UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Laboratorio 8: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias – 2^{da} parte.

Cálculo Numérico 521230/525240

Descargue los archivos `euler_explicito_2orden.m` y `euler_implicito_2orden.m` del módulo *Laboratorios* de la página Canvas del curso.

Ejercicio 1 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo clásico de este problema es el siguiente par de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden:

$$\begin{cases} c'(t) = 2c(t) - \alpha c(t)z(t) \qquad c(0) = c_0, \qquad t \in [0, t_f], \\ \\ z'(t) = -z(t) + \alpha c(t)z(t) \qquad z(0) = z_0, \qquad t \in [0, t_f], \end{cases}$$

donde t es el tiempo medido en años, la función c representa el número de conejos y la función z el número de zorros, ambos en el instante t, y α es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

1. Cuando $\alpha = 0$, conejos y zorros no interactúan. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales a lo largo de un año en el caso en que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Compruebe que en tal caso los conejos se reproducen, mientras los zorros se van muriendo de hambre.
2. Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es $\alpha = 0.01$ y que la población inicial es de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?
3. Repita la simulación anterior pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?

Ejercicio 2 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Considere el PVI de orden superior

$$\begin{cases} y''(x) &= -y(x) + x, \quad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1, \end{cases}$$

cuya solución exacta está dada por $y(x) = \cos(x) + x$.

1. Reduzca el PVI anterior a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
2. Resuelva el sistema obtenido en el ítem anterior usando el Método de Euler explícito, dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en 10 subintervalos de igual longitud.
3. Resuelva ahora el PVI obtenido anterior usando Euler implícito con la misma cantida de subintervalos.
4. Grafique en una misma figura la solución exacta y las soluciones numéricas obtenidas en los ítem 2 y 3, y compare los resultados.

Ejercicio 3 (ejercicio guiado por el/la ayudante). El PVI

$$\begin{cases} mx''(t) + kx'(t) + Rx(t) = f(t), \quad t \in [0, 20], \\ x(0) = x_0, \; x'(0) = x_1 \end{cases}$$

modela el moviemiento de un sistema masa–resorte–amortiguador ideal, donde $x(t)$ es la posición de la partícula cuya masa es m kg, su resorte es de constante R N/m y el amortiguador es de coeficiente de difusión k N/(m/s).

1. Reduzca este PVI de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
2. Resuelva el sistema obtenido en el ítem anterior con el método de Euler explícito y 100 subintervalos, considerando $f(t) = \sin(\pi t)$, $m = k = R = 1$ y los datos iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.
3. Grafique la solución e interprete los resultados obtenidos.

Ejercicio 4 (ejercicio para trabajo autónomo). El siguiente es el esquema de una reacción química

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & + & \mathrm{C} & \longrightarrow & \mathrm{S} & & \\ \mathrm{S} & + & \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{P} & + & \mathrm{C}. \end{array}$$

En ella los compuestos denotados por A y B reaccionan para formar P. Esta reacción ocurre en presencia de un catalizador C, la formación de S es consecuencia del catalizador.Denotando por $[X](t)$, la concentración de X en el instante de tiempo t de la reacción, (X puede ser A, B, P, C o S, $t \geq 0$) y suponiendo que en cada paso de la reacción anterior las concentraciones de las sustancias cambian de forma proporcional al producto de las concentraciones de las reactantes, éstas pueden modelarse por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$[\mathrm{A}]'(t) = -k_1[\mathrm{A}](t)\left(C_0 - [\mathrm{B}](t) + [\mathrm{A}](t)\right), \tag{1a}$$
$$[\mathrm{B}]'(t) = -k_2[\mathrm{B}](t)\left([\mathrm{B}](t) - [\mathrm{A}](t)\right), \tag{1b}$$

que modela las concentraciones de las sustancias A y B para todo $t \in [0, T]$ con $[\mathrm{A}](0) = [\mathrm{B}](0) = A_0$, mientras que, una vez determinadas éstas, las concentraciones de C, S y P satisfacen

$$[\mathrm{C}](t) = [C](0) - [\mathrm{S}](t), \qquad [\mathrm{S}](t) = [\mathrm{A}](t) - [\mathrm{B}](t), \qquad [\mathrm{P}](t) = A_0 - [\mathrm{B}](t).$$

