Dualidad. Aniquilador (o Anulador)

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 12, 2021

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se define el espacio dual de V por $V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$. A los elementos de V' se le suelen llamar formas o funcionales lineales.

Ejemplo 1 (caracterización de los elementos del dual de $\mathbb{R}^3$)

$$\left(\mathbb{R}^3\right)' := \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$= \{ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,|\, \forall\, x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; T(x) := ax_1 + bx_2 + cx_3 \,, \text{ con } \; a, b, c \in \mathbb{R} \} \,.$$

Ejemplo 2: Sea $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones de valor real continuas sobre $[a,b]$. Entonces, para cada $g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, la aplicación $L_g : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \ni f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$, es un funcional lineal sobre $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

Base dual

Motivación: Sea $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Consideremos, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, las funciones $T_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ definidas para cualquier $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, por $T_j(x) := x_j$ (i.e. la j-ésima componente de x). Se verifica que $\{T_j\}_{j=1}^3$ es una base de $\left(\mathbb{R}^3\right)'$, y es tal que satisface $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\} : \; T_i(e_j) = \delta_{ij}$. En lo que sigue, dada una base de cualquier espacio vectorial V de dimensión finita, vamos a ver cómo determinar una base de V' que cumpla esta propiedad.

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y sea $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ una base de V. Existe una única base $B' := \{T_i\}_{i=1}^n$ de V' tal que $T_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

B' se llama la base dual de B.

Demostración: Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea $T_i : V \to \mathbb{K}$ la aplicación lineal definida en la base $\{v_j\}_{j=1}^n$ por $T_i(v_j) := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Afirmación 1: $\{T_i\}_{i=1}^n$ es l.i. Consideremos la combinación lineal trivial, i.e., sean $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \, T_i = \theta_{V'} \Rightarrow \forall j \in \{1, ..., n\} : \sum_{i=1}^n \alpha_i \, T_i(v_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, ..., n\} : \alpha_j = 0 \,,$$

lo cual establece que $\{T_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto l.i de V'.

AFIRMACIÓN 2: $\langle \{T_i\}_{i=1}^n \rangle = V'$. Sea $T \in V'$. Sea $\forall\, j \in \{1, ..., n\} \;:\; T(v_j) = \beta_j \in \mathbb{K}$. Luego, dado $w \in V$ (fijo pero arbitrario), $\exists\,\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tal que $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, v_i$. Luego,

$$\begin{aligned} T(w) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\, T(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \beta_i\, T_i(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j\, T_j(v_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_i\, T_j(v_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j\, T_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, v_i\right) = \sum_{j=1}^n \beta_j\, T_j(w) = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j\, T_j\right)(w)\,, \end{aligned}$$

lo cual implica que $T = \sum_{j=1}^n \beta_j\, T_j$. Así, se establece que $V' \subseteq \langle \{T_i\}_{i=1}^n \rangle$, y como la otra inclusión siempre es cierta, se concluye la afirmación.
CONCLUSIÓN: $\{T_i\}_{i=1}^n$ es una base de V', y por tanto $\dim(V') = n = \dim(V)$.

Unicidad de la base dual de V'. Supongamos que $\{\tilde{T}_i\}_{i=1}^n$ es otra base de V' que satisface la propiedad $\forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \;:\; \tilde{T}_i(v_j) = \delta_{ij}$. Luego, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que

$$\begin{cases} \tilde{T}_i(v_j) = 0 = T_i(v_j) & j \in \{1, ..., n\}\,,\, j \neq i \\ \tilde{T}_i(v_i) = 1 = T_i(v_i)\,. \end{cases}$$

De esta manera, $\tilde{T}_i$ y T_i son dos aplicaciones lineales que coinciden en una base. Por tanto, $\forall\, i \in \{1, ..., n\} \;:\; \tilde{T}_i = T_i$.

