tarea 2 : optimización III

Brayan sandoval.

P1|

a) si $P=NP$, entonces existe $Q \in Co\,NP$-completo que también está en P. V

dem: supongo $P=NP$, además sea $Q \in Co\,NP$-completo $\iff Q \in Co\,NP$ $\wedge$ $Q \in Co\,NP$-hard $\iff \bar{Q} \in NP$ $\wedge$ $\bar{Q} \in NP$-hard

obs: la demostración nos da a entender que el resultado se puede extender a cualquier $Q \in Co\,NP$-completo

dado que $P=NP$, se tiene que $\bar{Q} \in P$ luego por resultado mostrado en el listado 3 (P2.a)

$$\bar{Q} \in P \iff Q \in P$$

mostrando lo pedido. ■

b) todo problema $Q \in P$ verifica que $Q \leq_p \overline{CLIQUE}$.

dem: sea $Q \in P \iff \bar{Q} \in P$, como CLIQUE es NP-completo (visto en clases Pag 14 apunte sobre complejidad temporal) entonces se tiene que
$CLIQUE \in NP\text{-Hard} \iff \forall R \in NP,\ R \leq_p CLIQUE$
dado que $P \subset NP$ se puede deducir que

$$\forall R \in P,\ R \leq_p CLIQUE$$

ahora por resultado mostrado en el listado 3 del curso (P2 b)

$$\bar{Q} \leq_p CLIQUE \iff \bar{\bar{Q}} \leq_p \overline{CLIQUE} \iff Q \leq_p \overline{CLIQUE}$$

como Q era fijo pero arbitrario en P, se deduce lo pedido. ■

Escaneado con CamScanner

c) Si existe un camino de peso mínimo de s a u. (con $u \neq s$. en $G=(N,A)$ con función de peso $\omega: A \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un camino de peso mínimo de s a u en G, con respecto a ω, sin repetición de vértices. V

dem: Sea P un camino de peso mínimo de s a u, notemos que si P tiene un vértice repetido, entonces necesariamente hay un ciclo que empieza y termina en dicho vértice. Este ciclo debe tener peso igual a cero, pues si ~~no~~ tiene peso mayor estricto que cero el peso del camino P sin el ciclo será menor al peso del camino con el ciclo ~~y~~ si el ciclo tiene peso negativo, entonces $\omega(P)=-\infty$ pues podríamos recorrer "infinitamente" el ciclo y así reducir el peso de P, en otras palabras, el peso no está acotado inferiormente.
Si el ciclo tiene peso igual a cero, entonces, el camino tendrá el mismo peso que el camino sin el ciclo (P') y como P era un ciclo de peso mínimo $\Rightarrow$ P' que es el camino de s a u sin ciclos (y por tanto sin vértices repetidos) es de peso mínimo ∎

Escaneado con CamScanner

¿P es un camino de peso mínimo de s a v en un digrafo $G = (V, A)$ con respecto a funciones de peso w y w', entonces P es un camino de peso mínimo con respecto a $w+w'$. V

dem: por hipótesis $w(P) = \delta(s,v)$ y $w'(P) = \delta'(s,v)$, deseamos mostrar que $(w+w')(P) = \hat{\delta}(s,v)$ con $\hat{\delta}(s,v) = \begin{cases} \inf\{(w+w')(P) : P \text{ camino de } s \text{ a } v\} & \text{si existe un camino} \\ -\infty & \text{c.o.c.} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \inf\{w(P)\} + \inf\{w'(P)\} \\ -\infty \end{cases}$$

