UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra III, 525201
Duración: 100 minutos
9 de julio de 2018
Prof.: Anahí Gajardo

Solución Evaluación de Recuperación

1. **(20 puntos)** Considere la siguiente relación en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$A\ R\ B\ \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\ \textit{invertible}, MA = B$$

   a) Demuestre que se trata de una relación de equivalencia.
   Solución. *Debemos probar que es refleja, simétrica y transitiva.*

   Refleja) *Si se toma $M = I_n$, que es invertible, entonces se cumple $I_nA = A$, por lo tanto $A\ R\ A$.*

   Simétrica) *Suponiendo que $A\ R\ B$, tenemos que existe M invertible tal que $MA = B$, como M es invertible, podemos multiplicar la igualdad por la izquierda por M^{-1}, obtenemos: $A = M^{-1}B$, lo cual prueba que $B\ R\ A$, pues M^{-1} es una matriz invertible.*

   Transitiva) *Supongamos que $A\ R\ B$ y $B\ R\ C$, entonces existen dos matrices invertibles, M, N tales que $MA = B$ y $NB = C$. reemplazando la primera ecuación en la segunda, obtenemos $NMA = C$, como la matriz NM es invertible, esto prueba que $A\ R\ C$.*

   b) Calcule $[I_n]$, la clase de equivalencia de la matriz identidad respecto a esta relación.
   Solución.

$$\begin{aligned}
[I_n] &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \exists M\ \textit{invertible}, MI_n = A\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \exists M\ \textit{invertible}, M = A\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A\ \textit{es invertible}\}
\end{aligned}$$

   Así $[I_n]$ es el conjunto de las matrices invertibles de $n \times n$.

   c) Demuestre que si $A\ R\ B$, entonces los sistemas $Ax = \Theta$ y $Bx = \Theta$, tienen los mismos conjuntos solución, es decir: $\{x \mid Ax = \Theta\} = \{x \mid Bx = \Theta\}$.
   Solución. *Lo que aquí se pude es demostrar que los conjuntos solución de los sistemas lineales asociados a las matrices A y B son el mismo.*

   Basta demostrar que si $A\ R\ B$, entonces $\{x \mid Ax = \Theta\} \subseteq \{x \mid Bx = \Theta\}$, pues como la relación es simétrica, la otra inclusión se tendrá usando que $B\ R\ A$, lo cual ya sabemos que se tiene.

   Sea entonces x tal que $Ax = \Theta$. Como $A\ R\ B$, existe una matriz invertible M tal que $MA = B$, entonces $Bx = MAx = M\Theta = \Theta$, por lo tanto $Bx = \Theta$, que era lo que se quería demostrar.

2. **(20 puntos)** Sea $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ una matriz cuya forma canónica de Jordan es la siguiente.

$$J = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre el polinomio característico y el polinomio minimal de A.

Solución. *Como es una matríz triangular superior, el polinomio característico es simplemente* $p(x) = (7 - x)^6$.

Además la matriz está compuesta por 3 cajas de Jordan, la mayor de las cuales es de orden 3, por lo tanto el polinomio minimal es $m(x) = (7 - x)^3$.

b) Determine la dimensión de todos los núcleos iterados de A.

Solución. *Hay 3 cajas de Jordan, por lo tanto el primer núcleo iterado tiene dimensión 3.*

La dimensión del segundo núcleo iterado es igual a la dimensión del primer núcleo más el número de cajas de orden mayor o igual a 2. Hay una caja de orden 3, otra de orden 2 y otra de orden 1, por lo tanto el segundo núcleo tiene dimensión 5.

Finalmente, el tercer núcleo es igual a todo el espacio pues hay un solo valor propio y el exponente de estabilización es 3, entonces su dimensión es 6.

c) Calcule A^2 y A^{-1}.

Solución. *Era imposible calcular* A^2, *o* A^{-1} *sin conocer las matrices de paso, pero calcular* J^2 *y* J^{-1} *era lo que se esperaba, este fue un error de escritura por parte de la profesora.*

$$J^2 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

La inversa es más trabajosa, se puede calcular usando Gauss-Jordan, y es muy legítimo, sólo bastan 6 iteraciones para lograrlo. Pero también es posible hacerlo usando el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que el polinomio minimal anula la Matriz.

Entonces $\Theta = (7I_6 - A)^3 = 343I_6 - 147A + 21A^2 - A^3$.

