UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Listado 9

Transformada de Laplace (Segunda Parte)

Problemas a resolver en práctica

Notación: dado $a \in \mathbb{R}$, $H\left(t-a\right) = U_a\left(t\right) = H_a\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ 1 & \text{si } a \leq t. \end{cases}$

Problema 1

(i) Determine el valor de $f(t)$, si se sabe que $f(t-2) = \mathrm{e}^{3t-4}$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Determine $\mathcal{L}[H(t-2)\mathrm{e}^{3t-4}](s)$.

Desarrollo:

(i) $f(t) = f[(t+2)-2] = \mathrm{e}^{3(t+2)-4} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{3t}$.

(ii) Sabemos que $\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)](s) \;=\; \mathrm{e}^{-c\,s}\,\mathcal{L}[f(t)](s)$, por tanto

$$\mathcal{L}[H(t-2)\mathrm{e}^{3t-4}](s) \;=\; \mathrm{e}^{-2\,s}\,\mathcal{L}[f(t)](s)$$

donde $f(t-2) = \mathrm{e}^{3t-4}$. Por lo tanto, de acuerdo al item anterior

$$\mathcal{L}[H(t-2)\mathrm{e}^{3t-4}](s) \;=\; \mathrm{e}^{-2\,s}\,\mathcal{L}[\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{3t}](s) = \mathrm{e}^{2-2s}\frac{1}{s-3},\; s > 3.$$

Problema 2

Escriba la función que se define a continuación en términos de la función de Heaviside (función escalón unitario), y luego calcule su transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 2 + \operatorname{sen}(t-2) & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Desarrollo:

La función $f(t)$ se expresa en términos de las funciones de Heaviside $H_{t_0}(t)$ como sigue

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t)H_1(t) + f_2(t)H_2(t)\ .$$

Tomando $t < 1$, $1 \leq t < 2$ y $2 \leq t$, se obtiene respectivamente $1 = f_0(t)$, $t = f_0(t) + f_1(t)$ y $f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) = 2 + \operatorname{sen}(t-2)$, luego $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t-1$ y $f_2(t) = 2 - t + \operatorname{sen}(t-2)$. Así,

$$f(t) = 1 + (t-1)H_1(t) + (2 - t + \sin(t-2))H_2(t)\ .$$

Usando la linealidad de la transformada de Laplace $\mathcal{L}$, la segunda propiedad de traslación y la tabla de transformadas de Laplace, deducimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[1](s) + \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}[t](s) + \mathrm{e}^{-2s}(-\mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[\mathrm{sen}](s))\\ &= \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} + \mathrm{e}^{-2s}\left(-\frac{1}{s^2} + \frac{1}{1+s^2}\right) = \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} - \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2(s^2+1)} \quad , \quad s > 0\,.\end{aligned}$$

Problema 3
Determine $(f * g)(t)$ cuando $f(t) = 2t - 3$ y $g(t) = \mathrm{e}^{6t}$.
Desarrollo:
Por propiedad conmutativa y definición

$$\begin{aligned}(f * g)(t) = (g * f)(t) &= \int_0^t g(t-u)f(u)du\\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{6(t-u)}(2u-3)du\\ &= \mathrm{e}^{6t}\int_0^t \mathrm{e}^{-6u}(2u-3)du\\ &= \mathrm{e}^{6t}\left(2\left[-(1/6)u\mathrm{e}^{-6u}|_0^t + (1/6)\int_0^t \mathrm{e}^{-6u}du\right] + (1/2)\mathrm{e}^{-6u}|_0^t\right)\\ &= \mathrm{e}^{6t}\left(-(1/3)t\mathrm{e}^{-6t} - (1/18)\mathrm{e}^{-6t} + (1/18) + (1/2)\mathrm{e}^{-6t} - (1/2)\right)\\ &= -(1/3)t - (1/18) + (1/18)\mathrm{e}^{6t} + (1/2) - (1/2)\mathrm{e}^{6t}\\ &= -\frac{4}{9}\mathrm{e}^{6t} - \frac{3t-4}{9}\,.\end{aligned}$$

Problema 4
Considere $F(s) = \dfrac{1}{(s-3)(s+1)}$.
Determine de tres formas distintas el valor de $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$.

