Espacios vectoriales con producto interior

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

June 23, 2020

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interior en V es una función $\langle \cdot , \cdot \rangle \, : \, V \times V \to \mathbb{K}$ que verifica:

1. $\forall\, u\,,v\,,w\, \in\, V\, :\, \langle u+v, w\rangle\, =\, \langle u, w\rangle\, +\, \langle v, w\rangle\,,$
2. $\forall\, u\,,v\, \in\, V\, :\, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\, :\, \langle \lambda\, u, v\rangle\, =\, \lambda\, \langle u, v\rangle\,,$
3. $\forall\, u\,,v\, \in\, V\, :\, \langle u, v\rangle\, =\, \overline{\langle v, u\rangle}\,,$
4. $\forall\, u\, \in\, V\, :\, \langle u, u\rangle\, \geq\, 0\,,$
5. $\forall\, u\, \in\, V\, :\, \langle u, u\rangle\, =\, 0\, \Leftrightarrow\, u\, =\, \theta.$

Observaciones:

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces en general $\langle u, v\rangle \neq \langle v, u\rangle$. En cambio, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\forall\, u\,,v\, \in\, V\, :\, \langle u, v\rangle\, =\, \langle u, v\rangle$ (conmutatividad).

b) De las condiciones 2 y 3 se deduce: $\forall\, u\,,v\, \in\, V\, :\, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\, :\, \langle u, \lambda\, v\rangle\, =\, \overline{\lambda}\, \langle u, v\rangle$.

c) De la condición 3, se desprende:
$\forall\, u \in V\, :\, \langle u, u\rangle\, =\, \overline{\langle u, u\rangle} \quad \Rightarrow \quad \forall\, u \in V\, :\, \langle u, u\rangle \in \mathbb{R}.$

Ejemplos:

1. **Producto euclideano.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V := \mathbb{R}^{n\times 1}$, entonces la función $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} := x^t\, y \,=\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\,.$$

2. **Producto de Hermite.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $V := \mathbb{C}^{n\times 1}$, entonces la función $\langle\cdot,\cdot\rangle_H : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$, definida por

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{C}^{n\times 1} \,:\, \langle x, y\rangle_H := x^t\, \overline{y} \,=\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, \overline{y_j}\,.$$

3. Sea $V := \mathcal{C}([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua}\}$ y $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. La función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$\forall\, f\,, g \in V \,:\, \langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,,$$

define un producto interior en V.

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Luego,
A es simétrica si y sólo si $\forall\, x\,,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\,:\, \langle A\,x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, \langle x, A\,y\rangle_{\mathbb{R}^n}$.
Demostración: Primero, observamos que para $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x\,,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, se tiene

$$\langle B\,x, y\rangle \,=\, (B\,x)^t\,y \,=\, x^t\,B^t\,y \,=\, x^t\,(B^t\,y) \,=\, \langle x, B^t\,y\rangle_{\mathbb{R}^n}\,,$$

de donde se concluye la propiedad:

$$\forall\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,:\, \forall\, x\,,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\,:\, \langle B\,x, y\rangle \,=\, \langle x, B^t\,y\rangle_{\mathbb{R}^n}\,.$$

($\Rightarrow$) Hipótesis: A es simétrica. Luego, aplicando la propiedad anterior para $x\,,y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle A\,x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, \langle x, A^t\,y\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, \langle x, A\,y\rangle_{\mathbb{R}^n}\,,$$

y la conclusión se sigue.
($\Leftarrow$) Hipótesis: $\forall\, x\,,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\,:\, \langle A\,x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, \langle x, A\,y\rangle_{\mathbb{R}^n}$.
Eligiendo en particular $x := e_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $y := e_j \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ el i-ésimo y el j-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^{n\times 1}$, respectivamente, con $i\,,j \in \{1, ..., n\}$, tenemos

$$\langle A\,e_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, \langle e_i, A\,e_j\rangle_{\mathbb{R}^n}\,. \tag{1}$$

En vista que $\langle e_i, A\,e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, e_i^t\,A\,e_j \,=\, (A)_{ij} \,=\, a_{ij}$, y
$\langle A\,e_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} \,=\, (A\,e_i)^t\,e_j \,=\, e_i^t\,A^t\,e_j \,=\, (A^t)_{ij} \,=\, a_{ji}$, (1) nos permite afirmar que
$\forall\, i\,,j \in \{1, ..., n\}\,:\, a_{ij} \,=\, a_{ji}$, lo cual significa que $A \,=\, A^t$, y se concluye el resultado.

