# Subsucesiones. Sucesiones de Cauchy.

- **Subsucesiones. Límites subsecuenciales.**
- **Sucesiones de Cauchy.**
- **Completitud.**
- **Sucesiones numéricas monótonas.**

# Subsucesiones. Límites subsecuenciales.

A lo largo de esta clase, $X$ es un espacio métrico con métrica $d$.

**Def.:** Dadas una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y otra sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$, entonces se dice que $p$ es un **límite subsecuencial** de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ejemplo:** $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero $\{(-1)^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{(-1)^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ son dos subsecesiones constantes que convergen a $1$ y $-1$, respectivamente.
Por lo tanto, $1$ y $-1$ son dos límites subsecuenciales de $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
De hecho, $1$ y $-1$ son los únicos límites subsecuenciales de $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ejemplo:** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ par,} \\ n, & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$

- $\{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_{2k} = \frac{1}{2k} \ \forall k \in \mathbb{N}$
  $\Longrightarrow \ x_{2k} \xrightarrow{k} 0$. Por lo tanto $0$ es un límite subsecuencial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es otra subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_{2k-1} = 2k-1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
  Entonces, $\{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es no acotada. Por lo tanto, no converge en $\mathbb{R}$.

**Ejemplo:** Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q}$. Entonces, todo $x \in \mathbb{R}$ es límite subsecuencial de esa sucesión

**Dem.:** • Como hay racionales en $B_1(x)$, sea $n_1 \in \mathbb{N} : |q_{n_1} - x| < 1$.

- Como hay infinitos racionales en $B_{1/2}(x)$, sea $n_2 > n_1 : |q_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$.
- Procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que, $|q_{n_k} - x| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x$. $\square$

**Prop.:** Una sucesión converge si y sólo si todas sus subsucesiones convergen. En tal caso, la sucesión y todas sus subsucesiones convergen al mismo límite.

**Dem.:** $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} : p_n \xrightarrow{n} p$ y $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión.
Veamos que $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.

Sea $\varepsilon > 0$. $p_n \xrightarrow{n} p \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ d(p_n, p) < \varepsilon$.

Sea $K \in \mathbb{N} : n_K \geq N$. Entonces, $\forall k \geq K,\ n_k \geq n_K \geq N$.

Por lo tanto, $d(p_{n_k}, p) < \varepsilon$. Entonces, $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de si misma, converge. Sea $p : p_n \to p$.
Entonces, por la implicación anterior, todas sus subsucesiones convergen a $p$. $\square$

**Teor.:** Toda sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en un compacto $K$, tiene una subsucesión convergente a algún punto de $K$.

**Dem.:** Sea $E := \{p_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset K$. $E$ puede ser finito o infinito.

(i) Si $E$ es finito, al menos uno de los términos $p_n$ se repite infinitas veces.
Sea $p\in K$ ese valor que se repite y sean $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ los índices tales que $p_{n_k}=p,\ k\in\mathbb{N}$.
Entonces $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión constante que converge a $p$.

(ii) Si $E$ es infinito, como $E\subset K$ y $K$ es un compacto, entonces $E$ tiene un punto de acumulación $p\in K$. Por lo tanto:

- como $E\cap B_1(p)\neq\emptyset,\ \exists n_1\in\mathbb{N}:\ d(p_{n_1},p)<1$;
- como $E\cap B_{1/2}(p)$ es infinito, $\exists n_2>n_1:\ d(p_{n_2},p)<\frac{1}{2}$;
- procediendo recursivamente, obtenemos $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ tales que $d(p_{n_k},p)<\frac{1}{k}\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $p_{n_k}\xrightarrow{k} p\in K$. $\square$

**Corol.:** Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente.

**Dem.:** Toda sucesión acotada cae en una bola cerrada, que en $\mathbb{R}^k$ es compacta.
Entonces el corolario es consecuencia del teorema anterior. $\square$

**Teor.:** El conjunto de límites subsecuenciales de una sucesión es cerrado.

**Dem.:** Sea $E$ el conjunto de límites subsecuenciales de una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Veremos que $E \supset \overline{E}$. Sea $q \in \overline{E} \implies \forall r > 0,\ B_r(q) \cap E \neq \emptyset$.

