UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°3$ (Integrales y Teorema de Clases Monótonas).

Problemas a resolver en práctica

1. Sea ν la única medida sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que satisface $\nu(]a,b]) = b-a$ para todo $b > a$.

   a) Demuestre que
$$\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\,\nu(dt) = \frac{\pi}{2}.$$

   Solución

   Ya que la función $\phi(t) = 1/(1+t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$, ϕ es una función medible de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ y la integral sobre cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ de ϕ con respecto a ν coincide con la integral de Riemann de ϕ sobre este intervalo. Como $\phi(t) \geq 0$, usando el teorema de convergencia monótona obtenemos
$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\,\phi(t)\,\nu(dt) &= \lim_{n\to+\infty} \int \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\,\phi(t)\,\nu(dt)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \phi(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \lim_{n\to+\infty} \arctan(n) - \arctan(0) = \pi/2 - 0.\end{aligned}$$

   b) Demuestre que
$$\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,\nu(dt) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,dt,$$
   donde la integral de la derecha se entiende en el sentido de integral impropia de Riemann.

   Solución

   Para todo $t, x \in \mathbb{R}$ definimos
$$f(t,x) = \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}.$$

Fijemos $x \in]0,+\infty[$. Como la función $t \mapsto e^{-x\,t^2}/\left(1+t^2\right)$ es continua, $f\left(\cdot,x\right)$ es una función medible de $\left(\mathbb{R},\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ en $\left(\mathbb{R},\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ y la integral con respecto a ν de $f\left(\cdot,x\right)$ en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ coincide con la integral de Riemann de $f\left(\cdot,x\right)$. Ya que $f\left(\cdot,x\right) \geq 0$, usando el teorema de convergencia monótona obtenemos

$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}\left(t\right) f\left(t,x\right) \nu\left(dt\right) &= \lim_{n\to+\infty} \int \mathbf{1}_{[0,n]}\left(t\right) f\left(t,x\right) \nu\left(dt\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f\left(t,x\right) dt\\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} dt\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} dt.\end{aligned}$$

2. Considere la función g definida sobre $]0,+\infty[$ a través de

$$g\left(x\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} dt,$$

donde la integral se entiende en el sentido de integral impropia de Riemann. Demuestre que g es derivable y calcule $g'\left(x\right)$.

Solución

De acuerdo al inciso (b) de la Pregunta 1 tenemos que

$$g\left(x\right) = \int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}\left(t\right) f\left(t,x\right) \nu\left(dt\right),$$

donde ν la única medida sobre $\left(\mathbb{R},\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ que satisface $\nu\left(]a,b]\right) = b-a$ para todo $b > a$ y

$$f\left(t,x\right) = \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} \qquad \forall t,x \in \mathbb{R}.$$

Consideremos cualquier sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $]0,+\infty[$ tal que $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to_n x$. Luego, existe $k_x \in]0,x[$ tal que $x_n < k_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Elegimos

$$f_n\left(t\right) = \left(\frac{e^{-x_n\,t^2}}{1+t^2} - \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\right) / \left(x_n - x\right) \qquad \forall t \in [0,+\infty[\,.$$

De acuerdo a la definición de derivada tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{d}{dx}\frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} = \frac{-t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}.$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial deducimos

$$f_n(t) = \frac{-t^2}{1+t^2}e^{-\xi_n\,t^2}$$

donde ξ_n está entre x y x_n. Por lo tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| \leq e^{-\xi_n\,t^2} \leq e^{-k_x\,t^2}.$$

Ya que $t\mapsto e^{-k_x\,t^2}$ está en $L^1(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\nu)$, aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\,f(t,x_n)\,\nu(dt) - \int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\,f(t,x)\,\nu(dt)\right)/(x_n-x)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\,f_n(t)\,\nu(dt)\\
&= \int \lim_{n\to+\infty}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\,f_n(t)\,\nu(dt)\\
&= -\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}\nu(dt).
\end{aligned}$$

Usando que $t\mapsto \frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}$ es una función continua deducimos

$$\int \mathbf{1}_{[0,+\infty[}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}\nu(dt) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}dt.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}(g(x_n)-g(x))/(x_n-x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}dt.$$

Lo que implica que g es derivable y

$$g'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-x\,t^2}dt.$$

De aquí obtenemos

$$g'(x) = -\int_0^{+\infty}e^{-x\,t^2}dt + g(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + g(x).$$

3. Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos del conjunto Ω que es cerrada por las operaciones de uniones finitas y el complemento. O sea, $A^c \in \mathcal{S}$ si $A \in \mathcal{S}$ y $A \bigcup B \in \mathcal{S}$ cuando $A, B \in \mathcal{S}$. Suponga que $\mathbb{P}$ y $\widetilde{\mathbb{P}}$ son dos medidas de probabilidad sobre $\sigma(\mathcal{S})$ que satisfacen

$$\mathbb{P}(A) = \widetilde{\mathbb{P}}(A) \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Demuestre que $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}$.

Solución

Supongamos que $A, B \in \mathcal{S}$. Luego $A^c, B^c \in \mathcal{S}$, lo que implica que $A^c \cup B^c \in \mathcal{S}$. Ya que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \cap B \in \mathcal{S}$. Ahora, elegimos $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{\phi, \Omega\}$. Luego, $\widetilde{\mathcal{S}}$ es una colección de subconjuntos del conjunto Ω cerrada para las intersecciones finitas que contiene a ϕ.

Definimos

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \sigma(\mathcal{S}) : \mathbb{P}(A) = \widetilde{\mathbb{P}}(A) \right\}.$$

Así que $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ya que $\mathbb{P}(\phi) = \widetilde{\mathbb{P}}(\phi) = 0$ y $\mathbb{P}(\Omega) = \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$, $\widetilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{D}$.

Considere $A \in \mathcal{D}$. Luego

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \widetilde{\mathbb{P}}(A) = \widetilde{\mathbb{P}}(A^c).$$

Por lo tanto, $A^c \in \mathcal{D}$.

Asumamos que $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{D}$. Entonces

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{P}}(A_n) = \widetilde{\mathbb{P}}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Lo que implica $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Aplicando el teorema de clases monótonas dado en clases deducimos que $\sigma\left(\widetilde{\mathcal{S}}\right) \subset \mathcal{D}$. Por lo tanto $\sigma\left(\widetilde{\mathcal{S}}\right) = \mathcal{D}$. Así que $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

   a) Demuestre que la función $x \mapsto sen\,(x\,t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo.

   b) Para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos
   $$g(t) = \int sen\,(x\,t)\, \mathbb{P}(dx).$$
   Demuestre que g es derivable y calcule $g'(t)$.

2. Sea μ una medida positiva sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ con $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Considere la función
   $$h(t) = \int cos\left(y^2\,t\right) \mu(dy),$$
   donde $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que h es continua.

3. Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que dos σ-álgebras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ contenidas en $\mathcal{F}$ son independientes si y solo si
   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$
   para todo $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$. Suponga que para todo $j \in J$, donde J es un conjunto dado (puede ser no numerable), $X_j : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una variable aleatoria. Considere la σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Asuma que para cualquier subconjunto finito $\{j_1, \ldots, j_p\} \subset J$, $\mathcal{G}$ es independiente de $\sigma\left(X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}\right)$, que es la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual $X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}$ son medibles. Demuestre que $\mathcal{G}$ es independiente de la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual todos los X_j con $j \in J$ sean medibles.

CMG/cmg.