Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 2 — martes 12 de julio de 2022

Soluciones sugeridas

Problema 1. (12 puntos)

a) Se considera la función

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3.$$

Analizar si la función posee un extremo local en algún punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y determinar su naturaleza (máximo o mínimo).

b) Determinar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

Solución sugerida.

a) Aquí obtenemos $\operatorname{grad} f = (2x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_1, 2x_3 - 2)$. Un extremo local en $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ debe satisfacer $\operatorname{grad} f(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = (0, 0, 0)$, lo que entrega el sistema lineal $2x_{1,0} - x_{2,0} + 1 = 0$, $2x_{2,0} - x_{1,0} = 0$, $2x_{3,0} - 2 = 0$ con la solución

$$P_0 := (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right). \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Para poder aplicar el Teorema 3.10, se calculan las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0.$$

Todas son constantes, asi que la matriz Hessiana $A(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Considerando los determinantes de las submatrices principales

$$\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

concluimos que A es definida positiva, por lo tanto de acuerdo al Teorema 3.10 la función f posee un mínimo local en P_0. **2 puntos**

b) Queremos determinar los puntos de la superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - xy = 1\}$ que están más próximos al origen. Es decir, se pide minimizar la distancia $\tilde{f}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ sujeto a $z^2 - xy - 1 = 0$, o equivalentemente, se pide

$$\text{minimizar } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 \text{ sujeto a } g(x,y,z) := z^2 - xy - 1 = 0.$$

Sea λ el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $g(x,y,z) = 0$, entonces un punto cítico (candidato a extremo) (x_0, y_0, z_0) debe satisfacer las ecuaciones

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) - \lambda \operatorname{grad} g(x_0,y_0,z_0) = 0, \quad g(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

lo que representa un sistema algebraico de cuatro ecuaciones para x_0, y_0, z_0, y λ. En este caso, obtenemos las ecuaciones

$$2x_0 - \lambda y_0 = 0, \tag{1}$$

$$2y_0 - \lambda x_0 = 0, \tag{2}$$

$$2z_0 + 2\lambda z_0 = 0, \tag{3}$$

$$z_0^2 - x_0 y_0 - 1 = 0. \quad \boxed{\textbf{3 puntos}} \tag{4}$$

1.) Supongamos que $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. A partir de (1) obtenemos $\lambda = 2x_0/y_0$ y a partir de (2), $\lambda = 2y_0/x_0$, lo que implica $y_0 = x_0$ o $y_0 = -x_0$. Por otro lado, (4) implica $z_0 = 0$ (o $\lambda = -1$, lo que descartamos ya que ya sabemos que $\lambda = \pm 2$). Insertando la opción $(y_0 = x_0 \wedge z_0 = 0)$ en (4) obtenemos $x_0^2 + 1 = 0$, lo que no es factible; queda la posibilidad $(y_0 = -x_0 \wedge z_0 = 0)$, la que al insertar en (4) entrega $x_0 = 1$ o $x_0 = -1$. Así obtenemos los puntos

$$A(x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 0), \quad B(x_0 = -1, y_0 = 1, z_0 = 0). \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

La distancia al origen de A y B es $\tilde{f}(1,-1,0) = \tilde{f}(-1,1,0) = \sqrt{2}$.

2.) Para $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ tenemos los puntos $C = (0,0,1)$ y $D = (0,0,-1)$. Como

$$\tilde{f}(0,0,1) = \tilde{f}(0,0,-1) = 1 < \sqrt{2},$$

estos puntos son finalmente los que están más próximos al origen. **1 punto**

Problema 2. (12 puntos)

a) Se considera la función $\boldsymbol{f} = (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \bigl((x+y)^3, (x-y)^3\bigr), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Se puede aplicar el Teorema de Funciones Implícitas en $(x_0 = 0, y_0 = 0)$? ¿La funcíon $\boldsymbol{f}$ es invertible sobre $\mathbb{R}^2$, es decir se pueden despejar x e y a partir de $\boldsymbol{f}(x,y) = (u,v)$?

b) Sea $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \bigl(z\cos(xy), z\sin(xy), x+z\bigr).$$

Determinar el conjunto de puntos donde el teorema de la función inversa puede ser aplicado. Calcular la matriz jacobiana $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}^{-1}}$ de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en el punto $(1,0,2) = \boldsymbol{f}(1,0,1)$.

c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t, \int_y^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Demostrar que esta función posee una inversa en una bola B en centrada en el origen de coordenadas. Determinar $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}^{-1}}(0,0)$.

