Espacios invariantes. Núcleos iterados. Forma Canónica de Jordan

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

July 10, 2020

Espacios invariantes

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), $W \subseteq V$ un subespacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que W es invariante con respecto a T si $T(W) \subseteq W$, i.e. $T(W)$ es subespacio vectorial de W.

Ejemplos:

1. $W = \{\theta\}$ y $W = V$ son espacios invariantes (llamados triviales) de cualquier $T \in \mathcal{L}(V)$, pues $T(\{\theta\}) = \{\theta\}$ y $T(V) \subseteq V$.
2. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con espectro no vacío. Entonces $\forall\, \lambda \in \sigma(T) : T(S_\lambda) \subseteq S_\lambda$, ya que $\forall\, v \in S_\lambda : T(v) = \lambda\, v \Rightarrow T(v) \in S_\lambda$.
3. Si $\{W_j\}_{j=1}^m$ es una familia de subespacios vectoriales de V, ortogonales dos a dos, entonces $\forall\, j \in \{1, ..., m\} : \mathrm{Proj}_{W_j}(W_j) = W_j$, por lo que para cualquier $j \in \{1, ..., m\}$, W_j es invariante con respecto a Proj_{W_j}.

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, W un subespacio vectorial de V, B_W una base de W, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Luego W es invariante con respecto a T si y sólo si $T(B_W) \subseteq W$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Hipótesis: $T(W) \subseteq W$. Como $B_W \subseteq W$, se tiene que $T(B_W) \subseteq T(W) \subseteq W$, y se concluye.

$(\Leftarrow)$ Hipótesis: $T(B_W) \subseteq W$. Sea $x \in T(W)$. Esto implica que $\exists\, z \in W \,:\, T(z) = x$. En vista que B_W es una base de W, $\exists\, \{w_j\}_{j=1}^{m} \subseteq B_W$, $\exists\, \{\alpha_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathbb{K}$ tales que $z = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, w_j$. Esto conduce a afirmar que $x = T(z) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, T(w_j) \in W$, pues W es subespacio vectorial de V. De esta forma, como $x \in T(W)$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $T(W) \subseteq W$, i.e. W es invariante con respecto a T.

Recordamos....

Definición formal de Suma directa generalizada: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Decimos que $\{S_j\}_{j=1}^m$ forman una suma directa del subespacio suma $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$ si

$$(\forall\, u_1 \in S_1) \ldots (\forall\, u_m \in S_m) \;:\; \left(\sum_{j=1}^{m} u_j = \theta \Rightarrow \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \;:\; u_j = \theta \right) .$$

En tal caso, se denota por $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.

Lema importante: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.
2. Todo vector de S puede expresarse de manera única como elemento de $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$.

   Es decir

$$\forall\, u \in S \;:\; (\exists!\, u_1 \in S_1) \ldots (\exists!\, u_m \in S_m) \;:\; u = \sum_{j=1}^{m} u_j .$$

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una familia $\{W_j\}_{j=1}^m$ de subespacios vectoriales de V, se llama una descomposición invariante de V con respecto a $T \in \mathcal{L}(V)$ si

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \; : \; T(W_j) \subseteq W_j \quad \wedge \quad V = \bigoplus_{j=1}^{m} W_j \, .$$

Ejemplo: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V)$ diagonalizable, con $\sigma(T) = \{\lambda_j\}_{j=1}^m$ (conjunto de valores propios distintos). Entonces $\{S_{\lambda_j}\}_{j=1}^m$ es una descomposición invariante de V con respecto a T. En otras palabras:

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \; : \; T(S_{\lambda_j}) \subseteq S_{\lambda_j} \quad \wedge \quad V = \bigoplus_{j=1}^{m} S_{\lambda_j} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Ker}(T - \lambda_j \tilde{I}) \, .$$

¿Qué pasa si T no es diagonalizable?

Veremos que **siempre** es posible determinar una descomposición invariante no trivial de V con respecto a T.

Ejemplo: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Consideremos W un subespacio vectorial de V de dimensión uno, tal que W es invariante con respecto a T. Caracterizar W.

Sea $v \in V \backslash \{\theta\}$ tal que $W = \langle \{v\} \rangle$. Como $T(W) \subseteq W$, resulta que $T(v) \in W$. Esto implica que $\exists \, \alpha \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \alpha \, v$, lo cual nos dice que v es vector propio de T asociado a α. En consecuencia $W = S_\alpha$, i.e. W es un subespacio propio de T.

Ejemplo: Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) := (2x + y, 2y)$. Determine los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ que son invariantes con respecto a T.

Desarrollo: Si W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, de dimensión uno, invariante con respecto a T, entonces por lo anterior, W es un subespacio propio de T, de dimensión uno. Esto motiva calcular los valores y vectores propios de T. Consideremos la base canónica $B := \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. Luego, la matriz asociada de T con respecto a B es $[T]_B^B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. De aquí se deduce que $\sigma(T) = \sigma([T]_B^B) = \{2\}$. El espacio propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$S_2 := \mathrm{Ker}([T]_B^B - 2I) = \cdots = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle ,$$

el cual es de dimensión uno. En consecuencia, $W := \langle\{(1, 0)\}\rangle$ es el único subespacio invariante de $\mathbb{R}^2$ con respecto a T, de dimensión uno. Por lo tanto, los subespacios invariantes de $\mathbb{R}^2$ con respecto a T son $\{(0, 0)\}$, $W = \langle\{(1, 0)\}\rangle$ y $V := \mathbb{R}^2$.

Observación: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponga que $\{W_j\}_{j=1}^m$ es una descomposición de V con respecto a T. Entonces, puede probarse que existe una base B de V tal que $[T]_B^B$ es una matriz diagonal por bloques.

Definición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y $\lambda \in \sigma(A)$. Se define el núcleo iterado de A con respecto a λ, al subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{n\times 1}$

$$E_j(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Convención: $E_0(\lambda) := \mathrm{Ker}(I_n) = \{\theta\}$. Nótese que $E_1(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = S_\lambda$.

Propiedades (elementales) de los núcleos iterados: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces

1. $\forall j \in \mathbb{N} : E_j(\lambda) \subseteq E_{j+1}(\lambda)$.
2. Si para algún $l \in \mathbb{N}$, $E_l(\lambda) = E_{l+1}(\lambda)$, entonces $\forall m \geq l : E_m(\lambda) = E_l(\lambda)$.
3. $\forall j \in \mathbb{N} : E_j(\lambda)$ es invariante con respecto a A (i.e. $\forall v \in E_j(\lambda) : A v \in E_j(\lambda)$).

Demostración 1): Sea $j \in \mathbb{N}$, y $v \in E_j(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^j$. Esto significa que

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_n)^j v = \theta &\Rightarrow (A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^j v = (A - \lambda I_n)\theta = \theta\\ &\Rightarrow (A - \lambda I_n)^{j+1} v = \theta \quad \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^{j+1} =: E_{j+1}(\lambda).\end{aligned}$$

Así se concluye que $\forall j \in \mathbb{N} : E_j(\lambda) \subseteq E_{j+1}(\lambda)$.

Demostración 2): Probemos que $E_{l+1}(\lambda) = E_{l+2}(\lambda)$, por doble inclusión. Por la propiedad 1), tenemos que $E_{l+1}(\lambda) \subseteq E_{l+2}(\lambda)$.
Resta probar entonces que $E_{l+2}(\lambda) \subseteq E_{l+1}(\lambda)$. Sea $v \in E_{l+2}(\lambda)$. Esto significa que

$$(A - \lambda I_n)^{l+2} v = \theta \quad \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^{l+1} \underbrace{(A - \lambda I_n) v}_{=:\, w} = \theta .$$

Esto motiva introducir $w := (A - \lambda I_n) v \in E_{l+1}(\lambda) = E_l(\lambda)$, por hipótesis. Esto implica que $(A - \lambda I_n)^l w = \theta$, es decir $(A - \lambda I_n)^{l+1} v = \theta$, de donde se infiere que $v \in E_{l+1}(\lambda)$. De esta manera se establece que $E_{l+2}(\lambda) \subseteq E_{l+1}(\lambda)$, y por la doble inclusión se concluye que $E_{l+2}(\lambda) = E_{l+1}(\lambda) = E_l(\lambda)$.
Finalmente, aplicando el Principio de Inducción Matemática (SE DEJA AL LECTOR) se demuestra que $\forall\, k \in \mathbb{N} : E_{l+k}(\lambda) = E_l(\lambda)$, y concluimos la demostración.

