Cálculo III
Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ I: límites y continuidad
La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$
y derivadas de orden mayor
Módulo 2, Presentación 5

Raimund Bürger

27 de marzo de 2025

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Los conceptos de la derivada direccional y en particular de la derivada parcial aún no corresponden al concepto de la diferenciabilidad de funciones de una variable dado que la derivada direccional no considera enteramente el comportamiento de la función en una vecindad n-dimensional.

La existencia de todas las derivadas direccionales en un punto x^0 asegura la continuidad de f en todas las direcciones, pero esto todavía no nos permite deducir la continuidad de f en el punto x^0 (mientras que para las funciones de una variable, la diferenciabilidad sí implica la continuidad).

Ahora introduciremos un concepto de diferenciabilidad que considera enteramente la vecindad n-dimensional.

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

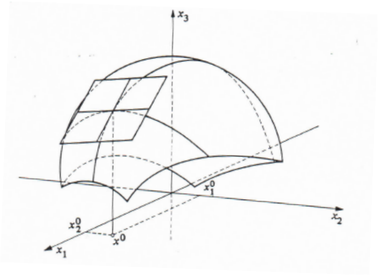


Figura: La diferenciabilidad de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definición 2.7 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y x^0 un punto interior de $D(f)$. La función se llama diferenciable en x^0 si existen $\vec{c} = \{c_1, \dots, c_n\}$ y una función f^0 definida en una vecindad $U(x^0)$ tales que:

1. $f^0(x^0) = \lim_{x \to x^0} f^0(x) = 0$.
2. $f(x) = f(x^0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + d(x, x^0) f^0(x)$ para todo $x \in U(x^0)$.

El vector $\vec{c}$ se llama derivada (o derivada total) de f en x^0.

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Para $n = 1$, si f es diferenciable en x^0, entonces en una vecindad de x^0 la función f puede ser aproximada por una recta g con $g(x) = f(x^0) + c(x - x^0)$ de tal manera que

$$\frac{f(x) - g(x)}{|x - x^0|} \to 0 \quad \text{cuando } x \to x^0.$$

Para $n = 2$ (funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x^0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) \\ &= f(x_1^0, x_2^0) + c_1(x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0) \end{aligned}$$

representa un plano en $\mathbb{R}^3$ por $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$. Ahora, la diferenciabilidad en x^0 significa que en una vecindad de x^0 podemos aproximar f por un plano, el plano tangencial, de tal manera que

$$\frac{f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)}{d((x_1, x_2), (x_1^0, x_2^0))} \to 0 \quad \text{cuando } (x_1, x_2) = x \to x^0 = (x_1^0, x_2^0).$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea f diferenciable en x^0. Entonces todas las derivadas parciales de primer orden existen en x^0, y

$$f_{x_k}(x^0) = c_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

es decir, $\vec{c} = \nabla f(x^0)$.

Demostración Como f es diferenciable, en una vecindad de x^0

$$f(x) = f(x^0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + d(x, x^0) f^0(x).$$

Para un índice k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sea $x = x^0 + h\vec{e}_k$ con algún $h \neq 0$. Obtenemos $\vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) = hc_k$ y $d(x, x^0) = |h|$, por lo tanto

$$\frac{f(x^0 + h\vec{e}_k) - f(x^0)}{h} = c_k + \frac{|h|}{h} f^0(x^0 + h\vec{e}_k).$$

Concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{h \to 0} \left(c_k + \frac{|h|}{h} f^0(x^0 + h\vec{e}_k) \right) = c_k. \quad \blacksquare$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Más generalmente, la diferenciabilidad implica las existencia de la derivadas direccionales en todas las direcciones. Además, podemos calcular las derivadas direccionales a partir las derivadas parciales.

