**Guía 17-C1**: HECHOS VARIOS

§**1**. *Diferencias de potencias.* §**2**. *Valores absolutos y límites.* §**3**. *TVI.* §**4**. *Derivadas y funciones por tramos.* §**5**. *Asíntotas.* §**6**. *Cadena.*

## 17.1. Reflexiones generales

### Diferencia de potencias

Se tienen las fórmulas

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2), \quad a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3), \quad \ldots$$

`Ejemplo 17.1` *Analizar* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$.

`Solución` Se tiene

$$\frac{x^5-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^3+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \implies \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1} = \frac{5}{3}.$$

### Valor absoluto en límites

Puede eliminarse un valor absoluto siempre que se conozca el signo de lo que encierra. En caso contrario, será necesario considerar límites laterales.

`Ejemplo 17.2` *Analizar* $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1-|x|^3}{x^2+2x+1}$.

`Solución`. Como $x \to -1$, entonces $x < 0$ y luego

$$\frac{1-|x|^3}{x^2+2x+1} = \frac{1-(-x)^3}{(1+x)^2} = \frac{(1-(-x))(1+1\cdot(-x)+(-x)^2)}{(1+x)^2} = \frac{1-x+x^2}{1+x} \implies \lim_{x\to -1}\frac{1-|x|^3}{x^2+2x+1} = \nexists$$

`Ejemplo 17.3` *Analizar* $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos|x|}{|x-\frac{\pi}{2}|}$.

`Solución`. Si $x \to \pi/2$, tenemos que $x > 0$ así que $|x| = x$, pero el signo de lo encerrado en $|x-\pi/2|$ puede oscilar, así que tendremos que tomar límites laterales en este caso. Se tiene ($\theta = x - \pi/2$):

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{\cos|x|}{|x-\frac{\pi}{2}|} = \lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\cos(\theta+\pi/2)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{-\sin(\theta)}{\theta} = -1.$$
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\cos|x|}{|x-\frac{\pi}{2}|} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\cos x}{-(x-\frac{\pi}{2})} = \lim_{\theta\to 0^-}\frac{\cos(\theta+\pi/2)}{-\theta} = \lim_{\theta\to 0^-}\frac{-\sin(\theta)}{-\theta} = 1.$$

En conclusión, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos|x|}{|x-\frac{\pi}{2}|} = \nexists$.

### Continuidad y valores intermedios

Recordemos que la continuidad significa que no hay saltos al pasar de un valor a otro, lo cual se expresa teóricamente en el llamado '*Teorema del valor intermedio*':

TVI: $f$ continua en $[a,b]$ y $k \in ]f(a), f(b)[ \implies \exists x \in ]a,b[$ tal que $f(x) = k$.

`Ejemplo 17.4` *Demuestre que la ecuación* $2x\sin(x/2) = \pi$ *tiene al menos una solución* $x > 0$.

`Solución`. Si $f(x) = 2x\sin(x/2)$, entonces $f$ es continua. Tomando $k = \pi$ en el TVI, se tiene que $k \in ]f(0), f(\pi)[ = ]0, 2\pi[$, así que existe $x \in ]0,\pi[$ tal que $f(x) = k$, es decir, $2x\sin(x/2) = \pi$.

### Sobre la validez de las fórmulas para calcular derivadas

Las fórmulas para calcular derivadas NO son válidas en puntos donde las funciones se ramifican o presentan problemas, en tales puntos se debe recurrir a la definición mediante límites de la derivada.

`Ejemplo 17.5` *Si* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$*, encontrar una expresión para la derivada, donde exista.*

`Solución`. El único punto '*problemático*' es $x = 0$. Si $x \neq 0$ se puden aplicar las fórmulas para encontrar la derivada, así que $\frac{df}{dx}(x) = \frac{2x^2\cos(x) - \sin(x^2)}{x^2}$ si $x \neq 0$. Para $x = 0$ no valen las fórmulas, así que la derivada se analiza mediante los límites de definición:

$$\frac{df}{dx}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x}}{x} = 1.$$

En conclusión, $\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2\cos(x) - \sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

### Tipos de asíntotas

<u>Asíntotas verticales</u>: Se producen cuando hay un límite igual a uno de los infinitos. Una función puede tener 0 asíntotas verticales (si una función es continua o no tiene límites iguales a uno de los infinitos), puede tener varias asíntotas verticales e incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como $f(x) = \tan x$. <u>Asíntotas Horizontales</u>: Se producen cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ dan un valor real. Puede haber entre 0 y 2. <u>Asíntotas Oblicuas</u>: Se producen cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ dan alguno de los infinitos y $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x$ dan un valor real $m$, más otra condición. Puede haber entre 0 y 2.

## 17.2. Regla de la cadena

### Función de una función

Si $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x^4}$ y $g(x) = \cos(x)$ se pueden plantear las '*funciones compuestas*'

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{1 + \cos^4(x)} \ \text{ y } \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(1 + \sqrt{1 + x^4}).$$

En ellas la variable se reemplaza por una función.

### Derivada de un función compuesta

Para calcular la derivada de una compuesta se utiliza la '*regla de la cadena*':

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \left(\frac{df}{dx}(g(x))\right) \cdot \frac{dg}{dx}(x)}.$$

`Ejemplo 17.6` *Calcular la derivada de* $f(x) = \sin(1 + 3x^4)$.

`Solución`. Se trata de una función compuesta, así que

$$\frac{df}{dx} = \cos(1 + x^4) \cdot (12x^3).$$

## 17.3. Ejercicios

### Enunciados

**P 17.1** *Determinar la derivada de* $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(3x)$.

**P 17.2** *Determinar la derivada de* $f(x) = x^2 \sin\sqrt{x}$.

**P 17.3** *Determinar la derivada de* $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

**P 17.4** *Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}x)$ *en* $(2,1)$.

**P 17.5** *Encuentre los* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que la función* $f(x) = \begin{cases} ax+b & \textit{si } x < 0, \\ 2\sin x + 3\cos x & \textit{si } x \geq 0. \end{cases}$ *es diferenciable en* $x = 0$.

**P 17.6** *Considerar la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi & \textit{si } x \leq \pi \\ x^2 - \pi\cos x & \textit{si } x > \pi. \end{cases}$$

*Calcular* $\frac{df}{dx}$ *en todos los puntos donde exista.*

**P 17.7** *Considerar la función*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \textit{si } x < 0, \\ x & \textit{si } x \geq 0. \end{cases}$$

*(i) Estudie la continuidad de* $f$ *en cada punto de su dominio.*
*(ii) Encuentre las asíntotas.*
*(iii) Calcular* $\frac{df}{dx}$ *en todos los puntos donde exista.*

### Respuestas

**P. 17.1** $= \pi\cos(\pi x) - 3\sin(3x)$. **P. 17.2** $= 2x\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2}\cos\sqrt{x}$. **P. 17.3** $= \frac{1}{1-\sin x}$. **P. 17.4** $y - 1 = 0$. **P. 17.5** $a = 2$, $b = 3$. **P. 17.6** $\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \pi \\ 2x + \pi\sin x & \text{si } x > \pi. \end{cases}$. $\frac{df}{dx}(\pi) = 2\pi$. **P. 17.7** (i) $f$ es con tinua en todo $\mathbb{R}$. (ii) La recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y la recta $y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$. (iii) $\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$. $\frac{df}{dx}(0) = 1$.