SISTEMAS LINEALES DINÁMICOS - 543214-3
Pauta EV2: Certamen 2 - 30 de junio de 2023

Universidad de Concepción, Facultad de Ingeniería, Depto. de Ingeniería Eléctrica

Instrucciones

1. Para esta evaluación se tienen 4 hojas de carta y un cuadernillo. En las hojas 1 y 2 se encuentran los enunciados de las preguntas a resolver. En la hoja 3 se encuentra una plantilla para resolver el Problema 3.a, la cual debe entregar junto con el cuadernillo. En la hoja 4 se tiene un Formulario de referencia.

2. Responda y **justifique sus respuestas cuando se indique** (Nota: la justificación vale la mitad del puntaje de cada pregunta que la requiera explícitamente).

Problema 1 (2.0 puntos)

a) (0.4 pts.) Obtenga la F. de T. del sistema descrito por:

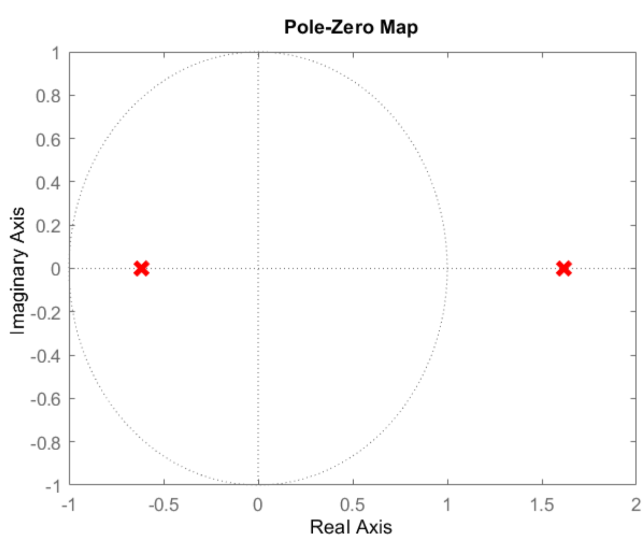
$$x(kT+T) = Ax(kT) + Bu(kT), \quad y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = [0]$.

$h(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{z^2 - z - 1}$

b) (0.4 pts.) Para el sistema de la Pregunta 1.a. Obtenga los polos, ceros y ganancia dc. Grafique el mapa de polos y ceros del sistema.

Polos: raíces de $z^2 - z - 1 \implies z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Ceros: no tiene.
Ganancia dc: $h(1) = -1$ (inestable).



c) (0.4 pts.) Indique qué significado físico tienen los parámetros ξ, ω_n y k_p en un sistema de segundo orden, y qué significado físico tiene el parámetro τ en un sistema de primer orden.

ξ: factor de amortiguamiento del sistema.
ω_n: frecuencia natural (de oscilación) del sistema.
k_p: ganancia proporcional (factor en amplitud) del sistema.
τ: constante de tiempo (tiempo en alcanzar 63.2 % del valor final en S.S. para entrada escalón).

d) (0.4 pts.) Indique cuándo es posible desestimar una dinámica, simplificando el orden de un sistema. Justifique.

Es posible desestimar una dinámica cuando se tienen polos muy separados entre sí (con dinámicas muy distintas en término de sus velocidades). Por ejemplo, para el sistema de segundo orden $h(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)} = \frac{1/100}{(s+1)(s/100+1)} \approx \frac{1/100}{s+1}$ siendo entonces aproximado por el sistema de primer orden $h(s) = \frac{1/100}{s+1}$.

e) (0.4 pts.) Indique una similitud y una diferencia entre función de transferencia y respuesta a impulso. Justifique.

Una similitud es que ambos permiten encontrar la respuesta de un sistema LTI a entrada arbitraria. La función de transferencia $h(s)$ es tal que $y(s) = h(s)u(s)$, mientras que la respuesta a impulso $h(t)$ es tal que $y(t) = h(t) * u(t)$. Esto se cumple ya que $h(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Una diferencia es el dominio en el que se define cada función. Mientras la función de transferencia está definida en el dominio de la frecuencia s, la respuesta a impulso está definida en el dominio del tiempo t.

Problema 2 (2.0 puntos)

a) (0.8 pts.) Para $h(z) = \dfrac{1}{z^2 + 3z + 2}$ determine usando el criterio de Routh-Hurwitz, los valores de k tal que la F. de T. dada por $\dfrac{kh(z)}{1 + kh(z)}$ representa un sistema estable.

$$g(z) = \frac{kh(z)}{1 + kh(z)} = \frac{k}{z^2 + 3z + 2 + k}$$

Luego, $d(z) = z^2 + 3z + 2 + k = 0$. Haciendo el reemplazo $z = \dfrac{1+r}{1-r}$

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 + 3\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + 2 + k = 0$$
$$\implies (1+r)^2 + 3(1+r)(1-r) + (2+k)(1-r)^2 = 0$$
$$\implies kr^2 + (-2-2k)r + 6 + k = 0$$

Luego,

$$\begin{array}{c|cc|}
r^2 & k & 6+k \\
r^1 & -2-2k & 0 \\
r^0 & 6+k & 0
\end{array}$$

Para que el sistema sea estable se deben conservar los signos en la columna pivote, es decir, se debe cumplir:

$k > 0 \wedge -2(k+1) > 0 \wedge 6 + k > 0$

Es decir:

$k > 0 \wedge k < -1 \wedge k > -6$

De lo anterior se concluye que no existe k tal que $g(z)$ representa un sistema estable.

b) (0.6 pts.) Dé un ejemplo de una F. de T. discreta que sea inestable y un ejemplo de una F. de T. discreta que sea marginalmente estable. Justifique.

