UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EB/JB/GD/CF/NH/RM/CM/MN/LP/JQ/MV

PAUTA EVALUACIÓN 1

Cálculo I - 527140

1. **(15 ptos)** Considere la ecuación en la variable $x \in \mathbb{R}$ definida por

$$x^2 = mx - \frac{3}{4}\left(m + \frac{28}{3}\right) \quad .$$

Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación **no** tenga soluciones reales.

Solución: Reordenando, se obtiene la ecuación

$$x^2 - mx + \frac{1}{4}(3m + 28) = 0.$$

Para que no tenga soluciones reales, necesitamos que el discriminante sea negativo, es decir,

$$\Delta = m^2 - 3m - 28 < 0.$$

Esta inecuación se puede reescribir como

$$(m-7)(m+4) < 0$$

Luego (usando por ejemplo la tabla de los signos) se concluye que

$$m \in \,]-4, 7[$$

(15 puntos)

2. **(20 ptos)** Resolver para $x \in \mathbb{R}$:

(a) $3|x| + 3 = x^2 - |x+2|$ (b) $|3-x| + \sqrt{3-x} \geq 2$

Solución:

(a) Separamos en casos:

Caso 1: $x < -2$:

En este caso, $|x| = -x$ y $|x+2| = -(x+2)$, por lo que la ecuación se transforma en

$$-3x + 3 = x^2 + x + 2.$$

Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} -3x + 3 &= x^2 + x + 2 \\ x^2 + 4x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x = -2 - \sqrt{5}$ y $x = -2 + \sqrt{5}$.

Sin embargo, como en este caso $x < -2$, y $-2+\sqrt{5} > -2$, el conjunto solución es

$$S_1 = \{-2-\sqrt{5}\}.$$

Caso 2: $-2 \le x \le 0$:
En este caso, $|x| = -x$ y $|x+2| = x+2$, por lo que la ecuación se transforma en

$$-3x+3 = x^2 - x - 2.$$

Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} -3x+3 &= x^2 - x - 2 \\ x^2+2x-5 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x = -1-\sqrt{6}$ y $x = -1+\sqrt{6}$.
Como en este caso $-2 \le x \le 0$, el conjunto solución es vacío, es decir,

$$S_2 = \emptyset$$

Caso 3: $x \ge 0$:
En este caso, $|x| = x$ y $|x+2| = x+2$, por lo que la ecuación se transforma en

$$3x+3 = x^2 - x - 2.$$

Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} 3x+3 &= x^2 - x - 2 \\ x^2-4x-5 &= 0 \\ (x-5)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x = -1$ y $x = 5$.
Sin embargo, como en este caso $x \ge 0$, el conjunto solución es

$$S_3 = \{5\}.$$

Finalmente, el conjunto solución es

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{-2-\sqrt{5}\} \cup \emptyset \cup \{5\} = \{-2-\sqrt{5}, 5\}.$$

(10 puntos)

(b) La restricción de la inecuación es $3 - x \geq 0$, es decir, $x \leq 3$.

Notamos que si $x \leq 3$, entonces $|3 - x| = 3 - x$. Luego, la inecuación se transforma en

$$3 - x + \sqrt{3 - x} \geq 2 \Longleftrightarrow \sqrt{3 - x} \geq x - 1$$

De aquí se distinguen dos casos:

Caso 1: $x - 1 < 0$:
Si $x - 1 < 0$, entonces $x < 1$. Esto implica que

$$\sqrt{3 - x} \geq 0 \geq x - 1,$$

por lo que

$$S_1 =]-\infty, 1[.$$

Caso 2: $x - 1 \geq 0$:
Si $x - 1 \geq 0$, entonces $x \geq 1$. Vemos que el lado derecho de la inecuación siempre es positivo. Esto nos permite elevar al cuadrado la inecuación, obteniendo

$$3 - x \geq x^2 - 2x + 1,$$

Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} 3 - x &\geq x^2 - 2x + 1 \\ 3 - x - x^2 + 2x - 1 &\geq 0 \\ -x^2 + x + 2 &\geq 0 \\ x^2 - x - 2 &\leq 0 \\ (x - 2)(x + 1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Usando, por ejemplo tabla de signos, se obtiene que

$$S_2 = [-1, 2].$$

Finalmente, se concluye que el conjunto solución es

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 1[\cup [-1, 2] =]-\infty, 2].$$

(10 puntos)

3. **(25 ptos)** Sean $A(3,1)$ y $B(7,-3)$ puntos fijos en el plano.

