UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Examen Especial

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218, 525221)

1. (15 puntos) Encuentre la solución general del sistema de EDOs

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2\,x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 2\,y(t) - z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2\,z(t) \end{aligned}$$

Nota: El número 1 es una de las raíces del polinomio característico asociado al anterior sistema de EDOs.

Solución: Elegimos $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\vec{V}(t) = A\,\vec{V}(t)$$

con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Como

$$|A - \lambda\, I| = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\right|,$$

$$|A - \lambda\, I| = -(1-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}\right| + (1-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Luego, A tiene los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ con multiplicidades $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, respectivamente. Ya que

$$(A - I)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{v},$$

$(A-I)\,\vec{v}=\vec{0}$ si y solo si

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

De donde $v_1-v_2+v_3=0$. Tomando $v_3=0$ obtenemos el vector propio $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Eligiendo $v_2=0$ obtenemos el vector propio $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Debido a

$$(A-4\,I)\,\vec{v}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\vec{v},$$

$(A-I)\,\vec{v}=\vec{0}$ si y solo si $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$, que es equivalente a $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$.

De aquí obtenemos el vector propio $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Entonces

$$\vec{V}\,(t)=c_1\,e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\,e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3\,e^{4t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

donde $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

2. **(a)** Encuentre la solución general de

$$X''\,(t)-6\,X'\,(t)+9\,X\,(t)=0$$

(5 puntos)

(b) Escriba

$$X''\,(t)-6\,X'\,(t)+9\,X\,(t)=0$$

como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. (5 puntos)

(c) Encuentre la solución general de

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \vec{Z}(t)$$

Sugerencia: Utilice los incisos (a) y (b). (5 puntos)

Solución:

(a) El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Luego

$$X(t) = a\, e^{3t} + b\, t\, e^{3t},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Ponemos $Y(t) = X'(t)$. Luego

$$Y'(t) = X''(t) = 6\, X'(t) - 9\, X(t)\,.$$

Lo que implica

$$\begin{cases} X'(t) = Y(t) \\ Y'(t) = 6\, Y(t) - 9\, X(t) \end{cases}.$$

(c) En la respuesta del inciso (b) elegimos

$$\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) \tag{1}$$

De la respuesta del inciso (a) tenemos que $\vec{Z}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3\, e^{3t} \end{pmatrix}$ y $\vec{Z}_2(t) = \begin{pmatrix} t\, e^{3t} \\ e^{3t} + 3\, t\, e^{3t} \end{pmatrix}$ son soluciones de (2). Como son linealmente independientes

$$\vec{Z}(t) = a \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3\, e^{3t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} t\, e^{3t} \\ e^{3t} + 3\, t\, e^{3t} \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

3. (15 puntos) Una casa de montaña se abastece de agua potable desde un estanque de capacidad igual a 2000 [l]. Se sabe que el agua potable tiene una concentración de cloro igual a 2 [mg/l]. Para higienizar y mantener el estanque fue preciso llenarlo por completo y elevar su concentración de cloro a 15 [mg/l]. Si en esa última condición, se abre al mismo tiempo una llave de desagüe que escurre a 5 [l/min] y una llave que vierte agua potable a la misma razón 5 [l/min], se pide determinar los minutos que transcurrirán hasta que el agua del estanque sea nuevamente bebestible. Considere que el agua es bebestible cuando la concentración de cloro es inferior o igual a 4 [mg/l].

   Unidades: l=litro, mg=milígramo, min=minuto.

