UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
9 de julio de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 10

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto interior que tiene por expresión matricial:

$$\langle x, y\rangle = x^t A\ y, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $V = \langle\{(1,1,0),(0,1,1)\}\rangle$

   a) Determinar a, b y c sabiendo que $(1,1,0),(0,1,1)$ son una base ortonormal de V.

   b) Calcular los vectores de $V^\perp$ de norma 4.

2. Considere la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida como sigue.

$$F((x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xy$$

   a) Demuestre que se trata de una forma cuadrática y determine si forma bilineal simétrica B asociada.

   b) Para la forma bilineal B encontrada en la parte a), determine si es degenerada, definida positiva (negativa), semi definida positiva (negativa) o ninguna de las cinco.

   c) Calcule el $Ker_V(B)$ y $Ker_W(B)$ para la forma bilineal B encontrada en la parte a).

3. Considere la siguiente forma bilineal en $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$.

$$B((a,b,c,d),(x,y,z,t)) = az - at + bz + bt - cx - cy + dx - dy$$

   a) Calcule la matriz representante de esta forma bilineal respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   b) Demuestre que se trata de una forma no degenerada.

   c) Decida si se trata de una forma definida positiva, negativa, semi definida positiva, semi definida negativa o ninguna de las anteriores.

   d) Exprese la forma cuadrática asociada.

4. Considere la siguiente función $B : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, definida como sigue.

$$B(M,N) = tr(MN)$$

   a) Demuestre que se trata de una forma bilineal y determine simetría, definición, y degeneración.

   b) Calcule la forma cuadrática asociada y su matriz representante para el caso $n = 2$.

c) Considere ahora el producto interno usual de matrices: $\langle M, N\rangle$ y el operador $L(M) = M^t$. Calcule el operador dual de L.

5. Sea $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$B(p(x), q(x)) = ap(0)q(0) + bp(1)q(-1) + bp(-1)q(1)$$

   a) Demuestre que B es una forma bilineal simétrica.
   b) Encuentre los valores de a y b de modo que B sea una forma lineal degenerada. Demuestre que no existen valores de a y b de modo que B defina un producto interior.
   c) Encuentre $Ker_V(B)$ en función de los valores de a y b.

6. Un operador $L : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tiene la siguiente forma de Jordan.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Determine el polinomio característico de L y también su polinomio minimal.
   b) Calcule el espectro de L y la multiplicidad geométrica y algebraica de cada valor propio.
   c) Si la base de Jordan es: $\{1 + x, x^2 - 1, x^2 + 1, x^3 - x, x^4 + x^3\}$, determine entonces los espacios propios asociados a cada valor propio de L. Igualmente, determine los núcleos iterados de a cada valor propio.
   d) Determine L.

7. Se considera una matriz M con:

$$p(x) = (x - 4)^3(x + 1)^5 \quad \text{y } m(x) = (x - 4)^3(x + 1)^2$$

   a) Calcule las dimensiones de M, el espectro de M y la multiplicidad algebraica y el exponente estabilizador de cada valor propio.
   b) ¿Es posible determinar la forma de Jordan de M con los datos dados? y si no, ¿cuáles formas de Jordan podría tener M?
   c) ¿Qué valores podría tomar la multiplicidad geométrica de cada valor propio?

8. Se considera una matriz M con:

$$p(x) = x^3(x - 1)^6 \quad \text{y } m(x) = x^2(x - 1)^2$$

   a) Calcule las dimensiones de M, el espectro de M y la multiplicidad algebraica y el exponente estabilizador de cada valor propio.
   b) Sabiendo que la forma de Jordan de M tiene exactamente 4 bloques en total, ¿es posible determinar la forma de Jordan? y si no, ¿cuáles formas de Jordan podría tener M?
   c) ¿Qué valores podría tomar la multiplicidad geométrica de cada valor propio?