UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 4 ALGEBRA III 525201-0 - Comentarios

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada problema tiene un puntaje máximo de **10 puntos** cada una.

Problema 1. Considere la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de no serlo, determine su forma canónica de Jordan, si existe. Caso contrario, determine la forma de Jordan real asociada. Identificar el polinomio minimal de A en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, indicando sus factores primos irreducibles.

Desarrollo: Realizando los cálculos correspondientes, se obtiene el polinomio característico de A, el cual es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{f_4+f_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{f_2+f_4}{\overset{f_1+f_4}{=}} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2+4) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda^2+4)\,.$$

Luego, los valores propios reales de A son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$, ambos de multiplicidad (algebraica) 1. En vista que la suma de multiplicidades no coincide con el orden de A, se infiere que A no admite Forma de Jordan en el cuerpo $\mathbb{R}$, pero si admite forma de Jordan real. Para esto, consideramos A como un elemento de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Como estamos en el cuerpo complejo, tenemos que $\sigma(A) := \{3, 1, 2i, -2i\} \subseteq \mathbb{C}$, siendo todos los valores propios distintos. En consecuencia, A es diagonalizable en $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, y la matriz diagonal asociada será la Forma canónica de Jordan de A en el cuerpo $\mathbb{C}$. A continuación procedemos a determinar los espacios propios asociados a cada valor propio.

Espacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$:

$$E_1(\lambda_1) := \mathrm{Ker}\big(A - 3\,I\big) := \left\{ w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1} \;:\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Realizando operaciones elementales por filas, se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1-f_2}{\overset{f_4+f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_1+2f_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_3-f_1/4}{\overset{f_2+f_1/2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 \\ -1 & 0 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, resolviendo el sistema homogéneo equivalente, se deduce que $E_1(\lambda_1) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Un vector propio de A asociado a λ_1 es $v_1 := \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}$.

Espacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$:

$$E_1(\lambda_2) := \mathrm{Ker}\big(A - I\big) := \left\{ w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Realizando operaciones elementales por filas, se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_2-f_1}{\overset{f_4+f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3+2f_2}{\overset{f_1-f_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_4-2f_2}{\overset{f_4+2f_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deduce así que $E_1(\lambda_2) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Un vector propio de A asociado a λ_2 es $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Espacio propio asociado a $\lambda_3 = 2i$:

$$E_1(\lambda_3) := \mathrm{Ker}\big(A - 2i\, I\big) := \left\{ w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-2i & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1-2i & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Realizando operaciones elementales por filas, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-2i & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1-2i & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3-2i \end{pmatrix} \underset{(3-2i)^{-1}f_4}{\overset{f_4+f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-2i & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2+f_4}{\overset{f_1+f_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-2i & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_1-f_3}{\overset{-(1-2i)f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -(1-2i) & -3 & 0 \\ 0 & 1-2i & 3 & 0 \\ (1-2i) & (1-2i) & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3-f_2}{\overset{f_1+f_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 3 & 0 \\ 1-2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se infiere que $E_1(\lambda_3) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2+4i \\ 3+6i \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Un vector propio de A asociado a λ_3 es

$v_3 := \begin{pmatrix} 2+4i \\ 3+6i \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Espacio propio asociado a $\lambda_4 = -2i$: Como $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$ y A es a coeficientes reales, se verifica que $E_1(\lambda_4) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2-4i \\ 3-6i \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Un vector propio de A asociado a λ_4 es $v_4 := \begin{pmatrix} 2-4i \\ 3-6i \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Luego, construyendo la matriz

$$Q := \Big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, \mathrm{Re}(v_3) \,|\, \mathrm{Im}(v_3)\Big) = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 & 4 \\ -7 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 22 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene la forma de Jordan real de A:

$$J_{\mathbb{R}} = Q^{-1}\,A\,Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el polinomio minimal de A en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ es $q(x) = (x-1)(x-3)(x-2i)(x+2i)$, mientras que en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es $\tilde{q}(x) = (x-1)(x-3)(x^2+4)$. Los factores irreducibles de q en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ son: $x-1$, $x-3$ y x^2+4.

Problema 2. Considere la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Aplique las herramientas dadas en el Ejercicio 12 del Listado 6, y determine e^A de manera exacta y explícita.

