Forma Canónica de Jordan

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

June 24, 2021

Objetivo: Descomposición de Jordan

En un primer paso, el objetivo para llevar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a su forma canónica de Jordan, es determinar una matriz de paso $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular, tal que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

donde el polinomio característico de cada A_j contiene una única raíz, distinta de las raíces de los polinomios característicos inducidos por cada uno de los demás bloques. Por tanto, si el polinomio característico de A (salvo factor constante) viene definido por

$$\mathbb{K} \ni x \mapsto (x - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (x - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}},$$

el bloque A_j tendrá como polinomio característico, salvo factor constante, aquel dado por $\mathbb{K} \ni x \mapsto (x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. De esta manera, estamos realizando una descomposición invariante de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ por A:

$$\mathbb{K}^{n\times 1} = \bigoplus_{j=1}^{k} E_{\ell_j}(\lambda_j),$$

donde para cada $j \in \{1, ..., k\}$, $\dim(E_{\ell_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$.

Teorema de descomposición de Jordan

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si el polinomio característico de A, salvo factor constante, es definido por

$$\mathbb{K} \ni x \mapsto (x - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (x - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} \,,$$

con $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_{\lambda_k} = n$, entonces existen $\{\ell_j\}_{j=1}^{k} \subseteq \mathbb{N}$, tal que $\mathbb{K}^{n\times 1} = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_{\ell_j}(\lambda_j)$, tal que para cada $j \in \{1, ..., k\}$, $\dim(E_{\ell_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$. Además, existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de cambio de base tal que

$$P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

donde para cada $j \in \{1, ..., k\}$, el polinomio característico de cada A_j es, salvo factor constante, $(x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. También, las dimensiones de los núcleos iterados de las submatrices A_j coinciden con las de los de A.

Observación: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es tal que su polinomio característico admite raíces complejas, entonces A no admite descomposición de Jordan en $\mathbb{R}$. Sin embargo, se podría considerar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y en tal caso si admitiría descomposición de Jordan en $\mathbb{C}$. ¿Admitirá algún tipo de descomposición tipo Jordan en $\mathbb{R}$?

Demostración del Teorema:

La primera afirmación es consecuencia directa de las propiedades 5) y 6). Luego, considerando conjuntamente una base de todos los núcleos iterados $\{E_{\ell_j}(\lambda_j)\}_{j=1}^{k}$, se construye la matriz P, colocando los elementos de esta base por columnas, se puede transformar (por semejanza) la matriz A en otra matriz, diagonal por bloques.

Probemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, las dimensiones de los núcleos iterados de A_1 coinciden con las dimensiones de $E_j(\lambda_1)$

Sea $B := P^{-1} A P$. Notar que

$$(B - \lambda_1 I)^j = \begin{pmatrix} (A_1 - \lambda_1 I_{m_{\lambda_1}})^j & & & \\ & (A_2 - \lambda_1 I_{m_{\lambda_2}})^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & (A_k - \lambda_1 I_{m_{\lambda_k}})^j \end{pmatrix}.$$

A partir de esto, se deduce que

$$u \in \mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j) \Leftrightarrow \exists\, z \in \mathrm{Ker}((A_1 - \lambda_1 I_{m_{\lambda_1}})^j) \,:\, u = \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se tiene también

$$u \in \mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j) \Leftrightarrow P\,u \in \mathrm{Ker}((A - \lambda_1 I_n)^j) =: E_j(\lambda_1)\,.$$

Este mismo razonamiento puede hacerse con los demás valores propios.

Observación: la demostración permite que nos concentremos en submatrices con un único valor propio.

Definición. Llamamos caja de Jordan de orden k asociada a un valor propio λ, a una matriz $k \times k$ de la forma

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Propiedades:

1. La matriz $J_k(\lambda)$ tiene como polinomio característico a aquel definido por $\mathbb{K} \ni x \mapsto (x-\lambda)^k$ y $\dim(S_\lambda) = 1$.
2. Las dimensiones de los núcleos iterados de $J_k(\lambda)$ son:

$$\dim(\mathrm{Ker}((J_k(\lambda) - \lambda I)^j)) = \begin{cases} j\,, & j = 1, ..., k \\ k\,, & j \geq k \end{cases} = \min\{k, j\}\,.$$

Demostración de 2): se puede hacer directamente, notando que

$$J_k(\lambda) - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

y viendo cómo decrece de uno en uno el rango de las potencias de esta matriz. Alternativamente, también se puede ver notando que, como $n_1 = 1$, por la propiedad 4) de las dimensiones de los núcleos iterados $n_j = j$, hasta que $j = k$.

Definición. Una MATRIZ DE JORDAN ASOCIADA A UN ÚNICO VALOR PROPIO λ es una matriz diagonal por bloques, de orden m_λ, cuyos bloques son cajas de Jordan asociadas a λ.

$$J(\lambda) := \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Una DESCOMPOSICIÓN/FORMA DE JORDAN DE UNA MATRIZ en general es una matriz diagonal por bloques, cuyo bloques son matrices de Jordan asociadas a distintos valores propios, o bien (equivalente), una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son cajas de Jordan.

