Método de Galerkin Discontinuo: Teoría y Aplicaciones

Manuel Solano

Terea 3 (10 de mayo de 2023)

Fecha de entrega: 24 de mayo de 2023

1. Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d = 2$ ó 3. Suponga que $\boldsymbol{\sigma} \in [H^1(\mathcal{T}_h)]^d$ y $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$. Demostrar que:

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\, v = \int_{\mathcal{E}_h^i} \Big([\![\boldsymbol{\sigma}]\!] \{\!\{v\}\!\} + \{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} \cdot [\![v]\!] \Big) + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\, v,$$

   donde $\mathcal{E}_h^i$ es el conjunto de lados ($d = 2$) o caras ($d = 3$) interiores y $\mathcal{E}_h^\partial$ es el conjunto de lados/caras de frontera, y los operadores salto y promedio se definen de la siguiente manera:

$$[\![\boldsymbol{\sigma}]\!] = \boldsymbol{\sigma}^+\cdot\boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-\cdot\boldsymbol{n}^-, \qquad [\![v]\!] = v^+\boldsymbol{n}^+ + v^-\boldsymbol{n}^-,$$
$$\{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-}{2}, \qquad \{\!\{v\}\!\} = \frac{v^+ + v^-}{2}.$$

2. Considere el operador divergencia a trozos: $\nabla_h\cdot : H(\mathrm{div};\mathcal{T}_h) \to L^2(\Omega)$ tal que $\mathbf{v} \mapsto (\nabla_h\cdot\mathbf{v})|_K := \nabla\cdot(\mathbf{v}|_K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h$. Demostrar que
   (a) Si $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, entonces $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)$ y $\nabla_h\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$.
   (b) Sea $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\mathcal{T}_h) \cap [W_1^1(\mathcal{T}_h)]^d$. Entonces $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ si y sólo si $[\![\mathbf{v}]\!] = 0 \in\ \forall e \in \mathcal{E}_h^i$.

3. (**Desigualdad de trazas discreta**). Sean $K \in \mathcal{T}_h$ y $v \in \mathbb{P}_k(K)$. Probar que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|v\|_{L^2(\partial T)} \le C h_T^{-1/2} \|v\|_{L^2(T)}.$$

   Indicación: Utilizar un argumento de escalamiento, recordar que la aplicación traza es continua y el hecho que en dimensión finita las normas son equivalentes.