4 Variación de parámetros para sistemas lineales no-homogéneos

En esta sección consideraremos sistemas de EDOs no-homogéneos como en:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t), \tag{7}$$

para alguna función (no idénticamente cero) $\mathbf{F}$.

Como hemos visto para EDOs simples, la solución del sistema (7) viene dada por

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t), \tag{8}$$

donde $\mathbf{X}_h$ *es la solución del sistema homogéneo asociado* ($\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$) *y* $\mathbf{X}_p$ *es una solución particular de (7).*

Cuando los coeficientes en $\mathbf{A}$ *son constantes, ya sabemos cómo calcular* $\mathbf{X}_h$. *Veremos entonces un método para calcular la solución particular:* **variación de parámetros**.

Supongamos que tenemos $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$, *un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t),$$

en un intervalo I. *Entonces, la solución general del sistema homogéneo en el intervalo se escribe como:*

$$\mathbf{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}}_{=:\Phi(t)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

donde $C_1, C_2, \ldots$ *son constantes arbitrarias. A la matriz*

$$\Phi(t) := \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix},$$

se le conoce como matriz fundamental.
El método de variación de parámetros consiste en proponer como solución particular del sistema al vector

$$\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)\, c(t), \tag{9}$$

con $c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}$ *un vector de funciones que debemos calcular de manera que efectivamente* $\mathbf{X}_p$ *satisfaga el sistema.*

Notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p'(t) &= (\Phi(t)\, c(t))' \\ &= \Phi'(t)\, c(t) + \Phi(t)\, c'(t). \end{aligned}$$

Así, para que $\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)\, c(t)$ *sea solución de (7), se debe cumplir que*

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{X}_p(t) + \mathbf{F}(t) \\ \Phi'(t)\, c(t) + \Phi(t)\, c'(t) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t)c(t) + \mathbf{F}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Pero, como cada columna de $\Phi(t)$ satisface la EDO homogénea $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, se puede verificar que $\Phi(t)$ satisface

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{X}_1'(t) & \mathbf{X}_2'(t) & \cdots & \mathbf{X}_n'(t) \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{A}(t)\mathbf{X}_1(t) & \mathbf{A}(t)\mathbf{X}_2(t) & \cdots & \mathbf{A}(t)\mathbf{X}_n(t) \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}(t)\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix},\end{aligned}$$

es decir, $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$. Y por el vector $c(t)$ (por la derecha), tenemos

$$\Phi'(t)c(t) - \mathbf{A}(t)\Phi(t)c(t) = 0.$$

Usando lo anterior en la igualdad (10) nos queda que el vector de funciones $c(t)$ debe satisfacer

$$\Phi(t)\, c'(t) = \mathbf{F}(t), \forall t \in I. \tag{11}$$

Note $\det(\Phi(t)) = W[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n](t)$. *Por lo tanto, la matriz fundamental es no singular! (tiene inversa) y el sistema (11) tiene solución única:*

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt.$$

Finalmente, tenemos la solución particular

$$\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$$

y la solución general del sistema no-homogéneo (7)

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t) = \Phi(t)\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt,$$

con Φ la matriz fundamental, y C_i, $i = 1, \ldots, n$, constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.1. *Consideramos el sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4t \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir como:

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t),$$

para $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix}$.

Estudiamos primero el sistema homogéneo para hallar $\mathbf{X}_h(t)$*:*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \quad \textit{donde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de $\mathbf{A}$*:*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2^2 - \lambda^2) + 3 = \lambda^2 - 1.$$

Así,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

tenemos dos valores propios reales y diferentes.

Procedemos a encontrar el vector propio correspondiente a cada valor propio:

Para $\lambda_1 = 1$*, resolvemos* $(\mathbf{A} - I)\mathbb{K} = \mathbf{0}$*, es decir,*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual nos da el vector propio $\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*, o equivalentemente*

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y una solución del sistema es

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

De manera análoga, el vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ *viene dado por* $\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$*, o equivalentemente*

$$S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y una segunda solución del sistema homogéneo es

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo se escribe como:

$$\mathbf{X}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

La matriz fundamental del sistema, $\Phi(t)$*, se forma con los vectores linealmente independientes:*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix},$$

para la cual $\det(\Phi(t)) = 3 - 1 \neq 0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Aplicando el método de variación de parámetros, proponemos una solución particular de la forma:

$$\mathbf{X}_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix},$$

donde el vectpr $c(t) = \begin{pmatrix} c_2(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ *resuelve el sistema:*

$$\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(t). \tag{12}$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} e^t c_1'(t) + e^{-t} c_2'(t) = 0 \\ e^t c_1'(t) + 3e^{-t} c_2'(t) = 4t \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda ecuación, y sustituyendo esta nueva ecuación en la primera, simplificamos:

$$\begin{cases} e^t c_1'(t) + 2t = 0 \\ 2e^{-t} c_2'(t) = 4t \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -2te^{-t} \\ c_2'(t) = 2te^{t} \end{cases}$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(t+1)e^{-t} \\ 2(t-1)e^{t} \end{pmatrix}.$$

Una vez tenemos el vector de parámetros $c(t)$ *podemos calcular la solución particular:*

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t+1)e^{-t} \\ (t-1)e^{t} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} (t+1) + (t-1) \\ (t+1) + 3(t-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\mathbf{X}_p(t) = 4 \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix}.$$

es una solución particular del sistema no-homogéneo, y esto nos da la solución general del sistema no homogéneo:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 4t \\ 8t-4 \end{pmatrix}.$$