Dos problemas combinatorios

Objetivo: Mostrar cómo se establece una relación uno a uno entre las distintas posibilidades de dimensiones de los núcleos iterados de una matriz de Jordan $m \times m$ con un único valor propio, y las posibilidades de configurar las cajas de Jordan hasta llenar el espacio $m \times m$.

Problema (P): Hallar una sucesión de enteros que cumpla las tres siguientes propiedades:

$$(a)\ 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_\ell = n_{\ell+1} = \dots,$$
$$(b)\ n_\ell - n_{\ell-1} \leq n_{\ell-1} - n_{\ell-2} \leq \dots \leq n_2 - n_1 \leq n_1 - n_0 = n_1,$$
$$(c)\ n_\ell = m.$$

Problema (Q): Determinar un conjunto de valores $q_1, q_2, \dots, q_\ell, \dots$ de forma que

$$(a)\ q_{\ell+1} = q_{\ell+2} = \dots = 0,$$
$$(b)\ q_1 + 2\,q_2 + 3\,q_3 + \dots \ell\,q_\ell = m.$$

Nota: Antes de mostrar cómo se relacionan estos problemas, indicamos qué van a representar las soluciones de estos problemas, y la de un problema intermedio:

- $\{n_j\}$ serán las dimensiones de los núcleos iterados,
- $\{p_j\}$ indicarán el número de cajas de Jordan de tamaño $j \times j$ o superior,
- $\{q_j\}$ denotarán el número de cajas de Jordan de tamaño $j \times j$.

El trabajo se podrá hacer sin tener en cuenta cuál es el valor de ℓ en el que la solución de (P) se detiene, y la de (Q) toma su último valor no nulo, valor que de hecho será el mismo al relacionar ambas sucesiones.

Propiedad A. Dada una solución del Problema (P), definimos

$$p_j := n_j - n_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Nótese que esta sucesión cumple

$$0 = \ldots = p_{\ell+1} < p_\ell \leq p_{\ell-1} \leq \ldots \leq p_1 = n_1.$$

Seguidamente definimos $q_j := p_j - p_{j+1}$, $j \geq 1$, de modo que $q_\ell = p_\ell$ y $q_j = 0$ para todo $j > \ell$. Entonces, esta sucesión es una solución del Problema (Q).

Propiedad B. Dada una solución del Problema (Q), definimos

$$p_j := \sum_{k=j}^{\ell} q_k, \quad j = 1, \ldots, \ell, \quad \wedge \quad p_j := 0, \quad \forall j > \ell,$$

y por recurrencia

$$\begin{cases} n_0 := 0 \\ n_j := p_j + n_{j-1} \quad j \geq 1. \end{cases}$$

Entonces esta sucesión es solución del Problema (P).
Por consiguiente, hay una correspondencia biunívoca entre las soluciones de los problemas (P) y (Q).

Teorema: Dada una solución del Problema (P), y $\{q_j\}$ la solución correspondiente del Problema (Q), entonces la matriz de Jordan $m \times m$ asociada $\lambda \in \sigma(A)$, construida con

$$q_j \text{ bloques } j \times j \text{ para cada } j,$$

cumple

$$\forall j \geq 0 : \dim(E_j(\lambda)) = n_j.$$

Conclusiones:

1. Para cualquier solución del Problema (P), existe una matriz (de hecho una matriz de Jordan asociada a $\lambda \in \sigma(A)$) de orden m, con un único valor propio, de forma que $\forall j \geq 0 : \dim(E_j(\lambda)) = n_j$.
2. Por consiguiente, dadas posibles configuraciones de las dimensiones de los núcleos iterados asociados a todos los valores propios, existe una matriz (de hecho, forma de Jordan) que tiene los mismos núcleos iterados que A.
3. Dos formas de Jordan esencialmente distintas (que no se obtengan por permutación del orden de los bloques) no son semejantes.

Existencia de la forma de Jordan

Afirmación 1: Si $P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix}$, y $\{u_1, \dots, u_k\}$ son las primeras k columnas de P, entonces

$$\begin{aligned} A\,u_1 &= \lambda\,u_1 \\ A\,u_2 &= \lambda\,u_2 + u_1 \\ &\vdots \\ A\,u_k &= \lambda\,u_k + u_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Luego, para todo $j \geq 2$: $u_{j-1} = (A - \lambda\,I)\,u_j$.

