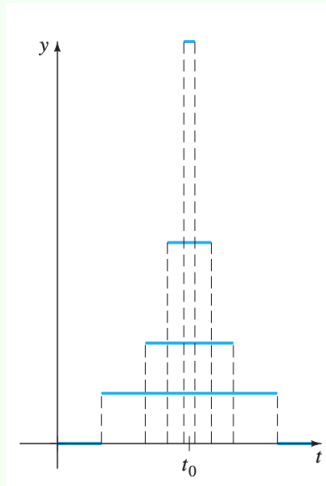


Delta de Dirac

Carlos M. Mora



Supongamos que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua

$$\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\mathcal{U}_{t_0-\epsilon}(t) - \mathcal{U}_{t_0+\epsilon}(t)}{2\epsilon} dt = \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} f(t_0)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta_{t_0}(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\mathcal{U}_{t_0-\epsilon}(t) - \mathcal{U}_{t_0+\epsilon}(t)}{2\epsilon} dt = f(t_0)$$

δ_a : Delta de Dirac en $a \geq 0$

Para cualquier función $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta_a(t) dt = f(a)$$

$\phi(t) \equiv 1$

$$\int_0^{+\infty} \delta_a(t) dt = \int_0^{+\infty} \phi(t) \delta_a(t) dt = \phi(a) = 1$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(\delta_a(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta_a(t) dt = e^{-sa}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-sa})(t) = \delta_a(t)$$

Supongamos que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua

$$\int_0^{+\infty} f(t) \frac{\mathcal{U}_{t_0-\epsilon}(t) - \mathcal{U}_{t_0+\epsilon}(t)}{2\epsilon} dt = \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} f(t_0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{t_0-\epsilon}(t) - \mathcal{U}_{t_0+\epsilon}(t) &= \mathbb{I}_{[t_0-\epsilon, +\infty[}(t) - \mathbb{I}_{[t_0+\epsilon, +\infty[}(t) \\ &= \mathbb{I}_{[t_0, +\infty[}(t + \epsilon) - \mathbb{I}_{[t_0, +\infty[}(t - \epsilon) = \mathcal{U}_{t_0}(t + \epsilon) - \mathcal{U}_{t_0}(t - \epsilon) \end{aligned}$$

$$f(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\mathcal{U}_{t_0}(t + \epsilon) - \mathcal{U}_{t_0}(t - \epsilon)}{2\epsilon} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(t) dt$$

δ_a : Delta de Dirac en $a \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(t) = \delta_a(t)$$

Supongamos que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente derivable tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Aplicando formalmente la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(t) dt &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \mathcal{U}_a(t) - f(0) \mathcal{U}_a(0) - \int_0^{+\infty} f'(t) \mathcal{U}_a(t) dt \\ &= - \int_a^{+\infty} f'(t) dt \\ &= f(a) = \int_0^{+\infty} f(t) \delta_a(t) dt \end{aligned}$$

δ_a : Delta de Dirac en $a \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(t) = \delta_a(t)$$

En general, para cualquier función $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta_a(t) dt = f(a)$$

δ_a : Delta de Dirac en $a \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(t) = \delta_a(t)$$

Consideremos un cuerpo de masa 1 *Kg* que está en reposo.
De repente sobre el mismo se ejerce una fuerza instantánea en el tiempo a que lo lleva a tener una velocidad igual a 1 *m/s* a partir de ese momento.
Entonces la velocidad del cuerpo es $\mathcal{U}_a(t)$

De la segunda ley de Newton,

$$\text{Fuerza}(t) = \text{masa} \times \text{aceleración}(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(t)$$

$\delta_a(t)$ se interpreta como la fuerza instantánea unitaria aplicada a un cuerpo de masa 1 *Kg* en el instante de tiempo a

Un cuerpo de masa 1 Kg está sujeto del extremo de un resorte suspendido del techo. La constante de rigidez del resorte es igual a 1 N/m . A los π segundos después que el sistema se encuentra en equilibrio, al cuerpo se le aplica una fuerza instantánea que aumenta su velocidad en 2 m/s . Describa el movimiento del cuerpo.

De la segunda ley de Newton,

$$\text{Fuerza}(t) = \text{masa} \times \text{aceleración}(t) = 1 \cdot \frac{d}{dt}(2\mathcal{U}_a(t)) = 2\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(t) = 2\delta_\pi(t)$$

$Y(t)$: desplazamiento (en metros) del cuerpo respecto a la posición de equilibrio en el tiempo t (dado en segundos)

$$Y''(t) + Y(t) = 2\delta_\pi(t)$$

$$Y'(0) = Y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(Y''(t) + Y(t))(s) = \mathcal{L}(2\delta_\pi(t))(s)$$

$$\mathcal{L}(Y''(t))(s) + \mathcal{L}(Y(t))(s) = 2\mathcal{L}(\delta_\pi(t))(s)$$

Usando $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ llegamos a

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}(Y(t))(s) = 2e^{-\pi s}$$

$$\mathcal{L}(Y(t))(s) = 2e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}$$

Así que

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(2e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}\right)(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}\right)(t)$$

Ya que $\mathcal{L}(f(t-a)\mathcal{U}_a(t))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$ y $\mathcal{L}(\text{sen}(\beta t))(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}\right)(t) = \text{sen}(t - \pi)\mathcal{U}_\pi(t)$$

$$Y(t) = -2\text{sen}(t)\mathcal{U}_\pi(t)$$