Dinámica - Leyes del movimiento y aplicaciones

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Universidad de Concepción

Oficina 315 - Tercer Piso - FCFM

1. Contenidos

2. Resultados de Aprendizaje

- Aplicar las leyes del movimiento de Newton para resolver problemas de dinámica sin fricción y con fricción.
- Identificar, en primera aproximación, los vectores involucrados en el movimiento circular uniforme.
- Aplicar las leyes del movimiento de Newton en el desarrollo de problemas de dinámica de partículas en movimiento circular uniforme.

1. Introducción

En los capítulos §3 y §4 estudiamos el movimiento de un cuerpo, partícula u objeto en una y en dos o tres dimensiones. Dicho estudio se hizo en términos de los vectores de posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ de los objetos o partículas, sin hacer mención a la causa que los originaba.

En el presente capítulo consideraremos dos factores escenciales relacionados entre sí a los diferentes tipos de movimientos: La *fuerza* y la *masa*.

Este capítulo inicia el estudio de la parte de la mecánica clásica llamada *dinámica* e iniciaremos él con el estudio de las tres leyes básicas del movimiento, formuladas hace más de tres siglos por Isaac Newton.

1.4. Concepto de fuerza

Una clasificación de las fuerzas en fuerza de contacto o fuerza de campo es útil para la descripción y desarrollo de modelos macroscópicos.

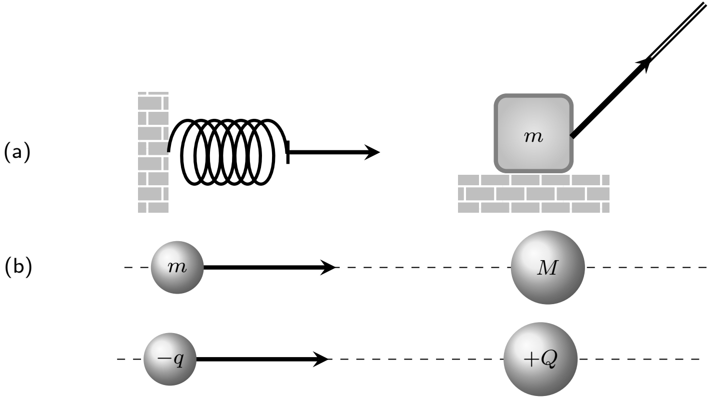


Figura 1. Diagrama de (a) algunas fuerzas de contacto y (b), de campo. En cada caso la flecha indica que algún agente externo está ejerciendo una fuerza sobre el objeto.

Sin embargo, las fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo:

- *Fuerzas gravitacionales*; entre dos objetos masivos (con masas);
- *Fuerzas electromagnéticas*; entre cuerpos cargados eléctricamente;
- *Fuerzas débiles*; que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo.
- *Fuerzas fuertes*; entre partículas subatómicas.

Está experimentalmente comprobado que las fuerzas se comportan como vectores: Tienen magnitud y dirección. Cuando varias fuerzas actúan simultáneamente y en el mismo punto sobre un cuerpo u objeto se deben aplicar las reglas del álgebra vectorial para obtener la fuerza neta o resultante sobre dicho cuerpo u objeto. Repase el capítulo §2.

1.5. Primera ley de Newton y marcos inerciales

El movimiento de un objeto puede ser observado y estudiado desde diferentes marcos de referencia.

La primera *ley* de Newton del movimiento, también llamada ley de la *inercia*, define un conjunto particular de sistemas de referencia llamados marcos de referencia *inerciales*, y puede ser establecida como sigue:

Primera Ley de Newton del movimiento*: Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia en el que el objeto tiene una aceleración cero.*

Marco de referencia inercial*: Marco de referencia que se mueve con velocidad constante.*

Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante con relación a un marco inercial *es* en sí mismo un marco inercial. Luego, la Tierra y todo marco unido a ella es considerado un marco inercial.

En el siglo XVI se cría que el estado natural de la materia era el estado de reposo.

Galileo: La naturaleza de un cuerpo puesto en movimiento *no* era la de detenerse después de iniciar su movimiento, sino que la de *resistirse* a un cambio en su movimiento.

> Primera ley del movimiento: *En ausencia de fuerzas externas y, cuando visto desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo continua en reposo, y un objeto en movimiento con velocidad constante continua en movimiento con velocidad constante (esto es con rapidez y dirección constante en una línea recta).*

Si ninguna fuerza actúa sobre un objeto, su aceleración es cero.

Un objeto *aislado* (no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante.

La resistencia de un objeto a cambiar su velocidad se llama **inercia**.

Todo objeto que acelera experimenta una fuerza: *Fuerza*; aquello que causa un *cambio* en el estado de movimiento de un objeto.

1.6. Masa de un cuerpo

La masa de un cuerpo es una propiedad del cuerpo que especifica cuánta resistencia un objeto opone a un cambio en su velocidad.

Cuantitativamente, suponga que una fuerza actúa sobre un cuerpo de masa m_1 y le produce una aceleración de magnitud a_1 y, la *misma* fuerza aplicada a un cuerpo de masa m_2, le produce una aceleración de magnitud a_2.

Se define la relación entre las dos masas (m_1/m_2) como la razón *inversa* entre las magnitudes de las aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{1}$$

Se deduce que: La magnitud de la aceleración de un objeto es *inversamente* proporcional a su masa cuando sobre el actúa una fuerza conocida.

La masa (un escalar) es una propiedad inherente de un objeto y es independiente de los alrededores del objeto y del método que se aplica para medirla.

Masa y *peso* son a menudo confundidos. El *peso* de un objeto es la magnitud de la fuerza *gravitacional* ejercida sobre él y varía con la posición.

1.7. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton responde a la pregunta: ¿Qué acontece a un objeto cuando sobre el actúa una o más fuerzas?

Si una fuerza horizontal $\vec{F}$ actúa sobre un bloque, éste adquiere cierta aceleración $\vec{a}$. Si se aplica el doble de la fuerza, la aceleración del bloque se duplica. Si la fuerza se triplica, la aceleración del bloque también se triplica, $3\vec{a}$, y así sucesivamente.