Demostración 3): Sea $j \in \mathbb{N}$. Hay que probar que $\forall v \in E_j(\lambda) : A\, v \in E_j(\lambda)$.
Sea $v \in E_j(\lambda)$. Tenemos $A\, v = (A - \lambda I_n) v + \lambda\, v$, de donde para concluir el resultado sólo necesitamos probar que $(A - \lambda I_n) v \in E_j(\lambda)$. En efecto,

$$(A - \lambda I_n)^j (A - \lambda I_n) v = (A - \lambda I_n)^{j+1} v = (A - \lambda I_n) \underbrace{(A - \lambda I_n)^j v}_{=\theta} = \theta ,$$

de donde se infiere que $(A - \lambda I_n) v \in E_j(\lambda)$, y por tanto
$A\, v = (A - \lambda I_n) v + \lambda\, v \in E_j(\lambda)$.
De esta manera, se concluye que $\forall\, j \in \mathbb{N} : E_j(\lambda)$ es invariante.

Otras propiedades de los núcleos iterados

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces

4) $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, \dim(E_{j+1}(\lambda)) - \dim(E_j(\lambda)) \leq \dim(E_j(\lambda)) - \dim(E_{j-1}(\lambda))$.

5) Sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$. Entonces, $\forall\, \{j_1\,, ...\,, j_k\} \subseteq \mathbb{N} \,:\, E_{j_1}(\lambda_1) \oplus \,...\, \oplus E_{j_k}(\lambda_k)$, i.e.
$$\forall\, l\,, m \in \{1, ..., k\}\,, l \neq m \,:\, E_{j_l}(\lambda_l) \cap E_{j_m}(\lambda_m) = \{\theta\}\,.$$

6) La dimensión máxima de los núcleos iterados de A con respecto a un valor propio λ, es la multiplicidad algebraica m_λ de λ, i.e. $\forall\, \lambda \in \sigma(A) \,:\, \exists\, l \in \mathbb{N} \,:\, E_l(\lambda) = E_{l+1}(\lambda)$ y $\dim(E_l(\lambda)) = m_\lambda$.

Demostración 4): Sea $j \in \mathbb{N}$. Por propiedad 1), se sabe que $E_{j-1}(\lambda) \subseteq E_j(\lambda) \subseteq E_{j+1}(\lambda)$
$$\Rightarrow \dim(E_{j-1}(\lambda)) \leq \dim(E_j(\lambda)) \leq \dim(E_{j+1}(\lambda))$$
$$\Rightarrow \dim(E_j(\lambda)) - \dim(E_{j-1}(\lambda)) \geq 0 \wedge \dim(E_{j+1}(\lambda)) - \dim(E_j(\lambda)) \geq 0\,.$$

Probaremos que si $E_{j-1}(\lambda) \subset E_j(\lambda) \subset E_{j+1}(\lambda)$ (inclusión estricta), entonces
$$0 < \dim(E_{j+1}(\lambda)) - \dim(E_j(\lambda)) \leq \dim(E_j(\lambda)) - \dim(E_{j-1}(\lambda))\,.$$

Consideremos bases de los espacios involucrados (estamos en dimensión finita):
$$B_{E_{j-1}(\lambda)} := \{v_1, ..., v_k\} \text{ base de } E_{j-1}(\lambda)\,,$$
$$B_{E_j(\lambda)} := \{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}\} \text{ base de } E_j(\lambda)\,,$$
$$B_{E_{j+1}(\lambda)} := \{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}, v_{k+l+1}, ..., v_{k+l+m}\} \text{ base de } E_{j+1}(\lambda)\,,$$
con $k\,, l\,, m \in \mathbb{N}$.

Definimos ahora $\forall\, i \in \{1, ..., m\} \,:\, w_i \,:=\, (A - \lambda\, I_n)\, v_{k+l+i}$.

AFIRMACIÓN 1: $\forall\, i \in \{1, ..., m\} \,:\, w_i \in E_j(\lambda) \backslash E_{j-1}(\lambda)$.

Demostración: Sea $i \in \{1, ..., m\}$. Entonces,

$$(A - \lambda\, I_n)^j\, w_i \,=\, (A - \lambda\, I_n)^j\, (A - \lambda\, I_n)\, v_{k+l+i} \,=\, (A - \lambda\, I_n)^{j+1} \underbrace{v_{k+l+i}}_{\in E_{j+1}(\lambda)} \,=\, \theta \,\Rightarrow\, w_i \in E_j(\lambda)\,.$$

Ahora, supongamos que $w_i \in E_{j-1}(\lambda)$, i.e.

$$\begin{aligned}(A - \lambda\, I_n)^{j-1}\, w_i \,=\, \theta \,&\Rightarrow\, (A - \lambda\, I_n)^{j-1}\, (A - \lambda\, I_n)\, v_{k+l+i} \,=\, \theta \\ &\Rightarrow\, (A - \lambda\, I_n)^j\, v_{k+l+i} \,=\, \theta \,\Rightarrow\, v_{k+l+i} \in E_j(\lambda)\,,\end{aligned}$$

lo cual implica que v_{k+l+i} es c.l. de $B_{E_j(\lambda)}$. Esto conduce a afirmar entonces que $B_{E_{j+1}(\lambda)}$ es l.d. $(\rightarrow\leftarrow)$. De esta manera, sucede que $w_i \notin E_{j-1}(\lambda)$, y se concluye la afirmación.

AFIRMACIÓN 2: $\{w_i\}_{i=1}^m$ ES L.I.

Demostración: Consideremos la combinación lineal para el vector nulo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \alpha_i\, w_i \,=\, \theta \,&\Rightarrow\, (A - \lambda\, I_n) \sum_{i=1}^m \alpha_i\, v_{k+l+i} \,=\, \theta \\ &\Rightarrow\, \sum_{i=1}^m \alpha_i\, v_{k+l+i} \in E_1(\lambda) \,\cap\, \langle \{v_{k+l+i}\}_{i=1}^m \rangle \,\subseteq\, E_j(\lambda) \,\cap\, \langle \{v_{k+l+i}\}_{i=1}^m \rangle \,=\, \{\theta\} \\ &\Rightarrow\, \sum_{i=1}^m \alpha_i\, v_{k+l+i} \,=\, \theta \,\Rightarrow\, \forall\, i \in \{1, ..., m\} \,:\, \alpha_i \,=\, 0 \,\Rightarrow\, \{w_i\}_{i=1}^m \text{ es l.i.}\end{aligned}$$

CONSECUENCIA: $\forall\, i \in \{1, ..., m\}\ :\ w_i \in \langle\{v_{k+1}, ..., v_{k+l}\}\rangle$. Luego,

$$\langle\{w_1, ..., w_m\}\rangle \subseteq \langle\{v_{k+1}, ..., v_{k+l}\}\rangle \Rightarrow \underbrace{\dim(\langle\{w_1, ..., w_m\}\rangle)}_{=m} \leq \underbrace{\dim(\langle\{v_{k+1}, ..., v_{k+l}\}\rangle)}_{=l}$$

$$\Rightarrow 0 < \dim(E_{j+1}(\lambda)) - \dim(E_j(\lambda)) = m \leq l = \dim(E_j(\lambda)) - \dim(E_{j-1}(\lambda)).$$

...los otros casos posibles:

a) Si $E_{j-1}(\lambda) = E_j(\lambda)$, entonces, por propiedad vista antes, $E_j(\lambda) = E_{j+1}(\lambda)$, y la propiedad se valida.

b) Si $E_{j-1}(\lambda) \subset E_j(\lambda) = E_{j+1}(\lambda)$, la propiedad también es cierta.

Observación: Si $E_{j-1}(\lambda) \subset E_j(\lambda)$ (inclusión estricta), entonces $\exists\, \{v_{k+p}\}_{p=1}^{l} \subseteq E_j(\lambda) \backslash E_{j-1}(\lambda)$ tal que $E_j(\lambda) = E_{j-1}(\lambda) \bigoplus \langle\{v_{k+p}\}_{p=1}^{l}\rangle$.

Para demostrar la Propiedad 5), necesitamos introducir la noción de funciones polinomiales matriciales. Dada la función polinomial (escalar) $p \in \mathcal{P}_k(\mathbb{K})$, caracterizado por $p(x) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, x^j$, con $\{\alpha_j\}_{j=0}^{k} \subseteq \mathbb{K}$, éste induce la función (polinomial) matricial $p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dado por $p(A) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, A^j$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tener presente que $A^0 := I_n$.

Con esta noción, invocamos ahora el siguiente resultado técnico, cuya demostración sigue el mismo espíritu del resultado conocido en $\mathbb{Z}$.

Lema 1. Dados $p\,,q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\backslash\{\theta\}$, existen $r\,,s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que $r(x)\,p(x) \,+\, s(x)\,q(x) \,=\, \text{m.c.d.}\{p,q\}(x)$.

Como consecuencia, se puede establecer que

Lema 2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y $p\,,q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tales que para algún vector $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ se cumple: $p(A)\,v \,=\, \theta$, y $q(A)\,v \,=\, \theta$. Entonces, $d(A)\,v \,=\, \theta$, donde $d := \text{m.c.d.}\{p,q\}$ (polinomio máximo común divisor de p y q).