Desarrollo:

(i) **Primera Forma:** Notemos que $\dfrac{1}{(s-3)(s+1)} = \dfrac{(1/4)}{s-3} - \dfrac{(1/4)}{s+1}$; por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(1/4)}{s-3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(1/4)}{s+1}\right](t)\\ &= (1/4)\left[\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}\right]\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{t}}{2}\,\mathrm{senh}(2t).\end{aligned}$$

(ii) **Segunda Forma:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2-4}\right](t) \\
&= \mathrm{e}^t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right](t) \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-4}\right](t) \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\,\mathrm{senh}(2t).
\end{aligned}$$

(ii) **Tercera Forma:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
&= (f*g)(t) \ \text{ donde } f(t) = \mathrm{e}^{3t}\,,\ g(t) = \mathrm{e}^{-t} \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{3(t-u)}\,\mathrm{e}^{-u}\,du \;=\; \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{3t}\;-\;\mathrm{e}^{-t}) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{senh}(2t).
\end{aligned}$$

Problema 5

Usando las propiedades vistas en clases, determine $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, si

(i) $F(s) = \dfrac{s}{s^2-6s+5}$

(ii) $F(s) = \dfrac{s\,\mathrm{e}^{-7s}}{s^2-6s+5}$.

(iii) $F(s) = \dfrac{15s}{(s^2+9)^2}$.

Desarrollo:

(i) Observe que $\dfrac{s}{s^2-6s+5} = \dfrac{s-3}{(s-3)^2-4} + \dfrac{3}{(s-3)^2-4}$; por tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-6s+5}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2-4}\right](t) \,+\, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-3)^2-4}\right](t) \\
&= \mathrm{e}^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right](t) \,+\, \mathrm{e}^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2-4}\right](t) \\
&= \mathrm{e}^{3t}\left[\cosh(2t) \,+\, \frac{3}{2}\,\mathrm{senh}(2t).\right]
\end{aligned}$$

(ii) Usando el item anterior,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\,\mathrm{e}^{-7s}}{s^2-6s+5}\right](t) &= H(t-7)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-6s+5}\right](t-7) \\
&= H(t-7)\,\left[\mathrm{e}^{3t}\left(\cosh(2t)\,+\,\frac{3}{2}\,\mathrm{senh}(2t)\right)\right]_{(t-7)} \\
&= H(t-7)\,\mathrm{e}^{3(t-7)}\left[\cosh(2(t-7))\,+\,\frac{3}{2}\,\mathrm{senh}(2(t-7))\right].
\end{aligned}$$

(iii) Se sabe que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,\mathrm{sen}(3t)\right](s) &= (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(3t)\right](s) \\
&= (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] \\
&= \frac{6s}{(s^2+9)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15s}{(s^2+9)^2}\right](t) = \frac{15}{6}\,t\,\mathrm{sen}(3t) = \frac{5}{2}\,t\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

Problema 6

Determine la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y' + 5y(t) &= \mathrm{e}^{2t}\,H(t-2) \\ y(0)\,=\,1,\; y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Solución:

Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO, y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right](s)$ se obtiene

$$(s^2-6s+5)Y(s) - s + 6 \,=\, \mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{-2s}\frac{1}{s-2};$$

escribiendo $s^2-6s+5 = (s-3)^2-4$, sigue

$$Y(s) \;=\; \frac{\mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{-2s}}{(s-2)[(s-3)^2-4]} + \frac{s-6}{[(s-3)^2-4]}$$

de donde la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{e}^4}{(s-2)[(s-3)^2-4]}\right](t) \\
y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2-4}\right](t)
\end{aligned}$$

Se obtiene que

$$y_1(t) = \mathrm{e}^4\, H(t-2)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)[(s-3)^2-4]}\right](t-2)$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)[(s-3)^2-4]}\right](t) = (f*g)(t),$$

con

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) = \mathrm{e}^{2t}$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2-4}\right](t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-4}\right](t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}\mathrm{senh}(2t)$$

Teniendo presente que $\mathrm{senh}(t) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, se obtiene

$$y_1(t) = \mathrm{e}^4 H(t-2)\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{(t-2)} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5(t-2)} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2(t-2)}\right].$$

