Procesos Estocásticos : Procesos de nacimiento y muerte Colas M|M|S

Nora Serdyukova

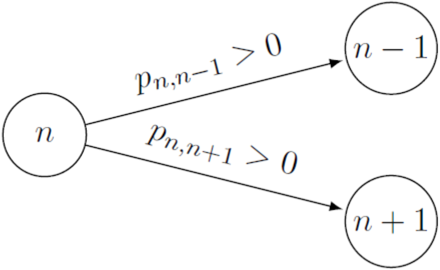
Universidad de Concepción

Outline

Outline

Proceso de nacimiento y muerte

Es una CMTC donde $p_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$.



Proceso de nacimiento y muerte

- Los "nacimientos" ocurren con tasa λ_n, por lo que el tiempo esperado que transcurre desde estar en el estado n hasta pasar al estado $n+1$ es $\frac{1}{\lambda_n}$.

- Por otro lado, las "muertes" ocurren con tasa μ_n, por lo que el tiempo esperado que transcurre desde estar en el estado n hasta pasar al estado $n-1$ es $\frac{1}{\mu_n}$.

Proceso de nacimiento y muerte. Ejemplo

- En un banco hay n personas.
- Un nuevo cliente llega con tasa λ_n y uno sale con tasa μ_n.
- Esta situación se puede modelar mediante un proceso de nacimiento y muerte.

Proceso de nacimiento y muerte

- Dado n personas en el sistema, el tiempo hasta que llega una nueva persona tiene distribución $\xi_n \sim Exp(\lambda_n)$ y es independiente del tiempo hasta que una persona deja el sistema, el cual es $\eta_n \sim Exp(\mu_n)$.
- Sea T_n : tiempo de permanencia en el estado "hay n personas", que corresponde a

$$T_n = \min\{\xi_n, \eta_n\} \sim Exp(\lambda_n + \mu_n)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(T_n > t) &= P(\text{"en el intervalo } [0, t] \text{ no llega ni se va nadie"}) \\ &= e^{-(\lambda_n + \mu_n)t} \end{aligned}$$

Proceso de nacimiento y muerte

Así, definiendo $\nu_0 = \lambda_0$ y $\nu_n := \lambda_n + \mu_n$, $n \geq 1$, se tiene que

$$T_n \sim Exp(\nu_n).$$

Recordando que

$$P(\eta_n > \xi_n) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n},$$

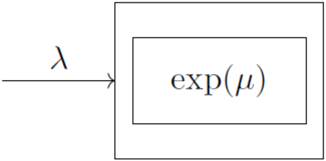
se tiene que

$$p_{n,n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}$$
$$p_{n,n-1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}$$

Outline

Cola M|M|1

- En este caso, se considera que las llegadas al sistema son Markovianas (**M**), de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa λ.
- El servicio en sí es Markoviano (**M**) y el tiempo de éste se distribuye *Exp*(μ).
- Existe un servicio en el sistema (**1**).



Cola M|M|1

Ejemplo

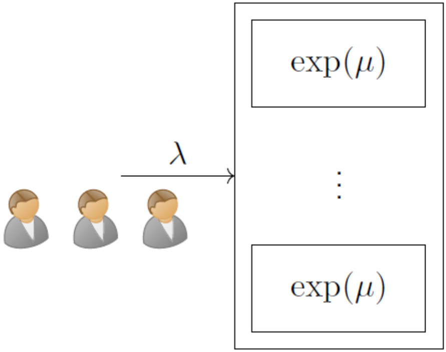
- Considere un banco donde sólo existe una ventanilla.
- Sea X_t : número de personas en el instante t.
- $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de nacimiento y muerte con

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \qquad && n \geq 0 \\ \mu_n &= \mu \qquad && n \geq 1. \end{aligned}$$

Outline

Cola M|M|S

En este caso, existen S servicios disponibles.



Cola M|M|S

Cola M|M|S. Ejemplo

Considere el mismo banco anterior, pero con S ventanillas.

$$\lambda_n = \lambda \qquad n \geq 0$$
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases}$$

Efectivamente, cuando hay $n \leq s$ personas en el banco, todas están atendidas y las salidas ocurran a una tasa $n\mu$. A cambio, cuando $n > s$, todas las ventanillas están ocupadas y las salidas ocurren con tasa $s\mu$.