Álgebra 1 (525140)
Listado 2
Problemas sobre *Capítulo 1: Lógica*

Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Mónica Selva, Diego Paredes. Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva.
**DIM - CFM**

# Listado 2: Lógica

Este listado de problemas se ha dividido en cuatro secciones: problemas básicos, problemas intermedios, problemas avanzados y desafíos.

Los problemas básicos te servirán para comprobar si tienes los conocimientos básicos que te permitirán enfrentar los problemas en las dos secciones siguientes. La mayoría de los problemas en certámenes tendrán el nivel de complejidad de los problemas intermedios o avanzados.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas interesantes, pero resolverlos no es parte de los resultados de aprendizaje esperados este curso, inténtalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado. Los problemas marcados con **(V)** serán resueltos en videos que serán publicados en Canvas.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

## 1. Problemas básicos

1. Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.
   
   (b) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. Describa por extensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 7\}$.
   
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$.

3. Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica.

   (a) El cuadrado de todo número real es un número real mayor o igual que cero.
   
   (b) **(A)** Todo elemento de $\{-2, -1, 0, 2, \sqrt{2}\}$ que es entero es un número par.
   
   (c) Para todo par de números reales $a, b$ se cumple que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
   
   (d) Sea $x$ un número real cualesquiera. Es posible encontrar un número real $y$ cuyo producto por $x$ es igual a 1.

   Escoja cuáles de las proposiciones anteriores son falsas y escriba sus negaciones, en español y en forma simbólica.

4. Escriba las siguientes proposiciones en español.

   (a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : x < 0 \rightarrow x(x - 4) > 0$.
   
   (b) **(A)** $\forall\, x \in \mathbb{R} : x < 0 \leftrightarrow x(x - 4) > 0$.

(c) $\exists\, x \in \mathbb{N} \,:\, x^2 = 4$.

(d) $\forall\, x \in \{a, b, c, d, e, f\} \,:\,$ ($x$ es consonante) $\vee$ ($x \neq o$).

(e) $\exists!\, x \in \{a, b, c, d, e, f\} \,:\, x$ es vocal.

(f) $\exists\, x \in \{a, b, c, d, e, f\} \,:\, x$ es vocal.

Decida cuál es su valor de verdad. Justifique sus respuestas.

5. Considere las funciones proposicionales $p$, $q$, $r$ y $s$ tales que para cada $x \in \mathbb{Z}$

$$p(x) := x \text{ es par; } q(x) := x \text{ es impar; } r(x) := x \text{ es mayor que cinco; } s(x) := x \text{ es menor que diez.}$$

(a) Exprese de manera simbólica, utilizando las funciones proposicionales anteriores según convenga, las siguientes proposiciones:

(a.1) Todo elemento de $\{5, 11, 17, 19, 23\}$ es mayor que cinco e impar.

(a.2) Existen números enteros pares mayores que cinco.

(a.3) Existen números enteros entre cinco y diez.

(b) Escriba usando el lenguaje usual las siguientes proposiciones:

(b.1) $\forall x \in \mathbb{N} : p(x) \vee q(x)$.

(b.2) $\forall x \in \{3, 6, 9\} \,:\, r(x) \to s(x)$.

(b.3) $\sim \Big(\exists x \in \mathbb{N} : s(x) \wedge \sim r(x)\Big)$.

6. Sean $A$ un conjunto cualesquiera distinto del conjunto vacío y $p$ y $q$ funciones proposicionales. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Si la proposición $\forall\, x \in A \,:\, p(x)$ es verdadera, entonces $\exists\, x \in A \,:\, p(x)$ también es verdadera.

(b) Si la proposición $\forall\, x \in A \,:\, p(x)$ es falsa, entonces $\exists\, x \in A \,:\, p(x)$ también es falsa.

(c) Si $\exists!\, x \in A \,:\, p(x)$ es verdadera, entonces $\exists\, x \in A \,:\, p(x)$ también es verdadera.

(d) Si $\exists\, x \in A \,:\, p(x)$ es verdadera, entonces $\exists!\, x \in A \,:\, p(x)$ también es verdadera.

## 2. Problemas intermedios

1. Un año es *bisiesto* si y solo si es divisible por 4, pero no es divisible por 100. Además, Si es divisible por 4 y 100, es *bisiesto* si además es divisible por 400. Por ejemplo, el año 2004 fue bisiesto (divisible por 4 y no divisible por 100). El año 1900 no fue bisiesto (es divisible por 4 y 100, pero no por 400), mientras que el año 2000 sí fue bisiesto (divisible por 4 y 100 y también por 400).