Segunda ley del movimiento. *En presencia de un marco de referencia innercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:*

$$\vec{a} \propto \sum \vec{F} \quad \text{y} \quad \vec{a} \propto \frac{1}{m}$$

$\sum \vec{F}$: Fuerza *neta* o *resultante* o *desequilibrada* o *total* de la suma de varias fuerzas.

Eligiendo una constante de proporcionalidad igual a 1, el enunciado matemático de la segunda ley del movimiento es:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \tag{2}$$

En términos de las componentes escalarares, la Ec.(2) implica

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \quad \text{y} \quad \sum F_z = ma_z \tag{3}$$

En el SI de unidades la unidad de fuerza es el *newton* (N). Una fuerza de $1\,\mathrm{N}$ es la fuerza que, cuando aplicada a un objeto de $1\,\mathrm{kg}$ de masa, le produce una aceleración de $1\,\mathrm{m/s^2}$, o el cambio en su velocidad en $1\,\mathrm{m/s}$ por cada segundo:

$$1\,\mathrm{N} \equiv 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{4}$$

Las dimensiones de una fuerza son $[\vec{F}] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^1\mathrm{T}^{-2}$.

Ejemplo

Un disco de hockey de masa 0.30 kg puede deslizar sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerza sobre el disco que se muestran en la Fig.2, de magnitudes $|\vec{F}_1| = 5.0\,\mathrm{N}$ y $|\vec{F}_2| = 8.0\,\mathrm{N}$. Calcule tanto la magnitud cuanto la dirección de la aceleración que adquiere el disco.

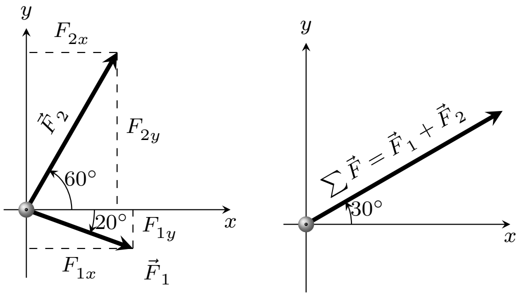


Figura 2. Disco de hockey en una superficie sin fricción sobre el cual actúan, simultáneamente, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Solución

Las coordenadas rectangulares de las fuerzas que actúa sobre el disco son:

$$F_{1x} = F_1 \cos(-20^\circ) = (5.0\,\mathrm{N})(0.94) = 4.7\,\mathrm{N}$$
$$F_{1y} = F_1 \sin(-20^\circ) = -(5.0\,\mathrm{N})(0.34) = -1.7\,\mathrm{N}$$

para la fuerza $\vec{F}_1$ y

$$F_{2x} = F_2 \cos(60^\circ) = (8.0\,\mathrm{N})(0.50) = 4.0\,\mathrm{N}$$
$$F_{2y} = F_2 \sin(60^\circ) = (8.0\,\mathrm{N})(0.34) = 6.9\,\mathrm{N}$$

para la fuerza $\vec{F}_2$. Usando las Ecs.(3), las componentes rectangulares de la aceleración del disco son

$$a_x = \frac{1}{m}\sum F_x = \frac{1}{0.30\,\mathrm{kg}}[(4.7 + 4.0)\,\mathrm{N}] = 29\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_y = \frac{1}{m}\sum F_y = \frac{1}{0.30\,\mathrm{kg}}[(-1.7 + 6.9)\,\mathrm{N}] = 17\,\mathrm{m/s^2}$$

Continuación

La magnitud de la aceleración del discos es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(29^2 + 17^2)\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^4} = 34\,\mathrm{m/s}^2.$$

La dirección de la aceleración del disco es:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30^\circ.$$

1.8. Fuerza gravitacional y peso

La fuerza de atracción que la tierra ejerce sobre un objeto se llama fuerza *gravitacional* $(\vec{F}_g)$, está dirigida hacia el centro de la tierra y su magnitud se llama *peso* del objeto.

Objetos en caída libre experimentan una aceleración $\vec{g}$ hacia el centro de la tierra.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g, \quad \vec{a} = \vec{g}; \quad \rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{g},$$

luego, el peso de un objeto es,

$$|\vec{F}_g| \equiv F_g = mg. \tag{5}$$

El peso de los objetos es menor a mayores altitudes que al nivel de mar.

En la Ec.(5) la masa m cuantifica la intensidad de la atracción gravitacional entre el objeto y la tierra y recibe el nombre de masa *gravitacional*.

Aún cuando esa cantidad sea diferente en comportamiento de la masa inercial, una de las conclusiones experimentales de la dinámica Newtoniana es que la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

1.9. Tercera ley del movimiento

Las fuerzas son *interacciones* entre dos objetos: Este principio se conoce como la tercera ley del movimiento:

Tercera ley del movimiento. *Si dos objetos interactúan entre sí, la fuerza* $\vec{F}_{12}$ *que el objeto 2 ejerce sobre el objeto 1 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza* $\vec{F}_{21}$ *que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{6}$$

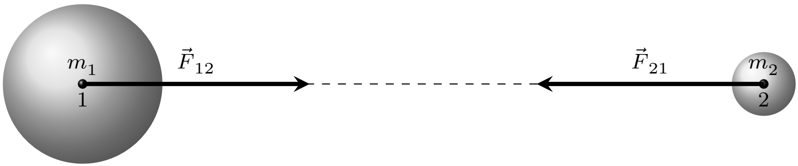


Figura 3. Tercera ley del movimiento.

La fuerza que el primer objeto ejerce sobre el segundo es llamada, popularmente, fuerza de *acción* y la fuerza que el segundo objeto ejerce sobre el primero, fuerza de *reacción*: Son términos usados por conveniencia.

En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos diferentes y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrica, magnética, etc.).

Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caida libre es la fuerza gravitacional que la tierra ejerce sobre el proyectil $\vec{F}_{\mathrm{pt}}$ (t = Tierra, p = proyectil) y la magnitud de esa fuerza es mg.

La reacción a esa fuerza es la fuerza que el proyectil ejerce sobre la Tierra $\vec{F}_{\mathrm{tp}}$. Sin embargo, debido a la enorme diferencia entre las masas de los objetos, la aceleración de la tierra debida a la fuerza de atracción del proyectil es prácticamente nula.

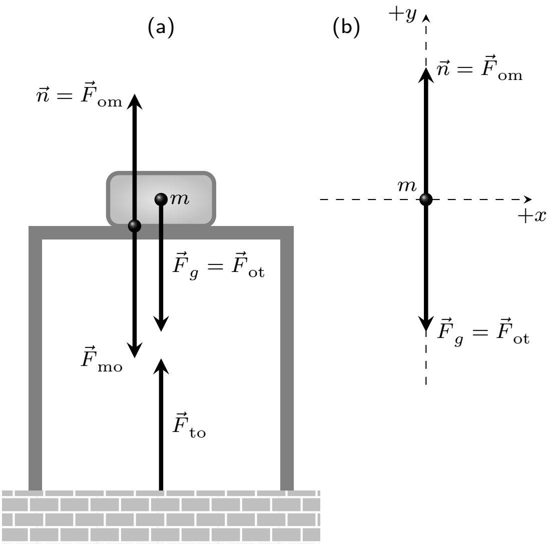


Figura 4. Objeto de masa m en reposo sobre una mesa y su diagrama de cuerpo libre.

El objeto de masa m de la Fig.4 está en reposo sobre una mesa (vea la Fig.4(a)). La fuerza de acción de la tierra sobre el objeto es $\vec{F}_{\rm ot}$ (t = Tierra; o = objeto).

La fuerza de reacción del objeto sobre la tierra es $\vec{F}_{\rm to}$.

La mesa ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{n} = \vec{F}_{\rm om}$ sobre el objeto llamada fuerza *normal* (perpendicular a la superficie de contacto entre los dos objetos). Esta fuerza puede tener cualquier valor, hasta el punto de romper la mesa. Como la aceleración del objeto es cero, de la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum \vec{F} = \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{n} + m\vec{g} = 0, \quad n\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} = 0, \quad n = mg.$$

La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el objeto; la fuerza neta sobre el objeto es cero.

La fuerza de reacción a $\vec{n}$ es la fuerza que el objeto ejerce hacia abajo sobre la mesa, $\vec{F}_{\rm mo} = -\vec{F}_{\rm om} = -\vec{n}$. Note que las fuerzas que actúan sobre el objeto son $\vec{F}_g$ y $\vec{n}$ [ver Fig.4b)].

1.10. Algunas aplicaciones de las leyes del movimiento

En lo que sigue aplicaremos las leyes de Newton para resolver problemas con objetos en equilibrio ($\vec{a} = \vec{0}$) o con aceleración ($\vec{a} \neq \vec{0}$) a lo largo de una línea recta bajo la acción de fuerzas externas *constantes*. No consideraremos el movimiento rotacional ni la fricción de las superficies por ahora.

Ignoraremos la masa de cualquier cuerda, soga o cable involucrado.

La magnitud de la fuerza que ejerce cualquier elemento de una cuerda sobre el elemento adyacente es la misma para todos los elementos a lo largo de la cuerda.

Se usarán los términos sinónimos *ligero* o de *masa despreciable* para indicar que una masa se ignora cuando trabaje los problemas.

Cuando una cuerda unida a un objeto se usa para tirar de él, la cuerda ejerce una fuerza $\vec{T}$ sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, y paralela a la cuerda.

La magnitud $|\vec{T}| \equiv T$ de dicha fuerza se llama *tensión* en la cuerda. La tensión, como magnitud de un vector es una cantidad escalar.

1.10.1. Partículas en equilibrio

Consideraremos el modelo de partícula en *equilibrio*:

$$\sum \vec{F} = \vec{0};\ \left(\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0\right) \quad \therefore \quad \vec{a} = \vec{0};\ (a_x = a_y = a_z = 0).$$

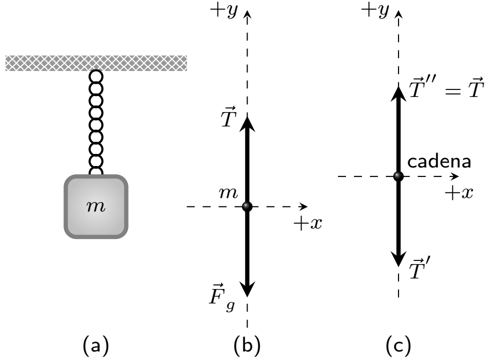


Figura 5. Objeto de masa m colgado de una cadena ligera y diagramas de cuerpo libre.

El diagrama de cuerpo libre (vea la Fig.5(b)) muestra que las fuerzas que actúan sobre el objeto son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{F}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{T}$ que ejerce la cadena.

Dado que la fuerza en la dirección x no existe, $\sum F_x = 0$ no nos entrega información útil. Así tenemos:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = T - F_g = 0 \quad \rightarrow \quad T = F_g \tag{7}$$

Note que $\vec{F}_g$ y $\vec{T}$ no son un par acción-reacción, debido a que actúan sobre el mismo objeto.

La fuerza de reacción a $\vec{T}$ es $\vec{T}'$, la fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena (vea la Fig.5(c)).

Dado que la cadena es una partícula en equilibrio, el techo debe ejercer sobre la cadena una fuerza $\vec{T}''$ que es igual en magnitud a la magnitud de $\vec{T}'$ y apunta en la dirección opuesta.

1.10.2. Partículas bajo una fuerza neta

Cuando un objeto experimenta una aceleración, su movimiento puede ser analizado con el modelo de partícula bajo una fuerza *neta*, através de la Ec.(2).

