Problema 1: Demuestre las sgtes propiedades del Producto Cartesiano.

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Si queremos probar que 2 conjuntos son iguales U_1 y U_2, probemos

$$X \in U_1 \Leftrightarrow X \in U_2.$$

Dem:

$$\text{Sea } (x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \vee (x,y) \in (A \times C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

b) $(A \times B)^c = (A^c \times U) \cup (U \times B^c)$

$$\text{Sea } (x,y) \in (A \times B)^c \Leftrightarrow (x,y) \notin (A \times B)$$
$$\Leftrightarrow \neg((x,y) \in (A \times B))$$
$$\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge y \in B)$$
$$\Leftrightarrow x \in A^c \vee y \in B^c$$
$$\Leftrightarrow (x \in A^c \wedge y \in U) \vee (x \in U \wedge y \in B^c)$$
$$\Leftrightarrow ((x,y) \in A^c \times U) \vee ((x,y) \in U \times B^c)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A^c \times U) \cup (U \times B^c)$$

Problema 2: Sean $A, B \subseteq E$.

a) Pruebe que $A^c \times B^c \subseteq (A\times B)^c$, donde $(A\times B)^c$ denota $(E\times E) \setminus (A\times B)$

Sea $(x,y) \in A^c \times B^c \Rightarrow$ Luego $x \notin A^c \wedge y \notin B^c$

Queremos probar $\underbrace{(x,y) \in A^c \times B^c}_{p} \Rightarrow \underbrace{(x,y) \in (A\times B)^c}_{q}$

Supongamos $(x,y) \in (A\times B) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$. $(\to\leftarrow)$

Entonces, por contradicción, se tiene que $(x,y) \in (A\times B)^c$.
Por lo tanto, como $(x,y) \in A^c \times B^c$ y era un elemento arbitrario, se concluye que $A^c \times B^c \subseteq (A\times B)^c$

b) Muestre con un contraejemplo que $(A\times B)^c \not\subseteq A^c \times B^c$

$E\times E$, $E = \{1,2,3,4,5\}$.
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{3,4,5\}$.

$E\times E = \{(x,y) \in U\times U : x\in E \wedge y \in E\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$
$\vdots$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$.

$|E\times E| = 25.$

Dados A_1, A_2 cualquier $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$.

$A^c = \{4, 5\}$
$B^c = \{1, 2\}$.

$A^c \times B^c = \{(4,1), (5,1), (4,2), (5,2)\}$

$(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (3,5)\}$.

$(2,2) \in E \times E$, Pero $(2,2) \notin A \times B$.

Problema 3: Para la familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Encuentre $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ en cada caso.

a) $A_i = \{1,2,3,\dots, 2i+1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \{1,2,3\} \\ A_2 = \{1,2,3,4,5\} \\ A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7\}. \end{array}\right\} \quad A_i \subseteq A_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{Familia creciente.}$$

- $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ ← Afirmación.

Dem: Por doble inclusión.

$\subseteq$) Sea $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i$
$\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in \{1,2,3,\dots,2i+1\}$.

Como $\{1,2,3,\dots,2i+1\} \subseteq \mathbb{N}$ se tiene $x \in \mathbb{N}$. Luego, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{N}$

$\supseteq$) Recíprocamente, sea $x \in \mathbb{N}$

- Si $x=1$, $x=2$, o $x=3$, $x \in A_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

- Si $x>3$ es par, $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $x = 2k \Rightarrow x \in \{1,2,3,\dots,2k,2k+1\} = A_k$

- Si $x>3$ es impar, $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1,2,3,\dots,2k+1\} = A_k$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Como cubrimos todos los casos, se concluye $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

luego, concluimos que $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

b) $A_i = [-1-\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}] \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

$A_1 = [-2, 0]$
$A_2 = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$

- $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = [-2, 1)$.

Dem: Sea $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [-1-\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}]$
$\iff \exists i \in \mathbb{N} : -1-\frac{1}{i} \leq x$

Como $i \geq 1$, luego $\frac{1}{i} \leq 1$ y $\frac{-1}{i} \geq -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{i} \geq -2$.

A lo que se llega $x < 1$:

Como $\frac{1}{2} > 0$, $-\frac{1}{2} < 0$, luego $1-\frac{1}{i} < 1$ y como $x \leq 1-\frac{1}{i} < 0$

y $x \geq -1 - \frac{1}{i} \geq -2$

$\Rightarrow x \geq -2 \quad \wedge \quad x < 1 \Rightarrow x \in [-2, 1)$

$\Rightarrow$ Como x era arbitrario en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ se concluye $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq [-2, 1)$

Por otro lado, sea $x \in [-2, 1)$, queremos probar que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$x \in [-1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ o equivalentemente $-1-\frac{1}{n} \leq x \leq 1-\frac{1}{n}$.

$\square$