Análisis Numérico III
Problemas de valores iniciales y de frontera para EDPs hiperbólicas y parabólicas
Módulo 5, Presentación 12

Raimund Bürger

30 de junio de 2022

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

5.5.1 El teorema de equivalencia de Lax Resumiremos la teoría de estabilidad para métodos de diferencias finitas de problemas de valores iniciales publicada en 1956 por P.D. Lax y R.D. Richtmyer. La teoría es similar a la teoría de Dahlquist para problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Aquí también obtenemos un teorema de equivalencia que nos permite estudiar el comportamiento de métodos de diferencias para una gran clase de problemas de valores iniciales, y queremos aplicar esta teoría a los métodos estudiados en las últimas dos secciones. La transformación de Fourier sera una herramienta útil para lograr esto.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y X un espacio de Banach de funciones vectoriales definidas sobre I:

$$X = \left\{ \boldsymbol{u} = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \right)^{\mathrm{T}} \mid \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}^p \right\}.$$

Sea $\|\cdot\|$ la norma de X. Sea $0 \leqslant t \leqslant T$ el intervalo de un parámetro, y sea $A : X \supset D(A) \to X$ un operador lineal diferencial con el dominio $D(A) \subset X$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Podemos escribir A en forma matricial como

$$A = (a_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, p,$$

donde

$$a_{ik} = \sum_{\nu=0}^{s} a_{ik}^{(\nu)}(x) \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}, \quad a_{ik}^{(\nu)} : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C},$$

es decir, A no debe depender del parámetro t.

Se considera ahora el problema de valores iniciales

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t), \quad 0 < t \leqslant T; \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \in X. \tag{5.64}$$

Una solución de (5.64) es una familia de elementos de X,

$$\boldsymbol{u}(t) : \mathbb{R} \supset [0, T] \to X,$$

que depende de t en forma diferenciable, y que satisface (5.64).

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Sea $D \subset D(A) \subset X$ el conjunto de aquellas funciones $\boldsymbol{u}_0 \in X$ a las cuales pertenece una solución clásica (o intrínseca) de (5.64).

A través de (5.64), se define para cada $t \in [0, T]$ un operador lineal

$$\mathcal{E}_0(t) : X \supset D \to X, \quad \mathcal{E}_0(t)\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}_0 \in D;$$

$\mathcal{E}_0(t)$ se llama operador de solución asociado al problema (5.64).

Definición 5.3 El problema de valores iniciales (5.64) se llama correctamente puesto si

a) El dominio $D \subset X$ de $\mathcal{E}_0(t)$ es denso en X.
b) La familia $\mathcal{E}_0(t)$, $t \in [0, T]$, es uniformemente acotada:

$$\exists K_{\mathcal{E}} > 0 : \ \forall t \in [0, T] : \quad \|\mathcal{E}_0(t)\| \leqslant K_{\mathcal{E}}.$$

Condición (b): "cada solución clásica $\boldsymbol{u}(t)$ de (5.64) depende continuamente de $\boldsymbol{u}_0 \in D \subset X$." Condición (a): "cualquier función inicial $\boldsymbol{u}_0 \in X$ puede ser aproximada a precisión arbitraria por una función inicial que pertenece a D. Además, $\mathcal{E}_0(t)$ posee una extensión lineal y continua $\mathcal{E}(t) : X \to X$ con $\|\mathcal{E}(t)\| = \|\mathcal{E}_0(t)\|$ para $t \in [0, T]$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Nos referimos a $\mathcal{E}(t)$ como operador de solución generalizado y a las funciones

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathcal{E}(t)\boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}_0 \in X,$$

como soluciones generalizadas de (5.64). Se puede verificar facilmente que

$$\mathcal{E}(s+t) = \mathcal{E}(s)\mathcal{E}(t) \quad \text{para } s,t \geqslant 0. \tag{5.65}$$

(Los problemas de valores iniciales estudiados en las dos secciones anteriores son correctamente puestos.)