~~notamos~~

$$= \delta(s,v) + \delta'(s,v)$$

notemos que para el camino $P: v_1, \dots, v_r$, con $r \in \mathbb{N}$

$$(w+w')(P) = \sum_{i=1}^{r-1} (w + w')(v_i, v_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} [w(v_i, v_{i+1}) + w'(v_i, v_{i+1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} w(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=1}^{r-1} w'(v_i, v_{i+1})$$

$$= w(P) + w'(P)$$

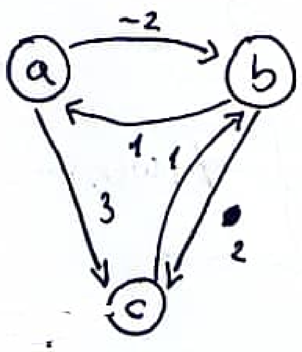
$$= \delta(s,v) + \delta'(s,v)$$

$$= \hat{\delta}(s,v)$$

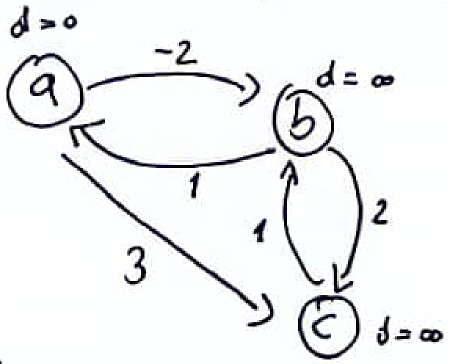
$\therefore$ P es un camino de peso mínimo respecto a $w+w'$. ∎

e) El algoritmo Dijkstra resuelve PCC desde un vértice s con pesos en los arcos todos positivos excepto en uno de peso negativo que sale desde s. F.

Sol: ~~Veamos que~~ Sea el grafo



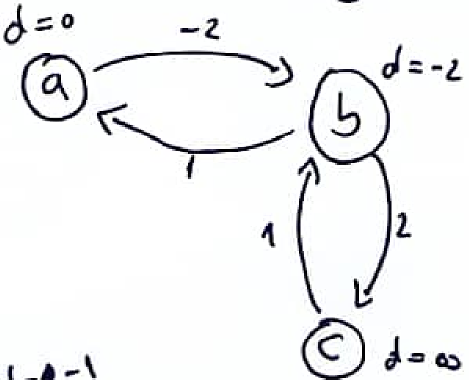
Si aplicamos dijkstra en el vértice $a \in V$, en alguna iteración obtendremos que $d[a] < 0$



inicio: $s = a$

$Q = \{a, b, c\}$; $S = \phi$

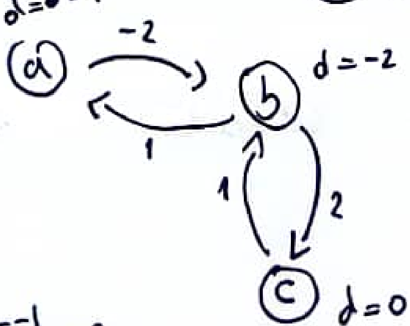
$\pi[s] = NULL$



$t=1$: $Q = \{b, c\}$, $S = \{a\}$

$\pi[b] = a$

$d[b] = -2$

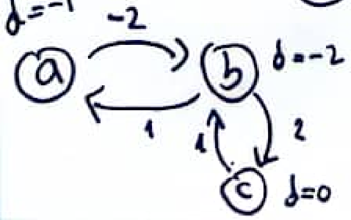


$t=2$: $Q = \{c\}$, $S = \{a, b\}$

$\pi[a] = \pi[c] = b$

$d[a] = -1$

$d[c] = 0$



$t=3$: $Q = \phi$: $S = \{a, b, c\}$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Demuestra que SCYCLE está en P.

Sol: se define el algoritmo

---

algorithm : SCYCLE(G, w, s, K)

```
input: G = (V, E) un digrafo, s ∈ V y
  w : E → R⁺ función de peso y K ∈ N
for all u ∈ V do
    π[u] ← NULL, d[u] ← ∞
end for
d[s] ← 0, Q ← V, S ← ∅
while Q ≠ ∅ do                                   O(|V|)
    extraer u ∈ Q tal que                        O(|V|)
    d[u] = min{ d[a] : a ∈ Q }                   O(|V|)
    S ← S ∪ {u}
    for all v ∈ V vecino de u do                 O(|E|) = O(|V|²)
        if d[v] > d[u] + w(u,v) then
            d[v] ← d[u] + w(u,v), π[v] ← u
            if (v,s) ∈ E y d[v] + w(v,s) ≤ K then      O(|V|²)
                return S                                O(1)
            end if
        end if
    end for
end while
Return no
```

