UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 1 (521218-525221)

Problema 1. (Este problema consta de dos partes).

(a) Determine la única solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{t}{t^2-1}y'(t) + y(t) &= \dfrac{t^3}{t^2-1},\ t>1, \\ y(2) &= 4. \end{cases}$$ **(15 Pto.)**

(b) Justifique porqué la solución del item anterior es única. **(5 Pto.)**

Solución:

(a) Normalizando la EDO dada, el PVI a resolver es

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{t^2-1}{t}\,y(t) &= t^2,\ t>1 \\ y(2) &= 4. \end{cases}$$

Primero buscamos un factor de integración $\mu(t) = e^{A(t)}$ donde $A'(t) = \dfrac{t^2-1}{t}$ con $t>1$. Sigue que

$$\mu(t) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^{(1/2)t^2}.$$ [**4puntos**]

Ahora multiplicando la EDO normalizada por $\mu(t)$, se obtiene

$$y'(t)\frac{1}{t}\mathrm{e}^{(1/2)t^2} + \frac{t^2-1}{t^2}\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2}\,y(t) = t\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2}.$$

Esto es,

$$\frac{d}{dt}\Big[y(t)\,\frac{1}{t}\mathrm{e}^{(1/2)t^2}\Big] = t\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2},$$

de donde

$$y(t)\,\frac{1}{t}\mathrm{e}^{(1/2)t^2} = \int t\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2}dt\, +\, C$$

$$= \mathrm{e}^{(1/2)t^2}\, +\, C.$$ [**6puntos**]

Así obtenemos

$$y(t) = t \,+\, C\,t\,\mathrm{e}^{-(1/2)t^2}$$

donde por ahora C es una constante real arbitraria.
Sin embargo, para $t = 2$ se obtiene $y(2) = 2 + 2C\,e^{-2}$. Puesto que $y(2) = 4$, sigue que $C = e^2$.
Finalmente, la única solución al PVI dado, es

$$y(t) = t\left(1 \,+\, \mathrm{e}^{-(1/2)t^2+2}\right).$$

[5 puntos]

(b) La EDO normalizada es

$$y'(t) + \frac{t^2-1}{t}\,y(t) = t^2$$

definida para $t\, \in]1, +\infty[$. Podemos ver que el coeficiente $\dfrac{t^2-1}{t}$ y el termino libre $h(t) = t^2$ son funciones continuas en el intervalo $t\, \in]1, +\infty[$; además, la condición inicial está definida para $t_0 = 2$. Del Teorema de Existencia y Unicidad sigue la unicidad de la solución en el intervalo mencionado.

[5 puntos]

Problema 2.
(**Este Problema consta de dos partes, (i) y (ii), independientes entre si.**)

(i) Dado el operador diferencial con coeficientes constantes

$$\mathcal{L} = (D^2+4)^2(D-1)^2(D-2)D,$$

calcule la solución general de la EDO

$$\mathcal{L}[y](x) = 0. \tag{1}$$

(ii) Considere la EDO

$$(1-t)y'' + ty' - y = (1-t)^2. \tag{2}$$

(a) Compruebe que las funciones $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = e^t$ son soluciones de la EDO homogénea asociada a (2):

$$(1-t)y'' + ty' - y = 0. \tag{3}$$

(b) Verifique que $\{y_1(t),\, y_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de la Ecuación (3).

(c) Encuentre la solución general de la EDO usando el método de variación de parámetros.

Solución:

(i) Dado que el operador diferencial es de coeficientes constantes y la EDO es homogénea, sabemos que la solución es de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$, con λ raíz del polinomio característico. Más aún, desde el operador diferencial observamos que el polinomio característico se puede factorizar como:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)\lambda,$$

que tiene las raíces:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \text{ (de multiplicidad 1)},\\
\lambda_2 &= 2 \text{ (de multiplicidad 1)},\\
\lambda_3 &= 1 \text{ (de multiplicidad 2)},\\
\lambda_4 &= \pm 2i \text{ (de multiplicidad 2)}.
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la EDO (1) se escribe como

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^x + C_4xe^x + C_5\sin(2x) + C_6x\sin(2x) + C_7\cos(2x) + C_8x\cos(2x),$$

con C_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, constantes reales arbitrarias.

