Problema 1. Sea X un espacio vectorial normado y sea $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo si y sólo si X es Banach.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos S es completo.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Sin perdida de la generalidad, suponga que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a θ_X (Si ocurre esto se tiene que la sucesión converge). Dado lo anterior, se define la sucesión $\left\{\hat{x}_k := \dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, la cual es una sucesión de Cauchy. Para mostrar lo anterior usaremos el hecho que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq \varepsilon$ para todo k y l natural.

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}_k - \hat{x}_l\| &= \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_l}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_l}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_l}\|} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} \right\| + \left\| \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{n_l}}{\|x_{n_l}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \left(x_{n_k} - x_{n_l} \right) \right\| + \left\| x_{n_l} \left(\frac{1}{\|x_{n_k}\|} - \frac{1}{\|x_{n_l}\|} \right) \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| + \|x_{n_l}\| \left| \frac{\|x_{n_l}\| - \|x_{n_k}\|}{\|x_{n_l}\| \|x_{n_k}\|} \right| \\
&= \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| + \frac{\|x_{n_l}\|}{\|x_{n_l}\| \|x_{n_k}\|} \left| \|x_{n_l}\| - \|x_{n_k}\| \right| \\
&= \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| + \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \left| \|x_{n_l}\| - \|x_{n_k}\| \right| \\
&\leq \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| + \frac{1}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_l} - x_{n_k}\| \\
&= \frac{2}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\|
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\|x_{n_k}\| > 0$ para todo k natural y que $\{x_{n_k}\}$ no converje a θ_X, entonces existe un M positivo tal que es una cota inferior de $\|x_{n_k}\|$ para todo k natural. Retomando la desigualdad anterior

$$\|\hat{x}_k - \hat{x}_l\| \leq \frac{2}{\|x_{n_k}\|} \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq 2M\varepsilon, \quad \forall k, l \geq N_1.$$

Esto implica que $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en S, ademas, como S es completo se tiene que la sucesión $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en S, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N_2 > 0$ tal que

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

El hecho que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, implica que la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \|x_n\| - \|x_m\| \right| \leq \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N_3.$$

Como $\mathbb{R}$ es completo, entonces la sucesión de Cauchy $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \|x_n\| - \alpha \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_4.$$

Lo anterior nos ayudará a mostrar que la convergencia de $\{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ implica la convergencia de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N := \max\{N_2, N_4\} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k} - \alpha\hat{x}\| &= \left\| x_{n_k} \frac{\|x_{n_k}\|}{\|x_{n_k}\|} - \alpha\hat{x} \right\| \\
&= \left\| \|x_{n_k}\| \hat{x}_k - \alpha\hat{x} + \alpha\hat{x}_k - \alpha\hat{x}_k \right\| \\
&= \left\| \hat{x}_k \left(\|x_{n_k}\| - \alpha \right) + \alpha \left(\hat{x}_k - \hat{x} \right) \right\| \\
&\leq \|\hat{x}_k (\|x_{n_k}\| - \alpha)\| + \|\alpha(\hat{x}_k - \hat{x})\| \\
&= \|\hat{x}_k\| \left| \|x_{n_k}\| - \alpha \right| + |\alpha| \, \|\hat{x}_k - \hat{x}\| \\
&= \left| \|x_{n_k}\| - \alpha \right| + \alpha \, \|\hat{x}_k - \hat{x}\| \\
&\leq \varepsilon + \alpha\varepsilon = (1 + \alpha)\varepsilon
\end{aligned}$$

Es decir, la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en X, dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en X, por resultado del análisis real, se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en X y por tanto X es un espacio de Banach.

($\Longleftarrow$) Supongamos X es Banach.
Sea $y \in \bar{S}$ luego, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S tal que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_5 \in \mathbb{N} : \|y_n - y\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_5.$$

Ademas, dado $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$|1 - \|y\|| = |\|y_n\| - \|y\|| \leq \|y_n - y\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_5.$$

Es decir,

$$\|y\| = 1 \iff y \in S$$

Así, S es un sub espacio cerrado de X y por tanto S es completo. □

Problema 2. *Sea la aplicación lineal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definida por*

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \mathcal{B}(x) := (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x), \ldots, \mathcal{B}_k(x))$$

con $\mathcal{B}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Pruebe que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

$i)$ Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $\mathcal{B}_i$ es sobreyectivo,

$ii)$ $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_j) + \bigcap_{i\neq j}^{k} N(\mathcal{B}_i)$, para cada $j \in \{1, ..., k\}$.

