UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Listado 2 - Análisis Real II (525302)

Ejercicio 1. Demuestre que el álgebra de Borel $\mathcal{B}$ (la cual, según lo visto en clases, está generada por los intervalos abiertos (a,b)) está generada por la colección de rayos $\{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. De un ejemplo de función $f : X \to \mathbb{R}$ que no sea $\mathcal{X}$-medible, pero tal que $|f|$ y f^2 sí lo sean.

Ejercicio 3. Sea $f : X \to Y$ y $\mathcal{X}$ una σ-álgebra sobre X. Demuestre que $\mathcal{Y} := \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{X}\}$ es una σ-álgebra sobre Y.

Ejercicio 4. Sea $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función que toma finitos valores $y_1, \ldots, y_N$. Entonces, φ es medible si y sólo si $\forall n \in \{1, \ldots, n\}$, $E_n := \{x \in X : \varphi(x) = y_n\}$ es medible.

Ejercicio 5. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Entonces $\forall a > 0$,

$$f_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a, & \text{si } f(x) > a \\ -a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

es medible.

Ejercicio 6. Sea $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{C}$ una familia no vacía de subconjuntos de Y. Sea $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$. Demuestre que $\mathcal{S}\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}\left(\mathcal{S}(\mathcal{C})\right)$.

Ejercicio 7. Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible y f una función real definida en X. Demuestre que f es $\mathcal{X}$-medible si y sólo si $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$ para todo conjunto de Borel E.

Ejercicio 8. Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio medible, $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{X}$-medible y ψ una función Borel medible. Demuestre que $\psi \circ f$ es $\mathcal{X}$-medible.

Reemplace ψ por $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y demuestre que $\varphi \circ f$ es $\mathcal{X}$-medible.

Concepción, August 23, 2018
RRA/SCH/JMR/jmr