# ¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden?

## Método de variables separables

Carlos M. Mora

**EDO de variables separables**

$$Y'(t) = g(t)\, h(Y(t)) \qquad \forall t \in I,$$

donde $g$ y $h$ son funciones conocidas y $I$ es un intervalo

**Ejemplo:** $Y'(t) = a(b - Y(t))\, Y(t)$ con $a, b > 0$ dados de antemano

$g(t) = a, \qquad h(y) = (b - y)\, y.$

**Ejemplo:** $Y'(t) = 2t\, Y(t)^2$

$g(t) = 2t, \qquad h(y) = y^2.$

**Ejemplo:** $Y'(t) = \frac{1}{t} \tan(Y(t))$

$g(t) = \frac{1}{t}, \qquad h(y) = \tan(y).$

## Teorema de existencia y unicidad para EDO de variables separables

Considere la EDO

$$Y'(t) = g(t)\; h(Y(t))$$

donde $g$ y $h$ son funciones conocidas tales que

- $g$ es continua en $]t_i, t_f[$ con $t_f > t_i$.
- $h$, $h'$ son continuas en $]y_i, y_f[$ con $y_f > y_i$.

Entonces, para cada $t_0 \in ]t_i, t_f[$ y $y_0 \in ]y_i, y_f[$ existe un intervalo abierto $t_0 \in I \subset ]t_i, t_f[$ tal que el PVI

$$\begin{cases} Y'(t) = g(t)\; h(Y(t)) & \forall t \in I \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en $I$.

## Ejemplo: $\quad Y'(t) = 2t\, Y(t)^2$

Como

- $g(t) = 2t$ es continua en $]-\infty, +\infty[$
- $h(y) = y^2$, $h'(y) = 2\,y$ son continuas en $]-\infty, +\infty[$ ,

el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ el PVI

$$Y'(t) = 2t\, Y(t)^2 \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(a) = b$$

tiene una única solución definida en un intervalo $I$ que contiene al punto $a$.

## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = 2t\,Y(t)^2 \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(0) = 1$$

## Método de variables separables, Paso 1: calcular soluciones constantes

$Y(t) = y$ para todo $t \in I$

Como $Y'(t) = 0$, reemplazando en la EDO obtenemos

$$0 = Y'(t) = 2t\,Y(t)^2 = 2t\,y^2 \quad \forall t \in I \Rightarrow y = 0$$

Entonces, $Y(t) = 0$ es la única solución constante de $Y'(t) = 2t\,Y(t)^2$.

## Observación

Usando el teorema de existencia y unicidad deducimos que las curvas solución $(t, Y(t))_{t\in I}$ no se pueden cortar. Entonces, las soluciones no constantes satisfacen:

$Y(t) > 0$ para todo $t \in I$, ó $Y(t) < 0$ para todo $t \in I$

## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = 2t\, Y(t)^2 \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(0) = 1$$

A continuación se calculan las soluciones no constantes.

## Método de variables separables, Paso 2: separar variables e integrar

Separamos variables:

$$Y'(t) = 2t\, Y(t)^2 \Leftrightarrow \frac{Y'(t)}{Y(t)^2} = 2t$$

Integramos

$$\int_0^s \frac{Y'(t)}{Y(t)^2} dt = \int_0^s 2t\, dt = s^2$$

El cambio de variable $u = Y(t)$ nos lleva a

$$\int_0^s \frac{Y'(t)}{Y(t)^2} dt = \int_{Y(0)}^{Y(s)} \frac{du}{u^2} = \int_1^{Y(s)} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_1^{Y(s)} = 1 - \frac{1}{Y(s)}.$$

$$s^2 = 1 - \frac{1}{Y(s)} \Leftrightarrow \frac{1}{Y(s)} = 1 - s^2 \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{1 - s^2}$$

Dominio de $Y(s)$: $I = ]-1, 1[$.