Observación: Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión infinita, y V' su dual, entonces $\dim(V) \leq \dim(V')$. La igualdad se alcanza si y sólo si V es de dimensión finita.

Ejemplos:

1. Según lo discutido en la motivación de este tema, el conjunto $\{T_j\}_{j=1}^{3}$ es la base canónica de $\left(\mathbb{R}^3\right)'$, siendo $T_j(x_1, x_2, x_3) := x_j$, para cualquier $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. Sea $V := \mathbb{R}^2$ y $B := \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de V. Si $B' := \{T_1, T_2\}$ es la base dual de B, entonces se debe cumplir

$$\begin{cases} T_1(1,1) = 1 \\ T_1(1,-1) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} T_2(1,1) = 0 \\ T_2(1,-1) = 1 \end{cases} .$$

   En vista que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \dfrac{x+y}{2}(1,1) + \dfrac{x-y}{2}(1,-1)$. Luego, aplicando T_1 a la identidad anterior, se deduce que $T_1(x,y) := \frac{x+y}{2}$. En forma análoga, se infiere que $T_2(x,y) := \frac{x-y}{2}$.

Observación: Si B es una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión finita, y B' es su base dual, es posible calcular fácilmente las coordenadas de un elemento de V en la base B utilizando la base B'. Recíprocamente, empleando la base B, no es difícil obtener las coordenadas en la base B' de un elemento de V'. En resumen, si $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ es una base de V y $B' := \{T_j\}_{j=1}^n$ es su base dual, se tiene:

1. Dado $u \in V$, $\exists\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{K} : u = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$. Entonces,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : T_j(u) = T_j\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T_j(v_k) = \alpha_j .$$

Conclusión: $[u]_B = \begin{pmatrix} T_1(u) \\ \vdots \\ T_n(u) \end{pmatrix}$.

2. Dada $T \in V'$, $\exists\{\beta_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{K} : T = \sum_{k=1}^n \beta_k T_k$. Entonces,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : T(v_j) = \left(\sum_{k=1}^n \beta_k T_k\right)(v_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k T_k(v_j) = \beta_j .$$

Conclusión: $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Sean $B := \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' := \{T_1, T_2\}$, con $T_1(x,y) := \frac{x+y}{2}$ y $T_2(x,y) := \frac{x-y}{2}$, su base dual (ver Ejemplo anterior). Entonces

1. El vector de coordenadas de $u = (5,7) \in \mathbb{R}^2$, respecto de la base B, es
$$[u]_B = [(5,7)]_B := \begin{pmatrix} T_1(5,7) \\ T_2(5,7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. El vector de coordenadas de $T \in \left(\mathbb{R}^2\right)'$, dada por $T(x,y) := 5x + 3y$, respecto de la base B', es
$$[T]_{B'} := \begin{pmatrix} T(1,1) \\ T(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hemos visto que toda base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión finita, posee una base dual asociada. Recíprocamente, resulta que toda base de V' es la base dual de una base de V.

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea V' su espacio dual. Sea $B_1 := \{S_j\}_{j=1}^n$ una base de V'. Entonces, existe una única base $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ de V que satisface $B' = B_1$.

Demostración:

EXISTENCIA: Sea $C := \{w_j\}_{j=1}^n$ una base de V. Como la aplicación lineal $L : V' \to \mathbb{K}^n$ dado por $V' \ni T \mapsto (T(w_j))_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo (¿POR QUÉ?), se tiene que $\{L(S_i)\}_{i=1}^n$ es una base de $\mathbb{K}^n$, y así la matriz

$$M := \begin{pmatrix} L(S_1) \\ L(S_2) \\ \vdots \\ L(S_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(w_1) & \cdots & S_1(w_n) \\ S_2(w_1) & \cdots & S_2(w_n) \\ \vdots & & \vdots \\ S_n(w_1) & \cdots & S_n(w_n) \end{pmatrix} \quad \text{es no singular.}$$

Consideremos ahora su matriz inversa, la que denotamos por $A := (a_{ij})$. Como $M\,A = I_n$, se desprende, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\delta_{ij} = (M\,A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik} (A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} S_i(w_k)\, a_{kj} = S_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k \right).$$

Esto induce definir los vectores $v_j := \sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k \in V$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Existencia (continuación):
La definición de $\{v_j\}_{j=1}^n$ satisface $\forall\, i \in \{1, .., n\} \,:\, S_i(v_j) = \delta_{ij}$. Luego, solo resta probar que $\{v_j\}_{j=1}^n$ es una base de V. Como $\dim(V) = \dim(V') = n$, es suficiente con probar que este conjunto es linealmente independiente. En efecto, consideremos una combinación lineal de estos vectores para el vector nulo, i.e. sean $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que $\sum_{j=1}^n \alpha_j\, v_j = \theta_V$. Para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene

$$S_i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\, v_j\right) = S_i(\theta_V) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j\, S_i(v_j) = \alpha_i\,,$$

de donde se deduce que $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ es l.i., y se concluye que B es una base de V, siendo $B' := B_1$ su base dual.
Unicidad: Supongamos que $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ y $\tilde{B} := \{u_j\}_{j=1}^n$ son dos bases de V tales que $B' = \tilde{B}' = \{S_j\}_{j=1}^n$. Entonces

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\} : [u_i]_B = \begin{pmatrix} S_1(u_i) \\ \vdots \\ S_n(u_i) \end{pmatrix} = e_i = [v_i]_B \Rightarrow \forall\, i \in \{1, ..., n\} : u_i = v_i\,,$$

y se concluye que $B = \tilde{B}$.

Ejemplo: Sea $V := \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y $B_1 := \{T_0, T_1, T_2\} \subseteq V'$ tales que $\forall\, j \in \{0,1,2\} \,:\, V \ni p \mapsto T_j(p) := p(j)$.

Veamos que B_1 es una base de V': Como $\dim(V') = \dim(V) = 3$, es suficiente con probar que B_1 es linealmente independiente. Consideremos entonces la combinación lineal de elementos de B_1 del vector nulo, i.e. sean $\{\alpha_j\}_{j=0}^{2} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j\, T_j = \theta_{V'} \Leftrightarrow \forall\, p \in V \,:\, \sum_{j=0}^{2} \alpha_j\, T_j(p) = 0\,.$$

Así, para $p \in V$, tal que $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) := (x-1)(x-2)$, y luego de reemplazar y efectuar, se obtiene que $\alpha_0 = 0$. Procediendo de manera similar, para $p(x) := x(x-2)$ y $p(x) := x(x-1)$, se deduce que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, respectivamente. De esta manera, se concluye que B_1 es una base de $\Big(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\Big)'$.

Determinemos la única base de V que tiene a B_1 como su base dual: Sea $B := \{p_0, p_1, p_2\}$ la base de V buscada. Por definición de base dual, se debe tener que

$$\begin{cases} T_0(p_0) = p(0) = 1 \\ T_1(p_0) = p(1) = 0 \\ T_2(p_0) = p(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p_0(x) := \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\,.$$

Análogamente, se deduce que $p_1(x) := -x(x-2)$ y $p_2(x) := \frac{1}{2}x(x-1)$.

Aniquilador/Anulador de un subespacio

En lo que sigue vamos a relacionar los subespacios de V con ciertos subespacios de V'. En concreto, dado un subespacio S de V, consideraremos el conjunto de todas las aplicaciones lineales que se anulan en S, y veremos que tiene una estructura de subespacio (de V').

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. Un funcional $F \in V'$ es aniquilador de S si $\forall\, z \in S \,:\, F(z) = 0$. En tal caso, se define el conjunto aniquilador de S por

$$S^\circ := \{F \in V' \,|\, \forall\, v \in S \,:\, F(v) = 0\} = \{F \in V' \,|\, S \subseteq \mathrm{Ker}(F)\}.$$

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. S° es un subespacio vectorial de V'.

