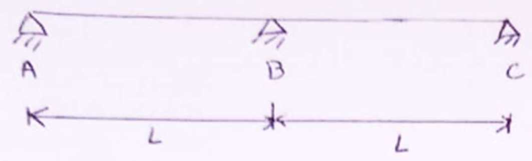
Test nº 5 2020



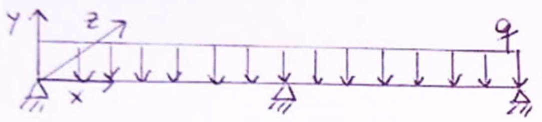
$\rho_{cu} = 9\,gr/cm^3$

$\varnothing_{cu} = 3\,cm$

$E_{cu} = 1{,}1 \times 10^4 \frac{kg}{mm^2} = 1{,}1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$

$y_{máx} = 50\,cm$

Solución



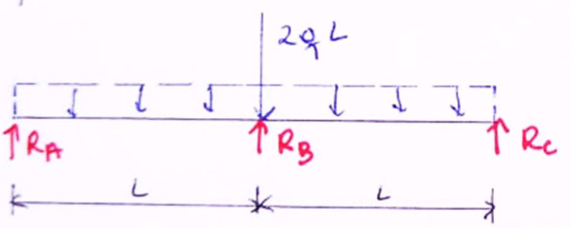
$\boxed{q = m \cdot g}$

$$A_{cable} = \frac{(3cm)^2 \times \pi}{4} = 7{,}07\,cm^2$$

$$q = m \cdot g = \rho_{cu} \cdot A_{cable} \cdot g = 9\frac{gr}{cm^3} \times 7{,}07\,cm^2 \times g = 63{,}63 \times 10^{-3}\,\frac{kgf}{cm}$$

Además $q = \frac{Fuerza}{L}$

Ahora buscaremos las reacciones a través de la sumaria de fuerza y momentos.



Observamos que por la simetría del problema

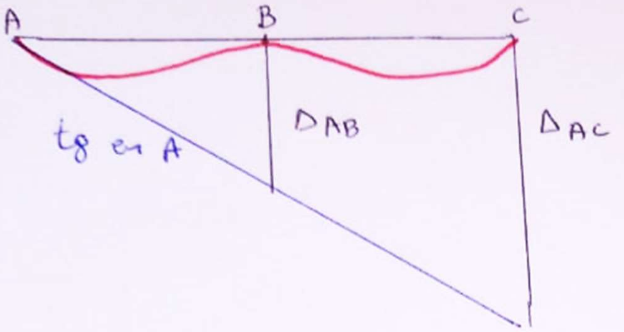
$R_A = R_C$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \quad 2R_A + R_B = 2qL = 2 \cdot 63{,}63 \times 10^{-3} \cdot L = 0{,}127\,L$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \quad 2R_A L + R_B L = 2qL \cdot L \Rightarrow 2R_A + R_B = 2qL \; (*)$$

$\Rightarrow$ No obtenemos una nueva ec. al utilizar la sumatoria de momentos.

Por tanto, tenemos 1 ec y 2 incógnitas. Necesitamos otra ecuación para encontrar las reacciones. Utilizaremos el método del área y momento del área.

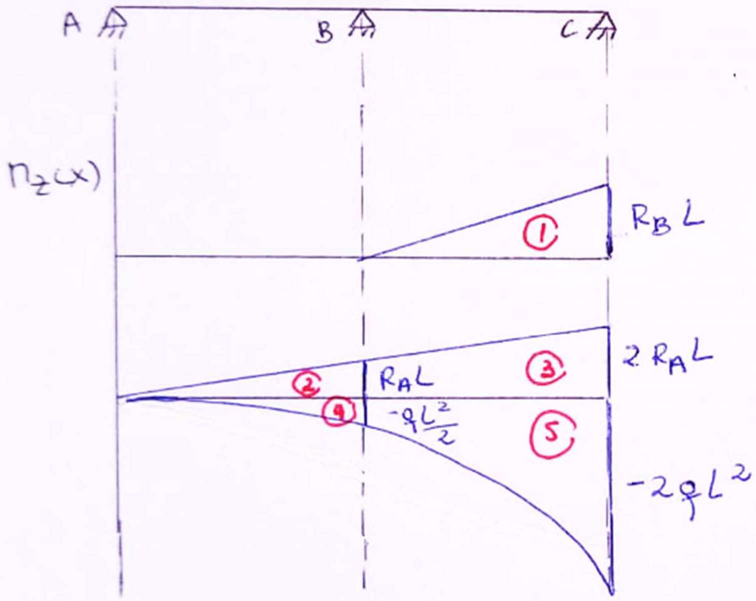


Por trigonometría

$$\frac{\Delta_{AC}}{2L} = \frac{\Delta_{AB}}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{AC} = 2\,\Delta_{AB}}$$