Consideremos aproximaciones por diferencias finitas al problema (5.64). Sean Δx y Δt tamaños de pasos escogidos de tal manera que

$$\Delta x = \psi(\Delta t), \quad \text{donde} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \psi(\Delta t) = 0.$$

Sea $T : X \to X'$ el siguiente operador de translación:

$$T\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x+\Delta x) \quad \forall \boldsymbol{u} \in X. \tag{5.66}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

En los ejemplos que se considerarán más adelante, el espacio de Banach X' siempre es idéntico a X. En virtud de (5.66) es obvio como hay que definir las potencias T^ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Una aproximación por diferencias finitas que conecta dos capas de t (es decir, un método de paso simple) puede ser escrita en la forma

$$\boldsymbol{B}_1(\Delta t)\boldsymbol{u}_{n+1} = -\boldsymbol{B}_0(\Delta t)\boldsymbol{u}_n, \quad n = 0, \dots, N-1 = \frac{T - \Delta t}{\Delta t},$$

donde

$$\boldsymbol{B}_\varrho(\Delta t) = \sum_{|\nu|<\infty} \boldsymbol{B}_\nu^{(\varrho)} T^\nu, \quad \boldsymbol{B}_\nu^{(\varrho)} \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad \varrho = 0, 1. \tag{5.67}$$

Suponiendo que el operador $\boldsymbol{B}_1(\Delta t)$ es invertible, podemos definir

$$\boldsymbol{C}(\Delta t) := -\boldsymbol{B}_1^{-1}(\Delta t)\boldsymbol{B}_0(\Delta t)$$

y escribir la aproximación por diferencias finitas en la forma

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{C}(\Delta t)\boldsymbol{u}_n, \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{5.68}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Definición 5.4 La aproximación por diferencias finitas (5.68) se llama consistente a (5.64) si para cada solución intrínsica $\boldsymbol{u}(t)$, $t \in [0, T]$, de una clase $U \subset X$ de funciones cuyas funciones iniciales $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ forman un conjunto denso en X, se satisface la relación

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\| \boldsymbol{u}(t + \Delta t) - \boldsymbol{C}(\Delta t)\boldsymbol{u}(t) \right\| = 0 \tag{5.69}$$

uniformemente para $t \in [0, T]$.

La expresión

$$\frac{1}{\Delta t} \left\| \boldsymbol{u}(t + \Delta t) - \boldsymbol{C}(\Delta t)\boldsymbol{u}(t) \right\|$$

se llama error de truncación de la aproximación (5.68).

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Definición 5.5 La aproximación por diferencias finitas (5.68) se llama convergente si para cada sucesión $\{\Delta_j t\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\Delta_j t \to 0 \quad \text{para } j \to \infty$$

y cada sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_j \Delta_j t \to t \quad \text{para } j \to \infty$$

con $t \in [0, T]$ arbitrario, y cualquier función inicial $\boldsymbol{u}_0 \in X$, tenemos para la solución $\boldsymbol{u}(t) \in X$ (posiblemente se trata de una solución generalizada) de (5.64) correspondiente:

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}(t) \right\| = 0. \tag{5.70}$$

Definición 5.6 La familia de operadores de diferencias

$$\boldsymbol{C}(\Delta t) : X \to X, \quad \Delta t > 0$$

se llama estable si existen constantes $\tau > 0$ y $K > 0$ tales que

$$\left\| \boldsymbol{C}(\Delta t)^n \right\| \leqslant K \quad \text{para } \Delta t \in (0, \tau],\ n\Delta t \in [0, T]. \tag{5.71}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Lema 5.1 Si para cada $\boldsymbol{u} \in X$ existe $K(\boldsymbol{u}) > 0$ tal que

$$\left\| \boldsymbol{C}^n(\Delta t)\boldsymbol{u} \right\| \leqslant K(\boldsymbol{u}) \quad \text{para } \Delta t \in (0, \tau],\ n\Delta t \in [0, T],$$

entonces existe una constante K tal que se satisface la condición de estabilidad (5.71).