Demostración: Primero, no es difícil verificar (¡HACERLO!) que $\theta_{V'} \in S^\circ$.
Segundo, consideremos $F, G \in S^\circ$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Por un lado, tenemos que $\lambda F + G \in V'$. De otro lado, para $v \in S$ fijo, resulta

$$(\lambda F + G)(v) = \lambda F(v) + G(v) = 0\,,$$

lo cual implica que $\forall\, v \in S \,:\, (\lambda F + G)(v) = 0$. De esta manera, se establece que $\lambda F + G \in S^\circ$, y por lo tanto, se concluye que S° es un subespacio vectorial de V'.

Cuando V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, puede establecerse una relación entre las dimensiones de un subespacio y su aniquilador.

Proposición: Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea S un subespacio vectorial de V. Entonces $\dim(S^\circ) = \dim(V) - \dim(S)$.

Demostración: Sea $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ y $\dim(S) = r$. Analizamos los tres posibles casos:

Caso 1: $r = 0$. En este caso, $S := \{\theta_V\}$, lo cual implica que $S^\circ = V'$, y la Tesis se cumple.

Caso 2: $r = n$. Aquí se tiene que $S := V$ y por tanto $S^\circ = \{\theta_{V'}\}$. Aquí también se valida la Tesis.

Caso 3: $r \in \{1, ..., n-1\}$. Sea $\{u_1, ..., u_r\}$ una base de S, y $\{u_{r+1}, ..., u_n\} \subseteq V$ tales que $B := \{u_j\}_{j=1}^n$ es una base de V. Sea $B' := \{T_j\}_{j=1}^n$ la base dual de B. Entonces,

$$\begin{aligned} &\forall\, i \in \{r+1, ..., n\} \,:\, \forall\, j \in \{1, ..., r\} \,:\; T_i(u_j) = 0 \\ \Rightarrow\, &\forall\, i \in \{r+1, ..., n\} \,:\, \forall\, u \in S \,:\; T_i(u) = 0 \\ \Rightarrow\, &\{T_i\}_{r+1}^n \subseteq S^\circ. \end{aligned}$$

Siendo $\{T_i\}_{r+1}^n$ un subconjunto de la base B', es un conjunto linealmente independiente. Veamos que $\langle\{T_i\}_{r+1}^n\rangle = S^\circ$. Sea $L \in S^\circ$. Como B' es una base de V', $\exists\,\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{K} \,:\, L = \sum_{j=1}^n \alpha_j T_j$. En vista que B' es la base dual de B, se tiene que $\forall\, j \in \{1, .., n\} \,:\, \alpha_j = L(u_j)$. A su vez, como $L \in S^\circ$ y $\{u_j\}_{j=1}^r$ es una base de S, se tiene que $\forall\, j \in \{1, ..., r\} \,:\, L(u_j) = 0$, i.e. $\forall\, j \in \{1, ..., r\} \,:\, \alpha_j = 0$. Esto nos dice que $L = \sum_{j=r+1}^n \alpha_j T_j \in \langle\{T_j\}_{j=r+1}^n\rangle$. Así queda establecido que $S^\circ \subseteq \langle\{T_j\}_{j=r+1}^n\rangle$. Como la otra inclusión siempre es cierta, se concluye que $\langle\{T_j\}_{j=r+1}^n\rangle = S^\circ$.

Conclusión: $\dim(S) + \dim(S^\circ) = r + (n-r) = n = \dim(V)$.

La demostración de la proposición anterior nos da una manera de determinar el aniquilador de un subespacio (en dimensión finita).

Ejemplo: Sea $S := \langle\{(1,1,1),(1,2,1)\}\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinar una base de S°.

