UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Pauta Evaluación 2

1. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $n > 2$, una aplicación lineal definida por:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ L(x) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(1, -1, \dots, -1).$$

   a) Pruebe que si $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de L asociado a un valor propio no nulo, entonces $x \in \langle \{(1, -1, \dots, -1)\} \rangle$.

   b) Demuestre que $\mathbb{R}^n = Ker(L) \oplus Ker(L + (n-2)Id)$.

Soln:

   a) Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector propio de L asociado a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego se tiene que:

$$L(x) = \lambda x \iff (x_1 + \cdots + x_n)(1, -1, \dots, -1) = \lambda x \implies x = \frac{(x_1 + \cdots + x_n)}{\lambda}(1, -1, \dots, -1).$$

   Como $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{(x_1+\cdots+x_n)}{\lambda} \in \mathbb{R}$, y así $x \in \langle \{(1, -1, \dots, -1)\} \rangle$.

   b) L es obviamente no inyectiva (por ejemplo $L(e_1) = L(e_2) = (1, -1, \dots, -1)$), entonces $\lambda = 0$ es un valor propio de L con:

$$S_{\lambda=0} = Ker(L - 0Id) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

   Así, $dim(S_{\lambda=0}) = n-1$. Por otro lado, $L(1, -1, \dots, -1) = (2-n)(1, -1, \dots, -1)$. De aquí, $\lambda = 2-n$ es también valor propio de L y por parte $a)$ se tiene que $dim(S_{\lambda=2-n}) = dim(Ker(L+(n-2)Id)) = 1$. Por lo tanto,

$$\mathbb{R}^n = Ker(L) \oplus Ker(L + (n-2)Id).$$

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $n > 2$ y $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Pruebe que si $B \subseteq V$ es un conjunto de vectores propios de T, entonces $W = \langle B \rangle$ es invariante con respecto a T. Deduzca que si T es diagonalizable, entonces para todo $i = 1, \dots, n-1$, existe W_i, subespacio vectorial de V, con $dim(W_i) = i$ e invariante con respecto a T.

   b) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal cuya matriz representante respecto a la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$ es:

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que T no es diagonalizable, y que sin embargo existen W_1, W_2 subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, invariantes con respecto a T, tales que $dim(W_1) = 1$ y $dim(W_2) = 2$.

Soln:

a) Sea B un conjunto de vectores propios de T y $w \in W$. Luego $\exists v_1, \ldots, v_m \in B, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tal que: $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$. Si $\forall i = 1 \ldots, m, T(v_i) = \lambda_i v_i$, entonces

$$T(w) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_m T(v_m) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m \in W.$$

De lo anterior se concluye que $T(W) \subseteq W$, es decir, W es invariante con respecto a T.

Supongamos ahora que T es diagonalizable con $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, formada por vectores propios de T. Luego, definiendo $\forall i = 1, \ldots, n-1, W_i = \langle \{v_1, \ldots, v_i\} \rangle$, entonces por lo anterior cada $W_i \subseteq V$ es invariante con respecto a T . Además, por ser $\{v_1, \ldots, v_i\}$ un conjunto l.i. para todo $i = 1 \ldots, n-1$ ($\{v_1, \ldots, v_i\} \subseteq B$ y B es l.i.), entonces $\forall i = 1, \ldots, n-1, dim(W_i) = i$.

b) Sea $p_{[T]_{BB}}(\lambda) = Det([T]_{BB} - \lambda I) = (-1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 9]$ el polinomio característico de $[T]_{BB}$. Luego, $\sigma([T]_{BB}) = \{-1, 5\}$, con $m_{-1} = 2$ y $m_5 = 1$. Además,

$$S_{\lambda=-1}([T]_{BB}) = Ker([T]_{BB} + I_3) = \langle \{(-1, 1, 0)\} \rangle,$$

y

$$S_{\lambda=5}([T]_{BB}) = Ker([T]_{BB} - 5I_3) = \langle \{(1, 1, 0)\} \rangle.$$

Como $dim(S_{\lambda=-1}([T]_{BB}) \neq m_{-1}$, entonces $[T]_{BB}$ no es diagonalizable, y por lo tanto T no es diagonalizable.

