UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Listado 1

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Justifique.

   a) $\mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(A)^c$.
   b) $A \triangle B = C \longleftrightarrow A \triangle C = B$, donde $E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$.
   c) $(\forall A :\ A \cap B = \emptyset) \longrightarrow B = \emptyset$.
   d) $X = Y \longleftrightarrow (\forall A :\ X \cup A = Y \cap A)$.
   e) $\{A \setminus (B \cup C), B, C \setminus B\}$ es una partición de $A \cup B \cup C$.

2. Pruebe, usando equivalencias lógicas, las siguientes proposiciones.

   a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
   b) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
   c) $A \cup B = A \cap C \Longrightarrow B \subseteq A \ \wedge \ A \subseteq C$.
   d) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.
   e) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

3. Pruebe, usando propiedades de conjuntos, las siguientes proposiciones.

   a) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
   b) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$.
   c) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$.
   d) $A \cap C = \emptyset \Longrightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

4. Demuestre las siguientes propiedades del producto Cartesiano de conjuntos.

   a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
   c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
   d) $A \times B = \displaystyle\bigcup_{b \in B} (A \times \{b\})$.
   e) $B \times \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$.
   f) $B \times \displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$.

5. Dada $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, A un conjunto no vacío tal que $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \cap A \neq \emptyset$. Se define la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:

$$B_1 = A \cap A_1 \quad \wedge \quad \forall k \geq 2,\ B_k = A \cap \Big(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\Big).$$

Pruebe que :

a) $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$

b) $\forall i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j,\ B_i \cap B_j = \emptyset.$

¿Es $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una partición?

6. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se dice creciente si $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \subseteq A_{i+1}$.

   a) Dada $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, distintos y creciente, se define la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:

   $$B_1 = A_1 \quad \wedge \quad B_k = A_k \setminus A_{k-1},\ \forall k \geq 2.$$

   Pruebe que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

   b) Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ creciente y todos distintos tal que:

   $$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}.$$

7. Para la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ encuentre $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ en cada caso. Justifique su respuesta.

   a) $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, 2i+1\},\ \forall i \in \mathbb{N}.$

   b) $A_i = \Big[-1 - \dfrac{1}{i}, 1 - \dfrac{1}{i}\Big],\ \forall i \in \mathbb{N}.$

   c) $A_i = \Big(\dfrac{-1}{i}, \dfrac{1}{i}\Big)\ \forall i \in \mathbb{N}.$

   d) $A_i = \mathbb{R} \setminus [0, i],\ \forall i \in \mathbb{N}.$

8. Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ todos distintos, tal que verifique las condiciones dadas en cada caso.

   a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = [0, +\infty), \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = [0, 1].$

   b) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = (0, +\infty), \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset.$

   c) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}.$

   d) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{Q}.$