Movimiento en Dos o Tres dimensiones

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315
e-mail:jaguirre@udec.cl

Contenidos

- Objetivos.
- Vectores de posición, velocidad y aceleración.
- Movimiento de proyectiles.
- Movimiento circular.

Resultados de aprendizaje

- Calcular el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de cuerpos en movimiento bi o tridimensional.
- Resolver problemas de movimiento de proyectiles y de cuerpos en movimiento circular uniforme y circular uniformemente acelerado.

2. Vectores de posición, velocidad y aceleración

La descripción del *movimiento* de un cuerpo en el espacio requiere del conocimiento de su *posición*, según un sistema de coordenadas específico.

2.1. Vector de posición $\vec{r}$

Es un vector que va desde el origen del sistema de coordenadas al punto en el cual se encuentra el cuerpo. En un sistema de coordenadas rectangulares x, y, z, el vector de posición es dado por

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{1}$$

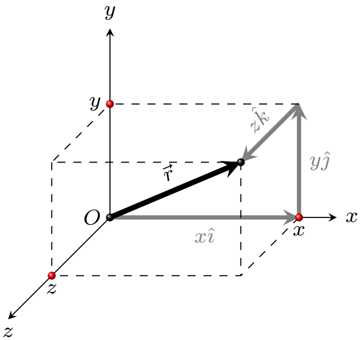


Figura 1: Vector de posición de una partícula en el espacio.

En un intervalo de tiempo Δt el cuerpo se mueve desde el punto P_1 (vector de posición $\vec{r}_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$ en el tiempo t_1) al punto P_2 (vector de posición $\vec{r}_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$ en el tiempo t_2). El vector desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}.$$

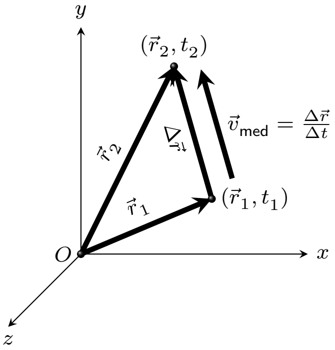


Figura 2: Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y vector velocidad media $\vec{v}_{\mathsf{med}}$.

2.2. Vector velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$

Vector $\Delta\vec{r}$ dividido por Δt:

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad (2)$$

2.3. Vector velocidad instantánea $\vec{v}$

Límite de $\vec{v}_{\text{med}}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (3)$$

$|\vec{v}| = v$; *rapidez* de la partícula en un instante dado. $\vec{v}$ apunta en la dirección del movimiento de la partícula en ese instante.

En cualquier *punto* de la trayectoria, el vector de velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto. Las componentes de $\vec{v}$ son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (4)$$

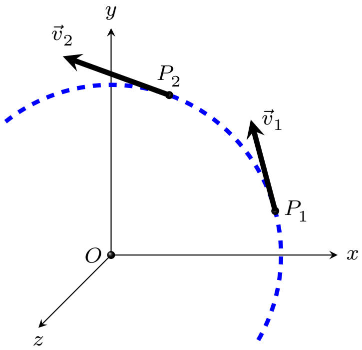


Figura 3: Vectores velocidad instantánea de una partícula en P_1 y P_2. Línea segmentada azul representa una posible trayectoria de la partícula.

De lo anterior se tiene

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \qquad (5)$$

La magnitud del vector velocidad $\vec{v}$ es

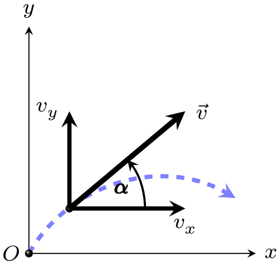
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (6)$$

En la Fig.4 el cuerpo se mueve en el plano xy (en una trayectoria arbitraria dibujada en línea segmentada), luego $z = 0$ y $v_z = 0$, con

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

siendo la dirección del vector velocidad $\vec{v}$ obtenida a partir del ángulo α que forma con el eje x

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \;\rightarrow\; \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right). \qquad (7)$$



4: Vector velocidad $\vec{v}$ y sus componentes v_x y v_y para una partícula que se mueve en el plano xy.

2.4. Vector aceleración media $\vec{a}_{\mathrm{med}}$

Para un cuerpo que se mueve desde la posición $P_1 : (\vec{r}_1,\ \vec{v}_1,\ t_1)$ a la posición $P_2 : (\vec{r}_2,\ \vec{v}_2,\ t_2)$, se define el vector **aceleración media** $\vec{a}_{\mathrm{med}}$, como el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ por el intervalo de tiempo Δt,

$$\vec{a}_{\mathrm{med}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \tag{8}$$

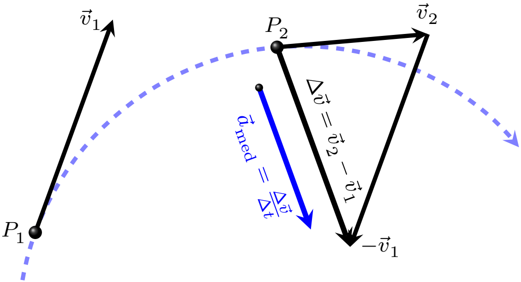


Figura 5: Movimiento de una partícula desde el punto P_1 al punto P_2. Vector cambio de velocidad y vector aceleración media.

