

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GAJ/JRC/JAG/CMR/HPV. 13/06/19.

Tiempo: 30 minutos

Solución Test N° 5.
Cálculo III 521227

1. Evalúe la integral

$$\int \int_B e^{\frac{x+y}{x-y}} d(x,y)$$

donde B es la región trapezoidal con vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2), (0, -1)$.

Solución.-

Con el cambio de variables $T^{-1} : u = x+y, v = x-y$ tenemos $JT^{-1}(x, y) = -2$ y $JT(u, v) = -\frac{1}{2}$. Además, la región B , delimitada por las rectas $x - y = 1, x - y = 2, y = 0$ y $x = 0$, se transforma según

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \longleftrightarrow v = 1 \\ x - y &= 2 \longleftrightarrow v = 2 \\ y &= 0 \longleftrightarrow u = v \\ x &= 0 \longleftrightarrow u = -v \end{aligned}$$

Luego, B se transforma en A descrita por

$$\begin{aligned} 1 &\leq v \leq 2 \\ -v &\leq u \leq v \end{aligned} \quad (20 \text{ puntos})$$

y por teorema del cambio de variables:

$$\begin{aligned} \int \int_B e^{\frac{x+y}{x-y}} d(x,y) &= \int \int_A e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} d(u,v) && (20 \text{ puntos}) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= \frac{3}{4} (e - e^{-1}) && (20 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

Obs.- Para encontrar la región A en el plano uv , también es posible calcular las 4 imágenes $T^{-1}(1, 0), T^{-1}(2, 0), T^{-1}(0, -2)$ y $T^{-1}(0, -1)$ y considerando que T es lineal, la región A es el trapecio determinado por estos 4 puntos.