UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo / Indicaciones de algunos ejercicios Listado 9 (2021-I)

Primero revisaremos unas propiedades importantes. En lo que sigue, consideraremos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, pudiendo ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Problema 1. Sea $C := \{z_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ un conjunto ortogonal. Entonces C es linealmente independiente.
PROOF: Recordamos: C es conjunto ortogonal si y sólo si $\forall\, j, \ell \in \{1, ..., k\}\,,\, j \neq \ell \,:\, \langle z_j, z_\ell\rangle = \delta_{j\ell}$.
Consideremos la combinación lineal de elementos de C que da el vector nulo, i.e. sean $\{\alpha_j\}_{j=1}^k \subseteq \mathbb{K}$ tales que

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j\, z_j \,=\, \theta_V\,.$$

Fijamos ahora $\ell \in \{1, ..., k\}$. Tenemos, aplicando propiedades de producto interior:

$$\left\langle \sum_{j=1}^k \alpha_j\, z_j, z_\ell \right\rangle \,=\, \langle \theta_V, z_\ell\rangle \,=\, 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j\, \langle z_j, z_\ell\rangle \,=\, 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_\ell \,=\, 0\,.$$

Como $\ell \in \{1, ..., k\}$ es fija pero arbitraria, se deduce que $\forall\, j \in \{1, ..., k\} \,:\, \alpha_j \,=\, 0$ y por tanto C es l.i.

Problema 2. Sea $C := \{z_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ un conjunto ortogonal. Entonces

$$\forall\, u \in \langle C\rangle \,:\, u \,=\, \sum_{j=1}^k \frac{\langle u, z_j\rangle}{||z_j||^2}\, z_j\,.$$

PROOF: Es dejado al lector como ejercicio.

Problema 3. Sea U un subespacio de V, $\{u_j\}_{j=1}^m$ una base de U, y $B := \{u_j\}_{j=1}^m \cup \{w_k\}_{k=1}^n$ una base de V (i.e. V es finito dimensional). Sea $\tilde{B} := \{x_j\}_{j=1}^m \cup \{y_k\}_{k=1}^n$ la base ortonormal que resulta de aplicar el PROCEDIMIENTO DE GRAM-SCHMIDT a la lista de vectores dada por B (respetando el orden). Demuestre que $\{x_j\}_{j=1}^m$ es una base ortonormal de U, mientras que $\{y_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de $U^\perp$. Esto permite caracterizar / definir explícitamente la PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR CUALQUIERA DE V SOBRE U, por ejemplo. Hacerlo.
DESARROLLO: Primero, en virtud al PROCEDIMIENTO DE GRAM-SCHMIDT (respetando el orden de los vectores en la base ortonormal), se garantiza que $\langle\{u_j\}_{j=1}^m\rangle \,=\, \langle\{x_j\}_{j=1}^m\rangle$. En consecuencia, $\{x_j\}_{j=1}^m$, al ser conjunto ortonormal, es l.i. Como genera U, será una base ortonormal de U.

Por otro lado, sea $W := \langle\{y_k\}_{k=1}^n\rangle \subseteq V$. Hay que probar ahora que $W \,=\, U^\perp$.

VEAMOS QUE $W \subseteq U^\perp$. Sea $z \in W$ fija pero arbitraria. Entonces $\exists\,\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que $z \,=\, \displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, y_k$. Consideremos ahora $s \in U$, fijo pero arbitrario. Luego, $\exists\,\{\beta_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{K}$ tales que $s \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^m \beta_j\, x_j$.

$$\langle z, s\rangle \,=\, \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k\, y_k, \sum_{j=1}^m \beta_j\, x_j \right\rangle \,=\, \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_k\, \overline{\beta_j}\, \langle y_k, x_j\rangle \,=\, 0 \quad (\text{¿Por qué?})$$

