



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

---

## Tarea 2

### ANÁLISIS NUMÉRICO III

---

*Integrantes*

FRANCISCA CASTRO

DANAE ORELLANA

BRAYAN SANDOVAL

*Profesor*

RAIMUND BÜRGER

*Fecha*

29 DE JULIO DE 2022

**Problema 1.** Se considera el problema de valores iniciales de la ecuación de la onda:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) := \begin{cases} 1 + \sin(x/\pi) & \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x) := \frac{1}{2}f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Se desea determinar la solución para  $t = 2$ . Utilizando la fórmula de d'Alembert, determinar la solución exacta y graficarla. Notar que  $u(\cdot, t)$  posee soporte compacto para todo  $t > 0$ .
- b) Aplicar el método (5.32), (5.34) para la solución numérica del problema (5). Elegir  $\Delta x = 0.2, 0.1, 0.05$  y  $0.025$  y  $\Delta t$  como el valor máximo tal que está satisfecha la condición CFL para este problema. Comparar con la solución exacta para  $t = 2$  con la solución numérica en cada caso. Elegir el dominio computacional suficientemente grande para que la solución numérica esté contenida en su totalidad.

## Solución

- a) La formula de d'Alembert nos proporciona la solución exacta para este problema, la cual corresponde a

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + 2t) + f(x - 2t)) + \frac{1}{2c} \int_{x-2t}^{x+2t} g(\xi) \, d\xi$$

tomando en cuenta  $c = 2$  y fijando  $t = 2$ , se obtiene

$$u(x, 2) = \frac{1}{2}(f(x + 4) + f(x - 4)) + \frac{1}{8} \int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi$$

donde

$$f(x + 4) + f(x - 4) = \begin{cases} 1 + \sin(\frac{x+4}{\pi}) & \text{if } x \in [-4, -3] \\ 1 + \sin(\frac{x-4}{\pi}) & \text{if } x \in [4, 5] \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Para determinar el valor de la integral que aparece en la solución procederemos por casos

- Si  $x \in [-4, -3]$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} -8 &\leq x - 4 \leq -7 \\ 0 &\leq x + 4 \leq 1 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi &= \int_{x-4}^0 f(\xi) \, d\xi + \int_0^{x+4} f(\xi) \, d\xi = 0 + \int_0^{x+4} 1 + \sin\left(\frac{\xi}{\pi}\right) \, d\xi \\ &= x + 4 - \pi \cos\left(\frac{x+4}{\pi}\right) + \pi \end{aligned}$$

- Si  $x \in [4, 5]$ , entonces se tiene

$$0 \leq x - 4 \leq 1$$

$$8 \leq x + 4 \leq 9$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi &= \int_{x-4}^1 f(\xi) \, d\xi + \int_1^{x+4} f(\xi) \, d\xi = \int_{x-4}^1 1 + \sin\left(\frac{\xi}{\pi}\right) \, d\xi + 0 \\ &= 5 - \pi \cos\left(\frac{1}{\pi}\right) + \pi \cos\left(\frac{x-4}{\pi}\right) - x \end{aligned}$$

- Si  $x \in (-3, 4)$ , entonces se tiene

$$-7 \leq x - 4 \leq 0$$

$$1 \leq x + 4 \leq 8$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi &= \int_{x-4}^0 f(\xi) \, d\xi + \int_0^1 f(\xi) \, d\xi + \int_1^{x+4} f(\xi) \, d\xi = 0 + \int_0^1 1 + \sin\left(\frac{\xi}{\pi}\right) \, d\xi + 0 \\ &= 1 - \pi \cos\left(\frac{1}{\pi}\right) + \pi \end{aligned}$$

- Si  $x \in (-\infty, -4)$ , entonces se tiene

$$-8 > x - 4$$

$$0 > x + 4$$

luego

$$\int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi = 0$$

- Si  $x \in (-\infty, -4)$ , entonces se tiene

$$1 < x - 4$$

$$9 < x + 4$$

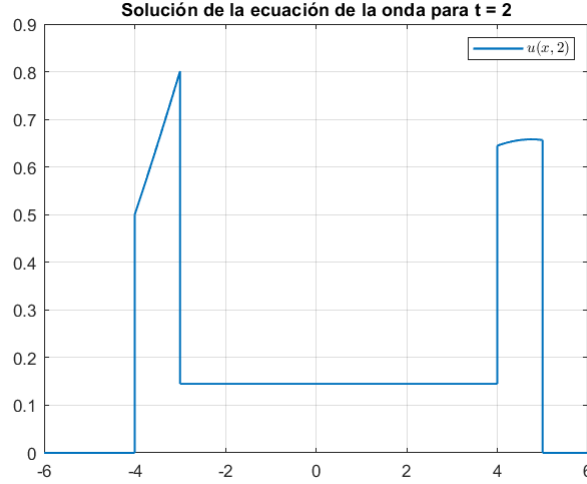
luego

$$\int_{x-4}^{x+4} f(\xi) \, d\xi = 0$$

Así,

$$u(x, 2) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{x+4}{\pi}\right)\right) + \frac{1}{8} \left(x + 4 + \pi - \pi \cos\left(\frac{x+4}{\pi}\right)\right) & \text{si } x \in [-4, -3] \\ \frac{1}{8} \left(1 - \pi \cos\left(\frac{1}{\pi}\right) + \pi\right) & \text{si } x \in (-3, 4) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{x-4}{\pi}\right)\right) + \frac{1}{8} \left(5 - x - \pi \cos\left(\frac{1}{\pi}\right) + \pi \cos\left(\frac{x-4}{\pi}\right)\right) & \text{si } x \in [4, 5] \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Gráficamente la solución se puede ver como sigue



**Figura 1:** Solución exacta para  $t = 2$ .

- b) Para poder aplicar el método de diferencias, primero necesitamos definir un dominio en el cual la solución del problema este contenida en su totalidad, de la parte a) podemos inferir que un dominio que contenga a toda la solución podría ser el rectángulo  $\Omega = [-6, 6] \times [0, 2]$ . Considerando lo anterior se define la malla

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j \in \{-J, \dots, 0, \dots, J\}, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

donde  $J = \frac{6}{\Delta x}$  y  $N = \frac{2}{\Delta t}$ . Luego el método de diferencias que utilizaremos es

$$u_{j,n+1} = 2(1 - c^2\lambda^2)u_{j,n} + c^2\lambda^2(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}) - u_{j,n-1}$$

con  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , además se utiliza la siguiente aproximación para la segunda capa del método

$$u_{j,1} = f_j + \Delta t g_j + \frac{c^2\lambda^2}{2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \Delta t \frac{c^2\lambda^2}{6}(g_{j-1} - 2g_j + g_{j+1})$$

considerando que  $g(x) := \frac{1}{2}f'(x)$ , entonces lo anterior se puede reescribir como sigue

$$u_{j,1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right) f_j + \frac{c^2\lambda^2}{2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \Delta t \frac{c^2\lambda^2}{12}(f'_{j-1} - 2f'_j + f'_{j+1}).$$

además, la condición CFL nos dice que el método converge si se cumple que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$$

de la desigualdad anterior se desprende el valor máximo que puede tener  $\Delta t$  para que el método converja, esto es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$$

A continuación se presentará el código realizado en matlab que permite obtener la solución deseada.