Demostración: Primero, notemos que $\forall\, j \in \{1, \dots, k\} : P\,e_j = u_j$. Además $P^{-1}\,A = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}$. Luego,

- multiplicando por u_1 resulta:
  $P^{-1}\,A\,u_1 = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}\,u_1 = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} e_1 = \lambda\,e_1$, de donde
  $A\,u_1 = \lambda\,P\,e_1 = \lambda\,u_1$.
- multiplicando por u_j, con $j \in \{2, \dots, k\}$, resulta:
  $P^{-1}\,A\,u_j = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}\,u_j = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} e_j = e_{j-1} + \lambda\,e_j$, de donde
  $A\,u_j = P\,e_{j-1} + \lambda\,P\,e_1 = u_{j-1} + \lambda\,u_j$.

Afirmación 2: Si S es un subespacio de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ que verifica $E_{j-1}(\lambda) \oplus S \subseteq E_j(\lambda)$, y $T := (A-\lambda I)\,S := \{(A-\lambda I)u \,|\, u \in S\}$, entonces

$$E_{j-2}(\lambda) \oplus T \subseteq E_{j-1}(\lambda) \quad \wedge \quad \dim(T) = \dim(S)\,.$$

Demostración: Hay que probar tres cosas:

a) $T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$. En efecto, sea $w \in T$, fijo pero arbitrario. Esto asegura que existe $u \in S \subseteq E_j(\lambda)$, tal que $w = (A-\lambda I)u$. Luego, $(A-\lambda I)^{j-1} w = (A-\lambda I)^j u = \theta$, y así $w \in E_{j-1}(\lambda)$. Se establece entonces la inclusión $T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$.

b) $T \cap E_{j-2}(\lambda) = \{\theta\}$. Sea $w \in T \cap E_{j-2}(\lambda)$, fijo pero arbitrario. Como $w \in T$, existe $u \in S$ tal que $w = (A-\lambda I)u$. Por otro lado, $w \in E_{j-2}(\lambda)$, lo cual implica que $\theta = (A-\lambda I)^{j-2} w = (A-\lambda I)^{j-1} u$, lo que nos dice que $u \in E_{j-1}(\lambda)$. Así, resulta que $u \in S \cap E_{j-1}(\lambda) = \{\theta\}$, lo que implica que $w = \theta$. Esto permite validar la afirmación. CONCLUSIÓN: $E_{j-2}(\lambda) \oplus T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$.

c) $\dim(T) = \dim(S)$.
Sea $\{u_k\}_{k=1}^r$ una base de S. Por probar que $\{(A-\lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es una base de T.
Definimos la aplicación $R : S \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $\forall\, x \in S : R(x) := (A-\lambda I)\,x$.
Puede probarse que $R \in \mathcal{L}(S, \mathbb{K}^{n\times 1})$. Además

$$x \in \mathrm{Ker}(R) \Rightarrow (A-\lambda I)\,x = R(x) = \theta \Rightarrow x \in E_1(\lambda) \cap S \subseteq E_{j-1}(\lambda) \cap S = \{\theta\}\,.$$

Esto implica que R es un monomorfismo, y por tanto $\{R(u_k) := (A-\lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es l.i. Como además, $\langle \{(A-\lambda I)u_k\}_{k=1}^r \rangle = T$ (¡PROBARLO!), se concluye que $\{(A-\lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es una base de T y así, $\dim(T) = \dim(S)$.

Observación: la independencia lineal se preserva al multiplicar por $(A - \lambda I)$.

Teorema: Toda matriz $m \times m$ con un único valor propio λ es semejante a una matriz de Jordan asociada al valor propio λ. Además, las dimensiones de las cajas de Jordan vienen dadas por los coeficientes $\{q_j\}$ ligados a las dimensiones de los núcleos iterados.
Demostración: Sea $E_\ell(\lambda)$ el primer núcleo iterado de dimensión máxima. Sea además $S_\ell := S_\ell^0$ tal que $E_\ell(\lambda) = E_{\ell-1}(\lambda) \oplus S_\ell$ y $n_\ell - n_{\ell-1} = p_\ell = q_\ell$. Por la observación anterior, podemos expresar

$$\begin{aligned} E_{\ell-1}(\lambda) &= E_{\ell-2}(\lambda) \oplus S_{\ell-1} \\ &= E_{\ell-2}(\lambda) \oplus \underbrace{(A - \lambda I)S_\ell^0 \oplus S_{\ell-1}^0}_{=:\, S_{\ell-1}}, \end{aligned}$$

con $\dim(S_{\ell-1}^0) = (n_{\ell-1} - n_{\ell-2}) - \dim(S_\ell^0) = p_{\ell-1} - p_\ell = q_{\ell-1} \geq 0$.
De manera análoga, se tiene

$$\begin{aligned} E_{\ell-2}(\lambda) &= E_{\ell-3}(\lambda) \oplus S_{\ell-2} \\ &= E_{\ell-3}(\lambda) \oplus \underbrace{(A - \lambda I)\, S_{\ell-1} \oplus S_{\ell-2}^0}_{=:\, S_{\ell-2}} \\ &= E_{\ell-3}(\lambda) \oplus (A - \lambda I)^2\, S_\ell^0 \oplus (A - \lambda I)\, S_{\ell-1}^0 \oplus S_{\ell-2}^0\,, \end{aligned}$$

con $\dim(S_{\ell-2}^0) = q_{\ell-2}$.

Continuando con este proceso, se construye una partición de $E_\ell(\lambda)$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
E_\ell(\lambda) & = & S_\ell^0 & \oplus & (A-\lambda\, I)S_\ell^0 & \oplus & \cdots & \oplus & (A-\lambda\, I)^{\ell-2}S_\ell^0 & \oplus & (A-\lambda\, I)^{\ell-1}S_\ell^0 \\
 & & & \oplus & S_{\ell-1}^0 & \oplus & \cdots & \oplus & (A-\lambda\, I)^{\ell-3}S_{\ell-1}^0 & \oplus & (A-\lambda\, I)^{\ell-2}S_{\ell-1}^0 \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & \oplus & S_2^0 & \oplus & (A-\lambda\, I)S_2^0 \\
 & & & & & & & & & \oplus & S_1^0 \\
 & = & S_\ell & \oplus & S_{\ell-1} & \oplus & \cdots & \oplus & S_2 & \oplus & S_1\,,
\end{array}
$$

de forma que $\forall\, j \in \{1, ..., \ell\}\ :\ \dim(S_j^0) = q_j$.
Ahora, construimos una base de $E_\ell(\lambda)$ de la siguiente manera: se toma una base de cada S_j^0 (es posible que algunos sean espacios nulos y no haya que tomar base)

$$u_{j,1}, \ldots., u_{j,q_j}\ ,$$

y se construyen sucesiones de vectores para cada uno de ellos (digamos u):

$$
\begin{array}{ccccc}
v_1 & = & (A-\lambda\, I)^{j-1}\, u & = & (A-\lambda\, I)\, v_2 \\
v_2 & = & (A-\lambda\, I)^{j-2}\, u & = & (A-\lambda\, I)\, v_3 \\
 & \vdots & & & \\
v_{j-1} & = & (A-\lambda\, I)\, u & = & (A-\lambda\, I)\, v_j \\
v_j & = & u\,, & &
\end{array}
$$

de manera que $A\, v_1 = \lambda\, v_1$, y $\forall\, k \in \{2, ..., j\}\ :\ A\, v_k = v_{k-1} + \lambda\, v_k$. La matriz obtenida por el cambio de base inducido por la unión de estas sucesiones de vectores, es una matriz de Jordan con q_j cajas $j \times j$, para todo j.

Ejemplo: Determinar una descomposición de Jordan de la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollo. Notamos que la matriz dada no tiene la estructura de matriz de Jordan.
Primero, determinamos $\sigma(A)$. Como A es triangular inferior, se deduce que el polinomio característico asociado a A es $p_A \in \mathcal{P}_6(\mathbb{R})$, definido para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, por $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)^5\lambda = \lambda(\lambda-1)^5$. Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, con $m_{\lambda_1} = 1$ y $m_{\lambda_2} = 5$, respectivamente. Así, $\sigma(A) = \{0, 1\}$.
Segundo, determinamos los espacios propios de A, para cada valor propio. Realizando los procedimientos correspondientes, se deduce (¡HACERLO!)

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

En vista que $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_{\lambda_1}$ y $\dim(S_{\lambda_2}) = 2 < 5 = m_{\lambda_2}$, se concluye que A NO ES DIAGONALIZABLE. Sin embargo, como $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} = 6 =$ orden de la matriz A, ésta SÍ ADMITE FORMA CANÓNICA DE JORDAN.

Tercero, nos hace falta determinar solamente los Núcleos iterados de A con respecto a $\lambda_2 = 1$ (¿Por qué?) Denotamos por $\{e_j\}_{j=1}^{6}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{6\times 1}$. Realizando los procedimientos correspondientes, se deduce (¡HACERLO!)

$$
\begin{aligned}
E_1(1) &:= \mathrm{Ker}(A - I) = S_{\lambda_2} = \langle\{e_4, e_6\}\rangle\,,\ \dim(E_1(1)) = 2\\
E_2(1) &:= \mathrm{Ker}((A - I)^2) = \langle\{e_3, e_4, e_5, e_6\}\rangle\,,\ \dim(E_2(1)) = 4\\
E_3(1) &:= \mathrm{Ker}((A - I)^3) = \langle\{u, e_3, e_4, e_5, e_6\}\rangle\,,\ \dim(E_3(1)) = 5 = m_{\lambda_2}\,,
\end{aligned}
$$

siendo $u := (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t \in \mathbb{R}^{6\times 1}$. Luego, se cumple que $\forall\, j \geq 4 : E_j(1) = E_3(1)$.
Cuarto, Determinamos una base de $E_3(1)$ apropiada.
Tomamos primero un vector en $E_3(1) \setminus E_2(1)$. Se identifica que uno de estos vectores es el vector u definido antes. Esto induce tres (el índice del núcleo iterado $E_3(1)$) vectores:

$$
\begin{array}{rcl}
 & v_3 := u & \\
v_2 := (A - I)\, v_3 = (0\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0)^{t} & \Rightarrow & A\, v_3 = v_3 + v_2\\
v_1 := (A - I)\, v_2 = (0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0)^{t} & \Rightarrow & A\, v_2 = v_2 + v_1\\
(A - I)\, v_1 = (A - I)^3 \underbrace{v_3}_{\in E_3(1)} = \theta & \Rightarrow & A\, v_1 = v_1\,.
\end{array}
$$

De esta manera, $\{v_1, v_2, v_3\}$ son parte de la base que nos interesa determinar...
¡FALTAN DOS VECTORES MÁS!

