Interpolación: Parte I

- Interpolación polinomial.
- Estimación del error.

Idea

El concepto de interpolación está basado en la idea de obtener una función p, que aproxime una función desconocida f de la cual conocemos su valor sólo en un número finito de puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Intuitivamente para que p esté *cerca* de f, es natural pedirle que coincida con f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Interpolación Polinomial

Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ puntos en el plano, tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Diremos que el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, **interpola** al conjunto de datos, si

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dado que se tienen $m+1$ parámetros independientes $a_0, \ldots, a_m$ y $n+1$ condiciones sobre p, es razonable considerar $m = n$. El sistema de ecuaciones que resuelve este problema de interpolación está dado por

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \right.$$

Teorema.

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, entonces existe un ***único*** *polinomio p, de grado menor o igual a n, tal que*

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Demostración.

El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones que resuelve el problema de interpolación está dado por

$$\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

que es evidentemente distinto de cero.

Polinomios de Lagrange

Una manera de calcular **el** polinomio de interpolación p, sin tener que resolver un sistema de ecuaciones, es a través de los polinomios de Lagrange ℓ_i, con $i = 0, \ldots, n$ asociados a los puntos $x_0, \ldots, x_n$. Estos polinomios de grado n están definidos por

$$\ell_i(x) \ := \ \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Notar que ellos satisfacen la relación :

$$\ell_i(x_j) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 0, \ldots, n.$$

El conjunto $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$ es una base del espacio de polinomios de grado menor o igual a n. Gracias a esto existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio de interpolación p se puede escribir de la siguiente manera:

$$p(x) = \alpha_0 \ell_0(x) + \alpha_1 \ell_1(x) + \cdots + \alpha_n \ell_n(x)\,.$$

Debido a las propiedades de los polinomios de Lagrange es inmediato ver que $\alpha_o = y_0$, $\alpha_1 = y_1, \ldots, \alpha_n = y_n$, es decir

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_n \ell_n(x)\,.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$. Una manera de aproximar la función f es a través del polinomio de interpolación, respecto a $x_0, \ldots, x_n$, el que en este caso está dado por

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Teorema.

Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales distintos y f una función real $n+1$ veces continuamente diferenciable en el intervalo $I = (a, b)$, donde $a = \min\{x_0, \ldots, x_n\}$ y $b = \max\{x_0, \ldots, x_n\}$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe $\xi_x \in I$ tal que

$$E(x) := f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \;=\; \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Aplicación: Interpolación lineal.

Para $n = 1$. Supongamos que $x_0 \leq x \leq x_1$, es decir $[a, b] = [x_0, x_1]$. Sea $h := x_1 - x_0$, entonces

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Luego

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\frac{f''(\xi_x)}{2} \qquad x_0 < \xi_x < x_1\,,$$

así, como $(x - x_0)(x - x_1) \leq \dfrac{h^2}{4}$ $\forall x \in [x_0, x_1]$, entonces

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{8}h^2, \qquad M := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\,.$$