---

luego SCYCLE es polinomial respecto a las entradas y

$$\mathcal{O}(|V|) + \mathcal{O}(|V|)\cdot\mathcal{O}(|V|) + \mathcal{O}(|V|^2) + \mathcal{O}(|V|^2) = \mathcal{O}(|V|^4)$$

por lo que el algoritmo es polinomial, es decir, SCYCLE $\in P$. ■

b) Pruebe que LCYCLE es NP-Completo.

dem: notemos que LCYCLE $\in$ NP-completo $\Leftrightarrow$ LCYCLE $\in$ NP $\wedge$ LCYCLE $\in$ NP-hard.

veamos que LCYCLE $\in$ NP. para esto se define el algoritmo

---

algorithm: verificador LCYCLE

---

input: $G=(V,A)$ digrafo, $K\in\mathbb{N}$ y ω una funcion peso, y $s\in V$. y el verificador $Y = \{$ secuencias de vertices de G que contienen a s $\}$

1: if Y es un ciclo de G $\mathcal{O}(n)\cdot\mathcal{O}(n^2)=\mathcal{O}(n^3)$

y $\omega(Y)\geq K$

notemos que size$(Y)=\mathcal{O}(|V|)$

2: return s

3: end if

4: return n.

Luego el algoritmo es polinomial

para mostrar que LCYCLE $\in$ NP-hard, notemos que si logramos mostrar que $Q\leq_p$ LCYCLE donde $Q\in$ NP-hard, por transitividad de $\leq_p$ se puede deducir que LCYCLE $\in$ NP-hard

Si usamos ~~HAMCYCLE HAM~~ Q = HAMILTONIAN

debemos encontrar $f: I_H \to I_{LC}$ tal que

~~HAMILTONIAN(G) = s $\Leftrightarrow$~~

$\forall x\in I_H$: HAMILTONIAN(x) = s $\Leftrightarrow$ LC$(f(x))$ = s (1)

, como $f: I_H \longrightarrow I_{LC}$

$$f(G=(V,E)) = (G'=(V',E'))$$

con $\omega: E' \longrightarrow \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}$

con $V = V'$ y $E = E'$

como Hamiltonian funciona para grafos sin peso, definiremos un nuevo grafo con peso 1 en cada arista, para así usar LC

$$\omega: E' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto \omega(u,v) = 1 \quad , \quad K = |V| \quad (*)$$

Veamos que se cumple (1)

($\Rightarrow$) hip Hamiltonian $(x) = s$, $\forall x \in I_H$

Sea G un grafo tal que es un ciclo hamiltoniano, se puede redefinir G' como en $(*)$. así, G' es un grafo con peso igual a 1 en cada arista y como es Hamiltoniano ~~tener~~ peso el ciclo tiene peso $|V| = n$, así, G' tiene un ciclo tal que el peso $\omega(G') = n = K = |V|$ por lo que es una instancia positiva en L_C

($\Leftarrow$) hip $L_C(f(x)) = s$

Sea G' un grafo tal que tiene un ciclo con peso mayor o igual a $K = |V|$, entonces dado que cada arista tiene peso igual a 1 se deduce que el grafo G' es un ciclo que recorre a todos sus vértices, es decir, G' es un ciclo Hamiltoniano dado que G es el grafo G' sin pesos, evidentemente también es un grafo hamiltoniano, por lo que es una instancia afirmativa en Hamiltonian finalmente debemos probar que f es calculable en tiempo polinomial. Notemos que f transforma un grafo sin pesos ~~pesos en grafo~~ en las aristas a un grafo con peso igual a 1 en cada arista, como este proceso consiste en ir arista por arista definiendo $w(u,v)=1$, $\forall u,v \in V$, se tiene que la cantidad de operaciones que se deben ejecutar es del orden $O(|E|) = O(|V|^2)$ lo cual es polinomial.

de esta forma

$$\text{HAMILTONIAN} \leq_p \text{LCYCLE}$$

dado que HAMILTONIAN $\in$ NP-Hard, se tiene por transitividad que LCYCLE $\in$ NP-Hard.

$\therefore$ LCYCLE $\in$ NP-completo. $\blacksquare$