Como no podemos extraer otro vector en $E_3(1) \setminus E_2(1)$, que sea l.i. con $\{v_1, v_2, v_3\}$, buscamos un vector en $E_2(1) \setminus E_1(1)$, l.i con $\{v_1, v_2, v_3\}$. Tomamos el vector e_5. Esto dará lugar a dos (el índice del núcleo iterado $E_2(1)$) vectores:

$$\begin{aligned} v_5 &:= e_5 \\ v_4 := (A - I)\, v_5 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{t}} &= e_6 \quad \Rightarrow \quad A\, v_5 = v_5 + v_4 \\ (A - I)\, v_4 = (A - I)^2 \underbrace{v_5}_{\in E_2(1)} &= \theta \quad \Rightarrow \quad A\, v_4 = v_4\,. \end{aligned}$$

De esta forma, se deduce el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, una base de $E_3(1)$.
CONSECUENCIA: El conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ es una base de $\mathbb{R}^{6\times 1}$, siendo $v_6 := (0\,,\,1\,,\,-1\,,\,1\,,\,0\,,\,0)^{\mathrm{t}} \in E_1(0)$.
Quinto...la conclusión...
Construimos la matriz de semejanza $P := \Big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,|\, v_4 \,|\, v_5 \,|\, v_6\Big)$, lo cual conduce a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación

Otra estrategia para determinar una base de $E_3(1)$ apropiada: Sistemas encajados.
Consideremos un vector de $E_1(1)$. Tomamos $w_1 := e_4$. Luego, resolvemos dos sistemas encajados, buscando soluciones que formen un conjunto l.i.:

$$
\begin{aligned}
(A - I)\, w_1 &= \theta \Rightarrow A\, w_1 = w_1 \\
(A - I)\, w_2 &= w_1 \Rightarrow w_2 = e_3 \Rightarrow A\, w_2 = w_2 + w_1 \\
(A - I)\, w_3 &= w_2 \Rightarrow w_3 = (1/2\,,\, 1/2\,,\, -1/2\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0)^{\mathrm{t}} \Rightarrow A\, w_3 = w_3 + w_2\,.
\end{aligned}
$$

Esto entrega el conjunto l.i. $\{w_1, w_2, w_3\}$...son parte de la base que nos interesa determinar... ¡FALTAN DOS VECTORES MÁS!
Consideramos otro vector de la base de $E_1(1)$. Por ejemplo, $w_4 := e_6$. Resolvemos ahora un sistema encajado:

$$
\begin{aligned}
(A - I)\, w_4 &= \theta \Rightarrow A\, w_4 = w_4 \\
(A - I)\, w_5 &= w_4 \Rightarrow w_5 = e_5 \Rightarrow A\, w_5 = w_5 + w_4\,.
\end{aligned}
$$

De esta manera, se deduce el conjunto l.i. $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, el cual es una base de $E_3(1)$.
CONSECUENCIA: El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ es una base de $\mathbb{R}^{6\times 1}$, siendo $w_6 := (0\,,\, 1\,,\, -1\,,\, 1\,,\, 0\,,\, 0)^{\mathrm{t}} \in E_1(0)$.

Construimos la matriz de semejanza $P := \left(w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4 \mid w_5 \mid w_6 \right)$, lo cual conduce a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, se tiene, para el valor propio $\lambda_2 = 1$:

$$n_j := \dim(E_j(\lambda_2)) :$$

$$n_0 := 0\,,\ n_1 := \dim(E_1(1)) = 2\,,\ n_2 := \dim(E_2(1)) = 4\,,\ n_3 := \dim(E_3(1)) = 5\,,$$

$$n_4 = n_5 = \ldots = 5\,,$$

$$p_j := n_j - n_{j-1}\ (\textit{Cantidad de cajas de Jordan de orden } \geq j) :$$

$$p_1 := n_1 - n_0 = 2\,,\ p_2 := n_2 - n_1 = 2\,,\ p_3 := n_3 - n_2 = 1\,,\ p_4 := n_4 - n_3 = 0\,,$$

$$p_5 = p_6 \ldots = 0\,,$$

$$q_j := p_j - p_{j+1}\ (\textit{Cantidad de cajas de Jordan de orden } j) :$$

$$q_1 := p_1 - p_2 = 0\,,\ q_2 := p_2 - p_3 = 1\,,\ q_3 := p_3 - p_4 = 1\,,\ q_4 := p_4 - p_5 = 0\,,$$

$$q_5 = q_6 = \ldots = 0\,.$$

$$\textit{Se verifica} : \sum_{j=1}^{3} j\, q_j = 5\,.$$

Algunos resultados importantes

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, se define el Núcleo iterado de T asociado a λ, de índice $\ell \in \mathbb{N}$, por $\tilde{E}_\ell(\lambda) := \mathrm{Ker}((T - \lambda\tilde{I})^\ell) \subseteq V$.