2.5. Vector aceleración instantánea $\vec{a}$

El vector aceleración instantánea $\vec{a}$ en un punto P es dado por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{9}$$

Las componentes del vector aceleración instantánea son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10}$$

o, en términos de los vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}. \tag{11}$$

Además

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{12}$$

o

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \tag{13}$$

2.6. Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

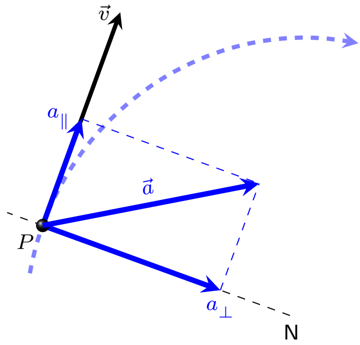


Figura 6: Componentes de aceleración paralela $a_{\|}$ y perpendicular $a_{\perp}$ a la trayectoria.

En P la velocidad de la partícula, en la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto, es $\vec{v}$.

La aceleración de una partícula puede describir cambios en la rapidez $|\vec{v}|$ de la partícula, en la dirección de su movimiento o en ambas.

La componente de $\vec{a}$ *paralela* a la trayectoria, $a_{\|}$, indica cambios en la *rapidez* de la partícula;

La componente de $\vec{a}$ *perpendicular* a la trayectoria, $a_{\perp}$, perpendicular a la velocidad, indica cambios en la *dirección* del movimiento.

N representa la normal a la trayectoria de la partícula en el punto P.

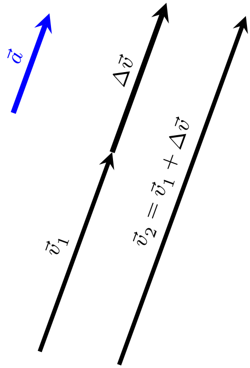


Figura 7: Aceleración paralela a la velocidad de la partícula. La velocidad cambia su *magnitud*, pero no en su *dirección*.

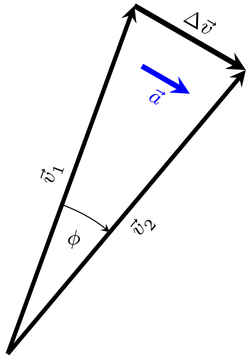


Figura 8: Aceleración perpendicular a la velocidad de la partícula. La velocidad cambia de *dirección*, pero no en *magnitud*.

Generalmente, la $\vec{a}$ tiene *ambas* componentes: $\vec{a}_{\parallel}$ y $\vec{a}_{\perp}$.

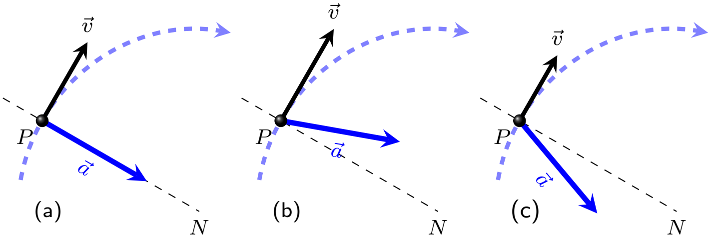


Figura 9. Vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ para una partícula que pasa por un punto P de una trayectoria curva con rapidez: (a) constante, (b) creciente y (c) decreciente.

Si $|\vec{v}| = \text{cte.}$, $\vec{a} \perp \vec{v}$: $\vec{a}$ apunta en la dirección normal y hacia el lado cóncavo de la misma.

Si $|\vec{v}|$ aumenta, $\vec{a}_{\perp} \neq 0$ y $\vec{a}_{\parallel}\vec{v}$: $\vec{a}$ apunta en una dirección sobre la normal.

Si $|\vec{v}|$ disminuye, $\vec{a}_{\parallel} \parallel \vec{v}$, pero opuesta: $\vec{a}$ apunta en una dirección debajo de la normal.

3. Movimiento de proyectiles

Proyectil: cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada *totalmente* por efectos de la gravedad y la resistencia del aire.

El camino que sigue un proyectil es su *trayectoria*.

Modelaremos el proyectil como una partícula bajo aceleración constante en magnitud y dirección (gravedad), sin considerar los efectos de la resistencia del aire (útil en el caso de paracaidistas) ni la curvatura ni la rotación de la tierra (útil en misiles).

Movimiento siempre limitado a un plano vertical determinado por la velocidad inicial (vea la Fig.10); aceleración exclusivamente vertical.

Movimiento en *dos* dimensiones: Plano xy; $+y$ hacia arriba y $+x$ hacia la derecha.

Las componentes de la aceleración en este movimiento son, entonces,

$$a_x = 0, \quad a_y = -g; \quad \text{(ambas constantes).} \tag{14}$$

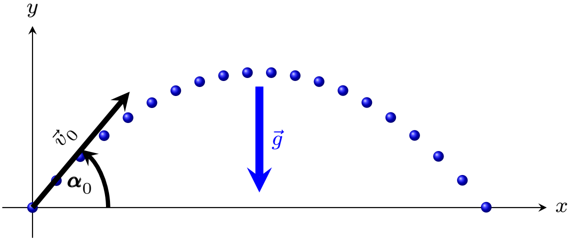


Figura 10: Trayectoria de un proyectil: Movimiento en plano xy ($\vec{v}_0 = (v_{x0},\, v_{y0})$).

Dado que $a_x =$ cte. y $a_y =$ cte., usaremos las ecuaciones vistas en el Capítulo §3.

Suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) con velocidad $(v_{x0},\, v_{y0})$. Movimiento en el eje x:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad \rightarrow \quad v_x(t) = v_{x0} \tag{15a}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t. \tag{15b}$$

$$a_x = 0. \tag{15c}$$

La coordenada x de la coordenada y son tratadas separadamente.

> *Movimiento de un proyectil: Combinación de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical con aceleración constante.*

La Fig.11 muestra dos proyectiles con diferente movimiento a lo largo del eje x, pero con idéntico movimiento a lo largo del eje y:

- Izquierda: Se deja caer libremente desde el reposo.
- Derecha: Se proyecta horizontalmente $(\alpha_0 = 0)$ con velocidad inicial $\vec{v}_0$.

Ambos proyectiles tienen coordenada x diferente y coordenada y igual en todo t.

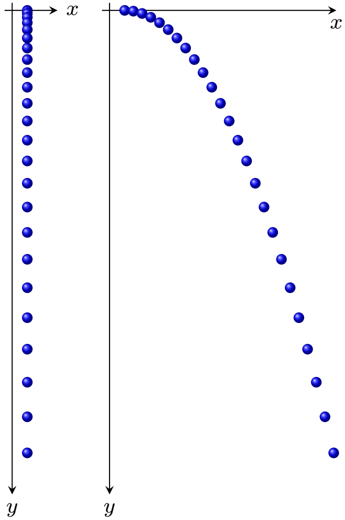


Figura 11. Dos proyectiles con distinta coordenada x e igual coordenada y.

Para el movimiento en el eje y, las ecuaciones son:

$$v_y(t) = v_{y0} - gt \tag{16}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{17}$$

Generalmente $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$.

Con $\vec{v}_0 = (v_0,\, \alpha_0)$, con v_0 la rapidez inicial y α_0 el angulo de lanzamiento con respecto a $+x$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \quad \text{y} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0. \tag{18}$$

Usándolas en las Ecs.(15a) a (16) y, haciendo $x_0 = y_0 = 0$, se tiene

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha_0)t \tag{19a}$$

$$y(t) = (v_0 \sin\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19b}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{19c}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha_0 - gt, \tag{19d}$$

ecuaciones que describen la posición y velocidad del proyectil para todo $t > 0$.

Para cualquier tiempo t:

- La distancia r del proyectil al origen es:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{20}$$

- La rapidez del proyectil y la *dirección* (α) de la $\vec{v}$ con respecto a $+x$, son:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{y} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right). \tag{21}$$

  El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

- Despejando t de la Ec.(19a), se tiene $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$, y sustituyendo esa expresión para t en la Ec.(19b), se llega a:

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2. \tag{22}$$

  o sea, ecuación de la forma general, $y = bx - cx^2$, con b y c constantes: Con este modelo simplificado, la trayectoria de un proyectil siempre es una *parábola*.

Ejemplo

Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso está en el origen de coordenadas y la superficie marciana está en el plano xy. El vehículo, representado por un punto, tiene coordenadas x e y que varían con el tiempo según

$$x(t) = 2.0\,\mathrm{m} - \left(0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) t^2$$

$$y(t) = \left(1.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) t + \left(0.025\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right) t^3$$

a) Calcule las coordenadas del vehículo y su distancia al módulo en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$.

b) Calcule los vectores desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$.

c) Derive una expresión general para el vector velocidad instantánea del vehículo y úsela para calcular la velocidad instantánea en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, en forma de componentes y además en términos de magnitud y de dirección.

Solución

Tenemos movimiento es en dos dimensiones (plano xy). Unidades correctas, solo las colocaremos al final de los cálculos.

a) *Las coordenadas del vehículo en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ son*

$$x(t_2) = 2.0 - (0.25)(2.0)^2 = 1.0\,\mathrm{m}$$
$$y(t_2) = (1.0)(2.0) + (0.025)(2.0)^3 = 2.2\,\mathrm{m}$$

El vector posición en el instante $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ es

$$\vec{r}(t_2) = x(t_2)\hat{\imath} + y(t_2)\hat{\jmath} = (1.0\hat{\imath} + 2.2\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$$

y su distancia al módulo en ese instante es

$$|\vec{r}(t_2)| = r(t_2) = \sqrt{[x(t_2)]^2 + [y(t_2)]^2} = \sqrt{(1.0)^2 + (2.2)^2}\,\mathrm{m} = 2.4\,\mathrm{m}.$$

b) *En $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$, las coordenadas del vehículo son $x(t_0) = 2.0\,\mathrm{m}$ e $y(t_0) = 0.0$. De esto, el vector posición en el instante $t = 0.0\,\mathrm{s}$ es $\vec{r}(t_0) = 2.0\hat{\imath}\,\mathrm{m}$ y su distancia al módulo es $|\vec{r}(t_0)| = r_0 = 2.0\,\mathrm{m}$.*

Continuación

El vector desplazamiento entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ *y* $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, *es*

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_0) = [x(t_2) - x(t_0)]\hat{\imath} + [y(t_2) - y(t_0)]\hat{\jmath} \\ &= [(1.0 - (2.0))\hat{\imath} + (2.2 - 0.0)\hat{\jmath}]\,\mathrm{m} = [(-1.0)\hat{\imath} + 2.2\hat{\jmath}]\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

