Modos de convergencia.

- **Modos de convergencia.**
- **Relaciones entre distintos modos de convergencia.**
- **Convergencia en medida.**

Modos de convergencia.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida y

$L_p := L_p(X, \mathscr{X}, \mu)$ con $1 \leq p < +\infty$.

Recordemos las definiciones de los modos de convergencia que ya hemos visto.

Sean $f,\ f_n :\ X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

- **Convergencia uniforme:** $f_n \overset{n}{\to} f$ **uniformemente** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.}$$

- **Convergencia puntual:** $f_n \overset{n}{\to} f$ **(puntualmente)** si

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

- **Convergencia c.t.p.:** $f_n \overset{n}{\to} f$ **c.t.p.** si $\exists M \in \mathscr{X}\ :\ \mu(M) = 0$ y

$$\boxed{\forall x \in X \setminus M,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

- **Convergencia en L_p:** $f_n \overset{n}{\to} f$ **en** L_p si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_p < \varepsilon.}$$

Relaciones entre distintos modos de convergencia.

Convergencia uniforme $\Longrightarrow$ convergencia puntual $\Longrightarrow$ convergencia c.t.p.

pero convergencia uniforme $\not\Longrightarrow$ convergencia en L_p. **Ej.7.A.**

Sin embargo, si $\mu(X) < +\infty$, esa implicación se cumple:

Teor.: Sea $\mu(X) < +\infty$. Si $f_n \in L_p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente, entonces $f \in L_p$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$\Longrightarrow \; \|f_n - f\|_p := \left[\int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu\right]^{1/p}$$

$$\leq \left(\int \varepsilon^p \, d\mu\right)^{1/p} = \varepsilon \, [\mu(X)]^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \; \|f\|_p \leq \|f_N\|_p + \varepsilon \, [\mu(X)]^{1/p} < +\infty \; \Longrightarrow \; f \in L_p$$

y $f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p. ■

Convergencia puntual $\not\Longrightarrow$ convergencia en L_p, ni con $\mu(X) < +\infty$. **Ej.7.B.**

Sin embargo, **"convergencia dominada"** $\Longrightarrow$ convergencia en L_p, donde lo de "convergencia dominada" debe entenderse en el sentido del T.C.D., como en el siguiente teorema.

Teor. [T.C.D. en L_p]: Sean $f_n \in L_p,\ n \in \mathbb{N} :\ f_n \xrightarrow{n} f$ c.t.p. y f medible. Si $\exists\, g \in L_p :\ |f_n| \leq g\ \forall n \in \mathbb{N},$ entonces $f \in L_p$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p.

Dem.: $|f_n| \leq g\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ c.t.p. $\Longrightarrow$ $|f| \leq g$ c.t.p. $\Longrightarrow$ $f \in L_p$.

$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \overset{\text{c.t.p.}}{\leq} (2g)^p \in L_1$ y $|f_n - f|^p \xrightarrow{n} 0$ c.t.p.

$\overset{\text{T.C.D.}}{\Longrightarrow} \|f_n - f\|^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \xrightarrow{n} 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p. ■

Corol.: Sean $f_n \in L_p,\ n \in \mathbb{N} :\ f_n \xrightarrow{n} f$ c.t.p. y f medible. Si $\mu(X) < +\infty$ y $\exists K > 0 :\ |f_n(x)| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$ entonces $f \in L_p$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p.

Dem.: Se aplica el T.C.D. en L_p con $g(x) := K,\ x \in X$. ■

Convergencia en L_p, $\not\Longrightarrow$ convergencia c.t.p., ni siquiera con $\mu(X) < +\infty$.

Ejemplo: Sean $X := [0,1]$, $\mathscr{X} := \mathscr{B}$, la σ-álgebra de Borel de $[0,1]$, y λ la medida de Lebesgue. Sean

$$m := 1, \quad I_1 := [0,1],$$
$$m := 2, \quad I_2 := \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad I_3 := \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],$$
$$m := 3, \quad I_4 := \left[0, \tfrac{1}{3}\right], \quad I_5 := \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right], \quad I_6 := \left[\tfrac{2}{3}, 1\right],$$
$$m := 4, \quad I_7 := \left[0, \tfrac{1}{4}\right], \quad I_8 := \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right], \quad \text{etc.}$$

Notemos que en la fila m hay m subintervalos cerrados de longitud $\frac{1}{m}$.

Sean $f_n := \chi_{I_n}$, funciones características de I_n. Entonces, $f_n \to 0$ en L_p, pese a que, $\forall x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}$ no tiene límite cuando $n \to +\infty$.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Sea $m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \varepsilon^p$. Sea $N := \frac{m(m+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Entonces, $\forall n \geq N$, $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{m}$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq N, \; \|f_n - 0\|_p = \left(\int |f_n|^p \, d\lambda\right)^{1/p} = [\lambda(I_n)]^{1/p} \leq \left(\tfrac{1}{m}\right)^{1/p} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $f_n \to 0$ en L_p.

Por otra parte, sea $x \in [0,1]$.

Se puede seleccionar una subsucesión de intervalos $I_{n_k} \ni x$,

de modo que $f_{n_k}(x) = \chi_{I_{n_k}}(x) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} 1$.

Pero también se puede seleccionar otra subsucesión de intervalos $I_{n'_k} \not\ni x$,

de modo que $f_{n'_k}(x) = \chi_{I_{n'_k}}(x) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} 0$.

Por lo tanto, $\forall x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}$ **no puede tener límite,** pues tiene dos subsucesiones convergentes a distintos límites. ■

Convergencia en medida.

Def.: Sean $f,\ f_n : X \to \mathbb{R}$ medibles, $n \in \mathbb{N}$.

- $f_n \xrightarrow{n} f$ **en medida**, si $\forall \alpha > 0,\ \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) \xrightarrow{n} 0.$
- $\{f_n\}$ **es de Cauchy en medida** si $\forall \alpha > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,$
$$\mu\left(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}\right) < \varepsilon.$$

Ej. Si $\{f_n\}$ converge en medida, entonces es de Cauchy en medida.

Lema: Si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente, entonces $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.

Dem.: Sea $\alpha > 0.$ $\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,$ $|f_n(x) - f(x)| < \alpha \quad \forall x \in X$

$\implies \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset$

$\implies \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) = 0 \implies f_n \xrightarrow{n} f$ **en medida.** ■

Lema: Si $f_n \xrightarrow{n} f$ en L_p, entonces $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.

Dem.: Sean $\alpha > 0$ y $E_n(\alpha) := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\int |f_n - f|^p \, d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n - f|^p \, d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \mu(E_n(\alpha))$

$\implies \mu(E_n(\alpha)) \leq \frac{1}{\alpha^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n} 0 \implies f_n \xrightarrow{n} f$ **en medida.** ■

Convergencia puntual $\not\Longrightarrow$ convergencia en medida. **Ej.7.D.**

Sin embargo, la implicación es cierta si $\mu(X) < +\infty$.

Teor. [Egoroff]: Sean $f,\ f_n : X \to \mathbb{R}$ medibles, $n \in \mathbb{N}$.
Si $\mu(X) < +\infty$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ c.t.p., entonces $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.

Dem.: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \quad \forall x \in X.$

Sean $\alpha > 0$ y $E_n(\alpha) := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}, \ n \in \mathbb{N}.$
Tenemos que demostrar que $\mu(E_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0.$

$\forall n \in \mathbb{N},$ sea $F_n(\alpha) := \bigcup_{k \geq n} E_k(\alpha)$ y sea $F(\alpha) := \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(\alpha).$

Sea $x \in X.$ Como $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x),$
$\exists n \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq n, \ |f_k(x) - f(x)| < \alpha \implies x \notin E_k(\alpha) \quad \forall k \geq n.$
$\implies x \notin \bigcup_{k \geq n} E_k(\alpha) =: F_n(\alpha) \implies x \notin \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(\alpha) =: F(\alpha).$
Como esto vale $\forall x \in X, \ F(\alpha) = \emptyset \implies \mu(F(\alpha)) = 0.$

Como $\mu(X) < +\infty, \quad \lim_n \mu(F_n(\alpha)) = \mu(F(\alpha)) = 0$
y como $E_n(\alpha) \subset F_n(\alpha), \quad \mu(E_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0 \implies f_n \to f$ **en medida.** $\blacksquare$