

Práctica N°3

ÁLGEBRA 2 - 525150

1. Sea $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine una matriz B que sea equivalente por filas a A , tal que B sea triangular superior.
 - (b) Calcule el determinante de B .
 - (c) Utilice lo obtenido en (b) para calcular el determinante de A .
2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

donde λ es un parámetro real.

- (a) Calcular los determinantes de las matrices A y B .
 - (b) Determinar, si es posible, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A tiene rango 3. Además, probar que en ese caso la ecuación $AX = B^{-1}A^2$ tiene solución única.
 - (c) Determinar, si es posible, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la única solución X de la ecuación $AX = B^{-1}A^2$ tiene determinante 3. **Indicación:** Usar las propiedades de los determinantes, sin calcular la matriz X .
3. Sean $P, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definidas por:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- (a) Determine, si es posible, la matriz inversa de P .
 - (b) Defina una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de modo que $AP = PD$
 - (c) Utilice lo obtenido en (b) para calcular el $\det(A^{100})$.
4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz no singular. Demuestre que si $A^3 = 2I$, entonces

$$B = A^2 - 2A + 2I$$

es no singular. **Indicación:** recuerde que $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.