El vector velocidad media entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ *y* $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, *esto es, en el intervalo de tiempo* $\Delta t = t_2 - t_0 = 2.0\,\mathrm{s}$, *es*

$$\vec{v}_{\mathrm{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{(-1.0)}{2.0}\hat{\imath} + \frac{2.2}{2.0}\hat{\jmath}\right)\,\mathrm{m/s} = (-0.50\hat{\imath} + 1.1\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s}$$

c) *Para obtener* v_x *y* v_y *de la velocidad instantánea del vehículo, derivamos* $x(t)$ *e* $y(t)$ *una vez con respecto al tiempo, así*

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -(0.50\,\mathrm{m/s^2})t \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = 1.0\,\mathrm{m/s} + (0.075\,\mathrm{m/s^3})t^2\end{aligned}$$

Continuación

De las expresiones anteriores, para $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$*;*

$$v_x(t_2) = -\left(0.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -1.0\,\mathrm{m/s}$$

$$v_y(t_2) = \left[1.0\,\mathrm{m/s} + \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2\right] = 1.3\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}(t_2) = (-1.0\hat{\imath} + 1.3\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s}$$

La rapidez del vehículo en ese instante $|\vec{v}(t_2)|$ *es,*

$$|\vec{v}(t_2)| = v(t_2) = \sqrt{[v_x(t_2)]^2 + v_y(t_2)]^2} = \sqrt{(-1.0)^2 + (1.3)^2}\,\mathrm{m/s} = 1.6\,\mathrm{m/s}$$

La dirección con respecto a $+x$ *es dada por el ángulo* α_2

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t_2)}{v_x(t_2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.3}{-1.0}\right) = \tan^{-1}(-1.3) = -52^\circ.$$

Antes de asegurar que ésta es la dirección correcta, es preciso hacer un digrama de vectores del movimiento, pués, $\tan(128^\circ) = -1.3$*.*

Continuación

De la Fig.12 es claro que $\alpha_2 = (-52° + 180°) = +128°$.

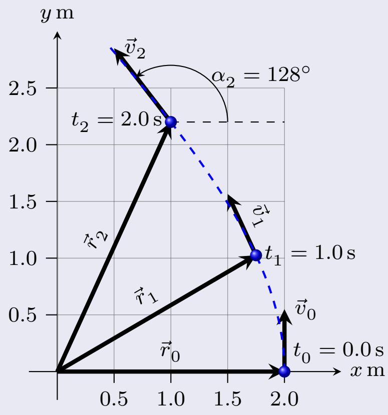


Figura 12. Trayectoria y vectores $\vec{r}$ *y* $\vec{v}$ *en* $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 1.0\,\mathrm{s}$ *y* $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ *del vehículo.*

Ejemplo

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo anterior.

a) Calcule las componentes de la aceleración media en el intervalo de tiempo entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$.

b) Calcule la aceleración instantánea en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$.

Solución

a) *Conocemos* $v_x(t) = (0.50\,\mathrm{m/s^2})t$ *y* $v_y(t) == 1.0\,\mathrm{m/s} + (0.075\,\mathrm{m/s^3})t^2$. *Así, para* t_0 *y* t_2*, se tiene*

$$v_x(t_0) = 0.0\,\mathrm{m/s}; \quad v_y(t_0) = 1.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_x(t_2) = -(0.50\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{s}) = -1.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y(t_2) = 1.0\,\mathrm{m/s} + (0.075\,\mathrm{m/s^3})(2.0\,\mathrm{s})^2 = 1.3\,\mathrm{m/s}$$

Así, para $\Delta t = t_2 - t_1 = (2.0\,\mathrm{s} - 0.0\,\mathrm{s}) = 2.0\,\mathrm{s}$,

$$a_{\mathrm{med}-x} = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_0)}{\Delta t} = \frac{-1.0\,\mathrm{m/s} - 0.0\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -0.50\,\mathrm{m/s^2}$$

Continuación

$$a_{\text{med}-y} = \frac{v_y(t_2) - v_y(t_0)}{\Delta t} = \frac{1.3\,\text{m/s} - 1.0\,\text{m/s}}{2.0\,\text{s}} = 0.2\,\text{m/s}^2$$

c) *Para la aceleración instantánea, derivamos $v_x(t)$ y $v_y(t)$ con respecto al tiempo. Así*

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -(0.50\,\text{m/s}^2); \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 2(0.075\,\text{m/s}^3)t.$$

de modo que para t_2, esas componentes son

$$a_x(t_2) = -0.50\,\text{m/s}^2; \quad a_y(t_2) = 2(0.075\,\text{m/s}^3)(2.0\,\text{s}) = 0.30\,\text{m/s}^2.$$

El vector aceleración en ese instante es

$$\vec{a}(t_2) = (-0.50\hat{\imath} + 0.30\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2.$$

Continuación

La magnitud de la aceleración, en ese instante, es

$$a(t_2) = |\vec{a}(t_2)| = \sqrt{a_x^2(t_2) + a_y^2(t_2)}$$
$$= \sqrt{(-0.50\,\mathrm{m/s^2})^2 + (0.30\,\mathrm{m/s^2})^2} = 0.58\,\mathrm{m/s}^2.$$

La dirección (β_2) *que el vector aceleración* $\vec{a}(t_2)$ *forma con el eje* x *es*

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a_y(t_2)}{a_x(t_2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.30\,\mathrm{m/s^2}}{-0.50\,\mathrm{m/s^2}}\right) = -31^\circ.$$

Continuación

De la Fig.13 queda claro que $\beta_2 = -31^\circ + 180^\circ = 149^\circ$.