   Solución: Sea $V = V(t)$ el volumen del estanque en el tiempo t, medido en [l]. Tenemos que el estanque se encuentra lleno inicialmente, luego $V(0) = 2000$ [l]. Sabemos que escurre agua por la llave de desagüe a 5 [l/min] y simultáneamente se vierte agua potable a razón de 5 [l/min], luego el volumen del estanque se mantiene constante e igual a su valor inicial, es decir,

$$V(t) = 2000 \text{ [l]} \quad \forall t \geq 0.$$

   Sea ahora $M = M(t)$ la masa de cloro en el estanque en el tiempo t, medida en [mg]. La concentración de cloro $c = c(t)$ en el tiempo t se obtiene como $c(t) = M(t)/V(t)$, medida en [mg/l]. Inicialmente $c(0) = 15$ [mg/l], con lo que la masa de cloro inicial es

$$M(0) = c(0)V(0) = 15 \text{ [mg/l]} \cdot 2000 \text{ [l]} = 30000 \text{ [mg]}.$$

   Veamos ahora como varía la masa de cloro en función del tiempo. Asumimos que conocemos $M(t)$ y sea Δt un incremento de tiempo muy pequeño. Queremos encontrar una relación para $M(t + \Delta t)$. La masa de cloro en $t + \Delta t$ se calcula como la masa que había en el tiempo t, menos el caudal de salida de 5 [l/min] multiplicado por la concentración en el tiempo t (en [mg/l]) y por el incremento de tiempo Δt (en [min]), más el caudal de entrada de 5 [l/min] multiplicado por la concentración del agua potable 2 [mg/l] y también por el incremento de tiempo Δt, es decir,

$$M(t + \Delta t) = M(t) - 5\, c(t)\, \Delta t + 5 \cdot 2\, \Delta t = M(t) - 5\, \frac{M(t)}{V(t)}\, \Delta t + 10\Delta t,$$

$$M(t + \Delta t) = M(t) - \left(5\, \frac{M(t)}{V(t)} - 10\right) \Delta t.$$

   Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = -5\, \frac{M(t)}{V(t)} + 10,$$

y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ se llega a la EDO siguiente

$$M'(t) = -5\,\frac{M(t)}{V(t)} + 10,$$

Y reemplazando que $V(t) = 2000$, queda

$$M'(t) = -\frac{1}{400}\,M(t) + 10.$$

la que junto con la condición inicial antes obtenida da origen al siguiente PVI para $M(t)$:

$$\begin{cases} M'(t) + \dfrac{1}{400}\,M(t) = 10 \qquad t > 0, \\ M(0) = 30000. \end{cases}$$

Ahora procedemos a resolver el PVI. Primero encontramos la solución de la EDO, la cual es lineal de primer orden. El factor integrante se calcula como

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{400}\,dt} = e^{\frac{t}{400}}.$$

Luego

$$e^{\frac{t}{400}}M'(t) + \frac{1}{400}\,e^{\frac{t}{400}}\,M(t) = 10\,e^{\frac{t}{400}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{400}}M(t)\right] = 10\,e^{\frac{t}{400}} \quad\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{t}{400}}M(t) = 10\int e^{\frac{t}{400}}dt = 10\cdot 400\,e^{\frac{t}{400}} + C = 4000\,e^{\frac{t}{400}} + C,$$

donde C es cualquier constante real. Por lo tanto

$$M(t) = 4000 + C\,e^{-\frac{t}{400}},$$

es la solución general de la EDO. La constante C se determina a partir de la condición inicial

$$M(0) = 30000 \quad\Leftrightarrow\quad 4000 + C = 30000 \quad\Leftrightarrow\quad C = 30000 - 4000 = 26000,$$

y la solución al PVI es

$$M(t) = 4000 + 26000\,e^{-\frac{t}{400}},$$

expresión que corresponde a la masa de cloro en función del tiempo. La concentración se obtiene como

$$c(t) = \frac{M(t)}{V(t)} = \frac{4000 + 26000\,e^{-\frac{t}{400}}}{2000} = 2 + 13\,e^{-\frac{t}{400}}.$$

Ahora calculamos lo pedido. Debemos encontrar un instante de tiempo t^* a partir del cual la concentración es menor o igual a 4 [mg/l], es decir,

$$c(t^*) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 13\, e^{-\frac{t^*}{400}} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 13\, e^{-\frac{t^*}{400}} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t^*}{400}} = \frac{2}{13}.$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{t^*}{400} = \ln\left(\frac{2}{13}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^* = -400 \ln\left(\frac{2}{13}\right) \approx 748{,}72087$$

Luego, y haciendo una aproximación, a partir de $t^* = 749$ [min], el agua del estanque pasa a tener una concentración de cloro menor a 4 [mg/l], con lo que ésta vuelve a ser bebestible.