Definición: Sea $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se define la matriz adjunta de A por $A^* := \overline{A^t} := (\overline{a_{ji}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Además, se dice que A es hermitiana si $A^* = A$.

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Luego,
A es hermitiana si y sólo si $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^{n\times 1} : \langle A\,x, y\rangle_H = \langle x, A\,y\rangle_H$.
Demostración: análoga al caso real (se deja al estudiante).

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana (i.e. $A^* = A$). Entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
Demostración: Sea $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \backslash \{0\}$ un autopar de A. Esto implica que $A\,v = \lambda\,v$. Luego, usando el hecho que A es hermitiana, resulta

$$\lambda\,\langle v, v\rangle_H = \langle \lambda\,v, v\rangle_H = \langle A\,v, v\rangle_H = \langle v, A\,v\rangle_H = \langle v, \lambda\,v\rangle_H = \overline{\lambda}\,\langle v, v\rangle_H\,,$$

y como $v \neq \theta$, lo anterior implica que $\lambda = \overline{\lambda}$, de donde se concluye que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Corolario: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
Demostración: Puesto que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A también es hermitiana. El resultado se sigue de la proposición anterior.

Vectores ortogonales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que la función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ define una norma en V si verifica

1. $\forall\, v \in V : ||v|| \geq 0$,
2. $\forall\, v \in V : ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$,
3. $\forall\, v \in V : \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : ||\lambda\, v|| = |\lambda|\, ||v||$,
4. $\forall\, v\,, w \in V : ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (desigualdad triangular).

En tal caso, se dice que $(V, ||\cdot||)$ es un espacio normado.

Observación: Si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, entonces la función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\forall\, v \in V : ||v|| := \langle v, v\rangle^{1/2}$, es una norma, llamada norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Proposición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior. Entonces la norma inducida $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ verifica la ley del paralelogramo:
$\forall\, u\,, v \in V : ||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\,(||u||^2 + ||v||^2)$.
Esto nos dice que todo espacio vectorial con producto interior induce un espacio vectorial normado. El recíproco no siempre es cierto.
Ejemplo de norma no inducida por producto interno. Sea $V := \mathbb{R}^2$, sobre la cual consideramos la norma $\forall\, v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : ||v||_1 := |v_1| + |v_2|$. Para $u := (1, 0)$, $v := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, resulta $||u + v||_1^2 + ||u - v||_1^2 = 8 \neq 4 = 2\,(||u||_1^2 + ||v||_1^2)$.

Definiciones varias:

1. Sea $(V, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Si $v \in V$ es tal que $||v|| = 1$, se dice que v es un vector unitario (con respecto a $||\cdot||$).
2. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Si $u, v \in V$ son tales que $\langle u, v\rangle = 0$, se dice que u y v son vectores ortogonales. Además, un conjunto $S \subseteq V$ se llamará ortogonal si $\forall\, u, v \in S : \langle u, v\rangle = 0$. Más aún, S se llamará conjunto ortonormal si S es ortogonal y $\forall\, u \in S : ||u|| := \langle u, u\rangle^{1/2} = 1$.

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana. Entonces, vectores propios de A asociados a valores propios distintos son ortogonales (respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$).

Demostración: Sean $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n\times 1}\backslash\{0\}$ dos autopares de A, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tenemos, aprovechando que A es hermitiana:

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2\rangle_H = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle_H = \langle A v_1, v_2\rangle_H = \langle v_1, A v_2\rangle_H = \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle_H = \lambda_2 \langle v_1, v_2\rangle_H ,$$

de donde se infiere que $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle_H = 0$. En vista que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se deduce que $\langle v_1, v_2\rangle_H = 0$, y se concluye el resultado.

Corolario: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces vectores propios de A asociados a valores propios distintos, son ortogonales (respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$).

Transformaciones lineales simétricas

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es simétrica si $\forall\, u\,, v \in V\, :\, \langle T(u), v \rangle \,=\, \langle u, T(v) \rangle$.