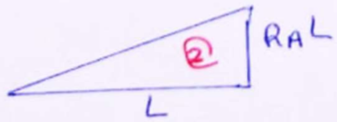
Ahora graficaremos el diagrama del momento flector, para facilitar el análisis, graficaremos por separado cada uno de los momentos que ejercen las diferentes fuerzas presentes en nuestro problema.

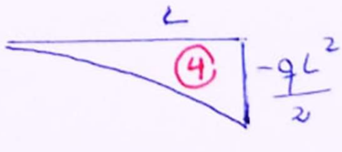


Ahora aplicamos el método del momento del área

$\Delta_{AB} =$ momento del área del diagrama $\frac{M}{EI}$ entre A y B respecto de B

Para este caso observamos que las áreas comprendidas entre A y B corresponden al área 2 y 4.





$$\text{Area}_2 = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{L \cdot R_A L}{2}$$

$$\text{centroide} = \frac{L}{3}$$

$$\text{Area}_4 = \frac{b\cdot h}{3} = \frac{L \cdot -\frac{qL^2}{2}}{3}$$

$$\text{centroide} = \frac{L}{4}$$

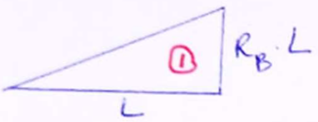
$$\Delta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{L \cdot R_A L}{2} \cdot \frac{L}{3} + \frac{L \cdot -qL^2}{3} \cdot \frac{L}{4} \right]$$

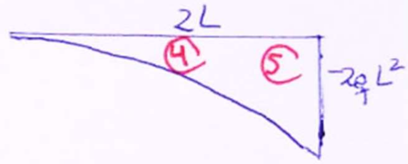
$$\Delta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{R_A L^3}{6} - \frac{qL^4}{24} \right]$$

Ahora para Δ_{AC}

Δ_{AC} = Momento del área del diagrama $\frac{M}{EI}$ entre A y C c/r de C

En este caso las áreas comprendidas entre A y C son: 1, 2, 3, 4, 5





$\text{Area}_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{R_B \cdot L \cdot L}{2}$ centroide $= \frac{L}{3}$

$\text{Area}_{2,3} = b \cdot h = \frac{2L \cdot 2R_A L}{2}$ centroide $= \frac{2L}{3}$

$\text{Area}_{4,5} = \frac{b \cdot h}{3} = \frac{2L \cdot -2qL^2}{3}$ centroide $= \frac{2L}{4}$

$$\Delta_{AC} = \frac{1}{EI}\left[\frac{R_B \cdot L \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} + \frac{2L \cdot 2R_A L}{2} \cdot \frac{2L}{3} + \frac{2L \cdot -2qL^2}{3} \cdot \frac{2L}{4} \right]$$

$$\Delta_{AC} = \frac{1}{EI}\left[\frac{R_B L^3}{6} + \frac{4}{3} R_A \cdot L^3 - \frac{2}{3} q L^4 \right]$$

Sabemos que $\Delta_{AC} = 2\Delta_{AB}$, por tanto:

$$\frac{R_B L^3}{6} + \frac{4}{3} R_A L^3 - \frac{2}{3} q L^4 = 2\left[\frac{R_A L^3}{6} - \frac{qL^4}{24} \right]$$

