UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 9 - Álgebra III (525201)

Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Sea $B = \{e^{ax} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ un conjunto de funciones reales, $W = \langle B \rangle$ un subespacio vectorial real de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y $T \in \mathcal{L}(W)$ el operador lineal derivada, es decir:

$$\forall f \in W, \quad T(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Demuestre que T es diagonalizable.

Demostración. Notemos que B es l.i., y por tanto una base de W. En efecto, dados $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, tenemos que, derivando sucesivamente

$$\begin{aligned} c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \cdots + c_n e^{a_n x} &\equiv 0 \\ c_1 a_1 e^{a_1 x} + c_2 a_2 e^{a_2 x} + \cdots c_n a_n e^{a_n x} &\equiv 0 \\ c_1 a_1^2 e^{a_1 x} + c_2 a_2^2 e^{a_2 x} + \cdots c_n a_n^2 e^{a_n x} &\equiv 0 \\ &\vdots \\ c_1 a_1^{n-1} e^{a_1 x} + c_2 a_2^{n-1} e^{a_2 x} + \cdots c_n a_n^{n-1} e^{a_n x} &\equiv 0 \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$, el sistema en formato matricial es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de Vandermonde es

$$\det(V) = \prod_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)$$

y por tanto $\det(V) \neq 0$ pues $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Así, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ y B es l.i., por lo que es base de W.

Es fácil probar que $a \in \mathbb{R}$ es valor propio de T con vector propio e^{ax}, de lo cual se sigue que B es una base de W formada por vectores propios. En consecuencia, T es diagonalizable.

∎

Ejercicio 2. Sea

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ p &\mapsto T(p)(x) = x^2 p(x) \end{aligned}$$

I) Muestre que T es lineal e inyectiva. ¿Es también sobreyectiva?

Demostración. Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(p + \alpha q) &= x^2(p + \alpha q) \\ &= x^2 p + \alpha(x^2 q) \\ &= T(p) + \alpha T(q) \end{aligned}$$

y por tanto T es lineal.

Sea $r \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $T(r) = \theta$, con θ el polinomio nulo. Como $\deg(x^2 q) = 2 + \deg(q)$, tenemos que $2 + \deg(q) = -\infty$. Luego, $\deg(q) = -\infty$ y por tanto $q = \theta$. Concluimos que T es inyectiva.

Considere $s \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\deg(s) = 1$. Como $\deg(T(p)) = 2 + \deg(p)$, para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, para que $T(p) = s$, p debe tener grado -1, lo cual no es posible. Así, s no tiene pre-imagen y por tanto T no es sobreyectiva. ■

II) Determine $\sigma(T)$.

Recordemos que $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ tal que

$$T(p) = \lambda p$$

Sin embargo, como notamos anteriormente, $\deg(T(p)) = 2 + \deg(p)$ y por tanto no existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ que verifique la ecuación anterior. Así, $\sigma(T) = \emptyset$.

Ejercicio 3. Sean (u_n), (v_n) y (w_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ definidas por: $\forall n \in \tilde{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n, \\ v_{n+1} &= v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} &= -v_n + 4w_n. \end{aligned}$$

Encuentre una fórmula para u_n, v_n y w_n en función de n y u_0, v_0 y w_0.

Demostración. Notemos que el sistema se puede escribir en formato matricial como

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Por inducción es fácil probar que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Para calcular las matrices de la matriz de manera eficiente, basta diagonalizarla y ver que

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{P}$$

Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^n &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}}_{D^n} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{P} \\ &= \begin{bmatrix} 3^n & 2^n - 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^{n+1} - 3^n & 2(2^n - 3^n) \\ 0 & 2^n - 3^n & 2(3^n - 2^{n-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} u_n &= 3^n u_0 + (2^n - 3_n)v_0 + (3^n - 2^n)w_0 \\ v_n &= (2^{n+1} - 3^n)v_0 + 2(2^n - 3^n)w_0 \\ w_n &= (2^n - 3^n)v_0 + 2(3^n - 2^{n-1})w_0 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicio 4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Demuestre que si $(I - AB)$ es invertible, entonces $(I - BA)$ es invertible y

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$$

Demostración. Supongamos que $(I - BA)$ no es invertible. Es decir, la ecuación

$$(I - BA)x = \theta \tag{1}$$

tiene soluciones no triviales.

Sea $x \neq 0$ una solución no trivial de (1). Luego

$$\begin{aligned} & (I - BA)x = \theta \\ \iff & A(I - BA)x = \theta \\ \iff & (A - ABA)x = \theta \\ \iff & (I - AB)Ax = \theta \end{aligned}$$

Como $(I - AB)$ es invertible, entonces $Ax = \theta$. Sin embargo, al reemplazar esto en (1) obtenemos que

$$\begin{aligned} & (I - BA)x = \theta \\ \iff & x = BAx \\ \implies & x = B\theta \\ \iff & x = \theta \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $(I - BA)$ es invertible.

Más aún,

$$\begin{aligned}(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) &= I + B(I - AB)^{-1}A - BA - BAB(I - AB)^{-1}A \\ &= I - B(A + AB(I - AB)^{-1}A - (I - AB)^{-1}A) \\ &= I - B(I + AB(I - AB)^{-1} - (I - AB)^{-1})A \\ &= I - B(I - (I - AB)(I - AB)^{-1})A \\ &= I - B(I - I)A \\ &= I\end{aligned}$$

y de manera similar $(I + B(I - AB)^{-1}A)(I - BA) = I$. ■

2. Demuestre que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}0 \in \sigma(AB) &\iff \det(AB) = 0 \\ &\iff \det(A)\det(B) = 0 \\ &\iff \det(B)\det(A) = 0 \\ &\iff \det(BA) = 0 \\ &\iff 0 \in \sigma(BA)\end{aligned}$$

De la parte anterior podemos concluir que

$$AB - I \text{ es invertible} \iff BA - I \text{ es invertible}$$

con lo que es directo el corolario

$$AB - \lambda I \text{ no es invertible} \iff BA - \lambda I \text{ no es invertible}$$

aplicando el resultado recíproco para A y $\frac{1}{\lambda}B$.

Luego, para $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(AB) &\iff AB - \lambda I \text{ no es invertible} \\ &\iff BA - \lambda I \text{ no es invertible} \\ &\iff \lambda \in \sigma(BA)\end{aligned}$$

■

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr