

Descomposición de medidas.

- Descomposición de Hahn.
- Descomposición de Jordan.

Descomposición de Hahn.

A lo largo de esta clase, (X, \mathcal{X}) es un espacio medible y $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **medida con signo**. Recordemos:

Def.: $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **medida con signo** (o **medida signada**) si:

$$(a) \lambda(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad (b) \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Ej. (a) $F \subset E \implies \lambda(E \setminus F) = \lambda(E) - \lambda(F)$, pero $\not\Rightarrow \lambda(F) \leq \lambda(E)$;
(b) $\lambda\left(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_n \lambda(E_n)$; (c) $\lambda\left(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \lim_n \lambda(F_n)$.

Def.: • $P \in \mathcal{X}$ es **positivo con respecto a λ** , si $\lambda(E \cap P) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{X}$.
• $P \in \mathcal{X}$ es **negativo con respecto a λ** , si $\lambda(E \cap P) \leq 0 \quad \forall E \in \mathcal{X}$.
• $P \in \mathcal{X}$ es **nulo con respecto a λ** , si $\lambda(E \cap P) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{X}$.

Lema: a) P positivo y $E \in \mathcal{X} : E \subset P \implies E$ positivo.
b) P_1, P_2 positivos $\implies P_1 \cup P_2$ positivo.

Dem.: (a) **Ej. 8.A** (b) **Ej. 8.B** ■

Teor. [descomposición de Hahn]: Dada $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida con signo, $\exists P$ positivo respecto a λ y N negativo respecto a λ tales que $X = P \cup N$.

Dem.: Sea \mathcal{P} la familia de todos los conjuntos positivos de \mathcal{X} .

$\emptyset \in \mathcal{P} \implies \mathcal{P} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\exists \alpha := \sup \{ \lambda(A), A \in \mathcal{P} \} \geq 0$.

Sean $A_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N} : \lambda(A_n) \xrightarrow{n} \alpha$ y $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\xRightarrow{\text{Ej.}} \lambda(A_n) \leq \lambda(B_n) \leq \alpha \implies \lambda(B_n) \xrightarrow{n} \alpha$.

Sea $P := \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Veamos que P es positivo.

$\forall E \in \mathcal{X}$, $\lambda(E \cap P) = \lambda(E \cap \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \lambda(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap B_n))$
 $= \lim_n \lambda(E \cap B_n) \geq 0 \implies P$ positivo.

Además, $\lambda(P) = \lim_n \lambda(B_n) = \alpha \implies \alpha < +\infty$.

Sea $N := X \setminus P$. Se demuestra que N es negativo (ver la dem. del Teor. 8.2).

Entonces, $X = P \cup N$ con P positivo y N negativo. ■

Def.: $X = P \cup N$ es una **descomposición de Hahn**, si P positivo y N negativo.

Notemos que si existe M nulo no vacío, entonces la descomposición de Hahn no es única. En efecto, $X = (P \cup M) \cup (N \setminus M)$ y $X = (P \setminus M) \cup (N \cup M)$ son descomposiciones de Hahn distintas.

Pese a esta falta de unicidad, las medidas de las partes positivas o negativas de cualquier conjunto medible son las mismas para toda descomposición de Hahn:

Lema: Sean $X = P_1 \cup N_1$ y $X = P_2 \cup N_2$ dos descomposiciones de Hahn. Entonces, $\forall E \in \mathcal{X}$, $\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2)$ y $\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$.

Dem.: Sea $E \in \mathcal{X}$.

$$\left. \begin{array}{l} E \cap P_1 \cap N_2 \subset P_1 \implies \lambda(E \cap P_1 \cap N_2) \geq 0 \\ E \cap P_1 \cap N_2 \subset N_2 \implies \lambda(E \cap P_1 \cap N_2) \leq 0 \end{array} \right\} \implies \lambda(E \cap P_1 \cap N_2) = 0$$

$$\implies \lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2) + \lambda(E \cap P_1 \cap N_2) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)$$

y, análogamente, se demuestra que $\lambda(E \cap P_2) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)$ **Ej.**

$$\implies \lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2).$$

La otra igualdad se demuestra de manera análoga. **Ej.** 

Def.: Sea $X = P \cup N$ una descomposición de Hahn.

Las **variaciones positiva y negativa** de λ son las medidas finitas λ^+ y λ^- , definidas respectivamente por

$$\lambda^+(E) := \lambda(E \cap P) \quad \text{y} \quad \lambda^-(E) := -\lambda(E \cap N), \quad E \in \mathcal{X}.$$

La **variación total** de λ es la medida finita $|\lambda|$ definida por

$$|\lambda|(E) := \lambda^+(E) + \lambda^-(E), \quad E \in \mathcal{X}.$$

Notemos que, como consecuencia del lema anterior, λ^+ , λ^- y $|\lambda|$ están **bien definidas**, pese a la falta de unicidad de la descomposición de Hahn.

Notemos también que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. En efecto,

$$\lambda^+(E) - \lambda^-(E) = \lambda(E \cap P) + \lambda(E \cap N) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{X}.$$

Descomposición de Jordan.

Teor. [descomposición de Jordan]: Toda medida con signo λ es la diferencia de dos medidas finitas. En particular, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Para cualquier otro par de medidas finitas μ y ν tales que $\lambda = \mu - \nu$,

$$\lambda^+ \leq \mu \quad \text{y} \quad \lambda^- \leq \nu.$$

Dem.: Sea $X = P \cup N$ una descomposición de Hahn.

Ya demostramos la existencia de la descomposición $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Sean μ y ν medidas finitas tales que $\lambda = \mu - \nu$. Entonces, $\forall E \in \mathcal{X}$:

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \nu(E \cap P) \leq \mu(E \cap P) \leq \mu(E),$$

$$\lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N) = -\mu(E \cap N) + \nu(E \cap N) \leq \nu(E \cap N) \leq \nu(E). \quad \blacksquare$$

Ya hemos visto que si $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$, entonces $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(E) := \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{X}$, es una medida con signo.

En tal caso, podemos relacionar las variaciones de λ con f :

Teor.: Sean $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ y $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(E) := \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{X}$.

Entonces, $\forall E \in \mathcal{X}$:

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu \quad \text{y} \quad |\lambda|(E) := \int_E |f| d\mu.$$

Dem.: Sean $P := \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ y $N := \{x \in X : f(x) < 0\}$.

Entonces, $f^+ = f\chi_P$ y $f^- = -f\chi_N \implies \forall E \in \mathcal{X}$:

$$\lambda(E \cap P) = \int_{E \cap P} f d\mu = \int_E f\chi_P d\mu = \int_E f^+ d\mu \geq 0 \implies P \text{ positivo}$$

$$\lambda(E \cap N) = \int_{E \cap N} f d\mu = \int_E f\chi_N d\mu = -\int_E f^- d\mu \leq 0 \implies N \text{ negativo}$$

Por lo tanto, $X = P \cup N$ es una descomposición de Hahn y

$$\lambda^+(E) := \lambda(E \cap P) = \int_E f^+ d\mu, \quad \lambda^-(E) := -\lambda(E \cap N) = \int_E f^- d\mu$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad |\lambda|(E) &:= \lambda^+(E) + \lambda^-(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu \\ &= \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E |f| d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$