Números reales.

- Conjuntos ordenados.
- Supremo e ínfimo.
- Propiedad del supremo.
- Cuerpos.
- Cuerpos ordenados.
- Números reales.

Conjuntos ordenados.

Def: Un **orden** en un conjunto S es una relación, que denotamos por $<$, que satisface las dos siguientes propiedades:

- **Tricotomía:** $\forall x, y \in S,$ se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x.$$

- **Transitividad:**

$$\forall x, y, z \in S, \qquad x < y \ \text{ e } \ y < z \implies x < z.$$

Un **conjunto ordenado** es un conjunto dotado de una relación de orden.

Ejemplos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con el orden usual son conjuntos ordenados.

Notación:

- $x > y$ si $y < x$.
- $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$.
- $x \geq y$ si $x > y$ o $x = y$.

Supremo e ínfimo.

Def: Sea S un conjunto ordenado y $E \subset S$.

- E es **acotado superiormente** si $\exists \beta \in S: \quad \forall x \in E,\ x \leq \beta$.

  En tal caso decimos que β es una **cota superior** de E.

- E es **acotado inferiormente** si $\exists \gamma \in S: \quad \forall x \in E,\ x \geq \gamma$.

  En tal caso decimos que γ es una **cota inferior** de E.

- α es el **supremo** de E si es la **cota superior mínima;** vale decir, si

  i) α es cota superior de E y

  ii) $\forall$ cota superior β de E, $\beta \geq \alpha$.

  En tal caso denotamos $\boldsymbol{\alpha = \sup E}$.

- κ es el **ínfimo** de E si es la **cota inferior máxima;** vale decir, si

  i) κ es cota inferior de E y

  ii) $\forall$ cota inferior γ de E, $\gamma \leq \kappa$.

  En tal caso denotamos $\boldsymbol{\kappa = \inf E}$.

Prop.: Si un conjunto tiene supremo, éste es único (idem con el ínfimo).

Dem.: **Ej.**

Ejemplo 1: Sea $E := \{q \in \mathbb{Q} : \ 0 < q \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$.

Ej.: Verificar que $\sup E = 1$ e $\inf E = 0$.

Notemos que en este caso $\sup E = 1 \in E$, en cuyo caso 1 no sólo es el supremo de E, sino el **máximo**: $\max E = 1$.

Cada vez que un conjunto tenga máximo (vale decir, que el conjunto tenga una cota superior que pertenezca al conjunto), el supremo del conjunto es el máximo.

También es válida la propiedad análoga para el ínfimo y el **mínimo** de un conjunto.

Sin embargo, un conjunto puede tener supremo sin que tenga máximo o, análogamente, puede tener ínfimo sin que tenga mínimo. Por ejemplo, $\inf E = 0 \notin E$, de manera que E tiene ínfimo pero no tiene mínimo.

Ejemplo 2: Sea $E := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$.

Veremos que $\sup E = 1$ e $\inf E = 0.$

Sol.: Por un lado, $\max E = 1 \implies \sup E = 1.$

En cambio E no tiene mínimo. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ no puede ser el mínimo de E, pues

$$\frac{1}{n+1} \in E \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Sin embargo, E tiene ínfimo. En efecto, $\inf E = 0,$ pues

i) 0 es cota inferior de E y

ii) $\forall \gamma \in \mathbb{Q} : \gamma > 0,$ sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $\gamma = \frac{m}{n}$, entonces

$$\frac{1}{n+1} \in E \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} = \gamma.$$

Por lo tanto, si $\gamma > 0,$ entonces γ no es cota inferior de E.

De manera equivalente, $\forall$ cota inferior γ de $E,$ $\gamma \leq 0$.

Por lo tanto, 0 es la mayor cota inferior de E, vale decir, $\inf E = 0.$

Ejemplo 3: Sean $A := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$ y $B := \{q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 > 2\}$, subconjuntos del conjunto ordenado $\mathbb{Q}$.

Ya vimos que A no tiene máximo y B no tiene mínimo.

Veamos que, más aún, A no tiene supremo y B no tiene ínfimo en $\mathbb{Q}$.

Sol.: Demostraremos lo primero; lo segundo se demuestra de manera análoga.

Primero, veamos que $\forall p \in A,\ \forall q \in B,\ p < q$.

En efecto, $p^2 < 2 < q^2 \implies q^2 - p^2 > 0$. Entonces, como $q + p > 0$,

$$(q+p)(q-p) = q^2 - p^2 > 0 \implies (q-p) = \frac{q^2-p^2}{q+p} > 0 \implies p < q.$$

Entonces,

- todos los elementos de B son cotas superiores de A.
- A no tiene máximo $\implies$ ningún elemento de A es cota superior de A.
- $\implies$ B es el conjunto de **todas** las cotas superiores de A.
- B no tiene mínimo $\implies$ A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Propiedad del supremo.

Def.: Un conjunto ordenado S satisface la **propiedad del supremo** si

$$\forall E \subset S: \ E \neq \emptyset \text{ y } E \text{ acotado superiormente, } \exists \sup E \in S.$$

Análogamente, S satisface la **propiedad del ínfimo** si

$$\forall E \subset S: \ E \neq \emptyset \text{ y } E \text{ acotado inferiormente, } \exists \inf E \in S.$$

El ejemplo anterior muestra que $\mathbb{Q}$ no satisface, ni la propiedad del supremo, ni la del ínfimo.

