Problema 1. Sea la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z)=\begin{cases} xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y,z)\notin C \\ 0 & si \quad (x,y,z)\in C\end{cases} \quad \text{, donde } C:=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$$

a) Demostrar que f es continua en C.
b) Si $(x,y,z)\in C$, ¿es f diferenciable en (x,y,z)?
c) Si $(x,y,z)\in C$, calcular, si existen $f_{yx}(x,y,z)$ y $f_{xy}(x,y,z)$.
d) ¿Es f de clase C^2 en vecindades de $(0,0,1)$? ¿de $(0,0,0)$?

Solucion:

a) Si $(x,y,z)\notin C$ se tiene que $f(x,y,z)=xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ y además:

$$0\le\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\le 1 \quad ,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow 0\le\left|xyz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\le|xyz| \quad ,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\backslash C$$

$$\Rightarrow 0\le|f(x,y,z)|\le|xyz| \quad ,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\backslash C$$

Sea $(0,0,a)\in C$, usando lo anteriormente obtenido concluimos que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)}0=0 \quad y \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)}|xyz|=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)}f(x,y,z)=0 \quad ,\forall(0,0,a)\in C$$

Y dado que si $(0,0,a)\in C$ entonces $f(0,0,a)=0$ se tiene que:

$$f(0,0,a)=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)}f(x,y,z) \quad ,\forall(0,0,a)\in C$$

Por tanto, concluimos que f es continua en cualquier punto de C.

b) Sea $\varphi:=(0,0,a)\in C$, para determinar la diferenciabilidad de f en algún $\varphi\in C$ usando la **definicion 2.7** buscamos calcular $\nabla f(\varphi)$, como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,a)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0,a)-f(0,0,a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,a)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h,a)-f(0,0,a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,a)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0,h+a)-f(0,0,a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

Así de lo anterior concluimos que $\nabla f(\varphi) = (0,0,0), \forall \varphi \in C$ y de la **definicion 2.7** deducimos que:

$$f^0(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \frac{xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

Luego nos interesa calcular el valor de :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)} \frac{xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

para ello notemos que:

$$0 \leq \left| \frac{xyz\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \right| \leq \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|x,y\|_2|yz|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |yz| \quad , \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash C$$

y como

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)} 0 = 0 \quad y \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)} |yz| = 0$$

$$\implies \lim_{(x,y,z)\to(0,0,a)} f^0(x,y,z) = 0$$

y por tanto por la **definicion 2.7** concluimos que f es diferenciable en cualquier punto $\varphi \in C$.

c) Si $\vartheta = (x,y,z) \notin C$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vartheta) = yz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2yz}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vartheta) = xz\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y^2xz}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Sea $(0,0,a) \in C$, con lo obtenido anteriormente se tiene que:

$$f_{xy}(0,0,a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h,a) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,a)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{ah\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h} = a\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

$$f_{yx}(0,0,a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0,a) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,a)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(ha\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)\right) = a\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

De lo anterior concluimos que $f_{xy}(0,0,a), f_{yx}(0,0,a)$ existen solo si **a=0**, es decir, existen solo en el punto $(0,0,0)$.

d) Para que f sea C^2 en una vecindad de un punto se requiere que *todas* las derivadas parciales de orden 2 existan y sean continuas allí. De **c)** sabemos que $f_{xy} = f_{yx}$ sólo existen en $(0,0,0)$. Luego, como las derivadas mixtas no existen en $(0,0,1)$ en cualquier vecindad de este punto f no será de clase C^2. Luego, si consideramos la vecindad de radio $\varepsilon > 0$ centrada en $(0,0,0)$, se tiene que el punto de la vecindad $(0,0,\varepsilon/2)$ está en C, y como $\varepsilon/2 > 0$ las derivadas mixtas no existen en este punto por tanto f tampoco puede ser de clase C^2 en vecindades de $(0,0,0)$.

