

Solución Evaluación 1

1. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, considere la relación \preceq en $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$, definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow [(u^t x < u^t y) \vee (x = y)]$$

- a) (7 puntos) Demuestre que es una relación de orden.

Solución. Demostremos las 3 propiedades que debe cumplir para ser relación de orden.

Refleja. Sea $x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$, p.d.q. $x \preceq x$

Es decir, p.d.q. $u^t x < u^t x \vee (x = x)$, lo cual se cumple pues $x = x$.

Transitiva. Sean $x, y, z \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ vemos que

$$\begin{aligned} x \preceq y \wedge y \preceq z &\Rightarrow (u^t x < u^t y \vee x = y) \wedge (u^t y < u^t z \vee y = z) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t y \wedge u^t y < u^t z) \vee (u^t x < u^t y \wedge y = z) \vee \\ &\quad (x = y \wedge u^t y < u^t z) \vee (x = y \wedge y = z) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t z) \vee (u^t x < u^t z) \vee (u^t x < u^t z) \vee (x = z) \\ &\Rightarrow x \preceq z \end{aligned}$$

Antisimétrica. Sean $x, y, z \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ vemos que

$$\begin{aligned} x \preceq y \wedge y \preceq x &\Rightarrow (u^t x < u^t y \vee x = y) \wedge (u^t y < u^t x \vee y = x) \\ &\Rightarrow (u^t x < u^t y \wedge u^t y < u^t x) \vee (u^t x < u^t y \wedge y = x) \vee \\ &\quad (x = y \wedge u^t y < u^t x) \vee (x = y \wedge y = x) \\ &\Rightarrow F \vee F \vee F \vee (x = x) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

- b) (8 puntos) Considere $n = 2$ y $u = (1, 0)$, demuestre que $(0, 13)$ es minimal pero que no es mínimo ¿hay mínimo? ¿ \preceq es de orden parcial o total?

Solución. En este caso la relación queda como sigue.

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Leftrightarrow (10)x < (10)y \vee x = y \\ &\Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee x = y \end{aligned}$$

Veamos que $(0, 13)$ es minimal.

$$\begin{aligned}
x \preceq (0, 13) &\Leftrightarrow x_1 < 0 \vee x = (0, 13) \\
&\Leftrightarrow F \vee x = (0, 13) \\
&\Leftrightarrow x = (0, 13)
\end{aligned}$$

Vemos que no es mínimo pues por ejemplo $(0, 13) \not\preceq (0, 0)$ ya que $0 \not< 0 \wedge (0, 13) \neq (0, 0)$.

No hay mínimo pues de haberlo tendría que coincidir con el minimal y ya probamos que un minimal que tenemos no es mínimo. No es de orden total pues si lo fuera, todo minimal sería mínimo y sabemos que $(0, 13)$ es minimal y no es mínimo, por lo tanto la relación es de orden parcial.

2. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo \mathbb{K} , y un operador lineal $T : V \rightarrow V$, se define la siguiente relación en V , que resulta ser una relación de equivalencia (no lo demuestre).

$$u R v \Leftrightarrow T(u) = T(v)$$

- a) (4 puntos) Demuestre que $(\forall u, v \in V) u R v \Leftrightarrow u - v \in \text{Ker}(T)$.

Solución. Sean $u, v \in V$.

$$\begin{aligned}
u R v &\Leftrightarrow T(u) = T(v) \\
&\Leftrightarrow T(u) - T(v) = \Theta \\
&\Leftrightarrow T(u - v) = \Theta \\
&\Leftrightarrow u - v \in \text{Ker}(T)
\end{aligned}$$

- b) (4 puntos) Calcule $[\Theta]_R$.

Solución.

$$\begin{aligned}
[\Theta]_R &= \{u \in V : u R \Theta\} \\
&= \{u \in V : u - \Theta \in \text{Ker}(T)\} \\
&= \{u \in V : u \in \text{Ker}(T)\} \\
&= \text{Ker}(T)
\end{aligned}$$

- c) (7 puntos) Demuestre que para cada $v \in V$ se cumple lo siguiente

$$[v]_R = \{v + u : u \in \text{Ker}(T)\}$$

Indicación: use la parte a).

