Funciones definidas mediante series.

- **Series de potencias.**
- **Funciones definidas mediante series de potencias.**
- **Funciones continuas no derivables en ningún punto.**

Series de potencias.

Def.: Una **serie de potencias** es una serie de funciones de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{con } c_n,\ x \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \quad \forall n \geq 0$$

Veremos que con cada serie de potencias su asocia un radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$ tal que la serie converge $\forall x : |x| < R$ y diverge $\forall x : |x| > R$.
(Si $|x| = R$, la serie puede converger o diverger.)

Recordemos dos criterios de convergencia de series que ya hemos demostrado:

Criterio de la raíz: Sean $a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \geq 0$, y $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Entonces:

a) $\alpha < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;

b) $\alpha > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge;

c) Si $\alpha = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ puede converger o diverger.

Criterio de Weierstrass: Sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \geq 0$.

Sean $a_n \geq 0$ tales que $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \geq 0$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E.

Def.: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, su **radio de convergencia** es

$$R := \frac{1}{\alpha} \qquad \text{con} \quad \alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|},$$

donde, recordemos, si $\alpha = 0$, $R = +\infty$ y si $\alpha = +\infty$, $R = 0$.

Teor.: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R.

a) Si $|x| < R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente.
b) Si $|x| > R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge.
c) Si $|x| = R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ puede converger o diverger.

Dem.: Sean $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ y $R := \frac{1}{\alpha}$, el radio de convergencia de la serie de potencias. Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\right) |x| = \alpha\, |x| \,.$$

Entonces:

a) $|x| < R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente.
b) $|x| > R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge.
c) $|x| = R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| = 1 \implies$ la serie puede converger o diverger.

Ejemplos:

Serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $\quad \alpha = \limsup \sqrt[n]{1} = 1 \implies R = \frac{1}{\alpha} = 1$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$ (como ya sabíamos).

Además, si $|x| < 1$, sabemos que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}.}$

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. $\quad \alpha = \limsup \sqrt[n]{n} = 1 \implies R = \frac{1}{\alpha} = 1$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. $\quad \alpha = \limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = +\infty \implies R = \frac{1}{\alpha} = 0$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ diverge $\forall x \neq 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Recordemos que $\boxed{\alpha = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.}$

$\implies 0 \leq \alpha \leq \limsup \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \limsup \frac{n!}{(n+1)!} = \limsup \frac{1}{(n+1)} = 0$

$\implies \alpha = 0 \implies R = \frac{1}{\alpha} = +\infty$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Funciones definidas mediante series de potencias.

Teor.: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, $\forall r > 0 : \ r < R$, la serie converge uniformemente en $[-r, r]$.

Dem.: $\forall x \in [-r, r]$, $|c_n x^n| \leq |c_n|\, r^n \quad \forall n \geq 0$.

Como $r < R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ converge.

Entonces, por el criterio de Weierstass, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$. $\square$

Corol.: Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Sea $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Entonces f es continua.

Dem.: Sea $x \in (-R, R) \implies |x| < R$. Sea $r : \ |x| < r < R$.

Por el teorema anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$.

Como $x \mapsto c_n x^n$ son continuas $\forall n \geq 0$, f es continua en $[-r, r]$

En particular f es continua en x. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Teor.: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, sea $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ la serie que se obtiene derivando la primera término a término.

Entonces, los radios de convergencia de ambas series coinciden.

Dem.: Los radios de convergencia de cada una las dos series son:

$$R := \frac{1}{\alpha} \text{ con } \alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \text{ y } R' := \frac{1}{\alpha'} \text{ con } \alpha' := \limsup \sqrt[n]{|n c_n|}.$$

Como $\alpha' = \lim \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \alpha$, entonces $R = R'$ $\square$

Corol.: Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Sea $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Entonces, f es derivable y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n \quad \forall x \in (R, R)$.

Dem.: Sea $x \in (-R, R)$. Entonces, $|x| < R$. Sea $r : |x| < r < R$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ convergen uniformemente en $[-r.r]$, entonces f es derivable en $[-r, r]$. y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$, $x \in [-r, r]$.

En particular f es derivable en x y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n \quad \forall x \in (R, R)$. $\square$

Ejemplos de aplicación:

Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Sol.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, para $x = \frac{1}{2}$.

Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con radio de convergencia $R = 1$.