En la Fig.6(a) la fuerza $\vec{T}$ tira al cuerpo de masa m hacia la derecha (sin roce). Deseamos calcular la $\vec{a}$ del objeto y la $\vec{F}$ que la superficie ejerce sobre él.

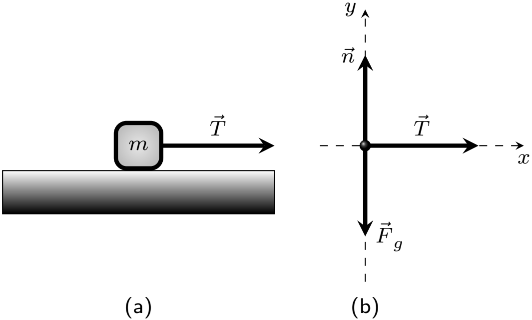


Figura 6. Objeto de masa m sobre una superfice sin roce y diagrama de cuerpo libre.

La fuerza $\vec{T}$ sobre el objeto actúa a través del cable: La $|\vec{T}|$ es igual a la tensión de la cuerda.

El diagrama de cuerpo libre para el objeto se ilustra en la Fig.6(b). Las fuerzas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$, la fuerza normal ejercida por la superficie $\vec{n}$ y la fuerza $\vec{T}$ ejercida a través de la cuerda.

Podemos aplicar, ahora, la segunda ecuación en términos de las componentes escalares. Se tiene:

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{T}{m}$$
$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \rightarrow \quad n = F_g$$

O sea, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en dirección opuesta.

Si $\vec{T}$ es una fuerza constante, entonces $a_x = T/m$ también lo es.

En el caso anterior la magnitud de la fuerza normal $\vec{n}$ es igual a la magnitud de $\vec{F}_g$, pero esto no es siempre el caso.

Suponga que un objeto está sobre una mesa y Ud. empuja el objeto hacia abajo con una fuerza $\vec{F}$.

Como el objeto está en reposo,

$$\sum F_y = n - F_g - F = 0 \quad \rightarrow \quad n = F_g + F,$$

en cuyo caso la magnitud de la fuerza normal es mayor que el peso del objeto $(n \neq F_g)$.

Si aplica la misma fuerza hacia arriba, entonces

$$\sum F_y = n - F_g + F = 0 \quad \rightarrow \quad n = F_g - F,$$

es decir, la magnitud de la fuerza normal es menor que el peso del objeto. Si $F_g = F$, entonces $n = 0$ y el objeto está a punto de levantarse.

Ejemplo

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos atados a un soporte. Lo cables superiores soportan una tensión $\leq 100\,\text{N}$. ¿Se caerá el semáforo?

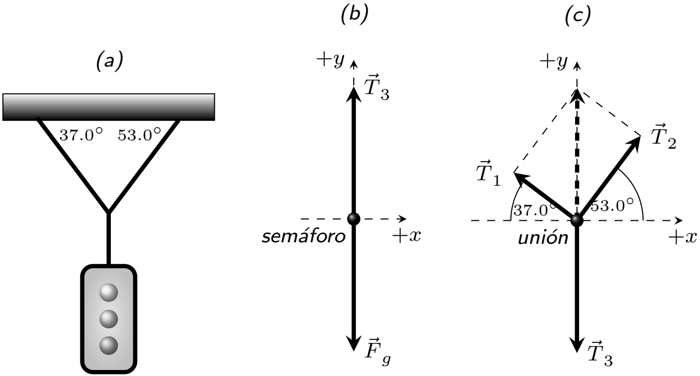


Figura 7. Semáforo y diagramas de cuerpo libre.

Solución

Semáforo. Está en equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = T_3 - F_g = 0, \quad \rightarrow \quad T_3 = F_g = 122\,\mathrm{N}$$

o sea, la tensión en la cuerda 3 es igual al peso del semáforo.

Punto de unión de los cables. También en equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = -T_1\cos(37.0^\circ) + T_2\cos(53.0^\circ) = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)}\right)$$
$$\sum F_y = T_1\sin(37.0^\circ) + T_2\sin(53.0^\circ) - T_3 = 0$$
$$\rightarrow \quad T_3 = T_1\sin(37.0^\circ) + T_2\sin(53.0^\circ)$$

Sustituyendo la expresión para T_3 *en la segunda expresión, se llega*

$$122\,\mathrm{N} = T_1\left[\sin(37.0^\circ) + \sin(53.0^\circ)\left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)}\right)\right] \quad \rightarrow \quad T_1 = 73.4\,\mathrm{N}$$

Continuación

Reemplazando en la expresión para T_2, se tiene

$$T_2 = \left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)} \right) T_1 = 1.33(73.4\,\mathrm{N}) = 97.6\,\mathrm{N}$$

Dado que las tensiones T_1 y T_2 son ambas $< 100\,\mathrm{N}$, ninguna de ellas se romperá y el semáforo no caerá.

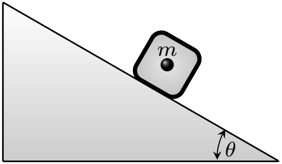
¿Que pasará si los ángulos de la Fig.7(a) fueran iguales? ¿Cuál sería la correspondencia entre T_1 y T_2?

Ejemplo

Un objeto de masa m está sobre un plano- inclinado un ángulo θ con relación a la horizontal- como mostrado en el esquema de la Fig.8. El objeto se libera desde el reposo y de la parte superior del plano:

a) Calcule la aceleración del objeto (no hay fricción- roce).

b) Si el largo del plano es d, calcule el tiempo que el objeto tarda en llegar a la base. Calcule su rapidez cuando llega a la base.



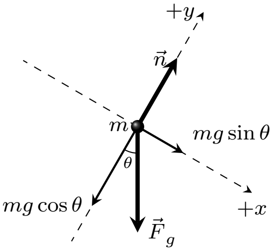


Figura 8. Objeto sobre el plano inclinado y su diagrama de cuerpo libre.

