

Continuidad. Discontinuidades.

- Continuidad y conectividad.
- Límites laterales.
- Discontinuidades.
- Funciones monótonas.
- Límites infinitos y en el infinito.

Continuidad y conectividad.

Teor.: Sean $f : X \rightarrow Y$ continua y $E \subset X$ conexo.
Entonces, $f(E) \subset Y$ es conexo.

Dem.: Por el absurdo, supongamos que $f(E)$ es desconexo.

$$\text{Entonces, } \exists A, B \subset Y : \begin{cases} f(E) = A \cup B, \\ A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset. \end{cases}$$

$$\text{Sean } \begin{cases} G := f^{-1}(A) \cap E, \\ H := f^{-1}(B) \cap E. \end{cases} \quad \text{Veremos que } \{G, H\} \text{ es una separaci3n de } E.$$

$$\text{i) } G \cup H = [f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)] \cap E = \underbrace{[f^{-1}(A \cup B)]}_{=f^{-1}(f(E)) \supset E} \cap E = E.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(E) = A \cup B, \text{ con } A \neq \emptyset &\implies \exists y \in A \subset f(E) \\ &\implies \exists x \in E : y = f(x) \in A \implies \exists x \in E \cap f^{-1}(A) =: G \implies G \neq \emptyset. \end{aligned}$$

La demostraci3n de que $H \neq \emptyset$ es an3loga.

$$\text{iii) } \begin{cases} \overline{A} \text{ cerrado y } f \text{ continua} \implies f^{-1}(\overline{A}) \text{ cerrado.} \\ A \subset \overline{A} \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A}). \end{cases}$$

$$\implies f^{-1}(\overline{A}) \text{ es un cerrado que contiene a } f^{-1}(A) \implies f^{-1}(\overline{A}) \supset \overline{f^{-1}(A)}.$$

$$\text{Entonces, } \overline{G} = \overline{f^{-1}(A) \cap E} \subset \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$$

$$\text{y como } H := f^{-1}(B) \cap E \subset f^{-1}(B), \text{ entonces}$$

$$\overline{G} \cap H \subset f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{\overline{A} \cap B}_{=\emptyset}) = \emptyset.$$

La demostración de que $G \cap \overline{H} \neq \emptyset$ es análoga.

$$\text{Entonces, } \begin{cases} E = G \cup H, \\ G \neq \emptyset, \quad H \neq \emptyset, \\ \overline{G} \cap H = G \cap \overline{H} = \emptyset. \end{cases} \implies E \text{ desconexo. } \triangleright=\triangleleft \quad \square$$

Teor. [de los valores intermedios o de Bolzano]: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(a) < f(b)$. Entonces, $\forall c \in (f(a), f(b))$, $\exists x \in (a, b) : f(x) = c$.

Dem.: $[a, b]$ es conexo $\implies f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ es conexo
 $\implies f([a, b])$ es un intervalo.

Como $f(a), f(b) \in f([a, b])$ y $f([a, b])$ es un intervalo, entonces

$\forall c \in (f(a), f(b))$, $c \in f([a, b]) \implies \exists x \in [a, b] : f(x) = c$.

Pero $x \neq a$, porque $f(x) = c \neq f(a)$, y $x \neq b$, porque $f(x) = c \neq f(b)$.

Entonces, $x \in (a, b)$ y $f(x) = c$. \square

- Vale un resultado análogo si $f(a) > f(b)$.
- El teorema anterior dice que una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.
- $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En efecto, como $[a, b]$ es compacto, $f([a, b])$ también lo es y, por lo tanto, es cerrado y acotado.

Límites laterales.

Def.: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in (a, b)$. El **límite a derecha** de f en x es

$$f(x+) := \lim_{t \rightarrow x+} f(t) := \lim_{t \rightarrow x} (f|_{(x,b)})(t)$$

y el **límite a izquierda** de f en x es

$$f(x-) := \lim_{t \rightarrow x-} f(t) := \lim_{t \rightarrow x} (f|_{(a,x)})(t).$$

A ambos límites se los denomina **límites laterales**.