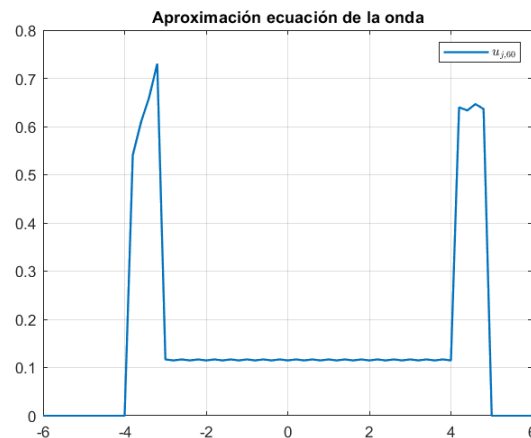
- $\Delta x = 0.2$

```

1 clear all;close all;clc;
2 dx = 0.2; c = 2;
3 dt = dx/c;% Condicion CFL
4 lambda = dt/dx;
5 x = [-6:dx:6];%Dominio comptacional
6 t = [0:dt:2];%Dominio comptacional
7 N = 2/dt;
8 J = 6/dx;
9 u = zeros(2*J+1,N+1); %Definimos la matriz de "aproximacion"
10                                %donde la columna (n+1)-esima reperesenta la
11                                %solucion aproximada de u(x,n*delta t) con
12                                %n = {0,...,20}
13 for i = 1:J
14     if i*dx > 0 && i*dx < 1
15         u(i+1+J,1) = 1+sin(i*dx/pi); %Aquí desarrollamos u_{j,0}(condicion
16         inicial)
17     else
18         u(i,1) = 0;
19     end
20 end
21 for k = 2:2*J %desarrollamos u_{j,1} (solucion aproximada de u(x,0.1))
22     u(k,2) = (1+dt*(1/2))*u(k,1)+(1/2)*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u
23     (k+1,1))+(1/12)*dt*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1));
24 end
25 for n = 2:(length(t)-1) %Aplicamos el metodo de diferencias (5.38)
26     for j = 2:(length(x)-1)
27         u(j,n+1) = 2*(1-(c*lambda)^2)*u(j,n) + ((c*lambda)^2)*(u(j+1,n)+u(j
28         -1,n)) - u(j,n-1);
29     end
30 end
31 plot(x,u(:,length(t)), 'LineWidth',1.4) %Grafico de la aproximaci n pedida
32 str = 'Aproximaci n ecuaci n de la onda';
33 title(str,'interpreter','latex')
34 legend('$u_{j,60}$','interpreter','latex')
35 grid on

```

Gráficamente se tiene



**Figura 2:** Aproximación de  $u(x, 2)$  con  $\Delta x = 0.2$

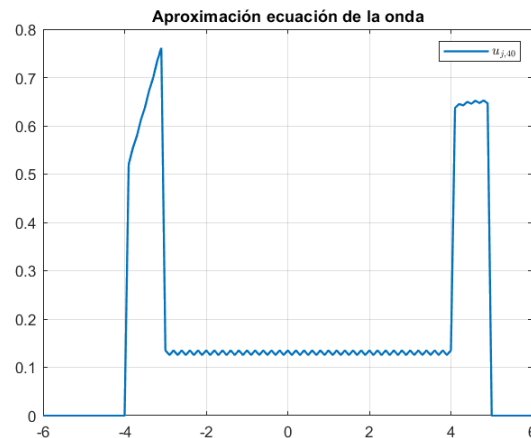
- $\Delta x = 0.1$

```

1 clear all;close all;clc;
2 dx = 0.1; c = 2;
3 dt = dx/c; % Condicion CFL
4 lambda = dt/dx;
5 x = [-6:dx:6];%Dominio computacional
6 t = [0:dt:2];%Dominio computacional
7 N = 2/dt;
8 J = 6/dx;
9 u = zeros(2*J+1,N+1);%Definimos la matriz de "aproximacion"
10 %donde la columna (n+1)-esima representa
11 %la solucion aproximada de u(x,n*delta t)
12 %con n = {0,...,40}
13 for i = 1:J
14     if i*dx > 0 && i*dx < 1
15         u(i+1+J,1) = 1+sin(i*dx/pi);%Aquí desarrollamos u_{j,0}(condicion
16         inicial)
17     else
18         u(i,1) = 0;
19     end
20 end
21 for k = 2:2*J %desarrollamos u_{j,1} (solucion aproximada de u(x,0.05))
22     u(k,2) = (1+dt*(1/2))*u(k,1)+(1/2)*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1))+
23     (1/12)*dt*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1));
24 end
25 for n = 2:(length(t)-1) %Aplicamos el metodo de diferencias (5.38)
26     for j = 2:(length(x)-1)
27         u(j,n+1) = 2*(1-(c*lambda)^2)*u(j,n) + ((c*lambda)^2)*(u(j+1,n)+u(j-1,n)) - u(j,n-1);
28     end
29 end
30 plot(x,u(:,length(t)), 'LineWidth',1.4)%Grafico de la aproximacion pedida
31 str = 'Aproximacion ecuacion de la onda';
32 title(str,'interpreter','latex')
33 legend('$u_{j,40}$','interpreter','latex')
34 grid on

```

Gráficamente se tiene



**Figura 3:** Aproximación de  $u(x, 2)$  con  $\Delta x = 0.1$

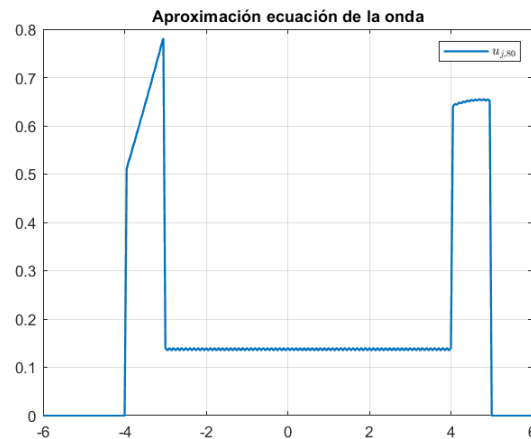
- $\Delta x = 0.05$

```

1 clear all;close all;clc;
2 dx = 0.05; c = 2;
3 dt = dx/c; % Condicion CFL
4 lambda = dt/dx;
5 x = [-6:dx:6];%Dominio computacional
6 t = [0:dt:2];%Dominio computacional
7 N = 2/dt;
8 J = 6/dx;
9 u = zeros(2*J+1,N+1);%Definimos la matriz de "aproximaci n"
10 %donde la columna (n+1)-esima representa
11 %la solucion aproximada de u(x,n*delta t)
12 %con n = {0,...,80}
13 for i = 1:J %Aqui desarrollamos u_{j,0}(condicion inicial)
14     if i*dx > 0 && i*dx < 1
15         u(i+1+J,1) = 1+sin(i*dx/pi);
16     else
17         u(i,1) = 0;
18     end
19 end
20 for k = 2:2*J %desarrollamos u_{j,1} (solucion aproximada de u(x,0.025))
21     u(k,2) = (1+dt*(1/2))*u(k,1)+(1/2)*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1))+
22         (1/12)*dt*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1));
23 end
24 for n = 2:(length(t)-1) %Aplicamos el metodo de diferencias (5.38)
25     for j = 2:(length(x)-1)
26         u(j,n+1) = 2*(1-(c*lambda)^2)*u(j,n) + ((c*lambda)^2)*(u(j+1,n)+u(j-1,n)) - u(j,n-1);
27     end
28 end
29 plot(x,u(:,length(t)), 'LineWidth', 1.4)%Grafico de la aproximaci n pedida
30 str = 'Aproximaci n ecuaci n de la onda';
31 title(str,'interpreter','latex')
32 legend('$u_{j,80}$','interpreter','latex')
33 grid on