La serie que se obtiene derivando término a término, $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, tambien tiene radio de convergencia $R = 1$ y, $\forall x : \; |x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En particular, $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$ $\square$

Obtener un desarollo en serie de potencias de la función $\log(1-x),\ 0<x<1.$
Usarlo para obtener una serie que converja a $\log 2$:

Sol.: Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n,$ cuyo radio de convergencia es $R=1.$

Entonces, $\forall x:\ 0<x<1,\ \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge uniformemente en $[0,x].$

Por lo tanto,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por otra parte, usando la suma de la serie geométrica,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-t)\Big|_{t=0}^{t=x} = -\log(1-x).$$

Entonces, $\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

Para obtener una serie que converja a $\log 2,$ procedemos así:

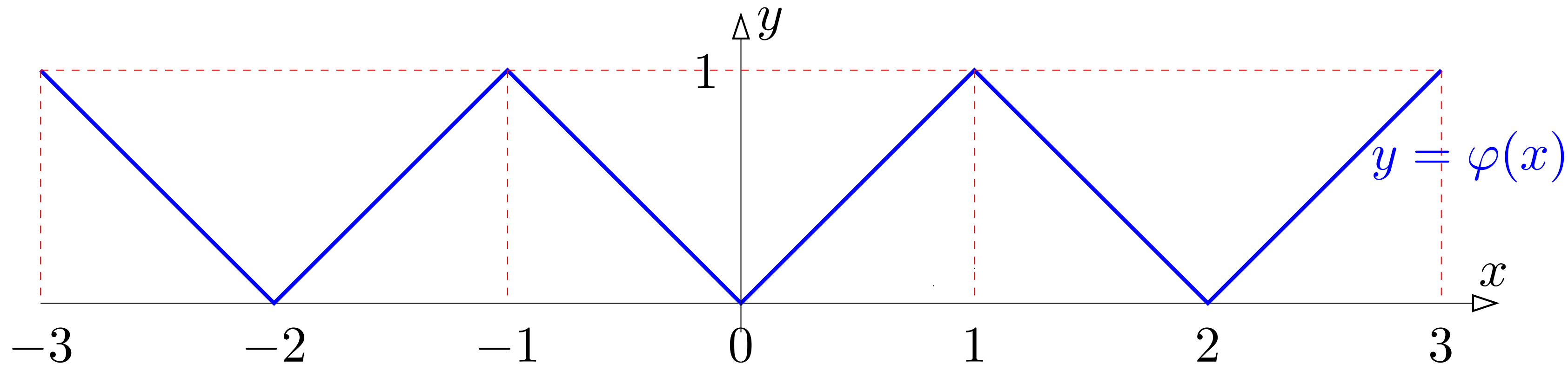
$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}. \quad \square$$

Por ejemplo, sumando los 10 primeros términos de la serie, se obtiene 0.69306...
que es una aproximación de $\log 2 = 0.693147\ldots$ con error menor que 10^{-4}.

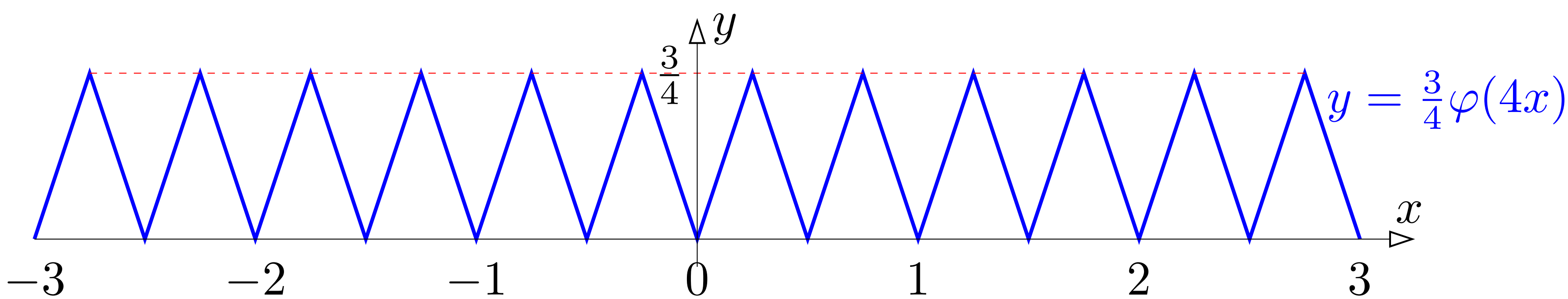
Funciones continuas no derivables en ningún punto.

