UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
18 de mayo de 2018
Duración: 1h 40min
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación 1

1. **(5 puntos)** Considere la relación $\sim$ en $\mathbb{R}^2$, definida como sigue.

$$(a,b) \ \sim \ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Demuestre que $\sim$ no es relación de equivalencia.

Solución. *Es claro que sí es refleja y simétrica, debemos entonces probar que no es transitiva. Para esto busquemos dónde puede estar el problema. Buscamos tres puntos (a,b), (c,d) y (e,f) tales que $ad = bc$ y $cf = de$.*

Si fueran todos no nulos, tendríamos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, de donde $af = be$, es decir $(a,b) \sim (e,f)$, no cual no es lo que buscamos.

Consideremos $b = 0$ entonces. Esto implica que $ad = 0$, entones $a = 0$ o bien $d = 0$, tomemos el caso en que $d = 0$, por ejemplo (si $a = b = 0$ se cumpliría $af = eb$). Entonces $cf = 0$, si tomamos $c = 0$, podríamos tomar $f = 1$, entonces $be = 0$, pero $af = a \neq 0$, de donde $(a,b) \not\sim (e,f)$.

2. **(15 puntos)** Considerando $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$, el conjunto de las funciones definidas en $[0,1]$ a valores en $[0,1]$, se define la siguiente relación.

$$f \ R \ g \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x)$$

Demuestre que se trata de una relación de orden, decida si es relación de orden total o parcial, y decida si hay en $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ algún elemento maximal o no.

Solución. *Refleja: es claro que $\forall x \in [0,1], f(x) \leq f(x)$.*
Transitiva: Si tenemos que $\forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x) \wedge g(x) \leq h(x)$, entonces, por transitividad de $\leq$ en $\mathbb{R}$ se cumple que $\forall x \in [0,1], f(x) \leq h(x)$.
Antismétrica: Si tenemos que $\forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x) \wedge g(x) \leq f(x)$, entonces $\forall x \in [0,1], f(x) = g(x)$, de donde $f = g$.

Se trata claramente de una relación de orden parcial, puesto que hay funciones no comparables, por ejemplo $f(x) = x$ se cruza con $g(x) = 1-x$, ambas están en $\mathcal{F}([0,1],[0,1])$, pero $f(0) = 0 \leq 1 = g(0)$ mientras que $g(1) = 0 \leq 1 = f(1)$, así $f \not R g$ y $g \not R f$.

Finalmente, hay un máximo, basta tomar la función $g(x) = 1$ en todo x. Cumple que dado cualquier $f \in \mathcal{F}([0,1],[0,1])$, como $rec(f) \subseteq [0,1]$, $\forall x \in [0,1], f(x) \leq 1 = g(x)$.

3. **(20 puntos)** Sean $q(x), s(x) \in \mathbb{K}[x]$, y sea $g(x) = MCD\{q(x), s(x)\}$. Sea además V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ un operador lineal en V. Demuestre que

$$Ker(q(T)) \cap Ker(s(T)) = Ker(g(T)).$$

Concluya que $Ker(q(T))$ y $Ker(s(T))$ están en suma directa si y solo si $q(x)$ y $s(x)$ son primos relativos[1].

Solución. *Si usamos la indicación, aplicada a T, concluimos que existen $e(x), f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que*

$$g(T) = e(T) \circ q(T) + f(T) \circ s(T). \tag{1}$$

Demostremos la doble inclusión.

($\subseteq$): sea $v \in Ker(q(T)) \cap Ker(s(T))$, es decir, v cumple $q(T)(v) = \Theta$ y $s(T)(v) = \Theta$.

Usando (1) concluimos que $g(T)(v) = e(T)(q(T)(v)) + f(T)(s(T)(v)) = e(T)(\Theta) + f(T)(\Theta) = \Theta$. Así $v \in Ker(g(T))$.

($\supseteq$): sea $v \in Ker(g(T))$, es decir, $g(T)(v) = \Theta$.

Como $g(x)$ divide a $q(x)$ y a $s(x)$, tenemos que existen $p(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$g(x)p(x) = q(x) \wedge g(x)r(x) = s(x)$$

Entonces $q(T)(v) = (g(T) \circ p(T))(v) = (p(T) \circ g(T))(v) = p(T)(g(T)(v)) = p(T)(\Theta) = \Theta$. Análogamente, $s(T)(v) = r(T)(g(T)(v)) = r(T)(\Theta) = \Theta$, por lo tanto $v \in Ker(q(T)) \cap Ker(s(T))$.

4. **(20 puntos)** Considere el siguiente operador $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por

$$F(a, b, c, d) = (2a + b, 2b, c + d, -2c + 4d).$$

Calcule su espectro, polinomio característico, multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio, además de sus núcleos iterados y polinomio minimal de F. Finalmente, encuentre una base de $\mathbb{R}^4$ que haga a la matriz representante de F triangular superior, y calcule la matriz representante de F respecto a esta base.

Solución. *Calculamos primero que nada la matriz representante de F respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ para trabajar más cómodamente.*

$$[F]_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de $[F]_C - xI_4$:

[1] Indicación: use que existen $e(x), f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $g(x) = e(x)q(x) + f(x)s(x)$

$$\begin{aligned} det([F]_C - xI_4) &= \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)^2[(1-x)(4-x)+2] \\ &= (2-x)^2[x^2-5x+6] \\ &= (x-2)^3(x-3) \end{aligned}$$

De aquí concluimos lo siguiente

- $\sigma(T) = \{2,3\}$
- $p(x) = (x-2)^3(x-3)$
- $r_2 = 3,\ r_3 = 1$
- $g_3 = 1,\ l_3 = 1$

Calculamos el único núcleo asociado a 3*, el que debe tener dimensión 1.*

$$\begin{aligned} E_1(3) &= Ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \{(a,b,c,d)|a = b \wedge b = 0 \wedge d = 2c\} \\ &= \langle\{(0,0,1,2)\}\rangle \end{aligned}$$

Calculamos ahora los núcleos iterados de 2 *que pueden ser 1, 2 o 3.*

$$\begin{aligned} E_1(3) &= Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \{(a,b,c,d)|b = 0 \wedge d = c\} \\ &= \langle\{(1,0,0,0),(0,0,1,1)\}\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(3) &= Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \{(a,b,c,d)|d = c\} \\ &= \langle\{(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0)\}\rangle \end{aligned}$$

Como ya tenemos $dim(E_2(3)) = r_2 = 3$*, hemos alcanzado el núcleo máximo, entonces* $l_2 = 2$.

Ahora podemos entregar el polinomio minimal:

$$m(x) = (x-2)^2(x-3)$$

Finalmente, la base B *que hace a* $[F]_B$ *triangular superior es* $B = \{(0,0,1,2),(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0$
calculamos $[F]_B$.

$$\begin{aligned}
F(0,0,1,2) &= (0,0,3,6) \to [(0,0,3,6)]_B = (3,0,0,0) \\
F(1,0,0,0) &= (2,0,0,0) \to [(2,0,0,0)]_B = (0,2,0,0) \\
F(0,0,1,1) &= (0,0,2,2) \to [(0,0,2,2)]_B = (0,0,2,0) \\
F(0,1,0,0) &= (1,2,0,0) \to [(1,2,0,0)]_B = (0,1,0,2)
\end{aligned}$$

Así

$$[F]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$