

Ejercicios resueltos

25 de septiembre de 2009

Ejercicios Tema I

Ejercicio 1 Demostrar que una clase no vacía \mathcal{A} es un álgebra en Ω si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

- i) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 2 Dada una aplicación $F: \Omega \longrightarrow \Omega'$, demostrar las siguientes propiedades:

- (i) $F^{-1}(\cup B_i) = \cup F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(\cap B_i) = \cap F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(B^c) = [F^{-1}(B)]^c$,
- (ii) $F(\cup A_i) = \cup F(A_i)$, $F(\cap A_i) \subset \cap F(A_i)$,
- (iii) Si F es sobre $F(A)^c \subset F(A^c)$.
- (iv) Si F es inyectiva $F(A)^c \supset F(A^c)$ y $F(A)^c \cap F(\Omega) = F(A^c)$.

Ejercicio 3 Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
- (b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
- (c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$.
- (d) Demostrar que si (Ω, \mathcal{T}) y (Ω', \mathcal{T}') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$.

Ejercicio 4 Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$.

Ejercicio 5 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental.

Ejercicio 6 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se genera por las familias:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_2 &= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_4 &= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_5 &= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_6 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

Ejercicio 7 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ se genera por la familia $\mathcal{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 8 Demostrar: (a) $\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \Omega$.

(b) Si $A_n \uparrow A$ (ó $A_n \downarrow A$), entonces $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Ejercicio 9 ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos?

Ejercicio 10 Demostrar que para cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (a) El conjunto de puntos de continuidad de f , $C(f) \in \mathcal{A}_\delta$ y los de discontinuidad $D(f) \in \mathcal{C}_\sigma$. (b) Demostrar que $C(f)$ y $D(f)$ son borelianos.

Ejercicio 11 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, el espacio de medida de contar en los naturales. Encontrar una sucesión $A_n \downarrow \emptyset$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

Ejercicio 12 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, para $\mu(A) = 0$ si A es finito y $\mu(A) = \infty$ en caso contrario.

(a) Demostrar que μ es aditiva pero no numerablemente aditiva.

(b) Encontrar una sucesión $A_n \uparrow A$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Ejercicio 13 Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 14 Sea $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, aditiva en un álgebra \mathcal{A} . Dada una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos cuya unión está en \mathcal{A} , demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 15 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

- i) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.
- ii) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

Ejercicio 16 Demostrar el Lema de Borel–Cantelli: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup C_n) = 0.$$

Ejercicio 17 Dada una medida finita μ sobre una σ -álgebra \mathcal{A} y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, demostrar que $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Ejercicio 18 Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1, m}$ y $x_{nm} \leq x_{n, m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}.$$

Ejercicio 19 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y una sucesión de medidas en él μ_n . Demostrar:

- a) Si $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, entonces $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ define una medida en el espacio.
- b) Sean como sean las μ_n , $\mu(A) = \sum \mu_n(A)$, define una medida en el espacio.

Ejercicio 20 Dado un espacio no numerable Ω y

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es numerable,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es numerable,} \end{cases} \quad \text{para cada } E \in \mathcal{A},$$

demostrar que \mathcal{A} es σ -álgebra y μ medida.

Ejercicio 21 Dado un espacio de medida semifinita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, es decir tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$.

Ejercicio 22 Demostrar que toda medida σ -finita es semifinita. Dar un contraejemplo para el recíproco.

Ejercicio 23 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- a) λ es una medida semifinita.
- b) Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$.

Ejercicio 24 Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, como vimos en el ejemplo (??), de la página ??, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{C}_3 = \{[a, b)\}$ y con ρ de cualquier intervalo también la diferencia de extremos.

Ejercicio 25 Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

- (a) $\mu^* \leq \lambda^*$.
- (b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.
- (c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$.

Ejercicio 26 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Demostrar:

- (a) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \triangle B) = 0$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$.
- (b) La relación entre conjuntos medibles $A \simeq B$ si y sólo si $\mu(A \triangle B) = 0$, es de equivalencia.
- (c) En el espacio cociente $\mathcal{X} = \mathcal{A}/\simeq$ la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B),$$

satisface $\rho(A, A^c) = \mu(\Omega)$, por tanto en general $\rho: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ toma el valor ∞ , sin embargo define una métrica en el sentido¹ de que verifica las tres propiedades habituales. Demostrar que para la topología natural —en la que las bolas abiertas de radio finito son base—, para

¹Observemos que el concepto habitual de métrica exige que $d(x, y) < \infty$, aunque no es esencial.

cada $A \in \mathcal{X}$, los B que están a distancia finita de A es un abierto y que estos abiertos o coinciden o son disjuntos y descomponen \mathcal{X} en componentes abiertas que sí son espacios métricos y son tales que la aplicación $A \in \mathcal{X} \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$ es una isometría que lleva una componente en otra (si $\mu(\Omega) = \infty$) y las aplicaciones de $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$(A, B) \rightarrow A \cup B, \quad (A, B) \rightarrow A \cap B, \quad (A, B) \rightarrow A \triangle B,$$

son continuas.

Ejercicio 27 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su completación y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Ejercicio 28 Demostrar que la completación de una medida regular es regular.

Ejercicio 29 Sean $\mu_i: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n].$$

Ejercicio 30 Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita. Encontrar una que sea σ -finita pero no de Lebesgue–Stieltjes. Encontrar una que sea σ -finita pero no regular.

Ejercicio 31 Demostrar que toda medida semifinita $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior.

Ejercicio 32 Demostrar que para $a < b \in \mathbb{R}^n$ y la medida de Lebesgue n -dimensional

$$m(a, b) = m[a, b) = m(a, b] = m[a, b].$$

Ejercicio 33 Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 34 ¿Se puede poner un cuadrado del plano como unión numerable de segmentos?

Ejercicio 35 Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Ejercicio 36 Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_p|_{\mathcal{P}(\Omega')}$.

Ejercicio 37 Demostrar que si $A \subset \Omega$ y $0 < H_p(A) < \infty$, $\dim_H(A) = p$.

Ejercicio 38 Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$.

Ejercicio 39 Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$.

Ejercicio 40 En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden.

Ejercicios Tema II

Ejercicio 41 Sea $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ acotada. Demostrar que existe una sucesión de funciones simples s_n tales que $s_n \rightarrow f$ uniformemente.

Ejercicio 42 Sean f y g funciones medibles y A un conjunto medible. Demostrar que es medible la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

Ejercicio 43 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Probar que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$, $\{x : mf(x) < n\}$ es medible.

Ejercicio 44 Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\},$$

son medibles.

Ejercicio 45 a) Sea f medible y $f = g$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

b) Sean $f \leq g \leq h$, con f y h medibles tales que $f = h$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

Ejercicio 46 Sea f_n una sucesión de funciones medibles, demostrar que es medible el conjunto $\{x : \text{existe y es finito el } \lim f_n(x)\}$.

Ejercicio 47 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente, ¿es f borel medible?

Ejercicio 48 ¿Es cierto que f es medible si y sólo si $|f|$ es medible? En caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 49 Sea A_n una sucesión de subconjuntos de Ω . Demostrar que

$$\begin{aligned} \inf I_{A_n} &= I_{\cap A_n}, & \sup I_{A_n} &= I_{\cup A_n}, \\ \liminf I_{A_n} &= I_{\liminf A_n}, & \limsup I_{A_n} &= I_{\limsup A_n}. \end{aligned}$$

Ejercicio 50 Sean $A, B \subset \Omega$. Demostrar que $\{x \in \Omega : I_A \neq I_B\} = A \Delta B$.

Ejercicio 51 Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto, demostrar que f' es Borel medible.

Ejercicio 52 Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si cada f_i lo es.

Ejercicio 53 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f d\mu$.

Ejercicio 54 Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$.

Ejercicio 55 Sea f integrable y $\epsilon > 0$. Demostrar que existe una función simple s tal que $\int |f - s| < \epsilon$.

Ejercicio 56 Sean $\mu_1 \leq \mu_2$ medidas. Demostrar que si una función medible compleja f es μ_2 -integrable, entonces es μ_1 -integrable.

Ejercicio 57 Sean $f_n \geq 0$ medibles tales que $f_n \downarrow f$. Demostrar que si f_1 es integrable, $\int f_n \rightarrow \int f$. ¿Es cierto si f_1 no es integrable?

Ejercicio 58 Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Ejercicio 59 Sea $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n integrables tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Demostrar que f es integrable y que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ejercicio 60 Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Ejercicio 61 Sea f integrable y g medible acotada, demostrar que fg es integrable.

Ejercicio 62 Demostrar que μ es σ -finita si y sólo si existe una función medible estrictamente positiva e integrable.

Ejercicio 63 Sea Ω un espacio topológico, μ una medida en $\mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mu(A) > 0$, para cada abierto $A \neq \emptyset$ y $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f = g$ c.s., demostrar que $f = g$.

Ejercicio 64 Demostrar que si $f \leq g$ c.s., existe la $\int f$ y $-\infty < \int f$, entonces existe la $\int g$ y si existe la $\int g$ y $\int g < \infty$, entonces existe la $\int f$ y en ambos casos $\int f \leq \int g$.

Ejercicio 65 Demostrar el teorema de la convergencia monótona cuando las condiciones son c.s.

Ejercicio 66 Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm.$$

Ejercicio 67 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) dm,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

Ejercicio 68 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$.

Ejercicio 69 Demostrar que para $t \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, la sucesión $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente y para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ también es creciente.

Ejercicio 70 Demostrar que

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n (1 - (t/n))^n \log t \, dm = \int_1^\infty e^{-t} \log t \, dm. \\ (b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - (t/n))^n \log t \, dm = \int_0^1 e^{-t} \log t \, dm. \end{aligned}$$

Ejercicio 71 Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f \, d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Ejercicio 72 Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \, d\mu < \epsilon.$$

Ejercicio 73 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{-\infty}^x f \, dm$ es uniformemente continua.

Ejercicio 74 Demostrar que si $F: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, $\mu_F = F_*\mu$, para $\mu_F(B) = \mu[F^{-1}(B)]$, es una medida, llamada medida imagen, para la que se verifica que si g es medible en Ω' y $B \in \mathcal{A}'$, entonces

$$\int_B g \, d\mu_F = \int_{F^{-1}(B)} (g \circ F) \, d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ejercicio 75 Demostrar que si $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables y $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es Riemann-integrable.

Ejercicio 76 Sea $C = [a, b] \cap \mathbb{Q} = \{c_n\}$ y $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si x es irracional, $x \in C^c$; y $f(c_n) = 1/n$. Demostrar que f es Riemann-integrable y calcular su integral.

Ejercicio 77 (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente.

(b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia.

Ejercicio 78 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad.

Ejercicio 79 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{(-\infty, \infty)} f \, dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f \, dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita?

Ejercicio 80 (a) Demostrar por inducción que $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dm = n!$.

(b) Demostrar que para $t > 0$, $\int_0^\infty e^{-tx} \, dm = 1/t$, y utilizarlo para demostrar (a), derivando respecto de t .

Ejercicio 81 Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(0) = 0$ y existe $f'(0)$. Demostrar que $f(x)x^{-3/2}$ es Lebesgue integrable.

Ejercicio 82 Calcular:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, dm.$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \sin(x/n) [x(1 + x^2)]^{-1} \, dm.$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty n(1 + n^2 x^2)^{-1} \, dm$, en función de a .

Ejercicio 83 Dadas las funciones definidas en $(0, \infty)$

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2, \quad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx,$$

demostrar que:

$$(a) f(t) + g(t) = \pi/4. \quad (b) \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Ejercicio 84 Dada $f(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xt dx$, demostrar que satisface $f'(t) + 2tf(t) = 0$ y que $f(t) = (1/2)\sqrt{\pi}e^{-t^2}$.

Ejercicio 85 Demostrar:

$$(1) \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = 2n! \sqrt{\pi} / 4^n n!.$$

$$(2) \text{ Para } a \geq 0, \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

$$(3) \text{ Para } p > 0, \int_0^1 x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x dx = \sum_{n=0}^\infty 1/(p+n)^2.$$

Ejercicio 86 Demostrar que la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r \log^n x^{-1}$, para $-1 < r$ y $n \geq 0$ es Lebesgue integrable y que

$$\int_{(0,1)} x^r \log^n x^{-1} dm = \int_0^1 x^r \log^n x^{-1} dx = \frac{n!}{(1+r)^{n+1}}$$

Ejercicio 87 Demostrar que la función $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} x^k$, para $k \in \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable.

Ejercicio 88 Sea $k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^r x^k dm < \infty & \Leftrightarrow -1 < k \\ \int_r^\infty x^k dm < \infty & \Leftrightarrow k < -1 \end{aligned}$$

Ejercicios Tema III

Ejercicio 89 Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

- (a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
 (b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Ejercicio 90 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $f: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -medible.

Ejercicio 91 Demostrar que $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

Ejercicio 92 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible.

Ejercicio 93 Demostrar que para cada $r > 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es medible la función de \mathbb{R}^n , $f(x) = m[A \cap B[x, r]]$.

Ejercicio 94 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y completos, ¿es necesariamente completo el espacio producto?

Ejercicio 95 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $E, F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, tales que para todo $x \in \Omega_1$ c.s. (μ_1) , $\mu_2(E_x) = \mu_2(F_x)$. Demostrar que $\mu(E) = \mu(F)$.

Ejercicio 96 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $\Lambda: \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$ una medida de transición. Demostrar que:

- (a) Si μ es una medida en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, entonces

$$\lambda(B) = \int \Lambda_B d\mu,$$

es una medida en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

- (b) Si $g \geq 0$ es medible en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$,

$$f(x) = \int g d\Lambda_x,$$

es medible en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y se tiene que

$$\int f d\mu = \int g d\lambda.$$

Ejercicio 97 Demostrar que: (a) Si $F: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible y μ es una medida en (Ω, \mathcal{A}) , $\nu = F_*\mu$, para

$$\nu(A) = \mu[F^{-1}(A)],$$

es una medida en (Ω', \mathcal{A}') (llamada medida imagen) y si ν es σ -finita, μ también lo es. ¿Es cierto que si μ lo es, lo es ν ?

(b) Si $F_1: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega'_1, \mathcal{A}'_1)$ y $F_2: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (\Omega'_2, \mathcal{A}'_2)$ son medibles entonces también es medible

$$F_1 \otimes F_2: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'_1 \times \Omega'_2, \quad F_1 \otimes F_2(x, y) = (F_1(x), F_2(y)),$$

y dadas medidas μ_1 en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y μ_2 en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, tales que $\nu_i = F_{i*}\mu_i$ son σ -finitas, se verifica que

$$F_1 \otimes F_2(\mu_1 \times \mu_2) = \nu_1 \times \nu_2.$$

Ejercicio 98 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $f: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles e integrables, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ -integrable y

$$\int h \, d\mu = \left(\int f \, d\mu_1 \right) \left(\int g \, d\mu_2 \right).$$

Ejercicio 99 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$.

Ejercicio 100 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s.

Ejercicio 101 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f, g: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ medibles y tales que para cada $x > 0$, $\mu\{f > x\} \leq \mu\{g > x\}$. Demostrar que

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Ejercicio 102 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible y $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt,$$

y que si $\mu\{f > t\} \leq e^{-t}$, entonces $\int f^p d\mu \leq \Pi(p)$.

Ejercicios Tema IV

Ejercicio 103 Sean $\lambda, \mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ cargas y $a \in \mathbb{R}$, demostrar que

$$|a\lambda| = |a||\lambda|, \quad |\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|.$$

Ejercicio 104 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

- (a) $E \in \mathcal{A}$ es nulo si y sólo si $|\lambda|(E) = 0$.
- (b) Si P, N y P', N' son descomposiciones de Hahn, $|\lambda|(P \triangle P') = 0$.

Ejercicio 105 Sean μ_1, μ_2 medidas, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y f una función medible. Demostrar que existe $\int f d\mu$ si existen $\int f d\mu_1$ la $\int f d\mu_2$ y su suma está definida. Y en tal caso

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 106 Sea λ una carga. Demostrar:

- (a) g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.
- (b) Si g es λ -integrable,

$$\left| \int g d\lambda \right| \leq \int |g| d|\lambda|.$$

(c) Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Ejercicio 107 Encontrar en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la descomposición de Jordan para la carga $\lambda = P - \delta_{\{0\}}$, siendo P una probabilidad.

Ejercicio 108 Sea f una función con integral en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y consideremos la carga $\lambda = f\mu$. Demostrar que

$$\lambda^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A f^- d\mu, \quad |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

Ejercicio 109 Demostrar que si una carga $\lambda = \mu_1 - \mu_2$ es diferencia de dos medidas μ_i , entonces $\lambda^+ \leq \mu_1$ y $\lambda^- \leq \mu_2$.

Ejercicio 110 Sean μ_1 y μ_2 medidas positivas y finitas y $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Demostrar que si f es μ_1 y μ_2 integrables entonces es μ integrable y

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 111 Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A\right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^{\infty}$ en lugar de sumas finitas?

Ejercicio 112 Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-,$$

demostrar que

$$\lambda_i^{\pm} \leq |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-.$$

Ejercicio 113 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int fg d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ejercicio 114 Sean λ_1, λ_2 y λ_3 medidas, λ_2 y λ_3 σ -finitas, en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que si $\lambda_1 \ll \lambda_2$ y $\lambda_2 \ll \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \ll \lambda_3$ y además se tiene que

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_3}.$$

Ejercicio 115 Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

Ejercicio 116 Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

- (a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.
- (b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.
- (c) Existe una función medible $g: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

Ejercicio 117 Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ .

Ejercicio 118 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s.

Ejercicio 119 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Ejercicio 120 Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

Ejercicio 121 Sea f medible compleja integrable respecto de una medida compleja λ , demostrar que

$$\left| \int f d\lambda \right| \leq \int |f| d|\lambda|.$$

Ejercicio 122 Sean μ y ν medidas y f μ -integrable y g ν -integrable, tales que para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\nu$, entonces para toda h medible acotada $\int_A f h d\mu = \int_A g h d\nu$

Ejercicio 123 Demostrar que si λ_1 y λ_2 son complejas y $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

Ejercicios Tema V

Ejercicio 124 Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ejercicio 125 Sea $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase 1, demostrar que para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si $\sigma(t) = (x_i(t))$

$$\gamma_1 H_1(\sigma[a, b]) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n x'_i(t)^2} dt.$$

Ejercicio 126 Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y consideremos su gráfica $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, demostrar que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$\gamma_2 H_2[F(A)] = \int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Ejercicio 127 (1) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.
(2) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi rh$.