Solución. Sea $w \in V$.

$$\begin{aligned}
w \in [v]_R &\Leftrightarrow w R v \\
&\Leftrightarrow w - v \in \text{Ker}(T) \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \text{Ker}(T), u = w - v \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \text{Ker}(T), w = u + v \\
&\Leftrightarrow w \in \{v + u : u \in \text{Ker}(T)\}
\end{aligned}$$

3. (15 puntos) Suponga que $q(x) = x^2 + ax + b$ es un polinomio irreducible en \mathbb{K} y que $F : V \rightarrow V$ es un operador tal que $\text{Ker}(q(F)) \neq \{\Theta\}$, y sea $v \in \text{Ker}(q(F)) - \{\Theta\}$. Demuestre que:

$\langle \{v, F(v)\} \rangle$ es un subespacio F -invariante.

Solución. Debemos demostrar lo siguiente.

$$\forall u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle, F(u) \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$$

Sabiendo que $q(F)(v) = F^2(v) + aF(v) + bv = \Theta$ (*) y $v \neq \Theta$.

Sea $u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$, p.d.q. $F(u) \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$.

El que $u \in \langle \{v, F(v)\} \rangle$ nos dice que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tales que $u = \alpha v + \beta F(v)$, así

$$\begin{aligned} F(u) &= F(\alpha v + \beta F(v)) \\ &= \alpha F(v) + \beta F^2(v). \end{aligned}$$

Ahora podemos usar (*) para reemplazar $F^2(v)$ por $-aF(v) - bv$, entonces

$$\begin{aligned} F(u) &= \alpha F(v) - \beta(aF(v) + bv) \\ &= (\alpha - a\beta)F(v) - b\beta v, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $F(u)$ es una c.l. de v y $F(v)$ y por lo tanto está en $\langle \{v, F(v)\} \rangle$.

4. (15 puntos) Considere la siguiente matriz A , y tome como dato que su espectro es $\sigma(A) = \{2, 0\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule sus núcleos iterados y su polinomio minimal. Calcule a partir de lo anterior (sin usar determinante) las multiplicidades algebraicas y geométricas de 2 y 0, y el polinomio característico de A .

Solución. Partamos calculando los núcleos iterados, con ello encontraremos el "exponente de estabilización" de cada valor propio, l_2 y l_0 , así sabremos que el polinomio minimal es $m(x) = (2 - x)^{l_2} x^{l_0}$.

Para el valor propio 0.

$$\begin{aligned} E_1(0) &= \{(a, b, c, d) : 2a + b = 0 \wedge b = 0 \wedge a + b + c + d = 0 \wedge -a + c + d = 0\} \\ &= \{(a, 0, c, d) : 2a = 0 \wedge a + c + d = 0 \wedge -a + c + d = 0\} \\ &= \{(0, 0, c, d) : c + d = 0 \wedge c + d = 0\} \\ &= \langle \{(0, 0, 1, -1)\} \rangle \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la multiplicidad geométrica de 0 es 1. Calculemos el siguiente núcleo iterado. Para ello calculamos la matriz al cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_2(0) &= \{(a, b, c, d) : 4a + 4b = 0 \wedge 4b = 0 \wedge 2a + 4b + 2c + 2d = 0 \wedge -2a + 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : 4a = 0 \wedge 2a + 2c + 2d = 0 \wedge -2a + 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(0, 0, c, d) : 2c + 2d = 0 \wedge 2c + 2d = 0\} \\
&= \langle \{(0, 0, 1, -1)\} \rangle \\
&= E_1(0)
\end{aligned}$$

De donde vemos que $l_0 = 1$ y que la multiplicidad algebraica de 0 es 1.

Para el valor propio 2. Calculamos primero $A - 2I_4$.

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_1(2) &= \{(a, b, c, d) : b = 0 \wedge 0 = 0 \wedge a + b - c + d = 0 \wedge -a + c - d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : a - c + d = 0 \wedge -a + c - d = 0\} \\
&= \{(a, 0, c, d) : a + d = c\} \\
&= \langle \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \rangle
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la multiplicidad geométrica de 2 es 2. Sabemos que las multiplicidades algebraicas suman 4, como la de 0 es 1, la de 2 ha de ser 3, por lo tanto es claro que $l_2 = 2$ y entonces $m(x) = (2 - x)^2 x^1$ y $p(x) = (2 - x)^3 x^1$.

Finalmente, como $E_1(2) \neq E_2(2)$, calculemos entonces el siguiente núcleo iterado. Para ello calculamos la matriz $A - 2I_4$ al cuadrado.

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_2(2) &= \{(a, b, c, d) : 0 = 0 \wedge 0 = 0 \wedge -2a + 2c - 2d = 0 \wedge 2a - 2c + 2d = 0\} \\
&= \{(a, b, c, d) : -a + c - d = 0\} \\
&= E_1(2) \oplus \langle \{(0, 1, 0, 0)\} \rangle
\end{aligned}$$