Lema: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Además, sea $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Entonces

1. Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, T es simétrica si y sólo si $[T]_B^B$ es hermitiana.
2. Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, T es simétrica si y sólo si $[T]_B^B$ es simétrica.

Demostración (caso $\mathbb{K} := \mathbb{C}$): Recordamos que dados cualesquiera $u\,, v \in V$, éstos pueden expresarse como $u \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j$, y $v \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j\, v_j$, para algunos escalares $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}\, \{\beta_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{C}$. Se verifica que

$$\langle u, v \rangle \,=\, \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, v_k \right\rangle \,=\, \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j\, \overline{\beta_k}\, \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=:\, \delta_{jk}} \,=\, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \overline{\beta_j} \,=\, \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H \,,$$

y en consecuencia se ha probado que $\forall\, u\,, v \in V\, :\, \langle u, v \rangle \,=\, \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H$.

($\Rightarrow$) Hipótesis: T es simétrica. Esto significa que

$$\forall\, u\,, v \in V\, :\, \langle T(u), v \rangle \,=\, \langle u, T(v) \rangle \;\Leftrightarrow\; \langle [T(u)]_B, [v]_B \rangle_H \,=\, \langle [u]_B, [T(v)]_B \rangle_H$$

$$\Leftrightarrow\, \forall\, [u]_B\,, [v]_B \in \mathbb{C}^{n\times 1}\, :\, \left\langle [T]_B^B\, [u]_B, [v]_B \right\rangle_H \,=\, \left\langle [u]_B, [T]_B^B\, [v]_B \right\rangle_H \,,$$

y de aquí se deduce que $[T]_B^B$ es hermitiana.

($\Leftarrow$) Hipótesis: $[T]_B^B$ es hermitiana. Aplicando el razonamiento anterior, se deduce el resultado. Queda para el estudiante hacer los detalles.

La demostración del caso $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ es análoga. Primero hay que deducir que $\forall\, u\,, v \in V \,:\, \langle u, v\rangle \,=\, \langle [u]_B, [v]_B\rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Corolario: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. ¿Qué pasa si V es infinito dimensional?

Definición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, con producto interior, y $\emptyset \neq S \subseteq V$. Se define el complemento ortogonal de S por $S^\perp := \{v \in V \,|\, \forall\, w \in S \,:\, \langle v, w\rangle = 0\}$, el cual siempre es un subespacio vectorial de V.

Propiedades del Complemento Ortogonal: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, con producto interior, y $\emptyset \neq S \subseteq V$. Entonces

1. $S^\perp$ es subespacio vectorial de V,
2. $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$,
3. $\{\theta\}^\perp = V \quad \wedge \quad V^\perp = \{\theta\}$,
4. $\left(\langle S\rangle^\perp\right)^\perp = \langle S\rangle$,
5. $\langle S\rangle \oplus \langle S\rangle^\perp = V$.

Demostración: Es dejada como ejercicio al lector. Demuestre la propiedad 5 en dimensión finita.

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita n, y sea $B := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Entonces, se puede construir una base ortogonal de V, que denotaremos por $\tilde{B} := \{w_1, ..., w_n\}$, tales que $\forall\, k \in \{1, ..., n\} \,:\, \langle\{v_1, ..., v_k\}\rangle = \langle\{w_1, ..., w_k\}\rangle$. Esta base se puede construir de modo tal que $w_1 := v_1$, y para $k \in \{2, ..., n\}$:

$$w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j\, w_j\,, \qquad \text{donde } \forall\, j \in \{1, ..., k-1\} \,:\, \alpha_j := \frac{\langle v_k, w_j\rangle}{||w_j||^2}\,.$$

Si se normalizan los elementos de $\tilde{B}$, se obtendrá una base ortonormal de V.
Demostración: La demostración suele hacerse por Inducción Matemática. Es dejada como ejercicio al lector.

Observación: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica, tal que $\lambda \in \sigma(T)$, y $B_1 := \{v_1, ..., v_p\}$ es una base del espacio propio S_λ, asociado a λ. Entonces, el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt induce una base ortonormal de S_λ, cuyos elementos siguen siendo vectores propios de T asociados a λ.

