UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Trabajo Grupal 1 Taller de Razonamiento Matemático I 525041-1
(Desarrollo propuesto)

1. Aplicando leyes de la lógica proposicional, simplificar a su mínima expresión **2 puntos**

$$\sim (p \quad \veebar \quad \sim q) \quad \rightarrow \quad \sim q\,.$$

Desarrollo: Tenemos

$$\begin{aligned}
\sim (p \quad \veebar \quad \sim q) \quad \rightarrow \quad \sim q &\Leftrightarrow \sim \Big[\sim (p \quad \veebar \quad \sim q)\Big] \quad \vee \quad \sim q \quad \text{(equiv. condicional)} \\
&\Leftrightarrow (p \quad \veebar \quad \sim q) \quad \vee \quad \sim q \quad \text{(doble negación)} \\
&\Leftrightarrow \Big[(p \wedge \sim (\sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)\Big] \vee \sim q \quad \text{(equiv. disyunción excluyente)} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \Big((\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\Big) \quad \text{(asociatividad de } \vee\text{)} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \sim q \quad \text{(absorción)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q) \quad \text{(distribución)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge \mathtt{V} \\
&\Leftrightarrow (p \vee \sim q)\,.
\end{aligned}$$

2. Expresar en lenguaje proposicional, el siguiente argumento lógico: "Cuando sea cumpleaños de Julia, Marcos la llevará a cenar afuera. Es el cumpleaños de Julia o Marcos trabaja hasta tarde. Marcos no llevó a Julia a cenar afuera. En consecuencia, Marcos trabajó hasta tarde". **2 puntos**
Desarrollo: Del texto, se identifican y definen las siguientes proposiciones lógicas:

- p: Hoy es el cumpleaños de Julia.
- q: Marcos lleva a Julia a cenar afuera.
- r: Marcos trabaja hasta tarde.

Luego, expresamos cada sentencia del enunciado en lenguaje proposicional:

- "Cuando sea cumpleaños de Julia, Marcos la llevará a cenar afuera": $p \rightarrow q$,
- "Es el cumpleaños de Julia o Marcos trabaja hasta tarde": $p \vee r$,
- "Marcos no llevó a Julia a cenar afuera": $\sim q$,
- "Marcos trabajó hasta tarde": r.

De esta manera, el argumento lógico queda expresado como:

$$\begin{array}{l}
p \rightarrow q \\
p \vee r \\
\sim q \\
\hline
r
\end{array}$$

Equivalentemente, también puede expresarse como $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q)] \rightarrow r$.

3. Aplicando el MÉTODO ABREVIADO, determinar si el siguiente argumento lógico es o no válido: $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

$$p \to (q \wedge r) \tag{1}$$
$$(s \vee \sim t) \to \sim q \tag{2}$$
$$t \leftrightarrow (\sim q \wedge \sim u) \tag{3}$$
$$\overline{\hspace{6em}} \tag{4}$$
$$u \to \sim p \tag{5}$$

Desarrollo: Aplicaremos el llamado MÉTODO ABREVIADO. Esto supone que las PREMISAS dadas en (1), (2) y (3) son VERDADERAS, mientras que la CONCLUSIÓN dada por (5) es FALSA. Esto nos permite inducir el siguiente razonamiento:

- De (5), se desprende (por la "regla del condicional") que u es `V` y $\sim p$ es `F`, es decir p es `V`.
- De (1), como p es `V` y la condicional es `V`, se debe tener que $q \wedge r$ es `V`, de donde se desprende (por la regla de la conjuncioón) que q y r tienen ambos valor de verdad `V`.
- De (2), en vista que la condicional es `V` y el consecuente $\sim q$ es `F`, debe tenerse que $s \wedge \sim t$ es `F`, de donde s es `F` y $\sim t$ es `F`, es decir t es `V`.
- Chequeando la premisa (3) con los valores de verdad ya determinados de las proposiciones involucradas, nos da que esta premisa debe ser `F`, lo cual no puede ser pues es `V` por suposición. Se ha obtenido así una CONTRADICCIÓN.

Finalmente, se concluye que el argumento lógico planteado, es VÁLIDO.

- $\sim(\sim p) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (doble negación),
- $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$ (conmutatividad de $\wedge$),
- $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$ (conmutatividad de $\vee$),
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \leftrightarrow p$ (conmutatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$ (asociatividad de $\vee$),
- $p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de $\wedge$),
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ (asociatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$),
- $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$),
- $\sim(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan para $\wedge$),
- $\sim(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan para $\vee$),
- $p \wedge (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (Ley de absorción para $\wedge$),
- $p \vee (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (Ley de absorción para $\vee$),
- $p \to q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$,
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \to q) \wedge (q \to p)$,
- $p \,\Delta\, q \quad \Leftrightarrow \quad p \veebar q \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$.