Teorema 2.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x^0. Entonces f es diferenciable en x^0 en cada dirección $\vec{a}$, y se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) = \left(\nabla f(x^0)\right) \cdot \vec{a}, \tag{2.1}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)\right| \leqslant \left\|\nabla f(x^0)\right\|. \tag{2.2}$$

Demostración

1. Según el Teorema 2.4, en una vecindad de x^0,

$$f(x) = f(x^0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + d(x, x^0) f^0(x)$$

donde $\vec{c} = \nabla f(x^0)$. Si definimos $x = x^0 + h\vec{a}$ y elegimos $|h| = d(x, x^0) \neq 0$ suficientemente pequeño, se tiene que

$$f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0) = h\vec{c} \cdot \vec{a} + |h| f^0(x^0 + h\vec{a}).$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 2.5 (continuación)

2. Esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0+h\vec{a})-f(x^0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{|h|}{h}f^0(x^0+h\vec{a})\right)=\vec{c}\cdot\vec{a}=\big(\nabla f(x^0)\big)\cdot\vec{a}.\end{aligned}$$

3. Utilizando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\left|\big(\nabla f(x^0)\big)\cdot\vec{a}\right| \leqslant \left\|\nabla f(x^0)\right\|\cdot\|\vec{a}\| = \left\|\nabla f(x^0)\right\|. \quad \blacksquare$$

Comentamos que si $\nabla f(x^0)=\vec{0}$, entonces (2.1) implica que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)=0 \quad \text{para toda dirección } \vec{a}.$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Por otro lado, si $\nabla f(x^0) \neq \vec{0}$, entonces

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\nabla f(x^0)\|} \nabla f(x^0)$$

define una dirección en $\mathbb{R}^n$. Para la derivada direccional de f en x^0 en la dirección $\vec{a}_0$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}_0}(x^0) = \big(\nabla f(x^0)\big) \cdot \vec{a}_0 = \frac{\nabla f(x^0) \cdot \nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|} = \|\nabla f(x^0)\|.$$

Entonces $\vec{a}_0$ es una dirección extremal, dado que según (2.2),

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) \right| \leqslant \|\nabla f(x^0)\| = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}_0}(x^0)$$

para cualquier dirección $\vec{a}$. En otras palabras, $\vec{a}_0$ es la dirección del mayor crecimiento de f en el punto x^0.

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Si f es diferenciable en un punto x^0, entonces la existencia de las derivadas direccionales (garantizada por el Teorema 2.5) en x^0 asegura que f es continua en x^0 en todas las direcciones.

Sin embargo, esto no nos permite concluir que f es continua en x^0. En el Teorema 2.7 demostraremos que si f es diferenciable en x^0 (en el sentido de la Definición 2.7), f es continua en x^0.

Teorema 2.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x^0, luego para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(f)$ con $d(x, x^0) < \delta$,

$$\left| f(x) - f(x^0) \right| \leqslant M d(x, x^0)$$

con la constante $M = \|\nabla f(x^0)\| + \varepsilon$.

Demostración

1. Como f es diferenciable, existe una vecindad $U(x^0)$ donde

$$f(x) = f(x^0) + \vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + d(x, x^0) f^0(x), \quad \vec{c} = \nabla f(x^0).$$

Demostración del Teorema 2.6 (continuación)

2. Ahora, para $\varepsilon > 0$ elegimos un $\delta > 0$ tal que $x \in U(x^0)$ y $|f^0(x)| < \varepsilon$ para todo x tal que $d(x, x^0) < \delta$. Utilizando la desigualdad de Schwarz, obtenemos para $d(x, x^0) < \delta$

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(x^0)\right| &\leqslant \left|\vec{c} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)\right| + d(x, x^0)\left|f^0(x)\right| \\ &\leqslant \|\vec{c}\|\|\vec{x} - \vec{x}^0\| + d(x, x^0)\left|f^0(x)\right| \\ &\leqslant \left(\left\|\nabla f(x^0)\right\| + \varepsilon\right) d(x, x^0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.7 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x^0. Entonces f es continua en x^0.

Demostración Sea $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $D(f)$ con $x^k \to x^0$ cuando $k \to \infty$. Según el Teorema 2.6 existe una constante M tal que para cada k suficientemente grande

$$\left|f(x^k) - f(x^0)\right| \leqslant M d(x^k, x^0).$$

Esto implica que $f(x^k) \to f(x^0)$. $\blacksquare$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Si todas las derivadas parciales de una función f existen en un punto x^0, no necesariamente f debe ser diferenciable en x^0, dado que en este caso ni siquiera podemos concluir que f es continua en x^0. Bajo una hipótesis adicional vale la siguiente inversión del Teorema 2.4.

Teorema 2.8 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si en una vecindad $U(x^0)$ de x^0 las derivadas parciales $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ existen y son continuas en x^0, entonces f es diferenciable en x^0.

