

Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán

Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema N°1: Lógica y Conjuntos

Clase N°6 - 21/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Conjuntos

Definición

Un conjunto es una colección bien definida de objetos bien definidos a los que llamamos elementos del conjunto.

Ejercicios

Sean A , B , C y D cuatro conjuntos definidos por:

$$A = \{a - 1 : (a \in \mathbb{N}) \wedge (a + 2 = 3 \vee 5 \leq a \leq 9)\},$$

$$B = \left\{ \frac{b-1}{2} : b \in \mathbb{N} \wedge b \text{ impar} \wedge b \text{ potencia de } 3 \text{ menor que } 28 \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{(-1)^c}{c} : c \in \mathbb{N} \wedge c \in [-3, 4[\right\},$$

$$D = \left\{ d : (d \in \mathbb{N}) \wedge (d^2 \geq 4 \wedge d^2 < 37) \right\}.$$

Describa por extensión los conjuntos anteriores y determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- (a) $(-1 \notin C \vee 6 \in D) \rightarrow 4 \in A$
- (b) $\sim (4 \in A \wedge 4 \in B) \leftrightarrow -\frac{1}{3} \in C$
- (c) todos los elementos de D son números pares,
- (d) un elemento de B es un número primo,
- (e) exactamente un elemento de A es un número compuesto.

Conjuntos

Inclusión de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A está contenido en B o que A es subconjunto de B y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es un elemento de B , es decir,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B)$$

Conjuntos

Igualdad de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A y B son iguales si tienen los mismos elementos y se denota por $A = B$. Lo anterior quiere decir que:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U : x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Conjuntos

Considerando la inclusión entre conjuntos podemos presentar las siguientes propiedades. Dados A, B y C tres conjuntos cualesquiera, se tiene que:

1. $A \subseteq A$
2. $\emptyset \subseteq A \subseteq U$
3. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

Ejemplos

Sean A , B , C y D los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}, \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

Demuestre que $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Conjuntos

Definición

Sea A un conjunto. Se define el conjunto de las partes de A por:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Ejemplos:

1. Determine el conjunto de las partes de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{\bullet\}$

(b) $A = \{1, 2\}$

(c) $C = \{a, b, \{a\}\}$

(d) $D = \{\emptyset, 1, 3, \{3\}\}$

2. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{\{\emptyset\}, 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{\{\emptyset\}, 1\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$$

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) $1 \in A$

(b) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

(c) $\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

(d) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

Ejemplos:

3. Dados los conjuntos A, B y C definidos por:

$$A = \{\{1\}, 2, 3\}, B = \{a, e, i\} \text{ y } C = \{\emptyset, 0, \{0\}\}$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $p : \{1\} \in A \rightarrow \{a\} \in B$

(b) $q : \{\{0\}\} \subseteq C \wedge 3 \in A$

(c) $r : (\{0\} \in C \vee \{1, 2\} \in A) \leftrightarrow (\{a, i\} \subseteq B \wedge \{\{0\}, 0\} \subseteq C)$

Operaciones entre Conjuntos

Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B y se denota por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

Operaciones entre Conjuntos

Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B y se denota por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$