Ej. El $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ existe si y sólo si existen $\lim_{t \rightarrow x+} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow x-} f(t)$ y ambos límites laterales coinciden.

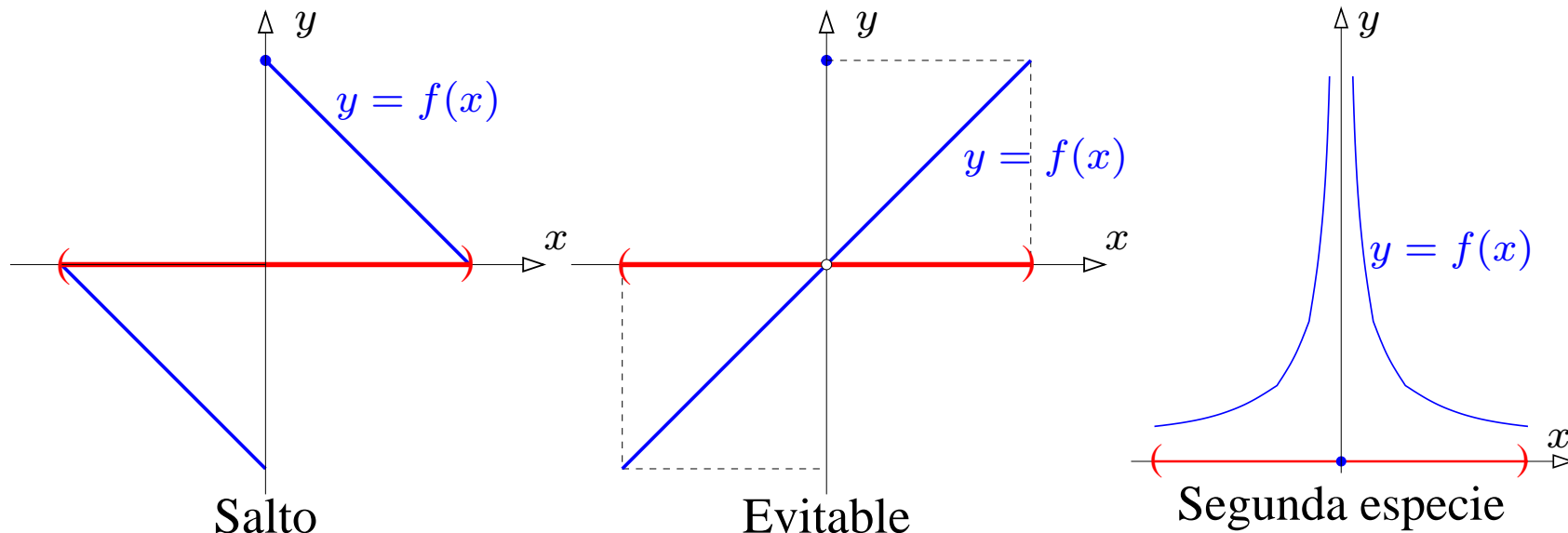
En tal caso, $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t)$.

Discontinuidades.

Def.: Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in (a, b)$. f tiene una **discontinuidad en x** si no es continua en x .

- Las discontinuidades se clasifican en $\begin{cases} \text{discontinuidades de primera especie y} \\ \text{discontinuidades de segunda especie.} \end{cases}$
 - f tiene una **discontinuidad de primera especie en x** si existen los dos límites laterales: $\lim_{t \rightarrow x+} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow x-} f(t)$.
 - f tiene una **discontinuidad de segunda especie en x** si no existe alguno de esos límites laterales.
- Las discontinuidades de primera especie a su vez se clasifican en $\begin{cases} \text{saltos y} \\ \text{evitables.} \end{cases}$
 - f tiene un **salto en x** si existen $\lim_{t \rightarrow x+} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow x-} f(t)$, pero no coinciden.
 - f tiene una **discontinuidad evitable en x** si existen $\lim_{t \rightarrow x+} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow x-} f(t)$ y ambos límites coinciden entre si, pero no coinciden con $f(x)$.

