3 Método de valores y vectores propios para sistemas lineales homogéneos

Sea el sistema lineal homogéneo de primer orden

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \tag{6}$$

donde $\mathbf{A}$ *es una* **matriz constante** *de tamaño* $n \times n$.

Es claro que el vector cero $0_{n\times 1}$ *es soluciín* **trivial** *del sistema homogéneo* (6). *Supongamos que*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{K}e^{\lambda t},$$

es solución del sistema (6)*, para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y algún vector* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$ **no nulo**.

Sustituyendo esta forma en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\lambda\mathbf{K}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{K}e^{\lambda t}.$$

Dividiendo ambos lados por $e^{\lambda t} \neq 0$*, obtenemos:*

$$\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda\mathbf{K},$$

es decir,

$$(\mathbf{A} - \lambda I_{n\times n})\mathbf{K} = \mathbf{0}.$$

Buscamos la forma de $\mathbf{K}$ *y de* λ. *Notamos entonces que para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial, se debe cumplir que la matriz asociada* $(\mathbf{A} - \lambda I_{n\times n})$ *no es invertible, es decir:*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_{n\times n}) = 0.$$

Definición

Sea el sistema lineal homogéneo de primer orden

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t),$$

donde $\mathbf{A}$ *es una* **matriz constante** *de tamaño* $n \times n$.
A la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_{n\times n}) = 0,$$

se le conoce con el nombre de **función característica** *o* **polinomio característico** *del sistema homogéneo, y sus soluciones* λ *se llaman* ***valores propios***. *Un vector no nulo* $\mathbf{K}$ *que satisface la ecuación* $(\mathbf{A} - \lambda I_{n\times n})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ *se denomina un* ***vector propio*** *correspondiente al valor propio* λ.

Tal y como lo hicimos para EDOs lineales de alto orden con coeficientes constantes, estudiamos tres casos:

3.1 Valores propios reales y diferentes

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ n **valores propios reales y distintos** *de la matriz (constante) de coeficientes* $\mathbf{A}$ *del sistema homogéneo*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t),$$

y sean $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \ldots, \mathbb{K}_n$ *los vectores propios correspondientes. Entonces, la solución general del sistema sobre* $\mathbb{R}$ *está dada por*

$$\mathbf{X}(t) = C_1\mathbb{K}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbb{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\mathbb{K}_n e^{\lambda_n t},$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *son constantes arbitrarias.*

Ejemplo 3.1. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo que puede escribirse como $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$, *con matriz de coeficientes:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda I_{2\times 2}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

De aquí, la ecuación característica para el sistema homogéneo es:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_{2\times 2}) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0,$$

que tiene como solución (valores propios) $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 4$, *reales y distintos.*

Buscamos ahora los vectores propios asociados a cada λ_i, $i = 1, 2$. *Para* $\lambda_1 = 1$, *resolvemos el sistema* $(\mathbf{A} - \lambda_1 I_{2\times 2})\mathbb{K} = \mathbf{0}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = -2k_2.$$

Tomando $k_2 = 1$, *el vector propio es:*

$$\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que el (sub)espacio propio asociado a λ_1 *es:*

$$S_{\lambda_1} = \ker(\mathbf{A} - \lambda_1 I_{2\times 2}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Repetimos el procedimiento para $\lambda_2 = 4$, *resolviendo* $(\mathbf{A} - 4I_{2\times 2})\mathbb{K} = \mathbf{0}$*:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Tomando $k_2 = 1$, el vector propio es:

$$\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que el espacio propio es

$$S_{\lambda_2} = \ker(\mathbf{A} - 4I_{2\times 2}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Así, $\left\{ e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es un conjunto de vectores soluciones y estos son linealmente independientes. En efecto, es fácil ver que estos vectores son soluciones y además*

$$W \left[e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] (0) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Finalmente, como $\mathbf{A}$ *es* 2×2 *y encontramos un* **conjunto fundamental**, *la solución general es:*

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 3.2. *Resolvamos ahora el sistema homogéneo*

$$\begin{cases} x'(t) = -4x + y + z, \\ y'(t) = x - 5y - z, \\ z'(t) = y - 3z. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico a partir de:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_{3\times 3}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(15 + 8\lambda + \lambda^2).$$

Entonces el polinomio característico es:

$$P(\lambda) = -(4+\lambda)(\lambda+5)(\lambda+3),$$

que tiene raíces reales y distintas $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = -5$. Para cada uno calculamos su vector propio. Comenzamos con $\lambda_1 = -3$:

$$S_{\lambda_1} = \ker(\mathbf{A} + 3I_{3\times 3}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Para $\lambda_2 = -4$:

$$S_{\lambda_2} = \ker(\mathbf{A} + 4I_{3\times 3}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Para $\lambda_3 = -5$:

$$S_{\lambda_3} = \ker(\mathbf{A} + 5I_{3\times 3}) = \ker(\mathbf{A} + 5I_{3\times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Por tanto, una base de soluciones del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3(t) = e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

finalmente, la solución general del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = C_1e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Valores propios reales repetidos