Por otro lado, $S_{\lambda=-1}(T) = Ker(T + Id) = \langle \{-1 + x\} \rangle$ y $S_{\lambda=-1}(T) = Ker(T - 5Id) = \langle \{1 + x\} \rangle$. De aqui, por parte a) se tiene que $W_1 = \langle \{-1 + x\} \rangle$ y $W_2 = \langle \{-1 + x, 1 + x\} \rangle$ son espacios invariantes con respecto a T tal que $dim(W_1) = 1$ y $dim(W_2) = 2$.

3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior. Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ diagonalizable simétrico se dice positivo si $\forall u \in V, \langle T(u), u \rangle \geq 0$. Pruebe que:

a) T es positivo si y sólo si todos los valores propios de T son no negativos.

b) Si T es positivo, entonces $\exists S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = S \circ S$.

Soln:

a) ($\Longrightarrow$) Supongamos T positivo. Sea v un vector propio de T asociado a λ, es decir $T(v) = \lambda v$. Entonces,

$$\langle T(v), v \rangle \geq 0 \Longleftrightarrow \langle \lambda v, v \rangle \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda \langle v, v \rangle \geq 0.$$

Como $v \neq \theta$, entonces $\langle v, v \rangle > 0$, y así $\lambda \geq 0$. Por lo tanto, los valores propios de T son no negativos.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que todos los valores propios de T son no negativos. Como T es diagonalizable, entonces $\exists B \subseteq V$ base de V de vectores propios de T. Notar que si u y v son vectores propios asociados a valores propios distintos λ_u y λ_v, y debido a que T es simétrico, entonces son ortogonales. En efecto, se tiene que:

$$\lambda_u \langle u, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \lambda_v \langle u, v \rangle \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 0. \tag{1}$$

Luego, dado $u \in V$, existen $v_1, \ldots, v_m \in B$, donde $\forall i = 1, \ldots, m,\ T(v_i) = \lambda_i v_i$, y existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, tal que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$. Por (1) y dado que $v_1, \ldots, v_m$ es un conjunto finito de vectores, existen $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m$ vectores propios de T ortonormales tal que $\forall i = 1, \ldots, m,\ T(\tilde{v}_i) = \lambda_i \tilde{v}_i$ y $\langle \{v_1, \ldots, v_m\} \rangle = \langle \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m\} \rangle$. Así, existen $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m \in \mathbb{K}$, tal que $u = \tilde{\alpha}_1 \tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_m \tilde{v}_m$.
Luego, se tiene que:

$$\langle T(u), u \rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \tilde{v}_i\right), \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j \tilde{v}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \lambda_i \tilde{v}_i, \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_j \tilde{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \lambda_i \tilde{\alpha}_j \langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tilde{\alpha}_i^2 \geq 0.$$

b) Supongamos que T es positivo. Luego, existe una base B de V formada por vectores propios de T tal que $\forall v \in B, T(v) = \lambda_v v$, con $\lambda_v \geq 0$. Definamos entonces $S \in \mathcal{L}(V)$ por:

$$\forall v \in B, S(v) = \sqrt{\lambda_v} \cdot v \quad \text{y} \quad \forall w = \alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_m v_m \in \langle B \rangle,\ S(w) = \alpha_1 S(v_1), \ldots, \alpha_m S(v_m).$$

Luego, obviamente S es lineal y $\forall v \in B, S \circ S(v) = S(\sqrt{\lambda} v) = \sqrt{\lambda} S(v) = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}\, v = T(v) \Longrightarrow S \circ S = T$.

JAL, semestre otoño de 2016.