Límites de funciones. Continuidad.

- Límites de funciones.
- Álgebra de límites de funciones.
- Continuidad en un punto.
- Funciones continuas.
- Funciones Lipschitz continuas.

Límites de funciones.

A lo largo de toda la clase de hoy, X e Y son espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente, y $E \subset X$.

Def.: Sean $f:\ E \to Y,$ p un punto de acumulación de E y $q \in Y$.
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a p es q y lo denotamos

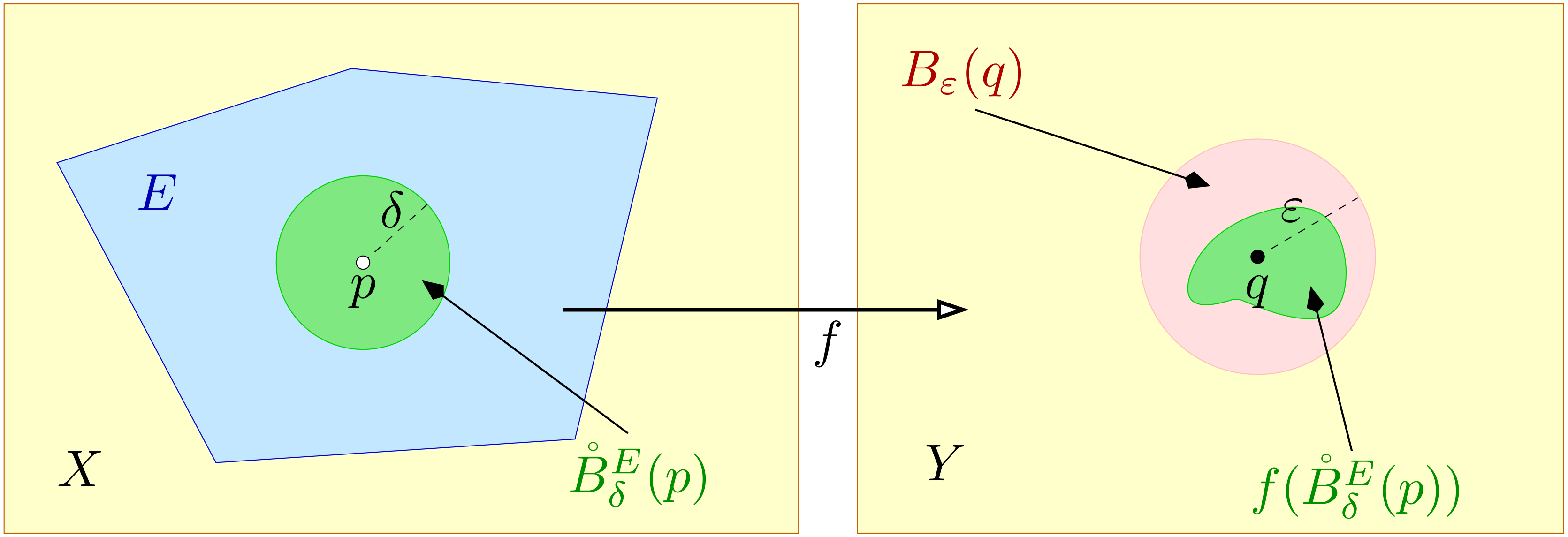
$$\lim_{x\to p} f(x) = q \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \overset{x\to p}{\longrightarrow} q,$$