- Sea $r = \frac{1}{2}$. $B_{1/2}(q) \cap E \neq \emptyset \implies \exists p \in E : d(p,q) < \frac{1}{2}$.
  Como $p \in E$, hay una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $p$
  $\implies \exists n_1 \in \mathbb{N} : d(p_{n_1}, p) < \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $d(p_{n_1}, q) < 1$.
- Sea $r = \frac{1}{4}$. $B_{1/4}(q) \cap E \neq \emptyset \implies \exists p \in E : d(p,q) < \frac{1}{4}$.
  Como $p \in E$, hay una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $p$
  $\implies \exists n_2 > n_1 : d(p_{n_2}, p) < \frac{1}{4}$ y, por lo tanto, $d(p_{n_2}, q) < \frac{1}{2}$.
- Procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que, $d(p_{n_k}, q) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $p_{n_k} \xrightarrow{k} q$.
Entonces, $q \in E \implies \overline{E} \subset E$. $\square$

# Sucesiones de Cauchy.

**Def.:** Una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \ \forall m, n \geq N,\ d(p_n, p_m) < \varepsilon.}$$

Comparando con la definición de límite:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \ \forall n \geq N,\ d(p_n, p) < \varepsilon}$$

se tiene que:

- en términos intuitivos, una sucesión converge, si, de uno en adelante, todos sus términos se acercan al límite tanto como se quiera;
- en cambio, una sucesión es de Cauchy, si, de uno en adelante, todos sus términos se acercan entre si tanto como se quiera.

**Ejemplo:** La sucesión de aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$

$$\{1,\ \ 1.1,\ \ 1.14,\ \ 1.141,\ \ldots\}$$

converge a $\sqrt{2}$ en $\mathbb{R}$, pero no converge en $\mathbb{Q}$.

Sin embargo es una sucesión de Cauchy tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{Q}$.

**Prop.: a)** Las sucesiones convergentes son de Cauchy.

**b)** Las sucesiones de Cauchy son acotadas.

**c)** Las sucesiones de Cauchy que tienen una subsucesión convergente, convergen.

**Dem.: (a)** Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_n \to p$. Sea $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \forall m, n \geq N,\ d(p_m, p_n) \leq d(p_m, p) + d(p, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Entonces, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

**(b)** Sea $\{p_n\}$ de Cauchy. Sea $\varepsilon = 1$.

$\implies \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ \ d(p_m, p_n) < \varepsilon = 1,$

En particular, $\forall n \geq N,\ d(p_n, p_N) < \varepsilon = 1 \implies\ p_n \in B_1(p_N).$

Sea $R > \max\{d(p_1, p_N), \ldots, d(p_{N-1}, p_N), 1\}.$

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in B_R(p_N)$. Por lo tanto, $\{p_n\}$ es acotada.

**(c)** Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy tal que hay una subsucesión $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.

Veremos que $p_n \xrightarrow{n} p$. Sea $\varepsilon > 0$.

- $p_{n_k} \xrightarrow{k} p \implies \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \geq K,\ d(p_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$
- $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy $\implies \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ d(p_m, p_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$
- Sea $k \geq K :\ n_k \geq N \implies \forall n \geq N,\ d(p_{n_k}, p_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$

Entonces, $\forall n \geq N,\ d(p_n, p) \leq d(p_n, p_{n_k}) + d(p_{n_k}, p) < \varepsilon \implies\ p_n \xrightarrow{n} p.$ $\square$

**Teor.: a)** En un espacio métrico compacto, las sucesiones de Cauchy convergen.

**b) [criterio de Cauchy]** Las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}^k$ convergen.

**Dem.: (a)** Sea $X$ un espacio métrico compacto y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ de Cauchy.

Teor. anterior $\Longrightarrow$ $\exists\, \{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (subsucesión) tal que $p_{n_k} \xrightarrow{k} p \in X$.