```

Gráficamente se tiene



**Figura 4:** Aproximación de  $u(x, 2)$  con  $\Delta x = 0.05$

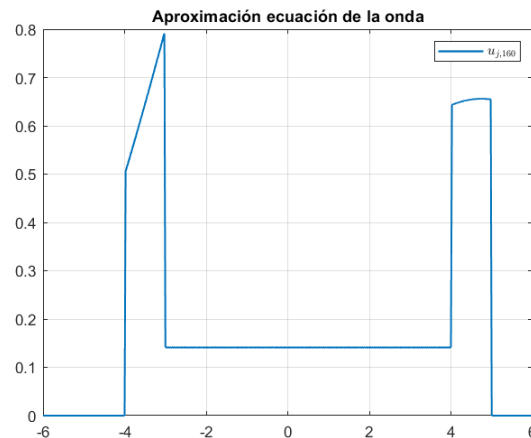
- $\Delta x = 0.025$

```

1 clear all;close all;clc;
2 dx = 0.025; c = 2;
3 dt = dx/c; % Condicion CFL
4 lambda = dt/dx;
5 x = [-6:dx:6];%Dominio computacional
6 t = [0:dt:2];%Dominio computacional
7 N = 2/dt;
8 J = 6/dx;
9 u = zeros(2*J+1,N+1);%Definimos la matriz de "aproximaci n"
10 %donde la columna (n+1)-esima representa
11 %la solucion aproximada de u(x,n*delta t)
12 %con n = {0,...,160}
13 for i = 1:J
14     if i*dx > 0 && i*dx < 1
15         u(i+1+J,1) = 1+sin(i*dx/pi);%Aqui desarrollamos u_{j,0}(condicion
16         inicial)
17     else
18         u(i,1) = 0;
19     end
20 end
21 for k = 2:2*J %desarrollamos u_{j,1} (solucion aproximada de u(x,0.0125))
22     u(k,2) = (1+dt*(1/2))*u(k,1)+(1/2)*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u
23     (k+1,1))+(1/12)*dt*((c*lambda)^(2))*(u(k-1,1)-2*u(k,1)+u(k+1,1));
24 end
25 for n = 2:(length(t)-1) %Aplicamos el metodo de diferencias (5.38)
26     for j = 2:(length(x)-1)
27         u(j,n+1) = 2*(1-(c*lambda)^2)*u(j,n) + ((c*lambda)^2)*(u(j+1,n)+u(j
28         -1,n)) - u(j,n-1);
29     end
30 end
31 plot(x,u(:,length(t)), 'LineWidth',1.4) %Grafico de la aproximaci n pedida
32 str = 'Aproximaci n ecuaci n de la onda';
33 title(str,'interpreter','latex')
34 legend('$u_{j,160}$','interpreter','latex')
35 grid on

```

Gráficamente se tiene



**Figura 5:** Aproximación de  $u(x, 2)$  con  $\Delta x = 0.025$



**Problema 2.** Se considera el problema de valores iniciales y de frontera para la ecuación del calor:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

$$u(0, t) = t(1 - t)^2, \quad t \in [0, 1] \quad (4)$$

$$u(1, t) = t, \quad t \in [0, 1] \quad (5)$$

- a) Resolver numéricamente el problema utilizando el método descrito en Sección 5.4.2, utilizando  $\Delta x = 0.05$ , (i)  $\alpha = 1/2$ ,  $\lambda = 1/12$  y (ii)  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 1/6$ . Visualizar los resultados numéricos.
- b) Para poder decidir cual de las dos soluciones de (a) aproxima mejor la solución exacta, calcular una tercera solución (llamada solución de referencia) utilizando  $\Delta x = 0.005$ ,  $\alpha = 0$  y  $\lambda = 1/6$ , y comparar los valores de la solución de referencia para  $t = 1$  con cada una de las soluciones de (a) para  $t = 1$ .

## Solución

- a) Para utilizar el método descrito en la sección 5.4.2, consideraremos una malla de puntos

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N + 1, \quad n \in M$$

Donde  $(N + 1)\Delta x = 1$  y  $M = m \in \mathbb{N}_0 : m\Delta t \in [0, 1]$ ,  $\lambda = \Delta t/(\Delta x)^2$ . Del problema, identificamos  $f(x) = \sin(\pi x)$ ,  $g(t) = t(1 - t)^2$ ,  $\tilde{g}(t) = t$ . De esta forma, el esquema a utilizar toma la forma:

$$(\mathbf{I} + \alpha\lambda\mathbf{B})\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{I} - (1 - \alpha)\lambda\mathbf{B})\mathbf{u}_n + \lambda\mathbf{g}_n$$

donde denotamos a los vectores  $\mathbf{u}_0 = (\sin(x_1\pi), \sin(x_2\pi), \dots, \sin(x_N\pi))^T$ ,  $\mathbf{u}_n = (u(x_1, t_n), \dots, u(x_N, t_n))^T$  y

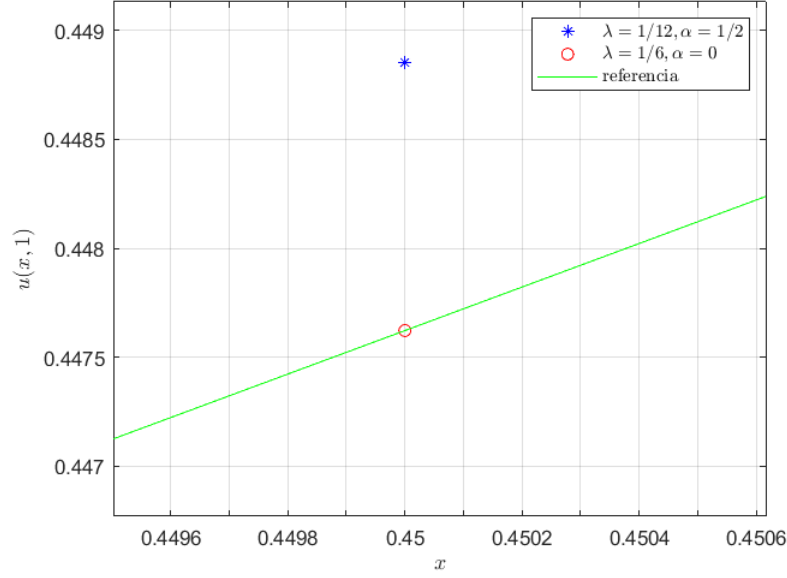
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\mathbf{g}_n = \begin{pmatrix} t_n(1 - t_n)^2 + \alpha(t_{n+1}(1 - t_{n+1})^2) - t_n(1 - t_n)^2 \\ 0 \\ \vdots \\ t_n + \alpha(t_{n+1} - t_n) \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

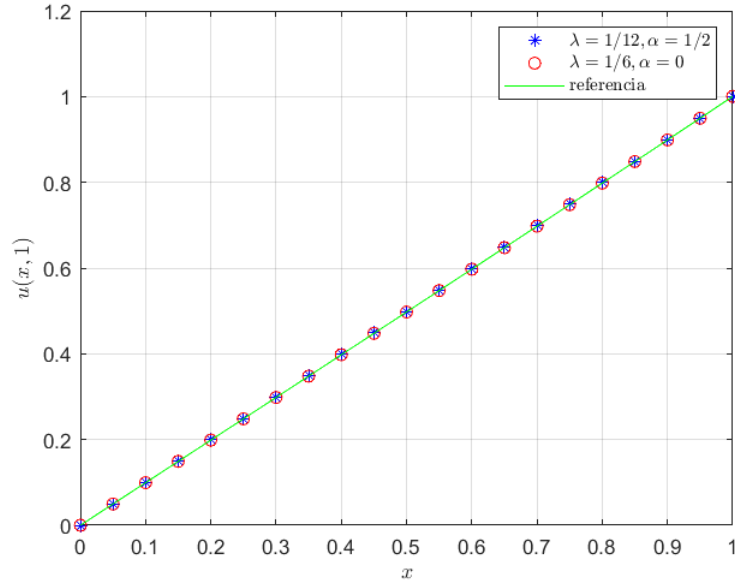
Se distinguen las dos situaciones especificadas:

- (i) ( $\alpha = 1/2$ ,  $\lambda = 1/12$ ): En esta situación, el método a formular es el *Crank-Nicolson*. La visualización numérica está adjunta en los códigos.
- (ii) ( $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 1/6$ ): La visualización numérica está adjunta en los códigos.

