3.3 El Wronskiano

Definición

Sean $y_1(x), y_2(x) \dots, y_n(x) \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, llamamos **Wronskiano** *de las funciones $y_1, \dots, y_n$ al determinante:*

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Observación. *El wronskiano define una función con valores reales sobre el intervalo* $I = \bigcap_{i=1}^{n} Dom(y_i(t))$.

Ejemplo 3.6. *Calcule el wronskiano entre $y_1(x) = 1, y_2(x) = \sin(x)$ y $y_3(x) = \cos(x)$.*

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x), y_3(x)] &= \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix} \\ &= -\cos^2(x) - \sin^2(x) = -1. \end{aligned}$$

Teorema 3.4

Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$ funciones tales que $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$ en algún $x_0 \in I$. Entonces $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes en $\mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

Demostración: *Para $n = 2$. Por reducción al absurdo, si suponemos que existen constantes α_1, α_2 tales que*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0,$$

pero $\alpha_1 \neq 0$.

Entonces

$$\begin{cases} y_1(x) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x) = 0 \\ y_1'(x) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'(x) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x) y_2'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x) y_2'(x) \\ y_1'(x) y_2(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'(x) y_2(x). \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = 0, \forall x \in I.$$

En particular, $W[y_1, y_2](x_0) = 0$. Pero, por hipótesis $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto y_1 e y_2 son independientes.

$\square$

Ejercicio: *Verifique que las funciones $y_1(x) = x$, e $y_2(x) = e^{2x}$ son linealmente independientes.*

Observación. *El teorema anterior es sólo una condición suficiente para la independencia lineal de las funciones. El recíproco no es cierto, es decir, el Wronskiano puede ser nulo en un intervalo I y las funciones consideradas ser linealmente independientes sobre I.*

Ejemplo 3.7. *Consideremos $b > a > 0$ reales cuales quiera y las funciones:*

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in [0,a], \\ (x-a)^2 & si \quad x \in (a,b]. \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & si \quad x \in [0,a], \\ 0 & si \quad x \in (a,b]. \end{cases}$$

Supongamos que

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0.$$

Entonces, en el intervalo $[0,b]$ se tiene que

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_2 = 0,$$

ya que $y_2(x) \neq 0$ en $[0,a)$.
Análogamente, sobre el intervalo $(a,b]$ se tiene que

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 y_1(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = 0,$$

ya que $y_1(x) \neq 0$ en $(a,b]$.

Es decir, y_1, y_2 son linealmente independientes.
Sin embargo, si consideramos el Wronskiano $W[y_1(x), y_2(x)]$ en el intervalo $[0,b]$:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} 0 & (x-a)^2 \\ 0 & 2(x-a) \end{vmatrix} = 0.$$

Similarmente, $W[y_1(x), y_2(x)]$ se anula en el intervalo $(a,b]$. Por lo tanto, $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$ en el intervalo $[0,b]$, pero las funciones $y_1(x), y_2(x)$ son linealmente independientes.

Sin embargo, se puede demostrar que cuando las funciones son soluciones de una EDO homogénea de segundo orden se tiene que:

Teorema 3.5

[Wronskiano de soluciones]
Suponga que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación lineal de segundo orden homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo abierto I en el cual a_1 y a_0 son continuas.
Entonces, y_1 e y_2 son linealmente independientes si y solo si $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Demostración: *Basta demostrar que si existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, entonces y_1 se puede escribir como*

$$y_1(x) = K y_2(x), \forall x \in I,$$

i.e. y_1 e y_2 son linealmente dependientes.

Para ver lo anterior note que, dado que y_1 e y_2 son soluciones de la EDO homogénea:

$$\begin{aligned} y_2(x)\left(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\right) &= 0 \\ y_1(x)\left(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que

$$y_1''(x)y_2(x) - y_2''(x)y_1(x) + a_1(x)\underbrace{\left(y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)\right)}_{W[y_1,y_2](x)} = 0. \tag{5}$$

Pero sabemos que $W[y_1, y_2]$ es una función, y $y_2, y_1 \in \mathcal{C}^2$. Por lo tanto, podemos calcular la derivada del Wronskiano como sigue:

$$\frac{d}{dx}W[y_1, y_2](x) = \frac{d}{dx}[y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)] = y_1''(x)y_2(x) - y_2''(x)y_1(x).$$

Volviendo a (5) nos queda que W es solución de la EDO de variables separables:

$$\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0.$$

Ya sabemos que la solución de esta ED es de la forma

$$W[y_1, y_2](x) = C \exp\left\{-\int a_1(x)dx\right\},$$

con C una constante.

Lo que significa que $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, o sucede que $W(x) \equiv 0$.

Ahora, por hipótesis tenemos que $W[y_1, y_2](x_0) = 0$. Es decir, la solución del PVI:

$$\begin{cases} W' + a_1(x)W & = 0 \\ W(x_0) & = 0 \end{cases}$$

es

$$W[y_1, y_2](x) \equiv 0 \text{ en } I.$$

Finalmente, como y_1 e y_2 son no triviales, esto último sucede si

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1},$$

lo que implica que $y_1(x) = Ky_2(x)$, para todo $x \in I$.