Demostración: Aplicando el Lema 1, tenemos que existen $r\,,s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que $r(x)\,p(x) \,+\, s(x)\,q(x) \,=\, d(x)$. Esto induce la igualdad matricial:

$$r(A)\,p(A) \,+\, s(A)\,q(A) \,=\, d(A) \;\Rightarrow\; d(A)\,v \,=\, r(A)\,p(A)\,v \,+\, s(A)\,q(A)\,v \,=\, \theta\,.$$

Corolario: si en el Lema 2, además se tiene que $p\,,q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ son primos relativos entre sí (i.e. m.c.d.{p,q}=1), entonces se concluye que $v \,=\, \theta$.

Demostración de Propiedad 5): Sean $j_1\,, j_2 \in \mathbb{N}$, $\lambda_1\,, \lambda_2 \in \sigma(A)$. Por probar que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \;\Rightarrow\; E_{j_1}(\lambda_1) \cap E_{j_2}(\lambda_2) \,=\, \{\theta\}$.
Sea $v \in E_{j_1}(\lambda_1) \cap E_{j_2}(\lambda_2)$, es decir $(A - \lambda_1\, I_n)^{j_1}\, v \,=\, \theta$ y $(A - \lambda_2\, I_n)^{j_2}\, v \,=\, \theta$. Esto equivale a expresarlo como $p(A)\, v \,=\, \theta$ y $q(A)\, v \,=\, \theta$, donde $p(x) \,:=\, (x - \lambda_1)^{j_1}$, $q(x) \,:=\, (x - \lambda_2)^{j_2}$ son polinomios primos relativos entre sí. Luego, aplicando el Lema 2, se infiere que $v \,=\, \theta$. Finalmente, se concluye que $E_{j_1}(\lambda_1) \cap E_{j_2}(\lambda_2) \,=\, \{\theta\}$.

Demostración de Propiedad 6): Primero, recordemos que dado $\lambda \in \sigma(A)$, se cumple que $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, E_j(\lambda) \subseteq \mathbb{K}^{n\times 1} \wedge E_j(\lambda) \subseteq E_{j+1}(\lambda)$. Esto garantiza la existencia de $l \in \mathbb{N}$ tal que $E_l(\lambda) = E_{l+1}(\lambda)$.

Probemos ahora que $\dim(E_l(\lambda)) = m_\lambda$. Se demostrará por doble desigualdad.

Afirmación 1: $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, \dim(E_j(\lambda)) \leq m_\lambda$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Definimos $k := \dim(E_j(\lambda))$. Esto implica que existe una base $B_k := \{v_1, \ldots, v_k\}$ de $E_j(\lambda) \subseteq \mathbb{K}^{n\times 1}$. Se puede completar B_k para inducir una base $\tilde{B} := \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Esto permite definir la aplicación lineal $T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{K}^{n\times 1} \,:\, T_A(x) := A\,x$. Considerando $B := \{e_j\}_{j=1}^{n}$, base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$, se tiene que $[T_A]_B^B = A$. A su vez, se sabe que $[T_A]_B^B \sim [T_A]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$. Esto significa que $\exists\, P := \left[\tilde{I}\right]_{\tilde{B}}^{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (matriz de paso o de cambio de base), tal que $[T_A]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = P^{-1}\,A\,P$.

Recordamos que

$$[T_A]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} := \left([T_A(v_1)]_{\tilde{B}} \,|\, \cdots \,|\, [T_A(v_n)]_{\tilde{B}}\right) = \left([A\,v_1]_{\tilde{B}} \,|\, \cdots \,|\, [A\,v_n]_{\tilde{B}}\right) .$$

Como $E_j(\lambda)$ es invariante con respecto a A, resulta $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\, A\,v_i \in E_j(\lambda)$, es decir $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\, A\,v_i \in \langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle$. Esto permite afirmar que

$$\tilde{A} := [T_A]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} A_k & C \\ \Theta & B \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}).$$

Veamos ahora que $\sigma(A_k) = \{\lambda\}$. Sea $(\mu, z) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{k\times 1} \backslash \{\theta\}$ un autopar de A_k, es decir $A_k\, z = \mu\, z$. Esto permite deducir que

$$P^{-1}\, A\, P \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & C \\ \Theta & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k\, z \\ \theta \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Luego, el vector $w := P \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ es tal que $A\, w = \mu\, w$. Esto nos dice que $\mu \in \sigma(A)$ y $w \in S_\mu$. Por otro lado, $w = \sum_{i=1}^{k} z_i\, v_i \in \langle \{v_i\}_{i=1}^{k} \rangle := E_j(\lambda)$. En consecuencia, $w \in S_\mu \cap E_j(\lambda)$.

- Si $\mu \neq \lambda$, entonces $w \in S_\mu \cap E_j(\lambda) = E_1(\mu) \cap E_j(\lambda) = \{\theta\}$, lo cual implica $w = \theta$, por ende $z = \theta$ $(\rightarrow\leftarrow)$.
- Por lo tanto, se deduce así que $\mu = \lambda$, es decir $\sigma(A_k) = \{\lambda\}$, de multiplicidad k. Esto nos dice que $p_{A_k}(x) = (x - \lambda)^k$.
- Como $\tilde{A}$ y A son semejantes, poseen el mismo polinomio característico. Esto significa que $p_A(x) = p_{A_k}(x)\, p_B(x)$, lo cual implica que $\dim(E_j(\lambda)) = k \leq m_\lambda$.
- Siendo $j \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario, se concluye la AFIRMACIÓN 1.

AFIRMACIÓN 2: Si $E_l(\lambda) = E_{l+1}(\lambda)$, entonces $\dim(E_l(\lambda)) \geq m_\lambda$. Sea $\tilde{k} := \dim(E_l(\lambda))$. Esto garantiza la existencia de una base $B_{\tilde{k}} := \{u_1, ..., u_{\tilde{k}}\}$ de $E_l(\lambda)$, la cual puede extenderse a una base $\widetilde{B} := \{u_1, ..., u_{\tilde{k}}, u_{\tilde{k}+1}, ...u_n\}$ de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Así, procediendo como en la demostración de la AFIRMACIÓN 1, se tiene la existencia de una matriz $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ no singular, tal que

$$Q^{-1}\, A\, Q = \begin{pmatrix} A_{\tilde{k}} & \widetilde{C} \\ \Theta & \widetilde{B} \end{pmatrix} =: \widetilde{A}, \quad \text{donde } A_{\tilde{k}} \in \mathcal{M}_{\tilde{k}}(\mathbb{K}).$$

En lo que sigue, probaremos que $\widetilde{B}$ no tiene el valor propio λ. Para esto

a) probar (por Inducción Matemática) que
$\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, u \in \mathbb{K}^{n\times 1} \,:\, u \in \mathrm{Ker}(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^j \Leftrightarrow Q\, u \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^j$.

b) Así, $Q\, u \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^l = E_l(\lambda) \Leftrightarrow Q\, u \in \langle\{u_i\}_{i=1}^{\tilde{k}}\rangle \Leftrightarrow u \in \langle\{e_i\}_{i=1}^{\tilde{k}}\rangle$, donde $\{e_i\}_{i=1}^{\tilde{k}}$ son los primeros $\tilde{k}$ vectores canónicos de $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

c) Esto permite inferir que
$\forall\, i \in \{1, ..., \tilde{k}\} \,:\, Q\, e_i \in \langle\{u_i\}_{i=1}^{\tilde{k}}\rangle = E_l(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^l$. Por la parte a), se tiene que $Q\, e_i \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^l \Leftrightarrow e_i \in \mathrm{Ker}(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^l$. Como resultado, se desprende que $\forall\, i \in \{1, ..., \tilde{k}\} \,:\, (\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^l\, e_i = \theta$, lo cual indica que las primeras $\tilde{k}$ columnas de la matriz $(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^l$ son nulas. Como consecuencia, se tiene

$$(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^l = \begin{pmatrix} (A_{\tilde{k}} - \lambda\, I_{\tilde{k}})^l & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix}.$$

d) Ahora, suponemos que $(\lambda, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{(n-\tilde{k})\times 1} \backslash \{\theta\}$ es un autopar de $\widetilde{B}$, es decir $(\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})\, y \,=\, \theta$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^{2l} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Theta & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Theta & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{C}\, y \\ (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l\, y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Theta & \widehat{C} \\ \Theta & (\widetilde{B} - \lambda\, I_{n-\tilde{k}})^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{C}\, y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

lo cual implica que $w \,:=\, \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\widetilde{A} - \lambda\, I_n)^{2l} \,\Leftrightarrow\, Q\, w \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^{2l} \,=\, \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^l \,=\, \langle \{u_i\}_{i=1}^{\tilde{k}} \rangle$, de donde se deduce que $w \in \langle \{Q^{-1}\, u_i\}_{i=1}^{\tilde{k}} \rangle \,=\, \langle \{e_i\}_{i=1}^{\tilde{k}} \rangle$ (Q es matriz de cambio de base). Esto implica que $y \,=\, \theta$ ($\rightarrow\leftarrow$).

e) Lo anterior permite afirmar que $\lambda \notin \sigma(\widetilde{B})$. Así, $p_A(x) \,=\, p_{A_{\tilde{k}}}(x)\, p_{\widetilde{B}}(x)$, con $p_{\widetilde{B}}(\lambda) \neq 0$, de donde se concluye que $\dim(E_l(\lambda)) \,=\, \tilde{k} \,=\, m_\lambda$.