De otra parte, para $y_2(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2-4}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2-4} - \frac{3}{(s-3)^2-4}\right](t) \\ &= \mathrm{e}^{3t}\left[\cosh(2t) - \frac{3}{2}\mathrm{senh}(2t)\right] \\ &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5t}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5t} + \mathrm{e}^4 H(t-2)\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{(t-2)} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5(t-2)} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2(t-2)}\right] + \\ &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5t} + H(t-2)\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t+2} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5t-6} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\right] \end{aligned}$$

Problema 7

Resolver el PVI $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = \delta(t-2), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Desarrollo:

Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO, y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\left[y\,(t)\right](s)$ se obtiene

$$(s^2 - 2s - 3)Y(s) - 2s + 4 = \mathrm{e}^{-2s};$$

escribiendo $(s^2 - 2s - 3)$ como $(s-1)^2 - 4$, sigue

$$Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{[(s-1)^2-4]} + \frac{2s-4}{[(s-1)^2-4]}$$

de donde la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{[(s-1)^2-4]}\right](t) \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-4}{(s-1)^2-4}\right](t) \end{aligned}$$

En el primer caso, aplicando la Segunda Propiedad de Traslación, obtenemos:

$$y_1(t) = H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t-2)\,,$$

donde, invocando la Primera Propiedad de Traslación, resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t) = \frac{1}{2}\,e^t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-4}\right](t) = \frac{e^t}{2}\operatorname{senh}(2t)$$

Por lo tanto,

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\,H(t-2)\,e^{t-2}\operatorname{senh}[2(t-2)].$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t-2)\,, \\ &= (1/4)H(t-2)\left[e^{3(t-2)} - e^{-(t-2)}\right]. \end{aligned}$$

De otra parte, para $y_2(t)$ obtenemos:

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{(s-1)^2-4}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2-4}\right](t) = e^t\left[2\cosh(2t) - \operatorname{senh}(2t)\right].$$

Equivalentemente,

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-4}{(s-1)^2-4}\right](t) = (1/2)\,e^{3t} + (3/2)\,e^{-t}.$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{2}\,H(t-2)\,e^{t-2}\operatorname{senh}[2(t-2)] \,+\, e^t\left[2\cosh(2t) - \operatorname{senh}(2t)\right].$$

Equivalentemente,

$$y(t) = (1/4)H(t-2)\left[e^{3(t-2)} - e^{-(t-2)}\right] + (1/2)\,e^{3t} + (3/2)\,e^{-t}.$$

Problema 8

Para $t > 0$, resuelva: $\begin{cases} t\,y'(t) = y(t) + \delta(t-2) \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Desarrollo:

Observemos que la EDO dada es a coeficientes variables, y además en el lado derecho tenemos una **delta de Dirac**. Estamos obligados a usar T. de L.

$$\mathcal{L}\left[t\,y'(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[y(t) + \delta(t-2)\right](s).$$

Ahora si definimos $F(s) := \mathcal{L}\left[y(t)\right](s)$, se obtiene

$$(-1)\frac{d}{ds}\left(sF(s) - y(0)\right) = F(s) + \mathrm{e}^{-2s}.$$

Derivando, y efectuando, sigue

$$s\,F'(s) + 2F(s) = -\mathrm{e}^{-2s}$$

y suponiendo, a priori que $s > 0$, obtenemos

$$F'(s) + \frac{2}{s}F(s) = \frac{-\mathrm{e}^{-2s}}{s}$$

que es una EDO lineal de primer orden en que la incógnita es $F(s)$. Para resolver multiplicamos por el factor de integración $\mu(s) = s^2$, obteniendo

$$\begin{aligned} F'(s)s^2 + 2sF(s) &= -\mathrm{e}^{-2s}s \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(s^2\,F(s)\right) &= -s\,\mathrm{e}^{-2s} \\ \Rightarrow s^2\,F(s) &= -\int s\,\mathrm{e}^{-2s}ds + c\,,\ (c \in \mathbb{R} \text{ constante arbitraria}) \\ \Rightarrow F(s) &= \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2}\right)\mathrm{e}^{-2s} + \frac{c}{s^2}\,. \end{aligned}$$

En vista que $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$, para cualquier valor de $c \in \mathbb{R}$, su presencia se mantiene en lo que sigue. Así, aplicando la transformada inversa de Laplace,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{4s^2}\right)\mathrm{e}^{-2s} + \frac{c}{s^2}\right](t),$$

esto es,

$$y(t) = H(t-2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(t-2)\right) + c\,t.$$

Puesto que $y(0) = 0$, la constante c es arbitraria (esto es por la presencia de la delta de Dirac).