Esto permite establecer que $\forall\, s \in U \,:\, \langle z, s\rangle \,=\, 0$, por lo cual $z \in U^\perp$. Siendo $z \in W$ fija pero arbitraria, se concluye que $W \subseteq U^\perp$.
VEAMOS QUE $U^\perp \subseteq W$. Sea $z \in U^\perp$. Como $\tilde{B}$ es una base ortonormal de V, $\exists\,\{\alpha_j\}_{j=1}^m, \{\beta_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{K}$, tales que $z \,=\, \displaystyle\sum_{j=1}^m \alpha_j\, x_j \,+\, \sum_{k=1}^n \beta_k\, y_k$. Sea ahora $\ell \in \{1, ..., m\}$ fija pero arbitraria. Tenemos

$$0 \,=\, \langle z, x_\ell\rangle \,=\, \left\langle \sum_{j=1}^m \alpha_j\, x_j \,+\, \sum_{k=1}^n \beta_k\, y_k, x_\ell \right\rangle \,=\, \sum_{j=1}^m \alpha_j\, \langle x_j, x_\ell\rangle \,+\, \sum_{k=1}^n \beta_k\, \underbrace{\langle y_k, x_\ell\rangle}_{=0} \,=\, \alpha_\ell\,. \quad (\text{¿Por qué?})$$

Esto permite asegurar que $\forall\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, \alpha_j \,=\, 0$, y por lo tanto se infiere que $z \in \langle\{y_k\}_{k=1}^n\rangle \,=\, W$. Como $z \in U^\perp$ es fija pero arbitraria, se concluye que $U^\perp \subseteq W$
CONCLUSIÓN: $W \,=\, U^\perp$. En consecuencia, $\{y_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de $U^\perp$.

CONSECUENCIA: De lo anterior, se puede deducir una estrategia para definir la PROYECCIÓN ORTOGONAL DE V SOBRE EL SUBESPACIO U, $\text{Proj}_U : V \to U$. Considerando la BASE ORTONORMAL $\tilde{B} := \{x_j\}_{j=1}^m \cup \{y_k\}_{k=1}^n$, de V, esta transformación viene caracterizada por lo siguiente:

$$\forall\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, \text{Proj}_U(x_j) \,=\, x_j \quad \wedge \quad \forall\, k \in \{1, ..., n\} \,:\, \text{Proj}_U(y_k) \,=\, \theta\,.$$

Luego, para $z \in V$, fija pero arbitraria, se puede deducir (¡Hacerlo!) que $z = \sum_{j=1}\langle z, x_j\rangle\, x_j + \sum_{k=1}^{n}\langle z, y_k\rangle\, y_k$. Se infiere así, aprovechando la linealidad de Proj_U,

$$\text{Proj}_U(z) \,=\, \sum_{j=1}^{m}\langle z, x_j\rangle\, \text{Proj}_U(x_j) \,+\, \sum_{k=1}^{n}\langle z, y_k\rangle\, \text{Proj}_U(y_k) \,=\, \sum_{j=1}^{m}\langle z, x_j\rangle\, x_j\,.$$

Siendo $z \in V$ fija pero arbitraria, se concluye

$$\forall\, z \in V \,:\, \text{Proj}_U(z) \,:=\, \sum_{j=1}^{m}\langle z, x_j\rangle\, x_j\,.$$

OBSERVACIONES:

1. También podría considerarse una BASE ORTOGONAL de V. Si ésta fuera $\hat{B} := \{a_j\}_{j=1}^m \cup \{b_k\}_{k=1}^n$, se considera la BASE ORTONORMAL INDUCIDA por $\hat{B}$, $\hat{B}_o := \left\{\frac{a_j}{||a_j||}\right\}_{j=1}^{m} \cup \left\{\frac{b_k}{||b_k||}\right\}_{k=1}^{n}$. Aplicando lo anterior se deduce que
$$\forall\, z \in V \,:\, \text{Proj}_U(z) \,:=\, \sum_{j=1}^{m}\frac{\langle z, a_j\rangle}{||a_j||^2}\, a_j\,.$$

2. En forma similar, se puede definir $\text{Proj}_{U^\perp}$ considerando una BASE ORTONORMAL U ORTOGONAL de V. Se deja al lector su deducción.

Problema 4. Considere la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall\, x \,:=\, (x_1, x_2, x_3), y \,:=\, (y_1, y_2, y_3) \,\in\, \mathbb{R}^3 \,:\, \langle x, y\rangle_\bullet \,:=\, x_1\, y_1 \,+\, 2\, x_2\, y_2 \,+\, x_3\, y_3 \,-\, x_1\, y_2 \,-\, x_2\, y_1\,.$$

(a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

DESARROLLO: en la HORA DE AYUDANTÍA, se demostró la propiedad más relevante. Las demás fueron dejadas de ejercicio al estudiante.

