



Listado 1 - Análisis Real I (525301)

Ejercicio 1. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales con $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Estudie la convergencia de las siguientes series:

- a) $\sum a_n^2$,
- b) $\sum \sqrt{a_n}$,
- c) $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$,
- d) $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

Ejercicio 2. Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demuestre que f es acotada en E .

Muestre que f no es necesariamente acotada si E no es acotado.

Ejercicio 3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Pruebe que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Ejercicio 4. Decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es *abierta* si $f(V)$ es abierto en Y para todo V abierto en X .

Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abierta es monótona.

Ejercicio 5. Demuestre que toda función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convexa es continua.

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Demuestre que $g \circ f$ es continua.

Ejercicio 6. Sea X un espacio métrico y $K, F \subset X$ disjuntos con K compacto y F cerrado. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ si $p \in K, q \in F$.