Ejemplos: Aplique los núcleos iterados para mostrar que las siguientes matrices son semejantes a otra matriz casi diagonal. Indique la matriz de semejanza.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \subseteq \mathbb{C}$ (valores propios distintos). Entonces, $\exists \{j_1, ..., j_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{C}^{n\times 1} = \bigoplus_{s=1}^{k} E_{j_s}(\lambda_s) := E_{j_1}(\lambda_1) \oplus ... \oplus E_{j_k}(\lambda_k)\,,$$

donde $\forall\, s \in \{1, ..., k\} \,:\, E_{j_s}(\lambda_s) = E_{j_s+1}(\lambda_s)$ y $\dim(E_{j_s}(\lambda_s)) = m_{\lambda_s}$.
Demostración: es consecuencia inmediata de las propiedades anteriores, considerando además que $\sum_{s=1}^{k} m_{\lambda_s} = n$. Se deja al lector hacer los detalles.

Corolario: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable si y sólo si $\forall\, \lambda \in \sigma(A) \,:\, \dim(S_\lambda) = m_\lambda$.
Demostración: También se deja al lector hacer los detalles de la prueba.

Observación: El teorema previo sigue siendo válido en el cuerpo real, i.e. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$, si además se verifica que $\sum_{s=1}^{k} m_{\lambda_s} = n$. En este caso se cumple que

$$\mathbb{R}^{n\times 1} = \bigoplus_{s=1}^{k} E_{j_s}(\lambda_s)\,.$$

Observaciones sobre las dimensiones de los núcleos iterados

Denotando, para $j \geq 0$, $n_j := \dim(E_j(\lambda)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_n)^j)$, las tres propiedades anteriores implican que esta sucesión de enteros $\{n_j\}_{j\geq 0}$ cumple las tres siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ 0 = n_0 < n_1 < \ldots. < n_l = n_{l+1} = \ldots\,, \\
&(2)\ n_l - n_{l-1} \leq n_{l-1} - n_{l-2} \leq \ldots \leq n_2 - n_1 \leq n_1 - n_0 = n_1\,, \\
&(3)\ n_l = m_\lambda\,.
\end{aligned}
$$

La sucesión de núcleos iterados queda entonces:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & E_0(\lambda) & \subset & E_1(\lambda) & \subset & E_2(\lambda) & \subset & \ldots. & \subset & E_l(\lambda) & = & E_{l+1}(\lambda) & = & \ldots \\
\dim : & 0 = n_0 & < & n_1 & < & n_2 & < & \ldots & < & n_l & = & n_{l+1} & = & \ldots
\end{array}
$$

1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y S un subespacio de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Se dice que S es invariante por A si $\forall\, u \in S \,:\, A\,u \in S$.
2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), semejante a $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con matriz de semejanza P, tal que $B = P^{-1}\,A\,P$. Entonces
$$\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, \lambda \in \sigma(A) \,:\, \forall\, u \in \mathbb{K}^{n\times 1} \,:\, \Big(u \in \mathrm{Ker}((B-\lambda\, I_n)^j) \Leftrightarrow P\,u \in \mathrm{Ker}((A-\lambda\, I_n)^j)\Big)\,.$$
Por tanto, las dimensiones de los núcleos iterados son invariantes por semejanza.
3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $\mathbb{K}^{n\times 1} = S \oplus T$, con S y T invariantes por A, decimos que $\mathbb{K}^{n\times 1} = S \oplus T$ es una descomposición invariante por A. Esta definición se extiende a $\mathbb{K}^{n\times 1} = \bigoplus_{j=1}^{k} S_j$, donde para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, S_j es invariante por A.
4. Si $\mathbb{K}^{n\times 1} = S \oplus T$ es una descomposición invariante por $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, consideramos una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ construida de la forma
$$\underbrace{s_1\, \dots, s_l}_{\text{base de } S}\,,\, \underbrace{t_{l+1}, \dots, t_n}_{\text{base de } T}\,,$$
con la cual se construye la matriz $P := \Big(s_1 \,|\, \cdots \,|\, s_l \,|\, t_{l+1} \,|\, \cdots \,|\, t_n\Big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular. Entonces A es semejante a una matriz diagonal por bloques, i.e.
$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & A_2 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A_1 \in \mathcal{M}_l(\mathbb{K})\,,\, A_2 \in \mathcal{M}_{n-l}(\mathbb{K})\,.$$

Recapitulando...

Como resultado, las descomposiciones invariantes producen matrices diagonales por bloques. Nótese que si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular, con

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \forall j \in \{1, .., k\} : A_j \text{ es cuadrada, entonces}$$

1. la partición correspondiente de columnas de P induce una descomposición invariante de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ en k subespacios,
2. el polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de las matrices A_j.

Recordamos....

Definición formal de Suma directa generalizada: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Decimos que $\{S_j\}_{j=1}^m$ forman una suma directa del subespacio suma $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$ si

$$(\forall\, u_1 \in S_1) \dots (\forall\, u_m \in S_m) \,:\, \left(\sum_{j=1}^{m} u_j = \theta \Rightarrow \forall\, j \in \{1, \dots, m\} \,:\, u_j = \theta \right) .$$

En tal caso, se denota por $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.

Lema importante: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{S_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $S := \bigoplus_{j=1}^{m} S_j$.
2. Todo vector de S puede expresarse de manera única como elemento de $S := \sum_{j=1}^{m} S_j$.

   Es decir

$$\forall\, u \in S \,:\, (\exists!\, u_1 \in S_1) \dots (\exists!\, u_m \in S_m) \,:\, u = \sum_{j=1}^{m} u_j .$$

Objetivo: Descomposición de Jordan

En un primer paso, el objetivo para llevar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a su forma canónica de Jordan, es determinar una matriz de paso $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (no singular), tal que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

donde el polinomio característico de cada A_j contiene una única raíz, distinta de la de los demás bloques. Por tanto, si el polinomio característico de A (salvo factor constante) es

$$(x - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (x - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}},$$

el bloque A_j tendrá como polinomio característico, salvo factor constante, $(x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. De esta manera, estamos realizando una descomposición invariante de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ por A:

$$\mathbb{K}^{n\times 1} = \bigoplus_{j=1}^{k} E_{l_j}(\lambda_j),$$

donde para cada $j \in \{1, ..., k\}$, $\dim(E_{l_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$.

Teorema de descomposición de Jordan

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si el polinomio característico de A, salvo factor constante, es

$$(x - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (x - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} ,$$

con $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_{\lambda_k} = n$, entonces existen $\{l_j\}_{j=1}^{k} \subseteq \mathbb{N}$, tal que $\mathbb{K}^{n\times 1} = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_{l_j}(\lambda_j)$, tal que para cada $j \in \{1, ..., k\}$, $\dim(E_{l_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$. Además, existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de cambio de base tal que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

donde para cada $j \in \{1, ..., k\}$, el polinomio característico de cada A_j es, salvo factor constante, $(x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. También, las dimensiones de los núcleos iterados de las submatrices A_j coinciden con las de los de A.

Observación: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es tal que su polinomio característico admite raíces complejas, entonces A no admite descomposición de Jordan en $\mathbb{R}$. Sin embargo, se podría considerar $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y en tal caso si admitiría descomposición de Jordan en $\mathbb{C}$. ¿Admitirá algún tipo de descomposición tipo Jordan en $\mathbb{R}$?

Demostración del Teorema:

La primera afirmación es consecuencia directa de las propiedades 5) y 6). Luego, considerando conjuntamente una base de todos los núcleos iterados $\{E_{l_j}(\lambda_j)\}_{j=1}^{k}$, se construye la matriz P, colocando los elementos de esta base por columnas, se puede transformar (por semejanza) la matriz A en otra matriz, diagonal por bloques.

Probemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, las dimensiones de los núcleos iterados de A_1 coinciden con las dimensiones de $E_j(\lambda_1)$

Sea $B := P^{-1} A P$. Como

$$u \in \mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j) \Leftrightarrow P u \in \mathrm{Ker}((A - \lambda_1 I_n)^j) =: E_j(\lambda_1) \subseteq E_{l_1}(\lambda_1) = \langle \{v_i\}_{i=1}^{m_{\lambda_1}} \rangle ,$$

donde $\{v_i\}_{i=1}^{m_{\lambda_1}}$ vienen a ser las primeras m_{λ_1} columnas de P. Se tiene así que $\mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j) \subseteq \langle \{e_j\}_{j=1}^{m_{\lambda_1}} \rangle$ (aquí, $\{e_j\}_{j=1}^{m_{\lambda_1}}$ son los primeros m_{λ_1} vectores canónicos de $\mathbb{K}^{n\times 1}$). Esto quiere decir que los elementos de $\mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j)$ sólo pueden tener las primeras m_{λ_1} componentes no nulas. A partir de este hecho, se deduce que

$$u \in \mathrm{Ker}((B - \lambda_1 I_n)^j) \Leftrightarrow \exists\, z \in \mathrm{Ker}((A_1 - \lambda_1 I_{m_{\lambda_1}})^j) \,:\, u = \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} .$$

Este mismo razonamiento puede hacerse con los demás valores propios. Así, concluimos la demostración.

Observación: la demostración permite que nos concentremos en matrices con un único valor propio, ya que el teorema precedente parte el trabajo en submatrices con un único valor propio.

Definición. Llamamos caja de Jordan de orden k asociada a un valor propio λ, a una matriz $k \times k$ de la forma

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Propiedades:

1. La matriz $J_k(\lambda)$ tiene como polinomio característico $(x-\lambda)^k$ y $\dim(S_\lambda) = 1$.
2. Las dimensiones de los núcleos iterados de $J_k(\lambda)$ son:

$$\dim(\mathrm{Ker}((J_k(\lambda) - \lambda I)^j)) = \begin{Bmatrix} j, & j = 1, ..., k \\ k, & j \geq k \end{Bmatrix} = \min\{k, j\}.$$

Demostración de 2): se puede hacer directamente, notando que

$$J_k(\lambda) - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

y viendo cómo decrece de uno en uno el rango de las potencias de esta matriz. Alternativamente, también se puede ver notando que, como $n_1 = 1$, por la propiedad 4) de las dimensiones de los núcleos iterados $n_j = j$, hasta que $j = k$.

Definición. Una matriz de Jordan asociada a un único valor propio λ es una matriz diagonal por bloques, de orden m_λ, cuyos bloques son cajas de Jordan asociadas a λ.

$$J(\lambda) := \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Una matriz de Jordan en general es una matriz diagonal por bloques, cuyo bloques son matrices de Jordan asociadas a distintos valores propios, o bien (equivalente), una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son cajas de Jordan.

Dos problemas combinatorios

Objetivo: Mostrar cómo se establece una relación uno a uno entre las distintas posibilidades de dimensiones de los núcleos iterados de una matriz de Jordan $m \times m$ con un único valor propio, y las posibilidades de configurar las cajas de Jordan hasta llenar el espacio $m \times m$.

Problema (P): Hallar una sucesión de enteros que cumpla las tres siguientes propiedades:

$$(a)\ 0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_l = n_{l+1} = \ldots,$$
$$(b)\ n_l - n_{l-1} \leq n_{l-1} - n_{l-2} \leq \ldots \leq n_2 - n_1 \leq n_1 - n_0 = n_1\,,$$
$$(c)\ n_l = m\,.$$

Problema (Q): Determinar un conjunto de valores $q_1, q_2, \ldots, q_l, \ldots$ de forma que

$$(a)\ q_{l+1} = q_{l+2} = \ldots = 0\,,$$
$$(b)\ q_1 + 2\,q_2 + 3\,q_3 + \ldots l\,q_l = m\,.$$

Nota: Antes de mostrar cómo se relacionan estos problemas, indicamos qué van a representar las soluciones de estos problemas, y la de un problema intermedio:

- $\{n_j\}$ serán las dimensiones de los núcleos iterados,
- $\{p_j\}$ indicarán el número de cajas de Jordan de tamaño $j \times j$ o superior,
- $\{q_j\}$ denotarán el número de cajas de Jordan de tamaño $j \times j$.

El trabajo se podrá hacer sin tener en cuenta cuál es el valor de l en el que la solución de (P) se detiene, y la de (Q) toma su último valor no nulo, valor que de hecho será el mismo al relacionar ambas sucesiones.

Propiedad A. Dada una solución del Problema (P), definimos

$$p_j := n_j - n_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Nótese que esta sucesión cumple

$$0 = \ldots = p_{l+1} < p_l \leq p_{l-1} \leq \ldots \leq p_1 = n_1.$$

Seguidamente definimos $q_j := p_j - p_{j+1}$, $j \geq 1$, de modo que $q_l = p_l$ y $q_j = 0$ para todo $j > l$. Entonces, esta sucesión es una solución del Problema (Q).

Propiedad B. Dada una solución del Problema (Q), definimos

$$p_j := \sum_{k=j}^{l} q_k, \quad j = 1, \ldots, l, \quad \wedge \quad p_j := 0, \quad \forall j > l,$$

y por recurrencia

$$\begin{cases} n_0 := 0 \\ n_j := p_j + n_{j-1} \quad j \geq 1. \end{cases}$$

Entonces esta sucesión es solución del Problema (P).
Por consiguiente, hay una correspondencia biunívoca entre las soluciones de los problemas (P) y (Q).

Teorema: Dada una solución del Problema (P), y $\{q_j\}$ la solución correspondiente del Problema (Q), entonces la matriz de Jordan $m \times m$ asociada al valor propio λ construida con

$$q_j \text{ bloques } j \times j \text{ para cada } j$$

cumple

$$\dim(E_j(\lambda)) = n_j\,, \quad \forall j \geq 0.$$

Conclusiones:

1. Para cualquier solución del Problema (P), existe una matriz (de hecho una matriz de Jordan) $m \times m$, con un único valor propio de forma que $\dim(E_j(\lambda)) = n_j\,, \quad \forall j \geq 0.$
2. Por consiguiente, dadas posibles configuraciones de las dimensiones de los núcleos iterados asociados a todos los valores propios, existe una matriz (de hecho, matriz de Jordan) que los tiene como núcleos iterados.
3. Dos matrices de Jordan esencialmente distintas (que no se obtengan por permutación del orden de los bloques) no son semejantes.

Primera observación: Si $P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix}$, y $\{u_1, ..., u_k\}$ son las primeras k columnas de P, entonces

$$\begin{aligned} A\,u_1 &= \lambda\,u_1 \\ A\,u_2 &= \lambda\,u_2 + u_1 \\ &\vdots \\ A\,u_k &= \lambda\,u_k + u_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Luego, para todo $j \geq 2$: $u_{j-1} = (A - \lambda\,I)\,u_j$.

Demostración: Primero, notemos que $P^{-1}\,A = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}$. Luego,

- multiplicando por u_1 resulta:
  $P^{-1}\,A\,u_1 = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}\,u_1 = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} e_1 = \lambda\,e_1$, de donde
  $A\,u_1 = \lambda\,P\,e_1 = \lambda\,u_1$.
- multiplicando por u_j, con $j \in \{2, ..., k\}$, resulta:
  $P^{-1}\,A\,u_1 = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} P^{-1}\,u_j = \begin{pmatrix} J_k(\lambda) & * \\ \Theta & * \end{pmatrix} e_j = e_{j-1} + \lambda\,e_j$, de donde
  $A\,u_j = P\,e_{j-1} + \lambda\,P\,e_1 = u_{j-1} + \lambda\,u_j$.

Segunda observación: Si S es un subespacio que verifica $E_{j-1}(\lambda) \oplus S \subseteq E_j(\lambda)$, y $T := (A - \lambda I) S := \{(A - \lambda I)u \,|\, u \in S\}$, entonces

$$E_{j-2}(\lambda) \oplus T \subseteq E_{j-1}(\lambda) \quad \wedge \quad \dim(T) = \dim(S).$$

Demostración: Hay que probar tres afirmaciones:

a) $T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$. En efecto, sea $w \in T$. Esto asegura que existe $u \in S \subseteq E_j(\lambda)$, tal que $w = (A - \lambda I)u$. Luego, $(A - \lambda I)^{j-1} w = (A - \lambda I)^j u = \theta$, y por tanto se tiene establecida la inclusión $T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$.

b) $T \cap E_{j-2}(\lambda) = \{\theta\}$. Sea $w \in T \cap E_{j-2}(\lambda)$. Como $w \in T$, existe $u \in S$ tal que $w = (A - \lambda I)u$. Por otro lado, $w \in E_{j-2}(\lambda)$, lo cual implica que $\theta = (A - \lambda I)^{j-2} w = (A - \lambda I)^{j-1} u$, lo que nos dice que $u \in E_{j-1}(\lambda)$. Así, resulta que $u \in S \cap E_{j-1}(\lambda) = \{\theta\}$, lo que implica que $w = \theta$, y se concluye la afirmación. CONCLUSIÓN: $E_{j-2}(\lambda) \oplus T \subseteq E_{j-1}(\lambda)$.

c) $\dim(T) = \dim(S)$.
Sea $\{u_k\}_{k=1}^r$ una base de S. Por probar que $\{(A - \lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es una base de T. Definimos la aplicación lineal $R : S \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $\forall\, x \in S : R(x) := (A - \lambda I)\, x$. Tenemos

$$x \in \mathrm{Ker}(R) \Rightarrow R(x) = (A - \lambda I)\, x = \theta \Rightarrow x \in E_1(\lambda) \cap S \subseteq E_{j-1}(\lambda) \cap S = \{\theta\}.$$

Esto implica que R es un monomorfismo, y por tanto $\{R(u_k) := (A - \lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es l.i. Como además, $\langle \{(A - \lambda I)u_k\}_{k=1}^r \rangle = T$ (¡PROBARLO!), se concluye que $\{(A - \lambda I)u_k\}_{k=1}^r$ es una base de T y así, $\dim(T) = \dim(S)$.