(b) Determine el complemento ortogonal de $S = \langle\{(1, 2, 1)\}\rangle$ considerando el producto interno definido. Luego, determine $S^\perp$ considerando el producto interno usual (canónico) de $\mathbb{R}^3$.

DESARROLLO ALTERNATIVO: Por la definición de $S^\perp$, con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$, tenemos

$$\begin{aligned}
S^\perp &= \{x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \forall\, y \in S : \langle x, y\rangle_\bullet = 0\} \\
&\quad \text{(en particular en cada elemento de una base de } S\text{)} \\
&= \{x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 2, 1)\rangle_\bullet = 0\} \\
&= \{x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4\, x_2 + x_3 - 2\, x_1 - x_2 = 0\} \\
&= \{x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3\, x_2 + x_3\} \\
&= \{x := (3\, x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle\{(3, 1, 0), (1, 0, 1)\}\rangle\,.
\end{aligned}$$

CONSIDERANDO EL PRODUCTO INTERNO USUAL:

$$\forall\, x \,:=\, (x_1, x_2, x_3)\,,\, y \,:=\, (y_1, y_2, y_3) \,\in\, \mathbb{R}^3 \,:\, \langle x, y\rangle \,:=\, x_1\, y_1 \,+\, x_2\, y_2 \,+\, x_3\, y_3\,,$$

y procediendo de forma similar, se deduce

$$S^\perp \,=\, \langle\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\rangle\,.$$

(c) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre S y $S^\perp$ con respecto al producto interno dado.

DEJADO AL ESTUDIANTE DE EJERCICIO. Inspirado en el DESARROLLO DEL PROBLEMA 3, es muy probable que aquí se requiera una BASE ORTOGONAL / ORTONORMAL de $\mathbb{R}^3$, respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\bullet$. Revisar lo discutido en la HORA DE AYUDANTÍA.

Problema 5. Sean U, W subespacios de V. Pruebe que

a) $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

PROOF: Tenemos que $\forall\, z \in V : \langle \theta, z \rangle = 0$, de donde se infiere que $\theta \in U^\perp$.
VEAMOS QUE $\forall\, x, y \in U^\perp : \forall\, \alpha \in \mathbb{K} : \alpha\, x + y \in U^\perp$.
Sean $x, y \in U^\perp$, $\alpha \in \mathbb{K}$, fijos pero arbitrarios. Consideremos también $z \in U$ fija pero arbitraria. Resulta

$$\langle \alpha\, x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = ... = 0\,,$$

de donde se infiere que $\forall\, z \in U : \langle \alpha\, x + y, z \rangle = 0$, es decir $\alpha\, x + y \in U^\perp$. Siendo $x, y \in U^\perp$, $\alpha \in \mathbb{K}$, fijos pero arbitrarios, se concluye que $U^\perp$ es subespacio vectorial de V.

b) $\{\theta\}^\perp = V$, y $V^\perp = \{\theta\}$.

PROOF: Tenemos, aplicando la definición de COMPLEMENTO ORTOGONAL

$$\{\theta\}^\perp = \{z \in V : \langle z, \theta \rangle = 0\} = \{z \in V : 0 = 0\} = V\,.$$

Similarmente, tenemos

$$V^\perp = \{z \in V : \forall\, x \in V : \langle z, x \rangle = 0\}\,.$$

Aquí, estableceremos el resultado por doble inclusión.

Primero, en vista que $V^\perp$ es subespacio vectorial de V, se tiene que $\{\theta\} \subseteq V^\perp$.
Veamos que $V^\perp \subseteq \{\theta\}$. Sea $z \in V^\perp$. Entonces $\forall\, x \in V : \langle z, x \rangle = 0$. En particular, se cumplirá para $x := z \in V$. Entonces $||z||^2 = \langle z, z \rangle = 0$, lo cual implica que $z = \theta$. En consecuencia, resulta $V^\perp \subseteq \{\theta\}$. Así, se concluye el resultado.

c) Si $U \subseteq W$, entonces $W^\perp \subseteq U^\perp$.