Desarrollo: Comenzamos calculando el espectro de A, cuyos elementos son raíces del polinomio característico asociado:

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) \overset{f_4 - f_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{f_1 - 2f_4}{\overset{f_2 - f_4}{=}} \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)^2\,.$$

De aquí se desprende que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, con $m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} = 2$. En vista que $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} = 4$, se tiene garantizado que A admite forma canónica de Jordan en $\mathbb{R}$. Para ello, determinamos a continuación la sucesión de Núcleos iterados de A asociados a cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 0$: Tenemos

$$E_1(\lambda_1) := \mathrm{Ker}(A) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \dots = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$E_2(\lambda_1) := \mathrm{Ker}(A^2) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \dots = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Sean $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, los cuales verifican: $A\,v_1 = \theta = 0\,v_1$ y $A\,v_2 = v_1 = 1\,v_1 + 0\,v_2$.

Para $\lambda_2 = 1$: Tenemos

$$E_1(\lambda_2) := \mathrm{Ker}(A - I) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \dots = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$E_2(\lambda_2) := \mathrm{Ker}\big((A - I)^2\big) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \dots = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Sean $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, los cuales verifican:
$(A - I)\, v_3 = \theta \Leftrightarrow A\, v_3 = 1\, v_3$ y $(A - I)\, v_4 = v_3 \Leftrightarrow A\, v_4 = 1\, v_3 + 1\, v_4$.
Definiendo entonces

$$P := \Big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,|\, v_4 \Big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

se deduce que

$$J := P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\, D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, N}.$$

Ahora, aplicando las propiedades referidas en el Listado 6, se tiene

$$\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{P\, J\, P^{-1}} = P\, \mathrm{e}^{J}\, P^{-1}, \tag{1}$$

y como $DN = ND$ (¡Verificar!)

$$\mathrm{e}^{J} = \mathrm{e}^{D+N} = \mathrm{e}^{D}\, \mathrm{e}^{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{N}. \tag{2}$$

Como $N \neq \Theta$ y $N^2 = \Theta$, se infiere que N es Matriz nilpotente, con índice de nilpotencia 2, se desprende

$$\mathrm{e}^{N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

De esta manera, reemplazando (3) en (2), y éste a su vez en (1), se tiene

$$\mathrm{e}^{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 1-\mathrm{e} & \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ \mathrm{e} & -\mathrm{e} & \mathrm{e}+1 & -1 \\ \mathrm{e} & -\mathrm{e} & \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, provisto de un producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$ y U un subespacio de V. Pruebe que U es T-invariante si y sólo si $U^{\perp}$ es T^*-invariante.
Demostración: Se hará por doble implicación.
$(\Rightarrow)$: Hipótesis: U es T-invariante, i.e. $T(U) \subseteq U$. Sea $z \in T^*(U^{\perp})$, lo cual significa que $\exists\, w \in U^{\perp}$: $z = T^*(w)$. Considerando $v \in U$, tenemos

$$\langle v, z \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle \underbrace{T(v)}_{\in\, T(U) \,\subseteq\, U}, \underbrace{w}_{\in\, U^{\perp}} \rangle = 0.$$

De esta manera se deduce que $\forall\, v \in U$: $\langle z, v \rangle = \overline{\langle v, z \rangle} = 0$, lo que equivale a decir que $z \in U^{\perp}$. Luego, como $z \in T^*(U^{\perp})$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $T^*\big(U^{\perp}\big) \subseteq U^{\perp}$.

$(\Leftarrow)$: Hipótesis: $T^*\big(U^\perp\big) \subseteq U^\perp$. Sea $z \in T(U)$, lo cual significa que $\exists\, w \in U \,:\, z = T(w)$. Considerando $v \in U^\perp$, tenemos

$$\langle z, v\rangle \,=\, \langle T(w), v\rangle \,=\, \langle \underbrace{w}_{\in U}, \underbrace{T^*(v)}_{\in T^*(U^\perp) \subseteq U^\perp} \rangle \,=\, 0\,.$$

De esta manera se deduce que $\forall\, v \in U^\perp \,:\, \langle z, v\rangle = 0$, lo que equivale a decir que $z \in \big(U^\perp\big)^\perp = U$. Luego, como $z \in T(U)$ es fijo pero arbitrario, concluye que $T\big(U\big) \subseteq U$.
Comentario: la gran mayoría olvidó indicar los vectores a considerar, para dar inicio a cada demostración. Otros además omitieron justificaciones significativas (por ejemplo, la deducción que un vector es ortogonal a un subespacio, no sólo a un vector).