- b) La siguiente figura presenta la comparación entre los resultados numéricos obtenidos para la situación (i), (ii) y la solución de referencia. A partir de esto, podemos concluir que la combinación de parámetros (i), es decir,  $\alpha = 1/2$ ,  $\lambda = 1/12$  ofrece una aproximación a la solución exacta. Por lo tanto, escogemos el sistema:



**Figura 6:** Aproximaciones de (i), (ii) y la solución de referencia en  $t = 1$  (con zoom)



**Figura 7:** Aproximaciones de (i), (ii) y la solución de referencia en  $t = 1$

A continuación se muestra el código realizado en matlab que nos ayudo a obtener las aproximaciones

```

1 clear all;close all;clc;
2 dx = 0.05; alpha = 1/2; lambda = 1/12;
3 dt = lambda*(dx)^2;x = [0:dx:1];t = [0:dt:1];
4 N = (1/dx) - 1;
5 B = diag((-1)*(ones(1,N-1)),1) + diag(2*ones(1,N)) + diag((-1)*(ones(1,N-1)),-1);
6 I = eye(N);
7 g = zeros(N,length(t));
8 u = zeros(N,length(t));
9 for j = 1:N
10     y = j*dx;
11     u(j,1) = sin(y*pi);
12 end
13 g = zeros(N,length(t));% matriz que contiene a los g_{n}
14 % vector g_{n}
15 for i = 0:length(t)-1
16     g(1,i+1) = i*dt*(1-i*dt)^2 + alpha*((i+1)*dt*(1-(i*dt))^2 - i*dt*(1-i*dt)^2);
17     g(19,i+1) = i*dt + alpha*((i+1)*dt - i*dt);
18 end
19 %Calculo de u
20 for k = 1:length(t) %Claculo de los u_{n}
21     u(:,k+1) = (I+2*B)\((I-2*B)*u(:,k) + 4*g(:,k));
22 end
23 u0n = ones(1,length(t));
24 u1n = ones(1,length(t));
25 for l = 0:length(u0n)
26     r = l*dt;
27     u0n(l+1) = r*(1-r)^2;
28     u1n(l+1) = r;
29 end
30 U = [u0n;u;u1n];
31 plot(x,U(:,4802),'b*')
32 hold on
33 grid on
34 % Caso alpha = 0 y lamda = 1/6
35 dx2 = 0.05; alpha2 = 0; lambda2 = 1/6;
36 dt2 = lambda2*(dx2)^2;x2 = [0:dx2:1];t2 = [0:dt2:1];
37 N2 = (1/dx2) - 1;
38 B2 = diag((-1)*(ones(1,N-1)),1) + diag(2*ones(1,N)) + diag((-1)*(ones(1,N-1)),-1);
39 I2 = eye(N);
40 g2 = zeros(N2,length(t2));
41 u2 = zeros(N2,length(t2));
42 for j = 1:N
43     y = j*dx;
44     u2(j,1) = sin(y*pi);
45 end
46 g2 = zeros(N2,length(t2));
47 % vector g_{n}
48 for i = 0:length(t)-1
49     g2(1,i+1) = i*dt2*(1-i*dt2)^2 + alpha2*((i+1)*dt2*(1-(i*dt2))^2 - i*dt2*(1-i*dt2)^2);
50     g2(19,i+1) = i*dt2 + alpha2*((i+1)*dt2 - i*dt2);
51 end
52 %Calculo de u
53 for k = 1:length(t2)

```

```

54     u2(:,k+1) = (I2+2*B2)\((I2-2*B2)*u2(:,k) + 4*g2(:,k));
55 end
56 u0n2 = ones(1,length(t2));
57 u1n2 = ones(1,length(t2));
58 for l = 0:length(u0n2)
59     r = l*dt2;
60     u0n2(l+1) = r*(1-r)^2;
61     u1n2(l+1) = r;
62 end
63 U2 = [u0n2;u2;u1n2];
64 plot(x,U2(:,2402),'ro')
65 %Solucion referencia
66 dx3 = 0.05; alpha3 = 0; lambda3 = 1/6;
67 dt3 = lambda3*(dx3)^2;x3 = [0:dx3:1];t3 = [0:dt3:1];
68 N3 = (1/dx3) - 1;
69 B3 = diag((-1)*(ones(1,N-1)),1) + diag(2*ones(1,N)) + diag((-1)*(ones(1,N-1)),
    -1);
70 I3 = eye(N);
71 g3 = zeros(N3,length(t3));
72 u3 = zeros(N3,length(t3));
73 for j = 1:N
74     y = j*dx;
75     u3(j,1) = sin(y*pi);
76 end
77 g3 = zeros(N3,length(t3));
78 % vector g_{n}
79 for i = 0:length(t)-1
80     g3(1,i+1) = i*dt3*(1-i*dt3)^2 + alpha3*((i+1)*dt3*(1-(i*dt3))^2 - i*dt3*(1-
        i*dt3)^2);
81     g3(19,i+1) = i*dt3 + alpha3*((i+1)*dt3 - i*dt3);
82 end
83 %Calculo de u
84 for k = 1:length(t3)
85     u3(:,k+1) = (I3+2*B3)\((I3-2*B3)*u3(:,k) + 4*g3(:,k));
86 end
87 u0n3 = ones(1,length(t3));
88 u1n3 = ones(1,length(t3));
89 for l = 0:length(u0n3)
90     r = l*dt3;
91     u0n3(l+1) = r*(1-r)^2;
92     u1n3(l+1) = r;
93 end
94 U3 = [u0n3;u3;u1n3];
95 plot(x,U3(:,2402),'g')
96 legend('$\lambda = 1/12$, \alpha = 1/2$', '$\lambda = 1/6$, \alpha = 0$', '
    referencia','interpreter','latex')
97 xlabel('$x$', 'interpreter','latex')
98 ylabel('$u(x,1)$', 'interpreter','latex')

```

**Problema 3.** Analizar las propiedades de consistencia y convergencia (en dependencia del valor de  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ ) de los siguientes métodos para  $u_t = u_x$  :

a) El método de Friedrichs:

$$u_{j,n+1} = \frac{1}{2} ((1 + \lambda)u_{j+1,n} + (1 - \lambda)u_{j-1,n}).$$

b) El método de Lax-Wendroff:

$$u_{j,n+1} = u_{j,n} + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) + \frac{1}{2}\lambda^2(u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}).$$

c) El método del salto de rana:

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + \lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}).$$

## Solución

a) El método de Friedrichs:

$$\begin{aligned} u_{j+1,n} &= u_{j,n} + \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u_{j-1,n} &= u_{j,n} - \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u_{j,n+1} &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

El método de Friedrichs se puede reescribir como:

$$L_n[u] = u_{j,n+1} - \frac{1}{2} [u_{j+1,n} + u_{j-1,n} + \lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n})]$$

Mediante la expansión de series de Taylor, se tiene que:

- $u_{j+1,n} + u_{j-1,n} = 2u_{j,n} + \Delta x^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$
- $u_{j+1,n} - u_{j-1,n} = 2\Delta x \partial_x u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$

Así, con esto tenemos que:

$$\begin{aligned} L_n[u] &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\quad - \frac{1}{2} [2u_{j,n} + \Delta x^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \lambda(2\Delta x \partial_x u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3))] \\ &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\quad - u_{j,n} - \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^3) - \Delta t \partial_x u_{j,n} + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ &= \Delta t (\partial_t u_{j,n} - \partial_x u_{j,n}) + \frac{1}{2} (\Delta t^2 \partial_{tt} u_{j,n} - \Delta x^2 \partial_{xx} u_{j,n}) + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta t^2 \partial_{tt} u_{j,n}) + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{L_n[u]}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left( \Delta t \partial_{tt} u_{j,n} - \frac{\Delta x}{\lambda} \partial_{xx} u_{j,n} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)\end{aligned}$$

Así el método de Friedrichs es de primer orden.

