

Guía N°7: Problemas de Valores Iniciales

Parte I

Cálculo Numérico 521230

Los problemas a resolver con ayuda del computador han sido marcados con (C).

1. (C) Considere las ecuaciones

- a) $y'(x) = 2x$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, cuya solución exacta es $y(x) = x^2$,
- b) $y'(x) = -\sin(x)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, \pi]$, cuya solución exacta es $y(x) = \cos(x)$,
- c) $y'(t) = 1 + \frac{y(t)}{t}$, $y(1) = 1$, $t \in [1, 6]$, cuya solución exacta es $y(t) = t(1 + \ln(t))$.

Para cada una de ellas realice lo siguiente:

- Calcule, “a mano” o con calculadora, las aproximaciones que se obtengan de aplicar el método de Euler explícito con dos subintervalos.
- Baje el programa de MATLAB *euler.m* y utilícelo para obtener las aproximaciones de considerando 100 subintervalos. Grafique la aproximación y la solución exacta para comparar.
- Diseñe, y ejecute, un experimento que permita verificar el orden de convergencia del método de Euler.

2. (C) La altura h (en metros) de líquido en el acumulador de un sistema de bombeado satisface el modelo

$$h'(t) + 0.002 \left(52.1 h(t) + \frac{10.3}{10.3 + h(t)} \right) - 1.17 (1 + \sin(3t)) = 0.0308, \quad h(0) = 5,$$

siendo t el tiempo, medido en minutos. Resuelva el P.V.I. para $t \in [0, 100]$ y responda:

- ¿Cómo varía la altura del líquido con el tiempo?
- Estime a partir de qué valor de t tiene la altura del líquido en el acumulador un comportamiento periódico. Estime amplitud y período de las oscilaciones de $h(t)$ a partir de ese momento.

3. (C) En el siguiente modelo

$$x'(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{(x(t))^2}{1 + (x(t))^2}$$

$x(t)$ describe el tamaño de una población en un instante de tiempo t . El modelo supone:

- para poblaciones de tamaño pequeño, el tamaño de la población crece de forma proporcional a la cantidad de habitantes. Para poblaciones de gran tamaño la ausencia de recursos para su sustento ocasiona que el radio de crecimiento de la población disminuya.
- El segundo término en la parte derecha de la ecuación diferencial representa que la población puede disminuir por la acción de un predador.

Las constantes reales r y k representan el radio de crecimiento y la capacidad del medio ambiente de proporcionar recursos para sustentar a la población respectivamente.

- Considere $r = 0.4$, $k = 20$ y $x(0) = 2.44$. ¿Cómo varía el tamaño de la población con el tiempo? ¿A partir de qué valor de t es el tamaño de la población casi constante?
- Repita el experimento con $x(0) = 2.4$. ¿Es el comportamiento de la población similar al del ítem anterior? Justifique.