[6 Puntos]

(ii) (a) Para verificar que la función $y_1(t) = t$ es solución de (3) notamos que

$$y_1'(t) = 1, \qquad y_1''(t) = 0.$$

Sustituyendo y_1', y_1'' en la EDO:

$$(1 - t)y_1''(t) + ty_1'(t) - y_1(t) = t - t = 0,$$

de donde, deducimos que $y_1(t) = t$ es solución de (3).

[1 Punto]

Siguiendo el mismo procedimiento para la función $y_2(t) = e^t$ nos queda que:

$$(1 - t)y_2''(t) + ty_2'(t) - y_2(t) = (1 - t)e^t + te^t - e^t = 0,$$

y $y_2(t) = e^t$ es también solución.

[1 Punto]

(b) De lo anterior, sabemos que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es un conjunto de soluciones para (3). Luego, para verificar que este conjunto es un conjunto fundamental basta mostrar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son linealmente independientes. Para ello calculamos el Wronskiano:

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2](t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix}\\
&= e^t(t - 1).
\end{aligned}$$

[2 Puntos]

Como $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \neq 1$, tenemos que y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes, y por tanto $\{t,\, e^t\}$ es un conjunto fundamental de la Ecuación homogénea (3).

[1 Punto]

(c) Normalizamos la Ecuación (2), considerando el intervalo $\{t : t > 1\}$ o $\{t : t < 1\}$, lo que nos da:

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' - \frac{1}{1-t} y = (1-t). \tag{4}$$

Del item anterior, sabemos que la solución general de la EDO homogénea (3) viene dada por

$$y_h(t) = C_1 t + C_2 e^t,$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Aplicando el método de variación de parámetros, proponemos la solución particular:

$$y_p(t) = c_1(t)\, t + c_2(t)\, e^t,$$

donde las funciones $c_1(t), c_2(t)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} t c_1'(t) + e^t c_2'(t) & = 0 \\ c_1'(t) + e^t c_2'(t) & = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-1) e^t\, c_2'(t) & = t(1-t) \\ (1-t)\, c_1'(t) & = 1-t. \end{cases}$$

[4 Puntos]

Así, para c_1 tenemos

$$c_1(t) = \int dt = t + K_1,$$

mientras que para c_2 tenemos

$$\begin{aligned} c_2'(t) &= -t e^{-t} \\ c_2(t) &= -\int t e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Aplicando integrales por partes con

$$\begin{array}{ll} u = t & dv = -e^{-t} dt \\ du = dt & v = e^{-t} \end{array}$$

nos queda que

$$\begin{aligned} c_2(t) = -\int t e^{-t} dt &= t e^{-t} - \int e^{-t} dt \\ &= t e^{-t} + e^{-t} + K_2. \end{aligned}$$

Tomando las constantes de integración $K_1 = K_2 = 0$, y reemplazando en y_p, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= t y_1(t) + e^{-t}(t+1) y_2(t) \\ &= t^2 + t + 1. \end{aligned}$$

Observando que el segundo término de $y_p(t) = t^2 + t + 1$ (el término t) es exactamente $y_1(t) = t$, basta tomar

$$y_p(t) = t^2 + 1.$$

Finalmente, la solución general de la EDO no homogénea (2) se escribe como:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 t + C_2 e^t + t^2 + 1,$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

[5 Puntos]

Problema 3. [20 Pts.] Un cuerpo de masa 1 [kg] se sujeta a un resorte suspendido de un techo, con constante de rigidez igual a 100 [kg/s2]. Se desprecia el amortiguamiento del medio ambiente, es decir, la constante de rozamiento es igual a 0 [kg/s]. Una vez que el sistema masa-resorte se encuentra en reposo en la posición de equilibrio, el cuerpo se desplaza 2 [m] hacia el suelo. Luego, soltamos el cuerpo imprimiéndole una velocidad igual a 1 [m/s] dirigida hacia el techo. Simultáneamente, le aplicamos al cuerpo una fuerza igual

$$sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)$$

dirigida en la dirección de la fuerza de gravedad, donde t es el tiempo (dado en segundos) que ha transcurrido desde que soltamos el cuerpo. Determine el desplazamiento del cuerpo (en todo momento) con respecto al punto de equilibrio del sistema masa-resorte; para resolver la ecuación diferencial ordinaria tiene que utilizar el método de Aniquiladores.

