UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 10 - Álgebra III (525201)
Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Dada la matriz definida por bloques $A_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix}$, donde I_n y J_n son matrices de dimensiones $n \times n$ con I_n la matriz identidad y J_n la matriz de la forma:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores y vectores propios de A_{2n}.
INDICACIÓN: Si $D_{2n} = |A_{2n} - \lambda I|$, muestre que $D_{2n} = \lambda(\lambda - 2)D_{2n-2}$.

Demostración. ■

Ejercicio 2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$. Considere la matriz $A = x \cdot y^t \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Demuestre que x es vector propio de A.

Demostración. Notemos que los elementos A_{ij} de la matriz están dados por

$$A_{ij} = x_i y_j$$

Calculando la componente i-ésima de Ax, denotada por $(Ax)_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} (Ax)_i &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_i y_j x_j \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_j \right) x_i \\ &= (x \cdot y) x_i \end{aligned}$$

Así, $Ax = (x \cdot y)x$ y por tanto x es vector propio de A asociado al valor propio $(x \cdot y)$. ■

b) Pruebe que todo vector no nulo ortogonal a y es vector propio de A.

Demostración. Sea $z \neq \theta$ un vector ortogonal a y, i.e. $z \cdot y = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
(Az)_i &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_i y_j z_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} y_j z_j \right) x_i \\
&= (z \cdot y) x_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

En consecuencia, $Az = \theta$ y z es un vector propio de A asociado al valor propio 0. ∎

c) Suponga que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Calcule todos los vectores propios de A. Demuestre que A es diagonalizable.

Demostración. De la parte *b*) tenemos que si $z \in \langle y \rangle^{\perp}$, entonces z es vector propio asociado a 0. Es decir, $Ker(A) = \langle y \rangle^{\perp}$ con dimensión $n-1$. Por tanto, basta tomar una base B de $\langle y \rangle^{\perp}$ para obtener $n-1$ vectores propios linealmente independientes.

De la parte *a*) tenemos que x es vector propio de A asociado a $\langle x, y \rangle \neq 0$. Por proposición vista en clases, tenemos que $B \cup \{x\}$.

Como $B' = B \cup \{x\}$ es un conjunto linealmente independiente de n vectores, entonces es una base de $\mathbb{R}^n$. Más aún, es una base de vectores propios y en consecuencia A es diagonalizable.

Notamos que los vectores propios de A son aquellos que están en $\langle y \rangle^{\perp}$ o en $\langle x \rangle$.

∎

Ejercicio 3. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ simétrica no invertible tal que:

$$Ker(A + I_3) = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

Encuentre $P, D \in M_3(\mathbb{R})$ con D matriz diagonal tal que $A = P^t D P$.

Demostración. Notamos que $Ker(A + I_3)$ es el subespacio propio de A asociado al valor propio -1. Luego, $-1 \in \sigma(A)$ con multiplicidad geométrica 2 y algebraica a lo menos 2.

Como A es no invertible, entonces $0 \in \sigma(A)$. Por exhaustividad concluimos que -1 es un valor propio doble y 0 es un valor simple. Así,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para determinar P de modo que $A = P^t D P$, debemos ortogonalizar la base de $Ker(A + I_3)$ y hallar un vector propio asociado a 0 mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 - x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}$$

∎

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica cuyos valores propios son todos no negativos. Muestre que existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = BB^t$.

Demostración. content... ■

Ejercicio 5 (Alternativa de Fredholm)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que exactamente una de las siguientes proposiciones se cumple:

1. $Ax = b$ tiene solución $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^t y = \theta_{\mathbb{R}^n}$ tiene solución $y \in \mathbb{R}^m$ con $\langle y, b\rangle \neq 0$.

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr