Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — lunes 1 de julio de 2013

Problema 1 (25 puntos)**.** Se considera el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 59 \\ 21 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Sean $\mathbf{e} := (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{E} := \alpha \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$, y $\mathbf{d} := \alpha \mathbf{e}$. Decidir si los siguientes vectores son una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (i) para $\alpha = 0.1$, (ii) para $\alpha = 0.5$:

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1.05 \\ 9.95 \\ 20.05 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 0.75 \\ 10.25 \\ 19.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

b) Demostrar que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para la solución numérica de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ convergen para todo vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

c) Ejecutar dos pasos con cada uno de estos métodos, partiendo de $\mathbf{x}_0 = (10, 10, 10)^{\mathrm{T}}$.

d) Sea $\mathbf{x}^*$ la solución exacta de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Estimar el número de iteraciones N del método de Jacobi tal que se puede garantizar que para cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$,

$$\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^*\| \leq 10^{-3} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|,$$

para una norma vectorial $\|\cdot\|$ adecuada.

Solución sugerida.

a) Aquí obtenemos:

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 10.2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} |\mathbf{x}_1| + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 32.05 \\ 32.05 \\ 32.05 \end{pmatrix},$$

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}| = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 8.5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} |\mathbf{x}_2| + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 31.5 \\ 31.5 \\ 31.5 \end{pmatrix},$$

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}| = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} |\mathbf{x}_3| + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

Es obvio que $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ no son soluciones aproximadas para $\alpha = 0.1$, pero sí son soluciones aproximadas para $\alpha = 0.5$.

b) Observamos que $\mathbf{A}$ es irreduciblemente diagonaldominante. De acuerdo al Teorema 4.4, el mt́odo de Jacobi converge para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Para concluir que el método de Gauss-Seidel converge *no* podemos aplicar el Teorema 4.5 (pues $\mathbf{A}$ no posee la estructura de signos requerida), sino que calculamos con $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que el método de Gauss-Seidel viene dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_k + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Para analizar si este método converge, notamos que la matriz de iteración es

$$\mathbf{B} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0 & 0.1875 & -0.3125 \end{bmatrix}.$$

Como $r_\sigma(\mathbf{B}) \leq \|\mathbf{B}\|_1 = 0.9375 < 1$, el método de Gauss-Seidel converge para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

c) Utilizando el método de Jacobi, obtenemos los siguientes vectores (se informan más de dos para ilustrar la convergencia)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 14.75 \\ 10.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -6.125 \\ 11.125 \\ 19.875 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 8.25 \\ 19.125 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.4375 \\ 10.0625 \\ 14.4375 \end{pmatrix}.$$

El Método de Gauss-Seidel entrega los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 11.25 \\ 18.125 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.5625 \\ 10.0781 \\ 15.8203 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1.1289 \\ 10.5127 \\ 16.3208 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1.0959 \\ 10.3958 \\ 16.2459 \end{pmatrix}.$$

d) Se tiene que

$$\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^* = \mathbf{B}^N(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*), \quad \text{donde } \mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}),$$

por lo tanto para una norma vectorial adecuada

$$\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^*\| < r_\sigma(\mathbf{B})^N \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \|\mathbf{B}\|_p^N \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_p, \quad p = 1, 2, \infty,$$

Aquí

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & -0.25 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desafortunadamente, $\|\mathbf{B}\|_1 = \|\mathbf{B}\|_\infty = 1$, pero los valores propios de $\mathbf{B}$ son

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i},$$

por lo tanto $r_\sigma(\mathbf{B}) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ y $(r_\sigma(\mathbf{B}))^N < 10^{-3}$ si $N > \log 10^{-3}/\log(1/\sqrt{2}) = 19.931\dots$, así que hay que iterar $N = 20$ veces.

Problema 2 (15 puntos)**.** Se desea resolver el problema de aproximación

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0^* + \alpha_1^* t_i + \alpha_2^* t_i^2)^2 = \min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 t_i + \alpha_2 t_i^2)^2$$

para los datos

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
y_i	8	5	3	5

.

a) Resolver el problema, transformando la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.
b) Graficar el resultado.
c) En cada caso, calcular también la matriz $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Comparar $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ y $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{R})$.