Observación: la independencia lineal se preserva al multiplicar por $(A - \lambda I)$.

Teorema: Toda matriz $m \times m$ con un único valor propio λ es semejante a una matriz de Jordan asociada al valor propio λ. Además, las dimensiones de las cajas de Jordan vienen dadas por los coeficientes $\{q_j\}$ ligados a las dimensiones de los núcleos iterados.
Demostración: Sea $E_l(\lambda)$ el primer núcleo iterado de tamaño máximo. Sea además $S_l := S_l^0$ tal que $E_l(\lambda) = E_{l-1} \oplus S_l^0$, de modo que $\dim(S_l^0) = n_l - n_{l-1} = p_l = q_l$. Por la observación anterior, podemos expresar

$$E_{l-1}(\lambda) = E_{l-2}(\lambda) \oplus \underbrace{(A - \lambda I) S_l^0 \oplus S_{l-1}^0}_{=: S_{l-1}},$$

con $\dim(S_{l-1}^0) = (n_{l-1} - n_{l-2}) - \dim(S_l^0) = p_{l-1} - p_l = q_{l-1} \geq 0$.
De manera análoga, se tiene

$$\begin{aligned} E_{l-2}(\lambda) &= E_{l-3}(\lambda) \oplus \underbrace{(A - \lambda I)\, S_{l-1} \oplus S_{l-2}^0}_{=: S_{l-2}} \\ &= E_{l-3}(\lambda) \oplus (A - \lambda I)^2\, S_l^0 \oplus (A - \lambda I)\, S_{l-1}^0 \oplus S_{l-2}^0 , \end{aligned}$$

con $\dim(S_{l-2}^0) = q_{l-2}$.

Continuando con este proceso, se construye una partición de $E_l(\lambda)$:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
E_l(\lambda) & = & S_l^0 & \oplus & (A-\lambda\,I)S_l^0 & \oplus & \cdots & \oplus & (A-\lambda\,I)^{l-2}S_l^0 & \oplus & (A-\lambda\,I)^{l-1}S_l^0 \\
 & & & \oplus & S_{l-1}^0 & \oplus & \cdots & \oplus & (A-\lambda\,I)^{l-3}S_{l-1}^0 & \oplus & (A-\lambda\,I)^{l-2}S_{l-1}^0 \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & \oplus & S_2^0 & \oplus & (A-\lambda\,I)S_2^0 \\
 & & & & & & & & & \oplus & S_1^0 \\
 & = & S_l & \oplus & S_{l-1} & \oplus & \cdots & \oplus & S_2 & \oplus & S_1\,,
\end{array}$$

de forma que $\forall\, j \in \{1, ..., l\} \, : \, \dim(S_j^0) = q_j$.
Ahora, construimos una base de $E_l(\lambda)$ de la siguiente manera: se toma una base de cada S_j^0 (es posible que algunos sean espacios nulos y no haya que tomar base)

$$u_{j,1}, \ldots, u_{j,q_j}\ ,$$

y se construyen sucesiones de vectores para cada uno de ellos (digamos u):

$$\begin{array}{rcccc}
v_1 & = & (A-\lambda\,I)^{j-1}\,u & = & (A-\lambda\,I)\,v_2 \\
v_2 & = & (A-\lambda\,I)^{j-2}\,u & = & (A-\lambda\,I)\,v_3 \\
 & \vdots & & & \\
v_{j-1} & = & (A-\lambda\,I)\,u & = & (A-\lambda\,I)\,v_j \\
v_j & = & u\,, & &
\end{array}$$

de manera que $A\,v_1 = \lambda\,v_1$, y $\forall\, k \in \{2, ..., j\} \, : \, A\,v_k = v_{k-1} + \lambda\,v_k$. La matriz obtenida por el cambio de base inducido por la unión de estas sucesiones de vectores, es una matriz de Jordan con q_j cajas $j \times j$, para todo j.

Ejemplo: Determinar una descomposición de Jordan de la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollo. Notamos que la matriz dada no tiene la estructura de matriz de Jordan.

Primero, determinamos el espectro de A. Aprovechando que A es triangular inferior, se deduce que $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)^5\lambda = \lambda(\lambda-1)^5$. Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, con $m_{\lambda_1} = 1$ y $m_{\lambda_2} = 5$, respectivamente. Así, $\sigma(A) = \{0, 1\}$.

Segundo, determinamos los espacios propios de A, para cada valor propio. Realizando los procedimientos correspondientes, se deduce (¡HACERLO!)

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

En vista que $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_{\lambda_1}$ y $\dim(S_{\lambda_2}) = 2 < 5 = m_{\lambda_2}$, se concluye que A es no diagonalizable. Sin embargo, como $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} = 6 =$ orden de la matriz A, ésta admite forma canónica de Jordan.

Tercero, nos hace falta determinar solamente los Núcleos iterados de A con respecto a $\lambda_2 = 1$ (¿Por qué?) Denotamos por $\{e_j\}_{j=1}^{6}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{6\times 1}$. Realizando los procedimientos correspondientes, se deduce (¡HACERLO!)

$$
\begin{aligned}
E_1(1) &:= \mathrm{Ker}(A - I) = S_{\lambda_2} = \langle \{e_4, e_6\} \rangle \,, \, \dim(E_1(1)) = 2 \\
E_2(1) &:= \mathrm{Ker}((A - I)^2) = \langle \{e_3, e_4, e_5, e_6\} \rangle \,, \, \dim(E_2(1)) = 4 \\
E_3(1) &:= \mathrm{Ker}((A - I)^3) = \langle \{u, e_3, e_4, e_5, e_6\} \rangle \,, \, \dim(E_3(1)) = 5 = m_{\lambda_2} \,,
\end{aligned}
$$

siendo $u := (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t \in \mathbb{R}^{6\times 1}$. Luego, se cumple que $\forall\, j \geq 4 \,:\, E_j(1) = E_3(1)$.
Cuarto, Determinamos una base de $E_3(1)$ apropiada.
Tomamos primero un vector en $E_3(1) \setminus E_2(1)$. Se identifica que uno de estos vectores es el vector u definido antes. Esto induce tres (el índice del núcleo iterado $E_3(1)$) vectores:

$$
\begin{array}{rcl}
 & v_3 := u & \\
v_2 := (A - I)\, v_3 = (0\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0)^t & \Rightarrow & A\, v_3 = v_3 + v_2 \\
v_1 := (A - I)\, v_2 = (0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0)^t & \Rightarrow & A\, v_2 = v_2 + v_1 \\
(A - I)\, v_1 = (A - I)^3 \underbrace{v_3}_{\in E_3(1)} = \theta & \Rightarrow & A\, v_1 = v_1 \,.
\end{array}
$$

De esta manera, $\{v_1, v_2, v_3\}$ son parte de la base que nos interesa determinar...
¡FALTAN DOS VECTORES MÁS!

Como no podemos extraer otro vector en $E_3(1) \setminus E_2(1)$, que sea l.i. con $\{v_1, v_2, v_3\}$, buscamos un vector en $E_2(1) \setminus E_1(1)$, l.i con $\{v_1, v_2, v_3\}$. Tomamos el vector e_5. Esto dará lugar a dos (el índice del núcleo iterado $E_2(1)$) vectores:

$$
\begin{aligned}
& & v_5 := e_5 & & \\
v_4 := (A - I)\, v_5 &= (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^t = e_6 & \Rightarrow & \quad A\, v_5 = v_5 + v_4 \\
(A - I)\, v_4 &= (A - I)^2 \underbrace{v_5}_{\in E_2(1)} = \theta & \Rightarrow & \quad A\, v_4 = v_4 \,.
\end{aligned}
$$

De esta forma, se deduce el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, una base de $E_3(1)$.

