Clase 16: Criterios de convergencia para series numéricas

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Teorema 16.1

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua para cada $x \geq 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

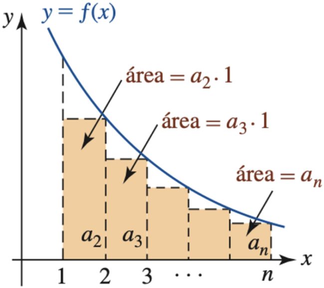
Observación. La serie y la integral no necesariamente convergen al mismo valor.

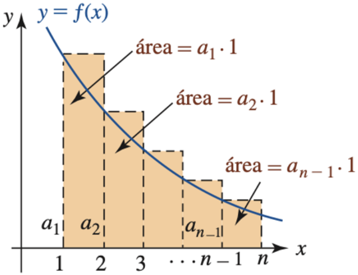
Ejemplo. Analice la convergencia de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Criterio de la integral

Demostración





$$0 \leq a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

$$\iff s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1}$$

Criterio de la integral

Demostración

- Si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx$ existe. Como

$$0 \leq s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx$$

sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n - a_1$ existe y por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ también. Así, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe y $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$ también. Como

$$0 \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1}$$

sigue que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Una importante aplicación del Criterio de la integral es el de las llamadas **Series** p, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ , \ p \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

Teorema 16.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si} \quad p \leq 1 \\ \text{converge} & \text{si} \quad p > 1 \end{cases}$$

- Si $p > 1$, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ converge por criterio de la integral p, y por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ también por el Teorema 16.1.
- Si $0 < p \leq 1$, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ diverge por criterio de la integral p, y por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ también por el Teorema 16.1.
- Si $p \leq 0$, entonces $-p \geq 0$ y así $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} \neq 0$ y por ende $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Criterio de comparación

Enunciado

Teorema 16.3

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos tales que

$$\forall n \geq N, 0 \leq a_n \leq b_n \quad , \text{ para algún } N \in \mathbb{N} \, .$$

Las siguientes son ciertas:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Ejemplo. Decida si las siguientes series convergen.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + \sqrt{n} + 1}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n8^n + \sqrt{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n} - \frac{1}{2}}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

Criterio de comparación

Demostración

Basta mostrar 1. ya que 2. es el contrarrecíproco de 1.

Por hipótesis la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ es convergente (y por lo tanto acotada). Luego, la sucesión $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq s_n$ es acotada (y además monótona creciente), lo que muestra que converge.

Observación: En esta demostración se está haciendo uso del siguiente resultado de sucesiones: *Toda sucesión monótona acotada es convergente.*

Teorema 16.4

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones positivas tales que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es convergente.}$$

Ejemplo: Decida si las siguientes series convergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3+3n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{\sqrt{2n^4+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Comparación en el límite

Demostración

Sea $\epsilon > 0$ tal que $L - \epsilon > 0$. Se elige N natural que verifique que

$$\forall n \geq N : L - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \epsilon$$

y multiplicando por b_n (que es positiva por hipótesis) se obtiene

$$(L - \epsilon)b_n \leq a_n \leq (L + \epsilon)b_n$$

Aplicando el criterio de comparación directa,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge (usando la desigualdad del lado izquierdo).
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (usando la desigualdad del lado derecho).

Comparación en el límite

Ejemplos

Observación. En caso que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ se tiene solo una implicancia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} .$$

Ejercicio: Analice la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+\sqrt{n}}$.

Solución: Podemos analizar la convergencia utilizando distintos métodos:

Primera forma: Sean $a_n = \frac{n^2}{n^5+\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$ dos sucesiones de términos positivos, además $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por ser serie p, con $p > 1$. Luego, por criterio de comparación en el límite, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Comparación en el límite

Ejemplos

Segunda forma: Sean $a_n = \frac{n^2}{n^5+\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n^3}$ dos sucesiones de términos positivos, además $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por ser serie p, con $p > 1$. Así, por criterio de comparación en el límite se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Tercera forma: Consideremos lo siguiente:

$$n^5 + \sqrt{n} > n^5 \iff \frac{n^2}{n^5+\sqrt{n}} < \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}, \qquad \forall n \geq 1$$

Luego, sea $a_n = \frac{n^2}{n^5+\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n^3}$, notar que $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por ser serie p, con $p > 1$. Así, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el criterio de comparación.

A continuación, estudiaremos la convergencia de series cuyos términos pueden ser negativos.

Por ejemplo, series de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad \text{o bien,} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

donde a_n es una sucesión de términos positivos.

Teorema de Leibniz

Enunciado

Teorema 16.5

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que:

1. $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq N$, para algún entero N.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Entonces, las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ son convergentes.

Ejemplos. Muestre que las siguientes series son convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)(n+2)}{n^2+n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{4n^2-3}$

Teorema de Leibniz

Demostración

Para $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ mostramos que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ converge.

$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ es creciente, porque todos los paréntesis son no negativos, y además,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

Luego, $\{s_{2n}\}$ es acotada y creciente. Por lo tanto, converge a $L \in \mathbb{R}$. Por otro lado, $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$, con $a_{2n} \to 0$ (ya que $a_n \to 0$). Luego,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L - 0 = L$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$.