Solución:

Sea $X(t)$ el desplazamiento del cuerpo (dado en metros) en el tiempo t (dado en segundos) con respecto al punto de equilibrio del sistema masa-resorte en la dirección dada por la fuerza de gravedad. Usando la segunda ley de Newton se llega a que

$$X''(t) = -100\,X(t) + sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)\,.$$

Por lo tanto,

$$X''(t) + 100\,X(t) = sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)\,. \tag{5}$$

Ahora, precisaremos las condiciones iniciales. Ya que el cuerpo está inicialmente 2 [m] bajo la posición de equilibrio, $X(0) = 2$. Como inicialmente al cuerpo de se imprime una velocidad igual a 1 [m/s] dirigida hacia el techo, $X'(0) = -1$.

[7 Puntos]

La solución de (5) es

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

donde $X_h(t)$ es la solución general de la EDO

$$X_h''(t) + 100\, X_h(t) = 0$$

y $X_p(t)$ es una solución particular de

$$X_p''(t) + 100\, X_p(t) = sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)\,. \tag{6}$$

[1 Punto]

El polinomio característico es

$$p\,(\lambda) = \lambda^2 + 100.$$

Luego, $p\,(\lambda) = 0$ si y solo si

$$\lambda = \pm 10\, i.$$

Por lo tanto,

$$X_h(t) = C_1 \cos(10t) + C_2\, sen(10t),$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

[3 Puntos]

El aniquilador de $sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)$ es $D^2 + 100$, donde $D = \frac{d}{dt}$. Aplicando $D^2 + 100$ a (6) se llega a

$$\left(D^2 + 100\right)^2 X_p(t) = \left(D^2 + 100\right)\left(sen\,(10t) + 2\,cos\,(10t)\right) = 0.$$

Lo que nos lleva a buscar $X_p(t)$ con la forma

$$X_p(t) = A\, t\, cos\,(10t) + B\, t\, sen\,(10t)\,,$$

donde las constantes $A, B \in \mathbb{R}$ deben ser determinadas.

Derivando se llega a que

$$X_p'(t) = A\, cos\,(10t) - 10\, A\, t\, sen\,(10t) + B\, sen\,(10t) + 10\, B\, t\, cos\,(10t)\,.$$

Derivando nuevamente se obtiene

$$X_p''(t) = -20A\, sen\,(10t) - 100\, A\, t\, cos\,(10t) + 20\, B\, cos\,(10t) - 100\, B\, t\, sen\,(10t)\,.$$

Sustituyendo en (6) obtenemos

$$-20A\, sen\,(10t) + 20\, B\, cos\,(10t) = sen\,(10t) + 2\, cos\,(10t)\,.$$

Luego $-20A = 1$ y $20B = 2$, de donde $A = -1/20$ y $B = 1/10$ Así que

$$X_p(t) = -\frac{1}{20} t\, cos\,(10t) + \frac{1}{10}\, t\, sen\,(10t)\,.$$

[7 Puntos]

Por lo tanto

$$X(t) = C_1 \cos(10t) + C_2\, sen(10t) - \frac{1}{20} t\, cos\,(10t) + \frac{1}{10}\, t\, sen\,(10t)\,,$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ya que $X(0) = 2$,

$$2 = X(0) = C_1.$$

Puesto que $X'(0) = -1$ y

$$X'(t) = -10\, C_1 \text{sen}(10t) + 10\, C_2\, cos(10t) + A\, cos\,(10t) - 10\, A\, t\, sen\,(10t) + B\, sen\,(10t) + 10\, B\, t\, cos\,(10t)\,,$$

$$-1 = 10\, C_2 + A.$$

Luego $C_2 = -19/200$.

Por lo tanto,

$$X(t) = 2 \cos(10t) - \frac{19}{200}\, sen(10t) - \frac{1}{20} t\, cos\,(10t) + \frac{1}{10}\, t\, sen\,(10t)$$

[2 Puntos]

24/05/2025.
KMR/JMS/CMG//kmr/jms/cmg