### Convergencia:

El método de Friedrichs se puede reescribir como sigue

$$u_{j,n+1} = \frac{1}{2} \{ (1 + \lambda) T^1 + (1 - \lambda) T^{-1} \} u_{j,n}$$

definiendo  $\phi := k\Delta x$  y aplicando la sustitución  $T^\nu \mapsto e^{i\nu\phi}$  y así la "matriz" de amplificación queda

$$G(\Delta t, k) = \frac{1}{2} (1 + \lambda) e^{i\phi} + \frac{1}{2} (1 - \lambda) e^{-i\phi}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad \Delta t > 0$$

Para el caso escalar, la condición de estabilidad se estudia a partir de  $|G(\Delta t, k)|$ , por otro lado

$$\begin{aligned}|G(\Delta t, k)|^2 &= \left| \frac{1}{2} (1 + \lambda) e^{i\phi} + \frac{1}{2} (1 - \lambda) e^{-i\phi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} |e^{i\phi} + \lambda e^{i\phi} + e^{-i\phi} - \lambda e^{-i\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\cos \phi + i \sin \phi + \lambda \cos \phi + i \lambda \sin \phi + \cos \phi - i \sin \phi - \lambda \cos \phi + i \lambda \sin \phi|^2 \\ &= |\cos \phi + i \lambda \sin \phi|^2 \\ &= \cos^2 \phi + \lambda^2 \sin^2 \phi \\ &\leq \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \quad (\text{Si } \lambda \leq 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

notar que si  $\lambda \leq 1$

$$|G(\Delta t, k)|^2 \leq 1 \iff |G(\Delta t, k)| \leq 1$$

y por tanto el método es convergente para  $\lambda \in (0, 1]$

b) El método de Lax-Wendroff:

$$u_{j,n+1} = u_{j,n} + \frac{1}{2} \lambda (u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n})$$

La expansión en series de Taylor de  $u_{j,n+1}$ ,  $u_{j+1,n}$ ,  $u_{j-1,n}$  quedan como sigue:

$$\begin{aligned}u_{j,n+1} &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ u_{j+1,n} &= u_{j,n} + \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ u_{j-1,n} &= u_{j,n} - \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4)\end{aligned}$$

El método de Lax-Wendroff se puede reescribir como:

$$L_h[u] = u_{j,n+1} - u_{j,n} - \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) - \frac{1}{2}\lambda^2(u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}) = 0$$

además:

$$\begin{aligned}(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) &= 2\Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ (u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}) &= 2u_{j,n} + \Delta x^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) - 2u_{j,n}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}L_h[u] &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^4) - u_{j,n} \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda \left( 2\Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda^2 \left( \Delta x^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\ &= \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ &\quad - \Delta t \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta t \Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \lambda(\Delta x^4) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Delta t^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \lambda^2 \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &= \Delta t (\partial_t u_{j,n} - \partial_x u_{j,n}) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &\quad - \frac{\Delta t \Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \lambda \mathcal{O}(\Delta x^4) - \frac{1}{2}\Delta t^2 \partial_{xx} u_{j,n} + \lambda^2 \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} (\partial_{tt} u_{j,n} - \partial_{xx} u_{j,n}) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta t \Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t^4) + \lambda^2 \mathcal{O}(\Delta x^4) + \lambda \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &= \Delta t \left( \frac{\Delta t}{2} (\partial_{tt} u_{j,n} - \partial_{xx} u_{j,n}) + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} \right) - \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ &\quad + (\lambda^2 + \lambda) \mathcal{O}(\Delta x^4)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{||L_h[u]||}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \Delta t (\partial_{tt} u_{j,n} - \partial_{xx} u_{j,n}) + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4) (\lambda^2 + \lambda) \right] \\ &= \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente de segundo orden.

## Convergencia

El método de Lax-Wendroff se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
 u_{j,n+1} &= u_{j,n} + \frac{\lambda}{2}u_{j+1,n} - \frac{\lambda}{2}u_{j-1,n} + \frac{\lambda^2}{2}u_{j+1,n} - \lambda^2u_{j,n} + \frac{\lambda^2}{2}u_{j-1,n} \\
 &\Leftrightarrow u_{j,n+1} = (1 - \lambda^2)u_{j,n} + \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)u_{j+1,n} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)u_{j-1,n} \\
 &\Rightarrow u_{j,n+1} = \left\{ (1 - \lambda^2)T^0 + \frac{\lambda}{2}(1 + \lambda)T^1 + \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)\lambda T^{-1} \right\} u_{j,n}
 \end{aligned}$$

definiendo  $\phi = k\Delta x$  y aplicando la sustitución  $T^\nu \mapsto e^{i\nu\phi}$  y así la matriz de amplificación queda:

$$\begin{aligned}
 G(\Delta t, k) &= (1 - \lambda^2) + \frac{\lambda}{2}(1 + \lambda)e^{i\phi} + \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)e^{-i\phi} \\
 &= (1 - \lambda^2) + \frac{\lambda}{2}e^{i\phi} + \frac{\lambda^2}{2}e^{i\phi} + \frac{\lambda^2}{2}e^{-i\phi} - \frac{\lambda}{2}e^{-i\phi} \\
 &= (1 - \lambda^2) + \frac{\lambda}{2}(\cos \phi + i \sen \phi) + \frac{\lambda^2}{2}(\cos \phi + i \sen \phi) + \frac{\lambda^2}{2}(\cos \phi - i \sen \phi) \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2}(\cos \phi - i \sen \phi) \\
 &= (1 - \lambda^2) + \frac{\lambda}{2}\cos \phi + \frac{\lambda i}{2}\sen \phi + \frac{\lambda^2}{2}\cos \phi + \frac{\lambda^2 i}{\lambda}\sen \phi + \frac{\lambda^2}{2}\cos \phi - \frac{\lambda^2 i}{2}\sen \phi \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2}\cos \phi + \frac{i\lambda}{2}\sen \phi \\
 &= (1 - \lambda^2) + \lambda i \sen \phi + \lambda^2 \cos \phi
 \end{aligned}$$

Ahora acotamos  $|G(\Delta t, k)|^2$

$$\begin{aligned}
 |G(\Delta t, k)|^2 &= \left| (1 - \lambda^2) + \lambda^2 \cos \phi + \lambda i \sen \phi \right|^2 \\
 &\leq |1 - \lambda^2|^2 + |\lambda^2 \cos \phi + \lambda i \sen \phi|^2 \\
 &= |1 - \lambda^2|^2 + \lambda^4 \cos^2 \phi + \lambda^2 \sen^2 \phi \\
 &\leq |1 - 1|^2 + \cos^2 \phi + \sen^2 \phi \quad (\text{si } \lambda \leq 1) \\
 &= 0 + \cos^2 \phi + \sen^2 \phi = 1
 \end{aligned}$$

notar que si  $\lambda \leq 1$ , se tiene que

$$|G(\Delta t, k)|^2 \leq 1 \iff |G(\Delta t, k)| \leq 1$$

Por lo tanto el método es convergente si y solo si  $\lambda \in (0, 1]$



c) El método del salto de rana:

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + \lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n})$$

El desarrollo en series de Taylor  $u_{j,n+1}, u_{j,n-1}, u_{j+1,n}, u_{j-1,n}$  queda como sigue:

