En lo que sigue de esta sección veremos *Autómatas Celulares* finitos. Existen dos tipos de Autómatas Celulares finitos, los *deterministas* y los *no deterministas*. Hoy empezaremos por los Autómatas Celulares Finitos Deterministas (o DFA por sus siglas en inglés).

Definición 2.4. Un *Autómata Celular Finito Determinista* (DFA) consiste en:

- Un conjunto finito Q de *estados*.
- Un *alfabeto* Σ.
- Una *función de transición* $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ que toma como argumento un estado y un símbolo del alfabeto y devuelve un estado.
- Un *estado inicial* $q_0 \in Q$.
- Un conjunto $F \subseteq Q$ de *estados finales* o *estados de aceptación*.

La forma de representar un DFA es dando una lista con los cinco componentes que lo definen. Para esto usaremos una 5-tupla de la forma:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

donde A es el nombre del DFA con lista de estados Q, alfabeto Σ, función de transición δ, estado inicial q_o y conjunto de estados finales F.

Lo primero que hay que entender con respecto a un DFA es cómo *decide aceptar o rechazar* una secuencia de símbolos (una palabra en Σ^*). Supongamos que tenemos una palabra $w = a_1a_2a_3 \dots a_n$ para ser procesada por el autómata $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. El DFA A empieza en su estado inicial q_0 y evalúa q_0 y a_1 en δ. Supongamos que $\delta(q_0, a_1) = q_1^A$, entonces A cambia pasa del estado q_0 al estado q_1^A. Luego evalúa q_1^A y a_2 en δ. Supongamos que $\delta(q_1^A, a_2) = q_2^A$, entonces A cambia pasa del estado q_1^A al estado q_2^A, y así sucesivamente hasta procesar todas los símbolos de w. Al terminar de procesar w, el DFA A estará en el estado q_n^A. Si $q_n^A \in F$ entonces A acepta w, en caso contrario la rechaza. El lenguaje de un DFA A es el conjunto de todas las palabras que acepta A.

Existen dos formas de especificar un DFA, mediante su *digrafo de transición* y mediante su *tabla de transición*.

Definición 2.5. El *digrafo de transición* de un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se define como sigue:

- Existe un vértice para cada estado en Q.
- Para cada par de estados $q, p \in Q$ y cada símbolo $a \in \Sigma$ tal que $\delta(q, a) = p$, entonces el digrafo de transición tendrá un arco de q a p etiquetado con a. Si existe otro símbolo $b \neq a$ tal que $\delta(q, b) = p$ entonces la etiqueta del arco entre q y p también contendrá al símblo b. En general, la etiqueta del arco entre los estados q y p contiene a toda la lista de símbolos que producen una transición de q a p.

- Para identificar el estado inicial q_0, dibujamos una flecha que apunta a q_0 que no se origina en ningún otro vértice.
- Los vértices que correspondan a estados de aceptación en F serán demarcados con un doble círculo, mientras que los vértices que correspondan a estados en $Q \setminus F$ serán dibujados con un solo círculo.

Definición 2.6. La *tabla de transición* de un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, que representa la función δ, se define como sigue. Las filas de la tabla corresponden a estados y mientras que las columnas corresponden a inputs. Luego, si $\delta(q, a) = p$ para un estado q y un input a entonces en la posición (q, a) de la tabla se apunta el estado p.

Para poder definir formalmente el *lenguaje* de un DFA usaremos una función auxiliar $\hat{\delta}$ que evalúa un estado con una palabra y entrega un estado. Esta función se define a partir de δ de forma recursiva.

Definición 2.7. La *función de transición extendida* $\hat{\delta} : Q \times \Sigma \to Q$ de un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se define como:

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$, es decir, si A está en un estado q y lee la palabra de largo 0 (o no lee ningún símbolo), entonces A se queda en q.
- Sea $w = xa$, una palabra con último símbolo igual a a, entonces $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), a)$.

