1.2 Teorema de Existencia y Unicidad

Como antes, podemos definir el problema de valores iniciales de n-ésimo orden como:

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. *Considere el PVI dado por:*

$$\begin{cases} 2y'''(t) - 7y''(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Verifique que las soluciones del PVI son las funciones $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{3t/2}$ *y* $y_3(t) = e^{3t}$*. Veremos más adelante que de hecho, la solución general de la EDO* **debe tener la forma**

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t).$$

Debemos entonces determinar las constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ *de manera que se satisfagan las condiciones iniciales dadas.*

El siguiente resultado nos indica bajo qué condiciones un PVI con una EDO de segundo orden tiene solución y esta solución es única.

Teorema 1.1

[Teorema de Existencia y Unicidad]
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo abierto. Si* $a_n(x), \ldots, a_2(x), a_1(x), a_0(x), g(x)$ *son funciones continuas en* I*, con* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*. Entonces, para* $x_0 \in I$ *e* $y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$*, existe una única función* $f : I \to \mathbb{R}$ *que es solución de la ED (1) y además satisface las condiciones iniciales* $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_1, ..., f^{(n-1)} = y_{n-1}$*.*

Definición

Se llama **solución general** *de una EDO lineal de n-ésimo orden al conjunto de soluciones* $y = \phi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$*, que contiene* n *constantes arbitrarias* $c_1, c_2, ..., c_n$*. Llamaremos* **solución particular** *del PVI si es que existen constantes* $\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_n}$ *de modo que* $y = \phi(x, \overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_n})$ *es solución de la EDO y además satisface las* n *condiciones iniciales del PVI.*

Ejemplo 1.5. *Consideremos el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \\ y(2) = 0, y'(2) = -4. \end{cases}$$

Verifiquemos que la función $y = -\frac{5}{4}x^2 + x + 3$ *es solución única al PVI dado.*

Identificamos las funciones $a_2(x) = x^2, a_1(x) = -2x, a_0(x) = 2$ *y* $g(x) = 6$*. Todas estas funciones son continuas en* $\mathbb{R}$*, pero* $a_2(0) = 0$*. Podemos entonces aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad en el intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *siempre que* $0 \notin I$ *y* $2 \in I$*. Por ejemplo, podemos considerar* $I = (0, +\infty)$*, y por Teorema de Existencia y Unicidad aseguramos que la solución al sistema existirá y será única.*

Ahora, derivamos $y = -\frac{5}{4}x^2 + x + 3$ *dos veces y luego reemplazamos en la EDO asociada al PVI:*

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{5}{2}x + 1, \\ y'' &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= x^2\left(-\frac{5}{2}\right) - 2x\left(-\frac{5}{2}x+1\right) + 2\left(-\frac{5}{4}x^2+x+3\right) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Además, podemos observar que se cumplen las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(2) &= -\frac{5}{4}(2)^2 + 2 + 3 = 0, \\ y'(2) &= -\frac{5}{2}(2) + 1 = -4. \end{aligned}$$

Finalmente, como $y = -\frac{5}{4}x^2 + x + 3$ *satisface la EDO y cumple las condiciones iniciales, por unicidad tenemos que* $y = -\frac{5}{4}x^2 + x + 3$ *debe ser LA solución del PVI.*

Observación. *Las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, son muy importantes que se cumplan, ya que el PVI pueda que no tenga solución o, en caso que exista, que no sea única. Por ejemplo, si en el PVI del ejemplo anterior consideramos las condiciones iniciales*

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = 1,$$

entonces cualquier función de la forma $y(x) = c_1x^2 + x + 3$ *será solución del PVI. Es decir, tenemos infinitas soluciones.*

Teorema 1.2

[Principio de superposición de soluciones para EDO lineales]

Sea T *el operador diferencial lineal con coeficientes variables y continuos:*

$$T[\cdot] = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1}[\cdot] + a_{n-2}(x)D^{n-2}[\cdot] + \cdots + a_1(x)D[\cdot] + a_0(x)D^0[\cdot].$$

Para f_1 *y* f_2 *dos funciones continuas, sean* y_1 *una solución de la EDO:*

$$T[y](x) = f_1(x),$$

e y_2 *una solución de la EDO:*

$$T[y](x) = f_2(x).$$

Entonces, la suma de las soluciones $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ *es una solución para la EDO:*

$$T[y](x) = f_1(x) + f_2(x).$$

El Principio de superposición nos dice que si queremos resolver la EDO

$$T[y](x) = f(x),$$

con $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_M(x)$*, con* $f_i(x)$ *funciones para las cuales sepamos cómo resolver*

$$T[y](x) = f_i(x), i \in \{1, \ldots, M\}.$$

Entonces obtendremos la solución general de la EDO como la suma de la solución de estos problemas más simples.

Ejemplo 1.6. *Consideramos la EDO*

$$y''(x) + y(x) = x + e^x, \tag{3}$$

que se puede escribir como

$$T[y](x) = x + e^x,$$

con $T[y] = D^2[y] + D^0[y]$.

Se puede verificar que $y_1(x) = x$ *es solución de*

$$y''(x) + y(x) = x,$$

y que la función $y_2(x) = \frac{1}{2}e^x$ *es solución de*

$$y''(x) + y(x) = e^x.$$

Entonces, por el principio de superposición, $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = x + \frac{1}{2}e^x$ *es solución de la EDO* (3).