Despejamos la identidad de esta ecuación y obtenemos: $I_6 = \frac{1}{343}A(147I_6 - 21A + A^2)$, *de donde* $A^{-1} = \frac{1}{343}(147I_6 - 21A + A^2)$, *y lo análogo para* J^{-1}. *Entonces*

$$J^{-1} = \frac{1}{343}\left[\begin{pmatrix} 147 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 147 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 147 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 147 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 147 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 147 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 147 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 147 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 147 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 147 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 147 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 147 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 49 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}\right]$$

$$J^{-1} = \frac{1}{343}\begin{pmatrix} 49 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

3. **(20 puntos)** Considere el operador $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido como sigue.

$$F(x, y) = (2y - x, y)$$

a) Demuestre que la forma bilineal $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un producto interno.

$$B((x, y), (a, b)) = 2ax + ay + bx + by$$

Solución. *Hay varias maneras de demostrar esto, usaré aquí la que vimos en el curso, pero las técnicas del curso pasado son válidas.*
Observamos que la forma bilineal se puede escribir matricialmente como sigue.

$$B((x, y), (a, b)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz representante es simétrica, entonces basta analizar su espectro y verificar que sus valores propios son positivos.
Su polinomio característico es $p(x) = (2-x)(1-x)-1 = 2-3x+x^2-1 = x^2-3x+1$.
Sus raíces son: $x = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$. *Como* $\sqrt{5} < 3$, *vemos que ambas son positivas, y entonces la forma bilineal es definida positiva y es un producto interno.*

b) Calcule el adjunto de F respecto al producto interno B.

Solución. *Lo haremos usando la matriz, para ello necesitamos una base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$ *respecto al p.i. definido por* B. *Usamos Gram-Schmidt a partir de la base canónica.*

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0) \\ v_2 &= (0, 1) - \frac{B((0, 1), (1, 0))}{B((1, 0), (1, 0))}(1, 0) \\ &= (0, 1) - \frac{1}{2}(1, 0) \\ &= (-1/2, 1) \end{aligned}$$

Luego normalizamos.

$$\begin{aligned} u_1 &= (1/\sqrt{2}, 0) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{B((-1/2, 1), (-1/2, 1))}}(-1/2, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1/2}}(-1/2, 1) \\ &= \sqrt{2}(-1/2, 1) \\ &= (-1/\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Calculamos la matriz representante de F respecto a esta base $\mathcal{B} = \{: (1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.
$[F(1/\sqrt{2}, 0)]_{\mathcal{B}} = [(-1/\sqrt{2}, 0)]_{\mathcal{B}} = (-1, 0)$
$[F(-1/\sqrt{2}, \sqrt{2})]_{\mathcal{B}} = [(2\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}, \sqrt{2})]_{\mathcal{B}} = (6, 1)$

Así,

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[F^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} [F(x,y)]\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} [(x,y)]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}x + y/\sqrt{2} \\ y/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}x - y/\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2}x + 7y/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde finalmente

$$\begin{aligned} F(x,y) &= -(\sqrt{2}x + y/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}, 0) + (6\sqrt{2}x + 7y/\sqrt{2})(-1/\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ &= (-x - y/2, 0) + (-6x - 7y/2, 12x + 7y) \\ &= (-7x - 4y, 12x + 7y) \end{aligned}$$

c) Concluya que F es diagonalizable.

Solución. *No se puede concluir que F sea diagonalizable del anterior análisis, pues F no es normal respecto al producto interno dado, para ello basta calcular $[F]_{\mathcal{B}}[F^*]_{\mathcal{B}}$ y $[F^*]_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}}$ y ver que son diferentes, en efecto,*
$[F]_{\mathcal{B}}[F^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 37 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$[F^*]_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 37 \end{pmatrix}$.
Podría ser diagonalizable si fuera normal respecto a otro producto interno, pero en ese caso es más simple calcular sus valores propios y estudiar diagonalizabilidad directamente. Vemos que en efecto, por ser una matriz triangular superior, sis valores propios están en la diagonal, son 1 y -1, cada uno con multiplicidad algebraica 1, entonces F sí es diagonalizable.

d) Calcule su matriz representante respecto a la base canónica. Observe que la matriz no es simétrica, ni conmuta con su traspuesta ¿Como es posible que F sea diagonalizable?

Solución. *Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces,*

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad [F^*]^t_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}. \qquad [F]^t_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$[F]^t_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad [F]_{\mathcal{C}}[F]^t_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

De donde vemos que en efecto no conmuta con su traspuesta.

Sin embargo, esto no está relacionado con la normalidad de F puesto que la traspuesta de su matriz representante no coincide con la matriz representante de F^*, como se puede ver; de ser normal, es con esta última que debería conmutar, pero no conmuta tampoco, pues como vimos, F no es normal respecto al p.i. planteado.

Por otro lado, ya vimos que es diagonalizable, por lo cual ha de existir otro p.i. respecto al cual F sí será normal, en cuyo caso su matriz representante respecto a una base ortonormal respecto a ese p.i. conmutará con su traspuesta.