PROOF: Sea $z \in W^\perp$ fija pero arbitraria. Esto significa que

$$\forall\, x \in W : \langle z, x \rangle = 0 \quad \overset{(\text{HIP.})}{\Rightarrow} \quad \forall\, x \in U : \langle z, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad z \in U^\perp\,.$$

De esta manera, se concluye que $W^\perp \subseteq U^\perp$.

d) $U \cap U^\perp = \{\theta\}$.

PROOF: Sea $z \in U \cap U^\perp$. Entonces, dado que $z \in U$ y $z \in U^\perp$, se debe cumplir

$$||z||^2 = \langle z, z \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \theta\,.$$

Así, $U \cap U^\perp \subseteq \{\theta\}$. Como la otra inclusión siempre se cumple, se concluye $U \cap U^\perp = \{\theta\}$.

e) $U \bigoplus U^\perp = V$, considerando el caso V de dimensión finita. Este resultado se conoce como TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL

PROOF: Por analizar tres casos posibles:
CASO 1: $U = \{\theta\}$. Aquí, $U^\perp = V$ y el resultado es cierto.
CASO 2: $U = V$, lo cual implica que $U^\perp = \{\theta\}$, y el resultado también es cierto.
CASO 3: U es un subespacio no trivial de V. Sea $d := \dim(U)$, el cual debe satisfacer; $d > 0$ y $d < m := \dim(V)$. Siendo U de dimensión finita, admite una base. Sea $B_U := \{u_j\}_{j=1}^{d}$ una base de U. En vista que V es de dimensión finita, podemos completar la base B_U hasta obtener una base de V. Esto permite asegurar la existencia de $B := \{u_j\}_{j=1}^{d} \cup \{w_k\}_{k=1}^{m-d}$, una base de V. Ahora, aplicamos el PROCEDIMIENTO DE GRAM-SCHMIDT para obtener una base ortonormal de V. Sea ésta $\tilde{B} := \{x_j\}_{j=1}^{d} \cup \{y_k\}_{k=1}^{m-d}$. Invocando la PROPIEDAD INDICADA EN EL PROBLEMA 1, tenemos que $\{x_j\}_{j=1}^{d}$ es una base ortonormal de U, y $\{y_k\}_{k=1}^{m-d}$ una base ortonomal de $U^\perp$. Esto permite inferir que

- $U + U^\perp \subseteq V$
- $\dim(U + U^\perp) = m = \dim(V)$.

Con ello se deduce

- $U + U^\perp = V$
- $U \cap U^\perp = \{\theta\}$, por d).

De esta forma, se concluye que $U \bigoplus U^\perp = V$.
REMARK: De lo anterior se desprende que $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.

f) $U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$, considerando el caso V de dimensión finita.

PROOF: Se hará en dos etapas:

ETAPA 1: Veamos que $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$. Sea $z \in U$, fija pero arbitraria. Entonces $\forall\, x \in U^{\perp} : \langle z, x\rangle = 0$, lo cual nos dice que $z \in (U^{\perp})^{\perp}$. Como $z \in U$ es fija pero arbitraria, se infiere que $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$ es subespacio vectorial.

ETAPA 2: Como estamos en dimensión finita, tenemos, invocando el REMARK PREVIO

$$\dim((U^{\perp})^{\perp}) = \dim(V) - \dim(U^{\perp}) = \dim(U) \quad \Rightarrow \quad \dim(U) = \dim((U^{\perp})^{\perp})\,.$$

FINALMENTE, se concluye que $U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

Problema 8. Sea V de dimensión finita, y U un subespacio de V. Pruebe que

a) $\forall\,(x,y) \in U \times U^{\perp} : ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (TEOREMA DE PITÁGORAS).

PROOF: Sea $(x,y) \in U \times U^{\perp}$ fija pero arbitraria. Entonces,

$$||x + y||^2 = \langle x + y\,,\, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2\,. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

Como $(x,y) \in U \times U^{\perp}$ es fija pero arbitraria, se concluye $\forall\,(x,y) \in U \times U^{\perp} : ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

b) $\forall\, z \in V : ||\mathrm{Proj}_U(z)|| \leq ||z||$.

