Espacios métricos.

- Espacios métricos.
- Espacios vectoriales normados (E.V.N.).
- Bolas en un espacio métrico.

Espacios métricos.

Def.: Sea X un conjunto cualquiera. Una función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ es una **métrica** (o **distancia**) en X si:

- $\forall p, q \in X : p \neq q, \quad d(p,q) > 0$ y $\forall p \in X, \ d(p,p) = 0$;
- $\forall p, q \in X, \quad d(p,q) = d(q,p)$ (**simetría**);
- $\forall p, q, r \in X, \quad d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ (**desigualdad triangular**).

Ejemplos:

- $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) := |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (**métrica usual en $\mathbb{R}$**).
- X un conjunto cualquiera, $d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y, \end{cases}$ (**métrica discreta**).
- Si d es una métrica en X e $Y \subset X$, entonces, la restricción de d a $Y \times Y$ es una métrica en Y (**métrica inducida**).

Ej.: Demuestra que las funciones d en los ejemplos anteriores son métricas.

Espacios vectoriales normados (E.V.N.)

Def.: Sea E un espacio vectorial real (o complejo).

La función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una **norma** si:

- $\forall x \in E : x \neq 0, \quad \|x\| > 0$ y $\|0\| = 0$;
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (o resp. $\mathbb{C}$), $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
- $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio vectorial E dotado de una norma $\|\cdot\|$, se denomina un **espacio vectorial normado (E.V.N.)**.

Prop.: Si $\|\cdot\|$ es una norma en E, entonces $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in E$, es una métrica en E.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Ejemplos: $E = \mathbb{R}^k \ (k \in \mathbb{N})$.

- $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^k |x_i|, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma uno**);
- $\|\boldsymbol{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2\right)^{1/2}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma euclídea**);
- $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max\limits_{1 \leq i \leq k} |x_i|, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma infinito**);

$\boxed{\textbf{Ej.}}$ **:** Demuestra que las tres son normas en R^k.

Ejemplo: Sea X un conjunto cualquiera. $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función acotada**, si su imagen, $f(X) := \{f(x),\ x \in X\} \subset \mathbb{R}$, es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Sean

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ acotada}\} \quad \text{y}$$

$$\forall f \in \mathcal{B}(X), \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (\textbf{norma infinito}).$$

$\boxed{\textbf{Ej.}}$ **:** Demuestra que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ una norma en $\mathcal{B}(X)$.

Bolas en un espacio métrico.

Def.: Sean d una métrica en E, $r > 0$ y $p \in E$.

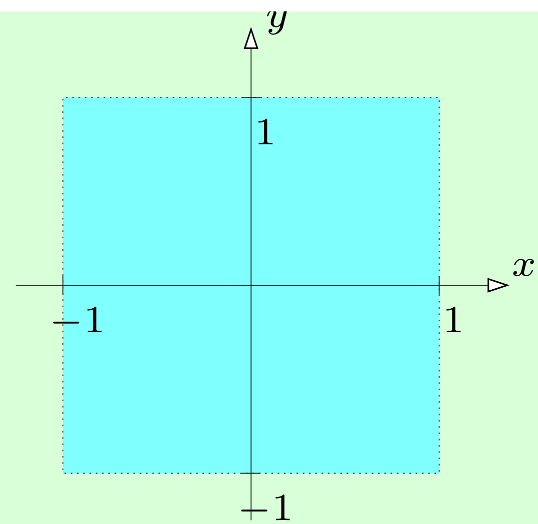
- $B_r(p) := \{q \in E : \ d(q,p) < r\}$ es la **bola abierta** de radio r y centro p.
- $B_r[p] := \{q \in E : \ d(q,p) \leq r\}$ es la **bola cerrada** de radio r y centro p.

Si no hay confusión posible, a las bolas abiertas las llamamos **bolas** a secas.

Ej.: Dibuja la bola de radio 1 y centro $\mathbf{0}$ en $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$.

Sol.:

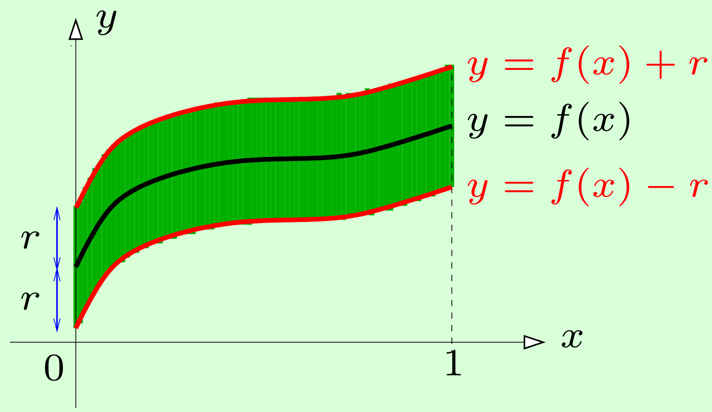
$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{0}) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x,y) - (0,0)\|_\infty < 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max\{|x|, |y|\} < 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1 \text{ y } |y| < 1\right\} \\ &= (-1,1) \times (-1,1). \quad \square \end{aligned}$$