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} &= u_{j,n} + \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^4}{18} \partial_{tttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^5) \\ u_{j,n-1} &= u_{j,n} - \Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u_{j,n} - \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u_{j,n} + \frac{\Delta t^4}{18} \partial_{tttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^5) \\ u_{j+1,n} &= u_{j,n} + \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \frac{\Delta x^4}{18} \partial_{xxxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\ u_{j-1,n} &= u_{j,n} - \Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u_{j,n} - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u_{j,n} + \frac{\Delta x^4}{18} \partial_{xxxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \end{aligned}$$

Luego el método salto de rana se puede reescribir como sigue:

$$L_h[u] = u_{j,n+1} - u_{j,n-1} - \lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n})$$

Además, notemos que:

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} - u_{j,n-1} &= 2\Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{3} \partial_{ttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^5) \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( 2\Delta x \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta x^3}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right) \\ &= 2\Delta t \partial_x u_{j,n} + \frac{\Delta t \Delta x^2}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ \Rightarrow L_h[u] &= 2\Delta t \partial_t u_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{3} \partial_{ttt} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta t^5) - 2\Delta t \partial_x u_{j,n} - \frac{\Delta t \Delta x^2}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &= 2\Delta t (\partial_t u_{j,n} - \partial_x u_{j,n}) + \frac{\Delta t^3}{3} \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta t \Delta x^2}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \Delta t \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \\ &= \Delta t \left( \Delta t^2 \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta x^2}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \right) \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\|L_h[u]\|}{\Delta t} = \Delta t^2 \partial_{ttt} u_{j,n} - \frac{\Delta x^2}{3} \partial_{xxx} u_{j,n} + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

**Convergencia:**

El método de salto de rana se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} &= v_{j,n} + \lambda(u_{j,n} - u_{j-1,n}) \\ v_{j,n+1} &= u_{j,n} \end{aligned}$$

y así:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{j,n+1} \\ v_{j,n+1} \end{pmatrix} &= \begin{Bmatrix} v_{j,n} + \lambda u_{j,n} - \lambda u_{j-1,n} \\ u_{j,n} \end{Bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{j,n+1} \\ v_{j,n+1} \end{pmatrix} &= \begin{Bmatrix} T^0 v_{j,n} + \lambda T^1 u_{j,n} - \lambda T^{-1} u_{j,n} \\ T^0 u_{j,n} \end{Bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{i,n+1} \\ v_{i,n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda (T^1 \cdot T^{-1}) & T^0 \\ T^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{j,n} \\ v_{i,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definiendo  $\phi := k\Delta x$  y la aplicación de sustitución  $T^\nu \mapsto e^{i\nu\phi}$  obtenemos la matriz de a amplificación:

$$G(\Delta t, k) = \begin{pmatrix} \lambda(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k \in \mathcal{L}, \Delta t > 0 \Leftrightarrow G(\Delta t, k) = \begin{pmatrix} 2\lambda i \sin \phi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un simple calculo nos permite deducir que los valores propios de  $G(\Delta t, k)$  son:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_i \sin \phi + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \\
\sigma_2 &= \lambda_i \sin \phi - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &\geq \lambda^2 \sin^2 \phi \quad (\sin^2 \phi \leq 1) \\
&\Rightarrow \lambda^2 \leq 1 \quad (\lambda > 0) \\
&\Rightarrow \lambda \leq 1
\end{aligned}$$

para  $1 - \lambda^2 \sin^2 \phi \geq 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\sigma_1|^2 &= \lambda^2 \sin^2 \phi + 1 - \lambda^2 \sin^2 \phi = 1 \\
|\sigma_2|^2 &= \lambda^2 \sin^2 \phi + 1 - \lambda^2 \sin^2 \phi = 1 \\
\Rightarrow r_\sigma(\sigma) &= 1
\end{aligned}$$

Entonces se cumple la condición de estabilidad von neumann para  $1 \geq \lambda$  Como G no es una matriz normal, no podemos decir nada respecto a la convergencia del método.

**Problema 4.** Se considera un problema de valores iniciales de la forma:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}\mathbf{u}_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0; \quad \mathbf{u}(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} v(x, t) \\ w(x, t) \end{pmatrix}, \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

y donde se supone que  $\mathbf{A}$  es regular y

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) > 0. \quad (7)$$

a) Sea  $\lambda := \Delta t / \Delta x$ . Para la solución numérica de (10) se puede definir el método de diferencias:

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (8)$$

Alternativamente podemos definir el método

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} + v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} + w_{j-1,n} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

En ambos casos se calcula  $(v_{j,0}, w_{j,0}) = (f_j, g_j)$  para  $j \in \mathbb{Z}$ . Demostrar que ambos métodos (12) y (13) son métodos de paso simple que son consistentes de segundo orden en  $\Delta x$  y de primer orden en  $\Delta t$ .

b) Utilice ambos métodos para calcular un valor aproximado de  $u(1/2, 1/2)$ , donde  $u$  es la solución del problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = \cos(\pi x), \quad x \in [0, 1]. \quad (10)$$

Utilice  $\Delta x = 1/8$  y el valor  $\Delta t$  máximo admisible.

c) ¿Cuál de los métodos (8) y (9) es preferible si deseamos calcular la solución hasta un tiempo  $T$  grande y con un valor  $\Delta x$  relativamente pequeño? Fundamente su respuesta por un análisis de estabilidad.

## Solución

a) Definamos el operador de diferencias del método (8) como sigue:

$$L^h[u] = \begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}$$

Donde  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Denotemos además por  $L$  el operador diferencial que define el PVI,  $L[\mathbf{u}] =$

$\mathbf{u}_t - \mathbf{A}\mathbf{u}_x$ . Sea  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = (v(x, t), w(x, t))^T$  la solución exacta de (9). Se tiene que:

$$\begin{aligned}
L[\mathbf{u}] - L^h\mathbf{u} &= - \begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} v(x_j, t_n) + (\Delta t)v_t(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\ w(x_j, t_n) + (\Delta t)w_t(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(x_j, t_n) \\ w(x_j, t_n) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} v(x_j, t_n) + (\Delta x)v_x(x_j, t_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}v_{xx}(x_j, t_n) \\ w(x_j, t_n) + (\Delta x)w_x(x_j, t_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}w_{xx}(x_j, t_n) \\ -v(x_j, t_n) + (\Delta x)v_x(x_j, t_n) - \frac{(\Delta x)^2}{2}v_{xx}(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ -w(x_j, t_n) + (\Delta x)w_x(x_j, t_n) - \frac{(\Delta x)^2}{2}w_{xx}(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) \\ \mathcal{O}(\Delta t) \end{pmatrix} + \lambda\mathbf{A} \begin{pmatrix} (\Delta x)v_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ (\Delta x)w_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Usando  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
L[\mathbf{u}] - L^h\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) \\ \mathcal{O}(\Delta t) \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} (\Delta t)v_x(x_j, t_n) + (\Delta t)\mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ (\Delta t)w_x(x_j, t_n) + (\Delta t)\mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que el método (8) es consistente de primer orden en  $\Delta t$  y segundo orden en  $\Delta x$ . Definimos ahora el operador de diferencias asociado al método (9):

$$\tilde{L}^h[u] = \begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} + v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} + w_{j-1,n} \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}$$

Con  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Evaluando este operador en la solución exacta, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
L[\mathbf{u}] - \tilde{L}^h[u] &= - \begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} + v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} + w_{j-1,n} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} v(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ w(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( v(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x) + v_x(x_j, t_n) \right) \\ \frac{1}{2} \left( w(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x) + w_x(x_j, t_n) \right) \\ +v(x_j, t_n) + (\Delta x) + v_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ +w(x_j, t_n) + (\Delta x) + w_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} \begin{pmatrix} v(x_j, t_n) + (\Delta x)v_x(x_j, t_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}v_{xx}(x_j, t_n) \\ w(x_j, t_n) + (\Delta x)w_x(x_j, t_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2}w_{xx}(x_j, t_n) \\ -v(x_j, t_n) + (\Delta x)v_x(x_j, t_n) - \frac{(\Delta x)^2}{2}v_{xx}(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ -w(x_j, t_n) + (\Delta x)w_x(x_j, t_n) - \frac{(\Delta x)^2}{2}w_{xx}(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} + \lambda\mathbf{A} \begin{pmatrix} (\Delta x)v_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ (\Delta x)w_x(x_j, t_n) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Recordando que  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , se llega a que:

$$\begin{aligned} L[\mathbf{u}] - \tilde{L}^h[u] &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} (\Delta t)v_x(x_j, t_n) + (\Delta t)\mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ (\Delta t)w_x(x_j, t_n) + (\Delta t)\mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta t) \\ \mathcal{O}(\Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Así concluimos que el método (9) es consistente de primer orden en  $\Delta t$  y segundo orden en  $\Delta x$ .