Demostración

1. Existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $U_{\varepsilon_0}(x^0) \subset U(x^0) \subset D(f)$. Elegimos $x = x^0 + \vec{v}$ con $0 \leqslant \|\vec{v}\| < \varepsilon_0$, donde
$$\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i;$$
además definimos $\vec{v}^0 := \vec{0}$ y $\vec{v}^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} v_i \vec{e}_i$, $\nu = 1, \ldots, n$, entonces $\|\vec{v}^\nu\| \leqslant \|\vec{v}\| < \varepsilon_0$ y sabemos que
$$x^0 + \vec{v}^\nu \in U_{\varepsilon_0}(x^0), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Demostración del Teorema 2.8 (continuación)

2. Tal como en la demostración del Teorema 2.3, existen ξ^ν en el segmento lineal que une $x^0 + \vec{v}^{\nu-1}$ con $x^0 + \vec{v}^\nu$ tales que

$$
\begin{aligned}
&f(x^0 + \vec{v}) \\
&= f(x^0) + \sum_{\nu=1}^{n} \big(f(x^0 + \vec{v}^\nu) - f(x^0 + \vec{v}^{\nu-1}) \big) \\
&= f(x^0) + \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) \\
&= f(x^0) + \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right) \\
&= f(x^0) + \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \|\vec{v}\| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{v_\nu}{\|\vec{v}\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right).
\end{aligned}
$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 2.8 (continuación)

3. Para demostrar el teorema solamente hay que demostrar que la siguiente función es continua en x^0:

$$f^0(x) = f^0(x^0 + \vec{v})$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{v_\nu}{\|\vec{v}\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right) & \text{si } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{si } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

4. Dado que las derivadas parciales $\partial f / \partial x_\nu$ son continuas en x^0, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon(\nu)$ con $0 < \delta_\varepsilon(\nu) < \varepsilon_0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{para todo } x \text{ con } d(x, x^0) < \delta_\varepsilon(\nu).$$

Ahora elegimos

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon(1), \dots, \delta_\varepsilon(n)\}.$$

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 2.8 (continuación)

5. Así, para todo x con $d(x, x^0) < \delta_\varepsilon$ también se tiene

$$d(\xi^\nu, x^0) \leqslant \|\vec{v}\| < \delta_\varepsilon,$$

y finalmente llegamos a

$$\begin{aligned} \left|f^0(x)\right| &\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|v_\nu|}{\|\vec{v}\|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right| \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\xi^\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir, f^0 es continua en x^0. ■

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.6 Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + x \cos y$. Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin y$$

son continuas en cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Ahora, si nuevamente queremos calcular la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección $\vec{a} = (1/\sqrt{2})\{1, 1\}$, obtenemos aplicando el Teorema 2.5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0, y_0) &= \left(\nabla f(x_0, y_0)\right) \cdot \vec{a} = \{2x_0 + \cos y_0, -x_0 \sin y_0\} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 1\}\right) \\
&= \sqrt{2}x_0 + \frac{\cos y_0}{\sqrt{2}} - \frac{x_0 \sin y_0}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

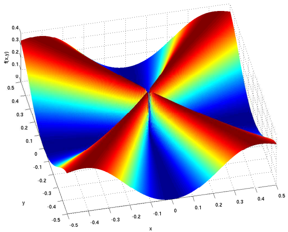
lo que reconfirma el resultado del Ejemplo 2.4

2.5. La diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.7 Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determinar las derivadas parciales de f.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$?
c) Sea $(x_0, y_0) = (1,1)$. Determinar la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección $\vec{a} = (0{,}6, 0{,}8)$.
d) Determinar en (x_0, y_0) la dirección de mayor crecimiento de f.



