UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°5$ (Teorema de Fubini y producto de medidas)

Problemas a resolver en práctica

1. Sea ν es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Considere la medida λ sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ dada por

$$\lambda(A) = \int_A I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}\,\nu(dx) \qquad\qquad \text{para todo } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

la cual es llamada distribución exponencial de parámetro 1.

a) Asuma que $x \mapsto g(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu)$. Demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}\,\nu(dx).$$

b) Demuestre que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sen^2(x)}{x}\lambda(dx) = \frac{1}{4}\log(5),$$

donde $\frac{1}{x}sen^2(x)$ se define igual a 0 cuando $x = 0$.

Solución (a)

Procediendo como en la Pregunta 1 de la Evaluación 1 deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}} g^{\pm}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g^{\pm}(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}\,\nu(dx), \tag{1}$$

cuando $g : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible. Aquí, g^+ y g^- son las partes positivas y negativas de g.

Como $x \mapsto g(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu)$, las funciones $x \mapsto g^{\pm}(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}$ pertenecen a $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu)$. Entonces, usando (1) obtenemos que $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}\,\nu(dx).$$

Solución (b)

En el enunciado se ha definido $sen^2(x)/x$ como la función

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{sen^2(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ya que ϕ es continua, ϕ es $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-medible. De acuerdo al inciso (a) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sen^2(x)}{x} \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, I_{[0,+\infty[}(x)\ e^{-x}\, \nu(dx).$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sen^2(x)}{x} \lambda(dx) = \int_{[0,+\infty[} \phi(x)\ e^{-x}\, \nu(dx). \tag{2}$$

Considere la función

$$f(x,y) = e^{-x} sen(2\,xy),$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $f : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible. Ya que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $f : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible, luego $f\, I_{[0,+\infty[\times[0,1]}$ es $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-medible.

Puesto que $|f(x,y)| \leq e^{-x}$,

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,1]} |f(x,y)|\ \nu(dy) \right) \nu(dx) &\leq \int_{[0,+\infty[} \nu([0,1])\, e^{-x} \nu(dx) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde la última integral se entiende en el sentido de Riemann. Aplicando el corolario del teorema de Fubini se llega a

$$f\, I_{[0,+\infty[\times[0,1]} \in L^1\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu \otimes \nu\right).$$

Luego, aplicando la segunda parte del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\ \nu(dy) \right) \nu(dx) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx) \right) \nu(dy). \tag{3}$$

Ya que

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\ \nu(dy) = \int_0^1 e^{-x} sen\,(2\,xy)\ dy = e^{-x}\frac{-cos\,(2\,x)+1}{2x} = e^{-x}\frac{sen^2(x)}{x},$$

la relación (3) se convierte en

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-x}\frac{sen^2(x)}{x}\ \nu(dx) = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx)\right)\nu(dy)\,.$$

De acuerdo a (2) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sen^2(x)}{x}\lambda(dx) = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx)\right)\nu(dy)\,. \tag{4}$$

Como $x \mapsto f(x,y)$ es continua,

$$\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx) = \int_0^{+\infty} e^{-x} sen\,(2\,xy)\ dx,$$

donde la integral del miembro derecho se entiende en el sentido de Riemann. Integrando dos veces por partes se llega a que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} sen\,(2\,xy)\ dx &= 2y\int_0^{+\infty} e^{-x} cos\,(2\,xy)\ dx\\ &= 2y\left(1-2\int_0^{+\infty} e^{-x} sen\,(2\,xy)\ dx\right).\end{aligned}$$

De donde

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} sen\,(2\,xy)\ dx = \frac{2y}{1+4y^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx)\right)\nu(dy) = \int_{[0,1]}\frac{2y}{1+4y^2}\nu(dy) = \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}dy.$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1+4y^2$ se obtiene

$$\int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}dy = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln(5)\,.$$

Lo que implica

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,+\infty[} f(x,y)\ \nu(dx) \right) \nu(dy) = \frac{1}{4} \ln(5).$$

Usando (4) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sen^2(x)}{x} \lambda(dx) = \frac{1}{4} \ln(5).$$

2. Considere dos variables aleatorias $X, Y : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$, donde $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$. Asuma que X, Y son independientes. Demuestre que

$$\mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1} = \left(\mathbb{P} \circ X^{-1}\right) \otimes \left(\mathbb{P} \circ Y^{-1}\right).$$

Recuerde que $\mathbb{P} \circ Z^{-1}(A) = \mathbb{P}(Z^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$.

Nota: $\mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1}$ es llamada distribución conjunta de las variables aleatorias X, Y.

Solución

Para todo $A, B \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$,

$$\mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1}(A \times B) = \mathbb{P}\left((X,Y)^{-1}(A \times B)\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right).$$

Como X, Y son independientes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y^{-1}(B)\right) \\ &= \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) \cdot \mathbb{P} \circ Y^{-1}(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1}(A \times B) &= \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) \cdot \mathbb{P} \circ Y^{-1}(B) \\ &= \left(\mathbb{P} \circ X^{-1}\right) \otimes \left(\mathbb{P} \circ Y^{-1}\right)(A \times B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1}$ coincide con $(\mathbb{P} \circ X^{-1}) \otimes (\mathbb{P} \circ Y^{-1})$ en el semianillo $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^k\right) \times \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$. Lo que implica

$$\mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1} = \left(\mathbb{P} \circ X^{-1}\right) \otimes \left(\mathbb{P} \circ Y^{-1}\right).$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Para cada $k = 1, 2$ considere la medida positiva μ_k definida sobre $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$. Sean $f_k : (\Omega_k, \mathcal{F}_k) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ funciones medibles no negativas. Para todo $A \in \mathcal{F}_k$ se define
$$\lambda_k (A) = \int_A f_k \, d\mu_k.$$
Demuestre que
$$\lambda_1 \otimes \lambda_2 = \lambda,$$
donde
$$\lambda (A) = \int_A f_1 \cdot f_2 \, d\mu_1 \otimes \mu_2$$
para todo $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

2. Considere las funciones medibles $f, g : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Sea ν la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

    a) Demuestre que $(t, x) \mapsto f(x - t)\, g(t)$ es una función $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-medible.

    b) Suponga que $f, g \in L^1 (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu)$. Demuestre que
    $$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x - t)\, g(t) \; d\nu(t)$$
    está definida ν-c.d. y pertenece a $L^1 (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \nu)$.

CMG/cmg.