- b) Para poder aplicar los métodos señalados, necesitamos convertir (10) a un sistema equivalente de primer orden. Para ello definimos:

$$\begin{aligned} v(x, t) &:= u(x, t), & w(x, t) &:= \int_0^x \cos(\pi \xi) d\xi + \int_0^t u_x(x, \tau) d\tau \\ & & &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \int_0^t u_x(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} v_t &= u_t = \int_0^t u_{\tau\tau} d\tau + \cos(\pi x) = \int_0^t u_{xx} d\tau + \cos(\pi x) = w_x \\ w_t &= u_x = v_x \\ v(x, 0) &= u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ w(x, 0) &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) =: G(x) \end{aligned}$$

Por lo que el PVI (10) se puede escribir de la forma (6), identificando:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} v(x, t) \\ w(x, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{pmatrix}$$

Donde observamos que la matriz  $A$  es regular y satisface la condición  $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) > 0$ . Al aplicar el método (8) al PVI obtenemos  $u^h(1/2, 1/2) = 0.0358$ , mientras que el método (9) aplicar

- c) De acuerdo a lo observado en el apunte, corroboraremos que el método (9) es preferido por sobre (8). Para ello, escribimos (8) en la forma:

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \{\mathbf{I}T^0 + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}(T^1 - T^{-1})\} + \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

donde identificamos el operador:

$$\mathbf{C}_1(\Delta t) = \mathbf{I}T^0 + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}(T^1 - T^{-1})$$

En lo que sigue, notamos que podemos escribir las matrices de amplificación correspondientes en la forma presentada en (5.84):

$$\mathbf{G}(\Delta t, k) = \mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad \Delta t > 0$$

Del mismo modo que en el Ejemplo 5.2, como  $\mathbf{A}$  es simétrica, es posible notar que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}\mathbf{G}^* &= (\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A})(\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A})^* \\
&= (\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A})(\mathbf{I} - i\lambda \sin \phi \mathbf{A}^*) \\
&= (\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A})(\mathbf{I} - i\lambda \sin \phi \mathbf{A}) \\
&= (\mathbf{I} - i\lambda \sin \phi \mathbf{A})(\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A}) \\
&= (\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A})^*(\mathbf{I} + i\lambda \sin \phi \mathbf{A}) \\
&= \mathbf{G}^*\mathbf{G}
\end{aligned}$$

Es decir, las matrices de amplificación asociadas al operador de diferencias  $\mathbf{C}_1(\Delta t)$  son normales. Esto permite que (5.83) sea una condición suficiente para asegurar la convergencia del método (9). En nuestro caso, el radio espectral de las matrices  $G$  corresponde a  $r_\sigma(\mathbf{G}) = (1 + \lambda^2 \sin^2 \phi r_\sigma^2(A))^{1/2}$ . Del mismo modo que en los apuntes, dado que  $r_\sigma(\mathbf{A}) > 0$ , la condición de *von Neumann* se satisface para todo  $\phi = k\Delta x \in [0, 2\pi]$  sí y sólo si:

$$\exists \beta \geq 0 : \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \beta$$

Siguiendo con lo observado en clases, la condición es desfavorable, pues si se considera un tamaño  $\Delta x$  relativamente pequeño, para preservar la convergencia del método, se deberá trabajar con un tamaño  $\Delta t$  mucho más pequeño, lo que incrementa en gran cantidad las ecuaciones a resolver. Consideremos ahora el método (9), y escribámoslo en la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{I}(T^1 + T^{-1}) + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}(T^1 - T^{-1}) \right\} \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Identificamos así a los operadores:

$$\mathbf{C}_1(\Delta t) = \frac{1}{2}\mathbf{I}(T^1 + T^{-1}) + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}(T^1 - T^{-1})$$

Lo que, de acuerdo a lo observado en los apuntes, permite deducir que las matrices de amplificación del método poseen la forma:

$$\mathbf{G}(\Delta t, k) = \cos \phi \mathbf{I} + i\lambda \phi \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad \Delta t > 0$$

De manera análoga al método anterior se puede deducir que  $\mathbf{G}$  es normal, lo que permite asegurar que la condición de *von Neumann* sea necesaria y suficiente para la convergencia del método de diferencias. En esta situación, la condición presentada a partir de la observación (5.86) de los apuntes,

$$\lambda \leq \frac{1}{r_\sigma(\mathbf{A})}$$

es necesaria y suficiente para la convergencia del método de diferencias. De este modo, si consideramos un  $\Delta x$  relativamente pequeño, como  $\lambda = \Delta x / \Delta x$ , debemos escoger un tamaño  $\Delta t$  más grande para preservar la condición de convergencia. Esto no provoca un incremento en la cantidad de ecuaciones a resolver.

Concluimos así que, si queremos calcular la solución hasta un tiempo  $T$  grande, con un valor de  $\Delta x$  relativamente pequeño, es recomendable utilizar el método (9) por sobre (8)

**Problema 5.** Se considera el problema de valores iniciales de la ecuación de la onda bidimensional:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (12)$$

a) Utilizando la substitución

$$\begin{aligned} w_0(x, y, t) &= u(x, y, t), \quad w_1(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, \tau) d\tau, \\ w_2(x, y, t) &= \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, \tau) d\tau \end{aligned}$$

transformar (15)-(16) a un sistema equivalente de primer orden

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{A}\mathbf{w}_x + \mathbf{B}\mathbf{w}_y, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (13)$$

y formular una condición inicial apropiada.

b) Para el sistema del primer orden (17) se considera el método de diferencias  $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{C}(\Delta t)\mathbf{w}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , donde definimos el operador de diferencias

$$\mathbf{C}(\Delta t) = \frac{1}{4} (T_x + T_x^{-1} + T_y + T_y^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_1 \mathbf{A} (T_x - T_x^{-1}) + \frac{1}{2} \lambda_2 \mathbf{B} (T_y - T_y^{-1}) \quad (14)$$

donde  $\lambda_1 := \Delta t / \Delta x$ ,  $\lambda_2 := \Delta t / \Delta y$ , y  $T_x$  y  $T_y$  sean los operadores de translación en la dirección de  $x$  e  $y$  por  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , respectivamente. Calcular las matrices de amplificación de  $\mathbf{C}(\Delta t)$  y demostrar que el método converge para

