3.5. Problemas de máximos y mínimos absolutos.

Se considerarán dos situaciones posibles:

3.5.1. Funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado y acotado.-

Para una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el teorema de los valores extremos garantiza la existencia de puntos de máximo y de mínimo absolutos. ¿Cómo se encuentran estos puntos?

Si un punto de extremo absoluto pertenece al intervalo abierto $]a, b[$, entonces es claro que él también es un extremo relativo y por tanto es un punto crítico.

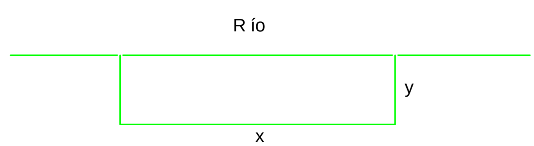
La otra posibilidad es que el punto extremo esté en la frontera del intervalo cerrado $[a, b]$, esto es, corresponda al punto a o al punto b.

Por lo tanto, el procedimiento para encontrar los extremos absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$ es:

(1) Se determinan todos los puntos críticos de f en $]a, b[$.

(2) Se evalúa f en cada uno de los puntos obtenidos en (1) y también se evalúa en a y en b. Se elije el mayor y el menor de todos los valores encontrados.

Ejemplo 53 *Un granjero dispone de 800 metros de cerca y desea cercar un terreno rectangular que limita con un río recto. Suponiendo que no necesita cercar a lo largo del **b**río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno de mayor área?*



Si x e y son las dimensiones del terreno, entonces se debe tener

$$\begin{aligned} x + 2y &= 800 \\ x &= 800 - 2y \end{aligned}$$

y el área del terreno está dada por

$$\begin{aligned} A &= xy \\ A(y) &= 800y - 2y^2 \ , \ 0 \le y \le 400 \end{aligned}$$

Se debe encontrar el máximo absoluto de A en $[0, 400]$.
(1) Puntos críticos de A en $]0, 400[$:

$$\begin{aligned} A'(y) &= 800 - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 200 \end{aligned}$$

(2) Se evalúa A en los puntos críticos y en los bordes del intervalo

$$\begin{aligned} A(200) &= 160000 - 80000 = 80000 \\ A(0) &= A(400) = 0 \end{aligned}$$

Luego, $y = 200$ *es el máximo absoluto de* A *en* $[0, 400]$.

Las dimensiones del terreno son $x = 400$ *mts.,* $y = 200$ *mts.*

3.5.2. Funciones continuas sobre un intervalo que no es cerrado y acotado.-

En este caso no se dispone del teorema de los valores extremos, por lo que la existencia de los extremos absolutos no está garantizada.

Sin embargo hay muchas situaciones en que la función tiene un **único** punto crítico x_0 en el intervalo I :

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > x_0$, entonces x_0 es un máximo absoluto de f.

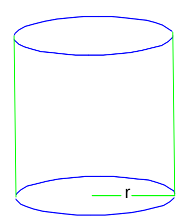
(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > x_0$, entonces x_0 es un mínimo absoluto de f.

Estos criterios se pueden reemplazar por:

(a) $\forall x \in I : f''(x) < 0 \Rightarrow x_0$ es un máximo absoluto de f.

(b) $\forall x \in I : f''(x) > 0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo absoluto de f.

Ejemplo 54 *Una empresa va a envasar su producto en una lata cilíndrica de 400 cm^3. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan la cantidad de material necesaria para su fabricación?*



La capacidad de la lata es $V = \pi r^2 h = 400$ *y luego* $h = \dfrac{400}{\pi r^2}$.

La cantidad de material que se requiere está dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ A(r) &= 2\pi r^2 + \frac{800}{r} \ , \ r > 0 \end{aligned}$$

Se debe encontrar el mínimo absoluto de A *en* $]0,\infty[$.
(1) Puntos críticos de A *en* $]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \; r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3{,}99 \end{aligned}$$

(2) $\forall r > 0 : A''(r) = 4\pi + \frac{1600}{r^3} > 0$. *Luego, el gráfico de* A *es cóncavo hacia arriba en todo su dominio y el único punto crítico es un mínimo absoluto.*

Las dimensiones del tarro que requiere la menor cantidad de material es

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3{,}99 \ cms. \\ h &= \frac{400}{\pi\left(\frac{200}{\pi}\right)^{2/3}} \approx 7.986 \ cms. \end{aligned}$$

4. Regla de L'Hôpital.-

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$.

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ (cualquiera de las cuatro combinaciones).

La regla de L'Hôpital entrega una poderosa herramienta para calcular límites de formas indeterminadas:

Teorema 55 *Sean* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *funciones derivables con* $g'(x) \neq 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ *una forma indeterminada* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *o* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right] = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = L$$

donde L *puede ser un número real (el límite existe) o bien* L *puede ser* $+\infty$ *o* $-\infty$ *(el límite diverge a* ∞*).*

El teorema también vale para $F.I.$ con $\lim\limits_{x\to b^-}$, $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Observación 56 *La demostración de este teorema se fundamenta en una generalización del teorema del valor medio que se enuncia a continuación:*

Teorema 57 *(del valor medio de Cauchy) Sean f y g derivables en $]a,b[$ y continuas en $[a,b]$. Si $g'(x) \neq 0$ en todo el intervalo, entonces existe un número $c \in \,]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Note que con $g(x) = x$ (o sea, g la función idéntidad) se obtiene el teorema del valor medio.

Dem. del teorema del valor medio de Cauchy.

Se aplica teorema de Rolle a la función

$$G(x) = [g(b)-g(a)]\,[f(x)-f(a)] - [g(x)-g(a)]\,[f(b)-f(a)]$$

en el intervalo $[a,b]$ (es claro que G es una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ con $G(a) = G(b) = 0$).

Queda de ejercicio concluir la demostración. ■

Dem. de la regla de L'Hopital.

Considere que f y g son derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$ y cuando $x \to a^+$: $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$.

Haciendo $f(a) = g(a) = 0$, obtenemos f y g continuas en $[a, a+h]$. Por TVM generalizado, existe $c_h \in \,]a, a+h[$ tal que

$$\frac{f'(c_h)}{g'(c_h)} = \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

Ahora tomando límite cuando $h \to 0$ se obtiene el resultado

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

■

Algunos ejemplos de utilización de la regla de L'Hopital:

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Calcule $f'(0)$.

   $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\sin x - x}{x^2}\right] = \ldots$