Proposición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior, de dimensión finita n, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Sea también $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces

1. Si $\lambda\,,\mu \in \sigma(T)$ (o $\lambda\,,\mu \in \sigma(A)$) distintos, entonces los subespacios propios S_λ y S_μ asociados a λ y μ, respectivamente, son ortogonales.
2. Tanto T como A tienen n valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas).

Demostración:
1) (Para T) Sean $\lambda\,,\mu \in \sigma(T) \subseteq \mathbb{K} := \mathbb{R}$ distintas. Consideremos $v \in S_\lambda$ y $w \in S_\mu$. Esto significa que $T(v) = \lambda\, v$ y $T(w) = \mu\, w$. Luego, gracias al hecho que T es simétrica, se deduce:

$$\lambda\,\langle v, w\rangle = \langle \lambda\, v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \langle v, \mu\, w\rangle = \mu\,\langle v, w\rangle\,,$$

lo que implica que $(\lambda - \mu)\,\langle v, w\rangle = 0$, y en vista que $\lambda \neq \mu$, se deduce que $\langle v, w\rangle = 0$. De aquí se concluye el resultado.
Queda al lector hacer la demostración para el caso $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica.

Observación: La propiedad 1 anterior también es cierta si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Para el caso matricial, se requiere que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sea hermitiana.

2) (Para A) Se hará por reducción al absurdo. Supongamos que la $\textsc{Tesis}$ es falsa. Esto significa que $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{C} \,:\, p_A(\lambda_0) = 0$, con parte imaginaria $\mathrm{Im}(\lambda_0) \neq 0$. En vista que $p_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, se tiene que $\overline{\lambda_0}$ es también otra raíz de p_A. Sea $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}\backslash\{0\}$ un vector propio de A asociado a $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Como tal, v se puede expresar como $v := v_1 + i\, v_2$, siendo $v_1\,, v_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Tenemos

$$A\, v = \lambda_0\, v \Rightarrow \overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda_0}\,\overline{v} \Rightarrow A\,\overline{v} = \overline{\lambda_0}\,\overline{v}\,,$$

de donde se deduce que $(\overline{\lambda_0}, \overline{v})$ es otro autopar de A. Como $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$, por la parte 1), se tiene que v y $\overline{v}$ son ortogonales (respecto al producto interior de $\mathbb{R}^{n\times 1}$). De esta manera resulta

$$0 = \langle v, \overline{v}\rangle_{\mathbb{R}^n} = (v_1 + i\, v_2)^t (v_1 - i\, v_2) = v_1^t\, v_1 + i\,\underbrace{\left(v_2^t v_1 - v_1^t v_2\right)}_{=0} + v_2^t\, v_2$$

$$\Rightarrow ||v_1||^2_{\mathbb{R}^n} + ||v_2||^2_{\mathbb{R}^n} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \theta_{\mathbb{R}^{n\times 1}} \Rightarrow v = \theta_{\mathbb{C}^{n\times 1}}\,(\rightarrow\leftarrow)\,.$$

Luego, p_A es factorizable en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ por polinomios irreducibles de grado 1 (salvo repeticiones). En consecuencia la $\textsc{Tesis}$ es verdadera, y concluye la demostración. Queda al lector hacer la demostración para el caso $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica.

Definición formal de Suma directa generalizada: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Decimos que $\{S_j\}_{j=1}^m$ forman una suma directa del subespacio suma $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$ si

$$(\forall\, u_1 \in S_1) \ldots (\forall\, u_m \in S_m) \,:\, \left(\sum_{j=1}^{m} u_j = \theta \Rightarrow \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \,:\, u_j = \theta \right).$$

En tal caso, se denota por $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.

Lema importante: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.

2. Todo vector de S puede expresarse de manera única como elemento de $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$.

   Es decir

$$\forall\, u \in S \,:\, (\exists!\, u_1 \in S_1) \ldots (\exists!\, u_m \in S_m) \,:\, u = \sum_{j=1}^{m} u_j \,.$$

Teorema Espectral: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita n. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T (i.e. T es diagonalizable).