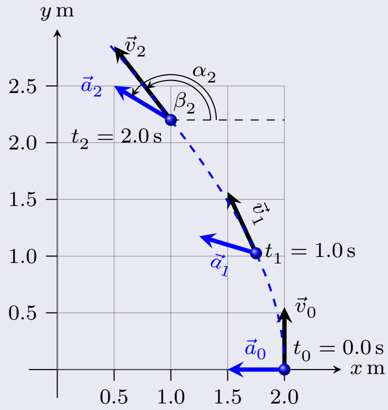


Figura 13. Trayectoria del vehículo y vectores $\vec{v}$ *y* $\vec{a}$.

Ejemplo

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde su velocidad es horizontal de magnitud 9.0 m/s. Calcule la distancia $|\vec{r}|$ desde el borde y la rapidez del motociclista $|\vec{v}|$ despué de 0.50 s.

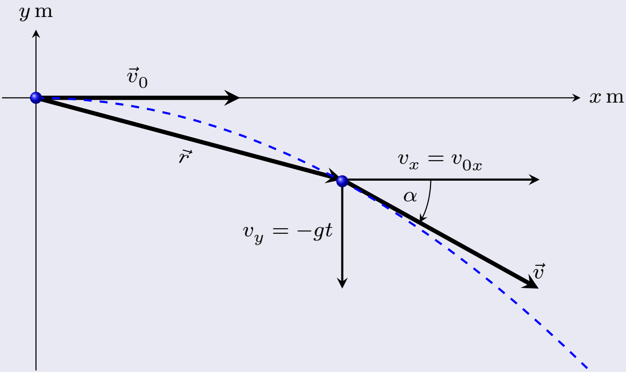


Figura 14. Esquema para el ejemplo.

Solución

Sea el borde del risco $(x_0, y_0) = (0, 0)$. *La velocidad* $\vec{v}_0$ *es puramente horizontal;* $\alpha_0 = 0^\circ$. *Tenemos:*

$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha_0 = 9.0\,\mathrm{m/s}; \quad v_{y0} = v_0 \sin\alpha_0 = 0.$$

Las componentes x *e* y *de la posición del motociclista en* $t = 0.50\,\mathrm{s}$ *son*

$$x(t) = v_{x0}t = (9.0\,\mathrm{m/s})(0.50\,\mathrm{s}) = 4.5\,\mathrm{m}$$
$$y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = -(4.90\,\mathrm{m/s}^2)(0.50\,\mathrm{s})^2 = -1.2\,\mathrm{m}$$

La distancia del motociclista desde el borde a ese punto es

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \sqrt{(4.5\,\mathrm{m})^2 + (-1.2\,\mathrm{m})^2} = 4.6\,\mathrm{m}$$

Las componentes v_x *y* v_y *de la velocidad del motociclista, en* $t = 0.50\,\mathrm{s}$, *son*

$$v_x(t) = v_{0x} = 9.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y(t) = v_{0y} - gt = -gt = -(9.80\,\mathrm{m/s}^2)(0.50\,\mathrm{s}) = -4.9\,\mathrm{m/s}$$

Continuación

de modo que la rapidez del motociclista en ese instante es

$$
\begin{aligned}
v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2} \\
&= \sqrt{(9.0\,\mathrm{m/s})^2 + (-4.9\,\mathrm{m/s})^2} = 10\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

La dirección del motociclista en ese instante es

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-4.9\,\mathrm{m/s}}{9.0\,\mathrm{m/s}}\right) = \tan^{-1}(-0.54) \\
&= -29^\circ.
\end{aligned}
$$

El signo negativo en α *indica que se midió desde* $+x$ *y en la dirección horaria.*

Ejemplo

Una pelota de baseball es bateada con una rapidez $v_0 = 37.0\,\mathrm{m/s}$ y un ángulo $\alpha_0 = 53.1^\circ$ (vea la Fig.15), en un lugar donde $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Calcule $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $|\vec{v}|$ para $t_2 = 2.00\,\mathrm{s}$.

- Calcule $t_{\text{máx}}$ (tiempo en el que la pelota alcanza su altura máxima) e $y(t_{\text{máx}})$.
- Calcule el *rango* R: Distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

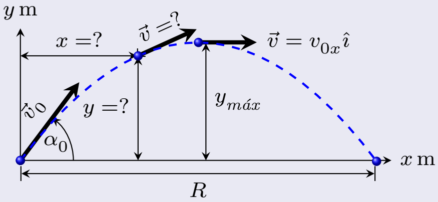


Figura 15. Esquema para el ejemplo.