Se verifica que $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ es una base de S. Completamos la base de S a una base de B de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $B := \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$. Sea $B' := \{T_1, T_2, T_3\}$ la base dual de B. En particular, T_3 verifica:

$$T_3(1,1,1) = 0\,, \quad T_3(1,2,1) = 0\,, \quad T_3(1,0,0) = 1\,,$$

de donde se deduce que (¡HACERLO!), $\{T_3\}$ se anula en S, lo cual impllica que $T_3 \in S^\circ$. En vista que $\dim(S^\circ) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(S) = 1$, se desprende que $\{T_3\}$ es una base de S°. A partir de las condiciones de base dual se determina que $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, T_3(x,y,z) := x - z$.

Definición: Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sea $W \subseteq V'$. Un elemento $z \in V$ se llama ANULADOR DE W si $\forall\, F \in W \,:\, F(z) = 0$. Esto induce el CONJUNTO ANULADOR DE W por

$$^\circ W := \{z \in V \,|\, \forall\, F \in W \,:\, F(z) = 0\}\,.$$

Proposición: Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sea $W \subseteq V'$. Entonces $^\circ W$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración: ES DEJADA AL LECTOR.

En la siguiente proposición veremos cómo recuperar un subespacio a partir de su conjunto aniquilador.

Proposición: Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y S un subespacio de V. Entonces

$$\{u \in V \,|\, \forall\, T \in S^\circ \,:\, T(u) = 0\} = S\,.$$

Demostración: Sea $W := \{u \in V \,|\, \forall\, T \in S^\circ \,:\, T(u) = 0\}$. Probaremos que $W = S$, por Doble Inclusión.

$(\supseteq)$: Sea $u \in S \subseteq V$ fijo. Dada $T \in S^\circ$, se tiene que $T(u) = 0$. Esto conduce a afirmar que $\forall\, T \in S^\circ \,:\, T(u) = 0$, y por tanto $u \in W$. Así queda establecido que $S \subseteq W$.

$(\subseteq)$: Por reducción al absurdo (negamos $W \subseteq S$), supongamos que $\exists\, u \in W$ con $u \notin S$. Consideremos que $\dim(S) = r$, y sea $\{z_1, ..., z_r\}$ una base de S. Como resultado, $\{z_1, ..., z_r, u\}$ es l.i. Sean ahora $\{z_j\}_{j=r+2}^{n} \subseteq V$ tales que $B := \{z_1, ..., z_r, u, z_{r+2}, ..., z_n\}$ es una base de V. Sea también $B' := \{T_j\}_{j=1}^{n}$ la base dual de B. Se infiere que

$$\forall\, j \in \{1, ..., r\} \,:\, T_{r+1}(z_j) = 0 \Rightarrow T_{r+1} \in S^\circ \,(\text{¿Por qué?})$$

Además, por ser B' base dual de B, se tiene que $T_{r+1}(u) = 1$. Pero, como $u \in W$ (Suposición), resulta que $T_{r+1}(u) = 0$ $(\rightarrow\leftarrow)$.
De esta manera, se deduce que $W \subseteq S$.

Conclusión: ${}^\circ(S^\circ) := W = S$.

El resultado anterior nos da otra forma de caracterizar subespacios.

Ejemplo: Sea $S := \langle\{(1,1,1),(1,2,1)\}\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Caracterizar S.

Del ejemplo anterior, se dedujo que $S^\circ := \langle\{T_3\}\rangle \subseteq \left(\mathbb{R}^3\right)'$, siendo $T_3(x,y,z) := x - z$.