Problema 9

Un cuerpo de masa unitaria (en [Kg]) está unido a un resorte de constante $k = 9[N/m]$. El cuerpo se libera desde el reposo un metro por abajo de la posición de equilibrio (estático), sujeta a una fuerza externa $F_{\mathtt{ext}}(t) = \cos(2t)[N]$, $t \geq 0$. Luego de $\pi/2$ segundos la masa recibe un golpe súbito hacia arriba, que le imparte instantáneamente tres unidades de momento lineal.

Determine el PVI, cuya incógnita sea el desplazamiento del sistema, que modela el fenómeno descrito. Suponer que la fuerza de amortiguamiento es despreciable.
Observación: Recuerde que fuerzas actuando hacia arriba son negativas en magnitud, hacia abajo son positivas.

Desarrollo:
Del enunciado, tenemos que la masa del cuerpo es $m = 1[Kg]$. Sea $x(t)$ la posición en $[m]$ del cuerpo, con respecto a la posición de equilibrio (estático), en el instante $t[s]$. El golpe súbito en este caso es modelado por una delta de Dirac, centrada en $\pi/2$, de magnitud igual a la cantidad de movimiento indicada 3, hacia arriba. A esta fuerza le llamaremos FUERZA IMPULSO ($F_{\texttt{imp}}$). Dado que el golpe súbito actúa hacia arriba, se tiene $F_{\texttt{imp}}(t) = -3\delta(t - \frac{\pi}{2})$ $[N]$. Por otra parte, en vista que no hay amortiguamiento, estamos frente a un movimiento no amortiguado.

Así, el PVI que modela el movimiento, resulta ser

$$\begin{cases} m\,x''(t) + k\,x(t) = F_{\texttt{ext}}(t) + F_{\texttt{imp}}(t)\,, \quad t > 0 \\ x(0) = 1[m]\,, \quad x'(0) = 0[m/s] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t) + 9x(t) = \cos(2t) - 3\delta(t - \frac{\pi}{2})\,, \quad t > 0 \\ x(0) = 1\,,\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Escriba la función que se indica en términos de la función escalón (o de Heaviside), luego determine su transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 4t - t^2 & \text{si } 2 \le t < 7 \\ 0 & \text{si } 7 \le t < 9 \\ 4\mathrm{e}^{2(t-4)} & \text{si } t \ge 9 \end{cases}.$$

Desarrollo:
Primero vemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \Big[H(t) - H(t-2)\Big]2t + \Big[H(t-2) - H(t-7)\Big](4t - t^2) + H(t-9)4\mathrm{e}^{2(t-4)} \\ &= H(t)\,2t + H(t-2)\,(2t - t^2) + H(t-7)\,(t^2 - 4t) + H(t-9)\,4\mathrm{e}^{2(t-4)}; \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}\Big[H(t)\,2t + H(t-2)\,(2t - t^2) + H(t-7)\,(t^2 - 4t) + H(t-9)\,4\mathrm{e}^{2(t-4)}\Big](s) \\ &= \mathcal{L}[2t](s) + \mathcal{L}[H(t-2)\,(2t - t^2)](s) + \mathcal{L}[H(t-7)\,(t^2 - 4t)](s) + \mathcal{L}[H(t-9)\,4\mathrm{e}^{2(t-4)}](s) \\ &= \frac{2}{s^2} + \mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[2(t+2) - (t+2)^2](s) + \mathrm{e}^{-7s}\mathcal{L}[(t+7)^2 - 4(t+7)](s) + 4\mathrm{e}^{-9s}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{10}\,\mathrm{e}^{2t}](s) \\ &= \frac{2}{s^2} + \mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[-t^2 - 2t](s) + \mathrm{e}^{-7s}\mathcal{L}[t^2 + 10t + 21](s) + 4\mathrm{e}^{10-9s}\frac{1}{s-2} \\ &= \frac{2}{s^2} + (\mathrm{e}^{-7s} - \mathrm{e}^{-2s})\mathcal{L}[t^2](s) + (10\mathrm{e}^{-7s} - 2\mathrm{e}^{-2s})\mathcal{L}[t](s) + \mathrm{e}^{-7s}\mathcal{L}[21](s) + 4\mathrm{e}^{10-9s}\frac{1}{s-2} \\ &= \frac{2}{s^2} + (\mathrm{e}^{-7s} - \mathrm{e}^{-2s})\frac{2}{s^3} + (10\mathrm{e}^{-7s} - 2\mathrm{e}^{-2s})\frac{1}{s^2} + 21\mathrm{e}^{-7s}\frac{1}{s} + 4\mathrm{e}^{10-9s}\frac{1}{s-2}\,,\ s > 2. \end{aligned}$$