Solución sugerida.

a) Obtenemos

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 3(x+y)^2 & 3(x+y)^2 \\ 3(x-y)^2 & -3(x-y)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x=0, y=0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como el determinante de esta matriz es cero, no se puede aplicar el Teorema de Funciones Implícitas en este caso (es decir, el Teorema de Funciones inversas). No obstante, se pueden despejar x e y a partir de $\boldsymbol{f}(x,y) = (u,v)$ sobre $\mathbb{R}^2$: las ecuaciones

$$(x+y)^3 = u, \quad (x-y)^3 = v$$

implican

$$x + y = \sqrt[3]{u} = \operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}, \quad x - y = \sqrt[3]{v} = \operatorname{sgn}(v)|v|^{1/3},$$

luego

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}\right). \quad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

b) La matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(x,y,z) &= \frac{\partial(z\cos(xy), z\sin(xy), x+z)}{\partial(x,y,z)} \\ &= \begin{bmatrix} -yz\sin(xy) & -xz\sin(xy) & \cos(xy) \\ yz\cos(xy) & xz\cos(xy) & \sin(xy) \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con determinante $\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(x,y,z) = -zx$. El Teorema de la Función Inversa puede ser aplicado si $xz \neq 0$, es decir si $x \neq 0$ y $z \neq 0$. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Aquí obtenemos

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}^{-1}}(1,0,2) = \left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(1,0,1)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

c) Aquí obtenemos

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -g(x) & g(y) \\ 2xg(x^2) & -g(y) \end{bmatrix},$$

luego

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(0,0) = \begin{bmatrix} -g(0) & g(0) \\ 0 & -g(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(0,0) = 1 \neq 0$, esta función posee una inversa en una bola B en centrada en el origen de coordenadas. **3 puntos**

La matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}^{-1}$ en $(0,0)$ es

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}^{-1}}(0,0) = \big(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}}(0,0)\big)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ **1 punto**

Problema 3. (12 puntos)

a) Determinar el área de la región exterior al círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ e interior al círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 12x$, limitada por las rectas $y = x$ e $y + \sqrt{3}x = 0$.

b) Encontrar el centro de masa del sólido dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. (La densidad del volumen es constante.)

Solución sugerida.

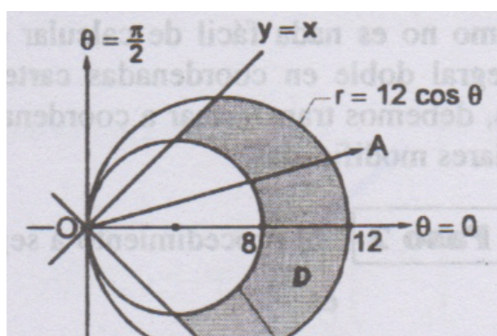
a) Tomando en cuenta que

$$x^2 + y^2 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 16,$$

queda claro que el círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ posee el centro $(4,0)$ y el radio 4; asimismo,

$$x^2 + y^2 = 12x \Leftrightarrow x^2 - 12x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = 36$$

corresponde a un círculo con centro $(6,0)$ y radio 6. El dominio en cuestión D puede ser dibujado como sigue:



Para determinar el área de D utilizamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, con el Jacobiano r. Ahora hay que expresar las fronteras de D en coordenadas polares:

1. El círculo $x^2 + y^2 = 8x$ se convierte en $r^2 = 8r\cos\theta$, donde nos interesa solamente $r = 8\cos\theta$.
2. Análogamente, $x^2 + y^2 = 12x$ se convierte en $r = 12\cos\theta$.

3. La recta $y = x \Leftrightarrow y/x = 1$ corresponde a $\tan\theta = 1$, es decir $\theta = \pi/4$ $(= 45°)$.
4. La recta $y = -\sqrt{3}x$ corresponde a $\tan\theta = -\sqrt{3}$, es decir $\theta = -\pi/3$ $(= -60°)$.