Demostración Ver Richtmyer & Morton (1967), §2.5. ∎

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Teorema 5.4 (Teorema de equivalencia de Lax) Sea el problema de valores iniciales (5.64) correctamente puesto, y sea (5.68) consistente a (5.64). Entonces la estabilidad de los operadores de diferencias $\boldsymbol{C}(\Delta t)$ es equivalente con la convergencia de (5.68).

Demostración

1. Primero demostramos que la convergencia implica la estabilidad. Notamos que para $\Delta t > 0$, los operadores $\boldsymbol{C}(\Delta t) : X \to X$ son lineales y continuos. Supongamos ahora que (5.71):

$$\left\| \boldsymbol{C}(\Delta t)^n \right\| \leqslant K \quad \text{para } \Delta t \in (0, \tau],\ n\Delta t \in [0, T]$$

no es válido. Entonces, existen una función $\boldsymbol{u}_0 \in X$ y sucesiones $\{\Delta_j t\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ y $n_j \Delta_j t \in [0, T]$ tales que

$$\left\| \boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} \boldsymbol{u}_0 \right\| \to \infty \quad \text{para } j \to \infty. \tag{5.72}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.4 (continuación)

1. Como consecuencia, se debe satisfacer

$$\Delta_j t \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puesto que sino la sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sería acotada y en virtud de la dependencia continua de $\boldsymbol{C}(\Delta t)$ de $\Delta t > 0$, (5.72) no podría ser válido.

Entonces existe una subsucesión $\{j_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $n_{j_\nu}\Delta_{j_\nu}t \to t_0$ para $\nu \to \infty$ y algún $t_0 \in [0, T]$.

En virtud de (5.72) la condición de convergencia (5.70) no puede estar satisfecha, puesto que debido a la hipótesis de la correctitud del problema (5.64), el valor

$$\left\|\mathcal{E}(t_0)\boldsymbol{u}_0\right\| = \left\|\boldsymbol{u}(t_0)\right\|$$

es finito. Esto concluye la demostración de esta dirección.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.4 (continuación)

1. (Hasta ahora no hemos utilizado la consistencia (5.69). Existen métodos de diferencias inconsistentes que convergen.)
2. Ahora demostramos que la estabilidad implica la convergencia. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso en X, tal que para cada $\boldsymbol{u}_0 \in D$ la familia de funciones $\boldsymbol{u}(t) = \mathcal{E}(t)\boldsymbol{u}_0$ entrega una solución intrínseca de (5.64), y la condición de consistencia (5.69) se satisface. Sean $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{\Delta_j t\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $n_j\Delta_j t \to t \in [0, T]$ para $j \to \infty$.

   Sea ψ_j la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta en el punto $n_j\Delta_j t$, es decir,

$$\begin{aligned}\psi_j &= \big(\boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} - \mathcal{E}(n_j\Delta_j t)\big)\boldsymbol{u}_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n_j-1} \boldsymbol{C}(\Delta_j t)^k \big(\boldsymbol{C}(\Delta_j t) - \mathcal{E}(\Delta_j t)\big) \cdot \mathcal{E}\big((n_j - 1 - k)\Delta_j t\big)\boldsymbol{u}_0;\end{aligned} \tag{5.73}$$

   fácilmente podemos verificar la segunda ecuación es correcta.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.4 (continuación)

