i\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}\right)\end{cases}$$

(**1.**) Si $a=1-i$, al igual que el caso real se debe mayorar $|f(z)-f(a)|$ donde $f(z)=-\overline{z}^2$:

$$\begin{aligned} \left|\bar{z}^2-\bar{a}^2\right| &= |\bar{z}-\bar{a}||(\bar{z}-\bar{a})+2\bar{a}| \\ &= |z-a|\,|(\overline{z-a})+2\bar{a}| \\ &\leq |z-a|\Big(4+|z-a|\Big). \end{aligned}$$

Enseguida, si $|z-a|<1$, entonces $\left|\bar{z}^2-\bar{a}^2\right|<5|z-a|$:

$$\Big(\forall\,\epsilon>0\Big)\Big(\exists\,\delta<\min(1,\tfrac{\epsilon}{5})\Big):\ |z-a|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\bar{z}^2-\bar{a}^2\right|<\epsilon.$$

P3 (**15** pts.)

Sea la función de variable compleja a valores complejos $f(z)=\bar{z}e^{-|z|^2}$.
Determinar la región del plano sobre el cual existe $f'(z)$ y esta derivada determínela explícitamente.

Solución Propuesta

Por simplicidad y brevedad trabajamos con variables conjugadas (ver clase y listado), si bien lo usual es trabajar en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\quad\wedge\quad\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

Sabemos que la región buscada es determinada por la continuidad de la siguiente derivada parcial y si ahí coincide con la función nula: $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$. Esto es

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=(1-|z|)e^{|z|^2}=0\iff z\in S(1)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}\,.$$

Por otra parte la $\mathbb{C}$-derivada de f sobre $S(1)$ es determinada por

$$\forall z\in S(1):\quad f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z)=-\bar{z}^2e^{-1}$$

o bien en coordenadas rectangulares, como $x^2+y^2=1$:

$$f'(x+iy)=\big(1-2x^2+i2xy\big)\,e^{-1}.$$

P4 (**05+06+09 pts.**) $\longrightarrow$ (**05+06+14 pts.**)

1. Sea $u=u(x,y)$ una función armónica sobre un dominio simplemente conexo $\mathrm{V}\subset\mathbb{R}^2$. Probar que sus funciones armónicas conjugadas difieren en una constante real **C**, Estas funciones son las componentes de la familia de funciones holomorfas parametrizada por una constante imaginaria pura:

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)+i\mathbf{C},\quad (x,y)\in\mathrm{V},\mathbf{C}\in\mathbb{R}$$

2. Sea $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ armónica y sobreyectiva verificando que $\|\nabla u\|\neq 0$. Hallar todas las funciones reales $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivables y tales que $F\circ u$ sea una función armónica.
3. Encontrar los valores de las constantes que le permitan determinar la armónica conjugada $v=v(x,y)$ de $u=u(x,y)$. En el segunda caso es pertinente usar coordenadas polares.

   a) $u(x,y)=e^{ax}\cos(by),\ a+b=4$

   b) $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^k},\ k=1,2$

Ind. En (b) tiene tres alternativas presentadas en clases para determinar v. Es ventajoso recordar funciones elementales.

Solución Propuesta

1. Cualquiera de las dos demostraciones presentadas en clases;
2. Ver Clase de Práctica;

3. El primer caso lo desarrollamos en coordenadas rectangulares y el segundo en polares:

a. Como $\triangle u(x,y) = (a^2 - b^2)u(x,y)$, la función u será armónica si $a = \pm b$, pero la condición $a + b = 4$ impone que $a = b = 2$. Enseguida, como $u(x,y) = e^{2x}\cos(y)$ sobre todo el plano:

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(e^z)$$

se concluye que $v(x,y) = \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin(y)$.

b. Si $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ la función u se escribe en coordenadas polares

$$u(r,\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta).$$

Como

$$r^2 \triangle u(r,\theta) = \left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)(r,\theta) = -4u(r,\theta)$$

Es imposible que u sea armónica en ninguna *dominio* del plano.

Si $\mathbf{k} = \mathbf{2}$ entonces

$$u(r,\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{r^2},\ r > 0.$$

En este caso, $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^{-2}),\ z \neq 0$ y luego $v(x,y) = \mathrm{Im}(z^{-2}),\ z \neq 0$.