(a) Mostrar que todos los puntos $P(x,y)$ del plano tales que las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son perpendiculares, corresponden a la circunferencia de ecuación

$$C : (x-5)^2 + (y+1)^2 = 8.$$

Indicación: $\overleftrightarrow{AP}$ denota a la recta que pasa por A y P.

Solución: Notar que las pendientes de las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son

$$m_{\overleftrightarrow{AP}} = \frac{y-1}{x-3} \quad \text{y} \quad m_{\overleftrightarrow{BP}} = \frac{y+3}{x-7}, \quad x \neq 3,\ x \neq 7.$$

Como $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BP}$, entonces

$$\begin{aligned} m_{\overleftrightarrow{AP}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BP}} &= -1 \\ \frac{y-1}{x-3} \cdot \frac{y+3}{x-7} &= -1. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} (y-1)(y+3) &= -(x-3)(x-7) \\ y^2 + 2y - 3 + x^2 - 10x + 21 &= 0. \end{aligned}$$

Completando cuadrados, se obtiene finalmente

$$C : (x-5)^2 + (y+1)^2 = 8.$$

El argumento mostrado previamente no permite probar que los puntos $(3,-3)$ y $(7,1)$ pertenecen a la circunferencia, ya que en estos casos las pendientes de $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son indefinidas, puesto que corresponden a las rectas $x = 3$ y $x = 7$, respectivamente. Estas rectas son perpendiculares a las rectas $y = -3$ e $y = 1$, respectivamente; por lo que también pertenecen a la circunferencia C.

(15 puntos)

(b) Determinar la ecuación de la o las rectas tangentes a la circunferencia C del item (a), que tienen pendiente -1.

Solución: La familia de rectas con pendiente -1 está dada por

$$L_b : \; y = -x + b, \; b \in \mathbb{R}.$$

Como el radio $r > 0$ de C y L_b son perpendiculares en el punto de tangencia,

$$\begin{aligned} d((5,-1), L_b) &= r \\ \frac{|-5+1+b|}{\sqrt{1+1}} &= \sqrt{8} \\ \frac{|b-4|}{\sqrt{2}} &= \sqrt{8} \\ |b-4| &= \sqrt{16} \\ |b-4| &= 4. \end{aligned}$$

De donde, $b = 0$ y $b = 8$.
Luego, las rectas tangentes son $y = -x$ e $y = -x + 8$.

(10 puntos)

Solución alternativa: La familia de rectas con pendiente -1 está dada por

$$y = -x + b, \; b \in \mathbb{R}$$

Además, la recta será tangente a la circunferencia si y sólo si, su intersección con ella se reduce a un solo punto. Esto significa que el sistema

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + (y+1)^2 &= 8 \\ y &= -x + b \end{aligned}$$

tiene solución única.
Al reemplazar la segunda ecuación en la primera se obtiene

$$(x-5)^2 + (-x + (b+1))^2 - 8 = 0.$$

o equivalentemente

$$2x^2 - 2(b+6)x + ((b+1)^2 + 17) = 0$$

La ecuación en la variable x anterior, tiene solución única cuando su discriminante es nulo, es decir,

$$\Delta = 4(b+6)^2 - 8((b+1)^2 + 17) = -4b(b-8) = 0,$$

Por lo que $b = 0$ o $b = 8$.
Así, las rectas tangentes son $y = -x$ e $y = -x + 8$.

(10 puntos)