Solución sugerida.

a) Aquí la solución $\mathbf{x}^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)$ corresponde al problema de cuadrados mínimos

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2^2 = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la transformación de Householder procederemos en tres pasos.
(1) Primero calculamos las cantidades

$$\tilde{\mathbf{a}}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \beta_1 = \frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6}; \quad \hat{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{a}_2^{(2)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{a}_3^{(2)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\hat{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}8\\5\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\5\\3\\5\end{pmatrix} - \frac{37}{6}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21/2\\-7/6\\-19/6\\-7/6\end{pmatrix}.$$

(2) Para el siguiente paso notamos que

$$\tilde{\mathbf{a}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}; \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}(0+\sqrt{5})} = \frac{1}{5}; \quad \hat{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{5}\\1\\2\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{a}_2^{(3)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5}\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{a}_3^{(3)} = \begin{pmatrix}-4/3\\-1/3\\8/3\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(5 - \frac{4}{3}\sqrt{5}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-4/3\\-1/3\\8/3\end{pmatrix} - \left(1 - \frac{4}{15}\sqrt{5}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\-\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\sqrt{5}\\\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}^{(3)} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5}\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}-7/6\\-19/6\\-7/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7/6\\-19/6\\-7/6\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(-\frac{7}{6}\sqrt{5} - \frac{11}{2}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{11}{10}\sqrt{5}\\\frac{7}{30}\sqrt{5} - \frac{31}{15}\\\frac{7}{15}\sqrt{5} + \frac{31}{30}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}2.4597\\-1.5449\\2.0768\end{pmatrix};$$

(3) Finalmente,

$$\tilde{\mathbf{a}}_3^{(3)} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\sqrt{5}\\\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\sqrt{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-0.7370\\1.8592\end{pmatrix};$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2\left[\frac{4}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2\right]} = \frac{1}{\frac{20}{3} - \frac{8}{15}\sqrt{5}} = \frac{15}{100 - 8\sqrt{5}};$$

$$\hat{\mathbf{w}}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{10}{3} + \dfrac{4}{15}\sqrt{5} \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_3^{(4)} = \left(\mathbf{I} - \beta_3 \hat{\mathbf{w}}_3 \hat{\mathbf{w}}_3^{\mathrm{T}}\right) \tilde{\mathbf{a}}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^4 &= \left(\mathbf{I} - \beta_3 \hat{\mathbf{w}}_3 \hat{\mathbf{w}}_3^{\mathrm{T}}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{7}{30}\sqrt{5} - \dfrac{31}{15} \\ * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{7}{30}\sqrt{5} - \dfrac{31}{15} \\ * \end{pmatrix} - \frac{305 + 9\sqrt{5}}{220} \begin{pmatrix} -\dfrac{10}{3} + \dfrac{4}{15}\sqrt{5} \\ * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{7}{30}\sqrt{5} - \dfrac{31}{15} \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{30}\sqrt{5} + \dfrac{137}{30} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ * \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde "$*$" corresponde a información no requerida. La solución deseada es la del sistema $\mathbf{R}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_1$, donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{21}{2} \\ \dfrac{11}{10}\sqrt{5} \\ \dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

con la solución

$$\alpha_0^* = 4.55, \quad \alpha_1^* = -2.35, \quad \alpha_2^* = 1.25.$$

c) Se tiene que

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

con los valores propios

$$\sigma_1 = 23.9668, \quad \sigma_2 = 2.8702, \quad \sigma_3 = 1.1630,$$

por lo tanto

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \approx 20.6077,$$

mientras que

$$\mathbf{R}^*\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{R}^*\mathbf{R}) = \sqrt{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})} \approx 4.5396.$$

Problema 3 (20 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que el método SOR converge para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y a partir de cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, y para valores $0 < \omega < 2$ del parámetro de relajación ω.

b) Demostrar que el método SOR incluso converge con un parámetro de relajación óptimo, $\omega = \omega_{\text{opt}}$. Calcular ω_{opt} y el valor del radio espectral $r_\sigma(\mathbf{B}(\omega_{\text{opt}}))$.

c) Sea $\tilde{\omega}$ el valor de ω_{opt} redondeado adecuadamente a dos decimales. Calcular $r_\sigma(\mathbf{B}(\tilde{\omega}))$ y dos pasos del método SOR con $\omega = \tilde{\omega}$ para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Solución sugerida.

a) La matriz es una L-matriz estrictamente diagonal dominante, por lo tanto es una M-matriz; además es simétrica y definida positiva. Por lo tanto, el método SOR converge para $0 < \omega < 2$.

b) Como $\mathbf{A}$ es, además, ordenada consistentemente, existe un parámetro de relajación óptimo, $\omega = \omega_{\text{opt}}$. Para calcular el valor de ω_{opt}, notamos que la matriz

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

posee los valores propios $\pm\sqrt{5}/4 \approx 0.5590$, por lo tanto

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{16}}} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{11}}{4}} \approx 1.0934003$$

con el radio espectral

$$r_\sigma(\mathbf{B}(\omega_{\text{opt}})) = \omega_{\text{opt}} - 1 \approx 0.0934003.$$

c) Redondeado adecuadamente se tiene $\tilde{\omega} = 1.10$, y obtenemos

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.6500 \\ -2.5713 \\ 0.7858 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.7779 \\ -2.1218 \\ 0.9545 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.9887 \\ -2.0160 \\ 0.9958 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.9967 \\ -2.0016 \\ 0.9995 \end{pmatrix}.$$