Problema 2. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la siguiente función es diferenciable en $(0,0)$?

$$f_p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+y)}{|x|^p + |y|^p} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solucion:

Para decidir la diferenciabilidad de la función en $(0,0)$ usaremos la **definicion 2.7**, por tanto buscamos calcular $\nabla f_p(0,0)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_p(h,0) - f_p(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{|h|^p h} \\ &= \lim_{h\to 0} |h|^{2-p} \end{aligned}$$

Así notamos que $\dfrac{\partial f_p}{\partial x}(0,0)$ existe solo si $p \leq 2$, además:

$$\frac{\partial f_p}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_p(0,h) - f_p(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{|h|^p h} = 0$$

Por tanto $\dfrac{\partial f_p}{\partial y}(0,0)$ existe para todo p real, analizaremos los casos **p=2** y **p<2** como sigue:

Si **p=2**:

Se tiene que $\nabla f_2(0,0) = (1,0)$ y por la **definicion 2.7** buscamos $f_2^0(x)$ tal que:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2^0(x) = 0$ **ii)** $f_2(x) = f_2(0,0) + \nabla f_2(0,0)(x,y) + \|x,y\|_2 f_2^0(x)$

Así, utilizando lo obtenido y reemplazando en **ii)** obtenemos:

$$f_2(x,y) = 0 + (1,0)(x,y) + \|x,y\| f^0(x) = x + \|x,y\| f^0(x,y)$$

$$\implies f_2^0(x,y) = \frac{f_2(x,y) - x}{\|x,y\|_2} = \frac{1}{\|x,y\|_2}\left(\frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2} - x\right)$$

$$= \frac{1}{\|x,y\|_2}\left(\frac{x^3 + x^2y - x^3 - xy^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ahora buscamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Conjeturamos que este límite **no** existe, para mostrarlo consideremos las sucesiones $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ donde $(x_k,y_k) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ y $(u_k, v_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{3}{k}\right)$ donde $(u_k, v_k) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ y notemos que:

$$f^0\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \frac{0}{(\frac{1}{k^2})^{3/2}} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f^0\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} f_2^0(x)\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{k^2}(\frac{-2}{k})}{(\frac{10}{k^2})^{3/2}} = \lim_{k\to\infty} -\frac{6}{10^{3/2}} = -\frac{6}{10^{3/2}} \neq 0$$

Por tanto, el límite buscado **no** existe y por la **definicion 2.7** concluimos que si **p=2** entonces f_2 no es diferenciable en $(0,0)$.

Si $\mathbf{p<2}$:
En este caso $\nabla f_p(0,0) = (0,0)$, así procederemos análogamente al caso anterior:

Sea $J := \{p \in \mathbb{R} \mid p < 2\}$

$$f_p^0(x,y) = \frac{f_p(x,y)}{\|x,y\|_2} = \frac{x^2(x+y)}{(|x|^p + |y|^p)(\|x,y\|_2)}, \quad \forall p \in J$$

Así nuevamente nos interesa mostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_p^0(x,y) = 0$$

Para hacer esto acotaremos $f_p^0(x,y)$ como sigue:

$$0 \leq |f_p^0(x,y)| = \left|\frac{x^2(x+y)}{(|x|^p + |y|^p)(\|x,y\|_2)}\right| \leq \left|\frac{x^2(x+y)}{(|x|^p)(\|x,y\|_2)}\right| = \frac{|x|^{2-p}|(x+y)|}{\|x,y\|_2}$$

$$\leq \frac{|x|^{2-p}(|x|+|y|)}{\|x,y\|_2} = \frac{|x|^{3-p} + |x|^{2-p}|y|}{\|x,y\|_2} = \frac{|x|^{3-p}}{\|x,y\|_2} + \frac{|x|^{2-p}|y|}{\|x,y\|_2} \quad , \forall p \in J$$

y sabemos que se cumple que:

$$|x| \leq \|x,y\|_2 \Rightarrow |x|^{3-p} \leq \|x,y\|_2^{3-p}, \quad \forall p \in J$$
$$|y| \leq \|x,y\|_2 \Rightarrow |x|^{2-p}|y| \leq \|x,y\|_2^{3-p}, \quad \forall p \in J$$

Entonces

$$0 \leq |f_p^0(x,y)| \leq \frac{|x|^{3-p}}{\|x,y\|_2} + \frac{|x|^{2-p}|y|}{\|x,y\|_2} \leq \frac{2\|x,y\|_2^{3-p}}{\|x,y\|_2} = 2\|x,y\|_2^{2-p}, \quad \forall p \in J$$

Ademas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\|x,y\|_2^{2-p} = 0 \quad , \forall p \in J$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_p^0(x,y) = 0 \quad , \forall p \in J$$

Por tanto por la **definicion 2.7** y lo obtenido en el caso anterior concluimos que $f_p(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ solo si $\mathbf{p<2}$.