si

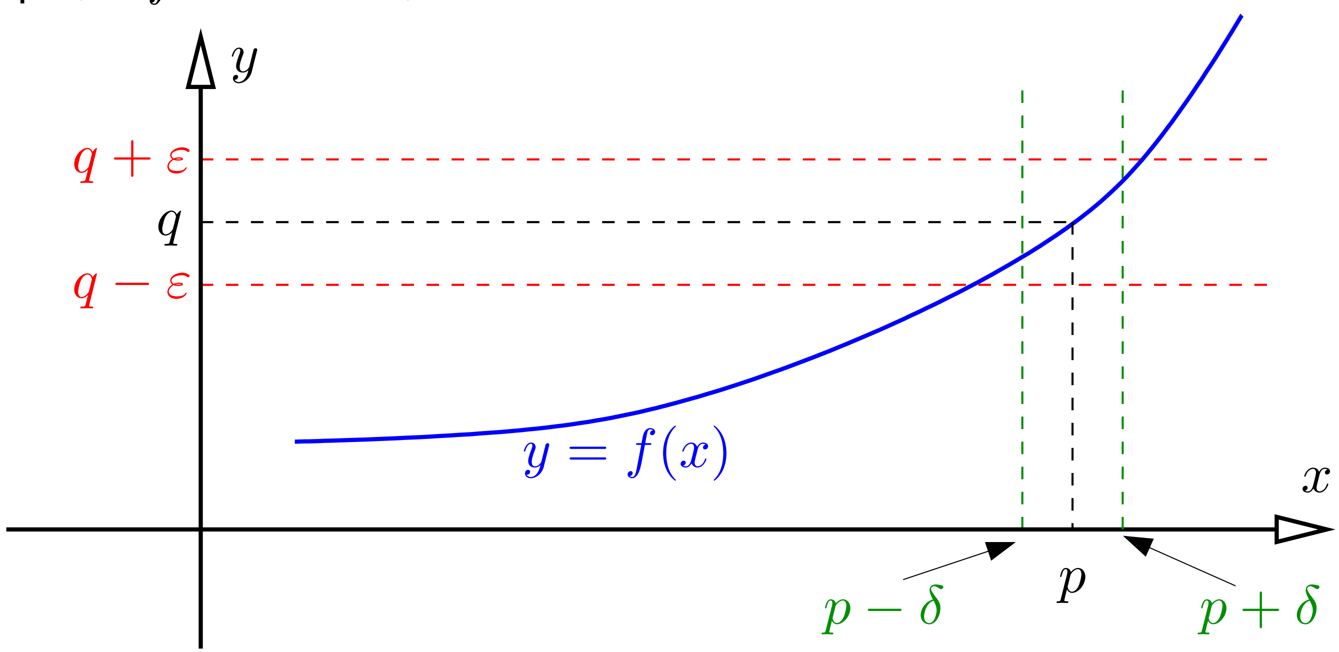
$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in E\setminus\{p\} :\ d_X(x,p) < \delta,\ \ d_Y(f(x),q) < \varepsilon.}$$

- En esta definición no importa si $p \in E$ o no; lo que es necesario es que p sea un punto de acumulación de E
- Recordemos que $B_\delta^E(p) := B_\delta^X(p) \cap E$. Si denotamos $\mathring{B}_\delta^E(p) := B_\delta^E(p) \setminus \{p\}$, la propiedad que define el límite puede escribirse:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ f(\mathring{B}_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(q).}$$



Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces:



Teor.: Sean $f : E \to Y$, p un punto de acumulación de E y $q \in Y$.

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ si sólo si $\forall \{p_n\} \subset E \setminus \{p\} : p_n \xrightarrow{n} p$, $f(p_n) \xrightarrow{n} q$.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$.

Sea $\{p_n\} \subset E \setminus \{p\} : p_n \xrightarrow{n} p$. Hay que demostrar que $f(p_n) \xrightarrow{n} q$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$, $\exists \delta > 0 : f(\mathring{B}^E_\delta(p)) \subset B^Y_\varepsilon(q)$.

Como $\{p_n\} \subset E \setminus \{p\}$ y $p_n \xrightarrow{n} p$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$, $p_n \in \mathring{B}^E_\delta(p)$.

$\Longrightarrow \forall n \geq N$, $f(p_n) \in B^Y_\varepsilon(q) \Longrightarrow f(p_n) \xrightarrow{n} q$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Por el absurdo. Supongamos que no se cumple que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$.

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathring{B}^E_\delta(p) : f(x) \notin B^Y_\varepsilon(q)$.

En particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists \underbrace{p_n \in \mathring{B}^E_{1/n}(p)}_{p_n \xrightarrow{n} p} : \underbrace{f(p_n) \notin B^Y_\varepsilon(q)}_{f(p_n) \overset{n}{\not\to} q}$.

$\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

Corol.: Si f tiene límite cuando $x \to p$, entonces ese límite es único.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$ (Es consecuencia de la unicidad del límite de sucesiones.)

Álgebra de límites de funciones.

Teor.: i) Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y p un punto de acumulación de E.