2. Determine $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, si (a) $F(s) = \dfrac{s-2}{(s^2-6s+5)^2}$, (b) $F(s) = \dfrac{s\,\mathrm{e}^{-7s}}{s^2-6s+5}$.

3. Calcular en forma explícita la Transformada Inversa de Laplace, de la función $F(s) = \ln\left(\dfrac{s^3}{s^3+1}\right)$.

   Sugerencia: calcular $\dfrac{d}{ds}F(s)$ primero.

   Planteamiento: Derivando F respecto de s, resulta

$$F'(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s^2}{s^3+1} = \frac{3}{s} - \frac{3s^2}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{3}{s} - \frac{3(s^2+s+1)-3(s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)}\,,$$

   de donde se obtiene su descomposición en fracciones parciales

$$F'(s) \;=\; \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1} \;+\; \frac{3}{s^2+s+1}\,.$$

   Una de las propiedades de Transformada Inversa de Laplace es la siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)](t) \;=\; -t\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)\,,$$

   la cual aplicaremos en este caso. En efecto,

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)](t) \;=\; 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) \;+\; 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right](t)\,,$$

   de donde

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)](t) \;=\; 3 \;-\; 3\,\mathrm{e}^{-t} \;+\; 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\,.$$

   Finalmente, se concluye que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^3}{s^3+1}\right)\right](t) \;=\; -\frac{3 \;-\; 3\,\mathrm{e}^{-t} \;+\; 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)}{t}.$$

4. Determine $(f*g)(t)$ cuando $f(t) = \mathrm{sen}(at)$ y $g(t) = \cos(bt)$. Aquí, $a, b \in \mathbb{R}$ constantes cualesquiera.

5. Calcule $\mathcal{L}[f(t)](s)$, para:

   (a) $f(t) = 2 - 5H_1(t) + 6H_3(t)$

   (b) $f(t) = tH_2(t)$

   (c) $f(t) = (t^3+1)H_1(t)$

   (d) $f(t) = (t^3+t)H_2(t)$.

   (e) $f(t) = \mathrm{e}^{3t}H_2(t) + 6t\,H_3(t)$

6. Calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, para :

   a) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2s} - 3\mathrm{e}^{-4s}}{s+2}$, b) $F(s) = \dfrac{s\mathrm{e}^{-3s}}{s^2+4s+5}$, c) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2+4}$,

7. Muestre que $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-6s+5}{(s^2-6s+13)^2}\right] = \mathrm{e}^{3t}\, t\cos(2t)$.

8. Resolver:

   (a) $\begin{cases} y''+5y'+6y=g(t) \\ y(0)=0, y'(0)=2 \end{cases}$ donde $g(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq t<1 \\ t & \text{si } 1<t<5 \\ 1 & \text{si } 5<t \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} t\,y''+2(t-1)\,y'+(t-2)y=0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1 \end{cases}$

9. Una masa m suspendida en equilibrio en el extremo de un resorte, recibe un golpe súbito desde abajo, que le imparte instantaneamente dos unidades de momento lineal. En el instante $t=a$ la masa es sometida a la fuerza externa $\operatorname{sen}(t-a)$. Suponiendo que el amortiguamiento es despreciable, **escriba la EDO que determina la ecuación del movimiento de la masa** m. (No se pide resolver la EDO !)

10. Resolver: $\begin{cases} y'(t)-6y(t)+14\displaystyle\int_0^t y(u)du=\delta(t-4)\,+\,h(t) \\ y(0)=0, \end{cases}$ donde $h(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<5 \\ 1 & \text{si } 5\leq t. \end{cases}$

Junio 04 de 2025.
KMR/JMS/CMG//jms/cmg