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$ *para la cual* $(\lambda - \lambda_1)^m$ *es un factor del polinomio característico (y* $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ *no lo es). Entonces,* λ_1 *es un* **autovalor de multiplicidad** m. *Una posibilidad es que:*

1. ***Caso diagonalizable:*** *Si se pueden encontrar exactamente* m *vectores propios linealmente independientes* $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \ldots, \mathbb{K}_m$ *correspondientes a* λ_1, *es decir, si* $\dim(S_{\lambda_1}) = m$, *entonces la parte de la solución general del sistema diferencial lineal homogéneo asociado a* λ_1:
$$\mathbf{X}_1(t) = C_1\mathbb{K}_1e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbb{K}_2e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_m\mathbb{K}_me^{\lambda_1 t}.$$

2. ***Caso no diagonalizable:*** *Si solo se puede encontrar un vector propio correspondiente a* λ_1 *de multiplicidad* m, *entonces se pueden construir* m *soluciones linealmente independientes de la forma:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1(t) &= \mathbb{K}_{11}e^{\lambda_1 t}, \\
\mathbf{X}_2(t) &= \mathbb{K}_{21}te^{\lambda_1 t} + \mathbb{K}_{22}e^{\lambda_1 t}, \\
\mathbf{X}_3(t) &= \mathbb{K}_{31}\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + \mathbb{K}_{32}te^{\lambda_1 t} + \mathbb{K}_{33}e^{\lambda_1 t}, \\
&\ \vdots \\
\mathbf{X}_m(t) &= \mathbb{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \mathbb{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbb{K}_{mm}e^{\lambda_1 t},
\end{aligned}$$

donde los vectores $\mathbb{K}_{ij}$ *son vectores columna determinados a partir de cadenas de Jordan generalizadas.*

Observación. *Toda matriz simétrica con entradas en* $\mathbb{R}$ *es diagonalizable! Si una matriz no es diagonalizable, entonces siempre podemos considerar descomposiciones del tipo (singular value decomposition, SVD) o con matrices de Jordan.*

Ejemplo 3.3. *Consideremos*

$$\mathbf{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{X}(t).$$

Dado que es un sistema homogéneo y los coeficientes de la matriz asociada al sistema son constantes, buscamos soluciones de la forma $\mathbf{X}(t) = \mathbb{K}e^{\lambda t}$. *Para hallar dichas soluciones empezamos encontrando los autovalores resolviendo la ecuación característica*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0.$$

Esto nos lleva al polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Que es equivalente a:

$$P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0,$$

por lo tanto los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *(de multiplicidad 2) y* $\lambda_3 = 5$.

Hallamos ahora los vectores propios, comenzando por el autovalor simple $\lambda_3 = 5$. *Resolvemos* $(A - 5I_{3\times 3})\mathbb{K} = 0$:

$$\ker(A - 5I) = \ker \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dicho de otro modo

$$S_{\lambda_3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

y $\mathbf{X}_3(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *es solución del sistema.*

Analizamos ahora lo que sucede con los autovalores repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. *Para esto resolvemos* $(\mathbf{A} + I)\mathbb{K} = 0$:

$$\ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 + k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Escogiendo $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, *obtenemos dos vectores propios:*

$$\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Una base para las soluciones del sistema está dada por:

$$\left\{ \mathbf{X}_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3(t) = e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, la solución general se escribe como

$$\mathbf{X}(t) = C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

con C_1, C_2, C_3 constantes arbitrarias.

Ejemplo 3.4. *Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \qquad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{pmatrix}.$$

La ecuación característica del sistema se obtiene resolviendo

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det\begin{pmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda+3)^2.$$

Esto indica que $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ es una raíz de multiplicidad dos. Procedemos a encontrar el vector propio correspondiente a $\lambda = -3$, resolviendo$(\mathbf{A} + 3I)\mathbb{K} = \mathbf{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

lo cual nos da el vector propio $\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, o equivalentemente

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y una solución del sistema es

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}.$$

Dado que la multiplicidad algebraica es 2 pero solo se encontró un vector propio, buscamos una solución generalizada $\mathbf{X}_2(t)$ de la forma

$$\mathbf{X}_2(t) = (\mathbf{P} + t\mathbb{K}_1)e^{-3t},$$

donde $\mathbf{P}$ debe satisfacer

$$(A + 3I)\mathbf{P} = \mathbb{K}_1,$$

para que sea solución del sistema.