Sean $p$, $q$ y $r$ funciones proposicionales tales que para cada $x \in \mathbb{N}$

$$p(x) := x \text{ es divisible por 4}, \quad q(x) := x \text{ es divisible por 100}, \quad r(x) := x \text{ es divisible por 400}.$$

Escriba, utilizando las funciones proposicionales anteriores, una función proposicional $s$ que, dado $x \in \mathbb{N}$, sea verdadera si y solo si $x$ es un año bisiesto.

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) $\big(\forall x \in \{-1, 0, 1, 2\}\big)\big(x + 1 \geq 0 \vee x \geq 1\big)$.

(b) **(A)** $\Big(\exists y \in \big\{-\frac{1}{2}, -1, 1\big\}\Big)\big(y^2 > -y\big)$.

(c) **(V)** $\forall\, x \in A \,:\, \exists!\, y \in B \,:\, x + y \geq 0$, con $A = \{-2, 0, 1\}$ y $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

(c) $\Big(\forall x \in \{-2, -1, 0, 1\}\Big)\Big(\forall y \in \{-2, -1, 0, 1\}\Big)\Big(y - x < 1\Big)$.

3. Niegue las siguientes proposiciones lógicas. Decida cuál de las dos (la proposición o su negación) es verdadera. Justifique sus respuestas.

(a) $\forall\, x \in \mathbb{N} \,:\, x \in \mathbb{R}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0 \to x \in \mathbb{N}$.
(c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$.
(d) $(\forall n \in \mathbb{Z} : n$ es par$) \vee (\forall n \in \mathbb{Z} : n$ es impar$)$.
(e) $\forall n \in \mathbb{Z} : (n$ es par$) \vee (n$ es impar$)$.
(f) **(V)** $\forall x \in \mathbb{R} : x < 3 \to 0 < x^2 < 9$.
(g) $\left[\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0\right] \to \left[\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 > 0\right]$.

4. Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica.

(a) Todo número real $a$ satisface que $a + 0 = a$.
(b) La ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ tiene dos soluciones reales.
(c) **(A)** La ecuación $x^2 - 5 = 0$ no tiene soluciones reales.
(d) Sean $a$ y $b$ dos números enteros. Si $a = -b$, entonces $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
(e) Para todo número entero $m$ es posible encontrar un número entero $n$ de modo que $m + n = 2$.
(f) Existe un número entero $m$ que sumado con cualquier otro da como resultado 2.
(g) Para todo número real $a$ la ecuación $x^3 + a = 0$ tiene exactamente una solución real.
(h) Para todo par de números naturales $x, y$ se cumple que $xy \geq x + y$.

Decida cuáles de las proposiciones anteriores son falsas y demuestre que sus negaciones son proposiciones verdaderas.

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$.
(b) $\forall x \in \mathbb{R} : [(x > 0) \wedge (x \neq 1)] \to x > 1]$.
(c) $(\forall x \in \mathbb{Z}) ([(x > 0) \wedge (x \neq 1)] \to x > 1)$.
(d) $\exists x \in \mathbb{Z} : 3x = 2x$.
(e) $(\forall x \in \mathbb{Z})((x + 1)(x + 2) \geq 0)$.
(f) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : (x + 1)(x + 2) < 0$.
(g) $\exists x, y \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
(h) $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \dfrac{a-1}{a} \notin \mathbb{Z}$.
(i) **(A)** $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(m^2 > n)$.
(j) $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{Z})(m^2 > n)$.
(k) **(A)** $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(3x^2 - xy + 3 = 0)$.
(l) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(3x^2 - xy + 3 = 0)$.
(m) $(\exists y \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R})(3x^2 - xy + 3 = 0)$.
(n) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R})(3x^2 - xy + 3 = 0)$.

6. **(V)** Considere las proposiciones

$$\mathbf{p} : \forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x(x - 1) = (2y + 7)(x - 1),$$

$$\mathbf{q} : \forall x \in \mathbb{R} : \exists! y \in \mathbb{R} : x(x - 1) = (2y + 7)(x - 1).$$

Escriba sus negaciones y determine sus valores de verdad. Justifique.

