

Práctica 7 - Álgebra III (525201)

Ejercicio 1. Dada $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, se define la familia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k. \quad (1)$$

a) Demuestre que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos, es decir, se verifica que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} \subseteq B_n.$$

Demostración. Como

$$\underbrace{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k}_{B_{n+1}} = \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right)}_{B_n} \cap A_{n+1}$$

se sigue que $B_{n+1} \subseteq B_n$ por propiedad de la intersección de conjuntos. ■

b) Pruebe que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Demostración. Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k$. Luego, $x \in A_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Como lo anterior se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$. De aquí se desprende que $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$, esto es, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Sea $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Luego, x pertenece a toda subfamilia $\{A_k\}_{k=1}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $x \in B_n$ para todo número natural n . Se sigue que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, esto es, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

De las dos inclusiones anteriores concluimos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. ■

c) Dé un ejemplo de familia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que los conjuntos de la familia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definidos según la ecuación (1), sean todos distintos.

Solución. Considere la familia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k = \left[\frac{1}{k}, 1 \right]$$

Como $A_i \cap A_j = A_j$, para todo $i < j$, es fácil ver que

$$\begin{aligned} B_n &= \bigcap_{k=1}^n A_k \\ &= A_n \end{aligned}$$

Luego, los conjuntos de la familia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son todos distintos pues los conjuntos de la familia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ lo son. ■

Ejercicio 2. Sea X un conjunto no vacío. Se define la relación R_X en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ por:

$$\forall A, B, C, D \subseteq X, \quad (A, B)R_X(C, D) \iff A \subseteq C \wedge D \subseteq B.$$

a) Pruebe que R_X es relación de orden.

Demostración. Para probar que R_X es relación de orden, debemos probar que es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*.

Reflexividad: Sean $A, B \subseteq X$. Luego, como $A \subseteq A \wedge B \subseteq B$ se sigue que $(A, B)R_X(A, B)$.

Antisimetría: Sean $A, B, C, D \subseteq X$ tales que $(A, B)R_X(C, D)$ y $(C, D)R_X(A, B)$. Luego, $A \subseteq C \wedge D \subseteq B$ y $C \subseteq A \wedge B \subseteq D$. Así, $A = C$ y $B = D$, por lo cual $(A, B) = (C, D)$.

Transitividad: Sean $A, B, C, D, E, F \subseteq X$ tales que $(A, B)R_X(C, D)$ y $(C, D)R_X(E, F)$. Luego, $A \subseteq C \wedge D \subseteq B$ y $C \subseteq E \wedge F \subseteq D$. Así, $A \subseteq C \subseteq E \wedge F \subseteq D \subseteq B$. Luego, $A \subseteq E \wedge F \subseteq B$. Es decir, $(A, B)R_X(E, F)$.

De las tres propiedades anteriores concluimos que R_X es una relación de orden. ■

b) Muestre que R_X es relación de orden parcial y que, sin embargo, se verifica que:

$$\exists A', B' \subseteq X, \forall A, B \subseteq X, \quad (A', B')R_X(A, B).$$

Demostración. Para mostrar que R_X es relación de orden parcial debemos mostrar dos elementos $(A, B), (C, D)$ que no estén relacionados. Para este propósito, basta considerar (X, X) y (\emptyset, \emptyset) . En efecto, $X \not\subseteq \emptyset$, pues X es no vacío y por tanto se tiene que $(X, X) \not R_X(\emptyset, \emptyset)$ y $(\emptyset, \emptyset) \not R_X(X, X)$, por la primera componente en el primer caso y por la segunda en el segundo.

Sin embargo, como $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que $\emptyset \subseteq A$ y $B \subseteq X$ se verifica que

$$\emptyset \subseteq A \wedge B \subseteq X \implies (\emptyset, X)R_X(A, B)$$

■

Ejercicio 3. Sean V, W e.v. sobre \mathbb{K} y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

a) Sea M un s.e.v. de V . Se define la siguiente relación en V :

$$v \sim_M w \iff v - w \in M$$

Demuestre que \sim_M es relación de equivalencia en V .

Demostración. Para probar que \sim_M es relación de equivalencia en V , debemos probar que es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

Reflexividad: Sea $u \in V$. Como $\theta_V \in M$, ya que M es s.e.v. de V , se tiene que $u - u = \theta_V \in M$. Es decir, $u \sim_M u$.