Esto se traduce en el sistema

$$\begin{pmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

o lo que es equivalente a:

$$\begin{cases}6p_1 - 18p_2 = 3\\ 2p_1 - 6p_2 = 1.\end{cases}$$

De lo anterior se obtiene $p_1 = \frac{1}{2} + 3p_2$. *Podemos tomar, por ejemplo,*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Entonces la segunda solución linealmente independiente de $\mathbf{X}_1(t)$ *es*

$$\mathbf{X}_2(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-3t}.$$

Escribimos la solución general del sistema como

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-3t},$$

con C_1 *y* C_2 *constantes arbitrarias.*

3.3 Valores propios complejos

Recordemos que, si $\lambda = \alpha + i\,\beta$, *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces* $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ *(es decir, el conjugado complejo de* λ*) es también una raíz compleja del polinomio.*

Luego, si $\lambda = \alpha + i\,\beta$ *es un valor propio complejo de la matriz* A, *tendremos que* $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ *es autovalor. Más aún, dado que* λ *es un valor propio, existe un vector propio* $\mathbf{x}$ *que satisface:*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Tomando conjugado complejo a cada lado de la igualdad anterior y usando propiedades de números complejos, nos queda que

$$\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}.$$

Sin embargo, sabemos que A *es una matriz con coeficientes reales, así que* $\overline{A} = A$ *y*

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}},$$

de donde deducimos que $\overline{\mathbf{x}}$ *es un vector propio asociado a* $\overline{\lambda}$.

Teorema 3.1

Sea $\mathbf{A}$ *la matriz de coeficientes con entradas reales asociada al sistema:*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t).$$

Si $\mathbf{x}_\lambda(t)$ *es un vector propio asociado a* λ, *entonces el vector* $\overline{\mathbf{x}_\lambda(t)}$ *es vector propio asociado a* $\overline{\lambda}$.

Luego de identificar los autovectores, podemos escribir la solución usando la relación

$$e^{\alpha + i\,\beta} = e^{\alpha}\left(\cos(\beta) + i\,\sin(\beta)\right).$$

Ejemplo 3.5. *Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica del sistema se obtiene resolviendo

$$0 = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

Esto indica que $\lambda = 4+i$ *y* $\overline{\lambda} = 4-i$ *son valores propios. Procedemos a encontrar el vector propio correspondiente a* $\lambda = 4+i$*, resolviendo* $(\mathbf{A} + (4+i)I)\mathbb{K} = \mathbf{0}$*, es decir,*

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos desde aquí el vector propio $\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix}$*, es decir,*

$$S_{4+i} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y una solución del sistema es

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{(4+i)t}.$$

De lo explicado anteriormente, sabemos que $\overline{\lambda} = 4-i$*, es un autovalor con vector propio*

$$\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} -\overline{(1+i)} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 2 \end{pmatrix},$$

y solución asociada

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{(4-i)t}.$$

Luego, por principio de superposición, la ecuación general del sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{(4+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{(4-i)t} \\ &= e^{4t} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{-it} \right\}. \end{aligned}$$

Reescribiendo las exponenciales complejas como

$$\begin{aligned} e^{(4-i)t} &= e^{4t}\left(\cos(-t) + i\sin(-t)\right) \\ e^{(4+i)t} &= e^{4t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = e^{4t} &\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} (\cos(t) + i\sin(t)) + c_2 \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 2 \end{pmatrix} (\cos(t) - i\sin(t)) \right\} \\ = e^{4t} &\left\{ (c_1+c_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(t) + (c_1+c_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + (c_1-c_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} i\sin(t) - (c_1-c_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i\cos(t) \right\}. \end{aligned}$$

Así, haciendo $C_1 = c_1 + c_2$, $C_2 = (c_1 - c_2)i$ *(que son nuevamente constantes arbitrarias), tenemos la solución general*

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) e^{4t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) e^{4t}.$$

Para hallar la solución del PVI usamos las condiciones iniciales $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$*, de donde*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(0) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{3}{2}.$$

Finalmente, tenemos que la solución del PVI es

$$\mathbf{X}(t) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(t)\right)e^{4t} - \frac{3}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(t)\right)e^{4t},$$

o

$$\mathbf{X}(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 2\cos(t) + \sin(t) \\ -3\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix},$$

i.e. **la trayectoria del sistema se escapa (al infinito y menos infinito, pues no converge) cuando el tiempo avanza**.

En general, para valores propios complejos $\lambda = \alpha + i\beta$ *con vector propio* $\mathbb{K}$ *se tienen las soluciones linealmente independientes:*

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{\alpha t}\left(\left(\frac{\mathbb{K} + \overline{\mathbb{K}}}{2}\right)\cos(\beta t) - i\left(\frac{-\mathbb{K} + \overline{\mathbb{K}}}{2}\right)\sin(\beta t)\right)$$
$$\mathbf{X}_2(t) = e^{\alpha t}\left(i\left(\frac{-\mathbb{K} + \overline{\mathbb{K}}}{2}\right)\cos(\beta t) + \left(\frac{\mathbb{K} + \overline{\mathbb{K}}}{2}\right)\sin(\beta t)\right).$$