UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
Duración: 100 minutos
10 de julio de 2007
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación de Recuperación

1. (15 puntos) Sea V un espacio vectorial, y considere la relación en $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}(V,V) \times \mathcal{L}(V,V)$ definida por:

$$T \ \mathcal{R} \ F \Leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{L}(V,V)) \ T \circ G = F.$$

   Demuestre que $\mathcal{R}$:

   a) (3 puntos) es refleja,

   b) (7 puntos) es transitiva,

   c) (10 puntos) no es simétrica.

2. (20 puntos) Si $V = \mathbb{R}^3$ y la matriz representante de $T : V \to V$ con respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) (5 puntos) Encuentre el polinomio minimal de T.

   b) (10 puntos) Use el teorema de descomposición en factores primos para encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que haga a $[T]_{\mathcal{B}}$ diagonal por bloques.

   c) (5 puntos) Determine los factores elementales de T y su forma canónica racional.

3. (20 puntos) Sea V un e.v. complejo de dimensión n y sea $F : V \to V$ un operador lineal. Sea $j \in \{1, .., n\}$, demuestre que existe al menos un subespacio F-invariante de dimensión j.

   Indicación: use el teorema de triangularización.