MATERIAL COMPLEMENTARIO 1 - ESPACIOS VECTORIALES
Álgebra II (525148 - t3/2018).

- **Espacios Vectoriales**

  – 1) Pruebe que el conjunto de las matrices de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$:

  $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

  con las operaciones de adición $\oplus$ y multiplicación escalar $\odot$ usuales en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

  Solución:

  a) $\oplus$ es conmutativa:

  Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ luego:

  $$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $+$ en $\mathbb{R}$ es conmutativa:

  $$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \end{pmatrix} \\ &= B \oplus A \end{aligned}$$

  b) $\oplus$ es asociativa:

  Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ con $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ luego:

  $$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) & a_2 + (b_2 + c_2) \\ a_3 + (b_3 + c_3) & a_4 + (b_4 + c_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y como la suma en $\mathbb{R}$ es asociativa, entonces:

$$= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 & (a_2+b_2)+c_2 \\ (a_3+b_3)+c_3 & (a_4+b_4)+c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}\right) \oplus \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) \oplus \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$
$$= (A \oplus B) \oplus C$$

c) $\underline{\theta \text{ es el neutro para } \oplus}$:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ luego existe $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tal que:

$$A \oplus \theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1+0 & a_2+0 \\ a_3+0 & a_4+0 \end{pmatrix}$$

0 es el elemento neutro para + en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$
$$= A$$

d) $\underline{-A \text{ es inverso aditivo de } A}$:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ luego existe $-A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}$ tal que:

$$A \oplus (-A) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) & a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) & a_4+(-a_4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1-a_1 & a_2-a_2 \\ a_3-a_3 & a_4-a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \theta$$

e) <u>$\odot$ es asociativa</u>:

Sea α y $\beta \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in V$ con $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\beta \odot A) &= \alpha \odot \left(\beta \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \odot \begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 & \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 & \beta \cdot a_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_1) & \alpha \cdot (\beta \cdot a_2) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_3) & \alpha \cdot (\beta \cdot a_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\cdot$ es asociativa en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_1 & (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3 & (\alpha \cdot \beta) \cdot a_4 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \cdot \beta) \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \cdot \beta) \odot A \end{aligned}$$

f) <u>$\odot$ es lineal</u>:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned} \alpha \odot (A \oplus B) &= \alpha \odot \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot (a_1 + b_1) & \alpha \cdot (a_2 + b_2) \\ \alpha \cdot (a_3 + b_3) & \alpha \cdot (a_4 + b_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\cdot$ es distributiva con respecto a $+$ en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1 & \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3 & \alpha \cdot a_4 + \alpha \cdot b_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 & \alpha \cdot a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_1 & \alpha \cdot b_2 \\ \alpha \cdot b_3 & \alpha \cdot b_4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(\alpha \odot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\alpha \odot A) \oplus (\alpha \odot B)$$

g) $\odot$ es distributiva:

Sea α, $\beta \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$(\alpha + \beta) \odot A = (\alpha + \beta) \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot a_1 & (\alpha + \beta) \cdot a_2 \\ (\alpha + \beta) \cdot a_3 & (\alpha + \beta) \cdot a_4 \end{pmatrix}$$

$\cdot$ es conmutativa en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot (\alpha + \beta) & a_2 \cdot (\alpha + \beta) \\ a_3 \cdot (\alpha + \beta) & a_4 \cdot (\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$\cdot$ es distributiva con respecto a $+$ en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot \alpha) + (a_1 \cdot \beta) & (a_2 \cdot \alpha) + (a_2 \cdot \beta) \\ (a_3 \cdot \alpha) + (a_3 \cdot \beta) & (a_4 \cdot \alpha) + (a_4 \cdot \beta) \end{pmatrix}$$

$\cdot$ es conmutativa en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} (\alpha \cdot a_1) + (\beta \cdot a_1) & (\alpha \cdot a_2) + (\beta \cdot a_2) \\ (\alpha \cdot a_3) + (\beta \cdot a_3) & (\alpha \cdot a_4) + (\beta \cdot a_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 & \alpha \cdot a_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \beta \cdot a_1 & \beta \cdot a_2 \\ \beta \cdot a_3 & \beta \cdot a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(\beta \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\alpha \odot A) \oplus (\beta \odot A)$$

h) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ y $1 \in \mathbb{R}$:

$$1 \odot A = 1 \odot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 & 1 \cdot a_2 \\ 1 \cdot a_3 & 1 \cdot a_4 \end{pmatrix}$$

1 es elemento neutro para $\cdot$ en $\mathbb{R}$:

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Por tanto, de a)-g), se concluye que $(V, \oplus, \odot)$ es espacio vectorial sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

- **Subespacios Vectoriales**
  - 1) Pruebe que el conjunto de las matrices simétricas:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de V (el espacio de las matrices de 2×2 definido antes).

<u>Solución</u>:

i) $W \neq \emptyset$ ya que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in W$.

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ con $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

sea $\tilde{a} = a_1 + a_2$, $\tilde{b} = b_1 + b_2$ y $\tilde{c} = c_1 + c_2$:

$$= \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \oplus B \in W$.

iii) Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ con $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \odot A = \alpha \odot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot b_1 & \alpha \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

sea $\tilde{a} = \alpha \cdot a_1$, $\tilde{b} = \alpha \cdot b_1$ y $\tilde{c} = \alpha \cdot c_1$:

$$= \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha \odot A \in W$.