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$$

## Solución

a) Sea

$$\begin{aligned} \omega_0(x, y, t) &= u(x, y, \tau), \quad \omega_1(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, \tau) d\tau \\ \omega_2(x, y, t) &= \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable del enunciado, se tiene:

$$\omega_0(x, y, t) = u(x, y, t) \Rightarrow \partial_t \omega_0 = \partial_t u$$

además

$$\begin{aligned}
\partial_t \omega_1 &= \partial_t \left( \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi + \int_0^t \partial_x u(x, y, \tau) d\tau \right) \\
&= 0 + \partial_t \left( \int_0^t \partial_x u(x, y, \tau) d\tau \right) = \partial_x u(x, y, t) = \partial_x \omega_0 \\
\partial_t \omega_2 &= \partial_t \left( \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta + \int_0^t \partial_y u(x, y, \tau) d\tau \right) \\
&= 0 + \partial_t \left( \int_0^t \partial_y u(x, y, \tau) d\tau \right) = \partial_y u(x, y, t) = \partial_y \omega_0 \\
\partial_x \omega_1 &= \partial_x \left( \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi + \int_0^t \partial_x u(x, y, \tau) d\tau \right) \\
&= \frac{1}{2} g(x, y) + \int_0^t \partial_{xx} u(x, y, \tau) d\tau \\
\partial_y \omega_2 &= \partial_y \left( \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta + \int_0^t \partial_y u(x, y, \tau) d\tau \right) \\
&= \frac{1}{2} g(x, y) + \int_0^t \partial_{yy} u(x, y, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
\partial_x \omega_1 + \partial_y \omega_2 &= \frac{1}{2} g(x, y) + \int_0^t \partial_{xx} u(x, y, \tau) d\tau + \frac{1}{2} g(x, y) + \int_0^t \partial_{yy} u(x, y, \tau) d\tau \\
&= g(x, y) + \int_0^t \partial_{xx} u(x, y, \tau) + \partial_{yy} u(x, y, \tau) d\tau \\
&= g(x, y) + \int_0^t \partial_{tt} u(x, y, \tau) d\tau \\
&= \partial_t u(x, y, \tau) = \partial_t \omega_0
\end{aligned}$$

así se tiene el sistema:

$$\begin{aligned}
\partial_t \omega_0 &= \partial_x \omega_1 + \partial_y \omega_2 \\
\partial_t \omega_1 &= \partial_x \omega_0 \\
\partial_t \omega_2 &= \partial_y \omega_0
\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
\omega_0(x, y, 0) &= u(x, y, 0) = f(x, y) \\
\omega_1(x, y, 0) &= \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi + \int_0^0 \partial_x u(x, y, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi, y) d\xi = G(x, y) \\
\omega_2(x, y, 0) &= \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta + \int_0^0 \partial_y u(x, y, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^y g(x, \eta) d\eta = H(x, y)
\end{aligned}$$

finalmente, reescribimos la EDP como sigue:

$$\begin{aligned}
W_t &= AW_x + BW_y \\
W(x, y, 0) &= \phi(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$



donde

$$W(x, y, z) = \begin{pmatrix} \omega_0(x, y, z) \\ \omega_1(x, y, z) \\ \omega_2(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ G(x, y) \\ H(x, y) \end{pmatrix}$$

- b) Definiendo  $\phi := K\Delta x$  y  $\varphi := K\Delta y$ , además definiendo las aplicaciones de sustitución  $T_x^\nu \mapsto e^{i\nu\phi}$  y  $T_y^\nu \mapsto e^{i\nu\varphi}$  obtenemos las matrices de amplificación:

$$\begin{aligned} G(\Delta t, K) &= \frac{1}{4}(e^{i\phi} + e^{-i\phi} + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})I + \frac{\lambda_1}{2} \cdot A(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) + \frac{\lambda_2}{2} \cdot B(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{1}{4}(\cos \phi + i \sin \phi + \cos \phi - i \sin \phi + \cos \varphi + i \sin \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi)I \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{2} \cdot A(\cos \phi + i \sin \phi - \cos \phi + i \sin \phi) + \frac{\lambda_2}{2} \cdot B(\cos \varphi + i \sin \varphi - \cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{4}(2 \cos \phi + 2 \cos \varphi)I + \frac{\lambda_1}{2} \cdot A(2i \sin \phi) + \frac{\lambda_2}{2} \cdot B(2i \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \phi + \cos \varphi)I + \lambda_1 \cdot A(i \sin \phi) + \lambda_2 \cdot B(i \sin \varphi) \end{aligned}$$

Luego, teniendo  $a := \frac{1}{2}(\cos \phi + \cos \varphi)$ ;  $b := \lambda_1 \sin \phi$  y  $c := \lambda_2 \sin \varphi$  tenemos que:

$$G(\Delta t, K) = \begin{pmatrix} a & bi & ci \\ bi & a & 0 \\ ci & 0 & a \end{pmatrix}$$

además:

$$G^*(\Delta t, K) = \begin{pmatrix} a & -bi & -ci \\ -bi & a & 0 \\ -ci & 0 & a \end{pmatrix}$$

Así la multiplicación es:

$$G(\Delta t, K) \cdot G^*(\Delta t, K) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & bc \\ 0 & bc & a^2 + c^2 \end{pmatrix} = G^*(\Delta t, K) \cdot G(\Delta t, K)$$

es decir,  $G(\Delta t, K)$  es normal. Teniendo esto en cuenta, se tiene que, una condición necesaria y suficiente para que el método converja es que se cumpla la condición de estabilidad de von-Neumann. Para probar lo anterior, procedemos a calcular los valores propios de  $G(\Delta t, K)$ , para

esto buscamos el polinomio característico de la matriz

$$\begin{aligned}
P(\sigma) &= \det \begin{pmatrix} a - \sigma & bi & ci \\ bi & a - \sigma & 0 \\ ci & 0 & a - \sigma \end{pmatrix} \\
&= ci(-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} bi & ci \\ a - \sigma & 0 \end{pmatrix} + (a - \sigma) \det \begin{pmatrix} a - \sigma & bi \\ bi & a - \sigma \end{pmatrix} (-1)^{3+3} \\
&= ci(-ci(a - \sigma)) + (a - \sigma)((a - \sigma)^2 - (bi)^2) \\
&= c^2(a - \sigma) + (a - \sigma)[(a - \sigma)^2 + b^2] \\
&= (a - \sigma)[c^2 + (a - \sigma)^2 + b^2] \\
&= (a - \sigma)[c^2 + a^2 - 2a\sigma + \sigma^2 + b^2] \\
&= (a - \sigma)[\sigma^2 - 2a\sigma + a^2 + b^2 + c^2]
\end{aligned}$$

Luego,  $P(\sigma) = 0 \iff (a - \sigma)[\sigma^2 - 2a\sigma + a^2 + b^2 + c^2] = 0$ . Esto es:

$$\sigma_1 = a \quad \sigma_{2,3} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2}}{2} = a \pm \sqrt{b^2 + c^2}i$$

Ahora calculando  $|\sigma_{1,2,3}|$ :

$$|\sigma_1| = \left| \frac{1}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} \cos \varphi \right| \leq \frac{1}{2} |\cos \phi + \cos \varphi| \leq \frac{1}{2} (|\cos \phi| + |\cos \varphi|) \leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$\begin{aligned}
|\sigma_{2,3}| &= \left| a \pm \sqrt{b^2 + c^2}i \right| \\
&= a^2 + b^2 + c^2 \\
&= \frac{1}{4} (\cos^2 \phi + 2 \cos \phi \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + \lambda_1^2 \sin^2 \phi + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi \\
&= \frac{1}{4} \cos^2 \phi + \lambda_1^2 \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cos \phi \cos \varphi \\
&\leq \frac{1}{4} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \frac{1}{4} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \cos \phi \cos \varphi \quad \left( \text{si } \lambda_1, \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \phi \cos \varphi \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
r_\sigma(G(\Delta t, K)) &\leq 1 & \left( \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \right) \\
\Rightarrow r_\sigma(G(\Delta t, K)) &\leq 1 + \mathcal{O}(\Delta t) & (\text{para } \Delta t \in (0, t], K \in \mathcal{L})
\end{aligned}$$

Como  $G(\Delta t, K)$  cumple con la condición de estabilidad de von-Neumann y como  $G(\Delta t, K)$  es normal, entonces se tiene que el método de diferencias converge para  $\lambda_1, \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$