UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 1 ALGEBRA III 525201-0 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Se incluye el tiempo dedicado para enviar su desarrollo por CANVAS/E-mail.

Problema 1. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}^+$ dada por:

$$\forall\, a\,,b \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^m\,.$$

1.1) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{Z}^+$. **(15 puntos)**

La mayoría supo lo que había que establecer: probar que la relación es cuestión es refleja, antisimétrica y transitiva.

Veamos que $\mathcal{R}$ es refleja: Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, dado que $a = a^1$, se tiene validado que $\exists\, m = 1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a = a^m$, lo cual equivale a decir que $a\mathcal{R}a$. Siendo a fijo pero arbitrario, queda establecido que $\mathcal{R}$ es refleja.

Veamos que $\mathcal{R}$ es antisimétrica: Sean $a\,,b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a\,\mathcal{R}\,b \,\wedge\, b\,\mathcal{R}\,a$. Esto implica que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^{m_1} \quad \wedge \quad \exists\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, b \,=\, a^{m_2} \quad \Rightarrow \quad a \,=\, (a^{m_2})^{m_1} \,=\, a^{m_1\, m_2} \quad \Rightarrow \quad m_1\, m_2 \,=\, 1\,,$$

lo cual sucede (en $\mathbb{Z}_0^+$) cuando $m_1 \,=\, m_2 \,=\, 1$. Esto conduce a afirmar que $a = b$, y esto conlleva a decir que la relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

Veamos que $\mathcal{R}$ es transitiva: Sean $a\,,b\,,c \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a\,\mathcal{R}\,b \,\wedge\, b\,\mathcal{R}\,c$. Esto implica que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^{m_1} \quad \wedge \quad \exists\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, b \,=\, c^{m_2} \quad \Rightarrow \quad a \,=\, (c^{m_2})^{m_1} \,=\, c^{m_1\, m_2}\,.$$

Luego, $\exists\, m := m_1\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, c^m$, es decir $a\,\mathcal{R}\,c$. De aquí se desprende que $\mathcal{R}$ es transitiva.

Finalmente, queda probado que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, y por ello, podemos utilizar la notación $\leq$ para referirnos a ella.

1.2) Determine si $\mathcal{R}$ es de orden parcial o total en $\mathbb{Z}^+$. **(05 puntos)**

(Aquí varios dieron la respuesta correcta, pero olvidaron fundamentar correctamente.)

Consideremos $2\,,3 \in \mathbb{Z}^+$. Como

$$2 \,=\, 3^m \Leftrightarrow m \,=\, \log_3(2) \notin \mathbb{Z}_0^+ \quad \wedge \quad 3 \,=\, 2^n \Leftrightarrow n \,=\, \log_2(3) \notin \mathbb{Z}_0^+\,,$$

se desprende que $\exists\, 2\,,3 \in \mathbb{Z}^+ \,:\, 2 \,\not\leq\, 3 \,\wedge\, 3 \,\not\leq\, 2$. En consecuencia, $\leq$ es relación de orden parcial.

1.3) Además, determine si $\mathcal{R}$ tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo. En caso de existir, indique cuál(es) es/son tal(es) elemento(s). **(10 puntos)**

Maximal. Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Si $a = 1$, se observa que $1 \neq 2$ y $1 \,\leq\, 2$, pues $1 = 2^0$, con $m = 0 \in \mathbb{Z}_0^+$. Esto descarta a 1 como candidato a elemento maximal.

Sea $a > 1$ tal que es una potencia perfecta, es decir $\exists\, b \in \mathbb{Z}^+\backslash\{a\} \,:\, \exists\, m \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a \,=\, b^m$. Esto nos dice que $a \,\leq\, b$, con $b \neq a$, con lo cual estos elementos a también se descartan como elementos maximales.

Sea $a > 1$ que no es potencia perfecta (i.e. $\forall\, b \in \mathbb{Z}^+\backslash\{a\} \,:\, \forall\, m \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a \,\neq\, b^m$). Esto permite reconocer que a es un elemento maximal. De esta manera, el conjunto de maximales de $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ es el conjunto $S := \{a \in \mathbb{Z}^+\backslash\{1\} \,:\, a\ \text{no es potencia perfecta}\}$.

Máximo. Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Por lo discutido en clases, quedan descartados como candidato a máximo, $a = 1$ y aquellos $a \in \mathbb{Z}^+\backslash\{1\}$ que son potencia perfecta. Por otro lado, si $a \in S$, los únicos elementos que se relacionan con a son sus potencias no negativas, es decir $\forall\, m \in \mathbb{Z}_0^+ : a^m \leq a$. Esto descarta a a como candidato a máximo. En consecuencia, en $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ no hay máximo.

Minimal. A simple inspección, $1 \in \mathbb{Z}^+$ es un minimal, pues si $x \in \mathbb{Z}^+$ es tal que

$$x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{Z}_0^+ : x = 1^m \quad \Rightarrow \quad x = 1\,.$$

Sea $a \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$ otro candidato a minimal. Como $1 \leq a$ (pues $1 = a^0$), a no puede ser minimal. Por tanto, $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ tiene un único minimal: 1.

Mínimo. Sea $b \in \mathbb{Z}^+$. Como $1 \leq b$ (pues $1 = b^0$, con $0 \in \mathbb{Z}_0^+$), se tiene que $\forall\, b \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq b$, lo cual garantiza que 1 es un mínimo de $(\mathbb{Z}^+, \leq)$, y es el único.

Problema 2. Sea A un conjunto no vacío, y sea $B \subseteq A$ un subconjunto fijo de A. Se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(A)$ por:

$$\forall\, X, Y \subseteq A : X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow B \cap X = B \cap Y\,.$$

2.1) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$. **(10 puntos)**

La mayoría abordó bastante bien este item. Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

2.2) Para $A := \{1,2,3,4,5\}$ y $B := \{1,2,3\}$, determine $[X]_{\mathcal{R}}$, siendo $X := \{1,3,5\}$. **(10 puntos)**

Es seguir la definición de clases de equivalencia.

$$[X]_{\mathcal{R}} := \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap X = \{1,3\}\} = \{\{1,3\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,4,5\}\}\,.$$

2.3) Para $A := \{1,2,3\}$, y $B := \{1,2\}$, determine de manera **explícita** una partición de $\mathcal{P}(A)$ inducida por $\mathcal{R}$. **(10 puntos)**

El ejercicio persigue calcular $A/\mathcal{R}$, para después concluir. Esto obliga a calcular todas las clases de equivalencias inducidas por $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}
[\emptyset]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \emptyset = \emptyset\} = \{\emptyset, \{3\}\} = [\{3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{1\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{1\} = \{1\}\} = \{\{1\}, \{1,3\}\} = [\{1,3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{2\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{2\} = \{2\}\} = \{\{2\}, \{2,3\}\} = [\{2,3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{1,2\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{1,2\} = \{1,2\}\} = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\} = [\{1,2,3\}]_{\mathcal{R}}\,.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce $A/\mathcal{R}$ y se induce la partición de A.