Ejercicio 128 Demostrar que para una rotación o una traslación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B satisface $C[T(B)] = T[C(B)]$.

Ejercicio 129 Demostrar que si $B, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tienen dimensión Hausdorff p , con $0 < H_p(B), H_p(B_i) < \infty$ y B_i es una partición numerable disjunta de $B = \cup B_n$, entonces

$$C[B] = \sum \frac{H_p(B_i)}{H_p(B)} C(B_i).$$

Ejercicio 130 Dado en el plano un triángulo T_2 de vértices ABC , consideremos los tres conjuntos: T_2 (la envolvente convexa de los vértices), $T_1 = \partial T_2$ formado por los tres lados y $T_0 = \{A, B, C\}$ formado por los tres vértices. Calcular el centro de masas de cada uno. ¿coinciden?

Ejercicios Tema VI

Ejercicio 131 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es localmente nulo.

Ejercicio 132 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$ y es integrable, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es nulo.

Ejercicio 133 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, que es isomorfo a $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Dar un isomorfismo.

Ejercicio 134 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}.$$

Ejercicio 135 Demostrar que si $0 < r < p < s < \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$.

Ejercicio 136 Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

Ejercicio 137 Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo si y sólo si para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente.}$$

Ejercicio 138 Demostrar la desigualdad de Holder generalizada:

Si $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$ son tales que $\sum (1/p_i) = 1/r \leq 1$ y $f_i \in L_{p_i}$, entonces

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L_r, \quad \text{y} \quad \left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Ejercicio 139 Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Ejercicio 140 Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$.

Ejercicio 141 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

Ejercicio 142 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \rightarrow 0$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p \leq \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Ejercicio 143 Demostrar la **Desigualdad de Jensen**, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\varphi \left(\int f d\mu \right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

Ejercicio 144 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces

$$\int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu \geq 1.$$

Ejercicio 145 Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$.

Ejercicio 146 Sea $g \in L_\infty$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_\infty$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.- Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
- (b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
- (c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$.
- (d) Demostrar que si (Ω, \mathcal{T}) y (Ω', \mathcal{T}') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$.

Ind.- (c) Aplicar el principio de los buenos conjuntos. (d) Aplicar (c).

Ejercicio 4.- Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$.

Solución.- Por una parte tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3 \subset \alpha(\mathcal{C})$, por tanto $\alpha(\mathcal{C}_3) = \alpha(\mathcal{C})$ y basta demostrar que \mathcal{C}_3 es álgebra. Que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}_3$ es obvio,

$$\begin{aligned}A &= A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{C}_3 \Rightarrow \\ A^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (\cup_{j=1}^{m_1} B_{1j}) \cap \cdots \cap (\cup_{j=1}^{m_n} B_{nj}) \\ &= \cup_{j_1=1}^{m_1} \cdots \cup_{j_n=1}^{m_n} [\cap_{i=1}^n B_{ij_i}] \in \mathcal{C}_3,\end{aligned}$$

donde los $B_{ij} \in \mathcal{C}_1$. Por último es cerrado para uniones finitas. ■

Ejercicio 5.- Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental.

Solución.- $\emptyset \in \mathcal{R}$ y

$$\begin{aligned}(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) &= (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n), \\ [A_1 \times \cdots \times A_n]^c &= A_1^c \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \cup \\ &\quad A_1 \times A_2^c \times \cdots \times \Omega_n \cup \dots \cup \\ &\quad A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n^c \in \mathcal{A}_0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 9.- ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos?

Ind. No, porque al menos tendría una colección numerable A_n de conjuntos disjuntos —pues de un medible no trivial A , sacamos dos A y A^c , y por inducción, de n disjuntos A_1, \dots, A_n sacamos $n+1$, pues o bien $B = \cup A_i \neq \Omega$ y consideramos $A_{n+1} = B^c$ o en caso contrario estos n conjuntos son una partición del espacio y basta considerar cualquier medible E que no sea unión de algunos A_i , y por tanto con intersección no trivial con alguno de los A_i , al que parte en dos $E \cap A_i$ y $E^c \cap A_i$. Ahora las uniones arbitrarias de estos serían distintas e identificando cada A_n con $n \in \mathbb{N}$, estas uniones se identificarían con partes de \mathbb{N} que es no numerable. ■

Ejercicio 10.- Demostrar que para cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (a) El conjunto de puntos de continuidad de f , $C(f) \in \mathcal{A}_\delta$ y los de discontinuidad $D(f) \in \mathcal{C}_\sigma$. (b) Demostrar que $C(f)$ y $D(f)$ son borelianos.

Ind. Como $C(f) = D(f)^c$ basta verlo para uno. Consideremos para cada intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, $\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$, para la que se tiene que

$$I \subset J \Rightarrow 0 \leq \omega_f(I) \leq \omega_f(J),$$

y sea para cada x , $\omega_f(x) = \inf_{x \in I} \omega_f(I)$. Se sigue de la definición que x es punto de continuidad de f ($x \in C(f)$) si $\omega_f(x) = 0$. Por otra parte para cada $k > 0$, el conjunto $\{x : \omega_f(x) < k\}$ es abierto y por tanto son cerrados $C_n = \{x : \omega_f(x) \geq 1/n\}$ y se tiene que $D(f) = \{\omega_f \neq 0\} = \cup C_n$. ■

Ejercicio 13.- Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ind. Tómense los conjuntos disjuntos $B_n = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})^c \cap A_n$. ■

Ejercicio 15.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

(a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

(b) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

Solución.- Sean $B_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_i$ y $C_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_i$, entonces $B_n \subset A_n \subset C_n$, $\mu(B_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(C_n)$ y $B_n \uparrow \liminf A_n$, $C_n \downarrow \limsup A_n$. ■

Ejercicio (Lema de Borel–Cantelli) 16.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup C_n) = 0.$$

Ind. Sea $D_n = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$, $\mu(D_1) < \infty$, $\mu(D_n) \downarrow 0$ y $D_n \downarrow \limsup C_n$. ■

Ejercicio 18.- Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1, m}$ y $x_{nm} \leq x_{n, m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}.$$

Ind. Demostrar que existen los límites $a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}$ y $b = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$, que $x_{nm} \leq a_n \leq a$ y por tanto $b \leq a$, la otra desigualdad por simetría. ■

Ejercicio 20.- Dado un espacio no numerable Ω y

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es numerable,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es numerable,} \end{cases} \quad \text{para cada } E \in \mathcal{A},$$

demostrar que \mathcal{A} es σ -álgebra y μ medida.

Ind. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y para todo n A_n es numerable, entonces $\cup A_n \in \mathcal{A}$ por ser numerable y si existe un i tal que A_i^c es numerable, entonces $(\cup A_n)^c = \cap A_n^c \subset A_i^c$ es numerable. Y si los A_n son disjuntos y todos numerables, $\mu(\cup A_n) = 0 = \sum \mu(A_n)$, y si un A_i no lo es, entonces para todo $j \neq i$, $A_j \subset A_i^c$ es numerable y $\mu(\cup A_n) = 1 = \mu(A_i) = \sum \mu(A_n)$. ■

Ejercicio 21.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$ (estas medidas suelen llamarse *semifinitas*), demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$.

Solución.- Basta demostrar que

$$\sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset E \text{ y } \mu(B) < \infty\} = \infty.$$

En caso contrario, el supremo valdría $c < \infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, podríamos encontrar $F_n \subset E$ tal que $\mu(F_n) > c - (1/n)$ y considerando $B_n = \cup_{i=1}^n F_i$ y su unión expansiva $B_n \uparrow B$, tendríamos que $\mu(B_n) \leq c$, pues $B_n \subset E$ y $\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(F_i) < \infty$, por tanto tomando límites $\mu(B) \leq c$, pero como

$$\mu(B_n) \geq \mu(F_n) \geq c - \frac{1}{n},$$

tomando límites $\mu(B) \geq c$, por tanto $\mu(B) = c$ y como $B \subset E$ llegamos a contradicción pues $\mu(E \setminus B) = \infty$ ya que $\mu(E) = \mu(B) + \mu(E \setminus B)$, y por definición existe un medible $A \subset E \setminus B$ con $0 < \mu(A) < \infty$, por lo que $B \cup A \subset E$ tiene medida finita mayor que c . ■

Ejercicio 23.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- (a) λ es una medida semifinita.
- (b) Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$.

