Problema 1. *Considere el espacio* $V_h := \left\{v \in C(a,b) : \ v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i]), \text{para } i = 1, \ldots, d+1, \ v(a) = v(b) = 0\right\}$ *y la familia de funciones techo* $B := \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d\}$ *definidas en clase. Demuestre que* B *es una base de* V_h.

6,9

Demostración. Sea ver que B es una base, es necesario probar

- B es linealmente independiente. Sea $\{\alpha_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \varphi_i = \theta,$$

como $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ se tiene que

$$0 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \delta_{ij} = a_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Por tanto, B es linealmente independiente.

- $\langle B \rangle = V_h$. Por doble inclusión

  ($\subseteq$) Dado $i \in \{1, \ldots, d\}$ es inmediato notar que $\varphi_i \in V_h$. Luego, como V_h es un sub espacio vectorial, se tiene que $\langle B \rangle \subseteq V_h$.

  ($\supseteq$) Dado $v \in V_h$, se define v_I como sigue

$$v_I = \sum_{i=1}^{d} v(x_i)\varphi_i$$

  A continuación probaremos que $v - v_I = \theta$ lo cual probaría la inclusión deseada. Dado $j \in \{0, \ldots, d\}$ se tiene

$$\left(v - v_I\right)(x_j) = v(x_j) - v_I(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^{d} v(x_i)\varphi_i(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^{d} v(x_i)\delta_{ij} = v(x_j) - v(x_j) = 0$$

  y como $(v - v_I) \in \mathbb{P}\left[x_{j-1}, x_j\right]$ se deduce que necesariamente $(v - v_I)(x) = 0$ para todo $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$. Como lo anterior es valido para todo $j \in \{1, \ldots, d+1\}$ se deduce que $(v - v_I) = \theta$, de esta forma

$$v = \sum_{i=1}^{d} v(x_i)\varphi_i$$

  es decir, $v \in \langle B \rangle$. Lo cual prueba que $\langle B \rangle \supseteq V_h$.

  Como ambas inclusiones se cumplen se deduce que $\langle B \rangle = V_h$.

Finalmente, se tiene que B es base de V_h. □

Problema 2. *Considere la forma bilineal* $a(u_h, v_h) = \int_a^b u_h' v_h' dx$, *su matriz* A *asociada y el espacio* V_h *definido e el Problema 1.*

a) *Sea* $u_h \in V_h$. *Sabemos que existen escalares* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$ *tales que* $v_h(x) = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \varphi_j(x)$. *Probar que* $\beta^t A \beta = \|v_h'\|^2_{L^2(a,b)}$, *donde* β *es el vector cuyos elementos son los coeficientes* β_j.

b) *Demostrar que* A *es simétrica y definida positiva.*

Demostración. *a)* Dados $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$ tales que

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \varphi_j(x), \ \forall x \in (a,b). \tag{I}$$

De un calculo directo se tiene que

$$\|v_h'\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b v_h' v_h' dx = a(v_h, v_h)$$

usando (I) y que a es una forma bilineal se tiene

$$a(v_h, v_h) = a\left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{d} \beta_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{d} \beta_j a\left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \beta_j \beta_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \sum_{i=1}^{d} \frac{a_{ij}}{h} \beta_i = \beta^t A \beta$$

b) Recordando que

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es directo notar que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^t$. Por otro lado, dado $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1, \dots, \beta_d\right)^t$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^d$ fijo pero arbitrario, se tiene que existe una función $\omega_h \in V_h$ tal que

$$\omega_h = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \varphi_i.$$

Luego, por *a*) se tiene que

$$\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{\beta} = \|\omega_h'\|^2_{L^2(a,b)} > 0.$$

Como lo anterior es válido para cualquier vector no nulo de $\mathbb{R}^d$ se concluye que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva.

□

Problema 3. *Considere la ecuación*

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + \omega u(x) = f(x), \ x \in]a, b[\\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(a, b)$, ω *y* κ *dados. Asuma que la función* κ *es continua y positiva en* $[a, b]$, *y* ω *es un número positivo.*

a) *Deduzca una formulación variacional apropiada.*

b) *Demuestre que dicha formulación variacional posee solución única.*

c) *Escriba la formulación variacional discreta asociada considerando una partición uniforme* $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$ *de tamaño* h, *del intervalo* $[0, 1]$ *y el espacio*

$$V_h := \{v \in C(a, b) : \ v \in \mathbb{P}\left(\left[x_{i-1}, x_i\right]\right), \ \textit{para } i = 1, \dots, d+1, \ v(a) = v(b) = 0\}.$$

d) *Escriba el sistema lineal* $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$ *asociado.*

Demostración. *a*) Testeando la EDO con una función $v \in H_0^1(a, b)$ se obtiene

$$-\int_a^b (\kappa(x)u'(x))'v(x) \ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b u(x)v(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x) \ \mathrm{d}x. \tag{II}$$

Haciendo integración por partes al primer termino del lado izquierdo de (II) y usando las condiciones de contorno se obtiene

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) \ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b u(x)v(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x) \ \mathrm{d}x.$$