Teorema de Descomposición Prima: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$, cuyo polinomio característico asociado a su matriz representante (con respecto a alguna base) es definido por $\mathbb{K} \ni x \mapsto p(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. Entonces se cumple que

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} \tilde{E}_{m_{\lambda_j}}(\lambda_j) = \bigoplus_{j=1}^{r} \tilde{E}_{k_j}(\lambda_j),$$

donde para cada $j \in \{1, .., r\}$, k_j es el menor natural que cumple $\tilde{E}_{k_j}(\lambda_j) = \tilde{E}_{k_j+1}(\lambda_j)$.

Teorema de Jordan: Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a su forma canónica de Jordan $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Esto significa que $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $J = P^{-1} A P$. Además, la forma de Jordan (única, salvo permutaciones de bloques) es la única matriz de este tipo en la que coinciden las dimensiones de los núcleos iterados con los de A.

Teorema: En la misma clase de semejanza de matrices, están todas las matrices con el mismo polinomio característico e idénticas dimensiones de núcleos iterados y ninguna más.

Además de lo dicho anteriormente, la consecuencia más relevante se conoce como el Teorema de Cayley-Hamilton: Sea p el polinomio característico de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces $p(A) = \Theta$ (MATRIZ NULA).

Demostración (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$): Una forma elemental de demostrar este resultado, es con la ayuda de la forma de Jordan de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puesto que $J = P^{-1} A P$. Entonces se deduce que $p(J) = P^{-1} p(A) P$. Con esto, es suficiente con mostrar que $p(J) = \Theta$ para concluir. Sabemos que J es diagonal por bloques, i.e.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

donde $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, y $\forall j \in \{1, ..., r\} : J(\lambda_j) \in \mathcal{M}_{k_j}(\mathbb{C})$, con $k_j = m_{\lambda_j}$, es una matriz de Jordan asociada a λ_j. Siendo $\mathbb{C} \ni x \mapsto p(x) := \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell x^\ell$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell A^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell (P J P^{-1})^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell P J^\ell P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell J^\ell \right) P^{-1} = P\, p(J)\, P^{-1}. \end{aligned}$$

De esta manera, se infiere que

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(J(\lambda_1)) & & & \\ & p(J(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J(\lambda_r)) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, $\forall\, x \in \mathbb{C} \,:\, p(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. Así,

$$\begin{aligned} \forall\, j \in \{1, \ldots, r\} \,:\, p(J(\lambda_j)) &= \prod_{i=1}^{r} (J(\lambda_j) - \lambda_i\, I)^{m_{\lambda_i}} \\ &= \underbrace{(J(\lambda_j) - \lambda_j\, I)^{m_{\lambda_j}}}_{=\Theta} \prod_{i=1, i\neq j}^{r} (J(\lambda_j) - \lambda_i\, I)^{m_{\lambda_i}} \,. \end{aligned}$$

Se establece de esta forma que $p(J) = \Theta$, lo que equivale a decir que $p(A) = P\, p(J)\, P^{-1} = \Theta$.

Observación: Para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, proceder como en el caso complejo. Al final, inducir el polinomio característico a coeficientes reales, y concluir.

Comentarios: Este tipo de resultados motiva la introducción de los conceptos de polinomio mínimo, divisores elementales, factores invariantes, etc. Vamos simplemente a listar la relación entre este enfoque y el de polinomios.

Definiciones y propiedades importantes

1. Se dice que un polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\backslash\{\theta\}$ es mónico si el coeficiente del término de mayor grado no nulo es 1.
2. El polinomio minimal (mínimo en realidad, en el cuerpo $\mathbb{C}$) de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^r$, es el polinomio mónico $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ de menor grado posible, tal que $q(A) = \Theta$. Puede probarse que si para cada $\lambda_j \in \sigma(A)$, k_j es el mínimo valor tal que $\dim(E_{k_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$, entonces $q(x) := \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{k_j}$ es el polinomio mínimo de la forma de Jordan de A, y por tanto, de A.
3. El polinomio minimal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define de manera análoga. Para identificarlo, puede ser conveniente trabajar en el cuerpo $\mathbb{C}$. Sus factores irreducibles (en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) son a lo más de grado 2.
4. El polinomio minimal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siempre es factor del correspondiente polinomio característico de A.
5. Los divisores elementales de A son polinomios de la forma $(x - \lambda_j)^s$, construidos según la siguiente regla:
   por cada bloque de Jordan $J_{k_m}(\lambda_m)$, se toma un polinomio $(x - \lambda_m)^{k_m}$.
   Esto quiere decir que hay tantos divisores elementales como cajas de Jordan, y que sus grados marcan los tamaños de las mismas.
6. Una matriz es diagonalizable si y sólo si su forma de Jordan es diagonal.
   Equivalentemente, si y sólo si $\forall\, \lambda \in \sigma(A) \,:\, E_2(\lambda) = E_1(\lambda)$.
   A su vez, esto equivale a que todos los divisores elementales de A sean de grado uno, y a que el polinomio mínimo no tenga raíces múltiples.