Ejemplos:



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ej. Demuestra que f es discontinua de segunda especie en x , $\forall x \in \mathbb{R}$.

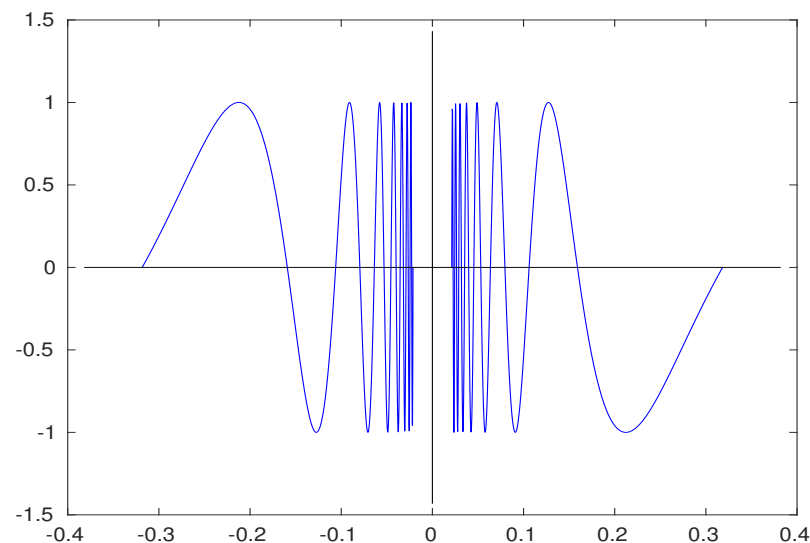
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ej. Demuestra que f es discontinua de segunda especie en x , $\forall x \neq 0$, pero es continua en $x = 0$.

Ejemplo:

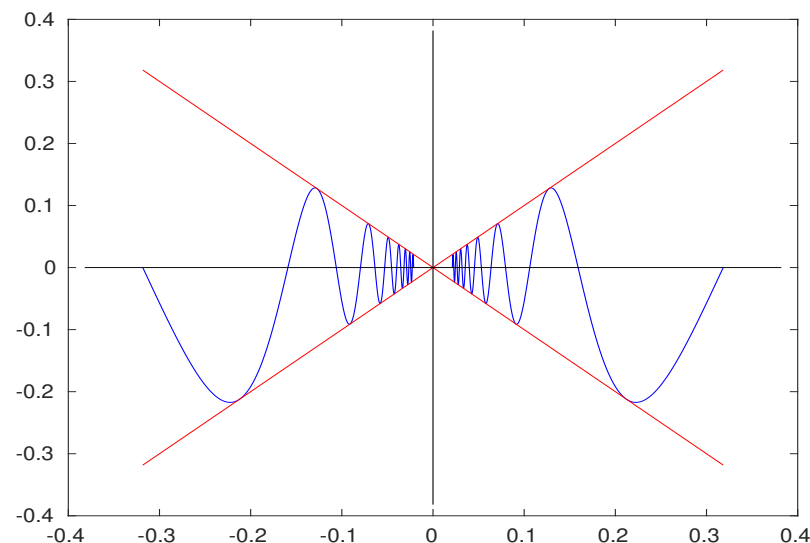
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



Ej. f tiene una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



Ej. f es continua en $x = 0$.

Funciones monótonas.

Def.: Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.
 f es **monótona creciente** si $\forall x, y \in (a, b) : x < y, f(x) \leq f(y)$;
 f es **monótona decreciente** si $\forall x, y \in (a, b) : x < y, f(x) \geq f(y)$;
 f es **monótona** si es monótona creciente o monótona decreciente.