Demostración:

Primero, por la proposición anterior, sabemos que T posee n valores propios (contando sus multiplicidades algebraicas). Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ los valores propios reales distintos de T, cada una con multiplicidad algebraica m_j, $j \in \{1, ..., p\}$. Se tiene que $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$ y los espacios propios S_{λ_j}, $j \in \{1, ..., p\}$ son ortogonales dos a dos.
Notar que T tiene al menos un valor propio (de multiplicidad algebraica n), y como máximo tiene n valores propios distintos (en cuyo caso, todos ellos son simples). Para cada $j \in \{1, ..., p\}$, $d_j := \dim(S_{\lambda_j})$ (multiplicidad geométrica de λ_j).

Segundo, consideramos una base ortonormal de cada uno de los p espacios propios S_{λ_j} de T, $j \in \{1, ..., p\}$. Esto puede obtenerse con la ayuda del conocido Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt. En vista que éstos son ortogonales entre sí, la unión de todas estas bases resulta ser un conjunto ortonormal de $\sum_{j=1}^{p} d_j := d$ vectores propios de T, el cual será una base ortonormal de la suma directa: $U := \bigoplus_{j=1}^{p} S_{\lambda_j}$.
Notar que $d = \dim(U)$, y que todo vector propio de T, al pertenecer a algún espacio propio, pertenecerá al subespacio U.

...por demostrar que $d = n$, o equivalentemente $U = V$...next page...

Tercero, Probaremos que $d = n$, o equivalentemente, $U = V$. Procederemos por reducción al absurdo. Suponemos entonces que $d < n$. Consideramos así, el complemento ortogonal de U, $U^\perp$, que es de dimensión $d' := n - d > 0$ (y tales que $U \oplus U^\perp = V$).

Afirmación 1: $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Sea $w \in T(U^\perp)$, entonces $\exists\, v \in U^\perp : T(v) = w$. Ahora, consideramos $u \in U$. Tenemos, tomando en cuenta que $T(u) \in U$ (¿Por qué?),

$$\langle w, u\rangle = \langle T(v), u\rangle = \langle v, T(u)\rangle = 0 \Rightarrow \forall\, u \in U : \langle w, u\rangle = 0 \Rightarrow w \in U^\perp,$$

y se valida la afirmación.

Afirmación 2: la aplicación $\tilde{T} : U^\perp \to U^\perp$ definido $\forall\, w \in U^\perp : \tilde{T}(w) := T(w)$ es lineal y simétrica. Es consecuencia del hecho que $T \in \mathcal{L}(V)$ es simétrica.

Aplicando la proposición anterior, $\tilde{T}$ tiene $d' = n - d > 0$ valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas). Esto garantiza la existencia de al menos un autopar $(\mu, w) \in \mathbb{R} \times U^\perp \backslash \{\theta\}$. Esto implica que $\tilde{T}(w) = \mu\, w$, es decir $T(w) = \mu\, w$, de donde (μ, w) es un autopar de T. Ello conduce a afirmar que $w \in U$ $(\rightarrow\leftarrow)$.
Luego, la TESIS es verdadera, y concluye la demostración.

Corolario: Diagonalización ortogonal de un endomorfismo simétrico

1. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita. Todo endomorfismo simétrico $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable, y lo es ortogonalmente. Es decir, existe $B \subseteq V$, una base ortonormal de V, tal que $[T]_B^B$ es una matriz diagonal.
   Esta base, por ejemplo, puede obtenerse reuniendo bases ortonormales de los espacios propios de T. La matriz diagonal está formada por los valores propios de T (considerando sus multiplicidades algebraicas).
2. Toda matriz real simétrica A de orden n, es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal (i.e. $P^t = P^{-1}$), tal que $P^t\,A\,P$ es una matriz diagonal.
   Las columnas de P son vectores propios de A que forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n\times 1}$, mientras que la matriz diagonal está formada por los correspondientes valores propios de A (considerando sus multiplicidades algebraicas y el orden de sus vectores propios como columnas de P).

Se recuerda:

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice matriz unitaria si $A^{-1} = A^*$.
2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice matriz ortogonal si $A^{-1} = A^t$.

Ejemplo: Diagonalizar, si es posible, $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Admite diagonalización ortogonal? Implementarla de ser el caso.

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T \in \mathcal{L}(V)$.