PROOF: Sea $z \in V = U \oplus U^{\perp}$. Entonces, $\exists!\,(x,y) \in U \times U^{\perp} : z = x + y$. En este caso, $\mathrm{Proj}_U(z) = x$, $\mathrm{Proj}_{U^{\perp}}(z) = y$. Esto permite deducir, invocando el TEOREMA DE PITÁGORAS

$$||x||^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2 = ||z||^2 \quad \Rightarrow \quad ||\mathrm{Proj}_U(z)|| \leq ||z||\,.$$

En vista que $z \in V$ es fija pero arbitraria, se concluye $\forall\, z \in V : ||\mathrm{Proj}_U(z)|| \leq ||z||$.

REMARK: de lo anterior también se desprende que $\forall\, z \in V : \mathrm{Proj}_U(z) + \mathrm{Proj}_{U^{\perp}}(z) = z$, de donde se infiere que

- $\mathrm{Proj}_U + \mathrm{Proj}_{U^{\perp}} = \tilde{I}$
- $\forall\, z \in V : z - \mathrm{Proj}_U(z) \in U^{\perp}$.

c) (SENTIDO GEOMÉTRICO DE Proj_U: DISTANCIA A UN SUBESPACIO) Para cualquier $w \in V$, $\mathrm{Proj}_U(w)$ es el único elemento de U que resuelve el PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN: $(PM) : \mathrm{dist}(w, U) := \min\limits_{z\in U} ||w - z|| = ||w - \mathrm{Proj}_U(w)||\,.$

PROOF: Sea $w \in V$. Tenemos que $\mathrm{Proj}_U(w) \in U$. Además, se sabe también que $w - \mathrm{Proj}_U(w) \in U^{\perp}$. Consideremos ahora $z \in U$ fija pero arbitraria. Se tiene, invocando el TEOREMA DE PITÁGORAS

$$||w - \mathrm{Proj}_U(w)||^2 \leq ||w - \mathrm{Proj}_U(w)||^2 + ||\mathrm{Proj}_U(w) - z||^2 = ||(w - \mathrm{Proj}_U(w)) + \mathrm{Proj}_U(w) - z||^2 = ||w - z||^2$$
$$\Rightarrow \forall\, z \in U : ||w - \mathrm{Proj}_U(w)|| \leq ||w - z||\,.$$

Luego, por el AXIOMA DEL ÍNFIMO, se desprende que $||w - \mathrm{Proj}_U(w)|| \leq \inf\limits_{z\,\in\,U} ||w - z||$. En vista que $\mathrm{Proj}_U(w) \in U$, el ínfimo se alcanza en U y en consecuencia es un mínimo, i.e. $||w - \mathrm{Proj}_U(w)|| \leq \min\limits_{z\,\in\,U} ||w - z||$.

VEAMOS AHORA LA UNICIDAD: Por REDUCCIÓN AL ABSURDO, supongamos que no hay unicidad. Sean $x, y \in U$, $x \neq y$, tales que $\min\limits_{z\in U} ||w - z|| = ||w - x|| = ||w - y|| = s$. Construimos ahora los vectores $a := w - x$ y $b := w - y$. Tenemos, aplicando la LEY DEL PARALELOGRAMO:

$$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq ||y - x||^2 = 2(s^2 + s^2) - ||2w - (x + y)||^2 = 4\,s^2 - 4\left\|w - \underbrace{\frac{x + y}{2}}_{\in\, U}\right\|^2 \leq 4\,s^2 - 4\,s^2 = 0 \quad \text{(¿Por qué?)}$$

$$\Rightarrow ||y - x|| = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \quad (\rightarrow\leftarrow)\,.$$

De esta forma se concluye que $\mathrm{Proj}_U(w)$ es el único elemento de U que resuelve el PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN: $(PM) : \mathrm{dist}(w, U) := \min\limits_{z\in U} ||w - z|| = ||w - \mathrm{Proj}_U(w)||$

d) $x \in U$ es la mejor aproximación de $w \in V$ por elementos de U (i.e. $x := \mathrm{Proj}_U(w)$ es la solución de (PM)) si y sólo si $\forall\, y \in U \,:\, \langle w, y\rangle \,=\, \langle \mathrm{Proj}_U(w), y\rangle$ (i.e. $w - \mathrm{Proj}_U(w) \in U^{\perp}$).

