UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Listado Nº3: Espacios Vectoriales

Álgebra 2 - 525150

1. Justifique adecuadamente si $\mathbb{R}^2$, con las operaciones adición $\oplus$ y multiplicación por escalar en $\odot$, define un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c-2,b+d-1) \qquad \text{y} \qquad \alpha\odot(a,b)=(\alpha(a-2)+2,\alpha(b-1)+1).$$

   donde $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Identificar el elemento neutro aditivo, el elemento neutro multiplicativo, el elemento inverso aditivo, si corresponde.

2. Considere las siguientes operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas en el conjunto $V=\mathbb{C}^2$.

$$(a,b)\oplus(c,d):=(a+c,b+d) \qquad \text{y} \qquad \alpha\odot(a,b):=(|\alpha|a,|\alpha|b).$$

   donde $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}^2$ y $\alpha\in\mathbb{C}$. Determine la validez de

$$(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C})(\forall v\in\mathbb{C}^2)\big((\alpha+\beta)\odot v=(\alpha\odot v)\oplus(\beta\odot v)\big).$$

   ¿Podemos concluir que la terna $(V,\oplus,\odot)$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

3. Considere las siguientes operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas en el conjunto $V=\mathbb{R}^2$.

$$(a,b)\oplus(c,d):=(a+c,bd) \qquad \text{y} \qquad \alpha\odot(a,b):=(\alpha a,\alpha b).$$

   donde $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Determine, si existe, un vector nulo para la suma y verifique si se cumple:

$$(\forall x\in V)(\exists y\in V)\big(x\oplus y=\theta\big).$$

   ¿Podemos concluir que la terna $(V,\oplus,\odot)$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

4. Determine si los subconjuntos indicados, son subespacios vectoriales del espacio vectorial V dado, con las operaciones usuales de adición y multiplicación por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Justifique sus respuestas.

   (a) $V=\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$A_1=\{(a,b,c)\in V: a^2+b^2\leq 1\} \quad \text{y} \quad A_2=\{(x,y,z)\in V: x+y=0\wedge z=x+y\}$$

   (b) $V=\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$$B_1=\{(z_1,z_2)\in V: z_1+z_2\in\mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad B_2=\{(z_1,z_2)\in V: \mathrm{Re}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)=0\}$$

   (c) $V=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$C_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{y} \quad C_2=\{A\in V: A^2=\Theta\}$$

   (d) $V=\mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$D_1=\{f\in V: f=\Theta\vee f \text{ es inyectiva}\} \quad \text{y} \quad D_2=\{f\in V: f'+f=0\}$$

5. Determine en cada caso, si los subconjuntos U y W del espacio vectorial V, son subespacios vectoriales de V. En tales casos, determine además $U \cap W$ y decida si $U \cup W$ es un subespacio vectorial de V.

   (a) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   $$U = \{p \in V : p(1) - p(-1) = 0\} \quad \text{y} \quad W = \{p \in V : p(1) + p(-1) = 0\}.$$

   (b) $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   $$U = \{(z_1, z_2, z_3) \in V : z_1 - 2\bar{z}_2 + z_3 = 0\} \quad \text{y} \quad W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V : z_2 - \bar{z}_1 = 0\}.$$

   (c) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   $$U = \{p \in V : p'(1) = 0\} \quad \text{y} \quad W = \left\{p \in V : \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0\right\}$$

6. Considere los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$:
   $$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + z + t = 0\} \quad \text{y} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge t = 0\}.$$

   (a) Determine $U \cap W$ y $U + W$. Diga además si el espacio suma es o no suma directa.

   (b) Escriba de dos formas distintas, si es posible, los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ como adición de un vector en U y otro en W: $u := (0, 1, -1, 1)$, $v := (0, 1, 0, -1)$.

7. Sea V el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considere los siguientes subconjuntos de V.
   $$W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad U = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{y} \quad S = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

   (a) Demuestre que W, U y S son subespacios vectoriales de V.

   (b) Compruebe que $W + U = W + S$, pero $U \neq S$. ¿Son los espacios suma anteriores, sumas directas?

   (c) Determine A, un subespacio vectorial de V distinto de W, de modo que $W \cup A$ también sea un subespacio vectorial de V.

8. Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$
   $$\begin{aligned} U &= \{p \in V : p(5) = 0\}, \quad W = \{p \in V : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) + p(-x) = 0\} \\ Y &= \{p \in V : p'(5) = 0\} \quad \text{y} \quad Z = \{p \in V : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = p(-x)\}. \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que cada uno de estos subconjuntos es un subespacio vectorial de V. Además, en cada caso identifique al menos un vector no nulo.

   (b) Decidir si $U \cup Y$ es subespacio vectorial.

   (c) Determinar los subespacios $Y \cap W$, $Y + W$. ¿$U + W = U \oplus W$? e ¿$Y + W = Y \oplus W$?

   (d) Demuestre que $V = W \oplus Z$.