□

Ya sabemos que una EDO de segundo orden con coeficientes regulares tiene dos soluciones, y que a partir de una solución y_1 podemos construir la segunda $y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx$ (fórmula de Abel). Queremos ver si estos dos elementos del kernel son linealmente independientes. Para esto basta verificar que el Wronskiano no se anula en al menos un punto:

Por Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \frac{d}{dx}\left(y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx\right) \\ &= y_1'(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + y_1(x)\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}. \end{aligned}$$

Luego, usando propiedades del determinante:

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \int \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \int \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix} \\
&= y_1(x) \begin{vmatrix} 1 & \int \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \int \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix} \\
&= y_1(x) \begin{vmatrix} 1 & \int \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \\ 0 & \dfrac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$W[y_1, y_2](x) = e^{-\int a_1(x)dx} \neq 0, \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por el Wronskiano de soluciones, tenemos entonces que y_1 e y_2 son soluciones independientes.

Hemos demostrado que una EDO lineal de segundo orden con coeficientes continuos tiene dos soluciones linealmente independientes. *Con esto tenemos que el kernel del operador lineal asociado T tendrá una base de al menos dos elementos. De aquí,*

$$\mathtt{Ker}(T) \geq 2.$$

Será que es realmente 2?

Teorema 3.6

Sean y_1, y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

con p, q funciones continuas en el intervalo abierto I. Si Y es cualquier solución de la ecuación diferencial en I, entonces existen constantes c_1, c_2 tales que: $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para toda $x \in I$.

Demostración: *Sea $x_0 \in I$, entonces se tiene que:*

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= Y(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= Y'(x_0). \end{aligned}$$

Como las soluciones y_1, y_2 son linealmente independientes se tiene que $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ (teorema anterior), por lo tanto el sistema de ecuaciones de incógnitas c_1, c_2 tendrá única solución. Supongamos que la solución al sistema de ecuaciones son las constantes $\tilde{c_1}, \tilde{c_2}$, entonces definimos la función:

$$G(x) = \tilde{c_1}y_1(x) + \tilde{c_2}y_2(x).$$

Si evaluamos en $x_0 \in I$, tenemos:

$$\begin{aligned} G(x_0) &= \tilde{c_1}y_1(x_0) + \tilde{c_2}y_2(x_0) = Y(x_0), \\ G'(x_0) &= \tilde{c_1}y_1'(x_0) + \tilde{c_2}y_2'(x_0) = Y'(x_0). \end{aligned}$$

Como ambas soluciones tienen los mismos valores iniciales en x_0, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para PVIs se puede concluir que Y y G son soluciones de la EDO sobre I y además que:

$$Y(x) = G(x) = \tilde{c_1}y_1(x) + \tilde{c_2}y_2(x).$$

Teorema 3.7

[Teorema de la dimensión]

Consideremos la EDO lineal homogénea

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos funciones continuas dadas, entonces el conjunto

$$S = \left\{u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) : u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Además $\mathtt{dim}(S) = 2$.

Observación. *Observe que en el Teorema de la Dimensión, $S = \mathtt{Ker}(T)$ para $T = D^2 + p(\cdot)D + q(\cdot)$ el operador diferencial asociado a la EDO lineal homogénea. Luego, el teorema nos dice que cualquier base para $\mathtt{Ker}(T)$ debe contener dos elementos.*

Definición

Toda base para el kernel del operador asociado a la EDO lineal homogénea se denomina **conjunto fundamental** *para la EDO.*

Observación: *De todo lo anterior se tiene que si y_1, y_2 son soluciones de la EDO*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

en un intervalo I, entonces $\{y_1, y_2\}$ determina un conjunto fundamental de soluciones para la EDO si y sólo si $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 3.8. *Las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = x$ son linealmente independientes en el espacio $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$, para cualquier intervalo I. Sin embargo, podemos asegurar que $\{e^x, x\}$ no es un conjunto fundamental para la EDO*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

en cualquier intervalo I que contenga al 1 pues en este punto el Wronskiano se anula, i.e.

$$W[y_1, y_2](1) = 0.$$

Teorema 3.8

[Forma de la Solución General]
Si la función $y(x)$ es solución de la EDO no homogénea:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x),$$

con operador diferencial asociado T, entonces la solución se $y(x)$ es de la forma:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

donde y_p es una **solución particular** *de $T[y] = f$ e y_h es una solución arbitraria del $\mathit{Ker}(T)$, i.e.* **solución de la EDO homogénea asociada**.
Más aún, y_h se puede escribir como

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

con $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un conjunto fundamental, y $C_1, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias.

Ejemplo 3.9. *Note que $y_p(x) = x + \frac{1}{2}$ es solución particular de $y'' + 2y = 2x + 1$. Además, $y_h(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$ es solución de la ED homogénea asociada: $y'' + 2y = 0$, i.e. $y_h \in \mathit{Ker}(T)$, con*

$$T[y] = D^2y + 2D^0y.$$

Entonces, la solución general de la EDO viene dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) + x + \frac{1}{2},$$

para C_1, C_2 constantes arbitrarias.