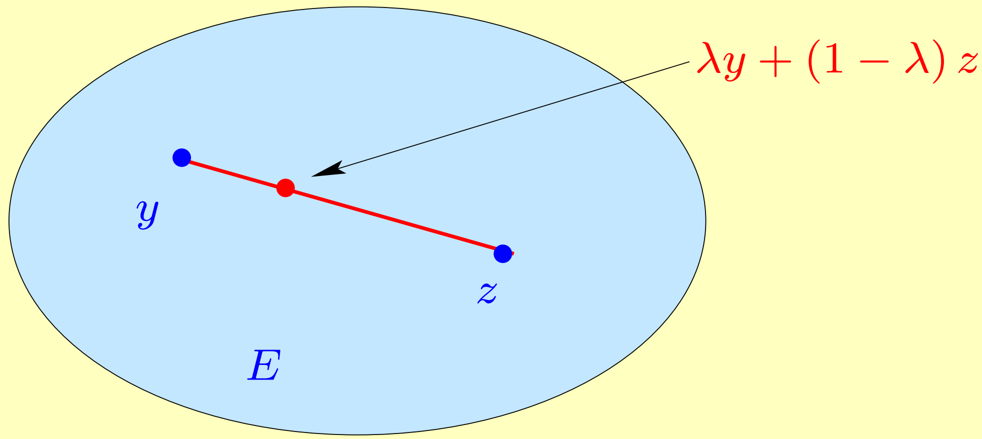
Ej.: Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada, da una representación gráfica de $B_r(f)$ ($r > 0$) en $\mathcal{B}([0,1])$.

Sol.: $B_r(f) = \{g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ acotada} : \|g - f\|_\infty < r\}$.

$$\begin{aligned}
\|g - f\|_\infty < r &\iff \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| < r \\
&\iff |g(x) - f(x)| < r \quad \forall x \in [0,1] \\
&\iff -r < g(x) - f(x) < r \quad \forall x \in [0,1] \\
&\iff f(x) - r < g(x) < f(x) + r \quad \forall x \in [0,1] \\
&\iff \text{la gráfica de } g \text{ cae en la franja verde.} \quad \square
\end{aligned}$$



Def.: Sean X un E.V.N. y $E \subset X$. E es **convexo** si $\forall y, z \in E,\ \forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda y + (1-\lambda)\, z \in E$.



Prop.: En todo E.V.N., las bolas son convexas.

Dem.: Sean X un E.V.N., $x \in X$ y $r > 0$. Veremos que $B_r(x)$ es convexa.

Sean $y, z \in B_r(x)$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $\|y - x\| < r, \quad \|z - x\| < r$ y

$$\begin{aligned}\|\lambda z + (1-\lambda)\, y - x\| &= \|\lambda\,(z - x) + (1-\lambda)\,(y - x)\| \\ &\leq \underbrace{|\lambda|}_{=\lambda}\, \underbrace{\|z - x\|}_{<r} + \underbrace{|1-\lambda|}_{=1-\lambda}\, \underbrace{\|y - x\|}_{<r} < \lambda r + (1-\lambda)\, r = r.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ \lambda z + (1-\lambda)\, y \in B_r(x) \ \Longrightarrow\ B_r(x)$ es convexa. $\square$

Def.: Sea d una métrica en E y $F \subset E$. F es **acotado**, si está contenido en alguna bola, en cuyo caso se define el **diámetro** de F como $\quad \operatorname{diam} F := \sup\limits_{x,y \in F} d(x,y)$.

Ej.: Demuestra que, $\forall F$ acotado, $\operatorname{diam} F$ está bien definido.

Sol.: Como F es acotado, $\exists p \in E$ y $r > 0 :$ $F \subset B_r(p)$. Sean $x, y \in F$.

$F \subset B_r(p) \implies x, y \in B_r(p) \implies d(x,p) < r$ y $d(y,p) < r$

$\implies d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) < r + r = 2r$.

Entonces, el conjunto $\{d(x,y),\ x,y \in F\} \subset \mathbb{R}$ es acotado y, por la completitud de $\mathbb{R}$, tiene supremo. Ese supremo, $\sup_{x,y \in F} d(x,y)$, es el diámetro de F. $\quad \square$

Ej.: Sean $p \in E$ y $r > 0$. Demuestra que $\operatorname{diam} B_r(p) \leq 2r$ y da un ejemplo en el que el diámetro sea estrictamente menor que $2r$.

Sol.: Sean $x, y \in B_r(p) \implies d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) < 2r$. Entonces, $\operatorname{diam} B_r(p) = \sup_{x,y \in B_r(p)} d(x,y) \leq 2r$.

Sea el espacio métrico $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ con la métrica usual inducida por la de $\mathbb{R}$. Entonces, $B_1(0) = \{n \in \mathbb{Z} :\ |n - 0| < 1\} = \{0\} \implies \operatorname{diam} B_1(0) = 0 < 2. \quad \square$