Listado 1: Análisis Numérico II, 2021

Soluciones Sugeridas

Problema 1. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermitianas. Supongamos que A y B son semejantes (i.e. $A = PSP^{-1}$ para alguna matriz invertible P). Demuestra que A y B son unitariamente semejantes (i.e., $A = WBW^*$ para alguna matriz unitaria W).

Solución. Como A y B son hermitianas, su factorización de Schur es de la forma $A = UD_1U^*$ y $B = VD_2V^*$, con U, V unitarias y D_1, D_2 diagonales. Dado que A y B son semejantes, tienen los mismos valores propios. En consecuencia, $D_1 = D_2 = D$. De esta forma, podemos establecer que

$$D = U^*AU = V^*BV \implies A = (UV^*)B(VU^*) = (UV^*)B(UV^*)^*$$

Donde $(UV^*)(UV^*)^* = UV^*VU^* = UU^* = I$, y además $(UV^*)^*(UV^*) = VU^*UV^* = VV^* = I$. En conclusión, vimos que A y B son semejantemente unitarias mediante la matriz $W := UV^*$.

Problema 2. Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz compleja de orden n.

(1) Demostrar que *(Teorema de Gerschgorin -Hadamard)*

$$\mathrm{sp}(\boldsymbol{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}$$

(2) Demostrar que, si la matriz $\boldsymbol{A}$ es de diagonal estrictamente dominante, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

Entonces es invertible.

Solución.

(1) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A con un vector propio $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \neq 0$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \implies \forall i \,:\, 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

Reordenando términos,

$$\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i - a_{ii}x_i = (\lambda - a_{ii})x_i$$

Escogiendo $x_i = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$, podemos escribir

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\frac{\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}| \tag{☺}$$

En otras palabras, para cada valor propio de A, encontramos un índice $i \in \{1,\ldots,n\}$ de modo que se satisface (☺), demostrando así la inclusión referida. $\square$

(2) Supongamos, por contradicción, que A no es invertible. Por lo tanto, $\lambda = 0$ es valor propio de la matriz A diagonal dominante. En virtud del teorema anterior,

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{sp}(A) &\implies \exists i \in \{1,\ldots,n\} \text{ tal que } 0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{i\neq j}|a_{ij}|\} \\ &\iff \exists i \in \{1,\ldots,n\} : |a_{ii}| \leq \sum_{i\neq j}|a_{ij}| \end{aligned}$$

Lo que claramente es una contradicción, pues supusimos que A era diagonal dominante. Luego, cero no es valor propio de A, por lo que concluimos que esta matriz es invertible.

Problema 3. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pruebe que

a) $\ker(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \ker(\boldsymbol{A}); \ker(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \ker(\boldsymbol{A}^T)$

b) Sabiendo que $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$, deduzca además que $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$

Solución.

a) Sea $x \in \ker(A^TA) \subset \mathbb{R}^n$. Luego, $A^TAx = 0$. Multiplicando por la izquierda a ambos lados por el vector x^T, obtenemos $x^TA^TAx = 0$. Equivalentemente, $(Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 = 0$, lo que nos permite establecer que $Ax = 0$, con lo que $x \in \ker(A)$. Recíprocamente, sea $x \in \ker(A)$, luego $Ax = 0$. Multiplicando a ambos lados por A^T, es directo que $x \in \ker(A^TA)$.

b) Observemos que A^TA es de orden $n \times n$, mientras que AA^T es de orden $m \times m$. Aplicando en ambos casos el teorema *rango-nulidad* (o teorema de las dimensiones), podemos establecer que

$$\begin{aligned} \dim(\ker(AA^T)) + \dim(\mathrm{Im}(AA^T)) = m = \dim(\ker(A^T)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) \\ \dim(\ker(A^TA)) + \dim(\mathrm{Im}(A^TA)) = n = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) \end{aligned}$$

Utilizando lo demostrado en (a), se obtiene que

$$r(AA^T) = r(A^T), \quad r(A^TA) = r(A)$$

Lo que completa la demostración.

Problema 4. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$$

Aplicar el Lema de Schur para encontrar una matriz unitaria U tal que $U^*AU = T$, con T triangular superior.

Solución. Notemos que el polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (-5 + i - \lambda)(6 + i - \lambda) + 30 = \lambda^2 - (1 + 2i)\lambda - 1 + i$$

Por lo que los valores propios de A son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 1 + i$. Ahora calculamos el subespacio propio asociado a λ_1

$$S_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \text{span}\{(-3, 1)^T\}$$

De esta forma, podemos definir un vector propio normalizado $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)^T$, y a partir de este completar una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$. Definimos entonces $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^T$, con lo que la matriz U es

$$U = \begin{bmatrix} v_1 | v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora U^*AU,

$$\begin{aligned} U^*AU &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 + i & -15 \\ 2 & 6 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 17 - 3i & 51 + i \\ 1 + i & 3 + 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10i & 170 \\ 0 & 10 + 10i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 17 \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix} := T \end{aligned}$$

Finalmente, la factorización de Schur de la matriz A es

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 17 \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

▲▼▲