F. de T. discreta inestable: $h_1(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$. Es inestable porque tiene un polo con módulo igual a 2 (mayor a 1).

F. de T. discreta marginalmente estable: $h_2(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+0{,}5)}$. Es marginalmente estable porque tiene un solo polo con módulo igual a 1, y no tiene polos con módulo mayor a 1.

c) (0.6 pts.) Dé un ejemplo de un sistema que sea estable entrada/salida, pero inestable internamente. Justifique.

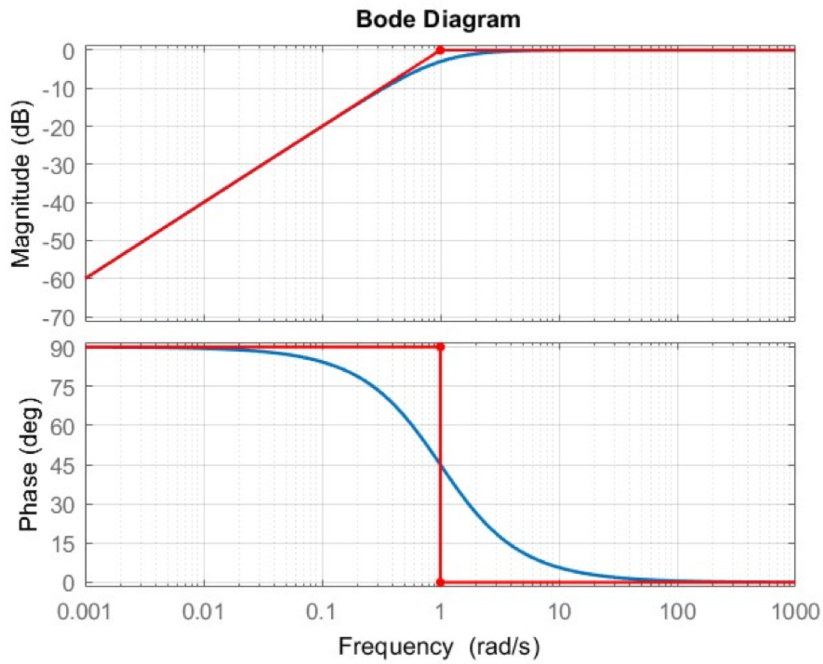
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

El sistema es estable entrada/salida ya que: $h(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \dfrac{1}{s+1}$, por lo que tiene todos sus polos con parte real negativa.

El sistema es inestable internamente ya que: $det(\lambda I - A) = 0 \implies (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, por lo que se tiene un valor propio con parte real positiva.

Problema 3 (2.0 puntos)

a) (0.6 pts.) Dibuje el D. de B. asintótico y bosqueje el D. de B. exacto para la F. de T. $h(s) = \dfrac{s}{s+1}$



b) (0.4 pts.) A partir del D. de B. asintótico de Fig. 1. Obtenga la expresión de la salida en estado estacionario para la entrada $sen(0{,}001t) + 2sen(300t)$. Justifique.

$y_{ss}(t) = 10^4 sen(0{,}001t - 90°) + 2 \cdot 10^{-3} sen(300t - 90°)$

Del DdeB de magnitud se puede obtener la atenuación/amplificación para cada frecuencia. En particular, para $\omega = 0{,}001$ $[rad/s]$ se tienen 80 $[dB]$ de magnitud.

Es decir: $20log(|h(0{,}001)|) = 80 \implies |h(0{,}001)| = 10^{80/20} = 10^4$.

Para $\omega = 300$ $[rad/s]$ se tienen -60 $[dB]$ de magnitud.

Es decir: $20log(|h(300)|) = -60 \implies |h(300)| = 10^{-60/20} = 10^{-3}$.

Los desfases se obtienen directamente desde el DdeB de fase. Para ambas frecuencias, el desfase es de $-90°$.

c) (0.6 pts.) A partir del D. de B. asintótico de Fig. 1. Determine la F. de T. que tiene esta respuesta en frecuencia. Justifique.

$h(s) = \dfrac{k(s+3)}{s(s+0{,}1)}$

Del DdeB de fase se observa:

Fase inicial de $-90° \implies$ polo en 0.

Caída de $90°$ en $\omega = 0{,}1$ $[rad/s] \implies$ polo en -0.1.

Subida de $90°$ en $\omega = 3$ $[rad/s] \implies$ cero en -3.

