UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 1 -Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Repaso Algebra en*** $\mathbb{C}$**.**

1. Sean M y N dos puntos del plano que son los afijos de $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = 1$ [1].
   - Representa en el plano los afijos y los vectores z_1 y z_2;
   - Calcular $d(0, M)$ y comparar con $|z_1|$.
   - Calcular el ángulo, θ entre los vectores z_2 y z_1. Compara con $\mathrm{Arg}(z_1)$

2. Calcular el módulo, determinar el conjunto $arg(z)$, escribir en forma polar y exponencial ($z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in arg(z)$) de los números complejos:

   (a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ **(b)** $z_2 = 2 + 2i$ **(c)** $z_3 = -1 - i$ **(d)** $z_4 = \overline{z_1}$

3. Sea z un número complejo no nulo. Establecer:
   (a) $z \in \mathbb{R}, z \neq 0.$ si y solamente si
   $$arg(z) = \{k\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}$$
   (b) $z \in \mathbb{R}, z > 0.$ si y solamente si
   $$arg(z) = \{2k\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}$$
   (c) $z \in \mathbb{R}, z < 0.$ si y solamente si
   $$arg(z) = \{(2k+1)\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}$$
   (P) $z \in \mathbb{C}, Re(z) = 0.$ si y solamente si
   $$arg(z) = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$
   (P) $\arg(\overline{z}) = \{-\theta \in \mathbb{R} : \quad \theta \in \arg(z)\}$

4. Utilizar la forma de Moivre para la unidad imaginaria y evaluar $S(n) = \sum_{k=0}^{n} i^k$, para $n \in \mathbb{N}$ fijo.

5. Utilizar la fórmula de Euler para establecer
   $$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

6. Determinar el módulo y un argumento de los siguientes números complejos
   (P) $z = \frac{1-u}{1+u}$ si $u = \cos(\theta) + i\sin(\theta),\ \theta \in]0, \pi[$
   (a) $z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+1)^3}$
   (b) $z = -3\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$

---

[1] $M = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ y $N = (1, 0)$

7. Si $q = e^{ix}$ y $Q(n) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$.

   Encontrar, $\operatorname{Re}(Q(n))$ e $\operatorname{Im}(Q(n))$.

   Inferir una expresión simple para $C(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ y $S(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$.

8. Las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son definidas por la recurrencia

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & 1 & b_0 = 0 \\ a_{n+1} & = & \frac{a_n - b_n}{2} & n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_{n+1} & = & \frac{a_n + b_n}{2} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

   Si $z_n = a_n + ib_n$ establecer para $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$;

   (b) $z_n = 2^{-n/2} e^{in\pi/4}$;

   (c) $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$ y $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$

   (d) $c = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n|$.

9. Para los siguientes números complejos determinar módulo, un argumento y escribir su forma polar

   (a) $z = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ (b) $z = (1-i)^4$ (c) $z = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$

10. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = (x-2)\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$. Determinar su módulo y un argumento de z. Demostrar que z^{1976} es u numero real y precisar su signo.

11. Sea U el conjunto de todos lo números complejos de módulo 1.

   (a) Sea $z \in U$ ¿Qué puede decir de los números $\frac{1}{z}$ y $\overline{z}$.?

   (b) Sean $a, b \in U$ tales que $ab \neq -1$. Demostrar que $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

12. Probar que la aplicación de conjugación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z) = \overline{z}$ es una biyección involutiva, esto es, ella es su propia inversa $f((fz)) = z$, compatible con estructura algebraica de $\mathbb{C}$. Para todo $a, b \in \mathbb{C}$

   (a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

   (b) $f(a-b) = f(a) - f(b)$

   (c) $f(ab) = f(a)f(b)$

   (P) Si $b \neq 0 : f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)}$.

   Indicación: Debe mostrar que (b) se sigue de (a), mientras que (d) se sigue (P), y la propiedad de involución.

Anexo

La siguiente información le permitirá mejor responder preguntas de este práctico.

1º Identificación de $\mathbb{C} = \langle\{1, i\}\rangle$ con las matrices cuadradas de rotación:

Si $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se designa el subespacio vectorial de $M_2(R)$ de rotaciones por

$$\mathcal{R}_2 = \{a\mathrm{I} + b\mathrm{J} :\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \langle\{\mathrm{I}, \mathrm{J}\}\rangle.$$

Entonces $\mathbb{C} \cong \mathcal{R}_2$.

Previamente a establecer esa afirmación verifique $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$ y si A y B son rotaciones, entonces $AB = BA$.
Enseguida desarrolle las siguientes preguntas de la manera más directa y simple:

1. Probar que las siguiente aplicación es biyectiva

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathcal{R}_2,\ a + ib \longmapsto \phi(a + ib) = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. Verifique

   - $\phi(1) = \mathrm{I}$
   - $\phi(i) = \mathrm{J}$
   - $\phi(\overline{z}) = \big(\phi(z)\big)^t$
   - $\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2) = \phi(z_2)\phi(z_1)$
   - $\phi(iz) = \mathrm{J}\phi(z) = \phi(z)\mathrm{J}$
   - Si $z \neq 0$, entonces $\big(\phi(z)\big)^{-1}$ existe y $\phi(z^{-1}) = \big(\phi(z)\big)^{-1}$

3. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\phi(z^n) = \big(\phi(z)\big)^n$$

2º $\mathbb{N}_* = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3}$

Aquí, si $k = 1, 2, \ldots$:

- $\overline{0} = \{n = 0 \,\mathrm{mod}(4)\} = \{0, 4, 8, \ldots, 4k, \ldots\}$
- $\overline{1} = \{n = 1 \,\mathrm{mod}(4)\} = \{1, 5, 9, \ldots, 4k + 1, \ldots\}$
- $\overline{2} = \{n = 2 \,\mathrm{mod}(4)\} = \{2, 6, 10, \ldots, 4k + 2, \ldots\}$
- $\overline{3} = \{n = 3 \,\mathrm{mod}(4)\} = \{3, 7, 11, \ldots, 4k + 1, \ldots\}$