UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
28 de marzo de 2017
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 2

Ejercicios de práctica

1. Se define la siguiente relación $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = cb$$

   a) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que R es una relación de equivalencia.
   b) **(a realizar por los alumnos)** Caracterice los conjuntos: $[(1,0)]$ y $[(0,1)]$.
   c) Caracterice el conjunto $[(a,b)]$, para $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ arbitrario y grafique para varios casos.

2. Considere el conjunto de las secuencias de 0s y 1s de largo n $\{0,1\}^4$, y la siguiente relación:

$$\forall u, v \in \{0,1\}^4,\ u\ E\ v \Leftrightarrow |u|_0 = |v|_0 \wedge |u|_1 = |v|_1,$$

donde $|w|_a$ es el número de veces que aparece el caracter 'a' en la secuencia w. Se trata de una relación de equivalencia *(hacerlo en casa)*.

   a) **(a realizar por los alumnos)** Caracterice $[(0,1,1,0)]$.
   b) Calcule cuántas clases de equivalencia tiene el conjunto cuociente $\{0,1\}^4/E$.

3. Considere la siguiente relación en $\mathbb{R}$.

$$x \ \sim \ y \ \Leftrightarrow \ (\exists k \in \mathbb{Z})\ a + k = b$$

   a) Demuestre que $\sim$ es refleja y simétrica.
   b) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que $\sim$ es transitiva.
   c) Considere la función $f : [0,1[\to \mathbb{R}/\sim$ definida por:

$$f(x) = [x].$$

      1) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que es inyectiva.
      2) Demuestre que es sobreyectiva.
      3) Demuestre que es biyectiva.

Ejercicios propuestos

a) Demuestre las siguientes propiedades.

1) Si $R \subseteq A \times A$ es simétrica y transitiva, entonces es relación de equivalencia.
2) Si $R \subseteq A \times A$ es de orden y de equivalencia, entonces R es la relación de igualdad.
3) Si $R \subseteq A \times A$ es transitiva y $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ son tales que para cada $i \in \{1, ..., 3\}$ se cumple $a_i \ R \ a_i + 1$ y además $a_4 \ R \ a_1$, entonces $R = A \times A$.

b) Estudie, clasifique y grafique las siguientes relaciones:

1) $x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0$, en $\mathbb{R}$
2) $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} = x$, en $\mathbb{N}$
3) $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} = 20$, en $\mathbb{N}$
4) $x\mathcal{R}y \iff x^2 = y$, en $\mathbb{R}$
5) $X\mathcal{R}Y \iff \det(X) \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $\mathcal{M}_{22}(\{0, 1\})$
6) $X\mathcal{R}Y \iff X + Y = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathcal{M}_{nn}(\{0, 1\})$

c) Demuestre que la siguiente es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}^2$.

$$(a, b) \ S \ (c, d) \ \Leftrightarrow \ a + d = b + c$$

Considere ahora la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^2/S$ definida por $g(n) = [(n, 0)]$ si $n \geq 0$ y $g(n) = [(0, |n|)]$, si $n < 0$. Demuestre que g es biyectiva.

d) Demuestre que la siguiente relación en el conjunto $\mathcal{M}_{3\times3}(\{0, 1\})$ es de equivalencia y calcule cuántas clases hay en su conjunto cuociente.

$$M \ L \ N \ \Leftrightarrow \ M - N \text{ es diagonal}$$