Prop. anterior (c) $\Longrightarrow$ $p_n \xrightarrow{n} p$.

**(b)** Sea $\{p_n\} \subset \mathbb{R}^k$ de Cauchy.

Prop. anterior (b) $\Longrightarrow$ $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ acotada

$\Longrightarrow$ hay una bola cerrada $B$ : $p_n \in B \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Como la bola $B$ es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^k$, es compacta.

Entonces (a) $\Longrightarrow$ $\{p_n\}$ converge. $\square$

# Completitud.

**Def.:** Un espacio métrico es **completo** si las sucesiones de Cauchy en ese espacio convergen a un elemento del mismo espacio.

El teorema anterior muestra que son completos:

(a) cualquier espacio métrico compacto y

(b) el espacio euclideo $\mathbb{R}^k$.

En cambio, $\mathbb{Q}$ no es completo. En efecto, consideremos por ejemplo, la sucesión de aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ que ya usamos. Ésta es una sucesión en $\mathbb{Q}$ que converge en $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Como converge en $\mathbb{R}$, es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por ende en $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$, ya que si convergiera a $q \in \mathbb{Q}$, tendría dos límites distintos en $\mathbb{R}$: $q$ y $\sqrt{2}$.

La completitud de un espacio métrico es una propiedad muy útil, pues permite demostrar la covergencia de una sucesión chequeando que la sucesión es de Cauchy, sin necesidad de conocer su límite. En cambio, si se quiere demostrar la convergencia a través de su definición, hace falta primero conocer su límite.

# Sucesiones numéricas monótonas.

**Def.:** Una sucesión de números reales $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ es:

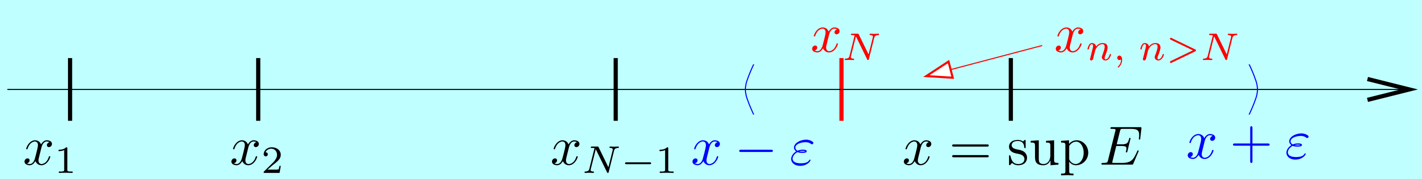
- **monótona creciente**, si $x_n \leq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **monótona decreciente**, si $x_n \geq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **monótona**, si es monótona creciente o monótona decreciente.

**Teor.:** Las sucesiones monótonas en $\mathbb{R}$ convergen si y sólo si son acotadas.

**Dem.:** $\boxed{\Longrightarrow}$ Ya demostramos que cualquier sucesión convergente es acotada.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ monótona creciente y acotada. (Si es decreciente, se demuestra igual $\boxed{\textbf{Ej.}}$) Entonces, $E := \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es acotado.

Sea $x := \sup E \in \mathbb{R}$. Veamos que $x_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$.




$x := \sup E \implies \exists N \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_N \leq x$ (si no, $x - \varepsilon$ cota sup. de $E$).

$\{x_n\}$ monótona creciente $\implies \forall n \geq N, x_N \leq x_n \leq x$

$\implies x - \varepsilon < x_n \leq x \implies |x_n - x| < \varepsilon$. Por lo tanto, $x_n \to x$. $\square$