Solución

a) *Del diagrama de cuerpo libre se tiene lo siguiente:*

$$\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0, \quad \rightarrow \quad n = mg\cos\theta$$
$$\sum F_x = mg\sin\theta = ma_x, \quad \rightarrow \quad a_x = g\sin\theta$$

O sea, el objeto se desliza sobre el plano inclinado con una aceleración que no depende de la masa del mismo.

b) *El objeto tiene movimiento rectilíneo con aceleración constante* $a_x = g\sin\theta$ *y* $v_{x0} = 0$. *Usando ecuaciones conocidas, por un lado*

$$x(t) - x_0 = \Delta x = \cancelto{0}{v_{x0}t} + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}$$

y, por otro lado,

$$v_x^2(t) = \cancelto{0}{v_{x0}^2} + 2a_x\Delta x \quad \rightarrow \quad v_x(t) = \sqrt{2dg\sin\theta}$$

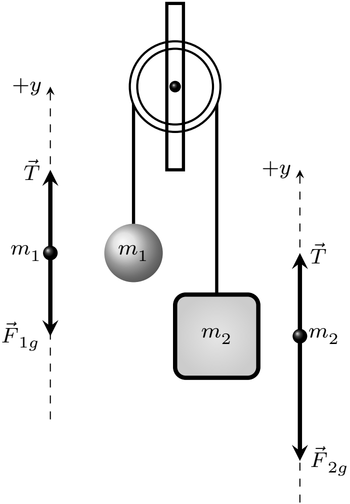


Figura 9. Máquina de Atwood y diagramas de cuerpo libre. $m_2 > m_1$.

Ejemplo

Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan en lados opuestos de una polea ligera y sin fricción, como esquematizado en la Fig.9, el dispositivo se llama máquina de *Atwood*. Se usa en el laboratorio para calcular el valor de g. Derive, analíticamente, una expresiones para calcular:

a) La aceleración de los objetos.

b) La tensión en la cuerda ligera.

Solución

a) *La tensión en cada punto de la cuerda es la misma, entonces* $a_{y1} = a_{y2} = a$.

Aplicando la segunda ley del movimiento a los cuerpos se tiene:

$$m_1; \sum F_y = T - F_{1g} = m_1(+a), \quad \rightarrow \quad T = m_1(g+a)$$
$$m_2; \sum F_y = T - F_{2g} = m(-a), \quad \rightarrow \quad T = m_2(g-a)$$

Igualando las expresiones para T *se llega a:*

$$m_1(g+a) = m_2(g-a) \quad \rightarrow \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g.$$

b) *Sustituyendo la expresión para* a *en cualquiera de las expresiones para* T*, se obtiene*

$$T = m_1 \left[1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\right] g \quad \therefore \quad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g.$$

¿Qué si $m_1 = m_2$*? ¿Y qué si* $m_2 \gg m_1$*?*

Ejemplo

La esfera (masa m_1) y el bloque (masa m_2) están unidos por una cuerda ligera que rodea una polea ligera sin roce (vea la Fig.10 y 11). El cuerpo de masa m_2 está sobre un plano inclinado (sin roce) un ángulo θ con la horizontal. Derive, analíticamente, expresiones para calcular $|\vec{a}|$ de los objetos y $\vec{T}$ en la cuerda.

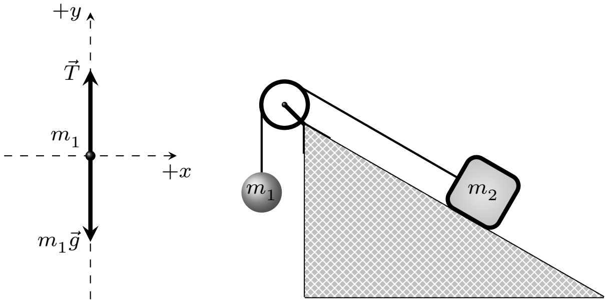


Figura 10. Diagrama de cuerpo libre para m_1 y objetos unidos por una cuerda ligera.

Continuación

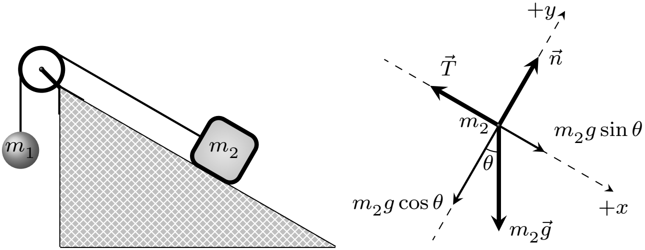


Figura 11. Objetos unidos por una cuerda ligera y diagramas de cuerpo libre para el cuerpo de masa m_2.

Solución

La tensión se transmite con igual magnitud a lo largo de toda la cuerda.

La magnitud de la aceleración de los objeto es la misma: $a_{y1} = a_{x2} = a$.

Solución

Aplicando la segunda ley del movimiento a m_1 y m_2, se tiene:

$$
\begin{aligned}
m_1: &\quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a, \quad \rightarrow \quad T = m_1(g+a),\\
m_2: &\quad \sum F_y = n - m_2 g\cos\theta = 0, \quad n = m_2 g\cos\theta\\
&\quad \sum F_x = -T + m_2 g\sin\theta = ma, \quad \rightarrow \quad T = m_2(g\sin\theta - a)
\end{aligned}
$$

Igualando las expresiones para T, se obtiene:

$$
m_1(g+a) = m_2(g\sin\theta - a) \quad \therefore \quad a = \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right) g.
$$

Sustituyendo la expresión de a en cualquiera de las expresiones para T se llega a:

$$
\begin{aligned}
T &= m_1(g+a) = m_1\left[g + \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right) g\right]\\
\therefore \quad T &= \left(\frac{m_1 m_2(\sin\theta + 1)}{m_1+m_2}\right) g.
\end{aligned}
$$

1.11. Fuerzas de fricción

Las fuerzas de *fricción* son comunes y muy importantes en nuestro día a día: Nos permiten caminar, escribir sobre un papel, borrar un documento, frenar vehículos, etc.