Solución.- (a) Es aditiva, pues para $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos y cualquier $C \subset A \cup B$, con $C \in \mathcal{A}$ y $\mu(C) < \infty$, tenemos $A \cap C \subset A$, $B \cap C \subset B$, con $A \cap C, B \cap C \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \cap C) < \infty$, $\mu(B \cap C) < \infty$, por tanto como son disjuntos

$$\mu(C) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) \leq \lambda(A) + \lambda(B),$$

y como esto es válido para cualquier C , $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$. Veamos la otra desigualdad; para cualesquiera $A' \subset A$, $B' \subset B$, de \mathcal{A} con medidas finitas por μ , tendremos que son disjuntos y

$$\mu(A') + \mu(B') = \mu(A' \cup B') \leq \lambda(A \cup B),$$

y se sigue la otra desigualdad. Ahora basta demostrar que si $A_n \uparrow A$, entonces $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. Ahora bien como λ es no negativa y aditiva es monótona, por tanto $\lambda(A_n) \leq \lambda(A_{n+1}) \leq \lambda(A)$, para todo n y si consideramos un $B \subset A$ medible con $\mu(B) < \infty$ y la sucesión $B_n = B \cap A_n \uparrow B$, tendremos $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$, $\mu(B_n) \leq \mu(B) < \infty$ y $B_n \subset A_n$, por tanto $\mu(B_n) \leq \lambda(A_n)$, de donde

$$\mu(B) = \lim \mu(B_n) \leq \lim \lambda(A_n) \leq \lambda(A),$$

y tomando sup en $\mu(B)$ se dan igualdades y por tanto λ es medida. Además si $\mu(A) < \infty$, $\lambda(A) = \mu(A)$ y si $\lambda(A) = \infty$, existe $B_n \subset A$ medibles con $\mu(B_n) < \infty$ y $\mu(B_n) \rightarrow \infty$, por tanto existe $B_n \subset A$, con $0 < \lambda(B_n) = \mu(B_n) < \infty$, lo que prueba que es semifinita.

(b) Es consecuencia del ejercicio 21. ■

Ejercicio 24.- Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = [a, b]$, $\mathcal{C}_3 = [a, b)\}$.

Ind.- Para \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 , denotemos

$$\mathcal{D}_A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n < b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

$$\mathcal{D}_{1A} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) : c_n < d_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n) \right\},$$

entonces por un lado $\mathcal{D}_{1A} \subset \mathcal{D}_A$, pues $(c, d) \subset (c, d]$ y por otro para cada $x \in \mathcal{D}_A$ y $\epsilon > 0$, $x + \epsilon \in \mathcal{D}_{1A}$, pues para $x = \sum (b_n - a_n)$, con $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$, tendremos $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n + \epsilon/2^n)$ y la suma correspondiente a estos intervalos es $x + \epsilon$. ■

Ejercicio 25.- Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

(a) $\mu^* \leq \lambda^*$.

(b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.

(c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$.

Ind. (a) Para $A \subset \Omega$, $\lambda^*(A) = \inf\{\sum \mu^*(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_*, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu^*(A_i)$,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(\cup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i),$$

por tanto $\mu^*(A) \leq \lambda^*(A)$.

(b) Para $A \subset \Omega$, $\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu(A_i)$, como los $A_i \in \mathcal{A}_*$

$$\lambda^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i) = \sum \mu(A_i),$$

por tanto $\lambda^*(A) \leq \mu^*(A)$.

(c) $\mu^*\{0\} = \mu^*\{1\} = 2$, $\mu^*\{0, 1\} = 3$, por tanto $\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\lambda^*\{0\} = 3$. ■

Ejercicio 27.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su compleción y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Ind. Si $A \in \mathcal{A}_\mu$, existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$ y $\mu(D \setminus B) = 0$, por tanto $\mu(D) = \mu(A) = \mu(B) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(D)$ y se tiene la igualdad. Ahora dado $A \subset \Omega$ se demuestra que existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$, $\mu(B) = \mu_*(A)$ y $\mu^*(A) = \mu(D)$ y si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Ejercicio 29.- Sean $\mu_i : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n].$$

Ind. Considérense funciones de distribución F_i que generen μ_i , la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ y la medida que genera. ■

Ejercicio 30.- Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita. Encontrar una que sea σ -finita pero no de Lebesgue–Stieltjes. Encontrar una que sea σ -finita pero no regular.

Ind. En \mathbb{R} , $\mu(A)$ el número de racionales de A . ■

Ejercicio 31.- Demostrar que toda medida semifinita $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior.

Ind. Se ha demostrado que toda medida es regular interior en los borelianos de medida finita, sea B un boreliano con $\mu(B) = \infty$, entonces por ser semifinita hemos demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un boreliano $B_n \subset B$, tal que $n < \mu(B_n) < \infty$, pero entonces existe un compacto $K_n \subset B_n$, tal que $n < \mu(K_n)$ y $K_n \subset B$. ■

Ejercicio 32.- Demostrar que para $a < b \in \mathbb{R}^n$ y la medida de Lebesgue n -dimensional

$$m(a, b) = m[a, b) = m(a, b] = m[a, b].$$

Ind. Para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, se tiene, entendiendo $a - 1/m$ el vector de coordenadas $a_i - 1/m$, $(a - 1/m, b] \downarrow [a, b]$, por tanto

$$m[a, b] = \lim m(a - 1/m, b] = \lim \prod (b_i - a_i + 1/n) = \prod (b_i - a_i) = m(a, b].$$

y por lo mismo $m[a, b] = m(a, b)$, pues $(a, b - 1/m) \uparrow (a, b)$. ■

Ejercicio 33.- Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ind. Para $t > 0$, $m(tB) = |t|^n m(B)$, pues $m^*(tB) = t^n m^*(B)$ y para $t < 0$, $m^*(tB) = m^*[-t|(-B)] = |t|^n m^*(-B)$ y basta demostrar que $m^*(-B) = m^*(B)$. Observemos que para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, se tiene, entendiendo $a - 1/n$ el vector de coordenadas $a_i - 1/n$

$$\begin{aligned} m[a, b] &= \lim m(a - 1/n, b] = \lim \prod (b_i - a_i + 1/n) = \prod (b_i - a_i) = m(a, b], \\ m^*(A) &= \inf \left\{ \sum m(a_i, b_i) : A \subset \cup (a_i, b_i] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum m[a_i, b_i] : A \subset \cup [a_i, b_i] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum m[-b_i, -a_i] : -A \subset \cup [-b_i, -a_i] \right\} = m^*(-A), \end{aligned}$$

y se demuestra fácilmente que si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Que las homotecias conservan Borelianos es por ser homeomorfismos. El ejercicio también se puede demostrar utilizando esto último, que los Lebesgue medibles son la compleción de los Borel y que la medida de Lebesgue es la única medida invariante por traslaciones que verifica $m([0, 1]^n) = 1$, considerando para ello la medida de Borel $\mu(B) = m[tB]/|t|^n$. ■

Ejercicio 35.- Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Ind. Para $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\delta < \min\{d(x_i, x_j)\}$, $H_{0\delta}(A) = n$. ■

Ejercicio 36.- Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_p|_{\mathcal{P}(\Omega')}$.

Ind. Para $A \subset \Omega'$,

$$\begin{aligned} H'_{p,\delta}(A) &= \inf \left\{ \sum d(A_n)^p : A \subset \cup A_n \subset \Omega', d(A_n) \leq \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum d(B_n)^p : A \subset \cup B_n \subset \Omega, d(B_n) \leq \delta \right\} = H_{p,\delta}(A). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 38.- Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$.

Ind. $H_0(\{x\}) = 1$. ■

Ejercicio 39.- Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$.

Ind. Si $A = \cup A_i$, $H_p(A_i) \leq H_p(A) \leq \sum H_p(A_n)$, por tanto si $p < \sup \dim_H(A_n)$, existe un i tal que $p < \dim_H(A_i)$, por tanto $H_p(A_i) = \infty = H_p(A)$ y $p \leq \dim_H(A)$ y si $\sup \dim_H(A_n) < p$, $H_p(A_n) = 0$ para todo n y $H_p(A) = 0$, por tanto $\dim_H(A) \leq p$. ■

Ejercicio 40.- En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden.

Ind. Es consecuencia de los resultados anteriores y de que para un cubo Q , n -dimensional, se tiene que $0 < H_n(Q) < \infty$, por tanto $\dim_H(Q) = n$. ■

Ejercicio 44.- Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\},$$

son medibles.

Ind. El primer conjunto es medible porque en él $h < \infty$, $-\infty < g$ y en este conjunto existe $g - h$ que es medible, ó también porque

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{h(x) < r\} \cap \{r < g(x)\}),$$

el segundo porque su complementario lo es y el tercero es la diferencia. ■

Ejercicio 51.- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto, demostrar que f' es Borel medible.

Solución.- Si f es derivable es continua y por tanto medible, como también lo es $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$ y como $f_n \rightarrow f'$, f' es medible. ■

Ejercicio 52.- Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ es medible si y sólo si cada f_i lo es.

Solución.- Si f es medible, $f_i = x_i \circ f$ es medible por que las proyecciones $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y por tanto medibles. Recíprocamente sea $(a, b]$ un semi-rectángulo, con $a < b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$f^{-1}(a, b] = \{x \in \Omega : a < f(x) \leq b\} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \Omega : a_i < f_i(x) \leq b_i\} \in \mathcal{A},$$

y como estos semi-rectángulo generan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, f es medible. ■

Ejercicio 53.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f d\mu$.

Ind. $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. ■

Ejercicio 54.- Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$.

Ind. $A_n = \{1/n \leq f\} \uparrow A = \{0 < f\}$, $\mu(A_n) < \infty$ y $\int_{A_n} f \uparrow \int_A f = \int f$. ■

Ejercicio 58.- Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Ind. Por el TCD, pues $-f \leq f_n - |f - f_n| \leq f$, por tanto $\int f_n - \int |f_n - f| \rightarrow \int f$. ■

Ejercicio 60.- Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Ind. Por el TCD pues $-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$, por tanto $\int |f_n| - \int |f_n - f| \rightarrow \int |f|$. ■

Ejercicio 66.- Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm.$$

Ind. Por el TCD, pues: 1 es integrable; $0 \leq f_n \leq 1$, ya que

$$(1 + x^2)^n = 1 + nx^2 + (1/2)n(n-1)x^4 + \dots \geq 1 + nx^2,$$

y $f_n \downarrow 0$, pues

$$\frac{(1+x^2)^n}{1+nx^2} \geq \frac{1+nx^2+(1/2)n(n-1)x^4}{1+nx^2} \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Ejercicio 68.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$.