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico dado por $\mathbb{R} \ni x \mapsto p_A(x) := (x+3)(x-1)$. Su polinomio minimal es $q_A := p_A$.
2. Para I_n (matriz identidad de orden n), se tiene que su polinomio característico es $\mathbb{R} \ni x \mapsto p(x) := (1-x)^n$, mientras que su polinomio minimal siempre será $\mathbb{R} \ni x \mapsto q(x) := x-1$.
3. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es $\mathbb{R} \ni x \mapsto p(x) := (2-x)(1+x)^2 = -(x-2)(x+1)^2$, y su polinomio minimal es $\mathbb{R} \ni x \mapsto q(x) := (x-2)(x+1)$.
4. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tiene polinomio característico $\mathbb{R} \ni x \mapsto p(x) := (-1-x)^3(2-x) = (x+1)^3(x-2)$, y polinomio minimal $\mathbb{R} \ni x \mapsto q(x) := (x+1)^2(x-2)$.
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $\mathbb{R} \ni x \mapsto p_A(x) := x^2+1$. Si consideramos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, su polinomio minimal es $q_A(x) := x^2+1$. Por otro lado, si tomamos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, su polinomio minimal será $\mathbb{C} \ni x \mapsto q_A(x) := (x-i)(x+i)$.

Comentario sobre la forma de Jordan transpuesta: En varios textos, es común encontrarse con la forma de Jordan compuesta de cajas de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

es decir, con los 1s debajo de la diagonal. Si se ha sabido encontrar la base que lleva a la forma de Jordan descrita en este curso, basta con cambiar el orden de los vectores para pasar a esta forma. En concreto, si los vectores $u_1, \dots, u_s$ crean una caja $s \times s$ asociada a λ, entonces los vectores $u_s, \dots, u_1$ dan la misma caja, con unos por debajo de la diagonal.

Consecuencia: Toda matriz es semejante a su transpuesta. Esto también se puede ver notando que los núcleos iterados de A y A^t tienen las mismas dimensiones.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con todos sus elementos reales. Si $\lambda = \alpha + i\,\beta$ (con $\beta \neq 0$) es un valor propio de A y ya se tiene la base calculada para la parte de la forma de Jordan asociada a λ, entonces para $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ basta con conjugar los vectores obtenidos. Esto es

$$u \in E_j(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} \in E_j(\overline{\lambda})\,.$$

Por tanto, el número y tipo de cajas de Jordan es el mismo.
Si $\{u_1, \ldots, u_s\}$ es la base que lleva a la forma de Jordan asociada al valor propio $\lambda = \alpha + i\,\beta$ (con $\beta \neq 0$), entonces $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_s\}$ son los correspondientes a $\overline{\lambda}$. Luego, se toman

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathrm{Re}(u_1)\,, & v_2 &= \mathrm{Im}(u_1) \\ v_3 &= \mathrm{Re}(u_2)\,, & v_4 &= \mathrm{Im}(u_2) \\ &\vdots & & \\ v_{2s-1} &= \mathrm{Re}(u_s)\,, & v_{2s} &= \mathrm{Im}(u_s)\,. \end{aligned}$$

Con estos vectores, las cajas de λ y $\overline{\lambda}$ se mezclan, dando lugar a cajas más grandes, pero ya reales. Por ejemplo

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 1 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

De esta forma, cuando hay valores propios complejos en una matriz real, se puede trabajar con cajas de Jordan por bloques del tipo

$$J_k(\lambda, \overline{\lambda}) := \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & \\ & \Lambda & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Determinar la forma de Jordan real de la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Haciendo los cálculos, se encuentra que $p_A(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$, de donde se deduce que $\sigma(A) = \{-i, i\} \subseteq \mathbb{C}$. Ambos valores propios son dobles. Procediendo como en el ejemplo previo, se deduce la base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de $\mathbb{C}^4$, siendo $w_1 := (i, 0, 1, 0)^{\mathtt{t}}$, $w_2 := (0, 1+i, 1, 2i)^{\mathtt{t}}$, $w_3 := (-i, 0, 1, 0)^{\mathtt{t}}$, y $w_4 := (0, 1-i, 1, -2i)^{\mathtt{t}}$. De esta manera se construye la matriz $P := \begin{pmatrix} w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, w_4 \end{pmatrix}$ es decir