Simetría: Sean $u, v \in V$ tales que $u \sim_M v$. Es decir, $u - v \in M$. Como M es s.e.v., entonces $-(u - v) \in M$. Como $-(u - v) = v - u$, se sigue que $v - u \in M$ y por tanto $v \sim_M u$.

Transitividad: Sean $u, v, w \in V$ tales que $u \sim_M v$ y $v \sim_M w$. Es decir, $u - v \in M$ y $v - w \in M$. Como M es s.e.v., entonces $(u - v) + (v - w) = u - w \in M$ y por tanto $u \sim_M w$.

De las tres propiedades anteriores concluimos que \sim_M es una relación de equivalencia en V . ■

b) Adoptando la notación $V/M = V/\sim_M$, demuestre que V/M es un e.v. dotado de las operaciones

$$[u]_M + [v]_M = [u + v]_M \quad \alpha \cdot [u]_M = [\alpha \cdot u]_M$$

para $[u]_M, [v]_M \in V/M$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Concluya que su elemento neutro es $[\theta]_M = M$.

Demostración. Para probar que V/M es e.v., primero demostraremos que las operaciones $+$ y \cdot están bien definidas (i.e. no dependen del representante de clase) y luego extenderemos las propiedades de V a V/M .

Sean $u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in V$ tales que $[u]_M = [\tilde{u}]_M$, $[v]_M = [\tilde{v}]_M$. Se tiene que $u - \tilde{u} \in M$ y $v - \tilde{v} \in M$, de donde

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} + v - \tilde{v} \in M &\iff (u + v) - (\tilde{u} + \tilde{v}) \in M \\ &\implies (u + v) \sim_M (\tilde{u} + \tilde{v}) \\ &\implies [u + v]_M = [\tilde{u} + \tilde{v}]_M \end{aligned}$$

Por tanto, $+$ es independiente del representante. Por otro lado, dado $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (u - \tilde{u}) &= \alpha \cdot u - \alpha \cdot \tilde{u} \in M \\ &\implies \alpha \cdot u \sim_M \alpha \cdot \tilde{u} \\ &\implies [\alpha \cdot u]_M = [\alpha \cdot \tilde{u}]_M \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene que \cdot es independiente del representante, también.

Por tanto, todas las propiedades de e.v. de V/M se pueden probar mediante las propiedades de V haciendo uso de los representantes de clase. De este modo, tenemos que el nulo en V/M debe ser la clase del nulo en V . En efecto,

$$[u]_M + [\theta_V]_M = [u + \theta_V]_M = [u]_M$$

Como $[\theta_V]_M := \{v \in V : v - \theta_V \in M\}$ y $v - \theta_V = v$, se sigue que $[\theta_V]_M = M$. ■

c) Demuestre que $\tilde{T} : V/\text{Ker}(T) \rightarrow W$ definida por

$$\tilde{T}([v]) = T(v), \quad \forall [v] \in V/\text{Ker}(T)$$

está bien definida y es una transformación lineal inyectiva.

Demostración. Para probar que \tilde{T} está bien definida, debemos demostrar que su que es independiente del representante de clase.

Sean $u, \tilde{u} \in V$ tales que $[u] = [\tilde{u}]$. Es decir, $u - \tilde{u} \in \text{Ker}(T)$. Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{T}([u]) &= T(u) \\ &= T(u) - \theta_W \\ &= T(u) - T(u - \tilde{u}) \\ &= T(u) - T(u) + T(\tilde{u}) \\ &= T(\tilde{u}) \\ &= \tilde{T}([\tilde{u}]) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que \tilde{T} es independiente del representante y por tanto está bien definida.

Podemos observar que \tilde{T} es lineal a partir de la linealidad de T . En efecto, dados $[u], [v] \in V/Ker(T)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\alpha \cdot [u] + [v]) &= \tilde{T}([\alpha \cdot u + v]) \\ &= T(\alpha \cdot u + v) \\ &= \alpha \cdot T(u) + T(v) \\ &= \alpha \cdot \tilde{T}([u]) + \tilde{T}([v])\end{aligned}$$

Finalmente, para probar que \tilde{T} es inyectiva basta probar que $Ker(\tilde{T}) = [\theta_V]$. Para tal efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\tilde{T}([v]) = \theta_W &\implies T(v) = \theta_W \\ &\implies v \in Ker(T) \\ &\implies [v] = [\theta_V]\end{aligned}$$

■