4. (15 puntos) Considere un sistema masa-resorte imbuido en un fluido y sin fuerza externa.

   Suponga que:

   - $m = 1,0$ [kg] (masa)
   - $a = 4,0$ [kg/s^2] (constante de rigidez)
   - $b = 4,0$ [kg/s] (constante de roce).

   Sea $X(t)$ el desplazamiento vertical en el tiempo.
   Sabiendo que $X(0) = 4 \ \wedge \ X'(0) = 1$, se pide determinar la máxima velocidad que alcanza la masa en su trayecto de oscilación.

Solución: Llamaremos $X(t)$ al desplazamiento del cuerpo, medido en metros, con respecto al punto de equilibrio en el tiempo t (dado en segundos). Usando la segunda ley de Newton se llega a:

$$m\, X''(t) + b\, X'(t) + a\, X(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0,$$

así que

$$X''(t) + 4\, X'(t) + 4\, X(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

Además, inicialmente tenemos que $X(0) = 4$ y que $X'(0) = 1$.
Se trata de una EDO homogénea, luego procedemos directamente a calcular el polinomio característico de (2):

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2.$$

Entonces, $\lambda = -2$ es una raíz del polinomio característico de multiplicidad dos. Se sabe entonces que la solución general de (2) viene dada por

$$X(t) = a\,e^{-2t} + b\,t\,e^{-2t},$$

con a, b constantes reales. Su derivada es

$$X'(t) = -2a\,e^{-2t} + b\,e^{-2t} - 2b\,t\,e^{-2t}.$$

Para encontrar a y b, imponemos las condiciones iniciales:

$$X(0) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4,$$

$$X'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2a + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 + 2a = 1 + 8 = 9.$$

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = 9$, con lo que el desplazamiento de la masa en función del tiempo se expresa como:

$$X(t) = 4\,e^{-2t} + 9\,t\,e^{-2t} = (4 + 9\,t)\,e^{-2t},$$

y la velocidad de la masa en función del tiempo es

$$X'(t) = 9\,e^{-2t} - 2(4 + 9\,t)\,e^{-2t} = (9 - 8 - 18\,t)\,e^{-2t} = (1 - 18\,t)\,e^{-2t}$$

Calculamos también la aceleración en función del tiempo:

$$X''(t) = -18\,e^{-2t} - 2(1 - 18\,t)\,e^{-2t} = (-18 - 2 + 36\,t)\,e^{-2t} = (-20 + 36\,t)\,e^{-2t},$$

es decir

$$X''(t) = 4(9\,t - 5)\,e^{-2t}.$$

La velocidad de la masa será máxima cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando

$$t^* = \frac{5}{9} \approx 0,5555.$$

Evaluando la expresión de la velocidad en el instante de tiempo $t = t^*$ recién calculado, se obtiene

$$X'(t^*) = (1 - 18\,t^*)\,e^{-2t^*} = \left(1 - 18 \cdot \frac{5}{9}\right)\,e^{-2\cdot\frac{5}{9}} = (1 - 10)\,e^{-\frac{10}{9}} = -9\,e^{-\frac{10}{9}}$$

El signo negativo simplemente indica que la masa se está moviendo en dirección contraria a X positivo. La velocidad máxima se obtiene tomando el valor absoluto, es decir

$$X'_{\max} = \left|-9\,e^{-\frac{10}{9}}\right| \approx 2{,}96262 \text{ [m/s]}.$$