Solución

a) *Sea* $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0.$ *Para las componentes de* $\vec{v}_0$ *el plano* xy*:*

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0\,\mathrm{m/s})\cos(53.1^\circ) = 22.2\,\mathrm{m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = (37.0\,\mathrm{m/s})\sin(53.1^\circ) = 29.6\,\mathrm{m/s}$$

En $t_2 = 2.00\,\mathrm{s}$*, las coordenadas* x *e* y *de la pelota son,*

$$x(t_2) = v_{0x}t = (22.2\,\mathrm{m/s})(2.00\,\mathrm{s}) = 44.4\,\mathrm{m}$$
$$y(t_2) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (29.6\,\mathrm{m/s})(2.00\,\mathrm{s}) - (4.90\,\mathrm{m/s^2})(2.00\,\mathrm{s})^2$$
$$= 59.2\,\mathrm{m} - 19.6\,\mathrm{m} = 39.6\,\mathrm{m}.$$

El vector de posición de la pelota en $t_2 = 2.00\,\mathrm{s}$*, entonces, es*

$$\vec{r}(t_2) = (44.4\hat{\imath} + 39.6\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$$

Continuación

Las componentes v_x *y* v_y *de la velocidad de la partícula en* $t_2 = 2.00\,\mathrm{s}$ *son*

$$\begin{aligned} v_x(t_2) &= v_{0x} = 22.2\,\mathrm{m/s} \\ v_y(t_2) &= v_{0y} - gt = 29.6\,\mathrm{m/s} - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(2.00\,\mathrm{s}) \\ &= 29.6\,\mathrm{m/s} - 19.6\,\mathrm{m/s} = 10.0\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

La rapidez de la pelota en $t_2 = 2.00\,\mathrm{s}$*, entonces, es*

$$\begin{aligned} v(t_2) = |\vec{v}(t_2)| &= \sqrt{[v_x(t_2)]^2 + [v_y(t_2)]^2} \\ &= \sqrt{(22.2\,\mathrm{m/s})^2 + (10.0\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 24.3\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

La dirección de la velocidad (dirección del movimiento) es

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t_2)}{v_x(t_2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10.0\,\mathrm{m/s}}{22.2\,\mathrm{m/s}}\right) \\ &= \tan^{-1}(0.454) = 24.5^\circ \end{aligned}$$

Continuación

b) *En el punto más alto de la trayectoria* $v_y(t_{máx}) = 0$, *así*

$$v_y(t_{máx}) = 0; \quad v_{y0} - g t_{máx} = 0; \quad t_{máx} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6\,\mathrm{m/s}}{9.80\,\mathrm{m/s^2}} = 3.02\,\mathrm{s}.$$

Usando ese valor en la expresión para la coordenada y *se obtiene*

$$\begin{aligned} y(t_{máx}) &= v_{0y} t_{máx} - \frac{1}{2} g t_{máx}^2 = (29.6\,\mathrm{m/s})(3.02\,\mathrm{s}) - (4.90\,\mathrm{m/s^2})(3.02\,\mathrm{s})^2 \\ &= 89.4\,\mathrm{m} - 44.7\,\mathrm{m} = 44.7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

c) *El rango* R*, cuando la pelota toca el suelo, implica que* $y(t_R) = 0$*:*

$$v_{y0} t_R - \frac{1}{2} g t_R^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_R \left(v_{0y} - \frac{1}{2} g t_R \right) = 0$$

De esa expresión se obtienen las siguientes soluciones

$$t_R = 0, \quad \mathrm{y} \quad t_R = \frac{2 v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6)}{9.80}\,\mathrm{s} = 6.04\,\mathrm{s}.$$

Continuación

El tiempo $t_R = 0$ *equivale al instante en el que la pelota sale lanzada como un proyectil.*

El tiempo $t_R = 6.04\,\mathrm{s}$ *corresponde al tiempo en el que la pelota regresa al nivel horizontal. El alcance horizontal* R*, entonces, es*

$$R = v_{x0}t_R = (22.2\,\mathrm{m/s})(6.04\,\mathrm{s}) = 134\,\mathrm{m}$$

La componente vertical de la velocidad en ese punto es

$$\begin{aligned} v_y(t_R) &= v_{0y} - gt_R = 29.6\,\mathrm{m/s} - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(6.04\,\mathrm{s}) \\ &= 29.6\,\mathrm{m/s} - 59.2\,\mathrm{m/s} = -29.6\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Note que $v_y(t_R) = -v_{y0}$*, la componente* y *de la velocidad inicial del proyectil, mas de signo opuesto. Dado que* $v_x(t_R) = v_{x0}$*, el ángulo de llegada es* $\alpha = -53.1°$.

Ejemplo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial $0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ desde la posición $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$ derive expresiones generales para la altura máxima $y(t_{\text{máx}})$ y el rango R. Dada una v_0, calcule el valor de α_0 que permite obtener la altura máxima y el rango máximo.