1. Se dice que T es una proyección o idempotencia si $T^2 = T$.
2. Se dice que T es una reflexión o involución si $T^2 = \tilde{I}$.
3. Se dice que T es una aplicación nilpotente si $\exists\, m \in \mathbb{N} : T^m = \Theta$. El menor entero positivo con esta propiedad, es llamado índice de nilpotencia de T.

Ejemplo 1: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^2 = U_1 \bigoplus U_2$, donde $U_1 := \langle\{(1,2)\}\rangle$, y $U_2 := \langle\{(0,1)\}\rangle$. Se observa que $U_1 \not\perp U_2$. Definimos ahora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(u) := u_1$, para cualquier $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ (descomposición única de u). Se verifica que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y también que $\forall\, u \in V : T^2(u) = T(u)$, por lo que $T^2 = T$, i.e. T es una proyección.

Ejemplo 2: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^3 = U_1 \bigoplus U_2$, donde $U_2 := \{t\,(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$, y U_1 es el plano $z = 0$. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $S(u) := u_1 - u_2$, para cualquier $u = u_1 + u_2 \in \mathbb{R}^3$, donde $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ (descomposición única de u). Se puede establecer que $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ y además que $\forall\, u \in \mathbb{R}^3 : S^2(u) = u$. Esto implica que $S^2 = \tilde{I}$, i.e. S es una reflexión.

Ejemplo 3: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, con $m \in \mathbb{N}$ y la aplicación $D : V \to V$ tal que $\forall\, f \in V : D(f) := f'$. Se puede probar que $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$ es nilpotente, con índice de nilpotencia $m + 1$.

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior. Dado $W \subseteq V$ un subespacio vectorial, se sabe que $W \oplus W^{\perp} = V$. Esto permite expresar, de manera única, cualquier elemento $v \in V$ como $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^{\perp}$. Luego, se define la Proyección ortogonal sobre W como la función $\mathrm{Proj}_W : V \to V$ tal que $\forall\, v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^{\perp} = V : \mathrm{Proj}_W(v) := v_W$. El hecho que esta descomposición es única, garantiza que Proj_W esté bien definida.

Propiedades:

1. $\mathrm{Proj}_W \in \mathcal{L}(V)$,
2. $\mathrm{Proj}_W^2 = \mathrm{Proj}_W$,
3. $\mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W) = W \quad \wedge \quad \mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W) = W^{\perp}$,
4. Proj_W es simétrica,
5. $\sigma(\mathrm{Proj}_W) \subseteq \{0,1\}$.
   Si W es subespacio no trivial de V, $\sigma(\mathrm{Proj}_W) = \{0,1\}$.

Demostración:

1) Sean $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^{\perp} = V$, $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^{\perp} = V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_W(\lambda\, u + v) &= \mathrm{Proj}_W((\lambda\, u_W + v_W) + (\lambda\, u_{W^\perp} + v_{W^\perp}))\\ &= \lambda\, u_W + v_W = \lambda\, \mathrm{Proj}_W(u) + \mathrm{Proj}_W(v)\,,\end{aligned}$$

y se concluye el resultado.

2) Sea $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$. Luego, $\mathrm{Proj}_W(u) = u_W \in W \subseteq V$. En consecuencia, $\mathrm{Proj}_W^2(u) = \mathrm{Proj}_W(\mathrm{Proj}_W(u)) = \mathrm{Proj}_W(u_W) = u_W = \mathrm{Proj}_W(u)$. De aquí se infiere que $\mathrm{Proj}_W^2 = \mathrm{Proj}_W$.

3) Para $\mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W) = W$. Se hará por doble inclusión.
$(\mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W)) \subseteq W$: Sea $z \in \mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W)$. Esto significa que $\exists\, u \in V : z = \mathrm{Proj}_W(u) = u_W \in W$, de donde se deduce la inclusión deseada.
$(W \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W))$: Sea $u \in W \subseteq V$. Luego $u = \mathrm{Proj}_W(u)$, de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que $\mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W) = W$.

3) Para $\mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W) = W^\perp$. Se hará también por doble inclusión.
$(\mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W)) \subseteq W^\perp$: Sea $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W)$. Como $z \in V$, entonces $\exists!\, z_W \in W \wedge \exists!\, z_{W^\perp} \in W^\perp$ tales que $z = z_W + z_{W^\perp} \in V$. Esto significa que $\theta = \mathrm{Proj}_W(z) = z_W$, con lo que $z = z_{W^\perp} \in W^\perp$, y se deduce la inclusión deseada.
$(W^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W))$: Sea $u \in W^\perp \subseteq V$. Luego $\mathrm{Proj}_W(u) = \theta$, de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Proj}_W) = W^\perp$.

