

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 7. Ejercicio adicional.

Sea (X, d) un espacio métrico y $\phi : X \rightarrow X$ una función cualquiera. Por razones obvias, a cada $x \in X$ tal que $\phi(x) = x$ se lo llama un *punto fijo* de la función ϕ .

Por otra parte, una función $\phi : X \rightarrow X$ se dice que es una *contracción*, si existe una constante $C \in [0, 1)$ tal que

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

El nombre proviene del hecho que la función “contrae”, en el sentido que la distancia de las imágenes por ϕ de dos puntos x e y es menor que la distancia entre esos puntos.

Demuestra el siguiente resultado conocido como el *lema de contracciones*.

Lema. Si X es un espacio métrico completo y $\phi : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces ϕ tiene un y sólo un punto fijo.