Ind. Para cada $s \in (a, b)$ existe un $\delta > 0$ tal que $[s - 2\delta, s + 2\delta] \subset (a, b)$. Basta demostrar que F es diferenciable en $I = (s - \delta, s + \delta)$. Existe $r > 0$, tal que para $x > r$, $x \leq e^{\delta x}$, por lo que el módulo de la derivada del integrando, $|x e^{tx} f(x)|$, está acotado para $t \in I$ por la función integrable

$$h(x) = \begin{cases} e^{(s-2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } x < -r, \\ r e^{(s-2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } -r \leq x \leq 0, \\ r e^{(s+2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } 0 \leq x \leq r, \\ e^{(s+2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } x > r, \end{cases}$$

y el resultado se sigue del teorema de derivación bajo el signo integral. \blacksquare

Nota. Para los siguiente ejercicios puede ser útil recordar que:

$$\lim_{|a_n| \rightarrow \infty} (1 + 1/a_n)^{a_n} = e,$$

Ejercicio 69.- Demostrar que para $t > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, la sucesión $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente y para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ también es creciente.

Ind.

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha\right)^n &\leq \left(1 - \left(\frac{t}{n+1}\right)^\alpha\right)^{n+1} \Leftrightarrow \\ \frac{(n^\alpha - t^\alpha)^n}{((n+1)^\alpha - t^\alpha)^{n+1}} &\leq \frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}, \end{aligned}$$

lo cual induce a considerar la función

$$f(x) = \frac{(n^\alpha - x)^\alpha}{((n+1)^\alpha - x)^{\alpha+1}},$$

y demostrar que $f' \leq 0$, en cuyo caso $f(x) \leq f(0)$, para todo $x \geq 0$. El otro es similar. \blacksquare

Ejercicio 70.- Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_1^\infty e^{-t} \log t \, dm. \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_0^1 e^{-t} \log t \, dm. \end{aligned}$$

Ind. (a) Se puede hacer utilizando el ejercicio (69) y el TCM pues $0 \leq I_{(1,n)}(1 - (t/n)^\alpha)^n \log t$ y $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ es creciente para $0 \leq t \leq n$.

También se puede hacer utilizando el TCD, probando que

$$|I_{(1,n)}(1 - (t/n))^n \log t| = I_{(1,n)}(1 - (t/n))^n \log t \leq e^{-t}t,$$

y demostrando que $e^{-t}t$ es integrable.

(b) se sigue del desarrollo de (a), utilizando el TCM y teniendo en cuenta que como en $(0, 1)$ el $\log t$ es negativo, la sucesión $(1 - (t/n))^n \log t \leq 0$ y es decreciente.

■

Ejercicio 71.- Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Ind. La sucesión $0 \leq f_n = n \log[1 + (f/n)^\alpha]$, es creciente para $\alpha \leq 1$, por el ejercicio (69) y

$$\left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n = \left[1 + \frac{1}{(n/f)^\alpha} \right]^{(n/f)^\alpha n (f/n)^\alpha}, \quad n^{1-\alpha} \begin{cases} \downarrow 0, & \text{si } \alpha > 1. \\ = 1, & \text{si } \alpha = 1. \\ \uparrow \infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

y $f_n \uparrow f$ para $\alpha = 1$ y $f_n \uparrow \infty$ para $\alpha < 1$, en cuyo caso el resultado se sigue del TCM. Para $\alpha \geq 1$, $f_n \leq \alpha f$, pues para $x \geq 0$ y $\alpha \geq 1$, $1 + x^\alpha \leq (1 + x)^\alpha$ (ya que si $h(x) = (1 + x)^\alpha - x^\alpha - 1$, $h(0) = 0$ y $h'(x) > 0$), y

$$e^{f_n} = \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n \leq \left(1 + \frac{f}{n} \right)^{n\alpha} \uparrow e^{\alpha f},$$

y se aplica el TCD. ■

Ejercicio 72.- Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| d\mu < \epsilon.$$

Ind. Sea $\lambda(A) = \int_A |f| d\mu$, que es una medida finita y $B_n = \{|f| > n\}$, entonces $B_n \downarrow B = \{|f| = \infty\}$, por tanto $\lambda(B_n) \rightarrow \lambda(B) = \int_B |f| d\mu = 0$, por tanto existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $\lambda(B_n) \leq \epsilon/2$. Ahora bien

$$\int_E |f| d\mu = \int_{E \cap B_n} |f| d\mu + \int_{E \cap B_n^c} |f| d\mu \leq \frac{\epsilon}{2} + n\mu(E),$$

y basta tomar $\delta \leq \epsilon/2n$. ■

Ejercicio 73.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$ es uniformemente continua.

Ind. Aplicar el ejercicio anterior. ■

Ejercicio 74.- Demostrar que si $F: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, $\mu_F = F_*\mu$, para $\mu_F(B) = \mu[F^{-1}(B)]$, es una medida, llamada *medida imagen*, para la que se verifica que si g es medible en Ω' y $B \in \mathcal{A}'$, entonces

$$\int_B g d\mu_F = \int_{F^{-1}(B)} (g \circ T) d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Para indicadores se sigue de la definición, para funciones simples por aditividad, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.?? y para funciones con integral de la definición. ■

Ejercicio 75 Demostrar que si $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables y $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es Riemann-integrable.

Ind. f_n es continua salvo en un Borel medible nulo A_n . Por tanto todas las f_n son continuas fuera del Borel medible nulo $A = \cup A_n$ y por tanto f , pues

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 76 Sea $C = [a, b] \cap \mathbb{Q} = \{c_n\}$ y $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si x es irracional, $x \in C^c$; y $f(c_n) = 1/n$. Demostrar que f es Riemann-integrable y calcular su integral.

Ind. f es continua fuera del medible nulo C , pues si x es irracional $0 \leq f(z) \leq \epsilon$ para los z del entorno de x $V_x = \{c_1, \dots, c_n\}^c$ y $1/n \leq \epsilon$. ■

Ejercicio 77.- (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente. (b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia.

Ind. (a) Se sigue del teorema de caracterización, pues es Riemann integrable en cada intervalo acotado y por tanto en él es continua c.s. El recíproco no es cierto para $f(x) = x$, ni siquiera para f acotada, $f = I_{[0, \infty)} - I_{(-\infty, 0)}$.

(b) Por el *Teorema de caracterización* f es Riemann integrable en cada intervalo $[a_n, b_n]$, para cualesquiera $a_n \rightarrow -\infty$ y $b_n \rightarrow \infty$ y f es Lebesgue medible en $[a_n, b_n]$. además $f_n = fI_{[a_n, b_n]} \uparrow f$ y f es Lebesgue medible y $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int f_n \uparrow \int f$, por el *Teorema de la convergencia monótona*. ■

Ejercicio 78.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad.

Ind. Consideremos la sucesión $f_n = fI_{[-n, n]}$, para la que $f_n \uparrow f$, entonces es Lebesgue medible por serlo las f_n y por el *Teorema de caracterización* y el *Teorema de la convergencia monótona*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm = \int f dm,$$

Si quitamos la no negatividad es falso pues por ejemplo para

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_{[n-1, n]},$$

existe

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n},$$

y es finita y sin embargo no es Lebesgue integrable, pues no lo es $|f|$, ya que $\int |f|dm = \sum (1/n) = \infty$. ■

Ejercicio 79.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{[-\infty, \infty]} f dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita?

Solución.- $\lambda(A) = \int_A f dm$ es una carga y si $A_n \uparrow A$, $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. ■

Ejercicio 80.- (a) Demostrar por inducción que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dm = n!$.

(b) Demostrar que para $t > 0$, $\int_0^\infty e^{-tx} dm = 1/t$ y utilizarlo para demostrar (a), derivando respecto de t .

Ind.- (b) $-1 = \int_0^\infty (e^{-tx})' dx = (-t) \int_0^\infty e^{-tx} dx$. Por otra parte para todo $a > 0$ y todo $t > a$, $|\partial e^{-tx} / \partial t| = x e^{-tx}$ está uniformemente acotada por una función integrable. Pues existe M , tal que para $x > M$, $x e^{-tx} \leq x e^{-ax} \leq e^{-ax/2}$ y para $0 < x \leq M$, $x e^{-tx} \leq M e^{-ax}$. Similarmente para las derivadas sucesivas. Por tanto para $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dm = 1/t$ tendremos

$$F^{(n)}(t) = \int_0^\infty (-x)^n e^{-tx} = (-1)^n n! t^{-n-1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 81.- Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(0) = 0$ y existe $f'(0)$. Demostrar que $f(x)x^{-3/2}$ es Lebesgue integrable.

Ind.- $f(x) = xg(x)$ para g continua y $g(x)/\sqrt{x}$ está acotada en un entorno de 0 por M/\sqrt{x} que es integrable y fuera es integrable. ■

Ejercicio 82.- Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) dm$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \sin(x/n) [x(1 + x^2)]^{-1} dm$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty n(1 + n^2 x^2)^{-1} dm$, en función de a .

