¿Cómo se soluciona una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes?

Caso: Polinomio característico con raíces reales múltiples

Carlos M. Mora

Solución general de una EDO lineal de orden n homogénea

Considere la EDO

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]\alpha, \beta[\tag{1}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, g : \,]\alpha, \beta[\, \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Un conjunto de n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linealmente independientes de (1) es llamado sistema fundamental de soluciones de (1).

Asumamos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (1). Entonces, para toda solución de (1) existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$Y(x) = C_1\, f_1(x) + C_2\, f_2(x) + \cdots + C_n\, f_n(x)\,.$$

Escritura con operador Derivada

Fijemos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Considere la EDO lineal de coeficientes constantes

$$Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$D = \frac{d}{dx}$

$$D^n\, Y(x) + a_1 D^{n-1}\, Y(x) + \cdots + a_{n-1} D\, Y(x) + a_n\, Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Polinomio característico

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Factorización

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ números diferentes

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_q)^{m_q}$$

Problema

Asuma que $p, q \in \mathbb{R}$ son tales que $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Encuentre la solución general de:

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Ya que $\frac{p^2}{4} - q = 0$, el polinomio característico $\lambda^2 + p\,\lambda + q$ tiene una única raíz que es $\lambda = -\frac{p}{2}$. Entonces $Y(x) = \exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right)$, satisface (2).

Definamos $D = \frac{d}{dx}$. Entonces (2) se reescribe como

$$\left(D^2 + pD + q\right) Y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(D^2 + pD + \frac{p^2}{4}\right) Y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(D + \frac{p}{2}\right)^2 Y(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}\left(D + \frac{p}{2}\right)^2 \left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right) &= \left(D + \frac{p}{2}\right)\left(D + \frac{p}{2}\right)\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right) = \left(D + \frac{p}{2}\right)\left(D\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right)\\ &= \left(D + \frac{p}{2}\right)\left(e^{-\frac{p}{2}x} + x\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) = \left(D + \frac{p}{2}\right)\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right) = 0.\end{aligned}$$

Luego $xe^{-\frac{p}{2}x}$ satisface (2).

Problema

Asuma que $p, q \in \mathbb{R}$ son tales que $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Encuentre la solución general de:

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tenemos que las funciones $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)$ y $x \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)$ satisfacen (3).

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) + c_2\, x \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego $c_1 + c_2\, x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$, por ende $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)$ y $x \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)$ son linealmente independientes. Por lo que la solución general de (3) es:

$$Y(x) = C_1 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) + C_2\, x \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)$$

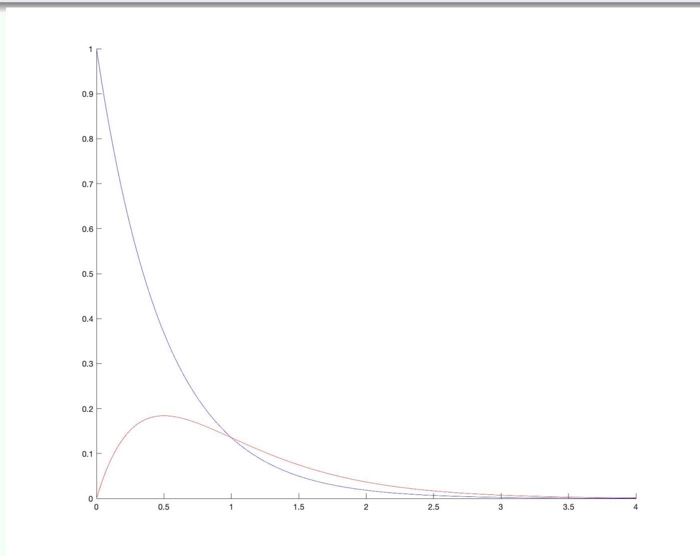
Encuentre la solución general de

$$Y''(x) + 4\,Y'(x) + 4\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $\lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$.
Solución general:

$$Y(x) = C_1\,\exp(-2\,x) + C_2\,x\,\exp(-2\,x)\,.$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.



Cuando x se acerca a $+\infty$ la solución decrece rápidamente a 0. No hay oscilaciones.

Núcleo del operador $(D-\lambda)^m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Las funciones $e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x}$ son linealmente independientes y son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$, o sea, para $k = 0, \ldots, m-1$,

$$(D-\lambda)^m \left(x^k e^{\lambda x}\right) = 0$$

Independencia lineal

$$k_1\, e^{\lambda x} + k_2\, x\, e^{\lambda x} + \cdots + k_m\, x^{m-1}\, e^{\lambda x} = 0$$

$$k_1 + k_2\, x + \cdots + k_m\, x^{m-1} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0.$$

Inicio: $m = 1$

$$(D-\lambda)\left(e^{\lambda x}\right) = D\left(e^{\lambda x}\right) - \lambda e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0.$$

Paso de inducción

Asumamos que $e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$.
Para $k = 0, \ldots, m-1$, $(D-\lambda)^{m+1}\left(x^k\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)\,(D-\lambda)^m\left(x^k\, e^{\lambda x}\right) = 0.$

$$(D-\lambda)^{m+1}\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)^m\,(D-\lambda)\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)^m\left(D\left(x^m e^{\lambda x}\right) - \lambda\, x^m\, e^{\lambda x}\right)$$

$$(D-\lambda)^{m+1}\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)^m\left(m\, x^{m-1} e^{\lambda x} + x^m \lambda\, e^{\lambda x} - \lambda\, x^m\, e^{\lambda x}\right) = m\,(D-\lambda)^m\left(x^{m-1} e^{\lambda x}\right) = 0$$

Ejemplo (raíces reales múltiples)

Encuentre la solución general de

$$Y^{(4)}(x) - 8\,Y'''(x) + 18\,Y''(x) - 27\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Las funciones $e^{\lambda x}, x\,e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\,e^{\lambda x}$ son linealmente independientes y son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$,

$$\left(D^4 - 8\,D^3 + 18\,D^2 - 27\right)Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27 = (\lambda+1)(\lambda-3)^3$.

$$D^4 - 8\,D^3 + 18\,D^2 - 27 = (D+1)(D-3)^3$$

Ejemplo (raíces reales múltiples)

Encuentre la solución general de

$$Y^{(4)}(x) - 8\,Y'''(x) + 18\,Y''(x) - 27\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^3$.

La solución general es

$$Y(x) = C_1\,\exp(-x) + C_2\,\exp(3\,x) + C_3\,x\,\exp(3\,x) + C_4\,x^2\,\exp(3\,x)$$

con $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Conclusión

Fijemos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Considere la EDO lineal de coeficientes constantes

$$Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ tiene la factorización

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ números reales diferentes y $m_1, m_2, \ldots, m_q \in \mathbb{R}$.

Un sistema fundamental de soluciones está formado por:

$$\exp(\lambda_k x), x \exp(\lambda_k x), \ldots, x^{m_k - 1} \exp(\lambda_k x)$$