CONSECUENCIA: El conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ es una base de $\mathbb{R}^{6\times 1}$, siendo $v_6 := (0\,,\,1\,,\,-1\,,\,1\,,\,0\,,\,0)^t \in E_1(0)$.

Quinto...la conclusión...

Construimos la matriz de semejanza $P := \Big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,|\, v_4 \,|\, v_5 \,|\, v_6\Big)$, lo cual conduce a

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Observación

Otra estrategia para determinar una base de $E_3(1)$ apropiada: Sistemas encajados.
Consideremos un vector de $E_1(1)$. Tomamos $w_1 := e_4$. Luego, resolvemos dos sistemas encajados, buscando soluciones que formen un conjunto l.i.:

$$\begin{aligned} (A-I)\,w_1 &= \theta \Rightarrow A\,w_1 = w_1 \\ (A-I)\,w_2 &= w_1 \Rightarrow w_2 = e_3 \Rightarrow A\,w_2 = w_2 + w_1 \\ (A-I)\,w_3 &= w_2 \Rightarrow w_3 = (1/2\,,\,1/2\,,\,-1/2\,,\,0\,,\,0\,,\,0)^t \Rightarrow A\,w_3 = w_3 + w_2\,. \end{aligned}$$

Esto entrega el conjunto l.i. $\{w_1, w_2, w_3\}$...son parte de la base que nos interesa determinar... ¡Faltan dos vectores más!
Consideramos otro vector de la base de $E_1(1)$. Por ejemplo, $w_4 := e_6$. Resolvemos ahora un sistema encajado:

$$\begin{aligned} (A-I)\,w_4 &= \theta \Rightarrow A\,w_4 = w_4 \\ (A-I)\,w_5 &= w_4 \Rightarrow w_5 = e_5 \Rightarrow A\,w_5 = w_5 + w_4\,. \end{aligned}$$

De esta manera, se deduce el conjunto l.i. $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, el cual es una base de $E_3(1)$.
Consecuencia: El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ es una base de $\mathbb{R}^{6\times 1}$, siendo $w_6 := (0\,,\,1\,,\,-1\,,\,1\,,\,0\,,\,0)^t \in E_1(0)$.

Construimos la matriz de semejanza $P := \left(w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4 \mid w_5 \mid w_6 \right)$, lo cual conduce a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, se tiene, para el valor propio $\lambda_2 = 1$:

$$n_j := \dim(E_j(\lambda_2)) :$$

$$n_0 := 0\,,\ n_1 := \dim(E_1(1)) = 2\,,\ n_2 := \dim(E_2(1)) = 4\,,\ n_3 := \dim(E_3(1)) = 5\,,$$

$$n_4 = n_5 = \ldots = 5\,,$$

$$p_j := n_j - n_{j-1}\ (\textit{Cantidad de cajas de Jordan de orden} \geq j) :$$

$$p_1 := n_1 - n_0 = 2\,,\ p_2 := n_2 - n_1 = 2\,,\ p_3 := n_3 - n_2 = 1\,,\ p_4 := n_4 - n_3 = 0\,,$$

$$p_5 = p_6 \ldots = 0\,,$$

$$q_j := p_j - p_{j+1}\ (\textit{Cantidad de cajas de Jordan de orden } j) :$$

$$q_1 := p_1 - p_2 = 0\,,\ q_2 := p_2 - p_3 = 1\,,\ q_3 := p_3 - p_4 = 1\,,\ q_4 := p_4 - p_5 = 0\,,$$

$$q_5 = q_6 = \ldots = 0\,.$$

$$\textit{Se verifica} : \sum_{j=1}^{3} j\, q_j = 5$$

Algunos resultados importantes

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, se define el Núcleo iterado de T asociado a λ, de índice $l \in \mathbb{N}$, por $\tilde{E}_l(\lambda) := \mathrm{Ker}((T - \lambda \tilde{I})^l) \subseteq V$.

Teorema de Descomposición Prima: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$, cuyo polinomio característico asociado a su matriz representante (con respecto a alguna base) es $p(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. Entonces se cumple que

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} \tilde{E}_{m_{\lambda_j}}(\lambda_j) = \bigoplus_{j=1}^{r} \tilde{E}_{k_j}(\lambda_j),$$

donde para cada $j \in \{1, .., r\}$, k_j es el menor natural que cumple $\tilde{E}_{k_j}(\lambda_j) = \tilde{E}_{k_j+1}(\lambda_j)$.

Teorema de Jordan: Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz de Jordan (su forma de Jordan) $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Esto significa que $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no singular tal que $J = P^{-1} A P$. Además, la forma de Jordan (única, salvo permutaciones de bloques) es la única matriz de Jordan en la que coinciden las dimensiones de los núcleos iterados con los de A.

Teorema: En la misma clase de semejanza de matrices, están todas las matrices con el mismo polinomio característico e idénticas dimensiones de núcleos iterados y ninguna más.

Además de lo dicho anteriormente, la consecuencia más relevante se conoce como el Teorema de Cayley-Hamilton: Sea p el polinomio característico de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces $p(A) = \Theta$.

Demostración (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$): Una forma elemental de demostrar este resultado, es con la ayuda de la forma de Jordan de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puesto que $J = P^{-1} A P$. Entonces se deduce que $p(J) = P^{-1} p(A) P$. Con esto, es suficiente con mostrar que $p(J) = \Theta$ para concluir. Sabemos que J es diagonal por bloques, i.e.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

donde $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, y $\forall j \in \{1, ..., r\} : J(\lambda_j) \in \mathcal{M}_{k_j}(\mathbb{C})$, con $k_j = m_{\lambda_j}$, es una matriz de Jordan asociada a λ_j. Siendo $p(x) := \sum_{l=1}^{n} \alpha_l x^l$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{l=1}^{n} \alpha_l A^l = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l (P J P^{-1})^l = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l P J^l P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l J^l \right) P^{-1} = P\, p(J)\, P^{-1}. \end{aligned}$$

De esta manera, se infiere que

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(J(\lambda_1)) & & & \\ & p(J(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J(\lambda_r)) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, $p(x) = \prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$. Así,

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, ..., r\} \, : \, p(J(\lambda_j)) &= \prod_{i=1}^{r}(J(\lambda_j) - \lambda_i \, I)^{m_{\lambda_i}} \\ &= \underbrace{(J(\lambda_j) - \lambda_j \, I)^{m_{\lambda_j}}}_{=\Theta} \prod_{i=1, i \neq j}^{r} (J(\lambda_j) - \lambda_i \, I)^{m_{\lambda_i}} \, . \end{aligned}$$

Se establece de esta forma que $p(J) = \Theta$, lo que equivale a decir que $p(A) = P \, p(J) \, P^{-1} = \Theta$.

Observación: Para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, proceder como en el caso complejo. Al final, inducir el polinomio característico a coeficientes reales, y concluir.

Comentarios: Este tipo de resultados motiva la introducción de los conceptos de polinomio mínimo, divisores elementales, factores invariantes, etc. Vamos simplemente a listar la relación entre este enfoque y el de polinomios.

Definiciones y propiedades importantes

1. Se dice que un polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\backslash\{\theta\}$ es mónico si su coeficiente del término de mayor grado es 1.
2. El polinomio minimal (mínimo en realidad, en el cuerpo $\mathbb{C}$) de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^r$, es el polinomio mónico q_A de menor grado tal que $q_A(A) = \Theta$. Puede probarse que si para cada $\lambda_j \in \sigma(A)$, k_j es el mínimo valor tal que $\dim(E_{k_j}(\lambda_j)) = m_{\lambda_j}$, entonces $q(x) := \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{k_j}$ es el polinomio mínimo de la forma de Jordan de A, y por tanto, de A.
3. El polinomio minimal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define de manera análoga. Para identificarlo, puede ser conveniente trabajar en el cuerpo $\mathbb{C}$. Sus factores irreducibles (en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) son a lo más de grado 2.
4. El polinomio minimal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siempre es factor del correspondiente polinomio característico de A.
5. Los divisores elementales de A son polinomios de la forma $(x - \lambda_j)^s$, construidos según la siguiente regla:
   por cada bloque de Jordan $J_{k_j}(\lambda_j)$, se toma un polinomio $(x - \lambda_j)^{k_j}$.
   Esto quiere decir que hay tantos divisores elementales como cajas de Jordan, y que sus grados marcan los tamaños de las mismas.
6. Una matriz es diagonalizable si y sólo si su forma de Jordan es diagonal. Equivalentemente, si y sólo si $\forall\, \lambda \in \sigma(A) : E_2(\lambda) = E_1(\lambda)$.
   A su vez, esto equivale a que todos los divisores elementales de A sean de grado uno, y a que el polinomio mínimo no tenga raíces múltiples.

