UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Pauta Evaluación 3

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Pruebe que si A es simétrica e invertible, entonces A^2 es simétrica definida positiva.
   b) Muestre que si A es simétrica semidefinida positiva, entonces $A + Id$ es simétrica definida positiva.
   c) Pruebe que $\lambda \in \sigma(A) \iff (\lambda + \alpha) \in \sigma(A + \alpha Id)$. Concluya que si A es simétrica, entonces $\exists \beta \in \mathbb{R}, A + \beta Id$ es simétrica definida positiva.

2. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matriz cuyo polinomio característico es $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$.
   a) Pruebe que A es diagonalizable si y sólo si $Ker(A - Id)^2 = Ker(A - Id)$.
   b) Encuentre las matrices de Jordan similares a A cuando no es diagonalizable.
   c) Muestre que si A es simétrica, entonces A es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{2}(-A + 3Id)$.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal definida por:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ f(x, y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$
   a) Muestre que si A es simétrica definida positiva, entonces $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ invertible tal que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ f(x, y) = \langle Bx, By \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$
   b) Pruebe que si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $M_{f,B} = A$.
   c) Muestre que si $A = diag(1, \ldots, 1, -1) \in M_n(\mathbb{R})$, entonces existe una base $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que:
$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad f(v_i, v_i) = 0.$$
   ¿ Es f en este caso degenerada?

Soln:

1. *a*) (06 Ptos.) $(A^2)^t = (A^t)^2 = A^2 \implies A^2$ es simétrica. Por otro lado,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A^2 x = x^t A^t A x = (Ax)^t (Ax) = \langle Ax, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0.$$
   Además, $\langle Ax, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \iff Ax = \theta \iff x = \theta$. Esto último pues A es definida positiva y por consiguiente invertible.
   Por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq \theta, x^t A^2 x = \langle Ax, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$, luego A^2 es definida positiva.

b) (07 Ptos.) A es semidefinida positiva si y sólo si $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t Ax \geq 0$. Luego,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta,\ x^t(A + Id)x = x^t Ax + x^t x > 0.$$

Esto último pues $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \theta, x^t x > 0$. Por otro lado, $(A + Id)^t = A^t + Id^t = A + Id$. Por lo tanto, $(A + Id)$ es simétrica definida positiva.

c) (07 Ptos.)

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists v \neq \theta,\ Av = \lambda v \iff \exists v \neq \theta,\ Av + \alpha v = \lambda v + \alpha v \iff \tag{1}$$
$$\exists v \neq \theta,\ (A + \alpha Id)v = (\lambda + \alpha)v \iff (\lambda + \alpha) \in \sigma(A + \alpha Id). \tag{2}$$

Por otro lado, si A es simétrica, entonces $(A + \alpha Id)^t = A^t + \alpha Id^t = A + \alpha Id$. De aquí, $A + \alpha Id$ es simétrica. Por último, si $\lambda_m \in \sigma(A)$ es el valor propio más pequeño de A, escogiendo $\beta = -\lambda_m + 1$ se tiene que $\forall \lambda \in \sigma(A),\ \beta + \lambda > 0$ y por consiguiente $A + \beta Id$ es definida positiva.

2. *a*) (06 Ptos.) $\sigma(A) = \{1, 2\}$ con multiplicidades algebraicas de $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$.
Sabemos que A es diagonalizable si y sólo si $m_1 = g_1 = 2$ y $m_2 = g_2 = 1$, donde para $i \in \{1, 2\}$, $g_i = dim(S_i)$ es la multiplicidad geomtrica del valor propio i. Luego, A es diagonalizable si y sólo si $dim(Ker - Id) = 2$
Además, sabemos que $Ker(A - Id) \subseteq Ker(A - Id)^2$ y que

$$1 \leq dim(Ker(A - Id)) \leq dim(Ker(A - Id)^2) = m_1 = 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} A \text{ es diagonalizable } &\iff dim(Ker - Id) = 2 \iff dim(Ker - Id) = dim(Ker(A - Id)^2) \\ &\iff Ker(A - Id) = Ker(A - Id)^2. \end{aligned}$$

b) (07 Ptos.) Si A no es diagonalizable, entonces las cajas de Jordan asociadas a A posibles son: $J_A(1) \in M_2(\mathbb{R})$ y $J_A(2) \in M_1(\mathbb{R})$. Luego, la matriz de Jordan asociada a A puede ser una de las dos siguientes:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \vee \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) (07 Ptos.) Si A es simétrica, entonces es diagonalizable y $\sigma(A) = \{1, 2\}$. Luego, $Det(A) = 2 \neq 0$, i.e. A es invertible. Por otro lado, $A = PDP^t$ con $D = diag(1, 1, 2)$ y así $q(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$ es polinomio minimal de A, por consiguiente:

$$q(A) = P(D - Id)(D - 2Id)P^t = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^t = \theta.$$

Como $q(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, entonces

$$q(A) = A^2 - 3A + 2Id = \theta \iff Id = \frac{1}{2}(-A^2 + 3A) \implies A^{-1} = \frac{1}{2}(-A + 3Id).$$

3. *a*) (06 Ptos.) Por resultado visto en clase (listado 5) como los valores propios de A son todos positivos, entonces:

$$A = PDP^t = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^t = P\sqrt{D}^t\sqrt{D}P^t = B^t B,$$

donde $B = \sqrt{D}P^t$ es matriz invertible pues $|B| = |\sqrt{D}||P^t| \neq 0$. Esto último dado que $\sqrt{D} = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ con $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ ya que A es definida positiva. Además, P es invertible.

Así,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ f(x,y) = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, B^tBy\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle Bx, By\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

b) (07 Ptos.) Sea $B = \{e_i, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Luego,

$$\forall i, j = 1, \dots, n,\ (M_{f,B})_{ij} = f(e_i, e_j) = e_i^t A e_j = a_{ij}.$$

Por consiguiente, $M_{f,B} = A$.

c) (07 Ptos.) Recordar que f es degenerada si y sólo si $M_{f,B}$ no es invertible independiente de la base B. Por *b*), $M_{f,B} = A$ y $0 \notin \sigma(A)$, pues por hipótesis es definida positiva, luego sus valores propios son todos positivos. Así, $A = M_{f,B}$ es invertible y por consiguiente f no es degenerada.

Por otro lado, definiendo $\forall i = 1, \dots, n-1,\ v_i = e_i + e_n$ y $v_n = -e_1 + e_n$ se tiene que:

$$\forall i = \dots, n-1,\ f(v_i, v_j) = (e_i + e_n)^t A(e_i + e_n) = e_i^t A e_i + 2e_i^t A e_n + e_n^t A e_n = 1 + 0 - 1 = 0$$

y

$$f(v_n, v_n) = (-e_1 + e_n)^t A(-1e_1 + e_n) = e_1^t A e_1 - 2e_1^t A e_n + e_n^t A e_n = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Es decir,

$$\forall i, j = 1 \dots, n,\ f(v_i, v_j) = 0.$$

Además, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i (ejercicio) y por lo tanto base de $\mathbb{R}^n$.

JAL, semestre otoño de 2022.