2. Debido a la condición de estabilidad (5.71),
$$\left\|\boldsymbol{C}(\Delta_j t)^k\right\| \leqslant K \quad \text{para } k = 0, \dots, n_j - 1.$$
La condición de consistencia (5.69) implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para $\Delta_j t < \delta$ y $k = 0, \dots, n_j - 1$,
$$\left\|\big(\boldsymbol{C}(\Delta_j t) - \mathcal{E}(\Delta_j t)\big)\boldsymbol{u}\big((n_j - 1 - k)\Delta_j t\big)\right\| \leqslant \varepsilon \Delta_j t.$$
Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos de (5.73):
$$\|\psi_j\| \leqslant K\varepsilon n_j \Delta_j t \leqslant KT\varepsilon \quad \text{para } \Delta_j t < \delta. \tag{5.74}$$
Como ε fue elegido arbitrariamente pequeño, (5.74) implica
$$\lim_{j\to\infty} \|\psi_j\| = 0, \tag{5.75}$$
es decir, la condición de convergencia (5.70) está demostrada para cada $\boldsymbol{u}_0 \in D$ si el operador $\mathcal{E}(n_j \Delta_j t)$ puede ser reemplazado por el operador $\mathcal{E}(t)$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.4 (continuación)

2. Definiendo
$$t' := \mathrm{mín}\{t, n_j\Delta_j t\}, \quad s := |t - n_j\Delta_j t|,$$
obtenemos de (5.65)
$$\mathcal{E}(n_j\Delta_j t) - \mathcal{E}(t) = \pm\big(\mathcal{E}(s) - \boldsymbol{I}\big),$$
donde "$+$" y "$-$" son válidos para $t < n_j\Delta_j t$ y $t \geqslant n_j\Delta_j t$, respectivamente.

   Ahora concluimos que
$$\big\|\big(\mathcal{E}(n_j\Delta_j t) - \mathcal{E}(t)\big)\boldsymbol{u}_0\big\| \leqslant K_{\mathcal{E}}\big\|\big(\mathcal{E}(s) - \boldsymbol{I}\big)\boldsymbol{u}_0\big\|,$$
donde $K_{\mathcal{E}}$ es la constante de la Definición 5.3.

   Como $s \to 0$ cuando $n_j\Delta_j t \to t$ y $\mathcal{E}(0) = \boldsymbol{I}$, esta última desigualdad nos permite concluir que
$$\big\|\big(\mathcal{E}(n_j\Delta_j t) - \mathcal{E}(t)\big)\boldsymbol{u}_0\big\| \to 0 \quad \text{para } n_j\Delta_j t \to t \text{ y } \boldsymbol{u}_0 \in D. \tag{5.76}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.4 (continuación)

2. Tomando en cuenta que
$$\left\| \left(\boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} - \mathcal{E}(t) \right) \boldsymbol{u}_0 \right\| \leqslant \| \psi_j \| + \left\| \left(\mathcal{E}(n_j \Delta_j t) - \mathcal{E}(t) \right) \boldsymbol{u}_0 \right\|,$$
podemos deducir de (5.75) y (5.76) la condición de convergencia (5.70):
$$\lim_{j \to \infty} \left\| \boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}(t) \right\| = 0$$
para todo $\boldsymbol{u}_0 \in D$.

Sea $\boldsymbol{u} \in X$ arbitrario y $\{\boldsymbol{u}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset D$ una sucesión que converge a $\boldsymbol{u}$. En este caso,
$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} - \mathcal{E}(t) \right) \boldsymbol{u} = {} & \left(\boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} - \mathcal{E}(t) \right) \boldsymbol{u}_\nu \\ & + \boldsymbol{C}(\Delta_j t)^{n_j} (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\nu) - \mathcal{E}(t)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\nu). \end{aligned}$$
para j y ν suficientemente grande podemos achicar arbitrariamente los tres términos. Entonces, hemos establecido (5.70) para funciones $\boldsymbol{u} \in X$ arbitrarias. ■

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Según el Teorema 5.4, para la investigación de la convergencia de métodos de diferencias consistentes para problemas de valores iniciales correctamente puestos es suficiente verificar la estabilidad (o la inestabilidad) de la familia de operadores $\boldsymbol{C}(\Delta t)$ para $\Delta t > 0$.

Antes de examinar algunos métodos específicos, demostraremos como podemos convertir un método de pasos múltiples en un método de paso simple.