Desea mover un objeto de masa m sobre una superficie. Aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$. Si la fuerza aplicada es pequeña el objeto permanece en reposo.

La fuerza que se opone a $\vec{F}$, evitando que el objeto se mueva, se llama fuerza de fricción *estática* $\vec{f}_s$.

Mientras el objeto no se mueva $f_s = F$; si aumenta $\vec{F}$, también aumenta $\vec{f}_s$.

Experimentalmente, la fuerza de fricción depende de la naturaleza de las superficies.

Si aumenta $|\vec{F}|$, el cuerpo en algún valor de F se desliza. Inmediatamente antes de deslizarse, la fuerza de fricción tiene su máxima magnitud $f_{s,\text{máx}}$. Cuando F supera a $f_{s,\text{máx}}$ el objeto se mueve y acelera en la dirección de la fuerza $\vec{F}$ aplicada.

La fuerza de fricción para un objeto en movimiento se llama fuerza de fricción *cinética* $\vec{f}_k$.

Cuando el objeto está en movimiento, la fuerza de fricción cinética es menor que $f_{s,\,\text{máx}}$.

En ese caso, para un movimiento sobre el eje x, por ejemplo:

$$\sum F_x = F - f_k \propto a_x$$

Si $F = f_k$, entonces $a_x = 0$.

Si se elimina la fuerza $\vec{F}$ cuando el objeto está en movimiento,

$$\sum F_x = -f_k \propto a_x$$

Experimentalmente, y en buena aproximación,

$$f_{s,\,\text{máx}} \propto n, \quad f_k \propto n$$

con n la magnitud de la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto.

Importante en la solución de problemas con fuerza de fricción es:

- La $|\vec{f}_s|$ entre dos superficies en contacto tiene los valores

$$|\vec{f}_s| = f_s \leq \mu_s n, \quad \mu_s = \text{cte.; coeficiente de fricción estático.} \tag{8}$$

  y n es la magnitud de la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra. Justo antes de deslizarse, se cumple

$$f_s = f_{s,\,\text{máx}} = \mu_s n$$

  situación llamada movimiento *inminente*.

- La $|\vec{f}_k|$ entre dos superficies en contacto es dada por

$$f_k = \mu_k n, \quad \mu_k = \text{cte.; coeficiente de fricción cinético.} \tag{9}$$

- Valores típicos de μ_s y μ_k fluctúan en el intervalo $[0.03,\ 1.0]$.
- La dirección de la fuerza de fricción es paralela a la superficie de contacto entre los objetos y opuesta a la dirección del movimiento "real" (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática).
- Por lo general, los coeficientes de fricción no dependen del área de contacto entre las superficies de los objetos.

Ejemplo

Un método simple para medir coeficientes de fricción es como sigue. Un bloque se coloca sobre una superficie rugosa inclinado θ en relación con la horizontal (vea la Fig.12). θ aumenta hasta que el bloque empieza a moverse. μ_s se obtiene mediendo θ_c para el cual el movimiento empieza.

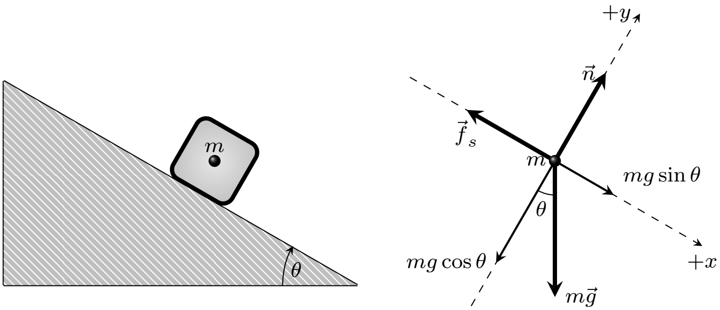


Figura 12. Cuerpo sobre plano inclinado con roce y diagrama de cuerpo libre del objeto.

Solución

Antes de deslizar, la aplicación de la segunda ley del movimiento al bloque da:

$$\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg\cos\theta$$
$$\sum F_x = mg\sin\theta - f_s = 0 \quad \rightarrow \quad f_s = mg\sin\theta$$

Cuando el bloque está a punto de deslizarse (movimiento inminente), $\theta = \theta_c$ *y* $f_{s,\,\text{máx}} \equiv \mu_s n$.

Sustituyendo esas expresiones en la segunda ecuación nos permite encontrar

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s n \quad \rightarrow \quad mg\sin\theta_c = \mu_s mg\cos\theta_c$$
$$\mu_s = \tan\theta_c \quad \rightarrow \quad \theta_c = \tan^{-1}(\mu_s).$$

Ejemplo

Un bloque de masa m_1 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una esfera de masa m_2 mediante una cuerda ligera que rodea una polea, también ligera, y sin fricción (vea la Fig.13). Se aplica a la masa m_1 una fuerza de magnitud F formando un ángulo θ con la horizontal, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Derive, analíticamente, una expresión para calcular la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

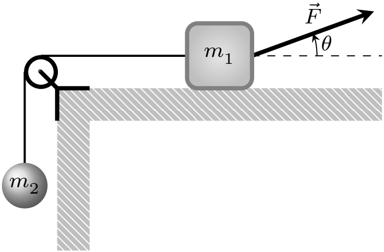


Figura 13. Esquema para el ejemplo.

Solución

Los diagramas de cuerpo libre para m_1 *y* m_2 *se muestran en la Fig.14.*

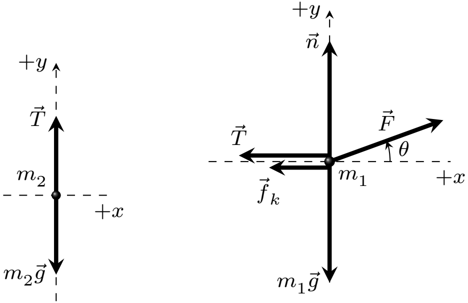


Figura 14. Diagramas de cuerpo libre de los respectivos cuerpos.