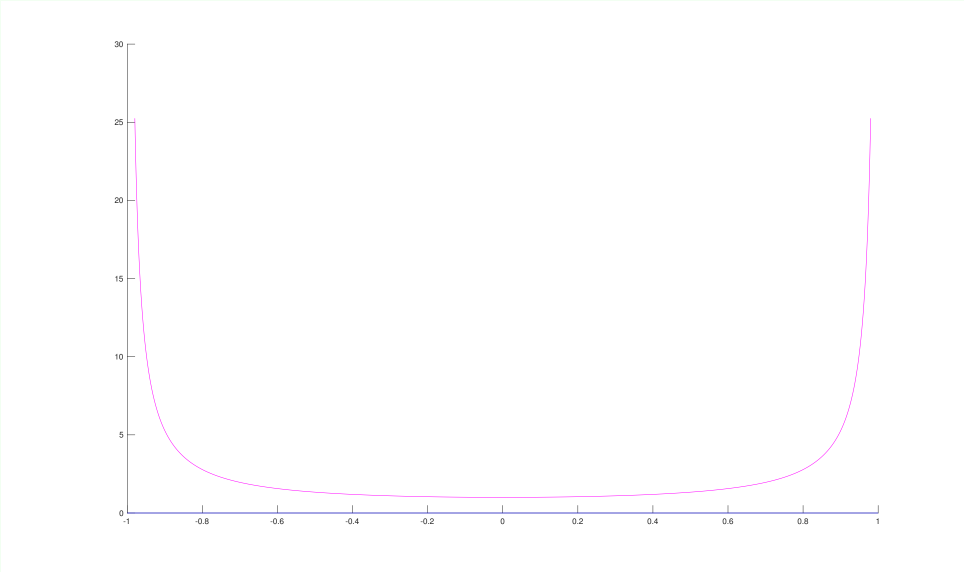
## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = 2t\,Y(t)^2 \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(0) = 1$$

$$Y(t) = \frac{1}{1-t^2} \qquad \forall t \in \,]-1, 1[$$

Obs: $Y(t)$ no se puede extender a un mayor intervarlo



## Teorema de existencia y unicidad para EDO de variables separables

Considere la EDO

$$Y'(t) = g(t)\, h(Y(t))$$

donde $g$ y $h$ son funciones conocidas tales que

- $g$ es continua en $]t_i, t_f[$ con $t_f > t_i$.
- $h$, $h'$ son continuas en $]y_i, y_f[$ con $y_f > y_i$.

Entonces, para cada $t_0 \in\, ]t_i, t_f[$ y $y_0 \in\, ]y_i, y_f[$ existe un intervalo abierto $t_0 \in I \subset\, ]t_i, t_f[$ tal que el PVI

$$\begin{cases} Y'(t) = g(t)\, h(Y(t)) & \forall t \in I \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en $I$.

## Ejemplo: $\quad Y'(t) = a\,(b - Y(t))\, Y(t) \quad$ con $a, b > 0$ dados de antemano

Como

- $g(t) = a$ es continua en $]-\infty, +\infty[$
- $h(y) = (b - y)\, y$, $h'(y) = b - 2b\,y$ son continuas en $]-\infty, +\infty[$ ,

el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ el PVI

$$Y'(t) = a\,(b - Y(t))\, Y(t) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(t_0) = y_0$$

tiene una única solución definida en un intervalo $I$ que contiene al punto $t_0$.

## Ejemplo:

Encuentre la solución general de

$$Y'(t) = a(b - Y(t))\,Y(t)$$

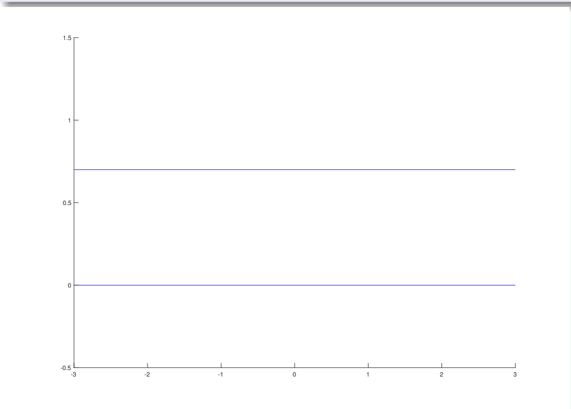
con $a, b > 0$ conocidos.

## Método de variables separables, Paso 1: calcular soluciones constantes

$Y(t) = y$ para todo $t \in I$
Como $Y'(t) = 0$, reemplazando en la EDO obtenemos

$$0 = Y'(t) = a(b - Y(t))\,Y(t) = a(b-y)\,y \quad \forall t \in I \Rightarrow y = 0 \text{ ó } y = b$$

Entonces, $Y(t) = 0$, $Y(t) = b$ son las únicas solución constantes de $Y'(t) = a(b - Y(t))\,Y(t)$.




Soluciones no constantes satisfacen:

$Y(t) < 0$ para todo $t \in I$,

$Y(t) \in ]0, b[$ para todo $t \in I$,

$Y(t) > b$ para todo $t \in I$

## Ejemplo:

Encuentre la solución general de

$$Y'(t) = a(b - Y(t))\,Y(t)$$

con $a, b > 0$ conocidos.

A continuación se calculan las soluciones no constantes.

## Método de variables separables, Paso 2: separar variables e integrar

Separamos variables:

$$Y'(t) = a(b - Y(t))\,Y(t) \Leftrightarrow \frac{Y'(t)}{(b - Y(t))\,Y(t)} = a$$

Integramos:

$$\int \frac{Y'(t)}{(b - Y(t))\,Y(t)}dt = \int a\,dt = a\,t + C$$

El cambio de variable $y = Y(t)$ nos lleva a

$$\int \frac{Y'(t)}{(b - Y(t))\,Y(t)}dt = \int \frac{dy}{(b - y)\,y} = \frac{1}{b}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{b}\int \frac{dy}{b - y} = \frac{1}{b}(\ln(|y|) - \ln(|b - y|))$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{b}\ln\left(\frac{|Y(t)|}{|b - Y(t)|}\right) = a\,t + C \Leftrightarrow \frac{|Y(t)|}{|b - Y(t)|} = \exp(C)\exp(a\,b\,t)$$

$$\frac{|Y(t)|}{|b - Y(t)|} = \exp(C)\exp(a\,b\,t)$$

Observación: las soluciones no constantes satisfacen:
$Y(t) < 0$ para todo $t \in I$, $Y(t) \in ]0, b[$ para todo $t \in I$, ó $Y(t) > b$ para todo $t \in I$

Si $Y(t) < 0$ ó $Y(t) > b$,

$$-\frac{Y(t)}{b - Y(t)} = \frac{|Y(t)|}{|b - Y(t)|} = \exp(C)\exp(a\,b\,t) \Rightarrow Y(t) = K\exp(a\,b\,t)(b - Y(t)) \text{ con } K < 0$$

Si $Y(t)\,]0, b[$,

$$\frac{Y(t)}{b - Y(t)} = \frac{|Y(t)|}{|b - Y(t)|} = \exp(C)\exp(a\,b\,t) \Rightarrow Y(t) = K\exp(a\,b\,t)(b - Y(t)) \text{ con } K > 0$$

$$Y(t) = Ke^{a\,b\,t}(b - Y(t)) \Leftrightarrow \left(1 + K\,e^{a\,b\,t}\right)Y(t) = K\,b\,e^{a\,b\,t} \Leftrightarrow Y(t) = \frac{K\,b\,e^{a\,b\,t}}{1 + K\,e^{a\,b\,t}}$$

## Ejemplo:

$$Y'(t) = a\,(b - Y(t))\,Y(t)$$

Aplicación:

$Y(t)$ : fracción de la población total contagiada por un virus

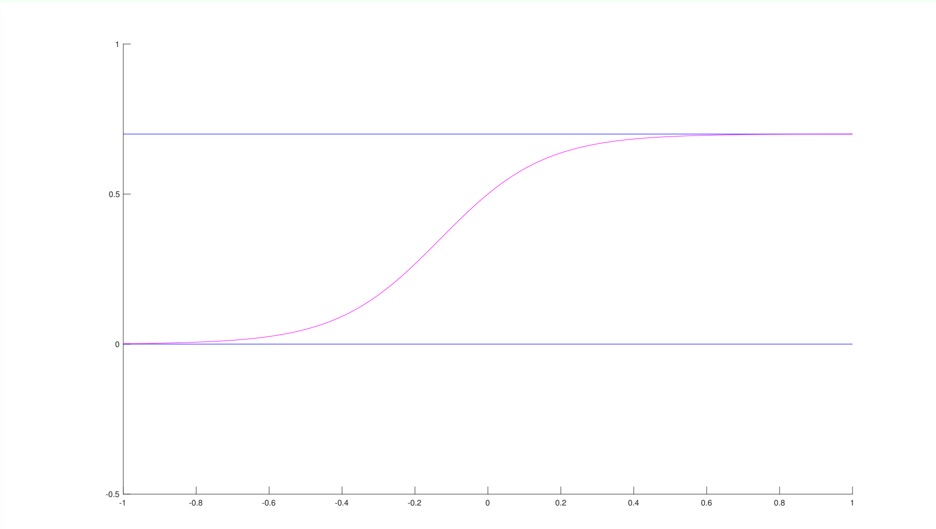
$b$ : capacidad de carga

$a\,b$ : tasa de crecimiento

## Solución general:

$$Y(t) = \frac{K\,e^{a\,b\,t}}{1 + K\,e^{a\,b\,t}}\,b \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}, \text{ y } Y(t) = b \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$K = Y(0)\,/\,(b - Y(0))$



## Teorema de existencia y unicidad para EDO de variables separables

Considere la EDO

$$Y'(t) = g(t)\ h(Y(t))$$

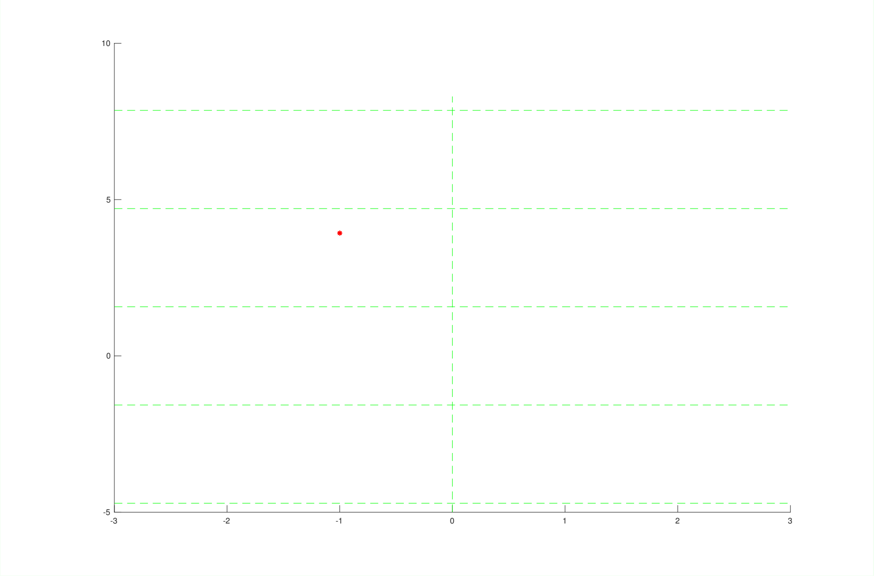
donde $g$ y $h$ son funciones conocidas tales que $\boxed{g \text{ es continua en } ]t_i, t_f[ \text{ con } t_f > t_i}$, y $\boxed{h, h' \text{ son continuas en } ]y_i, y_f[ \text{ con } y_f > y_i}$. Entonces, para cada $t_0 \in ]t_i, t_f[$ y $y_0 \in ]y_i, y_f[$ existe un intervalo abierto $t_0 \in I \subset ]t_i, t_f[$ tal que el PVI

$$\left\{ Y'(t) = g(t)\ h(Y(t)) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(t_0) = y_0 \right.$$

tiene una única solución definida en $I$.