Ind. (a) = 0 por TCD, pues la sucesión $(1 + (x/n))^{-n}$ es creciente —y converge a e^{-x} —, por tanto, $|(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leq (1 + (x/2))^{-2}$, y esta última es integrable. (b) = $\pi/2$ pues $|\sin t/t| \leq 1$ y $\int_0^\infty dx/(1 + x^2) = \arctan(x)$ y para (c) se hace el cambio $t = nx$. ■

Ejercicio 83.- Dadas las funciones definidas en $(0, \infty)$

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2, \quad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx,$$

demostrar que:

$$(a) f(t) + g(t) = \pi/4. \quad (b) \int_0^\infty e^{-x^2} dm = \sqrt{\pi}/2.$$

Ind. (1) $f'(t) + g'(t) = 0$. (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$. ■

Ejercicio 84.- Dada $f(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xt \, dm$, demostrar que satisface $f'(t) + 2tf(t) = 0$ y que $f(t) = (1/2)\sqrt{\pi}e^{-t^2}$.

Ind. $0 = \int_0^\infty (e^{-x^2} \sin 2xt)' = \int_0^\infty (-2x)e^{-x^2} \sin 2xt + e^{-x^2} (2t) \cos 2xt = f'(t) + 2tf(t)$. Por tanto $f(t) = f(0)e^{-t^2}$ y por el resultado anterior $f(0) = \sqrt{\pi}/2$. ■

Ejercicio 85.- Demostrar:

$$(1) \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-x^2} \, dm = (2n)! \sqrt{\pi}/4^n n!.$$

$$(2) \text{ Para } a \geq 0, \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax \, dm = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

$$(3) \text{ Para } p > 0, \int_0^1 x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x \, dm = \sum_{n=0}^\infty 1/(p+n)^2.$$

Ind. (1) Por inducción derivando $x^{2n+1} e^{-x^2}$ y utilizando el ejercicio (83).

$$(2) \cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}/(2n)!.$$

$$(3) 1/(1-x) = \sum_{n=0}^\infty x^n,$$

$$(x^{n+p} \log x^{-1})' = (n+p)x^{n+p-1} \log x^{-1} - x^{n+p-1},$$

por tanto $\int_0^1 x^{n+p-1} \log x^{-1} \, dx = 1/(p+n)^2$. ■

Ejercicio 86.- Demostrar que la función $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r \log^n x^{-1}$, para $-1 < r$ y $n \geq 0$ es Lebesgue integrable y que

$$\int_{(0,1)} x^r \log^n x^{-1} \, dm = \int_0^1 x^r \log^n x^{-1} \, dx = \frac{n!}{(1+r)^{n+1}}.$$

Ind. Por L'Hopital se tiene derivando n veces que

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{r+1} \log^n x^{-1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log^n y}{y^{r+1}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{n!}{(r+1)^n y^{r+1}} = 0.$$

y si para cada n denotamos la integral por I_n , tenemos que para $n = 0$, como $(x^{r+1})' = (r+1)x^r$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{r+1} = 0$, $I_0 = 1/(r+1)$ y por inducción se tiene el resultado pues

$$(x^{r+1} \log^n x^{-1})' = (r+1)x^r \log^n x^{-1} - x^r n \log^{n-1} x^{-1}$$

por tanto integrando y teniendo en cuenta (1)

$$I_n = \frac{n}{r+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}},$$

(observemos que los integrandos no son acotados, pero tienen integral impropia de Riemann finita y son Lebesgue integrables por el ejercicio (78), pág.10). ■

Ejercicio 87.- Demostrar que la función $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} x^k$, para $k \in \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable.

Ind. Se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} x^k = 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$, lo cual implica que la función está acotada por un N , pues es continua en $[1, \infty)$. Ahora

$$e^{-x} x^k \leq N e^{-x/2},$$

y el resultado se sigue pues la función $e^{-x/2}$ es Lebesgue integrable en $[1, \infty)$, pues es no negativa y tiene integral impropia de Riemann ya que

$$(e^{-x/2})' = -e^{-x/2}/2 \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x/2} = 2e^{-1/2}. \blacksquare$$

Ejercicio 88.- Sea $k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^r x^k dm < \infty &\Leftrightarrow -1 < k \\ \int_r^\infty x^k dm < \infty &\Leftrightarrow k < -1 \end{aligned}$$

Ind. Es una simple consecuencia de que para $0 < a < b$

$$\int_a^b x^k = \begin{cases} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, & k+1 \neq 0 \\ \log b/a, & k+1 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{k+1} = \begin{cases} \infty, & k+1 < 0 \\ 1, & k+1 = 0 \\ 0, & 0 < k+1 \end{cases}$$

y de que $\lim_{b \rightarrow \infty} \log b = \infty$ y $\lim_{a \rightarrow 0^+} \log a = -\infty$. \blacksquare

Ejercicio 89.- Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

(a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Solución.- (a) Como las proyecciones $\pi_i: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$ son continuas son $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -medibles, por tanto dados $A \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ y $B \in \mathcal{B}(\Omega_2)$,

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

y se sigue la inclusión de (a).

(b) Si \mathcal{C}_i es una base numerable de la topología \mathcal{T}_i de Ω_i ,

$$\mathcal{C} = \{U \times V : U \in \mathcal{C}_1, V \in \mathcal{C}_2\} \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

es una base numerable de la topología producto \mathcal{T} , por tanto

$$\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

y se sigue el resultado. \blacksquare

Ejercicio 92.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible.

Ind.- Basta observar que la sucesión de funciones medibles

$$f_n(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i/n, y) I_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(x),$$

verifica $f_n \rightarrow f$, pues $f_n(x, y) = f(x_n, y)$, para un $x_n = i/n$ tal que $|x_n - x| \leq 1/n$. \blacksquare

Ejercicio 93.- Demostrar que para cada $r > 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es medible la función de \mathbb{R}^n , $f(x) = m[A \cap B[x, r]]$.

Ind.- Es consecuencia de (??), pág.??, pues

$$m[A \cap B[x, r]] = m[(\mathbb{R}^n \times A \cap \{(z, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|z - y\| \leq r\})_x]. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 99.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$.

Ind. Consideremos las funciones medibles $\pi_2(x, y) = y$ y $h(x, y) = f(x)$, entonces $E = \{h = \pi_2\}$ y como $m(E_x) = 0$, $\mu \times m(E) = 0$. \blacksquare

Ejercicio 100.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s.

Ind. En los términos del ejercicio anterior $F(y) = \mu(E^y)$ y $0 = \mu \times m(E) = \int F(y) dm$. \blacksquare

Ejercicio 102.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible y $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt,$$

y que si $\mu\{f > t\} \leq e^{-t}$, entonces $\int f^p d\mu \leq \Pi(p)$.

Ind. Haciendo el cambio de variable $s = t^p$,

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty \mu\{f^p > s\} ds = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 106.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

(a) g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.

(b) Si g es λ -integrable, $|\int g d\lambda| \leq \int |g| d|\lambda|$.

(c) Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \int_E f d\mu$.

Ind. (c) Considerar una descomposición de Hahn, P, N , $f = I_P - I_N$ y $\mu = |\lambda|$. \blacksquare

Ejercicio 111.- Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A\right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^\infty$ en lugar de sumas finitas?.

Ind. Sean $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ medibles y disjuntos, tales que $\cup E_i = A$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda|(E_i) = |\lambda|(A),$$

por tanto $|\lambda|(A)$ es una cota superior para el supremo. Veamos que se alcanza, para ello sea P, N una descomposición de Hahn

$$|\lambda|(A) = \lambda^+(A) + \lambda^-(A) = |\lambda(A \cap P)| + |\lambda(A \cap N)|,$$

y el resultado se sigue pues $A \cap P, A \cap N$ es una partición de A . ■

Ejercicio 112.- Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-$, demostrar que $\lambda_i^\pm \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$.

Ind. $\lambda_i^\pm \leq \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$. ■

Ejercicio 113.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int fg d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Demuéstrese para indicadores, funciones simples, funciones no negativas y en general. ■

Ejercicio 115.- Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

Ind. Existe $g = d\nu/d\mu$, con $0 \leq g < \infty$, entonces $g+1 = d\lambda/d\mu$ y $f(g+1) = d\nu/d\mu$, por tanto $g = f(g+1)$ c.s. (μ) y $0 \leq f = g/(g+1) < 1$ c.s. (μ) y $g = f/(1-f)$ c.s. (μ) .

Ejercicio 116.- Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

- (a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.
- (b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.
- (c) Existe una función medible $g: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

Ind. (a) \Leftrightarrow (b) es trivial.

(a) \Rightarrow (c) Por el Teorema de Radon-Nikodym $0 \leq d\lambda/d\mu < \infty$ y por el ejercicio anterior

$$1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu},$$

por tanto $d\lambda/d\mu$ es invertible c.s. y por tanto positiva c.s.

(c) \Rightarrow (a) Como existe g^{-1} y es no negativa tiene integral y si consideramos $\nu(A) = \int_A g^{-1} d\lambda$, tendremos que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = g^{-1}g = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu = \mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 117.- Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ .

Ind. Sea A_n una partición de Ω , con $0 < \mu(A_n) < \infty$ (observemos que los de medida nula los podemos unir a cualquier otro A_n de medida positiva) y sea

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

entonces el resultado se sigue del ejercicio anterior para $\lambda(A) = \int_A g d\mu$. ■

Ejercicio 118.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s.