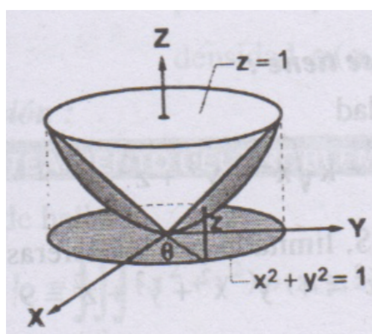
El vector radial OA al girar, en sentido antihorario, desde $\theta = -\pi/3$ hasta $\theta = \pi/4$, cubre toda la region D, es decir obtenemos como dominio de integración

$$E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 8\cos\theta \leq r \leq 12\cos\theta,\ -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/4\}$$

Así el área solicitada queda como

$$\begin{aligned}
|D| &= \iint\limits_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_E r\,\mathrm{d}(r,\theta) \\
&= \int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_{8\cos\theta}^{12\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=8\cos\theta}^{r=12\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 40\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 40\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=-\pi/3}^{\theta=\pi/4} = 5\pi + 10 + \frac{20}{3}\pi - 10\sin(-2\pi/3) \\
&= \frac{35}{3}\pi + 10 + 5\sqrt{3} \approx 55{,}3122. \quad \boxed{\textbf{6 puntos}}
\end{aligned}$$

b) Sean S_1 y S_2 las superficies correspondientes a $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 = z^2$, respectivamente, y sea S el sólido en cuestión, el cual puede ser graficado como sigue:



Intersectando S_1 con S_2 obtenemos $z^2 - z = 0$, es decir $z = 0$ o $z = 1$. Además, como S es simétrico con respecto al eje z, sabemos que si (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de su centro de masa, entonces $x_0 = y_0 = 0$. Queda por determinar

$$z_0 = \iiint\limits_S z\,\mathrm{d}(x,y,z) \Bigg/ \iiint\limits_S \mathrm{d}(x,y,z).$$

Ambas integrales pueden ser transformadas a coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ con el Jacobiano r. La superficie $x^2 + y^2 = z$ se convierte en $r^2 = z$ y la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ en $r^2 = z^2$, es decir $r = z$. Hay que integrar sobre

$$Q = \{(r,\theta,z) \mid r^2 \leq z \leq r,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Así,

$$\iiint\limits_S \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(r-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\cdot\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6},$$

$$\iiint\limits_S z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1\int_{r^2}^{r} zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=r^2}^{z=r}\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 (r^3-r^5)\,\mathrm{d}r$$

$$= \pi\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{12},$$

es decir $z_0 = 1/2$. El centro de masa es el punto $(0,0,1/2)$. **6 puntos**

Problema 4. (12 puntos)

a) Analizar los puntos críticos de la función

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto 2x^2 + 3y^4 + z^2 + 2yz \in \mathbb{R}$$

y discutir si cada uno de éstos es mínimo local, máximo local, o punto de silla.

b) Sea $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy \le 0\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \sin x + 2y(y+2).$$

Hallar los extremos locales y globales de f.

c) Sea $S := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \pi^2/4\}$ y $f : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1,x_2,x_3) = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3.$$

Hallar el mínimo y el máximo de f (si existen).

Solución sugerida.

a) Analizar los puntos críticos de la función

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto 2x^2 + 3y^4 + z^2 + 2yz \in \mathbb{R}$$

y discutir si cada uno de éstos es mínimo local, máximo local, o punto de silla.

b) Sea $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy \le 0\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \sin x + 2y(y+2).$$

Hallar los extremos locales y globales de f.

c) Sea $S := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \pi^2/4\}$ y $f : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1,x_2,x_3) = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3.$$

Hallar el mínimo y el máximo de f (si existen).

Solución sugerida.

a) A partir de $\nabla f(x,y,z) = (4x, 12y^3 + 2z, 2z + 2y)$ las co-ordenadas (x_0, y_0, z_0) de un punto crítico deben satisfacer $x_0 = 0$, $12y_0^3 + 2z_0 = 0$ y $2y_0 + 2z_0 = 0$, lo que da origen a los puntos críticos

$$P(0,0,0), \quad Q\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad R\left(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

La matriz hessiana en este caso viene dada por

$$\boldsymbol{H}_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 36y^2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz

$$\boldsymbol{H}_f(P) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

es indefinida, por lo tanto P es un punto de silla; por otro lado,

$$\boldsymbol{H}_f(Q) = \boldsymbol{H}_f(R) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva porque

$$\begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0,$$

por lo tanto f posee minimos locales en P y Q. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

b) A partir de $\nabla f(x,y) = (\cos x, 4y+4)$ como puntos críticos de f sobre D

$$P_k = ((k+1/2)\pi, -1), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Considerando la matriz hessiana

