Listado 2: Interpolación polinomial

1. Problemas con papel y lápiz

1. Sea p el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola a la "función logaritmo natural" $f := \ln$, en los nodos $1, 3$ y 5.
   (a) Defina los polinomios en la base de Lagrange para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ asociada a los nodos $1, 3$ y 5.
   (b) Exprese p como combinación lineal de los polinomios anteriores.
   (c) Demuestre, invocando el Teorema del error de interpolación, que $|f(4) - p(4)| \leq 1$.

2. Sean a un elemento de $\mathbb{R}\backslash\{-4, -3, -2\}$ y $f : A \subseteq [-4, -2] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{a^2 - x}$.
   (a) Determine el polinomio p de grado menor o igual que 2 que interpola a f en los nodos $-4, -3$ y -2.
   (b) Determine un valor para $a \in \mathbb{R}\backslash\{-4, -3, -2\}$ de modo que
   $$|f(-2.5) - p(-2.5)| \leq 10^{-4}.$$
   (c) Determine un valor para $a \in \mathbb{R}\backslash\{-4, -3, -2\}$ de modo que para todo $x \in [-4, -2]$ se cumpla que
   $$|f(x) - p(x)| \leq 10^{-4}.$$

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que
   $$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Determine el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a f en los nodos $\left\{\frac{1}{i+1}\right\}_{i=0}^{n}$.

4. Considere
   $$f : [1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$
   (a) Determine el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola a f en los nodos $1, 2$ y 3.
   (b) Demuestre que para todo $x \in [1, 3]$ se cumple que
   $$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^3}{120}.$$
   Sugerencia: Puede utilizar que $\max_{1 \leq x \leq 3} |(x-1)(x-2)(x-3)| \leq \frac{4}{10}$. Demuéstrelo.

5. Considere $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.
   (a) Determine p, polinomio de interpolación de f en los nodos $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

(b) Utilizando que

$$\max_{-\frac{3}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}} \left|\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| \leq 1,$$

concluya que para todo $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ se cumple que $|f(x)-p(x)| \leq \dfrac{\pi^4}{1944}$.

(c) Justifique, sin calcular nuevos polinomios, por qué el polinomio q que interpola a f en $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ es igual a p.

6. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función par, es decir, f es tal que para cada $x \in [-1,1]$ se cumple que $f(x) = f(-x)$.

   Sea p el polinomio de grado menor o igual que $2n$ que interpola a f en los nodos

   $$\frac{j}{n}, \quad j \in \{-n, -n+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

   Demuestre que p también es una función par, es decir, que para $x \in [-1,1]$ se cumple que $p(x) = p(-x)$.

   Sugerencia: Defina $q \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R} : q(x) := p(-x)$. Demuestre, utilizando el teorema de existencia y unicidad del polinomio de interpolación, que q y p son iguales.

7. Considere los siguientes puntos del plano $(-1,5), (0,1), (1,1), (2,11)$.

   (a) Verifique que los polinomios p y q, definidos para cada $x \in \mathbb{R}$, por $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $q(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + 1$, interpolan los puntos dados.

   (b) Explique por qué esto no contradice el teorema visto en clases sobre la unicidad del polinomio de interpolación.

8. Suponga se quiere determinar un polinomio de grado menor o igual que 1 que interpole a la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. La manera en que se escojan los nodos $x_0, x_1 \in [-1,1]$ en los que el polinomio interpola a f influyen en el error de interpolación

   $$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi_x)\,, \quad \text{donde } \xi_x \in (-1,1).$$

   Suponga que $\max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| = 1$.

   (a) Determine una cota para $|f(x)-p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$.

   (b) Determine una cota para $|f(x)-p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -\sqrt{2}/2$ y $x_1 = \sqrt{2}/2$.

   (c) Determine una cota para $|f(x)-p(x)|$ en el caso en que $x_0 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 = \frac{1}{2}$.

   ¿En cuál de los casos obtiene la menor cota para el error de interpolación?

   Observación: Dado que en este ejemplo $\max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| = 1$ y para cada $x \in [-1,1]$ existe $\xi_x \in (-1,1)$ de modo que

   $$|f(x)-p(x)| = \frac{1}{2}|(x-x_0)(x-x_1)||f''(\xi_x)|,$$

   se tiene que para cada $x \in [-1,1]$

   $$|f(x)-p(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)|.$$

   El valor de $|(x-x_0)(x-x_1)|$ depende de x_0 y x_1, por tanto, el error de interpolación depende de cómo se escojan x_0 y x_1.

9. Suponga que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números reales distintos entre sí. Para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ definimos

$$c_i := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_j}{x_j - x_i}.$$

Notar que $\forall\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \,:\, c_i = \ell_i(0)$, donde $\{\ell_i\}_{i=0}^n \subseteq \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de polinomios de Lagrange de grado a lo más n, construidos con respecto a los nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$. Demuestre que

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k = 1, 2, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, & \text{si } k = n+1. \end{cases}$$

2. Experimentos computacionales

1. Determine, si es posible, el polinomio que interpola a los siguientes puntos del plano. Represéntelo como combinación lineal de los polinomios en la base canónica del espacio correspondiente.

   (a) $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$,

   (b) $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$,

   (c) $(-1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(5, 2)$,

   (d) $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -1)$.

   Compruebe los resultados obtenidos utilizando el comando `polyfit` de MATLAB.

2. El Cuadro 1 muestra datos de temperatura de una sala a partir de las 6:00 hrs y cada 20 minutos.

Minutos después de 6:00 hrs	temperatura (^{0}C).
0	10
20	20
40	30

Cuadro 1: Datos para ejercicio 2

   (a) Encuentre el polinomio (de menor grado posible) que interpola a los datos de la tabla.

   (b) Deduzca la temperatura de la sala a las 6:05 y 6:35 hrs.

3. Determine el polinomio que interpola a la función $\mathrm{sen}|_{[0,\pi]}$ (restricción de la función circular seno al intervalo $[0, \pi]$) en los siguientes puntos:

   (a) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ y $x_2 = \pi$.

   (b) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ y $x_3 = \pi$.

   (c) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$ y $x_4 = \pi$.

   Compruebe los resultados obtenidos en cada caso utilizando el comando `polyfit` de MATLAB, grafique la función, el polinomio obtenido y los puntos de interpolación.

4. Para cada uno de los casos anteriores:

   (a) Obtenga, utilizando la expresión para el error de interpolación polinomial vista en clase, una cota para el error de interpolación.

   (b) Grafique la función $E := \mathrm{sen} - p$ (siendo p el polinomio de interpolación correspondiente), evaluada en 100 puntos entre 0 y π. Compruebe que se satisface la cota encontrada en $(4a)$.