Si $\lim_{x \to p} f(x) = A$ y $\lim_{x \to p} g(x) = B,$ entonces:

a) $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B;$

b) $\lim_{x \to p} [f(x)g(x)] = AB;$

c) Si $B \neq 0,$ $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

ii) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : E \to \mathbb{R}^k,\ k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{x \to p} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{A}$ y $\lim_{x \to p} \boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{B}.$

Entonces: $\lim_{x \to p} [\boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{g}(x)] = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$

Dem.: **Ej.** Es consecuencia del teorema anterior y de las propiedades análogas para límites de sucesiones.

Continuidad en un punto.

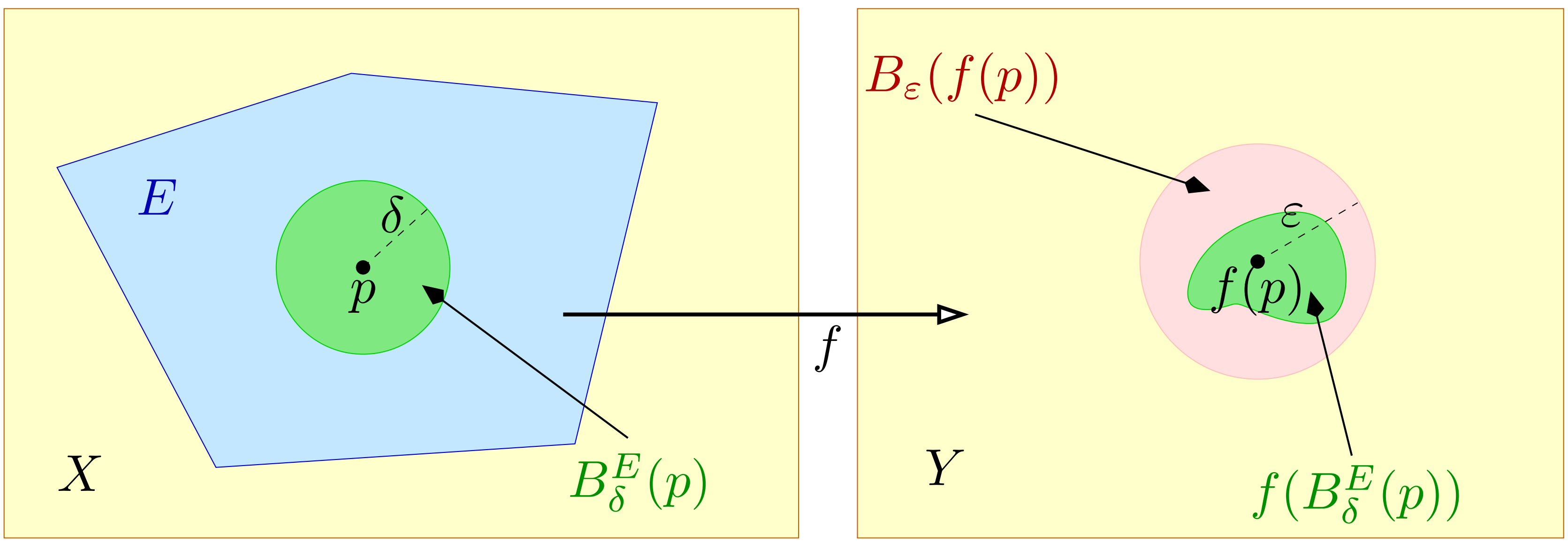
Def.: Sean $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}$ y $p \in E$. f es continua en p si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E :\ d_X(x,p) < \delta,\ \ d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.}$$

- En esta definición $p \in E$, pero no es necesariamente un punto de acumulación de E (podría ser un punto aislado de E).

- La propiedad que define la continuidad en un punto puede escribirse:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ f(B_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)).}$$



Teor.: Sea $f : E \to Y$ y $p \in E$. Entonces:

a) Si p es un punto aislado de E, f es continua en p.

b) Si p es un punto de acumulación de E, f es continua en p si y sólo si $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Dem.: a) Sea p un punto aislado de $E \implies \exists \delta > 0 : B_\delta(p) \cap E = \{p\}$

$\implies B_\delta^E(p) = \{p\} \implies f(B_\delta^E(p)) = \{f(p)\}$

$\implies \forall \varepsilon > 0,\ f(B_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \implies f$ es continua en p.

b) Sea p un punto de acumulación de E. Entonces:

f continua en $p \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p))$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(\mathring{B}_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p))$

$\iff \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$. $\square$

Teor.: Sea $f : E \to Y$ y $p \in E$. f es continua en p si y sólo si $\forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p, \;\; f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$.