Problema 3. Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f_x y f_y en $(0,0)$.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$? ¿Es de clase C^1?
c) ¿Se tiene $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$?

Solucion:

a) Si **(x,y)≠(0,0)** se tiene que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Conjeturamos que f_x y f_y **no** son continuas, en efecto: Sean $(x_k,y_k)=\left(\frac{1}{k},0\right)$ donde $(x_k,y_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ y $(u_k,v_k)=\left(0,\frac{1}{k}\right)$ donde $(u_k,v_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k,y_k)=\frac{2}{k}\sin(k)-\cos(k)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(u_k,v_k)=\frac{2}{k}\sin(k)-\cos(k)$$

Por tanto, dado que $\frac{2}{k}\sin(k)-\cos(k)$ **no** converge a ningún valor cuando $k\to\infty$. Concluimos que tanto f_x como f_y **no** son continuas en $(0,0)$.

b) Usaremos la **definicion 2.7** así buscamos calcular $\nabla f(0,0)$ como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)$$

Y usando que $-h\leq h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\leq h \quad ,\forall h\in\mathbb{R}$ concluimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)=0$$

Luego calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)=0$$

Por tanto, concluimos que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ así usando la **definicion 2.7** se obtiene que:

$$f^0(x,y) = \frac{f(x,y)}{\|x,y\|_2} = \frac{(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Para decidir la diferenciabilidad de f calculamos lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^0(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

y dado que

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq 1 \quad ,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

$$\implies -\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad ,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

y como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\sqrt{x^2+y^2} = 0 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Por acotamiento inferimos que **el limite buscado es 0** y por la **definicion 2.7** f es diferenciable en $(0,0)$. Además de la parte **a)** sabemos que f_x, f_y **no** son continuas en $(0,0)$ y por tanto f no puede ser de clase C^1.

c) Usaremos lo obtenido en **a)** para calcular $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ como sigue:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to0}\frac{(0-0)}{h} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h\to0}\frac{(0-0)}{h} = 0$$

y por tanto $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

Problema 4.
a) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(\mathbf{x})$ para la función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, x_2) = -ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

con $\mathbf{x}_0 = (0,1)$ y el término residual $R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ correspondiente.

b) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(\mathbf{x})$ para la función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 y + 2xz^3 + (\sin x) \cdot e^{yz}$$

con $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$ y el término residual $R_2((x,y,z), \mathbf{x}_0)$ correspondiente.

c) Acotar $R_2((x,y,z), \mathbf{x}_0))$ sobre la bola $B_1 := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{w}\|_\infty \leq 1\}$.

Solucion:
a) Calcularemos los términos necesarios para desarrollar el **polinomio de Taylor** y el **termino residual**, como sigue:
Sea $\alpha = (s_1, s_2) = (0,1)$ luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= 0 \\
\varphi_{x_1}(\alpha) &= -\frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2} = 0 \\
\varphi_{x_2}(\alpha) &= -\frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} = -1 \\
\varphi_{x_1 x_1}(\alpha) &= \frac{s_1^2 - s_2^2}{(s_1^2 + s_2^2)^2} = -1 \\
\varphi_{x_2 x_2}(\alpha) &= \frac{s_2^2 - s_1^2}{(s_1^2 + s_2^2)^2} = 1 \\
\varphi_{x_1 x_2}(\alpha) &= \frac{2 s_1 s_2}{(s_1^2 + s_2^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

Así de lo anterior podemos concluir que el **Polinomio de Taylor** es:

$$\begin{aligned}
T_2(x_1, x_2, \alpha) = \varphi(\alpha) + x_1 \varphi_{x_1}(\alpha) + (x_2 - 1)\varphi_{x_2}(\alpha) + \\
\frac{1}{2}\left(x_1^2 \varphi_{x_1 x_1}(\alpha) + 2x_1(x_2 - 1)\varphi_{x_1 x_2}(\alpha) + (x_2 - 1)^2 \varphi_{x_2 x_2}(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

$$= -(x_2 - 1) - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2$$

Luego para el **término residual** calcularemos las terceras derivadas:

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_1 x_1 x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \varphi_{x_1 x_1}}{\partial x_1} = -\frac{2x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \\
\varphi_{x_2 x_2 x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \varphi_{x_2 x_2}}{\partial x_2} = -\frac{2x_2(x_2^2 - 3x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}
\end{aligned}$$

y dado que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})$ se tiene que:

$$\varphi_{x_1x_2x_2} = \varphi_{x_2x_1x_2} = \varphi_{x_2x_2x_1} = \frac{2x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\varphi_{x_2x_1x_1} = \varphi_{x_1x_2x_1} = \varphi_{x_1x_1x_2} = \frac{2x_2(x_2^2 - 3x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

Y con lo anterior podemos obtener el término residual

$$\begin{aligned} R_2(x_1,x_2,0,1) = \frac{1}{6}(&x_1^3\varphi_{x_1x_1x_1}(\varrho,\varpi) + 3x_1^2(x_2-1)\varphi_{x_1x_1x_2}(\varrho,\varpi) + \\ &3x_1(x_2-1)^2\varphi_{x_1x_2x_2}(\varrho,\varpi) + (x_2-1)^3\varphi_{x_2x_2x_2}(\varrho,\varpi)) \end{aligned}$$

donde $\varrho \in [0, x_1]$ y $\varpi \in [1, x_2]$

b) Procederemos de manera análoga al ítem **a)**, como sigue:
Sea $\beta = (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$ luego:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 0 \\ f_x(\beta) &= 2a_1a_2 + 2a_3^3 + (\cos a_1)e^{a_2a_3} = 1 \\ f_y(\beta) &= a_1^2 + a_3(\sin a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_z(\beta) &= 6a_1a_3^2 + a_2(\sin a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{xx}(\beta) &= 2a_2 - (\sin a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{yy}(\beta) &= a_3^2(\sin a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{zz}(\beta) &= 12a_1a_3 + a_2^2(\sin a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{xy}(\beta) &= 2a_1 + a_3(\cos a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{xz}(\beta) &= 6a_3^3 + a_2\cos(a_1)e^{a_2a_3} = 0 \\ f_{yz}(\beta) &= (1 + a_2a_3)(\sin a)e^{a_2a_3} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el **polinomio de Taylor** de grado 2 será:

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z,\beta) = f(\beta) &+ xf_x(\beta) + yf_y(\beta) + zf_z(\beta) + \\ &\frac{1}{2}(x^2f_{xx}(\beta) + y^2f_{yy}(\beta) + z^2f_{zz}(\beta) + \\ &\quad 2xyf_{xy}(\beta) + 2xzf_{xz}(\beta) + 2f_{yz}(\beta)) \\ = x. \end{aligned}$$

Luego, calcularemos las terceras derivadas necesarias para obtener el **termino residual**, como sigue:

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y,z) &= -(\cos(x))e^{yz} \\
f_{yyy}(x,y,z) &= z^3(\sin(x))e^{yz} \\
f_{zzz}(x,y,z) &= 12x + y^3(\sin(x))e^{yz} \\
f_{xxy}(x,y,z) &= 2 - z(\sin(x))e^{yz} \\
f_{xxz}(x,y,z) &= -y(\sin(x))e^{yz} \\
f_{xyy}(x,y,z) &= z^2(\cos(x))e^{yz} \\
f_{xzz}(x,y,z) &= 12z + y^2\cos(x)e^{yz} \\
f_{xyz}(x,y,z) &= (yz+1)(\cos(x))e^{yz} \\
f_{yyz}(x,y,z) &= z(2+yz)(\sin(x))e^{yz} \\
f_{yzz}(x,y,z) &= (2y+y^2z)(\sin(x))e^{yz}
\end{aligned}$$

Por tanto, usando lo obtenido, calculamos el término residual:

$$\begin{aligned}
R_2(x,y,z,\beta) =& \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + y^3 f_{yyy} + z^3 f_{zzz} + 3x^2y f_{xxy} + 3x^2z f_{xxz} + 3xy^2 f_{xyy} + 3xz^2 f_{xzz} + \\
& + 3y^2z f_{yyz} + 3yz^2 f_{yzz} + 6xyz f_{xyz})
\end{aligned}$$

donde cada tercera derivada es evaluada en un punto $(\vartheta, \varrho, \sigma) \in \mathbb{R}^3$

c) Sea $\varphi := (x_0, y_0, z_0) \in B_1$ luego usando lo obtenido en **b)** y que para todo φ en B_1:

$$\|(x_0,y_0,z_0)\|_\infty = \sup(|x_0|,|y_0|,|z_0|) = \max(|x_0|,|y_0|,|z_0|) \leq 1 \quad ,\forall \varphi \in B_1$$

$$\Longrightarrow |x_0| \leq 1, |y_0| \leq 1, |z_0| \leq 1 \quad ,\forall \varphi \in B_1$$