Teor.: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces:

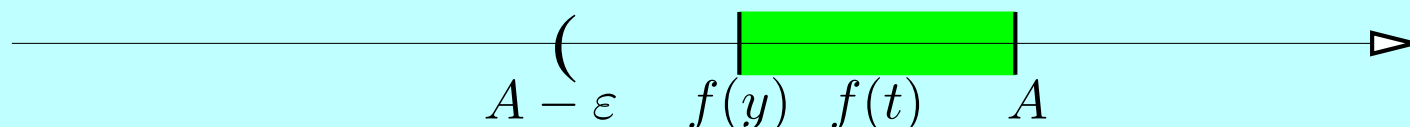
- a) $\forall x \in (a, b)$, existen los límites laterales $f(x+)$ y $f(x-)$ y
- $$\sup_{a < t < x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x < t < b} f(t);$$
- b) $\forall x, y \in (a, b) : x < y, f(x+) \leq f(y-)$.

Valen resultados análogos para f monótona decreciente.

Dem.: a) Como f es monótona creciente, $\forall t \in (a, x)$, $f(t) \leq f(x)$
 $\implies f$ acotada superiormente en $(a, x) \implies \exists \sup_{a < t < x} f(t) =: A \leq f(x)$.

Veremos que $f(x-) = A$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $A = \sup_{a < t < x} f(t)$, $\exists y \in (a, x) : A - \varepsilon < f(y) \leq A$.



Como f es monótona creciente, $\forall t \in (y, x)$, $A - \varepsilon < f(y) \leq f(t) \leq A$.

Sea $\delta := x - y > 0$ $\implies y = x - \delta$ y $\forall t \in (x - \delta, x)$, $|f(t) - A| < \varepsilon$
 $\implies \lim_{t \rightarrow x-} f(t) = A := \sup_{a < t < x} f(t)$.

La otra desigualdad se demuestra análogamente. **Ej.**

b) El ítem (a) $\implies f(x+) = \inf_{x < t < y} f(t) \leq \sup_{x < t < y} f(t) = f(y-)$.

Ej. Enuncia y demuestra resultados análogos para f monótona decreciente. \square

Corol.: Las funciones monótonas no tienen discontinuidades de segunda especie.

Dem.: Acabamos de demostrar que las funciones monótonas tienen límites laterales en todos los puntos de su dominio. \square

Teor.: Las discontinuidades de una función monótona sólo pueden ser saltos y su conjunto de puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable.

Dem.: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. (Vale una demostración análoga para f monótona decreciente.) Sea E su conjunto de puntos de discontinuidad:

$$E := \{x \in (a, b) : f \text{ es discontinua en } x\}.$$

Sea $x \in E$. Por el teorema anterior, ítem (a), $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$.

Entonces, $f(x-) < f(x+)$, pues, si fueran iguales, f sería continua en x .

Por lo tanto **la discontinuidad de f en x es un salto**.

Ahora veamos que E es numerable. Sea $q_x \in \mathbb{Q} : f(x-) < q_x < f(x+)$.

Por el teorema anterior, ítem (b), $\forall x, y \in E : x < y, f(x+) \leq f(y-)$

$$\implies f(x-) < q_x < f(x+) \leq f(y-) < q_y < f(y+) \implies q_x < q_y.$$

Entonces la aplicación $\begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{Q}, \\ x \mapsto q_x, \end{matrix}$ es inyectiva $\implies E$ es coordinable con la

imagen de esta aplicación, que es un subconjunto de \mathbb{Q} y, por lo tanto, a lo sumo numerable. En consecuencia, E es a lo sumo numerable. \square

- Es fácil imaginar funciones monótonas con finitas discontinuidades.

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$

tiene $x = 0$ como único punto de discontinuidad.

- También es fácil imaginar funciones monótonas con numerables discontinuidades.

Por ejemplo, $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = [x]$, donde $[\cdot]$ denota la **parte entera** de un número. f es discontinua en $x = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Otro ejemplo de función monótona con numerables discontinuidades, pero ahora en un dominio acotado, es $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{[1/x]}, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ej.: Dibuja esta función y demuestra que es continua en $x = 0$.