De hecho, cualquier conjunto ordenado, o bien satisface ambas propiedades simultáneamente (la del supremo y la del ínfimo), o bien no satisface ninguna de las dos, como consecuencia del siguiente teorema.

Teor.: Sea S un conjunto ordenado que satisface la propiedad del supremo.
Sea $B \subset S: \ B \neq \emptyset$ y B es acotado inferiormente.
Sea L el conjunto de todas las cotas inferiores de B.
Entonces, $\exists \alpha := \sup L \in S$ y $\alpha = \inf B$.
En particular, S satisface la propiedad del ínfimo.
Vale un resultado análogo para conjuntos S que satisfacen la propiedad del ínfimo.

Dem.: Ver la demostración del Teor. 1.11 del texto de Rudin.

Cuerpos.

Def.: Un **cuerpo** es un conjunto F dotado de dos operaciones, **suma** ($+$) y **multiplicación** ($\cdot$), que satisfacen los siguientes axiomas:

- **Axiomas de la suma.**
  - **Ley interna:** $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F.$
  - **Conmutatividad:** $\forall x, y \in F, \quad x + y = y + x.$
  - **Asociatividad:** $\forall x, y, z \in F, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$
  - **Existencia de neutro:** $\exists\, 0 \in F : \quad \forall x \in F, \quad 0 + x = x.$
  - **Existencia de inverso:** $\forall x \in F, \quad \exists -x \in F : \quad x + (-x) = 0.$
- **Axiomas de la multiplicación.**
  - **Ley interna:** $\forall x, y \in F, \quad xy \in F.$
  - **Conmutatividad:** $\forall x, y \in F, \quad xy = yx.$
  - **Asociatividad:** $\forall x, y, z \in F, \quad (xy)\, z = x\, (yz).$
  - **Existencia de neutro:** $\exists\, 1 \in F,\ 1 \neq 0 : \ \forall x \in F, \quad 1x = x.$
  - **Existencia de inverso:** $\forall x \in F : \ x \neq 0,\ \exists\, 1/x \in F : \quad x\, (1/x) = 1.$
- **Distributividad:** $\forall x, y, z \in F, \quad x\, (y + z) = xy + xz.$

Notación: $x - y, \quad x/y, \quad x + y + z, \quad xyz, \quad 2x,\ 3x, \ \cdots, \quad x^2,\ x^3, \ \cdots$

denotan, respectivamente,

$$x+(-y)\,,\ x\,(1/y)\,,\ (x+y)+z,\ (xy)\,z,\ x+x,\ x+x+x, \cdots,\ xx,\ xxx, \cdots$$

Prop.: Los axiomas de la suma implican:

- **Cancelación:** $x + y = x + z \implies y = z$;
- **Unicidad del neutro:** $x + y = x \implies y = 0$;
- **Unicidad del inverso:** $x + y = 0 \implies y = -x$;
- **Involución:** $-(-x) = x$.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Prop.: Los axiomas de la multiplicación implican:

- **Cancelación:** Si $x \neq 0$, $xy = xz \implies y = z$;
- **Unicidad del neutro:** Si $x \neq 0$, $xy = x \implies y = 1$;
- **Unicidad del inverso:** Si $x \neq 0$, $xy = 1 \implies y = 1/x$;
- **Involución:** Si $x \neq 0$, $1/(1/x) = x$.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Prop.: Los axiomas de cuerpo implican:

- $\forall x \in F, \quad 0x = 0$;
- $\forall x, y \in F, \quad x \neq 0$ e $y \neq 0 \implies xy \neq 0$;
- $\forall x, y \in F, \quad (-x)\,y = -\,(xy) = x\,(-y)$.
- $\forall x, y \in F, \quad (-x)\,(-y) = xy$.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Cuerpos ordenados.

Def.: Un **cuerpo ordenado** es un cuerpo F con suma + y multiplicación $\cdot$ en el que está definida una relación de orden $<$, que satisface los siguientes axiomas:

- $\forall x, y, z \in F, \quad y < z \implies x + y < x + z;$
- $\forall x, y \in F, \quad x > 0$ e $y > 0 \implies xy > 0.$

Si $x > 0$ decimos que x es **positivo** y si $x < 0$ decimos que x es **negativo**.

Ejemplo: $\mathbb{Q}$, con las operaciones y el orden usuales, es un cuerpo ordenado.

Prop.: En todo cuerpo ordenado se cumplen las siguientes propiedades:

- $x > 0 \implies -x < 0$ y viceversa;
- $x > 0$ e $y < z \implies xy < xz;$
- $x < 0$ e $y < z \implies xy > xz;$
- $x \neq 0 \implies x^2 > 0$; en particular, $1 > 0$;
- $0 < x < y \implies 0 < 1/y < 1/x.$

Dem.: **Ej.**

Números reales.

Def.: Dados dos cuerpos ordenados F y G, F es un **subcuerpo ordenado** de G si $F \subset G$ y las operaciones y el orden entre elementos de F son los mismos en F y en G.

Teor.: Existe un único cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado y que satisface la propiedad del supremo.

Dem.: Para demostrar la existencia, ver el apéndice del Cap. 1 del texto de Rudin, donde se construye $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

Para la unicidad, se puede demostrar que dos cuerpos ordenados que contienen a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado y satisfacen la propiedad del supremo, son **isomorfos** (vale decir, se pueden identificar los elementos de un cuerpo y del otro de manera tal que se preserven las operaciones y el orden).