Pero de **(*)** $R_B = 2qL - 2R_A$, entonces:

$$\frac{(2qL - 2R_A)L^3}{6} + \frac{4}{3} R_A L^3 - \frac{2}{3} q L^4 = 2\left[\frac{R_A L^3}{6} - \frac{qL^4}{24} \right]$$

$$\frac{2qL^4}{6} - \frac{R_A L^3}{3} + \frac{4}{3} R_A L^3 - \frac{2}{3} q L^4 = \frac{R_A L^3}{3} - \frac{qL^4}{12}$$

$$-\frac{R_A L^3}{3} + \frac{4}{3} R_A L^3 - \frac{R_A L^3}{3} = \frac{-2qL^4}{6} + \frac{2}{3} qL^4 - \frac{qL^4}{12}$$

$$R_A \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right) = qL\left(\frac{-2}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} \right)$$

$$R_A \cdot \frac{2}{3} = qL\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\underbrace{R_A = \frac{3}{8} qL = 24L \times 10^{-3}}$$

Para el caso de vigas no empotradas, sabemos que

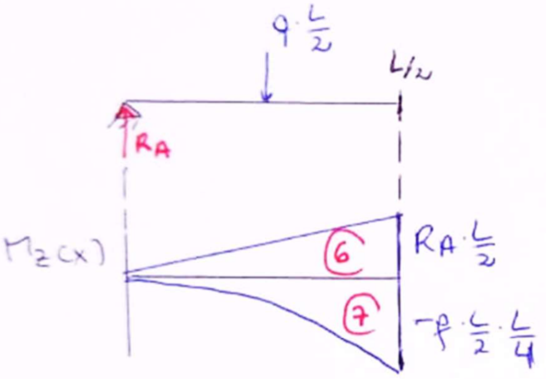
$$y_x = \frac{\Delta_{AB} \; x}{\text{largo } AB} - \Delta_{Ax}$$

En nuestro caso sabemos que y_{max} ocurre en $\frac{L}{2}$, por tanto

$$y_{max} = \frac{\Delta_{AB} \cdot \frac{L}{2}}{\text{largo } AB} - \Delta_{A\,L/2} = \frac{\Delta_{AB}\, L/2}{L} - \Delta_{A\,L/2} = \frac{\Delta_{AB}}{2} - \Delta_{A\,L/2}$$

Siendo $\Delta_{A\,L/2}$ = Momento del área del diagrama $\frac{M}{EI}$ entre A y $\frac{L}{2}$ respecto de $\frac{L}{2}$.

Analizaremos el diagrama de momento flector en esta sección



$$\text{Area}_6 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{L/2 \cdot R_A \cdot L/2}{2}$$

$$\text{centroide}_6 = \frac{b}{3} = \frac{L/2}{3}$$

$$\text{Area}_7 = \frac{b \cdot h}{3} = \frac{L/2 \cdot -q\, L/2 \cdot L/4}{3}$$

$$\text{centroide}_7 = \frac{b}{4} = \frac{L/2}{4}$$

Por tanto:

$$\Delta_{A\,L/2} = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{2} \cdot R_A \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{L}{2} \cdot -q \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{4} \right]$$

$$\Delta_{A\,L/2} = \left[\frac{R_A}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^4 \right] \frac{1}{EI}$$

Por tanto:

$$y_{max} = \frac{\Delta_{AB}}{2} - \Delta_{A\,L/2}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{R_A L^3}{12} - \frac{q L^4}{24} \right] - \frac{1}{EI}\left[\frac{R_A L^3}{48} - \frac{q L^4}{384} \right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{R_A L^3}{16} - \frac{7}{384} q L^4 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} L^4 \left[\frac{24}{16} - \frac{7}{384} \times 63{,}63 \right] \times 10^{-3}$$

$$= \frac{L^4}{EI} \times 0{,}34 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad 50\,cm = \frac{0{,}34 \times 10^{-3}\, L^4}{E\, I_{zz}}$$

$$I_{zz} = \frac{\pi \times 3^4}{64} = 4\,cm^4$$

$$I_{zz} \cdot E = 4 \times 1{,}1 \times 10^6\ kg \cdot cm^2$$

$$\Rightarrow \quad L^4 = \frac{50\ E\, I_{zz}}{0{,}34 \times 10^{-3}} = \frac{50 \times 4 \times 1{,}1 \times 10^6}{0.34 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \quad L^4 = 6{,}11 \times 10^{11}$$

$$\Rightarrow \quad L = 884\,cm = 8{,}8\ m \,//$$