5.5.2 Conversión de un método de pasos múltiples en un método de paso simple Un método de diferencias finitas es de la forma

$$\boldsymbol{B}_q(\Delta t)\boldsymbol{u}_{n+q} + \ldots + \boldsymbol{B}_1(\Delta t)\boldsymbol{u}_{n+1} + \boldsymbol{B}_0(\Delta t)\boldsymbol{u}_n = 0. \tag{5.77}$$

Aquí se supone que $\boldsymbol{u}_n, \ldots, \boldsymbol{u}_{n+q-1}$ son conocidas, y que hay que calcular $\boldsymbol{u}_{n+q}$ a partir de (5.77).

Para $q = 1$, nos encontramos en el caso especial:

$$\boldsymbol{B}_1(\Delta t)\boldsymbol{u}_{n+1} = -\boldsymbol{B}_0(\Delta t)\boldsymbol{u}_n, \quad n = 0, \ldots, N-1 = \frac{T - \Delta t}{\Delta t}. \tag{MPS}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Para asegurar una solución única, la inversa $(\boldsymbol{B}_q(\Delta t))^{-1}$ debe existir; ahora definimos

$$\boldsymbol{C}_\varrho(\Delta t) := -\big(\boldsymbol{B}_q(\Delta t)\big)^{-1}\boldsymbol{B}_\varrho(\Delta t), \quad \varrho = 0, \dots, q-1,$$

es decir podemos escribir (5.77) como

$$\boldsymbol{u}_{n+q} = \boldsymbol{C}_{q-1}(\Delta t)\boldsymbol{u}_{n+q-1} + \dots + \boldsymbol{C}_0(\Delta t)\boldsymbol{u}_n. \tag{5.78}$$

Consideramos

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_n := (\boldsymbol{u}_{n+q-1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)^{\mathrm{T}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \boldsymbol{u}_\varrho \in X$$
$$\text{para } \varrho = n, \dots, n+q-1$$

como elementos del espacio de Banach

$$\tilde{X} := X^q = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{q}.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Definimos la norma de $\tilde{X}$ de la siguiente manera: si $\|\boldsymbol{u}_\varrho\|$, $\varrho = n, \dots, n+q-1$ es la norma de X, entonces el espacio $\tilde{X}$ está equipado con la norma

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_n\| := \left(\sum_{\varrho=n}^{n+q-1} \|\boldsymbol{u}_\varrho\|^2 \right)^{1/2}.$$

Definimos los siguientes operadores de diferencias sobre $\tilde{X}$:

$$\tilde{\boldsymbol{C}}(\Delta t) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{q-1}(\Delta t) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{C}_0(\Delta t) \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta t > 0.$$

El sistema de ecuaciones de diferencias (5.78) es equivalente a

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{C}}(\Delta t)\tilde{\boldsymbol{u}}_n.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Una pequeña modificación (ver §7.3 en Richtmyer y Morton, 1967) de la demostración del Teorema 5.4 demuestra que la estabilidad de la familia de operadores $\tilde{\boldsymbol{C}}(\Delta t) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es equivalente con la convergencia del método de q pasos (5.77) o (5.78).

5.5.2 Transformación de Fourier de métodos de diferencias

Consideremos ahora las aplicaciones del Teorema de Equivalencia de Lax. El análisis se realizará en la norma L^2, ya que en este caso los espacios de Banach X son espacios de Hilbert, y podemos utilizar la herramienta del análisis de Fourier.