La tensión en la cuerda se transmite y $a_{y2} = a_{x1} = a$. *Para* m_2, *la aplicación de la segunda ley del moviiento nos da:*

$$\sum F_x = 0; \qquad \sum F_y = T - m_2 g = m_2 a \quad \rightarrow \quad T = m_2(a + g)$$

Continuación

Para el bloque de masa m_1, la aplicación de la misma ley da

$$\sum F_y = n + F\sin\theta - m_1 g = 0 \quad \rightarrow \quad n = m_1 g - F\sin\theta$$
$$\sum F_x = -T + F\cos\theta - f_k = m_1 a \quad \rightarrow \quad T = F\cos\theta - f_k - m_1 a.$$

Igualando las expresiones para T se llega a

$$m_2(a+g) = F\cos\theta - f_k - m_1 a \quad \rightarrow \quad a = \frac{F\cos\theta - f_k - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Recordando que $f_k = \mu_k n$, se tiene

$$f_k = \mu_k(m_1 g - F\sin\theta) \quad \rightarrow \quad a = \frac{F\cos\theta - \mu_k(m_1 g - F\sin\theta) - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

la cual reordenada nos lleva a

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - (m_2 + m_1\mu_k)g}{m_1 + m_2}$$

1.12. Partícula en movimiento circular uniforme

Ahora aplicaremos, con base en ejemplos, las leyes del movimiento a objetos que se mueven en trayectorias circulares.

Anteriormente vimos que cuando una partícula se mueve con rapidez constante v sobre una trayectoria circular de radio r ésta, la partícula, experimenta una aceleración de magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Esta aceleración $\vec{a}_c$ es llamada aceleración centrípeta porque se dirige hacia el centro del círculo y es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula $\vec{v}$.

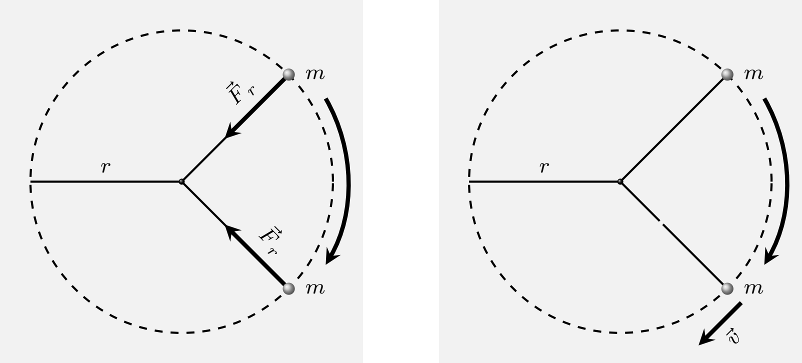


Figura 15. [Izquierda] Vista superior de una esfera unida a una cuerda y en movimiento circular uniforme sobre una superficie horizontal sin fricción. [Derecha] Cuando la cuerda se rompe, la esfera sigue una trayectoria tangente al círculo.

Considere una esfera de masa m atada a una cuerda de longitud r que se hace girar con rapidez constante sobre una trayectoria circular horizontal, como mostrado en la Fig.15[Izquierda].

Desprecie la fricción entre la bola y la superficie horizontal. La cuerda ejerce una fuerza radial sobre la esfera $\vec{F}_r$, la cual hace que la esfera siga la trayectoria circular. Esta fuerza está dirigida a lo largo de la cuerda y hacia el interior del círculo.

La aplicación de la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial permite escribir la siguiente relación entre fuerza neta y la aceleración centrípeta

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}. \tag{10}$$

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad de la partícula.

La ausencia de dicha fuerza implica que el objeto no se movería más en esa trayectoria circular, sino a lo largo de una línea recta tangente al círculo, como ilustrado en la Fig.15[Derecha].

Ejemplo

Una esfera de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La esfera da vueltas sobre un círculo horizontal similar al mostrado en la Fig.15. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, calcule la máxima rapidez a la que puede girar la esfera antes de que la cuerda se corte. Suponga que la cuerda permanece horizonta durante el movimiento.

Solución

La tensión en la cuerda mantiene a la esfera girando. Luego, de la Ec.(10) se tiene que

$$\sum F = T = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rT}{m}} = \sqrt{\frac{(1.50\,\mathrm{m})(50.0\,\mathrm{N})}{0.500\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{150\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$\therefore \quad v = 12.2\,\mathrm{m/s}.$$

Suponga que la esfera gira con la misma rapidez v en un círculo de mayor radio. ¿Es más o menos probable que la cuerda se corte?

Ejemplo

Una pequeña esfera de masa m cuelga de una cuerda de longitud L. La esfera gira con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r (vea la Fig.16). El recorrido de la esfera es en forma de cono; péndulo ***cónico***. Derive una expresión para calcular v del péndulo.

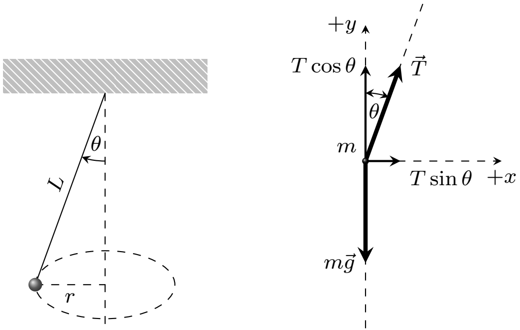


Figura 16. Esquema de un péndulo cónico y su diagrama de cuerpo libre.

Solución

Aplicando la segunda ley del movimiento a la esfera, se tiene

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rT\sin\theta}{m}}$$

Sustituyendo la expresión para T encontrada en la primera ecuación se llega a

$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)} = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Pero $r = L\sin\theta$, de modo que la rapidez de la esfera en el péndulo cónico es

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}.$$

Ejemplo

Un automóvil, masa $m = 1500\,\text{kg}$, toma una curva plana y horizontal (vea la Fig.17) de radio $R = 35.0\,\text{m}$ y $\mu_s = 0.523$ (entre las llantas y el pavimento), calcule la máxima rapidez con la que el auto puede girar exitosamente.