Aplicando la Proposición anterior, resulta:

$$\begin{aligned} S &= {}^\circ\left(S^\circ\right) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \forall\, T \in S^\circ \,:\, T(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha\, T_3(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, T_3(x,y,z) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(T_3) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - z = 0\}\,. \end{aligned}$$

Observación importante: Sea V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y S un subespacio de V. Sea $\{T_j\}_{j=1}^r$ una base de S°. Entonces

$$S = \{u \in V \,|\, \forall\, j \in \{1,\ldots,r\} \,:\, T_j(u) = 0\} = \bigcap_{j=1}^{r} \mathrm{Ker}(T_j)\,.$$

Ahora, vamos a ver cómo se comporta el aniquilador con la adición y la intersección de subespacios.

Proposición: Sean V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios de V. Entonces:

1. $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$.
2. $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

Demostración:

1): Sea $T \in V'$. Tenemos

$$\begin{aligned} T \in (U+W)^\circ &\Leftrightarrow \forall\, z \in U+W \,:\, T(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, u \in U \,:\, \forall\, v \in W \,:\, T(u+v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Big(\forall\, u \in U \,:\, T(u) = 0\Big) \wedge \Big(\forall\, v \in W \,:\, T(v) = 0\Big) \\ &\Leftrightarrow T \in U^\circ \cap W^\circ\,. \end{aligned}$$

2):

Etapa 1: $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$: Sea $T \in U^\circ + W^\circ \subseteq V'$. Entonces $T \in V'$ y $T = L_1 + L_2$, con $L_1 \in U^\circ$ y $L_2 \in W^\circ$. Fijamos ahora $z \in U \cap W$. Tenemos $T(z) = L_1(z) + L_2(z) = 0 + 0 = 0$, lo cual implica que $\forall\, z \in U \cap W \,:\, T(z) = 0$, i.e. $T \in (U \cap W)^\circ$. En consecuencia, se concluye que $U^\circ + W^\circ \subseteq (U \cap W)^\circ$.

Etapa 2: $\dim(U^\circ + W^\circ) = \dim((U \cap W)^\circ)$: Teniendo en cuenta que $U^\circ \cap W^\circ = (U + W)^\circ$, y la caracterización de $\dim(U^\circ)$ en dimensión finita, tenemos gracias al Teorema de la dimensión

$$\begin{aligned}
\dim(U^\circ + W^\circ) &= \dim(U^\circ) + \dim(W^\circ) - \dim(U^\circ \cap W^\circ) \\
&= \dim(U^\circ) + \dim(W^\circ) - \dim((U + W)^\circ) \\
&= \big(\dim(V) - \dim(U)\big) + \big(\dim(V) - \dim(W)\big) \\
&\quad - \big(\dim(V) - \dim(U + W)\big) \\
&= \big(\dim(V) - \dim(U)\big) - \big(\dim(W) - \dim(U + W)\big) \\
&= \dim(V) - \dim(U \cap W) \\
&= \dim((U \cap W)^\circ)\,.
\end{aligned}$$

Conclusión: $U^\circ + W^\circ = (U \cap W)^\circ$.

Motivación: Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Luego, dada $S \in W'$, se puede definir el funcional $S \circ T : V \to \mathbb{K}$ como $V \ni z \mapsto (S \circ T)(z) := T(S(z))$. No es difícil chequear que $S \circ T$ es lineal, ya S y T lo son. De esta manera, $S \circ T \in V'$. Esto induce la definición de APLICACIÓN DUAL DE T.

Definición: Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Se define la aplicación dual de T, notada por $T' \in \mathcal{L}(W',V')$, definida por $W' \ni S \mapsto T'(S) := S \circ T$.

Proposición: Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Se cumple

1. $\forall\, R, S \in W' : T'(R+S) = T'(R) + T'(S)$.
2. $\forall\, S \in W', \forall\, \alpha \in \mathbb{K} : T'(\alpha\, S) = \alpha\, T'(S)$.

En el siguiente ejemplo, la notación $'$ es empleada con dos significados distintos: D' para denotar la aplicación dual de D, y p' que representa la derivada del polinomio p.