9. Considere el conjunto $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, donde:
   $$p_1(x) = -4 + 2x^2 + 3x^3,\ p_2(x) = 1 + x^2,\ p_3(x) = -2 + x^3 \text{ y } p_4(x) = 2 + x$$
   con $x \in \mathbb{R}$. Determine si $p_1 \in \langle\{p_2, p_3, p_4\}\rangle$ y si $p_4 \in \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$.

10. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

(a) $\theta \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(b) Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces $\theta \in \langle\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}\rangle$, donde θ es el vector nulo en $\mathbb{R}^n$.

(c) $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ puede representarse gráficamente como la recta que pasa por el origen y por el punto (2, 1).

(d) $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ puede representarse gráficamente como la recta que pasa por el punto $(0, 3, 0)$ y por el punto $(0, 0, -1)$.

(e) Sean $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tales que $p_0(5) = p_1(5) = p_2(5) = p_3(5) = 0$. Entonces el conjunto $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente dependiente.

(f) Sean $p_0, p_1 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ distintos entre sí y distintos del polinomio nulo. Podemos asegurar que el conjunto $\{p_0, p_1\}$ es linealmente independiente.

(g) Sean $p_0, p_1, p_2 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ distintos entre sí y distintos del polinomio nulo. Podemos asegurar que el conjunto $\{p_0, p_1, p_2\}$ es linealmente dependiente.

11. Determina una base para los siguientes subespacios de V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, así como su dimensión.

(a) $A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - 2b - d = 0 \wedge c + 3a - 3b = 0\}$, donde $V = \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $B = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(2)\}$, donde $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(c) $C = \left\{ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} x p'(x)\, dx = 0 \right\}$, donde $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(d) $D = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A = -\overline{A}^t \right\}$, donde $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(e) $E = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + \bar{z}_2 = 0\}$, donde $V = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(f) $F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : (A + A^t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, donde $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(g) $G = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + i z_2 + (i+1)\bar{z}_3 = 0 \wedge z_1 + z_3 = 0\}$, donde $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(h) $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica}\}$, donde $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

12. Sean S_1 y S_2 los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Muestre que $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

(b) ¿Es S_2 una base de $S = \langle S_1 \rangle$?

(c) Reduzca S_2 a un conjunto linealmente independiente, si corresponde.

13. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{C}^2$. Sean

$$B_U = \{(-i, 2 + 2i), (-2 + i, 0)\} \qquad \text{y} \qquad B_W = \{(-1, 1 + i), (i, -i)\},$$

bases de los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^2$, U y W, respectivamente.

(a) Encuentre una base para $U + W$.

(b) ¿Es $U + W = \mathbb{C}^2$? Justifique su respuesta.

14. En cada caso, decida si $W \oplus U = V$ sabiendo que B_W y B_U son bases de W y U, respectivamente.

    (a) V es el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ y

$$B_W = \{(2,-1,0),(1,0,-1)\} \quad \text{y} \quad B_U = \{(1,-1,1),(4,-1,-3)\}$$

    (b) V es el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y

$$B_W = \{x^2+2x+1, x^2-1, x^3-1\} \quad \text{y} \quad B_U = \{-3x^3+2x^2-3x+2, x^2+1, x^3+x\}$$

15. Considere los siguientes subespacios vectoriales del e.v. real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2a-b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

    (a) Muestre que W_1 es un s.e.v de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    (b) Determinar la dimensión de W_1.
    (c) Calcular la dimensión de $W_1 + W_2$. ¿La suma es directa?

16. Sea V el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in V$ de modo que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$p_1(x) = x^3 + 2x + a, \quad p_2(x) = ax^2 + x, \quad p_3(x) = x^3 + x^2 \ \text{ y } p_4(x) = 1$$

    (a) Determinar, si es posible, para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es l.i.
    (b) Mostrar que si $a = 1$ el conjunto B es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
    (c) Determinar las coordenadas del polinomio $q(x) = x^2 + x + 1$ con respecto a la base B, considerando $a = 0$.

17. Sean V es espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y W el siguiente conjunto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y + 2z = z + t = 0 \right\}$$

    (a) Probar que W es un subespacio vectorial de V.
    (b) Determinar una base de W.
    (c) Calcular la dimensión de $W + V$.

18. Sean W_1, W_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 y 3, respectivamente. Probar que la intersección $W_1 \cap W_2$ contiene un vector no nulo. ¿Qué dimensión puede tener $W_1 \cap W_2$?

19. Sabiendo que el conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base del $\mathbb{K}$-e.v. V. Escoja, de los siguiente conjuntos, cuáles no son base de V.

    (a) $\{v_1, v_2, v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$.
    (b) $\{v_1 + v_4, v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_4\}$.
    (c) $\{v_1 + v_3, v_2, v_4\}$

20. Sean U y W subespacios vectoriales de dimensión 4 cada uno, del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^6$. ¿Es posible que existan $x, y \in U \cap W$ tales que $x \notin \langle \{y\} \rangle$?