UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 2

Cálculo Numérico 521230

1. Considere los **polinomios de Legendre** definidos por $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ y

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(x), \qquad n \geq 1.$$

   a) (6 pts) Obtenga el polinomio $p_3(x)$ usando la recurrencia.

   b) (4 pts) Calcule las raíces de p_3: $x_1 < x_2 < x_3$.

   c) (6 pts) Usando x_1, x_2, x_3 como nodos, escriba tres ecuaciones que permitan determinar los pesos A_1, A_2, A_3 de la regla

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

   exigiendo exactitud para $f(x) = 1$, x y x^2.

   d) (4 pts) Con los pesos anteriores, verifique que la regla también es exacta para $f(x) = x^3$, x^4 y x^5.

Solución:

a) Calculamos primero p_2, con $n = 1$:

$$p_2(x) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1+1} x p_1(x) - \frac{1}{1+1} p_0(x) = \frac{3}{2} x \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$

y enseguida p_3, con $n = 2$:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{2 \cdot 2 + 1}{2+1} x p_2(x) - \frac{2}{2+1} p_1(x) \\ &= \frac{5}{3} x \cdot \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} x \\ &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{5}{6} x - \frac{3}{2} x \\ &= \frac{5}{2} x^3 - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) x \\ &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x. \end{aligned}$$

b) Calculamos las raíces de p_3:

$$p_3(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x^3 - 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) = 0,$$

con lo cual las raíces de p_3, ordenadas de menor a mayor, son:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

c) Si queremos que la regla de integración sea exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 3, por linealidad basta con imponer que sea exacta sobre una base de ese espacio. Usando la base canónica, impondremos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

cuando $f(x) = x^j$, para $j = 0, \ldots, 5$:

$j = 0$: aquí $f(x) = 1$ y entonces queda la ecuación $A_1 + A_2 + A_3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2.$

$j = 1$: en este caso, tenemos

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \int_{-1}^{1} x\ \mathrm{d}x \ \Leftrightarrow\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ A_1 - A_3 = 0.$$

$j = 2$: nos queda

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = \int_{-1}^{1} x^2\ \mathrm{d}x \ \Leftrightarrow\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 = \frac{2}{3} \ \Leftrightarrow\ A_1 + A_3 = \frac{10}{9}.$$

d) Probemos que la regla de integración es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 5,

$j = 3$: aquí resulta

$$A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 = \int_{-1}^{1} x^3\ \mathrm{d}x = 0 \ \Leftrightarrow\ A_1\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + A_3\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0,$$

y debido al exponente impar, obtenemos la misma ecuación que en el caso $j = 1$.

$j = 4$: nos queda

$$A_1x_1^4 + A_2x_2^4 + A_3x_3^4 = \int_{-1}^{1} x^4\ \mathrm{d}x \ \Leftrightarrow\ \frac{9}{25}A_1 + \frac{9}{25}A_3 = \frac{2}{5} \ \Leftrightarrow\ A_1 + A_3 = \frac{10}{9},$$

que es exactamente la misma ecuación que en el caso cuando $j = 2$.

$j = 5$: por último, tenemos

$$A_1x_1^5 + A_2x_2^5 + A_3x_3^5 = \int_{-1}^{1} x^5\ \mathrm{d}x \ \Leftrightarrow\ A_1\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + A_3\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0,$$

e igualmente que en casos anteriores, por el exponente impar obtenemos la ecuación del caso $j = 1$.

Así, las tres ecuaciones que nos permiten encontrar el valor de los coeficientes A_1, A_2 y A_3 de modo que (**??**) es exacta para polinomios de grado menor o igual que 5 son

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2, \quad A_1 - A_3 = 0 \quad \text{y} \quad A_1 + A_3 = \frac{10}{9}.$$

2. Considere el PVI

$$y'' + y = x^2 + 2, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

La solución exacta es $y(x) = x^2$. Use paso $h = 1$.

a) (6 pts) Reescriba el PVI como un sistema de primer orden $u_1' = F_1(x, u_1, u_2)$, $u_2' = F_2(x, u_1, u_2)$, indicando claramente u_1, u_2.

b) (8 pts) Aplique Euler explícito para obtener $(u_1(1), u_2(1))$ y $(u_1(2), u_2(2))$.

c) (6 pts) Aplique Euler implícito solo en el primer paso $(0 \to 1)$, plantee el sistema lineal resultante y determine $(u_1(1), u_2(1))$. Compare con $y(1) = 1$ e indique cuál método aproxima mejor.

Solución.

(a) Reescritura como sistema (6 puntos)

Definimos

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y'.$$

Entonces

$$u_1' = y' = u_2,$$

y como

$$y'' = -y + (x^2 + 2),$$

obtiene

$$u_2' = -u_1 + (x^2 + 2).$$

(b) Euler explícito con $h = 1$ (8 puntos)

Fórmulas:

$$u_1^{n+1} = u_1^n + h\, u_2^n, \qquad u_2^{n+1} = u_2^n + h\big(-u_1^n + (x_n^2 + 2)\big).$$

Condiciones iniciales:

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = 0.$$

<u>Primer paso: $x_0 = 0 \to x_1 = 1$</u>

Aquí $f(0) = 0^2 + 2 = 2$.