Ejemplo: Consideremos $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ definido como $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni p \mapsto D(p) := p'$. Sea $D' \in \mathcal{L}\big((\mathcal{P}(\mathbb{R}))', (\mathcal{P}(\mathbb{R}))'\big)$ la aplicación dual de D.

1. Sea $F \in \big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)'$ dada por $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni p \mapsto F(p) := p(5)$. Luego, $D'(F) \in \big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)'$ dado por

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni p \mapsto \big(D'(F)\big)(p) := \big(F \circ D\big)(p) = F(D(p)) = F(p') = p'(5)\,.$$

   En otras palabras, $D'(F)$ es el funcional lineal sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que a cada $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ le asocia $p'(5)$.

2. Sea $G \in \big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)'$ dada por $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni p \mapsto G(p) := \displaystyle\int_0^1 p(s)\,ds$. Entonces, $D'(G) \in \big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)'$ dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni p \mapsto \big(D'(G)\big)(p) &:= \big(G \circ D\big)(p) = G(D(p)) \\ &= G(p') = \int_0^1 p'(s)\,ds = p(1) - p(0)\,.\end{aligned}$$

Proposición (Propiedades algebraicas de las aplicaciones duales): Sean U, V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Entonces:

1. $\forall\, S, T \in \mathcal{L}(V, W) \,:\, \big(S + T\big)' = S' + T'$.
2. $\forall\, T \in \mathcal{L}(V, W) \,:\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \big(\alpha\, T\big)' = \alpha\, T'$.
3. $\forall\, T \in \mathcal{L}(U, V) \,:\, \forall\, S \in \mathcal{L}(V, W) \,:\, \big(S \circ T\big)' = T' \circ S'$.

Proposición: (Caracterización de $\mathrm{Ker}(T')$). Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces,

1. $\mathrm{Ker}(T') = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ}$.
2. Si además V y W son finito dimensionales, entonces $n(T') = n(T) + \dim(W) - \dim(V)$.

Demostración de 1): Por doble inclusión:
$\subseteq$: Sea $F \in \mathrm{Ker}(T')$, i.e. $\theta = T'(F) = F \circ T$. Considerando $z \in V$, tenemos

$$0 = \big(F \circ T\big)(z) = F\big(T(z)\big),$$

lo cual implica que $\forall\, z \in V \,:\, F(T(z)) = 0$, i.e. $\forall\, w \in \mathrm{Im}(T) \,:\, F(w) = 0$, de donde se infiere que $F \in \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ}$. Así, $\mathrm{Ker}(T') \subseteq \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ}$.
$\supseteq$: Sea $F \in \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ}$. Esto conduce a afirmar que $\forall\, z \in V \,:\, T'(F)(z) = F(T(z)) = 0$, lo cual implica que $F \in \mathrm{Ker}(T')$. De esta manera, se establece que $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ} \subseteq \mathrm{Ker}(T')$.
Conclusión: $\mathrm{Ker}(T') = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ}$.

Demostración de 2):

Aprovechando la propiedad 1) ya demostrada, la dimensión del conjunto aniquilador, y el TEOREMA DE LA DIMENSIÓN, se tiene (recordar $T' \in \mathcal{L}(W', V')$)

$$
\begin{aligned}
n(T') &= \dim\Big(\mathrm{Ker}(T')\Big) = \dim\Big((\mathrm{Im}(T))^{\circ}\Big) = \dim(W) - r(T) \\
&= \dim(W) - \big(\dim(V) - n(T)\big) = n(T) + \dim(W) - \dim(V)\,.
\end{aligned}
$$

Teorema (sobreyectividad de T equivale a inyectividad de T'): Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales, y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es epimorfismo si y sólo si T' es monomorfismo.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
T \in \mathcal{L}(V, W) \text{ es epimorfismo } &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W \\
&\Leftrightarrow \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\circ} = W^{\circ} = \{\Theta_{W'}\} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T') = \{\Theta_{W'}\} \\
&\Leftrightarrow T' \text{ es monomorfismo}\,.
\end{aligned}
$$

Proposición (Caracterización de $\mathrm{Im}(T')$ y su rango): Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales, y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

1. $r(T') = r(T)$.
2. $\mathrm{Im}(T') = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ$.