4) Se recuerda la caracterización

$$\mathrm{Proj}_W \text{ es simétrica } \Leftrightarrow \forall\, u, v \in V : \langle \mathrm{Proj}_W(u), v\rangle = \langle u, \mathrm{Proj}_W(v)\rangle .$$

Sean $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ y $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$. Se tiene así

$$\langle \mathrm{Proj}_W(u), v\rangle = \langle u_W, v\rangle = \overline{\langle v_W + v_{W^\perp}, u_W\rangle} = \langle u_W, v_W\rangle + \underbrace{\langle u_W, v_{W^\perp}\rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W\rangle ,$$

$$\langle u, \mathrm{Proj}_W(v)\rangle = \langle u, v_W\rangle = \langle u_W + u_{W^\perp}, v_W\rangle = \langle u_W, v_W\rangle + \underbrace{\langle u_{W^\perp}, v_W\rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W\rangle .$$

Luego, se infiere que Proj_W es simétrica.

5) Sea $(\lambda, z) \in \mathbb{K} \times V\backslash\{\theta\}$ un autopar de Proj_W. Tenemos $\mathrm{Proj}_W(z) = \lambda\, z$. Luego,

$$\mathrm{Proj}_W^2(z) = \mathrm{Proj}_W(\lambda\, z) = \lambda\, \mathrm{Proj}_W(z) = \lambda^2\, z$$

También: $\mathrm{Proj}_W^2(z) = \mathrm{Proj}_W(z) = \lambda\, z$

$$\Rightarrow \lambda\, z = \lambda^2\, z \Rightarrow (\lambda - \lambda^2)\, z = \theta \Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1 .$$

Además, se deduce también que $S_0 = W^\perp$ y $S_1 = W$. Así, cuando W es subespacio no trivial de V, i.e. $W \neq \{\theta\}$ y $W \neq V$, se concluye que en efecto $\sigma(\mathrm{Proj}_W) = \{0, 1\}$, y termina la demostración.

Observación: Si $W := \{\theta\}$, entonces $S_0 = V$ y $S_1 = \{\theta\}$. En consecuencia, $\sigma(\mathrm{Proj}_W) = \{0\}$. Análogamente, si $W := V$, se deduce que $\mathrm{Proj}_V := \tilde{I}$, y por tanto $\sigma(\mathrm{Proj}_V) = \{1\}$.

Proyección ortogonal de una familia finita de subespacios vectoriales de V

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, y $\{W_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V, tales que $V = \sum_{j=1}^m W_j$, y son ortogonales dos a dos, i.e.

$$\begin{aligned} &\forall\, j\,, k \in \{1, \ldots, m\}\,,\, j \neq k \,:\, W_j \perp W_k \\ \Leftrightarrow\ &\forall\, j\,, k \in \{1, \ldots, m\}\,,\, j \neq k \,:\, \forall\, u \in W_j \,:\, \forall\, v \in W_k \,:\, \langle u, v\rangle = 0\,. \end{aligned}$$

Esto implica que $V = \bigoplus_{j=1}^m W_j$, lo cual garantiza que cualquier vector de V puede expresarse de manera única como una suma de vectores de W_j, con $j \in \{1, \ldots, m\}$, i.e. $\forall\, v \in V \,:\, \exists!\, v_{W_j} \in W_j\,,\, j \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $v = \sum_{j=1}^m v_{W_j}$.

Se define, para $j \in \{1, \ldots, m\}$, la Proyección ortogonal sobre W_j, tal que $\forall\, v = \sum_{j=1}^m v_{W_j} \in V \,:\, \mathrm{Proj}_{W_j}(v) := v_{W_j}$.