Luego usando lo obtenido podemos acotar las derivadas involucradas en $R_2(x,y,z,\beta)$, como sigue:

(1) $|f_{xxz}(\varphi)| = |-y_0(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq |y_0 e^{y_0z_0}| \leq |e^{y_0z_0}| \leq e$

(2) $|f_{xxy}(\varphi)| = |2 - z_0(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq |2| + |-z_0(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq 2 + |e^{y_0z_0}| \leq 2+e$

(3) $|f_{zzz}(\varphi)| = |12x_0 + y_0^3(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq 12 + |y_0^3(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq 12 + |e^{y_0z_0}| \leq 12+e$

(4) $|f_{xzz}(\varphi)| = |12z_0 + y_0^2\cos(x_0)e^{y_0z_0}| \leq 12 + |y_0^2\cos(x_0)e^{y_0z_0}| \leq 12 + |e^{y_0z_0}| \leq 12+e$

(5) $|f_{yzz}(\varphi)| = |(2y_0 + y_0^2z_0)(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq |2y_0 + y_0^2z_0||e^{y_0z_0}| \leq (|2y_0| + |y_0^2z_0|)e \leq (2+1)e = 3e$

(6) $|f_{yyz}(\varphi)| = |z_0(2+y_0z_0)(\sin(x_0))e^{y_0z_0}| \leq |z_0||(2+y_0z_0)||e^{y_0z_0}| \leq (|2y_0| + |y_0z_0|)e \leq (2+1)e = 3e$

(7) $|f_{xyz}(\varphi)| = |(yz+1)(\cos(x))e^{yz}| \leq |yz+1|e \leq (|yz|+1)e \leq 2e$

Notar que el procedimiento para acotar a $f_{xyy}, f_{xxx}, f_{yyy}$ es analogo a **(1)**. Usaremos lo obtenido para acotar $R_2(x,y,z,0,0,0)$ en la bola B_1 como sigue:

$$|R_2(x,y,z,0,0,0)| = \frac{1}{6}\Big|x^3 f_{xxx} + y^3 f_{yyy} + z^3 f_{zzz} + 3x^2 y f_{xxy} + 3x^2 z f_{xxz} + 3xy^2 f_{xyy} + 3xz^2 f_{xzz} + \\ + 3y^2 z f_{yyz} + 3yz^2 f_{yzz} + 6xyz f_{xyz}\Big|$$

$$\leq \frac{1}{6}\Big(|x^3 f_{xxx}| + |y^3 f_{yyy}| + |z^3 f_{zzz}| + |3x^2 y f_{xxy}| + |3x^2 z f_{xxz}| + |3xy^2 f_{xyy}| + |3xz^2 f_{xzz}| + \\ + |3y^2 z f_{yyz}| + |3yz^2 f_{yzz}| + |6xyz f_{xyz}|\Big), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Donde cada tercera derivada esta evaluada en un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Sea $(x',y',z') \in B_1$ usando las cotas encontradas y lo obtenido anteriormente concluimos que :

$$|R_2(x,y,z,0,0,0)| \leq \frac{1}{6}(e + e + 12 + e + 3(2+e) + 3e \\ + 3e + 3(12+e) + 9e + 9e + 12e), \forall (x',y',z') \in B_1$$

$$\leq \frac{1}{6}(54 + 45e) = 9 + \frac{45}{6}e \quad , \forall (x',y',z') \in B_1$$

Problema 5. Determinar constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad w(x,t) = t^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$$

es una solución de la EDP

$$w_t - (w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} + \dots w_{x_nx_n}) = 0 \text{ (ecuacion del calor } n\text{-dimensional).}$$

Solucion: Para determinar las constantes, primero calcularemos lo siguiente:

i)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\alpha-2}\|x\|_2^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$$

ii) Calcularemos $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$ como sigue:

Sea $I := \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$. Notemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_2^2 = 2x_i \quad , \forall i \in I$$