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\boldsymbol{H}_f(P_k) = \begin{bmatrix} -\sin((k+1/2)\pi) & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-1)^k & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

luego $\boldsymbol{H}_f(P_k)$ es indefinida [definida positiva] y f posee un punto de silla [mínimo local] en P_k para $k=0$ y k par [k impar]. Notamos que $f(P_k) = (-1)^k - 2$ en estos puntos. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Por otro lado, para hallar los extremos globales, hay que examinar la frontera de D, comenzando por $x=0$ e $y \in \mathbb{R}$. notamos que $f(0,y) = 2y(y+2)$; esta función asume su mínimo en $y=-1$ pero $f(P_1) < f(0,-1)$, por lo tanto no se trata de un mínimo global; por otro lado, para $y \to \pm\infty$ se tiene $f(0,y) \to \infty$. A su vez, para $x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ se tiene $f(x,0) = \sin x$; los mínimos de esta función están localizados en $x = (3/2 + 2m)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; se tiene $f((3/2 + 2m)\pi, 0) = -1$; los máximos de esta función están en $x = (1/2+2m)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; se tiene $f((1/2+2m)\pi, 0) = 1$. Combinando toda la información concluimos que f no posee un máximo global pero sí un mínimo global, $f(P_k) = -3$ asumido en todos los puntos P_k con k impar. **2 puntos**

c) El problema puede ser descrito como: Hallar un extremo de la función f bajo la restricción

$$g(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0. \tag{5}$$

Como el conjunto S es compacto, o bien $\tilde{S} := S \cap (\mathbb{R}_0^+)^3$ es compacto, la función f asume su mínimo y máximo sobre $\tilde{S}$. Para identificar el mínimo, observamos que $(x_1, x_2, x_3) \in S$ implica que $-\frac{\pi}{2} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}$, luego $\cos x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ sobre S, y efectivamente

$$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in S} = f\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = f\left(0, \pm\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(0, 0, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

Para identificar el máximo de f, notamos primero que podemos limitarnos a $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, ya que debido simetrías,

$$f(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3) = f(x_1, x_2, x_3); \quad g(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$$

para cualquier distribución de signos. Como el máximo es asumido sobre S o $\tilde{S}$, existe un multiplicador de Lagrange λ tal que $\operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \lambda \operatorname{grad} g(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$; en nuestro caso,

$$\begin{pmatrix} -\sin x_1^0 \\ -\sin x_2^0 \\ -\sin x_3^0 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Claramente se tiene $\lambda \neq 0$, por que si fuera $\lambda = 0$, entonces $\sin x_1^0 = \sin x_2^0 = \sin x_3^0 = 0$, es decir $x_1^0, x_2^0, x_3^0 \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, lo que es incompatible con (5).

(i) Supogamos, además, que $x_1^0, x_2^0, x_3^0 > 0$ y consideremos las ecuaciones

$$2\lambda = \frac{\sin x_1^0}{x_1^0} = \frac{\sin x_2^0}{x_2^0} = \frac{\sin x_3^0}{x_3^0}.$$

Como la función $t \mapsto h(t) := \sin t/t$ es injectiva sobre $(0, \frac{\pi}{2}]$ y si φ denota su inversa, obtenemos como solución única

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = \varphi(2\lambda),$$

luego

$$3(x_1^0)^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow x_1^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Obtenemos

$$f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 3\cos\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 1{,}8486. \quad \boxed{\textbf{2 puntos}} \tag{7}$$

(ii) Otra solución de (6) corresponden a $x_1^0 = 0$, $x_2^0 > 0$, $x_3^0 > 0$. En este caso

$$2(x_2^0)^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow x_2^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

luego

$$f\left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}8880.$$

Este punto satisface (6), pero no genera un extremo de f que supere (7).

(iii) Otra solución de (6) corresponde a o bien $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 > 0$. En este caso $x_3^0 = \frac{\pi}{2}$, pero

$$f\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

la cual representa el mínimo de f ya discutido. **1 punto**

Problema 5. [12 puntos]

a) Sea U la región entre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Calcular

$$\iiint_U \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

b) Hallar el volumen del sólido encerrado por

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2\right)^2 = \frac{x}{2}, \tag{8}$$

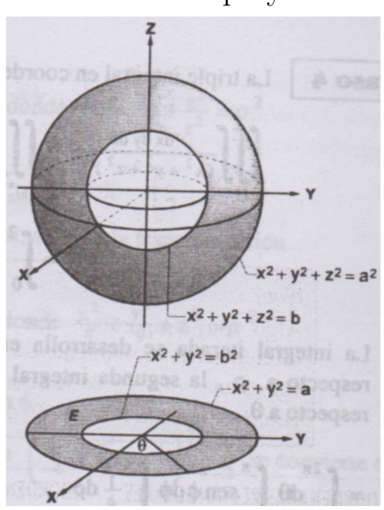
utilizando la transformación de coordenadas

$$x = a\,r\sin\phi\cos\theta, \quad y = b\,r\sin\phi\sin\theta, \quad z = c\,r\cos\phi,$$

con a, b, c constantes apropiadas.