Del DdeB de magnitud: $20log(|h(0{,}001)|) = 80 \implies |h(0{,}001)| = 10^{80/20} = 10^4$.

Además: $10^4 = |h(0{,}001)| = \dfrac{k|0{,}001j+3|}{|0{,}001j| \cdot |0{,}001j+0{,}1|} \approx \dfrac{3k}{0{,}001 \cdot 0{,}1} \implies k = 1/3$

d) (0.4 pts.) Indique cómo se altera el D. de B. de un sistema si se le agrega un retardo $e^{-t_d s}$. Justifique.

Solo se modifica el DdeB de fase, mientras que el DdeB de magnitud se mantiene igual.

La T.F. de un retardo t_d es:

$e^{-j\omega t_d} = cos(\omega t_d) - jsen(\omega t_d)$

Luego,

$|e^{-j\omega t_d}| = 1.$

$arg(e^{-j\omega t_d}) = tan^{-1}\left\{-\dfrac{sen(\omega t_d)}{cos(\omega t_d)}\right\} = -\omega t_d.$

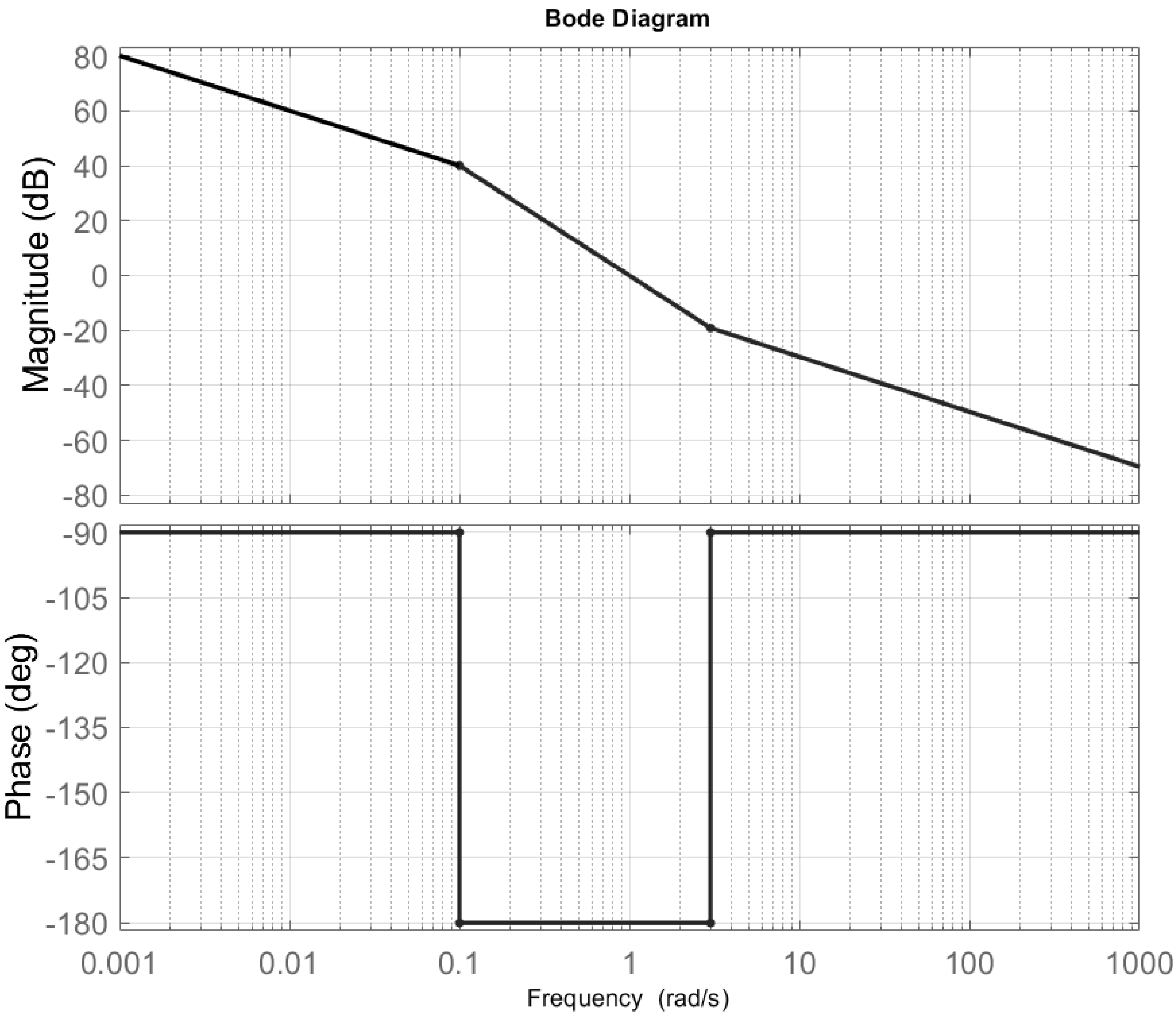


Fig. 1: Diagrama de Bode Asintótico para la Pregunta 3.b. y la Pregunta 3.c.