Luego usaremos lo anterior para calcular lo buscado:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = t^\alpha \frac{2\beta x_i}{t}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) \quad , \forall i \in I$$

$$= t^{\alpha-1} 2\beta x_i \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) \quad , \forall i \in I$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 2\beta t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(1 + \frac{2\beta x_i^2}{t}\right) \quad , \forall i \in I$$

$$= (2\beta t^{\alpha-1} + 4\beta^2 t^{\alpha-2} x_i^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) \quad , \forall i \in I$$

iii) Así tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n (2\beta t^{\alpha-1} + 4\beta^2 t^{\alpha-2} x_i^2)\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n 2\beta t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) + \sum_{i=1}^n 4\beta^2 t^{\alpha-2} x_i^2 \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$$

Sea $\varphi := 4\beta^2 t^{\alpha-2}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$ además φ **no** depende de **i** y análogamente la expresión $2\beta t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$ tampoco depende de **i** por tanto :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} &= n\left(2\beta t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\varphi \\
&= 2\beta n t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) + \varphi\|x\|_2^2 \\
&= 2\beta n t^{\alpha-1}\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) + 4\beta^2 t^{\alpha-2}\|x\|_2^2\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right) \\
&= \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(2\beta n t^{\alpha-1} + 4\beta^2\|x\|_2^2 t^{\alpha-2}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, usando lo obtenido en **i)**,**ii)** y **iii)** calculamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} &= \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\alpha-2}\|x\|_2^2\right) - \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(2n\beta t^{\alpha-1} + 4\beta^2\|x\|_2^2 t^{\alpha-2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\alpha-2}\|x\|_2^2 - 2\beta n t^{\alpha-1} - 4\beta^2\|x\|_2^2 t^{\alpha-2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(t^{\alpha-1}(\alpha - 2n\beta) - t^{\alpha-2}\beta\|x\|_2^2(1+4\beta)\right)
\end{aligned}$$

Ahora buscamos α, β tales que se cumpla:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 0$$

Lo anterior se puede escribir como:

$$\exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)\left(t^{\alpha-1}(\alpha - 2n\beta) - t^{\alpha-2}\beta\|x\|_2^2(1+4\beta)\right) = 0 \quad ,\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$$

Dado que la función exponencial es no negativa para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ lo anterior ocurre solo si:

$$t^{\alpha-1}(\alpha - 2n\beta) = t^{\alpha-2}\beta\|x\|_2^2(1+4\beta) \quad ,\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$$

Y como lo anterior se debe cumplir para cualesquiera $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ se debe tener que:

$$\alpha - 2n\beta = 0 \land (\beta = 0 \lor 1 + 4\beta = 0)$$

$$\iff (\alpha = 2n\beta \land \beta = 0) \lor \left(\alpha = 2n\beta \land \beta = -\frac{1}{4}\right)$$

Así se tiene que las constantes α, β para que la función $w(x,t)$ dada sea solución de la **EDP** son:

$$(\alpha, \beta) = (0,0) \text{ y } (\alpha, \beta) = \left(-\frac{n}{2}, -\frac{1}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Problema 6. Se considera la ecuación

$$2x^2 + y + sin(xy) = 0.$$

¿Es posible resolver esta ecuación en una vecindad de $(0,0)$ en la forma $y = g_1(x)$ o $x = g_2(y)$?
Si es posible, calcular las derivadas $g_1'(0)$ y $g_2'(0)$.

Solucion:
Sea $\vartheta(x,y) := x^2 + y + \sin(xy)$. Notamos que $\vartheta(0,0) = 0$ y además, dado que $\vartheta(x,y)$ es composición de funciones que pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, se tiene que $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

i) Para saber si podemos resolver esta ecuacion en una vecindad de $(0,0)$ de la forma $y = g_1(x)$ calculamos lo siguiente :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}(x,y) = 1 + x\cos(xy) \Longrightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial y}(0,0) = 1$$

Así como $\vartheta(0,0) = 0$, $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Es posible utilizar el **Teorema 3.2** por el cual concluimos que la ecuación puede ser resuelta de manera única como $y = g_1(x)$ en una vecindad de $(0,0)$ esto es:

$$\exists \varsigma \in \mathbb{R}^+ : \vartheta(x, g_1(x)) = 0, \quad \forall x \in (-\varsigma, \varsigma)$$