Ind. Hay que demostrar que $\mu[f^{-1}(S^c)] = 0$, ahora bien como S^c es abierto es una unión numerable de discos cerrados y basta demostrar que para cualquiera de ellos $D[z, r]$, $\mu[f^{-1}(D[z, r])] = 0$. Supongamos que no, que $E = f^{-1}(D[z, r])$, tiene $\mu(E) > 0$, entonces llegamos a un absurdo, pues

$$r < \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - z \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f - z) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - z| d\mu \leq r. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 119.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que $\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$, es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Ind. Veamos que su complementario es abierto. Sea $\mathcal{M}_\mu = \{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$ y $\lambda \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(A) = 0$ y $\lambda(A) \neq 0$, entonces para $0 < r \leq |\lambda(A)|$ y $\|\nu - \lambda\| < r$, $\nu \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, pues

$$|\nu(A) - \lambda(A)| \leq \|\nu - \lambda\| < r,$$

y por tanto $\nu(A) \neq 0$. ■

Ejercicio 120.- Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

Solución.- Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = \mu_1 \times \mu_2(E) = 0$, entonces como $\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1$, $\mu_2(E_x) = 0$ c.s. μ_1 , por tanto c.s. ν_1 y $\nu_2(E_x) = 0$ c.s. ν_1 , por tanto $\nu(E) = \nu_1 \times \nu_2(E) = \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = 0$.

Ahora si $f = d\nu_1/d\mu_1$, $g = d\nu_2/d\mu_2$ y $h(x, y) = f(x)g(y)$, entonces como $h \geq 0$, tiene integral y

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) f d\mu_1 \\ &= \int \left(\int_{E_x} h_x d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_E h d\mu. \end{aligned}$$

Ejercicio 123.- Demostrar que si λ_1 y λ_2 son complejas y $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

Ind. Existe un medible A tal que para cada medible B , $\lambda_1(B) = \lambda_1(B \cap A)$ y $\lambda_2(B) = \lambda_2(B \cap A^c)$, además

$$\begin{aligned} |\lambda_1 + \lambda_2|(B) &= |\lambda_1 + \lambda_2|(B \cap A) + |\lambda_1 + \lambda_2|(B \cap A^c) \\ &= |\lambda_1|(B \cap A) + |\lambda_2|(B \cap A^c) = |\lambda_1|(B) + |\lambda_2|(B), \end{aligned}$$

pues si $A_i \subset B \cap A$, $|\lambda_1(A_i) + \lambda_2(A_i)| = |\lambda_1(A_i)|$ y si $A_i \subset B \cap A^c$, $|\lambda_1(A_i) + \lambda_2(A_i)| = |\lambda_2(A_i)|$. Térmelo el lector. ■

Ejercicio 124.- Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ind. Consideremos la aplicación lineal

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix},$$

que para $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, y $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $T(B) = E$, por tanto

$$m[E] = m[T(B)] = |\det T| m[B] = ab\pi. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 127.- (a) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.

(b) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi rh$.

Ind. Basta demostrar (b). La proyección del casquete es el círculo de radio $k = \sqrt{2rh - h^2}$, pues $k^2 + (r - h)^2 = r^2$, y su área es para $z(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ y $U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$

$$\int_U \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = r \int_U \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

y por el teorema de cambio de variable para $F = (f_1, f_2): V = (0, k) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, como $F(V) = U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$ y $J(DF_{(\rho, \theta)}) = |f_{1\rho}f_{2\theta} - f_{1\theta}f_{2\rho}| = \rho$,

$$r \int_{F(V)} \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_V \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = -2\pi r \left[\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_0^k = 2\pi r h. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 128.- Demostrar que para una rotación o una traslación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B satisface $T[C(B)] = C[T(B)]$.

Ind. Una traslación o una rotación T , conserva las medidas de Hausdorff, $(T_*(H_k) = H_k)$, por tanto

$$x_i[C(T(B))] = \frac{\int_{T(B)} x_i dH_k}{H_k[T(B)]} = \frac{\int_B x_i \circ T dH_k}{H_k(B)},$$

y si $T(x) = x + a$ es una traslación, $x_i \circ T = x_i + a_i$ y $x_i[C(T(B))] = x_i[C(B)] + a_i = x_i[T(C(B))]$; y si $T(p) = (\sum a_{ij} p_j)$ es una rotación, $x_i \circ T = \sum a_{ij} x_j$ y $x_i[C(T(B))] = \sum a_{ij} x_j[C(B)]$, por tanto $C[T(B)] = T[C(B)]$. ■

Ejercicio 130.- Dado en el plano un triángulo T_2 de vértices ABC , consideremos los tres conjuntos: T_2 (la envolvente convexa de los vértices), $T_1 = \partial T_2$ formado por los tres lados y $T_0 = \{A, B, C\}$ formado por los tres vértices. Calcular el centro de masas de cada uno. ¿coinciden?

Ind. Por el ejercicio (128), pág.17, podemos suponer que nuestro triángulo tiene coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (0, c)$. En tal caso (si $b_1 > 0$) la abscisa del centro de masa de T_2 es

$$\begin{aligned} \frac{\int_{T_2} x dH_2}{H_2(T_2)} &= \frac{\int_{T_2} x dm_2}{m_2(T_2)} = \frac{\int_0^{b_1} \int_{x \frac{b_2}{b_1}}^{c+x \frac{b_2-c}{b_1}} x dx dy}{b_1 c/2} \\ &= \frac{\int_0^{b_1} (c - x \frac{c}{b_1}) x dx}{b_1 c/2} = b_1 - 2b_1/3 = b_1/3 = x(\frac{A+B+C}{3}) \end{aligned}$$

un cálculo similar para la ordenada (ó dado que hay rotaciones que nos intercambian las coordenadas) se tiene que el centro de masa de T_2 es el baricentro del triángulo

$$\frac{A+B+C}{3}.$$

Calculemos ahora el centro de masa de un segmento PQ de extremos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, para x_1 y x_2 las coordenadas, $\sigma(t) = tQ + (1-t)P$ y $|\sigma'(t)| = |Q - P|$

$$\begin{aligned} \frac{\int_{PQ} x_i dH_1}{H_1(PQ)} &= \frac{\int_0^1 (tq_i + (1-t)p_i) |Q - P| dH_1}{H_1(PQ)} = \frac{\int_0^1 (tq_i + (1-t)p_i) |Q - P| dt}{m_1(PQ)} \\ &= \int_0^1 (tq_i + (1-t)p_i) dt = \frac{p_i + q_i}{2}, \end{aligned}$$

es decir que el centro de masa de PQ es $(P + Q)/2$.

Veamos ahora el centro de masa de T_1 el cual es unión de los segmentos AB , BC y CA , con $H_1(A) = H_1(B) = H_1(C) = 0$, por tanto se sigue del ejercicio (129), pág.18, que para $|A - C| = c$, $|A - B| = d$ y $|B - C| = e$

$$C(T_1) = \frac{c}{c+d+e} \frac{A+C}{2} + \frac{d}{c+d+e} \frac{A+B}{2} + \frac{e}{c+d+e} \frac{B+C}{2}.$$

el cual es el incentro del triángulo formado por los puntos medios de los lados de nuestro triángulo.

Por último el de T_0 también es el baricentro, pues

$$\frac{\int_{T_0} x_i dH_0}{H_0(T_0)} = \frac{x_i(A) + x_i(B) + x_i(C)}{3} = x_i \left(\frac{A+B+C}{3} \right).$$

En definitiva $C(T_2) = C(T_0) = (A+B+C)/3$ y $C(T_1)$ es distinto. ■

Ejercicio 134.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}.$$

Solución.- Veamos que K^c es abierto. Sea $z \in K^c$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu_f[B(z, \epsilon)] = 0$, pero entonces $B(z, \epsilon) \subset K^c$, pues la bola es abierta y dado $z' \in B(z, \epsilon)$, existe un $\delta > 0$, tal que $B(z', \delta) \subset B(z, \epsilon)$, por tanto $\mu_f[B(z', \delta)] = 0$ y $z' \in K^c$. Ahora veamos que K es acotado, para ello veamos que si $z \in K$, $|z| \leq \|f\|_\infty$ ó equivalentemente que si $\|f\|_\infty < |z|$, entonces $z \notin K$, lo cual es obvio pues z está en el abierto $B[0, \|f\|_\infty]^c$ y por tanto existe un $\epsilon > 0$ tal que

$B(z, \epsilon) \subset B[0, \|f\|_\infty]^c \Rightarrow \mu_f(B(z, \epsilon)) \leq \mu_f(B[0, \|f\|_\infty]^c) = \mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0$,
(por ser el espacio σ -finito), por tanto $z \in K^c$.

Ahora veamos que el supremo es $\|f\|_\infty$. Para ello hemos visto la desigualdad " \leq ", veamos la otra, para lo cual basta demostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay puntos de K en la rosquilla compacta

$$C = \{z : \|f\|_\infty - \epsilon \leq |z| \leq \|f\|_\infty\}.$$

En caso contrario para cada $z \in C$ existiría un $\epsilon_z > 0$, tal que $\mu_f(B(z, \epsilon_z)) = 0$ y por compacidad C se rellena con una colección finita de estas bolas y $\mu_f(C) = 0$, por tanto

$$\mu\{|f| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = \mu_f\{|z| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = 0$$

lo cual es absurdo. ■

Ejercicio 135.- Demostrar que si $0 < r < p < s \leq \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$.