Ejemplo 2.7, solución sugerida

a) Sea $(x,y) \neq 0$, entonces podemos calcular las derivadas parciales directamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(2x^4+y^4) - x^2y^2 \cdot 8x^3}{(2x^4+y^4)^2} = \frac{2xy^2}{2x^4+y^4} - \frac{8x^5y^2}{(2x^4+y^4)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y(2x^4+y^4) - x^2y^2 \cdot 4y^3}{(2x^4+y^4)^2} = \frac{2x^2y}{2x^4+y^4} - \frac{4x^2y^5}{(2x^4+y^4)^2}.$$

En virtud de

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{2h^4+0} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{0+h^4} = 0$$

podemos concluir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Ejemplo 2.7, solución sugerida (continuación)

b) La función f no es diferenciable en $(0,0)$. Para demostrar esto basta probar que f no es continua en $(0,0)$ (Teorema 2.7). Los siguientes cálculos son suficientes:

$$\lim_{h\to 0} f(h,0) = 0, \quad \lim_{h\to 0} f(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{2h^4 + h^4} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) La derivada direccional solicitada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0, y_0) &= 0{,}6 \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 0{,}8 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \\ &= 0{,}6 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\right) + 0{,}8 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) = \frac{2}{45} = 0{,}0\bar{4}. \end{aligned}$$

d) La dirección de mayor crecimiento es

$$\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|_2} = \frac{9}{\sqrt{8}} \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que para un índice k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ la derivada parcial f_{x_k} existe en $D(f_{x_k}) \subset D(f)$. Entonces podemos tratar de formar en un punto interior $x^0 \in D(f_{x_k})$ para un índice l $(1 \leqslant l \leqslant n)$ la derivada parcial $(f_{x_k})_{x_l} = f_{x_k x_l}$.

A su vez, si $f_{x_k x_l}$ existe sobre $D(f_{x_k x_l}) \subset D(f_{x_k})$, podemos tratar de formar la derivada parcial $(f_{x_k x_l})_{x_m} = f_{x_k x_l x_m}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, etc.

Definición 2.8 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si en un punto interior

$$x^0 \in D\left(f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_{l-1}}}\right)$$

existe para un k_l con $l > 1$ la derivada parcial

$$\left(f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_{l-1}}}\right)_{x_{k_l}}(x^0) \quad (1 \leqslant k_i \leqslant n \text{ para } i = 1, \ldots, l),$$

entonces esta derivada parcial se llama una derivada parcial del orden l de f en el punto x^0. También usamos la notación

$$f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_l}}(x^0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_l}}(x^0).$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Las derivadas parciales de la Definición 2.5 son derivadas parciales de primer orden; a veces la función f misma se llama derivada parcial del orden cero.

Definición 2.9 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $k \geqslant 0$ un número entero. Escribimos $f \in C^k(X)$ si sobre X todas las derivadas de f del orden k existen y son continuas.

Ejemplo 2.8 Consideremos sobre $\mathbb{R}^3$ la función

$$f(x, y, z) = 4xyz - x^2 + y^2.$$

Aqui obtenemos las derivadas parciales

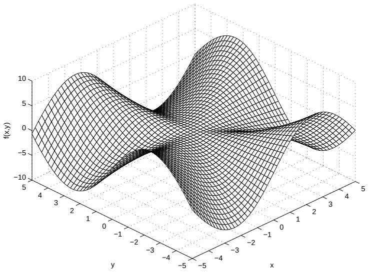
$$\begin{aligned} f_x &= 4yz - 2x, & f_{xx} &= -2, & f_{xy} &= f_{yx} = 4z, \\ f_y &= 4xz + 2y, & f_{yy} &= 2, & f_{xz} &= f_{zx} = 4y, \\ f_z &= 4xy, & f_{zz} &= 0, & f_{yz} &= f_{zy} = 4x. \end{aligned}$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

En este ejemplo obtenemos $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{yz} = f_{zy}$. La pregunta es si siempre podemos intercambiar el orden de las derivaciones parciales. Pero esto no es válido en general.

Ejemplo 2.9 Consideremos sobre $\mathbb{R}^2$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Ejemplo 2.9 (continuación)
Aquí obtenemos las derivadas parciales en $(0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = 0,$$

y para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = y \cdot \frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = x \cdot \frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Esto implica que

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h \cdot \frac{-h^4}{(h^2)^2}\right] = -1, \quad f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h \cdot \frac{h^4}{(h^2)^2}\right] = 1.$$

Observamos que las segundas derivadas parciales $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ existen, pero sus valores son diferentes.