Entonces, el lenguaje de un DFA se define como sigue.

Definición 2.8. Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. El *lenguaje* de A, denotado $L(A)$ es:

$$L(A) := \{w : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Por otro lado, si L es un lenguaje tal que $L = L(A)$ para algún DFA A, entonces diremos que L es un *lenguaje regular*.

Ejemplos de Autómatas Celulares Finitos Ahora veremos algunos ejemplos de autómatas celulares finitos deterministas. Para cada ejemplo se presenta su tabla de transición y su grafo de transición. En las tablas, el símbolo $*$ denota a los estados de aceptación, y el símbolo $->$ denota al estado inicial de cada DFA.

	0	1
$-> q_0$	q_2	q_1
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Table 1: Tabla de transición de un DFA con lenguaje igual al conjunto de todas las palabras que contienen como subpalabra a la palabra 01.

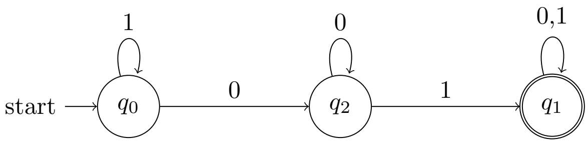

Figure 11: Grafo de transición del DFA descrito en la Tabla 1.

	0	1
$*->q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Table 2: Tabla de transición del autómata A tal que $L(A) = \{w\colon\ w \text{ tiene un número par de ceros y un número par de unos}\}$.

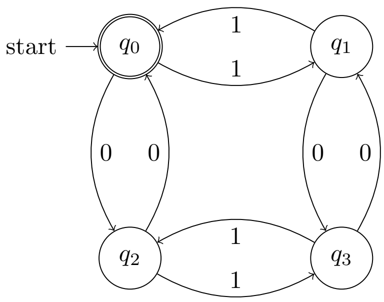

Figure 12: Grafo de transición del DFA descrito en la Tabla 2.

	0	1
$->A$	A	B
$*B$	B	A

Table 3: Tabla de transición de un DFA cuyo lenguaje es el conjunto de todas las palabras con un número impar de unos.

En el primer ejemplo que se muestra en la Figura 11 y en la Tabla 1, se muestra un DFA cuyo lenguaje es consta de todas las palabras que tienen como subpalabra a la palabra 01.

El segundo ejemplo descrito en la Tabla 2 y la Figura 12 es de un DFA cuyo lenguaje consta de las palabras con un número par de ceros y un número par de unos.

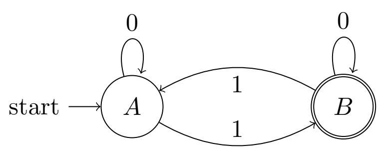

Figure 13: Grafo de transición del DFA descrito en la Tabla 3.

	0	1
$->*A$	B	A
$*B$	C	A
C	C	C

Table 4: Tabla de transición del DFA cuyo lenguaje consta de todas las palabras que no tienen como subpalabra a la palabra 00.

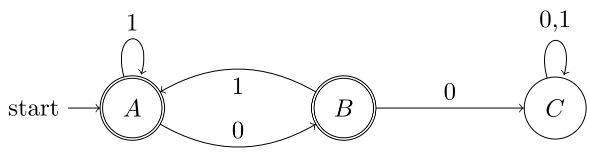

Figure 14: Grafo de transición del DFA descrito en la Tabla 4.

En el tercer ejemplo vemos un DFA cuyo lenguaje es el conjunto de las palabras con un número impar de unos. La tabla y el grafo de transición de este DFA se muestra en la Tabla 3 y la Figura 13, respectivamente.

El último ejemplo muestra un DFA cuyo lenguaje consta de todas las palabras que no tienen como subpalabra a la palabra 00. La tabla y el grafo de transición para este DFA se muestran en la Tabla 4 y la Figura 14, respectivamente.