$$P := \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A P = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Para obtener una forma de Jordan real, procedemos como se indicó:

$$v_1 := \mathrm{Re}(w_1) = (0,0,1,0)^{\mathtt{t}}, v_2 := \mathrm{Im}(w_1) = (1,0,0,0)^{\mathtt{t}},$$
$$v_3 := \mathrm{Re}(w_2) = (0,1,1,0)^{\mathtt{t}}, v_4 := \mathrm{Im}(w_2) = (0,1,0,2)^{\mathtt{t}}.$$

Así se obtiene el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, una base de $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Esto induce

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} := Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Suponga que la forma canónica de Jordan de cierta matriz $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ es

$$J := \begin{pmatrix} -2 & & & & & & & & & \\ & -2 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & & & 5 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & 7 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 7 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 7 & & \\ & & & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Polinomio característico de A: $\forall\, x \in \mathbb{R}\,:\, p_A(x) = p_J(x) = (-2-x)^2(5-x)^3(7-x)^5$, de donde se deduce que los valores propios de A son: $\lambda_1 = -2$ (doble), $\lambda_2 = 5$ (triple), $\lambda_3 = 7$ (quíntuple). Se tiene, para el valor propio $\lambda_2 = 5$:

q_j (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* j) :

$q_1 = 1\,,\ q_2 = 1\,,\ q_3 = 0\,,\ q_4 = q_5 = \ldots = 0$ (*se identifica* $\ell = 2$),

$p_j := q_j + \ldots + q_2\,,\ j = 1, 2$ (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* $\geq j$) :

$p_1 = q_1 + q_2 = 2\,,\ p_2 = q_2 = 1\,,\ p_j = 0$ para $j > \ell = 2$

$n_j := \dim(E_j(5))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2\,,\ n_2 = p_2 + n_1 = 3 = m_{\lambda_2} \Rightarrow n_j = 3\,,\ \forall\, j \geq \ell = 2\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x-5)^2$.

Repitiendo el análisis para valor propio $\lambda_3 = 7$:

q_j (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* j) :

$q_1 = 0\,,\ q_2 = 1\,,\ q_3 = 1\,,\ q_4 = q_5 = \ldots. = 0$ (*se identifica* $\ell = 3$),

$p_j := q_j + \ldots + q_3\,,\ j = 1,2,3$ (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* $\geq j$) :

$p_1 = q_1 + q_2 + q_3 = 2\,,\ p_2 = q_2 + q_3 = 2\,,\ p_3 = q_3 = 1\,,\ p_j = 0$ para $j > \ell = 3$

$n_j := \dim(E_j(7))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2\,,\ n_2 = p_2 + n_1 = 4\,,\ n_3 = p_3 + n_2 = 5 = m_{\lambda_3}$

$\Rightarrow n_j = 5\,,\ \forall\, j \geq \ell = 3\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x-7)^3$.

Para valor propio $\lambda_1 = -2$:

q_j (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* j) :

$q_1 = 2\,,\ q_2 = q_3 = \ldots. = 0$ (*se identifica* $\ell = 1$),

$p_j := q_j + \ldots + q_1\,,\ j = 1$ (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* $\geq j$) :

$p_1 = q_1 = 2\,,\ p_j = 0$ para $j > \ell = 1$

$n_j := \dim(E_j(-2))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2 = m_{\lambda_1} \Rightarrow n_j = 2\,,\ \forall\, j \geq \ell = 1\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x+2)$.

El polinomio minimal de A es entonces: $q_A(x) := (x+2)(x-5)^2(x-7)^3$.

Ejemplo: Determine la forma de Jordan real de $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Polinomio característico de A:

$p_A(x) := \det(A - xI) = -x^3 - 1 = -(x+1)(x^2 - x + 1)$.

Valores propios de A en $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$,

De aquí se deduce que en el cuerpo real, A no es diagonalizable ni admite forma canónica de Jordan.

Determinaremos entonces su forma de Jordan real. Para ello, primero debemos determinar su forma canónica de Jordan compleja. Como los tres valores propios son distintos, A es diagonalizable y ella será su forma canónica de Jordan compleja. Esto significa que

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Los espacios propios asociado a los valores propios son:

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \; S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \; S_{\lambda_3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Así, la base de $\mathbb{C}^{3\times 1}$ formada por vectores propios es $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de semejanza a la forma canónica de Jordan compleja es:

$$P := \big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \big) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = P^{-1} A\, P.$$

De aquí se deduce una base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ dada por $\{w_1, w_2, w_3\}$, donde

$$w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \mathrm{Re}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \mathrm{Im}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de semejanza a la forma de Jordan real es:

$$Q := \big(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \big) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} = Q^{-1} A\, Q.$$