Solución.- Sea $A = \{|f| \leq 1\}$, entonces si $f \in L_r \cap L_s$, y $s < \infty$

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &= \int_{A^c} |f|^p d\mu + \int_A |f|^p d\mu \\ &\leq \int_{A^c} |f|^s d\mu + \int_A |f|^r d\mu \leq \int |f|^s d\mu + \int |f|^r d\mu < \infty, \end{aligned}$$

y si $s = \infty$, $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.s. (ver ejercicio (132)) y $\int_{A^c} |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \mu(A^c) < \infty$, pues $\mu(A^c) < \infty$ por la desigualdad de Tchebycheff. Para la segunda inclusión, $f = I_A f + I_{A^c} f \in L_p$, $I_A f \in L_s$, $I_{A^c} f \in L_r$. ■

Ejercicio 136.- Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

Solución.- Sean $r \leq a < b \leq s$ y $t \in [0, 1]$, entonces basta demostrar que

$$e^{\phi[ta+(1-t)b]} \leq e^{t\phi(a)+(1-t)\phi(b)},$$

es decir que, para $c = ta + (1-t)b$,

$$\int |f|^c d\mu \leq \left(\int |f|^a d\mu \right)^t \left(\int |f|^b d\mu \right)^{1-t},$$

y esto es consecuencia de la *Desigualdad de Holder*, pues para $p = 1/t$ y $q = 1/(1-t)$, obviamente conjugados y las funciones $g^p = |f|^a$, $h^q = |f|^b$, tendremos que $g \in L_p$, $h \in L_q$, y

$$gh = |f|^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}} = |f|^{ta + (1-t)b} = |f|^c,$$

además tomando ahora $a = r$ y $b = s$ y un valor intermedio $c = tr + (1-t)s$, tendremos que

$$\begin{aligned} \|f\|_c &= \left(\int |f|^c d\mu \right)^{1/c} \leq \left(\int |f|^r d\mu \right)^{t/c} \left(\int |f|^s d\mu \right)^{(1-t)/c} \\ &= \|f\|_r^{tr/c} \|f\|_s^{(1-t)s/c} \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 137.- Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo sii para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente.}$$

Solución.- \Rightarrow) Sea $\sum \|x_n\| < \infty$, entonces $v_n = \sum_{i=1}^n x_i$ es de Cauchy y tiene límite por ser el espacio completo.

\Leftarrow) Sea v_n de Cauchy y y_n una subsucesión suya tal que $\|y_{n+1} - y_n\| \leq 2^{-n}$, entonces para $x_n = y_{n+1} - y_n$, $\sum \|x_n\|$ es convergente, por tanto también es convergente $\sum x_n = x$ y como $y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i$, tiene límite así como v_n . \blacksquare

Ejercicio 139.- Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Ind. Por la desigualdad $(a+b)^r < a^r + b^r$, para $0 < r < 1$ y $a, b > 0$ y por la concavidad de x^p

$$\frac{\int |f+g|^p d\mu}{2} \leq \frac{\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu}{2} \leq \left(\frac{(\int |f|^p)^{1/p} + (\int |g|^p)^{1/p}}{2} \right)^p. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 140.- Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$.

Solución.- Si $f \in L_p \cap L_\infty$, entonces

$$\{|f| > 0\} \text{ es } \sigma\text{-finito y } \{|f| > \|f\|_\infty\} \text{ es loc. nulo,}$$

por tanto su intersección $A = \{|f| > \|f\|_\infty\}$ es nulo y para $r \geq p$

$$\begin{aligned} \|f\|_r &= \left(\int |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} = \left(\int_{A^c} |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} \\ &\leq \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \left(\int_{A^c} |f|^p d\mu \right)^{1/r} = \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \|f\|_p^{p/r} < \infty, \end{aligned}$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$ se sigue que $\limsup \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$. Ahora para cada $\epsilon > 0$, $B = \{|f| > \|f\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo, por tanto $\mu(B) > 0$ y

$$\mu(B)^{1/r} (\|f\|_\infty - \epsilon) \leq \left(\int_B |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

por lo que $\mu(B) < \infty$ y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\|f\|_\infty - \epsilon \leq \liminf \|f\|_r,$$

y el resultado se sigue. Si por el contrario $\|f\|_\infty = \infty$, entonces para todo n , $\mu\{|f| > n\} > 0$ y

$$\mu\{|f| > n\}^{1/r} n \leq \left(\int_{\{|f| > n\}} |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que $n \leq \liminf \|f\|_r$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 141.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

Ind. Sea $f \in L_s$, entonces para p y q conjugados, con $1 < p = s/r$, $f^r \in L_p$ y como $1 \in L_q$, tendremos por la *Desigualdad de Holder* que $f^r \cdot 1 = f^r \in L_1$, es decir $f \in L_r$ y además

$$\int |f|^r \leq \|f^r\|_p \cdot \|1\|_q = \left(\int |f|^{rp} d\mu \right)^{1/p} \mu(\Omega)^{1/q},$$

el resto es simple. ■

Ejercicio 142.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \rightarrow 0$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p \leq \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Solución.- (a) Observemos que $f_n(x)$ no converge a $f(x)$ si existe un $\epsilon > 0$, tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, hay un $n \geq N$, para el que $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$, por lo tanto

$$0 = \mu\{f_n \not\rightarrow f\} = \mu\{\cup_{\epsilon > 0} \cap_{N=1}^\infty \cup_{n=N}^\infty |f_n - f| > \epsilon\},$$

y para cada $\epsilon > 0$ y $A_n(\epsilon) = \{|f_n - f| > \epsilon\}$, como la medida es finita se tiene (ver ejercicio 15)

$$\limsup \mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \mu\{\limsup A_n(\epsilon)\} = 0 \Rightarrow \lim \mu\{A_n(\epsilon)\} = 0.$$

(b) Para $p < \infty$, por la desigualdad de Tchebycheff

$$\mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\epsilon^p} \rightarrow 0,$$

y para $p = \infty$, dado el $\epsilon > 0$, basta considerar N tal que para $n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$, pues

$$\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \leq \mu\{|f_n - f| > \|f_n - f\|_\infty\} = 0.$$

Ejercicio 143.- Demostrar la **Desigualdad de Jensen**, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces $\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu$.

Solución.- Toda función convexa tiene la propiedad de que para todo $x_0 \in (a, b)$ existe una función afín, $h(x) = px + c$, tal que $h(x) \leq \varphi(x)$ y $h(x_0) = \varphi(x_0)$. Tomemos

$x_0 = \int f d\mu$, y veamos en primer lugar que $x_0 \in (a, b)$, para ello observemos que para $a = -\infty$, como f es integrable, $a < x_0$, por lo que también si $b = \infty$ es $x_0 < b$. En el caso finito, pongamos $b < \infty$, si fuera $x_0 = b$, como $f < b$, $b - f > 0$ y tiene integral nula, lo cual implicaría que $b - f = 0$ c.s., lo cual es absurdo. Ahora el resultado es evidente pues tomando la función h correspondiente tendremos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(\int f d\mu\right) &= \varphi(x_0) = h(x_0) = px_0 + c = p\left(\int f d\mu\right) + c \\ &= \int (pf + c) d\mu = \int h[f] d\mu \leq \int \varphi[f] d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 144.- Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces $(\int f d\mu) \cdot (\int g d\mu) \geq 1$.

Solución.- $1/f \leq g$ y por la *Desigualdad de Jensen*, para $\varphi(x) = 1/x$,

$$\frac{1}{\int f d\mu} \leq \int \frac{1}{f} d\mu \leq \int g d\mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 145.- Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$.

Solución.- Para $s = \infty$ es obvio, pues si x_n es tal que $\sum |x_n|^r < \infty$, en particular tendremos que $|x_n|^r \leq \sum |x_n|^r < \infty$ y por tanto $|x_n|$ está acotada. Sea ahora $s < \infty$, como sólo hay un conjunto finito F de n para los que $|x_n| \geq 1$, pues en caso contrario $\sum |x_n|^r \geq \sum_F |x_n|^r = \infty$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s = \sum_F |x_n|^s + \sum_{\mathbb{N}-F} |x_n|^s \leq \sum_F |x_n|^s + \sum_{\mathbb{N}-F} |x_n|^r < \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 146.- Sea $g \in L_{\infty}$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_{\infty}$.

Solución.- Si $f \in L_p$ y $g \in L_{\infty}$, entonces $|fg| \leq |f|\|g\|_{\infty}$ c.s., por tanto $|fg|^p \leq |f|^p \|g\|_{\infty}^p$ c.s. y $\|G(f)\|_p \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_p$, por tanto G es acotada y $\|G\| \leq \|g\|_{\infty}$, veamos la otra desigualdad, para ello sea $\epsilon > 0$, entonces $\{|g| > \|g\|_{\infty} - \epsilon\}$ no es localmente nulo y tiene un subconjunto medible A , con $0 < \mu(A) < \infty$, por tanto $f = I_A \in L_p$, $\|f\|_p = \mu(A)^{1/p}$ y

$$(\|g\|_{\infty} - \epsilon)\mu(A)^{1/p} \leq \left(\int |fg|^p\right)^{1/p} = \|G(f)\|_p \leq \|G\| \|f\|_p.$$