Elementos Finitos – 521537
Cápsula 03 - Teorema de Lax-Milgram

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Contenidos

Definición

Sean V y W espacios de Banach, W es reflexivo $F \in V'$ y consideramos la forma bilineal continua

$$a : V \times W \to \mathbb{R}$$

para definir el problema variacional:
Encontrar $u \in V$ *tal que*

$$a(u, w) = F(w)\,, \tag{1}$$

para todo $w \in W$.

Definición

Si problema variacional (1) tiene una única solución $u \in V$ y además existe $C > 0$ tal que se satisface la siguiente estimación

$$\|u\|_V \leq C\,\|F\|_{V'}$$

diremos que (1) está *bien definido*.

En adelante nos interesaremos en el caso $V = W$ con V siendo un espacio de Hilbert.

Lema (de la aplicación contractiva)

Sea V un espacio de Banach y $T : V \to V$ un aplicación tal que

$$\| T\,v - T\,w \|_V \leq M\,\| v - w \|_V\,,\ \forall\, v, w \in V$$

para $M \in [0,1[$ fijo. Existe un único $u \in V$ tal que

$$u = T\,u\,.$$

Demostración: Sea $w_0 \in V$ fijo pero arbitrario, definimos la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ como

$$w_n = T^n\,w_0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

es decir, $w_n = T\,w_{n-1}$. A través de un proceso de inducción podemos probar que

$$\| w_k - w_{k-1} \|_V \leq M^{k-1}\,\| w_1 - w_0 \|_V$$

luego, la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, en efecto para $m > n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\| w_m - w_n \|_V &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} w_k - w_{k-1} \right\|_V \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \| w_k - w_{k-1} \|_V \\
&\leq \| w_1 - w_0 \|_V \sum_{k=n+1}^{m} M^{k-1} \\
&= \| w_1 - w_0 \|_V\,\frac{M^n - M^m}{1 - M}
\end{aligned}$$

Lema (de la aplicación contractiva)

Sea V un espacio de Banach y $T : V \to V$ un aplicación tal que

$$\|T\,v - T\,w\|_V \leq M\,\|v - w\|_V\,,\ \forall\, v, w \in V$$

para $M \in [0, 1[$ fijo. Existe un único $u \in V$ tal que

$$u = T\,u\,.$$

Demostración: Sea $w_0 \in V$ fijo pero arbitrario, definimos la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ como

$$w_n = T^n\,w_0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

es decir, $w_n = T\,w_{n-1}$. A través de un proceso de inducción podemos probar que

$$\|w_k - w_{k-1}\|_V \leq M^{k-1}\,\|w_1 - w_0\|_V$$

luego, la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, en efecto para $m > n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|w_m - w_n\|_V &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} w_k - w_{k-1} \right\|_V \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|w_k - w_{k-1}\|_V \\
&\leq \|w_1 - w_0\|_V \sum_{k=n+1}^{m} M^{k-1} \\
&= \|w_1 - w_0\|_V \,\frac{M^n - M^m}{1 - M}
\end{aligned}$$

Como V es un espacio completo entonces existe $u \in V$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = u$, luego usando la continuidad de T (consecuencia de las hipótesis del Lema) tenemos

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n\to\infty} w_n \\ &= \lim_{n\to\infty} T\, w_{n-1} \\ &= T\left(\lim_{n\to\infty} w_{n-1}\right) \\ &= T\, u\,. \end{aligned}$$

Para probar la unicidad de elemento $u \in V$ antes construído supondremos la existencia de $w \in V$ tal que $w = T\, w$ y $w \neq u$, luego

$$\begin{aligned} \|u - w\|_V &= \|T\, u - T\, w\|_V \\ &\leq M\, \|u - w\|_V \end{aligned}$$

al dividir la última expresión por $\|u - w\|_V$, obtemos $1 \leq M < 1$, lo que contradice la existencia de w por lo tanto u es única.

$\square$

Como V es un espacio completo entonces existe $u \in V$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = u$, luego usando la continuidad de T (consecuencia de las hipótesis del Lema) tenemos

$$
\begin{aligned}
u &= \lim_{n\to\infty} w_n \\
&= \lim_{n\to\infty} T\, w_{n-1} \\
&= T\left(\lim_{n\to\infty} w_{n-1}\right) \\
&= T\, u\,.
\end{aligned}
$$

Para probar la unicidad de elemento $u \in V$ antes construído supondremos la existencia de $w \in V$ tal que $w = T\, w$ y $w \neq u$, luego

$$
\begin{aligned}
\|u - w\|_V &= \|T\, u - T\, w\|_V \\
&\leq M\, \|u - w\|_V
\end{aligned}
$$

al dividir la última expresión por $\|u - w\|_V$, obtemos $1 \leq M < 1$, lo que contradice la existencia de w por lo tanto u es única.

$\square$

Como V es un espacio completo entonces existe $u \in V$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = u$, luego usando la continuidad de T (consecuencia de las hipótesis del Lema) tenemos

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n\to\infty} w_n \\ &= \lim_{n\to\infty} T\, w_{n-1} \\ &= T\left(\lim_{n\to\infty} w_{n-1}\right) \\ &= T\, u\,. \end{aligned}$$

Para probar la unicidad de elemento $u \in V$ antes construído supondremos la existencia de $w \in V$ tal que $w = T\, w$ y $w \neq u$, luego

$$\begin{aligned} \|u - w\|_V &= \|T\, u - T\, w\|_V \\ &\leq M\, \|u - w\|_V \end{aligned}$$

al dividir la última expresión por $\|u - w\|_V$, obtemos $1 \leq M < 1$, lo que contradice la existencia de w por lo tanto u es única.

