Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
18 de mayo de 2022
Prof.: V. Aros, J. Careaga, S. Caro, A. Gajardo, F. Jara, F. Lobos, I. Navarrete, K. Tabilo y G. Torres.

Test 2
Función Exponencial y Logarítmica

1.A El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la Escala de Richter que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud R de un terremoto se define por $R = \log(A/A_0)$, donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud $R = 0$. La magnitud del terremoto de Concepción el 27 de febrero de 2010 fue de 8,8 en la escala de Richter y el terremoto de Iquique el 1 de abril del 2014 fue de 8,2 en la misma escala. ¿Cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda en el terremoto del 2010 que la amplitud de la onda en el terremoto del 2014?

a) aproximadamente 3,98 veces. **CORRECTA**
b) aproximadamente 1,82 veces.
c) aproximadamente 10^{17} veces.
d) aproximadamente 0,25 veces.

<u>Solución:</u> Primero se calculará la amplitud de onda de cada terremoto:

- Amplitud de onda del terremoto en Concepción:

$$R_C = \log(A_C/A_0) \Rightarrow 8,8 = \log(A_C/A_0) \Leftrightarrow A_C = 10^{8,8}A_0$$

- Amplitud de onda del terremoto en Iquique:

$$R_I = \log(A_I/A_0) \Rightarrow 8,2 = \log(A_I/A_0) \Leftrightarrow A_I = 10^{8,2}A_0$$

Luego, de $A_C = 10^{8,8}A_0$ y $A_I = 10^{8,2}A_0$ se despeja A_0 pues es un término en común que permitirá comparar las amplitudes entre sí:

$$\frac{A_C}{10^{8,8}} = A_0 \ \text{ y } \ \frac{A_I}{10^{8,2}} = A_0$$

por lo tanto se obtiene:

$$\frac{A_C}{10^{8,8}} = \frac{A_I}{10^{8,2}}$$

esto es:

$$A_C = 10^{8,8-8,2}A_I$$

aquí $10^{8,8-8,2} = 10^{0,6} \approx 3,98$, por consiguiente:

$$A_C \approx 3{,}98A_I$$

es decir, la amplitud del terremoto del 2010 es $3,98$ veces mayor que la amplitud del terremoto del 2014.

1.B En las paredes y techos de una caverna de Lascaux, Francia, se encontraron dibujos hechos con carbón vegetal. Determine la edad aproximada de las figuras, si se determinó que 86 % del C^{14} de un trozo de carbono vegetal que se encontró en la cueva había decaído por radioctividad. Tenga presente que la vida media del C^{14} es 5.730 años y que el modelo de decaimiento está dado por $A(t) = A_0 e^{kt}$ con A_0 la cantidad inicial de la sustancia que se desintegra o decae.

Se sugiere que k se aproxime a seis cifras decimales.

a) aproximadamente 16.248 años. **CORRECTA**

b) aproximadamente 17.460 años.

c) aproximadamente 10.948 años.

d) aproximadamente 19.350 años.

Solución: El enunciado dice que la vida media del carbono 14 es 5.730 años, esto significa que cuando $t = 5.730$ la cantidad de sustancia es la mitad de la cantidad inicial, por tanto, si la cantidad inicial es A_0 entonces la mitad será $A_0 \cdot 0,5$ y esto ocurre transcurridos los $t = 5.730$ años. Sustituyendo esta información en el modelo se obtiene:

$$A_0 \cdot 0{,}5 = A_0 e^{k5730}$$

de aquí se despeja k:

$$\begin{aligned} A_0 \cdot 0{,}5 &= A_0 e^{k5730} \\ \Rightarrow \quad 0{,}5 &= e^{k5730} \end{aligned}$$

aplicando ln( ) en ambos lados:

$$\begin{aligned} \ln(0{,}5) &= k5730 \\ \Rightarrow \quad \frac{\ln(0{,}5)}{5730} &= k \end{aligned}$$

aproximando a 6 cifras decimales, se tiene que $k \approx -0{,}000121$, por tanto el modelo queda así: $A(t) = A_0 e^{-0{,}000121 \cdot t}$.

Por otra parte, se pide la edad aproximada de las figuras si se determinó que el 86 % había decaído, es decir, se debe encontrar el tiempo t que demoró la sustancia en decaer hasta $A_0 \cdot 0,14$, por tanto el modelo queda así:

$$A_0 \cdot 0{,}14 = A_0 e^{-0{,}000121 \cdot t}$$

luego:

$$\begin{aligned} 0{,}14 &= e^{-0{,}000121 \cdot t} \\ \Rightarrow \quad \ln(0{,}14) &= -0{,}000121 \cdot t \\ \Rightarrow \quad \frac{\ln(0{,}14)}{-0{,}000121} &= t \\ \Rightarrow \quad 16.248 &\approx t \end{aligned}$$

esto es, la cantidad inicial de C^{14} demoró 16.248 años en decaer al 14 % (que es la cantidad encontrada en la actualidad), lo cual significa que la edad de las figuras es de 16.248 años.