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Ejemplo 2.9 (continuación)
En este caso, ambas funciones f_{xy} y f_{yx} son discontinuas en $(0,0)$.
Para ver eso, calculamos primero para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Para la sucesión

$$\{(x_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

obtenemos $f_{xy}(x_k,y_k) = f_{yx}(x_k,y_k) = 0$, es decir

$$\lim_{k\to\infty} f_{xy}(x_k,y_k) = 0 \neq f_{xy}(0,0) = -1,$$
$$\lim_{k\to\infty} f_{yx}(x_k,y_k) = 0 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Teorema 2.9 (Schwarz) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $U(x_0, y_0)$ una vecindad abierta. Supongamos que la derivada parcial f_{xy} existe en $U(x_0, y_0)$ y es continua en (x_0, y_0); además supongamos que $f_y(x, y_0)$ existe para todo $(x, y_0) \in U(x_0, y_0)$. Entonces también existe $f_{yx}(x_0, y_0)$, y se tiene que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Demostración

1. Tenemos que demostrar que la función

$$F(h) := \frac{1}{h}\big(f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)\big)$$

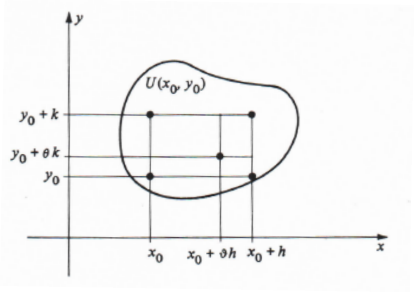
satisface $\lim_{h\to 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0)$. Si $(x_0 + h, y_0) \in U(x_0, y_0)$, entonces

$$f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Demostración del Teorema 2.9 (continuación)



2. Utilizando la abreviatura

$$G(h,k) := \frac{1}{hk}\Big(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - [f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)]\Big)$$

notamos que

$$F(h) = \lim_{k\to 0} G(h,k).$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Demostración del Teorema 2.9 (continuación)

3. Ahora sea $k \neq 0$ fijo y $(x_0, y_0 + k) \in U(x_0, y_0)$, y sea $\varphi(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$. De la existencia de f_{xy} sigue la existencia de f_x, por lo tanto según el Teorema del Valor Intermedio existe $\vartheta \in (0, 1)$ tal que
$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h\varphi'(x_0 + \vartheta h),$$
es decir,
$$G(h, k) = \frac{f_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \vartheta h, y_0)}{k}.$$
4. Sea $\psi(y) := f_x(x_0 + \vartheta h, y)$. La existencia de f_{xy} en $U(x_0, y_0)$ implica la existencia de ψ', y existe $\theta = \theta(k) \in (0, 1)$ tal que
$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta k) = kf_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \theta k),$$
es decir
$$G(h, k) = f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \theta k).$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

Demostración del Teorema 2.9 (continuación)

5. Como f_{xy} es continua en (x_0, y_0), para $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo (x, y) con $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$,

$$\left| f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon/2.$$

Entonces para todo h, k con $|h|, k|$ suficientemente pequeños

$$\left| G(h, k) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon/2,$$

y obtenemos

$$\left| F(h) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| = \lim_{k \to 0} \left| G(h, k) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pero esto significa que

$$\lim_{h \to 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0). \quad \blacksquare$$

2.6. Derivadas parciales de orden mayor

En particular, las hipótesis del Teorema 2.9 están satisfechas si $f \in C^2(U(x_0, y_0))$ para una vecindad abierta $U(x_0, y_0)$ de (x_0, y_0).

Si ambas derivadas parciales $f_{xy}(x_0, y_0)$ y $f_{yx}(x_0, y_0)$ existen, estos dos valores pueden ser diferentes, según el Teorema 2.9, solamente si ambas funciones f_{xy} y f_{yx} son discontinuas en (x_0, y_0). Esto sucede en el Ejemplo 2.9.

Teorema 2.10 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Para un $k \geqslant 1$ sea $f \in C^k(X)$; admás sea $\nu_i \in \{1, \ldots, k\}$ para $1 \leqslant i \leqslant k$- Entonces para cada permutación $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de los números $\nu_1, \ldots, \nu_k$ y todo $x^0 \in X$ se tiene que

$$f_{x_{\nu_1} x_{\nu_2} \ldots x_{\nu_k}}(x^0) = f_{x_{\mu_1} x_{\mu_2} \ldots x_{\mu_k}}(x^0).$$

Demostración Dado que cada permutación de $\nu_1, \ldots, \nu_k$ puede ser generada por un número finito de permutaciones de solamente dos elementos consecutivos, el enunciado del teorema es una consecuencia del Teorema 2.9. ■