Por último, introduciendo el cambio de variables

$$\alpha = \frac{[\mathrm{A}]}{A_0}, \qquad \beta = \frac{[\mathrm{B}]}{A_0}, \qquad \kappa = \frac{k_2}{k_1}, \qquad \lambda = \frac{C_0}{A_0}$$

se tiene el siguiente PVI

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)\left(\lambda - \beta(t) + \alpha(t)\right), \qquad \alpha(0) = 1, \tag{2a}$$
$$\beta'(t) = -\kappa\beta(t)\left(\beta(t) - \alpha(t)\right), \qquad \beta(0) = 1, \qquad t \in [0, T]. \tag{2b}$$

Fijemos $\kappa = 1$ y estudiemos el comportamiento del método de Euler explícito con $\lambda \in \{10, 1, 0.1\}$. Si $\lambda = 10$, tomamos $T = 100$ y a medida que disminuyamos el valor de λ a un décimo del valor anterior duplicaremos el de T. Esto lo hacemos porque el valor de λ es proporcional a la concentración inicial del catalizador y, a medida que esta concentración disminuye, las concentraciones de A y B durante la reacción disminuyen más lentamente. Para cada uno de los tres pares de valores (λ, T) $((10, 100), (1, 200), (0.1, 400))$:

1. resuelva (2) con el método de Euler explícito y un valor de N tal que $h = 0.02$.
2. Grafique, en dos figuras distintas, los pares (t, α), (t, β).

Con los gráficos obtenidos debe observar lo siguiente:

- *A medida que t crece las concentraciones de A y B disminuyen,*
- *para mayores valores de λ (que es equivalente a mayor concentración inicial del catalizador), las concentraciones de A y B decaen más rápidamente a cero,*
- *para menores valores de λ las concentraciones de A y B decaen con la misma rapidez,*
- *para valores mayores de λ la concentración de A disminuye más rápidamente que la de B.*

Ejercicio 5 (ejercicio para trabajo autónomo). Consideremos el siguiente modelo para describir la propagación de una epidemia en un grupo de N personas en un período de T semanas. Si $S(t)$ es el número de personas sanas al cabo de t semanas, $E(t)$, el número de personas enfermas y $M(t)$, el de personas muertas, las ecuaciones que describen la evolución en el tiempo de $S(t)$, $E(t)$ y $M(t)$ son

$$\begin{aligned} S' &= -c\,S\,E, \\ E' &= c\,S\,E - m\,E, \\ M' &= mE \end{aligned}$$

donde c y m son las constantes que describen la rapidez con que la enfermedad se transmite y la rapidez con que las personas enfermas mueren, respectivamente.
Si suponemos que el número inicial de personas muertas a causa de la enfermedad es cero y S_0 denota el número inicial de personas sanas, entonces se tiene que

$$S = S_0 e^{-\frac{c}{m}M}.$$

Además, como $S + E + M = N$, entonces $E = N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M$. Por lo tanto, M satisface

$$M' = m\left(N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M\right), \quad M(0) = 0, \quad t \in [0,\, 10]. \tag{3}$$

1. Resuelva el problema de valores iniciales (3) con `ode45`, suponiendo $N = 3000$, $E(0) = 150$, $m = 1.8$ y $c = 0.001$.
2. Dibuje, en un mismo gráfico, el número de personas sanas, muertas y enfermas en el período considerado (de 10 semanas).
3. ¿Al cabo de cuántas semanas aproximadamente se mantiene casi constante el número de personas sanas, enfermas y muertas en el grupo considerado?
4. ¿Cuál es el número de personas que ha muerto a causa de la enfermedad 8 semanas después de comenzada la epidemia?