$$u_1(1) = 0 + 1 \cdot 0 = 0,$$
$$u_2(1) = 0 + 1 \cdot (-0 + 2) = 2.$$

<u>Segundo paso: $x_1 = 1 \to x_2 = 2$</u>

Aquí $f(1) = 1 + 2 = 3$.

$$u_1(2) = u_1(1) + u_2(1) = 0 + 2 = 2,$$
$$u_2(2) = u_2(1) + (-u_1(1) + 3) = 2 + (0 + 3) = 5.$$

$$\boxed{(u_1(1), u_2(1)) = (0, 2)}, \qquad \boxed{(u_1(2), u_2(2)) = (2, 5)}.$$

(c) Euler implícito — primer paso (6 puntos)

Fórmulas:

$$u_1^1 = u_1^0 + h\,u_2^1, \qquad u_2^1 = u_2^0 + h\big(-u_1^1 + (x_1^2+2)\big).$$

Datos: $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = 0$, $x_1 = 1$, y $f(1) = 3$.

$$u_1^1 = u_2^1,$$
$$u_2^1 = -u_1^1 + 3.$$

Sustituyendo $u_1^1 = u_2^1$:

$$u_2^1 = -u_2^1 + 3 \quad \Rightarrow \quad 2u_2^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad u_2^1 = \frac{3}{2}.$$

Entonces

$$u_1^1 = u_2^1 = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{(u_1(1), u_2(1)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}.$$

<u>Comparación con el valor exacto</u>

La solución exacta es $y(x) = x^2$, por lo que

$$y(1) = 1.$$

Aproximaciones:

$$\text{Euler explícito: } u_1(1) = 0 \quad (\text{error} = 1),$$
$$\text{Euler implícito: } u_1(1) = \frac{3}{2} \quad (\text{error} = 0{,}5).$$

El método implícito da un valor más cercano al exacto en este primer paso.

3. Considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) (6 pts) Demuestre que se puede aplicar el método de Cholesky para resolver el sistema.

b) (6 pts) Compruebe si los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel convergen para este sistema, indicando claramente qué criterio de convergencia utiliza (por ejemplo, dominancia diagonal estricta o que A sea simétrica definida positiva).

(c) Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, realice:

- (4 pts) una iteración del método de Jacobi, y
- (4 pts) una iteración del método de Gauss–Seidel,

entregando los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ obtenidos en ambos casos.

Solución:

(a) Demuestre que se puede aplicar el método de Cholesky

Puntaje: 6 puntos

Para aplicar Cholesky es suficiente que A sea simétrica definida positiva.

- A es simétrica: $A = A^T$. (1 pt)
- Comprobación de menores principales:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \qquad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det(A) = 56 > 0.$$

(3 pt)

- Con los tres menores principales positivos concluimos que A es **SPD** y, por tanto, existe la factorización $A = LL^T$. (2 pt)
- (Opcional) Una factorización explícita es

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2\sqrt{210}}{15} \end{pmatrix},$$

y se puede resolver $Ly = \mathbf{b}$, $L^T\mathbf{x} = y$.

(b) Convergencia de Jacobi y Gauss–Seidel

Puntaje: 6 puntos

- Verificar dominancia diagonal estricta por filas:

$$\begin{aligned} |4| &> |-1| + |0| = 1, \\ |4| &> |-1| + |-1| = 2, \\ |4| &> |-1| + |0| = 1. \end{aligned}$$

  Por tanto, A es estrictamente diagonalmente dominante. (2.0 pt)
- Consecuencia: la dominancia diagonal estricta garantiza la convergencia de **Jacobi** y **Gauss–Seidel** para cualquier vector inicial. (2.0 pt)
- Alternativa válida: probar que A es SPD (ítem (a)) y citar la convergencia de Gauss–Seidel para matrices SPD; para Jacobi conviene usar la dominancia o calcular $\rho(B_J) < 1$. (2.0 pt)

(c) Iteraciones (Puntaje: 8 puntos)

Partiendo de $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Jacobi (4 pt)

Las fórmulas de Jacobi, para este sistema, son:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 + x_2^{(k)}}{4}, \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4}, \qquad x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 + x_2^{(k)}}{4}.$$

Sustituyendo $\mathbf{b} = (3, 6, 3)^T$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$:

$$x_1^{(1)} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1, \qquad x_2^{(1)} = \frac{6+1+1}{4} = \frac{8}{4} = 2, \qquad x_3^{(1)} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(1)}_{\text{Jacobi}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(4 pt: 1 pt por planteamiento, 3 pt por cálculo/resultado correcto)

Gauss–Seidel (4 pt)

Actualizando secuencialmente con los valores más recientes:

$$x_1^{(1)} = \frac{3 + x_2^{(0)}}{4} = \frac{3+1}{4} = 1.$$

$$x_2^{(1)} = \frac{6 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{4} = \frac{6+1+1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$x_3^{(1)} = \frac{3 + x_2^{(1)}}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{x}_{\text{GS}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.}$$

(4 pt: 1 pt por esquema, 3 pt por cálculo/resultado correcto)

Solución exacta: resolviendo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (3, 6, 3)^T$ se obtiene la solución exacta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{15}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}28571 \\ 2{,}14286 \\ 1{,}28571 \end{pmatrix}.$$

Comparando:

- Tras la primera iteración, Jacobi da $(1, 2, 1)^T$.
- Tras la primera iteración, Gauss–Seidel da $(1, 2, 5/4)^T$, que aproxima mejor la componente 3.