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p_A(x) = (x+3)(x-1)$. Su polinomio minimal es $q_A := p_A$ en este caso.
2. Para I_n (matriz identidad de orden n), se tiene que su polinomio característico es $p(x) = (1-x)^n$, mientras que su polinomio minimal siempre será $q(x) = x - 1$.
3. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, su polinomio característico es $p(x) = (2-x)(1+x)^2 = -(x-2)(x+1)^2$, y su polinomio mínimo es $q(x) := (x-2)(x+1)$.
4. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tiene polinomio característico $p(x) = (-1-x)^3(2-x) = (x+1)^3(x-2)$, y polinomio minimal $q(x) := (x+1)^2(x-2)$.
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p_A(x) = x^2 + 1$. Si consideramos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, su polinomio minimal es $q_A(x) := x^2 + 1$. Por otro lado, si tomamos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, su polinomio minimal será $q_A(x) := (x-i)(x+i)$.

Comentario sobre la forma transpuesta: En varios contextos, es común encontrarse con la forma de Jordan compuesta de cajas de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

es decir, con los 1s debajo de la diagonal. Si se ha sabido encontrar la base que lleva a la forma de Jordan habitual, basta con cambiar el orden de los vectores para pasar a esta forma. En concreto, si los vectores $u_1, ..., u_s$ crean una caja $s \times s$ asociada a λ, entonces los vectores $u_s, ..., u_1$ dan la misma caja, con unos por debajo de la diagonal.

Consecuencia: Toda matriz es semejante a su transpuesta. Esto también se puede ver notando que los núcleos iterados de A y A^t tienen las mismas dimensiones.

Forma de Jordan real

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con todos sus elementos reales. Si $\lambda = \alpha + i\,\beta$ (con $\beta \neq 0$) es un valor propio de A y ya se tiene la base calculada para la parte de la forma de Jordan asociada a λ, entonces para $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ basta con conjugar los vectores obtenidos. Esto es

$$u \in E_j(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} \in E_j(\overline{\lambda})\,.$$

Por tanto, el número y tipo de cajas de Jordan es el mismo.
Si $\{u_1, ..., u_s\}$ es la base que lleva a la forma de Jordan asociada al valor propio $\lambda = \alpha + i\,\beta$ (con $\beta \neq 0$), entonces $\{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_s\}$ son los correspondientes a $\overline{\lambda}$. Luego, se toman

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathrm{Re}(u_1)\,, & v_2 &= \mathrm{Im}(u_1) \\ v_3 &= \mathrm{Re}(u_2)\,, & v_4 &= \mathrm{Im}(u_2) \\ &\vdots \\ v_{2s-1} &= \mathrm{Re}(u_s)\,, & v_{2s} &= \mathrm{Im}(u_s)\,. \end{aligned}$$

Con estos vectores, las cajas de λ y $\overline{\lambda}$ se mezclan, dando lugar a cajas más grandes, pero ya reales. Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 1 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \end{array}\right\} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

De esta forma, cuando hay valores propios complejos en una matriz real, se puede trabajar con cajas de Jordan por bloques del tipo

$$J_k(\lambda, \overline{\lambda}) := \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & & \\ & \Lambda & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Determinar la forma de Jordan real de la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Haciendo los cálculos, se encuentra que $p_A(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$, de donde se deduce que $\sigma(A) = \{-i, i\} \subseteq \mathbb{C}$. Ambos valores propios son dobles. Procediendo como en el ejemplo previo, se deduce la base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de $\mathbb{C}^4$, siendo $w_1 := (i, 0, 1, 0)^t$, $w_2 := (0, 1+i, 1, 2i)^t$, $w_3 := (-i, 0, 1, 0)^t$, y $w_4 := (0, 1-i, 1, -2i)^t$. De esta manera se construye la matriz $P := \left(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, w_4 \right)$ es decir

$$P := \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow J := P^{-1} A P = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Para obtener una forma de Jordan real, procedemos como se indicó:

$$v_1 := \mathrm{Re}(w_1) = (0,0,1,0)^t, v_2 := \mathrm{Im}(w_1) = (1,0,0,0)^t,$$
$$v_3 := \mathrm{Re}(w_2) = (0,1,1,0)^t, v_4 := \mathrm{Im}(w_2) = (0,1,0,2)^t.$$

Así se obtiene el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, una base de $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Esto induce

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} := Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Suponga que la forma canónica de Jordan de cierta matriz $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ es

$$J := \begin{pmatrix} -2 & & & & & & & & & \\ & -2 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & & & 5 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & 7 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 7 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 7 & & \\ & & & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Se observa $p_A(x) = p_J(x) = (-2-x)^2(5-x)^3(7-x)^5$, de donde se deduce que los valores propios de A son: $\lambda_1 = -2$ (doble), $\lambda_2 = 5$ (triple), $\lambda_3 = 7$ (quíntuple).
Se tiene, para el valor propio $\lambda_2 = 5$:

q_j (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* j) :

$q_1 = 1\,,\ q_2 = 1\,,\ q_3 = 0\,,\ q_4 = q_5 = \dots = 0$ (*se identifica* $l = 2$),

$p_j := q_j + \dots + q_2\,,\ j = 1,2$ (*Cantidad de cajas de Jordan de orden* $\geq j$) :

$p_1 = q_1 + q_2 = 2\,,\ p_2 = q_2 = 1\,,\ p_j = 0$ para $j > l = 2$

$n_j := \dim(E_j(5))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2\,,\ n_2 = p_2 + n_1 = 3 = m_{\lambda_2} \Rightarrow n_j = 3\,,\ \forall j \geq 2\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x-5)^2$.

Repitiendo el análisis para valor propio $\lambda_3 = 7$:

q_j ($Cantidad\ de\ cajas\ de\ Jordan\ de\ orden\ j$) :

$q_1 = 0\,,\ q_2 = 1\,,\ q_3 = 1\,,\ q_4 = q_5 = \ldots. = 0$ (*se identifica* $l = 3$),

$p_j := q_j + \ldots + q_3\,,\ j = 1, 2, 3$ ($Cantidad\ de\ cajas\ de\ Jordan\ de\ orden \geq j$) :

$p_1 = q_1 + q_2 + q_3 = 2\,,\ p_2 = q_2 + q_3 = 2\,,\ p_3 = q_3 = 1\,,\ p_j = 0$ para $j > l = 3$

$n_j := \dim(E_j(7))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2\,,\ n_2 = p_2 + n_1 = 4\,,\ n_3 = p_3 + n_2 = 5 = m_{\lambda_3}$

$\Rightarrow n_j = 5\,,\ \forall\, j \geq l = 3\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x - 7)^3\,.$

Para valor propio $\lambda_1 = -2$:

q_j ($Cantidad\ de\ cajas\ de\ Jordan\ de\ orden\ j$) :

$q_1 = 2\,,\ q_2 = q_3 = \ldots. = 0$ (*se identifica* $l = 1$),

$p_j := q_j + \ldots + q_1\,,\ j = 1$ ($Cantidad\ de\ cajas\ de\ Jordan\ de\ orden \geq j$) :

$p_1 = q_1 = 2\,,\ p_j = 0$ para $j > l = 1$

$n_j := \dim(E_j(-2))$, *se obtienen por* $n_0 := 0\,,\ n_j := p_j + n_{j-1}\,,\ j \geq 1$

$n_0 := 0\,,\ n_1 = p_1 + n_0 = 2 = m_{\lambda_1} \Rightarrow n_j = 2\,,\ \forall\, j \geq l = 1\,.$

Factor del polinomio minimal asociado : $(x + 2)\,.$

El polinomio minimal de A es entonces: $q_A(x) := (x + 2)(x - 5)^2(x - 7)^3.$

Ejemplo: Determine la forma de Jordan real de $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Polinomio característico de A:
$p_A(x) := \det(A - xI) = -x^3 - 1 = -(x+1)(x^2 - x + 1)$.
Valores propios de A en $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$,
De aquí se deduce que en el cuerpo real, A no es diagonalizable ni admite forma canónica de Jordan.
Determinaremos entonces su forma de Jordan real. Para ello, primero debemos determinar su forma canónica de Jordan compleja. Como los tres valores propios son distintos, A es diagonalizable y ella será su forma canónica de Jordan compleja. Esto significa que

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Los espacios propios asociado a los valores propios son:

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \; S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \; S_{\lambda_3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Así, la base de $\mathbb{C}^{3\times 1}$ formada por vectores propios es $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de semejanza a la forma canónica de Jordan compleja es:

$$P := \left(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = P^{-1} A\, P\,.$$

De aquí se deduce una base de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ dada por $\{w_1, w_2, w_3\}$, donde

$$w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 := \mathrm{Re}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 := \mathrm{Im}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de semejanza a la forma de Jordan real es:

$$Q := \left(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbb{R}} = Q^{-1} A\, Q\,.$$