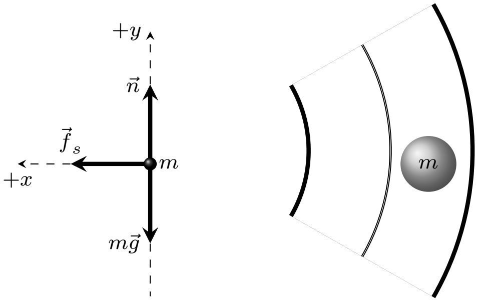


Figura 17. Vista superior del automóvil y su diagrama de cuerpo libre.

Solución

En el esquema, tanto la dirección de la fuerza de fricción estática cuanto la aceleración centrípeta son consideradas positiva hacia la izquierda. Aplicando la segunda ley del movimiento al automóvil, se tiene

$$\sum F_y = n - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg$$

$$\sum F_x = f_s = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{r f_s}{m}}$$

recordando que $f_{s\,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg$ *se tiene, para* v*,*

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{r\mu_s g} = \sqrt{(35.0\,\mathrm{m})(0.523)(9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})} = 13.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Suponga que en un día lluvioso el automóvil comienza a derrapar en la curva cuando $v = 8.00\,\mathrm{m/s}$. Calcule el coeficiente fricción estática en este caso.

Ejemplo

Un ingeniero rediseña la curva de la autopista del ejemplo anterior haciendo un ***peralte*** (vea la Fig.18): La carretera está inclinada hacia adentro de la curva. Si la rapidez diseñada para la rampa es $13.4\,\mathrm{m/s}$ y el radio de la curva es $R = 35.0\,\mathrm{m}$. Calcule el ángulo del peralte.

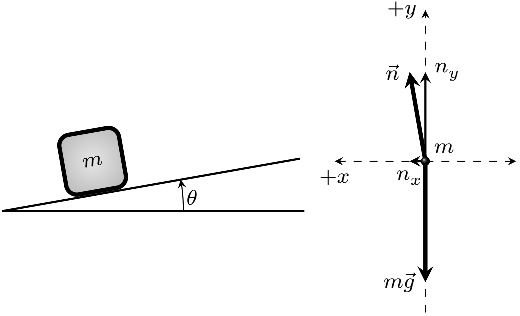


Figura 18. Automóvil en una curva peraltada y diagrama de cuerpo libre.

Solución

La aceleración centrípeta depende de n_x. Aplicando la segunda ley del movimiento se tiene:

$$\sum F_y = n_y - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n\cos\theta = mg \quad \rightarrow \quad n = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = n_x = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad n\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Sustituyendo la expresión para n en la segunda ecuación nos lleva a

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

Usando los valores numéricos, se llega a

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4\,\mathrm{m/s})^2}{(35.0\,\mathrm{m})(9.80\,\mathrm{m/s^2})}\right) = 27.6^\circ.$$

Si esta misma carretera se construyera en marte, ¿sería posible circularla con la misma rapidez?

Ejemplo

Un piloto- de masa m- en un avión jet ejecuta un giro (loop), como mostrado en la Fig.19. En esta maniobra, el avión se mueve en un círculo vertical de 2.70 km de radio con una rapidez constante de 225 m/s.

a) Calcule la fuerza (en unidades de mg) ejercida por el asiento sobre el piloto en la parte inferior del loop.

b) Calcule la fuerza (en unidades de mg) ejercida por el asiento sobre el piloto en la parte superior del loop.

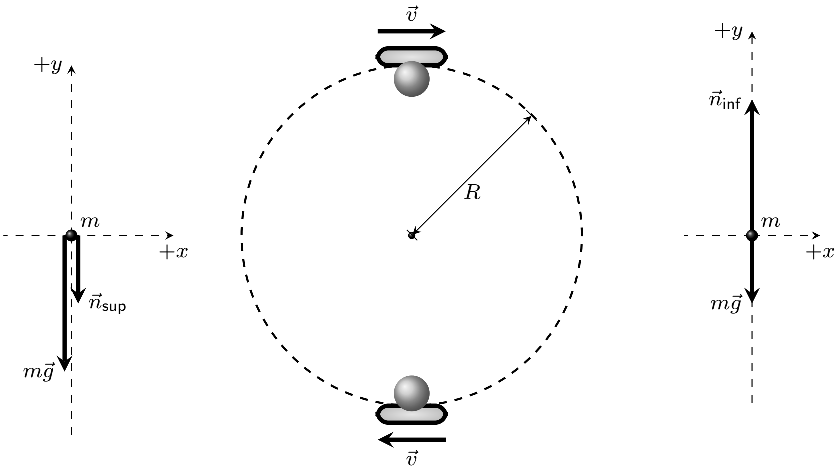


Figura 19. Esquema de un piloto de avión haciendo un giro (centro) y diagramas de cuerpo libre del piloto.

Solución

a) *Aplicando la segunda ley del movimiento al piloto en la parte superior del loop, se tiene:*

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = -n_{sup} - mg = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore n_{sup} = m\frac{v^2}{R} - mg = mg\left(\frac{v^2}{gR} - 1\right)$$

Introduciendo los datos entregados, se tiene

$$n_{sup} = mg\left(\frac{(225\,\mathrm{m/s})^2}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})(2.70\times 10^3\,\mathrm{m})} - 1\right) = 0.913\,mg.$$

Continuación

b) Aplicando la segunda ley del movimiento al piloto en la parte inferior del loop, se tiene:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = n_{\mathit{inf}} - mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore n_{\mathit{inf}} = m\frac{v^2}{R} + mg = mg\left(\frac{v^2}{gR} + 1\right)$$

Introduciendo los datos entregados, se tiene

$$n_{\mathit{inf}} = mg\left(\frac{(225\,\mathrm{m/s})^2}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})(2.70\times 10^3\,\mathrm{m})} + 1\right) = 2.91\,mg.$$