2.A Resuelva la siguiente ecuación:

$$(0{,}4)^{\log(x^2)+1} = (6{,}25)^{2-\log(x^3)}$$

Pista: $(6{,}25) = (0{,}4)^{-2}$

a) $x = 10^{(\frac{5}{4})}$ **CORRECTA**

b) $x = 10^5$

c) $x = 10^{-\frac{5}{7}}$

d) $x = 10$

Solución: Utilizando la pista, reemplazamos (6.25) por $(0{,}4)^{-2}$, quedando:

$$\begin{array}{rrcl}
 & (0{,}4)^{\log(x^2)+1} & = & (0{,}4^{-2})^{2-\log(x^3)} \\
\Leftrightarrow & (0{,}4)^{\log(x^2)+1} & = & (0{,}4)^{-2(2-\log(x^3))} \\
\Leftrightarrow & \log(x^2)+1 & = & -2(2-\log(x^3)) \\
\Leftrightarrow & \log(x^2)+1 & = & -4+2\log(x^3) \\
\Leftrightarrow & 2\log(x)+1 & = & -4+6\log(x) \\
\Leftrightarrow & 4\log(x) & = & 5 \\
\Leftrightarrow & \log(x) & = & \dfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow & x & = & 10^{\frac{5}{4}}
\end{array}$$

2.B Resuelva la siguiente inecuación:

$$\log_{1/2}(x) + \log_{1/2}(x-3) > \log_{1/2}(2)$$

a) $x \in \left(3, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ **CORRECTA**

b) $x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

c) $x \in \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right]$

d) $x \in \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$

Solución: Antes de resolver la inecuación se deben considerar las restricciones que provienen del uso de la función logaritmo. Se sabe que la función logaritmo $\log_b(u)$ está definida para $u > 0$, por lo tanto los x que se encontrarán deben cumplir con las siguientes condiciones:

- $x - 3 > 0$, en la inecuación participa $\log_{1/2}(x-3)$.
- $x > 0$, en la inecuación participa $\log_{1/2}(x)$.

es decir, $x > 3 \ \wedge \ x > 0$ por tanto $x > 3$.

Ahora se procede a encontrar los x que satisfacen la inecuación. Observe que el lado izquierdo de la desigualdad: $\log_{1/2}(x) + \log_{1/2}(x-3)$ se reduce a $\log_{1/2}(x(x-3))$ aplicando la propiedad $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$, así la inecuación queda de la siguiente forma:

$$\log_{1/2}(x(x-3)) > \log_{1/2}(2)$$

y reordenando queda así:

$$\log_{1/2}(2) < \log_{1/2}(x(x-3)) \tag{1}$$

La función $\log_b(u)$ con $b < 1$ es decreciente por lo tanto (1) ocurre siempre y cuando:

$$x(x-3) < 2$$

por consiguiente:

$$\begin{array}{rrcl} & x(x-3) - 2 & < & 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 3x - 2 & < & 0 \\ \Rightarrow & \left(x - \left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\right) & < & 0 \end{array}$$

y esto ocurre cuando $x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \right)$.

Así, intersectando esta solución con la restricción $x > 3$, se obtiene que el conjunto solución de la inecuación logarítmica es: $x \in \left(3, \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \right)$

Nota: Tenga presente que $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \approx -0{,}5615$ y $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}5615$. Si no consideramos la restrición $x > 3$ y sólo nos guiamos por $x \in (-0{,}5615; 3{,}5615)$ podemos decir que $x = 2$ es solución de la inecuación, pero si se reemplaza en ella se llega a un error pues $\ln(2-3)$ no está definido.

Esperamos que hayas entendido la solución. Si no entendiste o tienes dudas por favor pregúntanos. Los horarios de consultas y correos de contacto están en el syllabus, y recuerda que también puedes preguntar en canvas y en teams.
Te aconsejamos que no esperes a última hora para repasar, ejercitar y/o resolver dudas, mejor hazlo con tiempo, así aumentas tus posibilidades de entender la materia y de aprender a resolver los ejercicios a tiempo, y por tanto aumentas tus posibilidades de obtener una mejor calificación.