$\square$

Teorema (Lax-Milgram)

Sea V un espacio de Hilbert, $F \in V'$ y $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua tal que existe $\gamma > 0$ que satisface

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_V^2 , \forall v \in V .$$

Entonces, el problema variacional *Encontrar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u, v) = F(v) ,$$

para todo $v \in V$, está bien definido y su solución $u \in V$ satisface

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma} \|F\|_{V'} .$$

Demostración

Sea $w \in V$, notemos que la aplicación $v \mapsto a(w,v)$ es lineal y continua (probar, Ejercicio) que depende w y denotaremos de $A\,w$, esto induce la definición de una aplicación $A : V \to V'$ también lineal y continua (probar, Ejercicio), luego, podemos escribir

$$\langle A\,w, v\rangle_{V',V} = a(w,v)\,,\ \forall v \in V\,,$$

es decir, buscamos $u \in V$ tal que:

$$\langle A\,u, v\rangle_{V',V} = \langle F, v\rangle_{V',V}\,,\ \forall v \in V\,,$$

o de otra forma $A\,u = F$ en V'.

Por otro lado el Tma. de Rep. de Riesz permite definir una isometría $\tau : V' \to V$, por lo tanto la igualdad anterior es equivalente a $\tau\,A\,u = \tau\,F$ en V.
Definiremos la aplicación $T : V \to V$ como

$$T\,v = v - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,(A\,v - F)\,,\ \forall v \in V\,,$$

donde $C > 0$ es la constante de continuidad de A y mostraremos que es *contractiva*, en efecto sean $v, w \in V$, y defina $z = v - w$, luego

$$
\begin{aligned}
\| T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\le \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\le \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \le a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \le \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \le \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\|T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\|T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. □

$$
\begin{aligned}
\| T\, v - T\, w \|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\, \tau\, A\, z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, (\tau\, A\, z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\, \|\tau\, A\, z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, \langle A\, z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\, \langle A\, z, \tau\, A\, z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, a(z, z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\, a(z, \tau\, A\, z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma^2}{C^2}\, \|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\, \|z\|_V\, \|\tau\, A\, z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right) \|z\|_V^2 = M^2\, \|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0, 1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\, u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\, u = F$. Además, $\gamma\, \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'} \|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\, \|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\|T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\le \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\le \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \le a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \le \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \le \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\|T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\| T\, v - T\, w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\, \tau\, A\, z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, (\tau\, A\, z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\, \|\tau\, A\, z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, \langle A\, z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\, \langle A\, z, \tau\, A\, z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma}{C^2}\, a(z, z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\, a(z, \tau\, A\, z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\, \frac{\gamma^2}{C^2}\, \|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\, \|z\|_V\, \|\tau\, A\, z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right) \|z\|_V^2 = M^2\, \|v - w\|_V^2\, ,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0, 1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\, u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\, u = F$. Además, $\gamma\, \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'} \|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\, \|F\|_{V'}$. $\square$

$$
\begin{aligned}
\|T\,v - T\,w\|_V^2 &= \left\| z - \frac{\gamma}{C^2}\,\tau\,A\,z \right\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,(\tau\,A\,z, z)_V + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,\langle A\,z, z\rangle_{V',V} + \frac{\gamma^2}{C^4}\,\langle A\,z, \tau\,A\,z\rangle_{V',V} \\
&= \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma}{C^2}\,a(z,z) + \frac{\gamma^2}{C^4}\,a(z, \tau\,A\,z) \\
&\leq \|z\|_V^2 - 2\,\frac{\gamma^2}{C^2}\,\|z\|_V^2 + \frac{\gamma^2}{C^3}\,\|z\|_V\,\|\tau\,A\,z\|_V^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{C^2}\right)\,\|z\|_V^2 = M^2\,\|v - w\|_V^2\,,
\end{aligned}
$$

note que $M = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{C^2}} \in [0,1[$ así el Lema de la aplicación contractiva asegura la existencia de una única $u \in V$ tal que $T\,u = u$ y de la definición de T tenemos que $A\,u = F$. Además, $\gamma\,\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = \langle F, u\rangle_{V',V} \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$, por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\,\|F\|_{V'}$. $\square$

Sea $\Omega =]0,1[$, siga los siguientes pasos:

(a) Defina $H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}$ y muestre que $\left(H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{1,\Omega}\right)$ es un espacio de Hilbert, donde $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega} = (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$.

(b) Sea $f \in L^2(\Omega)$, defina $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como $F(v) = (f, v)_{0,\Omega}$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, donde $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega} = (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$, muestre que $F \in H_0^1(\Omega)'$.

(c) Sea $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v) = (u',v')_{0,\Omega} + \frac{1}{2}(u',v)_{0,\Omega} - \frac{1}{2}(u,v')_{0,\Omega} + (u,v)_{0,\Omega}\,,\ \forall u,v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

muestre que $a(\cdot,\cdot)$ bilineal, continua y coerciva.

(d) Muestre que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

(e) Sea $V_h \leq H_0^1(\Omega)$ (no necesariamente de dimesión finita), muestre que existe una única $u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = F(v_h)$ para todo $v_h \in V_h$

(f) Muestre que existe $C > 0$ tal que $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$