## Ejemplo: $\quad Y'(t) = \frac{1}{t} \tan(Y(t))$

- $g(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$
- $h(y) = \tan(y)$, $h'(y)$ son continuas en $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$ ,




$$\begin{cases} Y'(t) = \dfrac{1}{t}\tan(Y(t)) \\ Y(-1) = \dfrac{5}{4}\pi \end{cases}$$

tiene una única solución definida localmente

## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$$

## Método de variables separables, Paso 1: calcular soluciones constantes

$Y(t) = y$ para todo $t \in I$

Como $Y'(t) = 0$, reemplazando en la EDO obtenemos

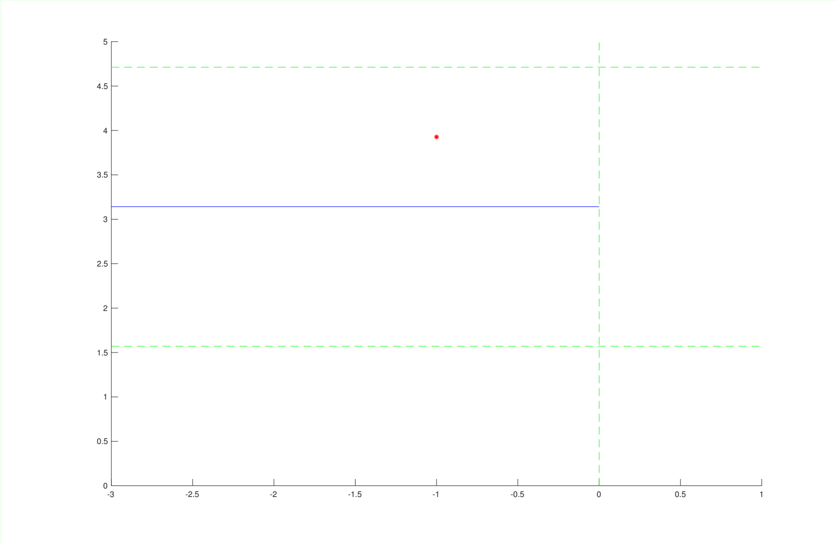
$$0 = Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) = \frac{1}{t}\tan(y) \quad \forall t \in I \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = 0 \Leftrightarrow y = k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Entonces todas las soluciones constantes son $Y(t) = k\,\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$$




## Observación

Ya que $Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$, la solución buscada está definida en un subintervalo de $]-\infty, 0[$ y toma valores en $\left]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$ .

Usando el teorema de existencia y unicidad deducimos que las curvas solución $(t, Y(t))_{t\in I}$ no se pueden cortar. Así que $Y(t) > \pi$ para todo $t$.

## Ejemplo:

Resolver

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$$

A continuación se calculan las soluciones no constantes.

## Método de variables separables, Paso 2: separar variables e integrar

Separamos variables:

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) \Leftrightarrow \frac{\cos(Y(t))}{\operatorname{sen}(Y(t))}Y'(t) = \frac{1}{t}$$

Integramos

$$\int_{-1}^{s} \frac{\cos(Y(t))}{\operatorname{sen}(Y(t))}Y'(t)\ dt = \int_{-1}^{s} \frac{1}{t}\,dt = \ln(|s|) = \ln(-s)$$

El cambio de variable $u = Y(t)$ nos lleva a

$$\int_{-1}^{s} \frac{\cos(Y(t))}{\operatorname{sen}(Y(t))}Y'(t)\ dt = \int_{Y(-1)}^{Y(s)} \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du = \ln(|\operatorname{sen}(u)|)\ \Big|_{\frac{5}{4}\pi}^{Y(s)} = \ln(|\operatorname{sen}(Y(s))|) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\ln(-\operatorname{sen}(Y(t))) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(-t) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(Y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

## Ejemplo:

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan(Y(t)) \qquad \forall t \in I, \qquad Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$$

$t < 0;$ $\quad Y(t) \in \left]\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right[$ $\quad \operatorname{sen}(Y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$

Como $\operatorname{sen}(\pi - Y(t)) = \operatorname{sen}(Y(t))$, $\quad \operatorname{sen}(\pi - Y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$

Ya que $\pi - Y(t) \in \left]-\tfrac{1}{2}\pi, 0\right[$,

$$\pi - Y(t) = Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

Dominio de $Y$: $\left]-\sqrt{2}, 0\right[$

$$Y(t) = \pi - Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

## Ejemplo:

$$Y'(t) = \frac{1}{t}\tan\left(Y(t)\right) \qquad \forall t \in I, \qquad\qquad Y(-1) = \frac{5}{4}\pi$$

Dominio de $Y$: $\left]-\sqrt{2}, 0\right[$

$$Y(t) = \pi - Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$