PROOF: ($\Rightarrow$):
Sea $x \in U$ tal que $s := ||w - x|| = \min_{z\in U} ||w - z||$. Esto implica que $\forall\, z \in U \,:\, s^2 \leq ||w - z||^2$. Tendremos en cuenta dos etapas:
ETAPA 1: Consideremos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, y $v \in U$ fijos pero arbitrarios. En vista que $\alpha\, v + x \in U$, resulta

$$\begin{aligned} s^2 &\leq ||w - (x + \alpha\, v)||^2 = ||(w - x) - \alpha\, v||^2 = ||w - x||^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle w - x, \alpha\, v\rangle) + \alpha^2\, ||v||^2 \\ \Rightarrow &\ \alpha^2\, ||v||^2 - 2\,\alpha\,\mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora se analizan dos casos:
CASO 1: $\alpha > 0$. Dividiendo (1) por α resulta

$$\alpha\, ||v||^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0$$

siendo $\alpha > 0$ fijo pero arbitrario, analizamos lo que sucede cuando $\alpha \to 0^+$, obteniéndose $\mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) \leq 0$.
CASO 2: $\alpha < 0$. Dividiendo (1) por α resulta

$$\alpha\, ||v||^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) \leq 0$$

siendo $\alpha < 0$ fijo pero arbitrario, analizamos lo que sucede cuando $\alpha \to 0^-$, obteniéndose $\mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0$.
CONCLUSIÓN: $\forall\, v \in U \,:\, \mathrm{Re}(\langle w - x, v\rangle) = 0$.

REMARK: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se concluiría $\forall\, v \in U \,:\, \langle w - x, v\rangle = 0$.

ETAPA 2: Consideremos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, y $v \in U$ fijos pero arbitrarios. En vista que $\alpha\, i\, v + x \in U$, y procediendo como en la ETAPA 1, resulta

$$\begin{aligned} s^2 &\leq ||w - (x + \alpha\, i\, v)||^2 = ||(w - x) - \alpha\, i\, v||^2 = ||w - x||^2 - 2\,\alpha\,\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) + \alpha^2\, ||v||^2 \\ \Rightarrow &\ \alpha^2\, ||v||^2 - 2\,\alpha\,\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora se analizan dos casos:
CASO 1: $\alpha > 0$. Dividiendo (2) por α resulta

$$\alpha\, ||v||^2 - 2\,\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0$$

siendo $\alpha > 0$ fijo pero arbitrario, analizamos lo que sucede cuando $\alpha \to 0^+$, obteniéndose $\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) \leq 0$.
CASO 2: $\alpha < 0$. Dividiendo (2) por α resulta

$$\alpha\, ||v||^2 - 2\,\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) \leq 0$$

siendo $\alpha < 0$ fijo pero arbitrario, analizamos lo que sucede cuando $\alpha \to 0^-$, obteniéndose $\mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) \geq 0$.
CONCLUSIÓN: $\forall\, v \in U \,:\, \mathrm{Im}(\langle w - x, v\rangle) = 0$.

FINALMENTE, ha quedado establecido que $\forall\, v \in U \,:\, \langle w - x, v\rangle = 0\,$.

($\Leftarrow$):
Sea $x \in U$ tal que $\forall\, v \in U \,:\, \langle w - x, v\rangle = 0$. Entonces, para $z \in U$ fija pero arbitraria,

$$||w - z||^2 = ||\underbrace{(w - x)}_{\in U^{\perp}} + \underbrace{(x - z)}_{\in U}||^2 = ||w - x||^2 + ||x - z||^2 \geq ||w - x||^2\,.$$

De aquí, resulta

$$\forall\, z \in U \,:\, ||w - x|| \leq ||w - z|| \quad \Rightarrow \quad ||w - x|| \leq \inf_{z \in U} ||w - z|| \quad \overset{x \in U}{\Rightarrow} \quad ||w - x|| \leq \min_{z \in U} ||w - z||\,.$$

Así, $x \in U$ es solución de (PM).