Luego para obtener $g_1'(0)$ derivamos implícitamente lo anterior obteniendo que:

$$2x + g_1'(x) + cos(xg_1(x))(g_1(x) + xg_1'(x)) = 0$$

Luego evaluando en $x = 0$

$$\begin{aligned} 2(0) + g_1'(0) + cos((0)g_1(0))(g_1(0) + (0)g_1'(0)) &= 0 \\ g_1'(0) + g_1(0) &= 0 \\ \Longrightarrow g_1'(0) &= g_1(0) \end{aligned}$$

Ahora buscamos calcular $g_1(0)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \vartheta(0, g_1(0)) = 0^2 + g_1(0) + sin((0)g_1(0)) &= 0 \\ \Longrightarrow g_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto con lo obtenido anteriormente concluimos que

$$g_1'(0) = 0$$

ii) Ahora para saber si podemos resolver la ecuación en una vecindad de $(0,0)$ de la forma $x = g_2(y)$ calcularemos lo siguiente:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x,y) = 2x + y\cos(xy) \Longrightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0,0) = 0$$

Y por tanto no podemos usar el **Teorema 3.2**. Buscaremos mostrar que no se puede resolver la ecuación deseada en una vecindad de $(0,0)$ de la forma $x = g_2(y)$.

Demostración. Supongamos que existe una función tal que es posible resolver la ecuación en una vecindad de $(0,0)$ de la forma $g_2(y) = x$.

Por hipótesis $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \vartheta(g_2(y), y) = 0, \forall y \in (-\alpha, \alpha)$, en particular para $y = 0$ se tiene que:

$$\vartheta(g_2(0), 0) = 0 \iff 2g_2(0)^2 = 0 \iff g_2(0) = 0$$

Luego por hipótesis sabemos que podemos derivar implícitamente, como sigue:

$$\begin{aligned} 4g_2(y)g_2(y)' + 1 + \cos(g_2(y)y)(g_2(y)'y + g_2(y)) = 0 \\ \implies 4g_2(0)g_2(0)' + 1 + \cos(g_2(0)(0))(g_2(0)'(0) + g_2(0)) = 0 \\ \iff 0 + 1 + 0 = 0 \iff 1 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, hemos llegado a una **contradicción**, la cual viene de suponer que tal función existe. Concluimos que tal función $g_2(y) = x$ **no** puede existir.

□

Problema 7. Se considera el sistema de ecuaciones

$$x^2 + uy + e^v = 0,$$
$$2x + u^2 - uv = 5.$$

Demostrar que en una vecindad de $(2,5)$ el sistema (1) es resoluble mediante una funcion continuamente diferenciable $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ tal que $u(2,5) = -1$ y $v(2,5) = 0$. Determinar las primeras derivadas de u y v en el punto $(2,5)$.

Demostracion.
Sea $P_0 = (2,5,-1,0)$ y sean $\xi(x,y,u,v) := x^2 + uy + e^v$ y $\varphi(x,y,u,v) := 2x + u^2 - uv - 5$, además $\xi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Por otro lado, notemos que:

$$\xi(P_0) = 2^2 + (-1)(5) + 1 = 0, \quad \varphi(P_0) = 2(2) + (-1)^2 - (-1)(0) - 5 = 0$$

Luego calcularemos $\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(u,v)}(P_0)$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} y & e^v \\ 2u - v & -u \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Y por tanto $det\left(\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(u,v)}(P_0)\right) = 5(1) - (-2)(1) = 7 \neq 0$ y como $\xi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ por el **Teorema 3.2** concluimos que el sistema $\xi(P_0) = 0, \varphi(P_0) = 0$ puede ser resuelto en una vecindad de P_0 de forma unica.

□

Luego para determinar las primeras derivadas de **u,v** en el punto pedido calculamos lo siguiente: Como $det\left(\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(u,v)}(P_0)\right) \neq 0$ es invertible y su inversa es :

$$\left(\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(u,v)}(P_0)\right)^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(x,y)}(P_0)$ como sigue:

$$\frac{\partial(\xi,\varphi)}{\partial(x,y)}(P_0) = \begin{bmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por el **Teorema 3.2** las derivadas de **u**,**v** en el punto $(2,5)$, están dadas por :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2,5) = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{bmatrix}$$

y por igualdad de matrices se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,5) = -\frac{2}{7}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(2,5) = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(2,5) = -\frac{18}{7}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(2,5) = \frac{2}{7}$$