Propiedades:

1. $\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \,:\, \mathrm{Proj}_{W_j} \in \mathcal{L}(V)$.
2. $\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \,:\, \mathrm{Proj}_{W_j}^2 = \mathrm{Proj}_{W_j}$.
3. $\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \,:\, \mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_{W_j}) = W_j$.
4. $\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \,:\, \sigma(\mathrm{Proj}_{W_j}) \subseteq \{0, 1\}$.
5. $\forall\, j\,, k \in \{1, \ldots, m\}\,,\, j \neq k \,:\, \mathrm{Proj}_{W_j} \circ \mathrm{Proj}_{W_k} = \Theta$ (aplicación nula).
6. $\sum_{j=1}^m \mathrm{Proj}_{W_j} = \tilde{I}$ (aplicación identidad).

Definición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior. Decimos que una familia de aplicaciones $\{T_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{L}(V)$ es una descomposición de la (aplicación) identidad si verifica

1. $\forall\, j\,,k \in \{1,\ldots,m\}\,,\, j \neq k \,:\, T_j\, T_k \,:=\, T_j \circ T_k \,=\, \Theta.$
2. $\sum_{j=1}^m T_j \,=\, \tilde{I}.$

Ejemplo: La familia de proyecciones ortogonales $\{\mathrm{Proj}_{W_j}\}_{j=1}^m$ definida antes, es una descomposición de la identidad.

Definición: Una familia de matrices $\{A_j\} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una descomposición de la (matriz) identidad, si se verifica

1. $\forall\, j\,,k \in \{1,\ldots,m\}\,,\, j \neq k \,:\, A_j \cdot A_k \,=\, \Theta$ (matriz nula).
2. $\sum_{j=1}^m A_j \,=\, I_n.$

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, con $\sigma(A) := \{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ (conjunto de valores propios distintos). Entonces $\exists\, \{P_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, una descomposición de la identidad, tal que $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, P_j$.

Demostración:

Primero, como $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, es diagonalizable. Luego, $\mathbb{R}^{n\times 1} = \bigoplus_{j=1}^{m} S_{\lambda_j}$. Además, $\forall\, j\,, k \in \{1, ..., m\}\,,\, j \neq k \,:\, S_{\lambda_j} \perp S_{\lambda_k}$. Esto nos dice que $\{S_{\lambda_j}\}_{j=1}^{m}$ es una familia (finita) de subespacios vectoriales de V ortogonales dos a dos.

Segundo, definimos ahora, para cada $j \in \{1, ..., m\}$, las proyecciones ortogonales sobre S_{λ_j} como la aplicación lineal $\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times 1})$. Por lo discutido previamente, tenemos que $\{\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\}_{j=1}^{m}$ es una descomposición de la identidad, i.e. $\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}} = \tilde{I}$.

Tercero, Sea $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \bigoplus_{j=1}^{m} S_{\lambda_j}$. Entonces, $\forall\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, \exists!\, x_{S_{\lambda_j}} \in S_{\lambda_j}$, tales que $x = \sum_{j=1}^{m} x_{S_{\lambda_j}}$. Así

$$A\,x = A \sum_{j=1}^{m} x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^{m} A\, x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x)\,. \tag{2}$$

Consideremos ahora B, la base canónica de $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Se verifica $\forall\, z \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, [z]_B = z$. Entonces, de (2), resulta

$$A\,x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x)\right]_B = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B [x]_B = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B x\,.$$

De esta forma, se deduce $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\,:\, A\,x \,=\, \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B\right) x$, lo cual implica que $A \,=\, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B$ (esto sugiere fuertemente cómo definir $\{P_j\}_{j=1}^m$).

Cuarto, resta probar que $\left\{P_j \,:=\, \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B\right\}_{j=1}^m$ es la descomposición de la identidad buscada, pues ya verifica $A \,=\, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, P_j$.

Condición 1: sean $j\,,\, k \in \{1, ..., m\}\,,\, j \neq k$. Tenemos

$$P_j\, P_k \,=\, \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_k}}\right]_B^B \,=\, \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}} \circ \mathrm{Proj}_{S_{\lambda_k}}\right]_B^B \,=\, [\Theta]_B^B \,=\, \Theta\,.$$

Condición 2:

$$\sum_{j=1}^{m} P_j \,=\, \sum_{j=1}^{m} \left[\mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B \,=\, \left[\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Proj}_{S_{\lambda_j}}\right]_B^B \,=\, \left[\tilde{I}\right]_B^B \,=\, I_n\,.$$

De esta forma, se concluye la demostración.