UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2 (521218-525221)

Tiempo: 110 minutos

Problema 1.

(i) ¿Cuál es la solución general de la EDO homogénea de Euler-Cauchy

$$x^3y'''(x) + 2x^2y''(x) + 2y(x) = 0?$$

(ii) Si $x(t)$ e $y(t)$ admiten transformada de Laplace. Determine explícitamente $x(t)$, si para todo $t \geq 0$ se verifica

$$\begin{cases} x(t) = \delta(t-2) - (y * f)(t) \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t x(u)\,du \end{cases} \quad \text{donde } f(t) = \cos(\sqrt{2}t)$$

Solución

(i) Si D representa al operador $\frac{d}{dt}$, la sustitución usual $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ transforma la EDO propuesta en

$$[D(D-1)(D-2)] + 2D(D-1) + 2]z(t) = 0$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda+1)[\lambda - (1-i)][\lambda - (1+i)].$$

Luego la solución general de la EDO en z, es

$$z(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^t\cos(t) + C\mathrm{e}^t\mathrm{sen}(t)$$

donde A, B y C son constantes reales arbitrarias. Como $y(x) = z(\ln(x))$, $x > 0$, se tiene que la solución general homogénea del problema propuesto es

$$y(x) = \frac{A}{x} + Bx\cos(\ln(x)) + Cx\,\mathrm{sen}(\ln(x)).$$

(*ii*) Sean $X(s)$ e $Y(s)$ las transformadas de Laplace de x e y respectivamente, entonces el sistema propuesto se transforma en

$$\begin{cases} X(s) = \mathrm{e}^{-2s} - Y(s)\dfrac{s}{s^2+2} \\ Y(s) = \dfrac{1}{s}X(s). \end{cases}$$

En consecuencia

$$X(s) = \mathrm{e}^{-2s} - \frac{1}{s}X(s)\frac{s}{s^2+2}$$

de donde

$$X(s)(1 + \frac{1}{s^2+2}) = \mathrm{e}^{-2s}.$$

Así, obtenemos

$$X(s) = \mathrm{e}^{-2s}(1 - \frac{1}{s^2+3}),$$

de donde aplicando transformada inversa se infiere que

$$x(t) = \delta(t-2) - \frac{\sqrt{3}}{3}H(t-2)\mathrm{sen}(\sqrt{3}(t-2)).$$

Problema 2. Usando Transformada de Laplace, resuelva el PVI:

$$\begin{cases} y''(t) - \frac{1}{2}y'(t) - \frac{1}{2}y(t) \ = \ h(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{donde } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t-2 & \text{si } 1 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

Solución

Aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la EDO dada y escribiendo $H(s)$ como la transformada de $h(t)$, obtenemos

$$(s^2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2})\, Y(s) = H(s), \ \text{ es decir}$$

$$(s-1)(s+\frac{1}{2})\, Y(s) = H(s).$$

Así,

$$Y(s) = \frac{H(s)}{(s-1)(s+\frac{1}{2})},$$

donde

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)](s) = \mathrm{e}^{-s}\Big(\frac{1-s}{s^2}\Big) - \mathrm{e}^{-4s}\Big(\frac{1+2s}{s^2}\Big).$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = -\mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{-4s}\frac{1}{2s^2(s-1)}$$

y entonces

$$y(t) = -H(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{2})}\right](t-1) - \frac{1}{2}H(t-4)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right](t-4).$$

Como

$$\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{2})} = -\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+\frac{1}{2}}, \qquad \text{y además}$$

$$\frac{1}{s^2(s-1)} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1},$$

sigue que

$$y(t) = H(t-1)\Big[4 - 2(t-1) - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-1)}\Big] - H(t-4)\Big[-1 - (t-4) + \mathrm{e}^{t-4}\Big].$$

Problema 3.

(i) Usando valores propios determine la solución general del sistema

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

El espacio propio, S_{λ_1}, correspondiente a λ_1, es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) =< \{(1, 0, -1)\} >$$

el cual da origen a la primera solución, $\varphi_1(t)$, del sistma como

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El segundo espacio propio correspondiente a λ_2, es

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) =< \{(0, 1, -2/3)\} >$$

y la segunda solución, $\varphi_2(t)$, linealmente independiente con la primera, es

$$\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

El tercer espacio propio, S_{λ_3}, correspondiente a λ_3, es

$$S_{\lambda_3} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_3 I) =< \{(0, 0, 1)\} >$$

y la tercera solución al sistema, $\varphi_3(t)$, linealmente independiente con las dos anteriores, es

$$\varphi_3(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del problema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + B\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} + C\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.

(*ii*) **Usando valores propios** determine la solución general del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - y + \mathrm{e}^{3t}, \\ y'(t) = 3y, \end{cases} \quad \text{sabiendo que } X(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es un sistema fundamental para el problema homogéneo asociado.

Solución

Primero observemos que la segunda ecuación del sistema $y'(t) = 3y$ tiene solución $y(t) \equiv 0$ o $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{3t}$.

Ahora, si $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es la solución general del sistema, sabemos que

$$Z(t) = X_h(t) + X_p(t) \quad \text{donde} \quad X_h(t) = X(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

con A y B constantes reales arbitrarias, y

$$X_p(t) = X(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ se determinan del sistema

$$X(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El último sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{3t}c_1'(t) - t\mathrm{e}^{3t}c_2'(t) = \mathrm{e}^{3t} \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_2'(t) = 0 \end{cases}$$

de donde

$$c_2(t) = c$$

con $c =$ constante,

$$c_1(t) = t.$$

De este modo la solución particular, es

$$X_p(t) = X(t)\begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del sistema dado es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + X(t)\begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} & -t\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A+t \\ C \end{pmatrix}$$

donde A y C son constantes arbitrarias. Ahora volviedo al sistema original vemos que necesariamente $C = 0$.

De esta forma la salución al sistema es

$$\begin{cases} x(t) = (A+t)\mathrm{e}^{3t}\,, \\ y(t) = 0, \end{cases}$$

o bien

$$x(t) = y(t) = \mathrm{e}^{3t}.$$

HMM/JMS/FPV//jms.
26/01/2012.