Solución sugerida.

a) Éste es el conjunto U conjuntamente con su proyección sobre el plano (x, y):



Para calcular la integral se usan coordenadas esféricas

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\phi$$

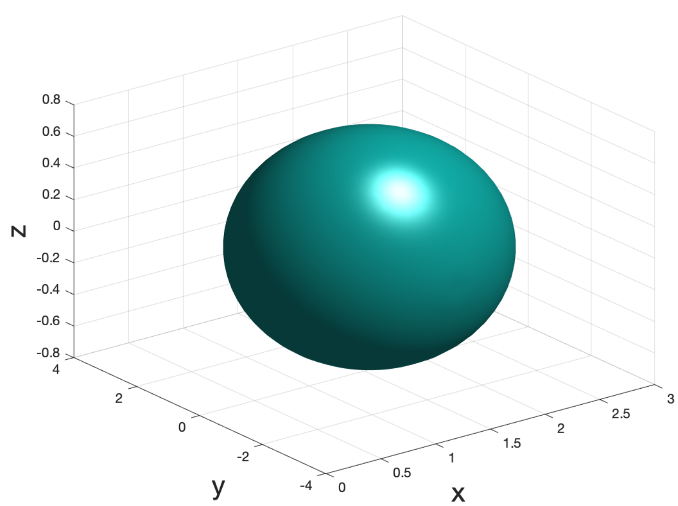
con el jacobiano $r^2\sin\phi$. Evidentemente, $(x,y,z)\in U$ si y sólo si

$$(r,\phi,\theta)\in\tilde{U} := \big\{(r,\phi,\theta) \mid b\leq r\leq a,\ 0\leq\phi\leq\pi,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\big\}. \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Sea $\mathcal{I}$ la integral solicitada, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \iiint\limits_{\tilde{U}} \frac{1}{r^3} r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a \frac{\sin\phi}{r}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\big[\ln r\big]_{r=b}^{r=a}\,\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta = \ln\frac{a}{b}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \ln\frac{a}{b}\int_0^{2\pi}\big[-\cos\phi\big]_{\phi=0}^{\phi=\pi}\,\mathrm{d}\theta = 2\ln\frac{a}{b}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 4\pi\ln\frac{a}{b}. \quad \boxed{\textbf{4 puntos}}\end{aligned}$$

b) Este es el cuerpo en cuestión:



El término $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2$ sugiere elegir $a=2$, $b=3$ y $c=1$, luego el jacobiano de la transformación queda $abcr^2\sin\phi = 6r^2\sin\phi$, y la ecuación (8) se convierte en

$$r^4\sin\phi\cos\theta \Rightarrow r = (\sin\phi\cos\theta)^{1/3},$$

es decir para ϕ y θ dados, $0\leq r\leq(\sin\phi\cos\theta)^{1/3}$. Por otro lado, a partir de (8) deducimos que $x/2\geq 0$, ya que $x/2$ debe ser igual a un cuadrado, es decir $x\geq 0$ o equivalentemente, $\sin\phi\cos\theta\geq 0$. Considerando que $z = cr\cos\phi$ para $\phi\in[0,\pi]$, la opción $\sin\phi\leq 0$ y $\cos\theta\leq 0$ deja sólo los valores $\phi=0$ o $\phi=\pi$, es decir no se produce un intervalo de integración. Por lo tanto, consideremos $\sin\phi\geq 0$ y $\cos\theta\geq 0$, es decir $0\leq\phi\leq\pi$ y $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, luego si S es el cuerpo descrito en el planteamiento y

$$\tilde{S} := \left\{(r,\phi,\theta)\middle| 0\leq\phi\leq\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq r\leq(\sin\phi\cos\theta)^{1/3}\right\}, \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

el volumen solicitado es

$$
\begin{aligned}
|S| &= \iiint\limits_S \mathrm{d}(x,y,z) = \iiint\limits_{\tilde{S}} 6r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta \\
&= 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{(\sin\phi\cos\theta)^{1/3}} r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta \\
&= 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \sin\phi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^{r=(\sin\phi\cos\theta)^{1/3}} \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \sin^2\phi \cos\theta \,\mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left(\int_0^{\pi} \sin^2\phi \,\mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \mathrm{d}\theta = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = 2\pi. \quad \boxed{\textbf{2 puntos}}
\end{aligned}
$$