# 3. Problemas avanzados

1. Sean $A$ un conjunto cualesquiera distinto del conjunto vacío y $p$ y $q$ funciones proposicionales. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Si la proposición $(\forall x \in A)(p(x) \wedge q(x))$ es verdadera, entonces la proposición $(\forall x \in A : p(x)) \wedge (\forall x \in A : q(x))$ es verdadera.
(b) Si la proposición $(\forall x \in A)(p(x) \vee q(x))$ es verdadera, entonces la proposición $(\forall x \in A : p(x)) \vee (\forall x \in A : q(x))$ es verdadera.
(c) Si $\exists x \in A : \forall y \in A : p(x) \wedge q(y)$ es verdadera, entonces $\forall y \in A : \exists x \in A : p(x) \wedge q(y)$ también es verdadera.

(d) Si $\forall\, y \in A \,:\, \exists\, x \in A \,:\, p(x) \wedge q(y)$ es verdadera, entonces $\exists\, x \in A \,:\, \forall\, y \in A \,:\, p(x) \wedge q(y)$ también es verdadera.

2. Suponga que $\mathbb{Z}_0^+$ es el conjunto de los números enteros mayores o iguales que cero. Considere las siguientes proposiciones:

**(A)** $\mathbf{p_1} := \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, z \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, x > z,$ $\qquad$ $\mathbf{p_3} := \forall\, z \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, x > z,$

$\mathbf{p_2} := \exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, z \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, x > z,$ $\qquad$ $\mathbf{p_4} := \exists\, z \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x > z.$

Escriba sus negaciones y determine, justificando, sus valores de verdad.

3. Sean $A$, un conjunto distinto del vacío; $q$, una función proposicional y $p$, una proposición lógica. Considere además que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son las siguientes proposiciones

$$\mathbf{r} : \forall\, x \in A \;:\; p \to q(x), \qquad \mathbf{s} : \exists\, x \in A \;:\; p \to q(x).$$

(a) **(A)** Determine, si es posible, el valor de verdad de $p$ sabiendo que $\mathbf{r}$ es falsa. Justifique su respuesta.

(b) Determine, si es posible, el valor de verdad de $p$ sabiendo que $\mathbf{s}$ es verdadera. Justifique su respuesta.

4. Sean $A = \{1, 2\}$ y $p$ y $q$ funciones proposicionales. Sabiendo que $p(1)$ es una proposición verdad y el valor de verdad de $p(2)$ es falso, determine, si es posible, cuáles deben ser valores de verdad para $q(1)$ y $q(2)$ para que la siguiente proposición

$$\exists x \in A : \Big[ \sim p(x) \wedge \Big( \forall y \in A : \sim p(y) \to q(x) \Big) \Big].$$

sea verdadera.

# 4. Desafíos

1. Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) $\{3, 6, 11, 18, 27, 38, \ldots\}$.

(b) $\{0, 4, 16, 36, 64, 100, \ldots\}$.

(c) $\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$.

2. Sean $s$ y $t$ funciones proposicionales. Llamemos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ a las siguientes proposiciones:

$$\mathbf{p} : \quad [\exists\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x)] \to [\forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, t(x)] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{q} : \quad \forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x) \leftrightarrow t(x).$$

(a) Determine, si es posible, valores de verdad para $s(1), s(2), t(1)$ y $t(2)$ de modo que $\mathbf{p}$ sea falsa y $\mathbf{q}$ sea verdadera.

(b) Determine el valor de verdad de

$$\forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x) \to t(x),$$

suponiendo que $s$ y $t$ son tales que $\mathbf{p}$ es verdadera. Justifique su respuesta.

3. Sean $A$ un conjunto distinto del vacío, $q$, una proposición y $p$, una función proposicional. Considere las siguientes proposiciones

$$\mathbf{r} : \forall\, x \in A \;:\; [p(x) \to q]\,, \qquad \mathbf{s} : [\forall\, x \in A \;:\; p(x)] \to q.$$

(a) Niéguelas.

(b) Demuestre que $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{s}$, es decir, que si $\mathbf{r}$ es $V$, entonces $\mathbf{s}$ lo es.

(c) Considere $A = \{1, 2\}$, determine valores de verdad para $q, p(1)$ y $p(2)$ de modo que $\mathbf{s}$ sea verdadera y $\mathbf{r}$ sea falsa.