Problema 4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ definido, para cualquier $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3$, por $T(z_1, z_2, z_3) := (z_3, 2z_1, 3z_2)$. Determine explícitamente una isometría $S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.
Desarrollo: Calculamos primero T^*. Sean $z := (z_1, z_2, z_3), x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$. Entonces, considerando el producto interno usual en $\mathbb{K}^3$, resulta

$$\begin{aligned}\langle T(z), x\rangle &= \langle T(z_1, z_2, z_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle \,=\, \langle (z_3, 2z_1, 3z_2), (x_1, x_2, x_3)\rangle \,=\, z_3\overline{x_1} + 2z_1\overline{x_2} + 3z_2\overline{x_3} \\ &= \langle (z_1, z_2, z_3), (2x_2, 3x_3, x_1)\rangle \,=\, \langle z, T^*(x)\rangle\,,\end{aligned}$$

de donde se infiere que $\forall\, x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \,:\, T^*(x) := (2x_2, 3x_3, x_1)$.
Ahora calculamos T^*T: Sea $z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3$. Tenemos

$$\big(T^*T\big)(z) \,=\, T^*\big(T(z_1, z_2, z_3)\big) \,=\, T^*(2z_2, 3z_3, z_1) \,=\, (4z_1, 9z_2, z_3)\,.$$

Considerando $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^3$, se verifica:

$$\big(T^*T\big)(e_1) \,=\, 4e_1\,,\; \big(T^*T\big)(e_2) \,=\, 9e_2\,,\; \big(T^*T\big)(e_3) \,=\, e_3\,,$$

lo cual nos dice que $\sigma\big(T^*T\big) = \{4, 9, 1\}$, todos simples, y por tanto se deduce que (Propiedad de la Descomposición de valores singulares) $\forall\, z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3 \,:\, \sqrt{T^*T}(z) := (2z_1, 3z_2, z_3)$, define la aplicación lineal Raíz cuadrada positiva de T^*T.
En efecto, se verifica que $\big(\sqrt{T^*T}\big)^* = \sqrt{T^*T}$, y

$$\begin{aligned}&\forall\, z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3 \,:\, \big(\sqrt{T^*T} \circ \sqrt{T^*T}\big)(z) \,=\, \sqrt{T^*T}\big(2z_1, 3z_2, z_3\big) \,=\, (4z_1, 9z_2, z_3) \,=\, \big(T^*T\big)(z) \\ &\forall\, z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3 \,:\, \langle \sqrt{T^*T}(z), z\rangle \,=\, \langle (2z_1, 3z_2, z_3), (z_1, z_2, z_3)\rangle \,=\, 2\,|z_1|^2 + 3\,|z_2|^2 + |z_3|^2 \,\geq\, 0\,.\end{aligned}$$

Teniendo presente el Teorema de Descomposición Polar, $\exists\, S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$, una isometría, tal que $T = S\sqrt{T^*T}$. Luego, se cumple para $z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3$:

$$T(z) \,=\, (S\sqrt{T^*T})(z) \,\Rightarrow\, S(2z_1, 3z_2, z_3) \,=\, (z_3, 2z_1, 3z_2)\,.$$

Introduciendo ahora $x := (x_1, x_2, x_3) = (2z_1, 3z_2, z_3)$, resulta $S(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$. De esta manera, queda definida la aplicación S, la cual satisface:

$$\forall\, x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \,:\, ||S(x)||_2 \,=\, ||(x_3, x_1, x_2)||_2 \,=\, ||x||_2\,,$$

i.e. S es una isometría.
Comentario: la gran mayoría abordó el problema considerando las matrices representantes. Pero algunos no indicaron qué base consideraron, y otros además no explicaron su desarrollo (sólo cálculos), omitiendo justificaciones significativas.

Problema 5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) := (4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$. Considere $B_1 := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y $B_2 := \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Definir explícitamente los funcionales lineales $T'(\varphi_1)$ y $T'(\varphi_2)$.

Desarrollo: Primero, caractericemos los elementos de B_2. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, resulta:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y,z) &= \psi_1(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3) = x\,\psi_1(e_1) + y\,\psi_1(e_2) + z\,\psi_1(e_3) = x \\
\psi_2(x,y,z) &= \psi_2(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3) = x\,\psi_2(e_1) + y\,\psi_2(e_2) + z\,\psi_2(e_3) = y \\
\psi_3(x,y,z) &= \psi_3(x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3) = x\,\psi_3(e_1) + y\,\psi_2(e_2) + z\,\psi_3(e_3) = z\,.
\end{aligned}$$

Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Aplicando la definición de aplicación dual, tenemos:

$$\begin{aligned}
\big(T'(\varphi_1)\big)(x,y,z) &:= \varphi_1(T(x,y,z)) = \varphi_1(4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \\
&= \varphi_1\big((4x+5y+6z)\,(1,0) + (7x+8y+9z)\,(0,1)\big) \\
&= (4x+5y+6z)\,\varphi_1(1,0) + (7x+8y+9z)\,\varphi_1(0,1) \\
&= 4x+5y+6z = \big(4\,\psi_1 + 5\,\psi_2 + 6\,\psi_3\big)(x,y,z)\,,
\end{aligned}$$

y de esta manera se deduce que $T'(\varphi_1) = 4\,\psi_1 + 5\,\psi_2 + 6\,\psi_3$.
Similarmente,

$$\begin{aligned}
\big(T'(\varphi_2)\big)(x,y,z) &:= \varphi_2(T(x,y,z)) = \varphi_2(4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \\
&= \varphi_2\big((4x+5y+6z)\,(1,0) + (7x+8y+9z)\,(0,1)\big) \\
&= (4x+5y+6z)\,\varphi_2(1,0) + (7x+8y+9z)\,\varphi_2(0,1) \\
&= 7x+8y+9z = \big(7\,\psi_1 + 8\,\psi_2 + 9\,\psi_3\big)(x,y,z)\,,
\end{aligned}$$

y de esta manera se deduce que $T'(\varphi_2) = 7\,\psi_1 + 8\,\psi_2 + 9\,\psi_3$.

Problema 6. Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada una, y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demostrar que $T' = \Theta$ si y sólo si $T = \Theta$.
Demostración: Se hará por doble implicación:
($\Rightarrow$) Hipótesis: $T' = \Theta \in \mathcal{L}(W', V')$.
Teniendo presente que $\dim(W') = \dim(W)$, pues W es de dimensión finita, sea $\{\psi_j\}_{j=1}^{\dim(W)}$ la base dual de la base canónica $B := \{e_j\}_{j=1}^{\dim(W)}$ de W. Fijamos ahora $j \in \{1, ..., \dim(W)\}$. Tenemos $T'(\psi_j) = \Theta_{V'}$. Luego, para cualquier $z \in V$ resulta

$$\Big(T'(\psi_j)\Big)(z) = \Theta_{V'}(z) = 0 \Rightarrow \psi_j(T(z)) = 0 \Rightarrow [T(z)]_j = 0\,.$$

De esta manera, se deduce $\forall\, j \in \{1, ..., \dim(W)\} : [T(z)]_j = 0$, lo cual conduce a asegurar que $\forall\, z \in V : T(z) = \theta_W$, i.e. $T = \Theta \in \mathcal{L}(V, W)$.
Una segunda forma: Aplicando propiedades demostradas en clases:

$$\mathrm{Im}(T) = {}^\circ\big(\mathrm{Im}(T)^\circ\big) = {}^\circ\big(\mathrm{Ker}(T')\big) = {}^\circ\big(W'\big) = \{z \in W \,|\, \forall\, F \in W' : F(z) = 0\}\,.$$

Luego, resta probar que $\{z \in W \,|\, \forall\, F \in W' : F(z) = 0\} = \{\theta_W\}$, lo cual puede establecerse considerando una base (dual) de W', y razonar como en la demostración previa. De esta manera, se tendría que $\mathrm{Im}(T) = \{\theta_W\}$, con lo cual $r(T) = 0$ y entonces $n(T) = \dim(V)$. Esto último permite concluir (¿Por qué?) que $T = \Theta \in \mathcal{L}(V, W)$.
Una tercera estrategia: Aplicando una relación entre la nulidad de T' y T (pues V y W son de dimensión finita cada uno), también demostrada en clases:

$$\underbrace{n(T')}_{=\dim(W')=\dim(W)} = n(T) + \dim(W) - \dim(V) \Rightarrow n(T) = \dim(V) \Rightarrow T = \Theta \in \mathcal{L}(V, W)\,.$$

($\Leftarrow$) Hipótesis: $T = \Theta \in \mathcal{L}(V, W)$.
Para $S \in W'$ (fija pero arbitraria), se tiene

$$T'(S) = S \circ T = S \circ \Theta = \Theta_{V'}\,.$$

De esta manera ha quedado establecido que $\forall\, S \in W' : T'(S) = \Theta_{V'}$, i.e. $T' = \Theta \in \mathcal{L}(W', V')$.
Una segunda estrategia: Aplicando una relación entre la nulidad de T' y T (pues V y W son de dimensión finita cada uno), también demostrada en clases:

$$n(T') = \underbrace{n(T)}_{=\dim(V)} + \dim(W) - \dim(V) \Rightarrow n(T') = \underbrace{\dim(W) = \dim(W')}_{(\text{¿Por qué?})} \Rightarrow T' = \Theta \in \mathcal{L}(W', V')\,.$$

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 20.08.2020

RBP/rbp 06.08.2020