Observacion: *Notar que para $k = 2$ se tiene el lema visto en clases.*

Demostración. Mediante inducción sobre k.

- Caso $k = 2$. Se debe mostrar que

  $$\mathcal{B} \text{ es sobreyectivo} \iff \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ son sobreyectivos y } \mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$$

  En este caso es justamente el lema visto en clases.

- Caso $k = r$. Supongamos que

  $$\mathcal{B} \text{ es sobreyectivo} \iff \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r \text{ son sobreyectivos y } \mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_j) + \bigcap_{i\neq j}^{r} N(\mathcal{B}_i),\ \text{para cada } j \in \{1, ..., r\}.$$

- Caso $k = r + 1$. Debemos mostrar que

  $$\mathcal{B} \text{ es sobreyectivo} \iff \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{r+1} \text{ son sobreyectivos y } \mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_j) + \bigcap_{i\neq 1}^{r+1} N(\mathcal{B}_i) \text{ para cada } j \in \{1, ..., r + 1\}.$$

  Para mostrar lo anterior, suponga $\mathcal{B}$ es sobreyectivo. Ademas fijemos $j \in \{1, ..., r + 1\}$ y definamos las aplicaciones $\hat{\mathcal{B}}_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{l_1}$, $\hat{\mathcal{B}}_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{l_2}$, donde

  $$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \hat{\mathcal{B}}_1(x) := (\mathcal{B}_2(x), \ldots, \mathcal{B}_{j-1}(x)),$$
  $$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \hat{\mathcal{B}}_2(x) := (\mathcal{B}_{j+1}(x), \ldots, \mathcal{B}_{r+1}(x)),$$

  y se tiene,

  $$l_1 = \sum_{i=1}^{j-1} m_i$$
  $$l_2 = \sum_{i=j+1}^{r+1} m_i$$

luego $\mathcal{B}$ se puede reescribir

$$\mathcal{B}(x) = \left(\hat{\mathcal{B}}_1(x), \mathcal{B}_j(x), \hat{\mathcal{B}}_2(x)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

De aquí, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \text{ es sobreyectivo } \iff \hat{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_j, \hat{\mathcal{B}}_2 \text{ son sobreyectivos y } \mathbb{R}^n &= N\left(\mathcal{B}_j\right) + N\left(\hat{\mathcal{B}}_1\right) \cap N\left(\hat{\mathcal{B}}_2\right) \\ &= N\left(\mathcal{B}_j\right) + \bigcap_{i \neq j} N\left(\mathcal{B}_i\right)\end{aligned}$$

Dado que lo anterior se cumple para todo $j \in \{1, ..., r+1\}$, se tiene que

$$\mathcal{B} \text{ es sobreyectivo } \iff \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{r+1} \text{ son sobreyectivos y } \mathbb{R}^n = N\left(\mathcal{B}_j\right) + \bigcap_{i \neq 1}^{r+1} N\left(\mathcal{B}_i\right) \text{ para cada } j \in \{1, ..., r+1\}.$$

Finalmente se demuestra lo deseado. $\square$

Apendice

Lema

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $(X, \|\cdot\|)$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si ella posee una subsucesión convergente.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Es evidente notar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y convergente, entonces todas sus subsucesiones convergen.
($\Longleftarrow$) Supongamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy convergente. Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a $x \in X$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\hat{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_k} - x\| \leq \varepsilon \ \forall n \geq \hat{N}$. A su vez, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \ \forall n, m \geq \bar{N}$. Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que x_{n_k} coincide con x_m. Luego, definiendo N como el máximo entre $\bar{N}$ y $\hat{N}$, se sigue que

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \leq 2\varepsilon \ \forall n \geq N,$$

lo cual muestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a x. $\square$