SISTEMAS LINEALES DINÁMICOS - 543214-3

Pauta EV1: Certamen 1 - 24 de mayo de 2023

Universidad de Concepción, Facultad de Ingeniería, Depto. de Ingeniería Eléctrica

Problema 1 (2.0 puntos)

Dado el sistema descrito por:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = [0]$.

a) Obtenga la matriz de transición en el plano s. [0.4 puntos]

$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

b) Obtenga, en el tiempo, el elemento (1,2) de la matriz de transición (fila 1, columna 2). [0.4 puntos]

$\Phi(t)_{21} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+3s+2}\} = e^{-t} - e^{-2t}$

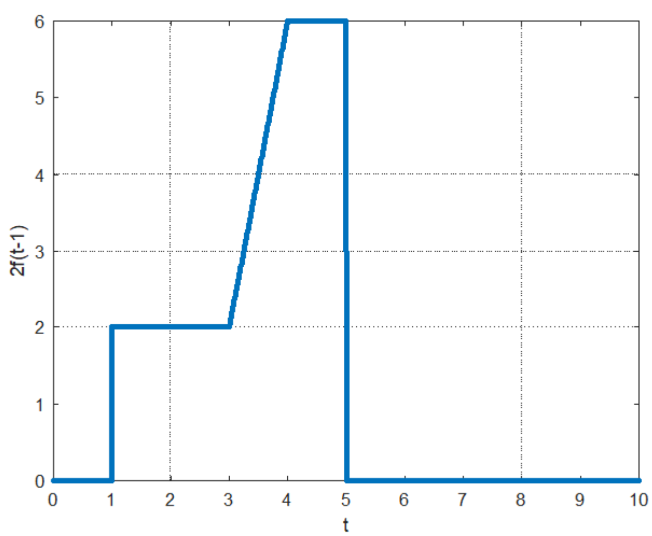
c) Obtenga la respuesta forzada $y_f(s)$, para la entrada escalón unitario $u(t)$. [0.4 puntos]

$y_f(s) = C\Phi(s)Bu(s) + Du(s) = C\Phi(s)B\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$

d) Obtenga la respuesta forzada $y_f(s)$, para la entrada $u(t) + 2r(t-2) - 2r(t-3) - 3u(t-4)$. [0.4 puntos]

$y_f(s) = C\Phi(s)Bu(s) + Du(s) = C\Phi(s)B[\frac{1}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} - \frac{3e^{-4s}}{s}] = \frac{s(1-3e^{-4s})+2e^{-2s}-2e^{-3s}}{s^2(s^2+3s+2)}$

e) Sea $f(t) = u(t) + 2r(t-2) - 2r(t-3) - 3u(t-4)$. Grafique $2f(t-1)$. [0.4 puntos]



Problema 2 (4.0 puntos)

Responda y **justifique** (Nota: la justificación vale la mitad del puntaje de cada pregunta):

a) Dé un ejemplo de un sistema no lineal variante en el tiempo. Indique cómo verificar si un sistema es lineal e invariante en el tiempo. [1.0 puntos]

$y'(t) + a(t)\sqrt{y(t)} = u(t)$, con $y(t)$ la salida, $u(t)$ la entrada y $a(t)$ un parámetro. El sistema es no lineal por la presencia de la raíz cuadrada de la salida. Además es variante en el tiempo porque el parámetro $a(t)$ es dependiente del tiempo.

Se puede verificar si un sistema H es lineal si es que cumple con los principios de superposición y homogeneidad. Es decir si cumple con:
$H(u_1(t) + u_2(t)) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{y} \quad H(\alpha u_1(t)) = \alpha y_1(t)$
donde $y_1(t) = H(u_1(t)), y_2 = H(u_2(t))$ y α es un número real.

Se puede verificar si un sistema es invariante en el tiempo si no contiene parámetros que dependan del tiempo.

b) Defina y mencione características de la señal de prueba impulso. Indique qué significado tiene la respuesta a señal impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo. [1.0 puntos]

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Es una función que posee un peak en $t = 0$ y es nula para cualquier otro instante de tiempo. Cumple con: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$, $\delta(t) = du(t)/dt$

La respuesta a señal impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo nos permite obtener la respuesta a cualquier entrada arbitraria, de acuerdo con: $y(t) = h(t) * u(t)$

c) Indique qué información entrega la Transformada de Fourier (T. F.) de una función. Indique qué significado tiene una T. F. $f(\omega) = 1$. [1.0 puntos]

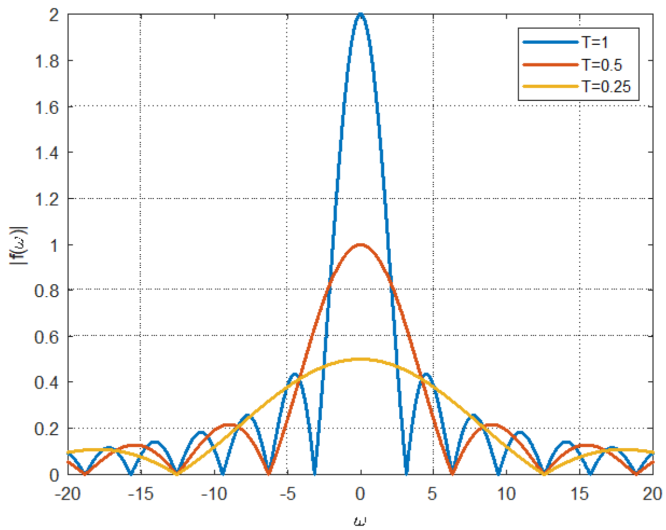
La T. F. nos entrega información sobre las frecuencias contenidas en la señal original en el tiempo, mediante la función: $\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = f_2(s)|_{s=j\omega} = f(\omega)$.

Una T. F. $f(\omega) = 1$, nos indica de que la señal en el tiempo contiene todas las frecuencias. Es decir, cumple con: $f(t) = \delta(t)$, cuya T. F. es igual a 1.

d) Obtenga la expresión de la T. F. de la función $f(t) = u(t+T) - u(t-T)$. Bosqueje y comente la gráfica de $|f(\omega)|$ para 3 valores de T tendiendo a cero. [1.0 puntos]

$f(\omega) = f_2(s)|_{s=j\omega} = \frac{e^{j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2sin(\omega T)}{\omega}$

Se observa que la curva se tiende a aplanar a medida que disminuye T. En el límite de $T \to 0$, $|f(\omega)|$ debería tender a una constante, es decir, con igual contribución por cada frecuencia, lo cual se explica con el hecho de que la función $f(t)$ tiende a $\delta(t)$ con $T \to 0$.


T=1
T=0.5
T=0.25
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
|f(ω)|
ω