De lo anterior se tiene la forma bilineal $a : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_0^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$a(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) \ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b u(x)v(x) \ \mathrm{d}x$$

y

$$F(v) := \int_a^b f(x)v(x) \ \mathrm{d}x.$$

La linealidad de a y F es consecuencia directa de que la integral y la derivada son operadores lineales. Finalmente, el problema queda

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ \quad a(u, v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

b) Para probar existencia unicidad se debe probar

i) a es una forma bilineal acotada.
Dados $u, v \in V := H_0^1(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b u(x)v(x)\ \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x \right| + \omega \left| \int_a^b u(x)v(x)\ \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\kappa\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq M \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq M \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} + \omega \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} \\
&\leq \text{máx}\{M, \omega\} \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} .
\end{aligned}$$

Donde M resulta de usar el hecho que κ es continua en un compacto. Así, a es una forma bilineal acotada.

ii) a es coerciva.
Dado $v \in V$, luego

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_a^b v'(x)v'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b v(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&\geq m \int_a^b v'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b v(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&\geq \text{mín}\{m, \omega\} \|v\|^2_{H^1(a,b)} .
\end{aligned}$$

Donde m resulta de usar el hecho que κ es continua en un compacto. Así a es coreciva.

iii) F es un funcional lineal y acotado.
Dado $v \in V$, luego

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)}$$

Así, F es un funcional lineal y acotado.

iv) $\left(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ es un espacio de Hilbert.
Directo del hecho de que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(a,b)$.

Finalmente como se cumplen las hipótesis del Lema de Lax-Milgram se deduce que

$$\begin{cases} \text{Existe un único } u \in H_0^1(a,b) \text{ tal que} \\ \qquad a(u,v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a,b). \end{cases}$$

y ademas,

$$\|u\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{1}{\text{mín}\{m,\omega\}} \|F\| \leq \frac{1}{\text{mín}\{m,\omega\}} \|f\|_{H^1(a,b)} .$$

c) Considerando la partición uniforme del enunciado y el espacio

$$V_h := \{v \in C(a,b) : \ \ v \in \mathbb{P}\left(\left[x_{i-1}, x_i\right]\right), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, \ v(a) = v(b) = 0\}.$$

Se tiene el problema discreto

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ \qquad a(u_h, v_h) = F(v_h) \\ \text{para todo } v_h \in V_h. \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ \qquad a(u_h, \varphi_j) = F(\varphi_j) \\ \text{para todo } j \in \{1, \dots, d\}. \end{cases} \tag{III}$$

d) Usando que $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$ es una base de V_h se tiene que existe $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^t \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$u_h = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \varphi_i$$

insertando esto en (III) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j)$$

donde la incógnita es $\boldsymbol{\alpha}$ de esta forma la matriz $\boldsymbol{A}$ cumple que $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ cuando $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Notando que $\operatorname{supp}(\varphi_i) \cap \operatorname{supp}(\varphi_{i+2}) = \emptyset$ se deduce que $a_{i,i+l} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, d-l\}$ con $l > 1$, de la misma forma se concluye que $a_{i,i-l} = 0$. Por otro lado, para el calculo de los demás coeficientes se procede como sigue

- Cálculo de $a_{i,i}$ con $i \in \{1, \dots, d\}$.

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) \\
&= \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_i(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)\varphi_i(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_i(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)\varphi_i(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_i(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_i)^2}{h^2}\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{h^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \frac{h}{3}\omega - \frac{h}{3}\omega \rightarrow + \\
&\approx \frac{1}{h}\left[\kappa\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \kappa\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right] + \frac{2h\omega}{3}
\end{aligned}$$

- Cálculo de $a_{i,i+1}$ con $i \in \{1, \dots, d-1\}$.

$$\begin{aligned}
a_{i,i+1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\
&= \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)}{h}\frac{(x-x_{i+1})}{h}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x)\ \mathrm{d}x - \frac{\omega}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1})^2\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x)\ \mathrm{d}x - \frac{h\omega}{3} \\
&\approx \frac{-1}{h}\kappa\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) - \frac{h\omega}{3}
\end{aligned}$$

- Cálculo de $a_{i,i-1}$ con $i \in \{2, \dots, d+1\}$.

$$\begin{aligned}
a_{i,i-1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) \\
&= \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x)\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\ \mathrm{d}x \quad + \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h^2}\kappa(x)\ \mathrm{d}x + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-\cancel{x_i})}{h}\frac{(x_i-x)}{h}\ \mathrm{d}x \quad x_{i-1} \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x)\ \mathrm{d}x - \frac{\omega}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x)\ \mathrm{d}x - \frac{h\omega}{3} \\
&\approx \frac{-1}{h}\kappa\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cancel{- \frac{h\omega}{3}} + \frac{h\omega}{6} \ \checkmark
\end{aligned}$$

Las aproximaciones al final se deben al hecho de que se uso la regla del punto medio elemental para aproximar las integrales de la función κ. Para determinar el vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ se procede de forma similar, dado $j \in \{1, \dots, d\}$ luego

$$\begin{aligned}
b_j &= F(\varphi_j) \\
&= \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\frac{x - x_j}{h}\mathrm{d}x + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\frac{x_{j+1} - x}{h}\mathrm{d}x \\
&\approx \frac{h}{2}\left[f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{h}\right) + f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

□