- Pero, por ejemplo, ¿existe una función monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinua en \mathbb{Q} y continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Por extraño que parezca, la respuesta es **¡si!**

- De hecho, veremos que dado cualquier subconjunto numerable $E \subset (a, b)$, hay una función discontinua en E y continua en $(a, b) \setminus E$.

- Describiremos como construirla, sin completar todos los detalles.

- Sea $E := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset (a, b)$.
- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ una serie convergente de términos $c_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por
- $$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}: x_n < x} c_n, \quad x \in (a, b).$$

- ¿Qué significa la sumatoria con la que se define $f(x)$?

Para cada $x \in (a, b)$, se suman sólo aquellos c_n con índice $n : x_n < x$.
(Aquellos con índice $n : x_n \geq x$, no se suman.)

Si para algún $x \in (a, b)$, no hubiera ningún $x_n < x$, entonces la sumatoria sería vacía y por lo tanto la suma sería cero.

- Se puede demostrar que:

- f es monótona creciente y acotada;
- $f(x_n+) - f(x_n-) = c_n > 0 \implies f$ es discontinua en $x_n, n \in \mathbb{N}$;
- f es continua en todo $x \in (a, b) \setminus E$.

Límites infinitos y en el infinito.

Queremos definir:

- **límites en el infinito**, es decir, límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$;
- **límites infinitos**, es decir, límites en los que $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

Para dar una definición que extienda la que dimos de límite de funciones y cubra todos los casos, definiremos primero la noción de entorno.

Def.: Sea $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, los **entornos de x** son los intervalos $(x - \delta, x + \delta) \quad \forall \delta > 0$.
- Los **entornos de $x = +\infty$** son las semirectas $(a, +\infty) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
- Los **entornos de $x = -\infty$** son las semirectas $(-\infty, b) \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Def.: Sean $E \subset \mathbb{R}$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sean $A, x \in \overline{\mathbb{R}}$, con x tal que \forall entorno V de x , $(V \cap E) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Entonces, $\lim_{t \rightarrow x} = A$ si

$$\forall \text{ entorno } U \text{ de } A, \exists \text{ un entorno } V \text{ de } x : f((V \cap E) \setminus \{x\}) \subset U.$$

De manera equivalente la expresión anterior puede escribirse así:

$$\forall \text{ entorno } U \text{ de } A, \exists \text{ un entorno } V \text{ de } x : \forall t \in V \cap E : t \neq x, f(t) \in U.$$

Ejemplo: Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = +\infty$ si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \underbrace{f((x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}) \subset (a, +\infty)}_{\forall t \neq x : |t - x| < \delta, f(t) > a}.$$

Ejemplo: Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R} : \underbrace{f((a, +\infty)) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)}_{\forall t > a : |f(t) - A| < \varepsilon}.$$

- Ej.** a) Muestra que si $A, x \in \mathbb{R}$, esta definición de límite coincide con la anterior.
 b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Describe lo que significa que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

Teor.: Sean $E \subset \mathbb{R}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $A, B, x \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = A$ y $\lim_{t \rightarrow x} g(t) = B$. Entonces:

- a) **[unicidad del límite]** si $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = A'$, entonces $A = A'$;
- b) si $A + B$ está bien definido, entonces $\lim_{t \rightarrow x} (f + g)(t) = A + B$;
- b) si AB está bien definido, entonces $\lim_{t \rightarrow x} (fg)(t) = AB$;
- b) si A/B está bien definido y $g(t) \neq 0 \ \forall t$ en un entorno de $x : t \neq x$, entonces $\lim_{t \rightarrow x} (f/g)(t) = A/B$.

Dem.: La demostración es sencilla, pero tediosa. Se debe considerar caso por caso: $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$, idem para A y para B .

Ej. Demuéstralo en un par de casos.