Solución

La altura máxima $y(t_{\textit{máx}})$ *se alcanza cuando* $v_y(t_{\textit{máx}}) = 0$. *Osea*

$$t_{\textit{máx}} = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}.$$

Usando la expresión para la coordenada y *del proyectil en ese instante se tiene*

$$\begin{aligned} y(t_{\textit{máx}}) &= v_{y0} t_{\textit{máx}} - \frac{1}{2} g t_{\textit{máx}}^2 = (v_0 \sin\alpha_0)\left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g} \end{aligned}$$

Continuación

Para un v_0 *dado, la altura máxima se alcanza cuando* $\sin\alpha_0 = 1$, *o* $\alpha_0 = 90^\circ$, *es decir, el proyectil es lanzado verticalmente.*

El tiempo t_R *cuando el proyectil retorna al suelo se obtiene haciendo* $y(t_R) = 0$. *Pero* $t_R = 2t_{\text{máx}}$ *y así*

$$t_R = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}.$$

Usando la expresión para la coordenada x *en ese instante se tiene*

$$R = v_{x0}t_R = v_0\cos\alpha_0\left(\frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}\right) = \frac{2v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g}$$

Usando la identidad trigonométrica $2\sin\alpha_0\cos\alpha_0 = \sin 2\alpha_0$, *obtenemos*

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{g}.$$

El rango máximo R *se alcanza cuando* $\sin 2\alpha_0 = 1$ *o* $2\alpha_0 = 90^\circ$ *y* $\alpha_0 = 45^\circ$. *Así, para un* v_0 *dado, el rango máximo se obtiene cuando el proyectil es lanzado con un ángulo inicial* $\alpha_0 = 45^\circ$ *con relación a la horizontal.*

Ejemplo

Suponga que lanza una pelota desde la ventana de su casa a $8.00\,\mathrm{m}$ sobre el nivel del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve con una rapidez de $10.0\,\mathrm{m/s}$ con un ángulo de 20.0° debajo de la horizontal. Calcule la distancia horizontal desde su ventana a la que llegará la pelota cuando toque el suelo?

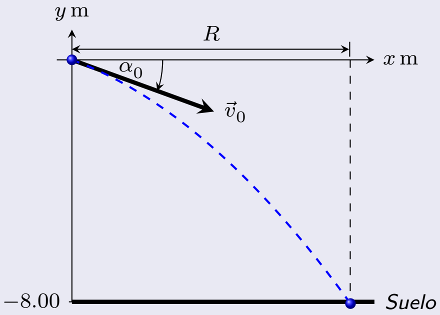


Figura 16. Esquema para el ejemplo.

Solución

Deseamos calcular R *cuando* $y(t_R) = -8.00\,\mathrm{m}$. *Hagamos* $(x_0,\, y_0) = (0,\, 0)$*:*

$$y(t_R) = v_{0y} t_R - \frac{1}{2} g t_R^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_R^2 - \frac{(2 v_0 \sin\alpha_0)}{g} t_R + 2\frac{y(t_R)}{g} = 0$$

Resolviendo esa ecuación cuadrática tenemos

$$t_R = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2} - 8\frac{y(t_R)}{g}} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2 g y(t_R)}}{g}$$

$$= \left(\frac{(10.0)\sin(-20.0) \pm \sqrt{(10.0)^2 \sin^2(-20.0) - 2(9.80)(-8.00)}}{9.80}\right)$$

$$= \left(\frac{-3.42 \pm 13.0}{9.80}\right)$$

De la cual se obtienen las siguientes soluciones

$$t_R = -1.7\,\mathrm{s}, \quad \mathrm{y} \quad t_R = 0.98\,\mathrm{s}.$$

Continuación

La raiz negativa se refiere a un tiempo anterior al lanzamiento (lo descartamos). Usando el valor positivo de t_R *en la expresión para la coordenada* x*, obtenemos*

$$x(t_R) = R = v_0 \cos \alpha_0 t_R = (10.0\,\mathrm{m/s}) \cos(-20.0^\circ)(0.98\,\mathrm{s}) = 9.2\,\mathrm{m},$$

la cual corresponde a la distancia horizontal desde su ventana cuando la pelota toca el suelo.

4. Movimiento circular

Si una partícula se mueve en una trayectoria curva la dirección de su velocidad muda. Existe una componente perpendicular de la aceleración, $\vec{a}_\perp$, aún cuando la rapidez de la partícula sea constante, esto es, $|\vec{v}| = $ cte.

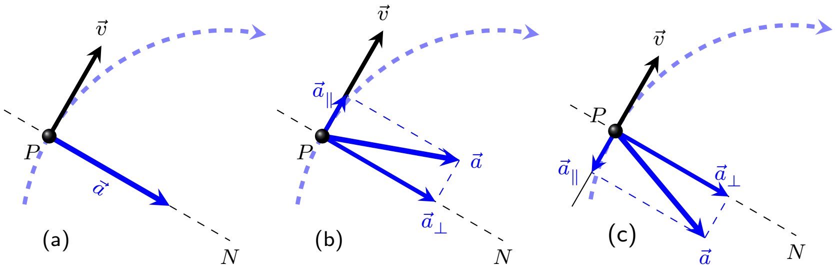


Figura 17. (a) Movimiento circular uniforme. (b) movimiento circular con rapidez creciente. (c) Movimiento circular con rapidez decreciente.

4.1. Movimiento circular uniforme

La partícula describe una trayectoria circular (un círculo) con $|\vec{v}| = \text{cte.}$: $\vec{a}_{\parallel} = \vec{0}$. EL vector $\vec{a}$ apunta hacia el centro de la trayectoria: Muda la dirección de $\vec{v}$ pero *no* la $|\vec{v}|$.

Sea un cuerpo que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve desde P_1 a P_2 en un tiempo Δt.

