UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218), Sec. 2
Listado $N°4$, parte 2 (EDO lineales no homogéneas).

Problemas a resolver en práctica

1. Determine un operador diferencial lineal L **con coeficientes constantes**, de menor orden posible, de modo que su nucleo $\mathrm{Ker}(L)$ contenga a las funciones $y_1(x) = e^{-x}$ y $y_2(x) = x^2$. Escriba la correspondiente EDO lineal homogénea.

   Solución: Sean L_1 y L_2 operadores diferenciales con coeficientes constantes, de menor orden posible, tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$. Entonces, el producto de los anuladores L_1L_2 anula la suma $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. En efecto,

$$L_1L_2[y_1 + y_2] = \underbrace{L_1L_2}_{\text{comutan}}[y_1] + L_1L_2[y_2] = L_2\underbrace{L_1[y_1]}_{=0} + L_1\underbrace{L_2[y_2]}_{=0} = 0\ ,$$

   donde usamos que L_1 y L_2 comutan entre si pues tienen coeficientes constantes. Un anulador de $y_1(x) = e^{-x}$ de menor orden es $L_1 = D+1$ y un anulador de $y_2(x) = x^2$ de menor orden es $L_3 = D^3$. Luego, un anulador de $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ de menor orden con coeficientes constantes es:

$$L = L_1L_2 = (D + 1)D^3.$$

   La correspondiente EDO lineal homogénea que resulta es de cuarto orden, a saber

$$y^{(iv)}(x)\ +\ y^{(iii)}(x)\ =\ 0.$$

   Observaciones:

   (1) En este caso una base para el espacio solución de la EDO lineal homogénea que resulta es $B = \{1,\, x,\, x^2,\, e^{-x}\}$.

   2) Como se aprecia el costo de tener un operador a coeficientes constantes que cumple lo solicitado, es que su orden debe ser, al menos, cuatro. Compare con el Problema 1 del listado 4, parte 1, donde hallamos un anulador a coeficientes variables de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de orden 2.

2. (a) Muestre que para cada función derivable $z(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$D[e^{\lambda x}z](x) = e^{\lambda x}(D + \lambda)[z](x)\ x \in \mathbb{R}\ .$$

donde $D = \frac{d}{dx}$. Mas generalmente, muestre que si $p(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0$ es un polinomio y z una función n veces derivable, luego

$$p(D)[e^{\lambda x} z](x) = e^{\lambda x} p(D+\lambda)[z](x) \quad , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

(b) Aplicando la fórmula anterior, determine un anulador para cada uno de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = e^{6x}(x^3 + 4x + 10)$

(ii) $f(x) = e^{-4x} \operatorname{sen}(5x)$

(iii) $f(x) = e^{-4x} x^2 \operatorname{sen}(4x) + e^{-4x} x \cos(4x)$

3. Resolver aplicando método de aniquiladores:

a) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$

b) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + t$

c) $y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0.$

4. Resolver aplicando método de variación de parámetros:

a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$

b) $2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = x^{-1}\,\mathrm{e}^x, \quad y(1) = 0,\, y'(1) = 0$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Determine un anulador para cada una de las siguientes funciones:

(i) $k(x) = \cos(x) + x$

(ii) $k(x) = \operatorname{sen}(3x) + e^{-4x}$

(iii) $k(x) = x \operatorname{sen}(3x) + x^2 e^{-4x}$

(iv) $k(x) = x^2 e^{-4x} \cos(3x)$

2. Resolver usando aniquiladores:

(i) $y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$,

(ii) $y'' + 3y' - 10y = \mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{-5x}$,

(iii) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{-2x}$.

3. Usando el método de variación de parámetros, resuelva:

a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\ln(x), \quad y(1) = 0,\, y'(1) = 0.$

b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}.$

4. Combinar los métodos de anuladores y de variación de parámetros para resolver el PVI
$$\begin{aligned} 3y'' - 6y' + 30y &= 15\sin(x) + e^x \tan(3x) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

5. Determine la solución general de (note que L es a coeficientes variables):
$$(7-2x)y''(x) - 4(x-4)y'(x) + 4y(x) = 6\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,(2\,x-7)^3,$$
sabiendo que el Ker del operador asociado a la EDO tiene base dada por $B := \{y_1(x) := x-4,\ y_2(x) := \mathrm{e}^{-2\,x}\}$.

09/06/2020 MDT/JMS/CMG/DS//jms/ds/ahn