Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 4 — viernes 14 de agosto de 2020

Entrega: lunes 24 de agosto de 2020, 23.00 horas

Problema 1. Se consideran las siguientes funciones $f_i : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} f_1(u,v,w,x,y) &:= x + y + u + w, \\ f_2(u,v,w,x,y) &:= x^2 - y^2 + u^2 - 2v^2 + w^2 + 1, \\ f_3(u,v,w,x,y) &:= x^3 + y^3 + u^4 - 3v^4 + 8w^4 + 2. \end{aligned}$$

a) ¿Las ecuaciones $f_i(u,v,w,x,y) = 0$, $i = 1, 2, 3$ definen implícitamente

$$u = \varphi_1(x,y), \quad v = \varphi_2(x,y), \quad \varphi_3(x,y)$$

en una vecindad del punto $P = (u = 1, v = -1, w = 0, x = 1, y = -1)$?

b) Si su respuesta es positiva, calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(1,-1), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(1,-1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Problema 2.

a) Dibujar el conjunto

$$\mathcal{M} := \bigl\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1],\ y \in [0,x],\ z \in [\sqrt{x^2+y^2}, 2] \bigr\}$$

y calcular la integral

$$I := \iiint_{\mathcal{M}} \sqrt{x} y^2 z \, \mathrm{d}(x,y,z).$$

b) Dibujar el siguiente conjunto y determinar su volumen:

$$\mathcal{N} := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0,\ x + y + z \leq \sqrt{2},\ x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Problema 3.

a) Se considera la integral

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{9x+9}}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{15} \int_{x-3}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Dibujar el dominio de integración $\mathcal{R}$, representar la integral cono integral iterada única y calcular su valor para $f(x,y)=y^2$.

b) Sea $\mathcal{Q} := [1,4]\times[1,2]$. Calcular

$$\iint\limits_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y), \quad \text{donde} \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{(x+y)^2} & \text{si } y \leq x \leq 2y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

c) Calcular

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

d) Demostrar que para $a>0$,

$$\int_0^a \left(\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 4. Se consideran los campos vectoriales $\vec{V}_1, \vec{V}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por

$$\vec{V}_1 := \{yz, xz, xy\}, \quad \vec{V}_2 := \{x^2y, x-z, xyz\},$$

además las curvas

$$\mathcal{K}_1 : \ [0,1] \ni t \mapsto (t,t^2,2) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{K}_2 : \ [0,1] \ni t \mapsto (t,t,2) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcular $\operatorname{rot}\vec{V}_1$ y $\operatorname{rot}\vec{V}_2$ y las cuatro siguientes integrales de línea, donde $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$:

$$\int_{\mathcal{K}_i} \vec{V}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_{\mathcal{K}_i} V_{j,1}\,\mathrm{d}x + V_{j,2}\,\mathrm{d}y + V_{j,3}\,\mathrm{d}z, \quad i,j=1,2.$$

Problema 5. Se considera el siguiente campo vectorial plano con el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{K}_\alpha(x,y) = \left\{ \alpha y + \tan x, \frac{\arctan y}{1+y^2} \right\}, \quad (x,y) \in \mathcal{G} := \bigl\{ (x,y) \mid |x| < \pi/2,\ y \in \mathbb{R} \bigr\}.$$

a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ una curva rectificable que conecte el punto inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{G}$ con el punto final $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{G}$. ¿Para qué valor de α la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_\alpha(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_{\mathcal{C}} K_{\alpha,1}\,\mathrm{d}x + K_{\alpha,2}\,\mathrm{d}y$$

depende solamente de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}_1$, pero no de $\mathcal{C}$?

b) Para el valor de α determinado en (a), hallar un potencial $\varphi(x,y)$ del campo vectorial $\vec{K}_\alpha(x,y)$.

c) Sean $\boldsymbol{x}_0 = (0, \pi/4)$, $\boldsymbol{x}_1 = (\pi/4, 0)$, y $\mathcal{C}$ el segmento recto que conecta ambos puntos. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_1(x, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Aviso: Escribir $\vec{K}_1$ como suma de dos campos vectoriales y aprovechar el resultado de (b).

Problema 6. Determinar las sigiuentes áreas de superficie:

a) de la parte del cilíndro $x^2 + z^2 = a^2$ interior a la superficie $y^2 = a(x + a)$, $a > 0$,

b) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por la superficie $z^2 = py$, $p > 0$,

c) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ recortada por $x^2 = 2\sqrt{2}y$ y el plano $z = 4$.