Así de i), ii) y iii) se concluye que W es s.e.v de V.

– 2) Muestre que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 2\right\}$$

no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

<u>Solución</u>:

En clases se probó (tal como se hace en el ejemplo 2.13.4 del apunte del curso) que S no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ encontrando dos vectores de S tales que su suma no pertenece a S, ellos eran $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, 0, 1) \in S$ y su suma $u + v = (2, 1, 1) \notin S$.

Otra forma de probar que S no es subespacio vectorial es la siguiente:

i) $S \neq \emptyset$ pues $(1, 0, 1) \in S$.

ii) Sean $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ en S, luego las coordenadas de v y w cumplen respectivamente:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

sin embargo las coordenadas del vector suma $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, cumplen:

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 4$$

por tanto $v + w \notin S$, en consecuencia S no es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Además, tampoco se cumple iii), en efecto, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v = (x_1, x_2, x_3) \in S$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$\Rightarrow$

$$\alpha(x_1 + x_2 + x_3) = \alpha 2$$

$\Rightarrow$

$$(\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) = \alpha 2$$

luego las coordenadas de $\alpha v = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ suman 2 sólo cuando $\alpha = 1$ y no para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Combinación Lineal**
  - 1) Teorema: Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, ..., v_r \in V$. El conjunto:

    $$\langle \{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\} \rangle = \left\{ v \in V : \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \right\}$$

    es un subespacio vectorial de V. Si $U = \emptyset$ se define $\langle U \rangle = \{\theta\}$.

    Demostración:

    Sea $A = \left\{ v \in V : \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \right\}$, luego:

    i) $A \neq \emptyset$ pues $\theta \in A$ ya que existen $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$ tales que:

    $$\theta = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + ...0 \cdot v_r$$

    ii) Sean w y $u \in A$, entonces:

    $$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r \in \mathbb{K} : w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

    $$\exists\, \beta_1, \beta_2, ...\beta_r \in \mathbb{K} : u = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i$$

    luego:

    $$w + u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i$$

$\Rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

sea $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ para todo $i = 1, ..., r$; por tanto existen $\gamma_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, ..., r$ tales que:

$$w + u = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i v_i$$

esto es, $w + u \in A$.

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in V$, luego:

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r \in \mathbb{K} : w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

por consiguiente:

$$\lambda w = \lambda \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

$\Rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda \alpha_i v_i$$

$\Rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\lambda \alpha_i) v_i$$

sea $\beta_i = \lambda \alpha_i$ para todo $i = 1, ..., r$; entonces existen $\beta_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, .., r$ tales que $\lambda w = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i$, es decir, $\lambda w \in A$. En consecuencia, por i), ii) y iii) se tiene que A es subespacio vectorial de V.

– 2) Según el ejemplo 2.19.2 de los apuntes del curso. Se mostró que:

$$\langle \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\} \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

y que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Ahora, si se denota a $U = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,-1)\}$ y $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$, entonces, por la definición y notación de espacio generador:

$$\langle U \rangle = S$$

donde S es espacio generado por U y U es un sistema generador de S.

– 3) Encuentre el conjunto o sistema generador del subespacio de las matrices simétricas de 2×2:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Solución</u>:

Observar que cualquier vector $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de W, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así cualquier vector de W se puede escribir como combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto:

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = W$$

– 4) Caracterice el subespacio generado por: $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (-1,3,-1)$ y $v_3 = (2, -\frac{11}{2}, 3)$.

<u>Solución</u>:

Sea $S = \langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle$. Si $(x,y,z) \in S$ entonces:

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha_1(0,1,2) + \alpha_2(-1,3,-1) + \alpha_3(2, -\frac{11}{2}, 3)$$

luego:

$$\begin{aligned} x &= -\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ y &= \alpha_1 + 3\alpha_2 - \frac{11}{2}\alpha_3 \\ z &= 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 2 & | & x \\ 1 & 3 & -\dfrac{11}{2} & | & y \\ 2 & -1 & 3 & | & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 2 & | & x \\ 1 & 3 & -\dfrac{11}{2} & | & y \\ 0 & 0 & 0 & | & z-2y-7x \end{array}\right)$$

este sistema tiene solución sí y sólo si $z - 2y - 7x = 0$, por consiguiente:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2y - 7x = 0\}$$

o bien

$$S = \{(x, y, 2y + 7x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Observación:

Haciendo uso de la segunda definición de S ($S = \{(x, y, 2y+7x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$) es posible obtener lo siguiente:

Sea $s \in S$, luego: $s = (x, y, 2y + 7x) = x(1, 0, 7) + y(0, 1, 2)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir, todo vector de S es combinación lineal de $(1, 0, 7)$ y $(0, 1, 2)$, por tanto:

$$\langle\{(1, 0, 7), (0, 1, 2)\}\rangle = S$$

esto es, $\tilde{U} = \{(1, 0, 7), (0, 1, 2)\}$ es otro conjunto generador de S a parte de $U = \{v_1, v_2, v_3\}$.