Dem.: Si p es un punto aislado de E, por un lado, f es continua en p.
Por el otro, $\forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, p_n = p$
$\implies \forall n \geq N, f(p_n) = f(p) \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$.

Si p es un punto de acumulación de E, se tiene que f es continua en p
$\iff \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$
$\iff \forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$. $\square$

Teor.: Sea Z un espacio métrico. Sean $f : E \to Y$ continua en $p \in E$ y $g : Y \to Z$ continua en $f(p)$. Entonces $g \circ f : E \to Z$ es continua en p.

Dem.: Si p es un punto aislado de E, $g \circ f$ es continua en p.

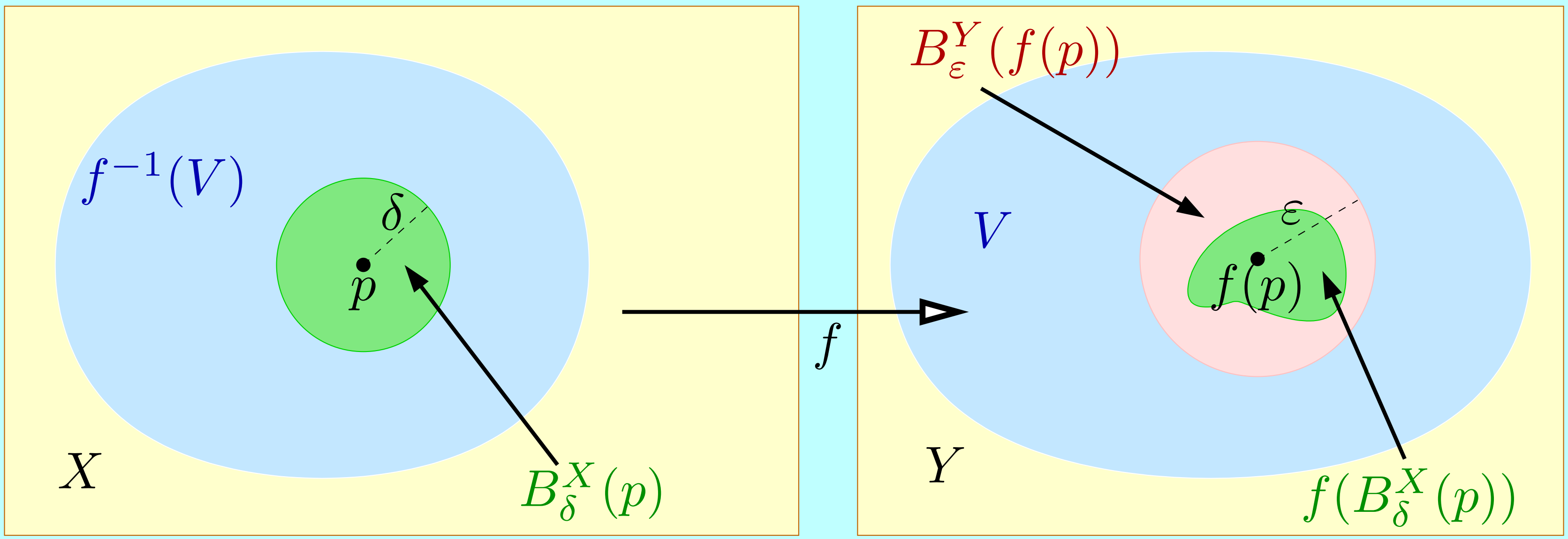
Si p es un punto de acumulación de E, sea $\{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p$. Entonces:
f continua en $p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$
g continua en $f(p) \implies g(f(p_n)) \xrightarrow{n} g(f(p))$
$\implies g \circ f$ es continua en p. $\square$

Funciones continuas.

Def.: Sea $f : X \to Y$. f es continua si es continua en p $\forall p \in X$.

Teor.: $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $\forall V \subset Y$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $V \subset Y$ abierto. Hay que demostrar que $f^{-1}(V)$ es abierto.



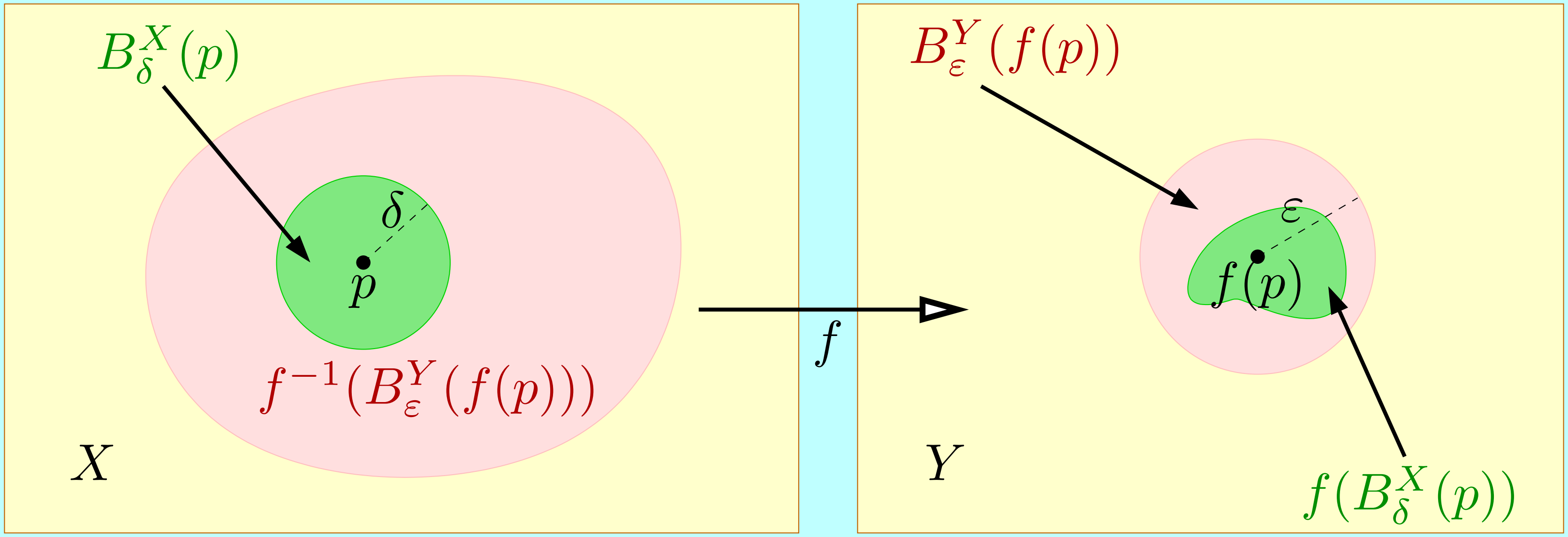
Sea $p \in f^{-1}(V)$. Entonces, $f(p) \in V \overset{V \text{ abierto}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^Y(f(p)) \subset V$.

f continua en $p \Longrightarrow \exists \delta > 0 : f(B_\delta^X(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \subset V$

$\Longrightarrow B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(V) \Longrightarrow p$ interior a $f^{-1}(V) \Longrightarrow f^{-1}(V)$ abierto.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $f : X \to Y :\ \forall V \subset Y$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto.

Sea $p \in X$. Hay que demostrar que f es continua en p.



Sea $\varepsilon > 0$. $B_\varepsilon^Y(f(p))$ abierto en $Y \implies f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p)))$ abierto en X.

$p \in f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p))) \implies \exists \delta > 0 :\ B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p)))$

$\implies f(B_\delta^X(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \implies f$ es continua en p. $\square$

Corol.: $f : X \to Y$ es continua $\iff \forall G \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(G)$ es cerrado.

Dem.: **Ej.** Es consecuencia del hecho de que G es cerrado $\iff G^c$ es abierto.

Funciones Lipschitz continuas.

Def.: $f : X \to Y$ es Lipschitz continua si
$\exists L > 0 : \ \forall p, q \in X, \ d_Y(f(p), f(q)) \leq L\, d_X(p, q)$.

Prop.: Las funciones Lipschitz continuas, son continuas.

Dem.: Sean $f : X \to Y$ y $p \in X$. Demostraremos que f es continua en p.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \quad \forall q \in X : \ d_X(p, q) < \delta,$$

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L\, d_X(p, q) < L\delta = \varepsilon.$$

Entoces, f es continua en p. $\square$