UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Listado 3

1. Sea V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita.

   a) Pruebe que existe $L : V \to W$ una transformación lineal sobreyectiva si y sólo si $dim(W) \leq dim(V)$.

   b) Demuestre que existe $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva si y sólo si existe $S : W \to V$ una transformación lineal tal que $S \circ T = Id$, donde Id es la función identidad.

2. Sea U y W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y B_U y B_W bases de U y W respectivamente. Sea además $T : V \to V$ un automorfismo.

   a) Pruebe que $V = U \oplus W$ si y sólo si $B_U \cup B_W$ es base de V y $B_U \cap B_W = \emptyset$.

   b) Demuestre que si $V = U \oplus W$, entonces $V = T(U) \oplus T(W)$.

3. Sea la función $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(p) = \int_0^x p(t)\, dt, \qquad \forall p \in P_2(\mathbb{R}).$$

   a) Muestre que T es lineal.

   b) Determine $Ker(T)$ e $Im(T)$.

   c) Concluya si T es inyectiva o sobreyectiva.

4. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T = Id$. Pruebe que:

   a) T es automorfismo.

   b) $V = Ker(T + Id) \oplus Ker(T - Id)$.

5. Dos transformaciones lineales $S, T : V \to V$ se dicen similares, denotado por $S \sim T$ si $\exists P : V \to V$ automorfismo tal que $T = P^{-1} \circ S \circ P$.

   a) Muestre que la relación de similaridad definida por $S \sim T$ es de equivalencia en $\mathcal{L}(V, V)$.

   b) Determine la clase de equivalencia $[Id]_\sim$ de la función identidad Id.

6. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $dim(V) = n$ y $(W, +, \cdot)$ un subespacio vectorial no trivial de $(V, +, \cdot)$. Pruebe que V y W no son isomorfos.

7. Sea $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ una función definida por: $f(A) = A + A^t$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

   a) Muestre que f es lineal.

   b) Determine si f es un isomorfismo.

   c) Calcule $\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ f^k(A)$.

8. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que:

   a) $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

   b) $Ker(T + I) \subseteq Ker(T)$ y $T + I$ es un automorfismo.

9. Sea W_1 y W_2 s.e.v. de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$, y $L : V \to V$ un automorfismo. Pruebe que:

$$V = T(W_1) \oplus T(W_2).$$