Demostración de 1): Aplicando resultados previos, tenemos

$$r(T') = \dim(W') - \underbrace{\dim\Big(\mathrm{Ker}(T')\Big)}_{=n(T')} = \dim(W) - \dim\Big(\big(\mathrm{Im}(T)\big)^\circ\Big) = r(T)\,.$$

Demostración de 2):

Etapa 1: $\mathrm{Im}(T')$ es un subespacio de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ$: Sea $F \in \mathrm{Im}(T')$. Esto implica que $\exists\, G \in W'$ tal que $F = T'(G)$. Sea ahora $z \in \mathrm{Ker}(T)$. Tenemos

$$F(z) = \big(T'(G)\big)(z) = \big(G \circ T\big)(z) = G(T(z)) = G(\theta_W) = 0\,.$$

De esta forma, se deduce que $F \in \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ$, con lo cual queda establecido que $\mathrm{Im}(T')$ es un subespacio de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ$.

Etapa 2: Veamos ahora que $r(T') = \dim\Big(\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ\Big)$: En efecto, gracias a resultados previamente establecidos, se tiene

$$r(T') = r(T) = \dim(V) - n(T) = \dim\Big(\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ\Big)\,.$$

Conclusión: $\mathrm{Im}(T') = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ$.

Teorema (inyectividad de T equivale a sobreyectividad de T'): Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales, y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es monomorfismo si y sólo si T' es epimorfismo.

Demostración: Invocando propiedades previamente establecidas, resulta

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{L}(V, W) \text{ es monomorfismo } &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{\theta_V\} \\ &\Leftrightarrow \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\circ = \{\theta_V\}^\circ = V' \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T') = V' \\ &\Leftrightarrow T' \text{ es epimorfismo} \,. \end{aligned}$$

Lema: Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales, siendo B_V y B_W bases de V y de W, respectivamente. Sean $B_{V'}$ y $B_{W'}$ las bases duales de V' y W' asociadas a B_V y B_W, correspondientemente. Entonces, para cualquier $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se cumple: $[T']_{B_{W'}}^{B_{V'}} = \big([T]_{B_V}^{B_W}\big)^t$.

Demostración: Es dejada al lector.

Ejemplo (en dimensión infinita) Sea $V := \mathcal{C}([0,1])$, y $\{p_j\}_{j=0}^n \subseteq V$ la base canónica de $U := \mathcal{P}_{n+1}([0,1]) \subseteq V$. Definimos la aplicación $T : V \to V$ de modo que

$$\forall\, z \in V \;:\; T(z) := \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 z(t)\, p_j(t)\, dt \right) p_j \,.$$

No es difícil (¡HACERLO!) establecer que $T \in \mathcal{L}(V)$. Determinemos $T' \in \mathcal{L}(V')$. Para ello, para cada $j \in \{0, ..., n\}$, se define el funcional $F_j : V \to \mathbb{R}$ por

$$\forall\, z \in V \;:\; F_j(z) := \int_0^1 z(t)\, p_j(t)\, dt \,,$$

cada una de las cuales es lineal (¡VERIFICARLO!). De esta manera, $\forall\, j \in \{0, ..., n\} \;:\; F_j \in V'$. Luego, dado $G \in V'$ y $z \in V$, resulta

$$T'(G)(z) := G(T(z)) = G\left(\sum_{j=0}^{n} F_j(z)\, p_j \right) = \sum_{j=0}^{n} F_j(z)\, G(p_j) = \left(\sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j \right)(z) \,,$$

de donde se deduce que $T' \in \mathcal{L}(V', V')$ es dado por

$$\forall\, G \in V' \;:\; T'(G) := \sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j \,.$$