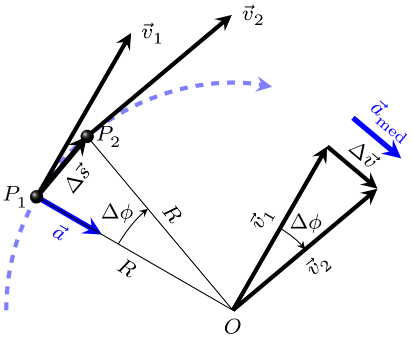


Figura 18. Movimiento circular uniforme.

En las Fig.18 $\vec{v}_1$ es la velocidad de la partícula en P_1 y $\vec{v_2}$, en P_2.

Note que los ángulos $\Delta\phi$ son iguales: $\vec{v}_1 \perp \overline{OP_1}$ y $\vec{v}_2 \perp \overline{OP_2}$: Los triángulos son *semejantes*; cocientes de lados correspondientes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{R} \quad \text{o} \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}|\Delta\vec{s}|.$$

Por otro lado,

$$|\vec{a}_{\text{med}}| = a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t}$$

y, en el punto P_1, la magnitud de la aceleración *instantánea*, a, es

$$a = |\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t},$$

mas

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} = v_1.$$

Dado que P_1 puede ser cualquier punto sobre la trayectoria, omitimos el subíndice 1 y representamos la rapidez en cualquier punto por v, así se tiene

$$|\vec{a}| = a_{\text{rad}} = a_{\perp} = \frac{v^2}{R}. \tag{23}$$

En un movimiento circular uniforme, la magnitud de la aceleración es constante e igual al cuadrado de la rapidez v dividida por el radio R del círculo. La aceleración $\vec{a}$ es perpendicular a la de la velocidad instantánea en cualquier punto $\vec{v}$ y apunta hacia el centro del círculo sobre el radio.

Esta aceleración es también llamada aceleración *centrípeta*: *centrípeta*, vocblo que en griego, significa "que busca el centro".

En función del período del movimiento T (tiempo en una vuelta completa)

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \rightarrow \quad a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{24}$$

4.2. Movimiento circular no uniforme

La partícula describe una trayectoria circular con rapidez *variable* (rueda de la fortuna; acelera al moverse en un lazo vertical).

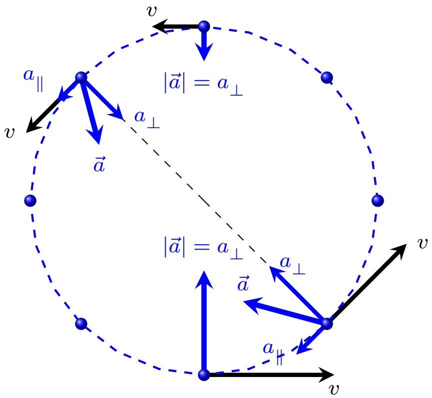


Figura 19. Esquema de un movimiento circular *no* uniforme.

La magnitud de $\vec{a}_\perp$ sigue siendo dada por la expresión

$$a_{\text{rad}} = a_\perp = \frac{v^2}{R},$$

perpendicular a la velocidad instantánea y apunta hacia el *centro* del círculo.

Dado que $|\vec{v}|$ es diferente en diferentes puntos de la trayectoria, la componente perpendicular de la aceleración, $\vec{a}_\perp \neq$ cte. Mayor aceleración centrípeta a mayor rapidez.

Existe una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea: $\vec{a}_\parallel$.

Se sabe que la componente paralela de la aceleración $a_\parallel$ es igual a la taza de cambio de la *rapidez*, esto es

$$a_\parallel = \frac{d|\vec{v}|}{dt}. \tag{25}$$

En este movimiento $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$.

La componente $\vec{a}_\parallel$ tiene la dirección de $\vec{v}$ si la partícula está acelerando, opuesta, si está frenando.

Debe quedar *claro* que:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

Dado que $|\vec{v}|$ es el módulo de la velocidad instantánea (rapidez) de la partícula, la expresión

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt}: \quad \text{es la tasa de cambio de la rapidez (aceleración paralela).}$$

y la expresión

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|: \quad \text{es la magnitud del vector aceleración instantánea.}$$

En un movimiento circular no uniforme

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = |\vec{a}| = \sqrt{a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2}.$$

Ejemplo

Calcule la celeración centrípeta de la tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol. Considere una órbita circular de radio 1.50×10^{11} m y use $\pi = 3.14$.

Solución

Sabemos que la tierra orbita alrededor del Sol en un año. El período, T, es el tiempo que demora un objeto en dar una vuelta completa en una trayectoria circular, así el período de la órbita de la tierra alrededor del Sol es:

$$T = 1\,\text{año}\left(\frac{365\,\text{días}}{1\,\text{año}}\right)\left(\frac{24\,\text{h}}{1\,\text{día}}\right)\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}\right)\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{m}}\right) = 3.15 \times 10^{7}\,\text{s}.$$

La magnitud de la aceleración centrípeta de la tierra alrededor del Sol es:

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.50 \times 10^{11}\,\text{m})}{(3.15 \times 10^{7}\,\text{s})^2} = \frac{4(9.86)(1.50 \times 10^{11}\,\text{m})}{9.92 \times 10^{14}\,\text{s}^2} \\ &= \frac{5.92 \times 10^{12}\,\text{m}}{9.92 \times 10^{14}\,\text{s}^2} = 5.97 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$