Veremos que existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, que no son derivables en ningún punto de su dominio.

Para ello comenzaremos con la función $\varphi(x) := |x|\,,\ -1 \leq x \leq 1,$ extendida periódicamente a todo $\mathbb{R}$:

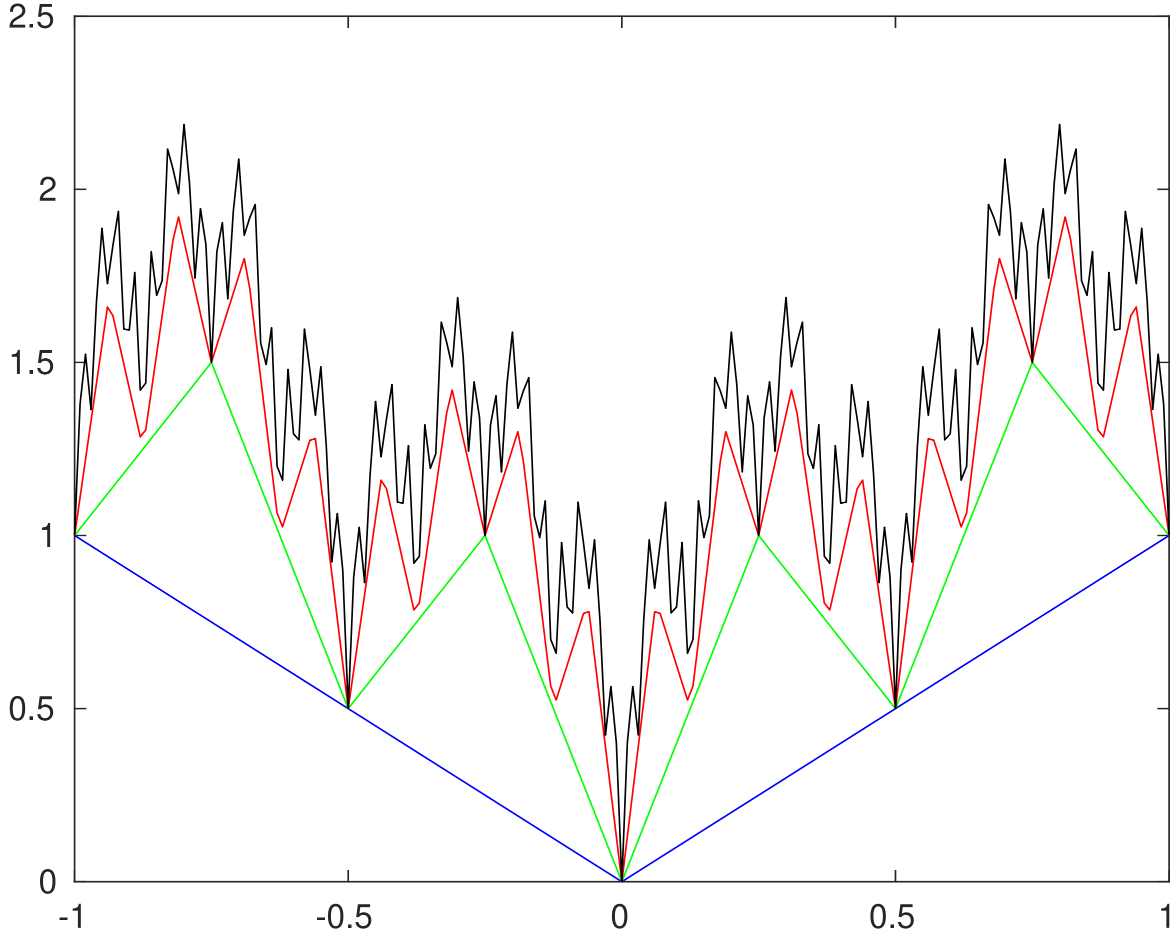


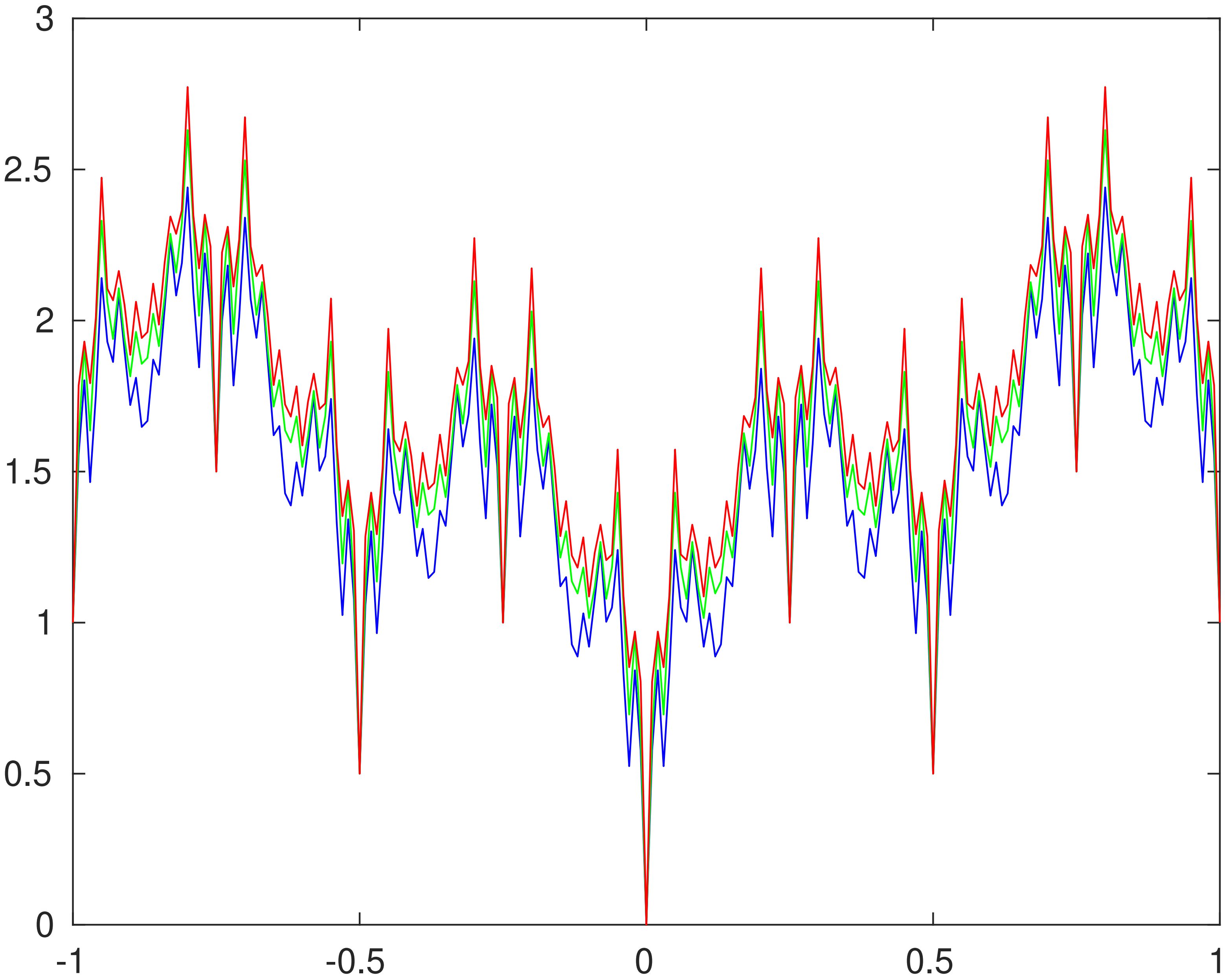
A esta función se le suma la función $\frac{3}{4}\varphi(4x)$:



Luego se suma $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(4^2 x)$, luego $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \varphi(4^3 x)$ y así sucesivamente.

La siguiente figura muestra las primeras cuatro sumas y la siguiente muestra la quinta, la sexta y la septima, en ambos casos restringidas al intervalo $[-1, 1]$.:




3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1

Notemos que según se añaden más términos de la forma $\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x),\ n \in \mathbb{N},$ en las gráficas de las funciones resultantes (que siempre son continuas) se observa más y más puntos en los que esas funciones no son derivables.

Consideremos la función que resulta al sumar todos los términos de de esta forma:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

Como $|\varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$ entonces $\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \ \forall x \in \mathbb{R},$

Por lo tanto, como $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge, por el criterio de Weierstass la serie que define $f(x)$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.

En consecuencia, como las funciones de la serie que define f son continuas en $\mathbb{R},$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, f no es derivable en ningún punto de su dominio.

La demostración de esto puede verse en el Teor. 7.18 de libro de Rudin.