Sea $I = [0, L] \subset \mathbb{R}$ un intervalo fijo, y consideremos funciones cuadraticamente integrables del período L:

$$\boldsymbol{u}(x) := \left(u^{(1)}(x), \dots, u^{(p)}(x)\right)^{\mathrm{T}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p,$$

donde $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x + L)$ para $x \in \mathbb{R}$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Además, definimos la forma bilineal

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_0^L \sum_{\nu=1}^{p} u^{(\nu)}(x)\bar{v}^{(\nu)}(x)\,\mathrm{d}x$$

y la norma $\|\boldsymbol{u}\| := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2}$. Ahora, el espacio de Hilbert es

$$X := \left\{\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p \mid \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x+L) \text{ para } x \in \mathbb{R};\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) < \infty\right\}. \tag{5.79}$$

Cada función $\boldsymbol{u} \in X$ puede ser representada como serie de Fourier en exactamente una manera.Si definimos

$$\mathcal{L} := \{k = 2\pi m/L \ :\ m \in \mathbb{Z}\} :$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \boldsymbol{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \boldsymbol{c}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} u(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}^p, \quad k \in \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{5.80}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Definimos

$$\boldsymbol{c}_k := \left(c_k^{(1)}, \ldots, c_k^{(p)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^p$$

y la sucesión $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{c}_k\}_{k \in \mathcal{L}}$. Entre dos sucesiones $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ de este tipo definimos la forma bilineal

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) := \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k \in \mathcal{L}} c_k^{(\nu)} \bar{d}_k^{(\nu)}$$

y la norma $\|\boldsymbol{c}\| := (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})^{1/2}$.

Ahora sea V el espacio de Hilbert

$$V := \left\{\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{c}_k\}_{k \in \mathcal{L}} \mid \boldsymbol{c}_k \in \mathbb{C}^p, \, (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) < \infty\right\}. \tag{5.81}$$

Con cada $\boldsymbol{u} \in X$ asociamos de manera única el sistema $\boldsymbol{c} \in V$ de sus coeficientes de Fourier:

$$\phi : X \ni \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{c} \in V.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Es fácil ver que la aplicación ϕ es biyectiva y lineal. Además, en virtud de (5.80), sabemos que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|^2 &= \int_0^L \sum_{\nu=1}^{p} u^{(\nu)}(x)\bar{u}^{(\nu)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k,l\in\mathcal{L}} c_k^{(\nu)}\bar{c}_l^{(\nu)} \int_0^L \exp\bigl(\mathrm{i}(k-l)x\bigr)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k\in\mathcal{L}} \bigl|c_k^{(\nu)}\bigr|^2 = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) = \|\boldsymbol{c}\|^2.\end{aligned}$$

Lema 5.2 Sean X y V los espacios de Hilbert definidos por (5.79) y (5.81), respectivamente. Entonces la aplicación $\phi : X \to V$ mapea X a V de manera isomorfa e isométrica (es decir, se conserva la norma).

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Sea $\Delta x > 0$ un tamaño de paso y $T : X \to X$ el operador de translación definido en (5.66):

$$T\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x + \Delta x) \quad \forall \boldsymbol{u} \in X.$$

Ahora queremos ver de cuál forma es el análogo isométrico de T, es decir, el operador

$$\phi T \phi^{-1} : V \to V.$$

Para $\boldsymbol{u} \in X$ y utilizando (5.66) y (5.80), obtenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(x) = (T\boldsymbol{u})(x) &= T\left(\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \boldsymbol{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \boldsymbol{c}_k T \boldsymbol{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \left(\boldsymbol{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta x}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \in \mathcal{L}} \boldsymbol{d}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.\end{aligned}$$

Los coeficientes de Fourier de $\boldsymbol{v}(x)$ son $\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta x}$ para $k \in \mathcal{L}$: a la translación $T : X \to X$ por Δx (ver (5.66)) corresponde, en el espacio V, la multiplicación del coeficiente k ($k \in \mathcal{L}$) por $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta x}$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

5.5.4 Matrices de amplificación Supongamos que el operador A:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t), \quad 0 < t \leqslant T; \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \in X$$

posee coeficientes constantes. En este caso, la aplicación ϕ mapea los operadores de diferencias

$$\boldsymbol{B}_\varrho(\Delta t) = \sum_{|\nu|<\infty} \boldsymbol{B}_\nu^{(\varrho)} T^\nu : X \to X, \quad \varrho = 0, 1$$

(ver (5.67)) a la siguiente familia de matrices en el espacio V:

$$\boldsymbol{H}_\varrho(\Delta t, k) := \sum_{|\nu|<\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu k \Delta x} \boldsymbol{B}_\nu^{(\varrho)} \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad \varrho = 0, 1, \quad k \in \mathcal{L}.$$

Definiendo $\boldsymbol{G}(\Delta t, k) := \boldsymbol{H}_1^{-1}(\Delta t, k)\boldsymbol{H}_0(\Delta t, k)$ para $k \in \mathcal{L}$, obtenemos (análogo isom. de (5.68)) la familia de sistemas lineales

$$\boldsymbol{c}_{k,n+1} = \boldsymbol{G}(\Delta t, k)\boldsymbol{c}_{k,n}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

donde $\boldsymbol{c}_{k,n}, \boldsymbol{c}_{k,n+1} \in \mathbb{C}^p$ y $\boldsymbol{G}(\Delta t, k) \in \mathbb{C}^{p\times p}$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Definición 5.7 Las matrices $\boldsymbol{G}(\Delta t, k) \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \mathcal{L}$, se llaman matrices de amplificación asociadas al operador de diferencias $\boldsymbol{C}(\Delta t)$.

5.5.5 Teorema de Lax y Richtmyer y condición de estabilidad de von Neumann Debido a la isometría de los espacios X y V podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.5 (Lax y Richtmyer, 1956) Los operadores de diferencias $\boldsymbol{C}(\Delta t)$ que aparecen en (5.68) son estables (ver Definición 5.6) si y sólo si existen constantes $\tau > 0$ y $K > 0$ tales que

$$\left\| \boldsymbol{G}^n(\Delta t, k) \right\|_2 \leqslant K \quad \text{para } \Delta t \in (0, \tau],\ n\Delta t \in [0, T],\ k \in \mathcal{L}. \tag{5.82}$$

Aquí las matrices $\boldsymbol{G}(\Delta t, k) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ son las matrices de amplificación asociadas a $\boldsymbol{C}(\Delta t)$, y $\| \cdot \|_2$ es la norma espectral.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.5

1. Escogemos un elemento arbitrario $k \in \mathcal{L}$ y $\boldsymbol{c}_k \in \mathbb{C}^p$ tal que

$$\|\boldsymbol{c}_k\|_2 = 1, \quad \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\boldsymbol{c}_k\right\|_2 = \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego definimos

$$\boldsymbol{u}(x) := \frac{1}{\sqrt{L}}\boldsymbol{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \in X.$$

Sabemos que $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, y en virtud del análisis anterior,

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2 = \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\boldsymbol{c}_k\right\|_2 = \left\|\boldsymbol{C}^n(\Delta t)\boldsymbol{u}\right\| \\ \leqslant \left\|\boldsymbol{C}^n(\Delta t)\right\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\sup_{k \in \mathcal{L}} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2 \leqslant \left\|\boldsymbol{C}^n(\Delta t)\right\|.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Demostración del Teorema 5.5 (continuación)

2. Sea $\boldsymbol{u} \in X$ tal que $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Si $\{\boldsymbol{c}_k\}_{k\in\mathcal{L}}$ son los coeficientes de Fourier de $\boldsymbol{u}$, entonces sabemos que

$$\sum_{k\in\mathcal{L}} \|\boldsymbol{c}_k\|_2^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 = 1,$$

luego

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{C}^n(\Delta t)\boldsymbol{u}\right\|^2 &= \sum_{k\in\mathcal{L}} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\boldsymbol{c}_k\right\|_2^2 \\ &\leqslant \sup_{k\in\mathcal{L}} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2^2 \sum_{k\in\mathcal{L}} \|\boldsymbol{c}_k\|_2^2 \\ &= \sup_{k\in\mathcal{L}} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Dado que $\boldsymbol{u} \in X$ con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ fue arbitrario, concluimos que

$$\left\|\boldsymbol{C}^n(\Delta t)\right\| \leqslant \sup_{k\in\mathcal{L}} \left\|\boldsymbol{G}^n(\Delta t, k)\right\|_2.$$

Esto concluye la demostración del Teorema 5.5. $\blacksquare$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

En virtud de los Teoremas 5.4 y 5.5, la convergencia del método de diferencias (5.68) es equivalente con la validez de (5.82). Veremos que esta condición resulta muy útil.
El siguiente teorema entrega un criterio de estabilidad necesario muy importante.

Teorema 5.6 (Condición de estabilidad de von Neumann) Una condición necesaria para la convergencia del método de diferencias (5.68) es la condición

$$r_\sigma\big(\boldsymbol{G}(\Delta t, k)\big) \leqslant 1 + \mathcal{O}(\Delta t) \quad \text{para } \Delta t \in (0,\tau],\ k \in \mathcal{L}. \tag{5.83}$$

Demostración Sea (5.68) convergente. En virtud de los Teoremas 5.4 y 5.5 obtenemos la validez de (5.82).
Sin pérdida de generalidad sea $K > 1$. Como

$$r_\sigma^n(\boldsymbol{G}) = r_\sigma(\boldsymbol{G}^n) \leqslant \|\boldsymbol{G}^n\|_2,$$

tenemos $r_\sigma(\boldsymbol{G}) \leqslant K^{1/n}$, y en particular

$$r_\sigma(\boldsymbol{G}) \leqslant K^{\Delta t/T} = (K^{1/T})^{\Delta t} =: f(\Delta t).$$

Demostración del Teorema 5.6 (continuación)

La función $f : [0, \tau] \to \mathbb{R}$ es estrictamente isotónica y convexa con $f(0) = 1$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que $f(\Delta t) \leqslant 1 + c\Delta t$ para $\Delta t \in [0, \tau]$. ∎

En muchos casos la condición (5.83) también es suficiente para la convergencia, por ejemplo si las matrices de amplificación $\boldsymbol{G}(\Delta t, k)$ son normales (se dice que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es "normal" si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$). En este caso $r_\sigma(\boldsymbol{G}) = \|\boldsymbol{G}\|_2$. Trivialmente, esto se cumple para $p = 1$.

5.5.6 Análisis de estabilidad de algunos métodos de diferencias

Verificaremos la validez de (5.82) para cada uno se los métodos. Todos los métodos de diferencias examinados son consistentes con los problemas de valores iniciales correspondientes.

Ejemplo 5.2 Consideremos el método (5.43), donde $\lambda := \Delta t / \Delta x$:

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jn} \\ w_{jn} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

$$\begin{pmatrix} v_{j,0} \\ w_{j,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Podemos escribirlo en la forma

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \left\{ \boldsymbol{I} T^0 + \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{A} (T^1 - T^{-1}) \right\} \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

El operador $\{\dots\}$ corresponde a $\boldsymbol{C}(\Delta t)$ en (5.68):

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{C}(\Delta t) \boldsymbol{u}_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.2 (continuación) Definiendo $\phi := k\Delta x$ y aplicando la substitución $T^\nu \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\phi}$ obtenemos las siguientes matrices de amplificación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(\Delta t, k) &= \boldsymbol{I} + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta x})\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{I} + \lambda\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{I} + \lambda\frac{1}{2}\big(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi - \big)\cos(-\phi) - \mathrm{i}\sin(-\phi)\big)\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{I} + \lambda\frac{1}{2}(2\mathrm{i}\sin\phi)\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{I} + \mathrm{i}\lambda\sin\phi\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad \Delta t > 0. \end{aligned} \tag{5.84}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.2 (continuación) Según hipótesis, la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica. Podemos chequear facilmente que $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{G}^*\boldsymbol{G}$, es decir $\boldsymbol{G}$ en (5.84) es normal. La condición de von Neumann (5.83) es equivalente con la estabilidad (5.82).

Obtenemos el radio espectral

$$r_\sigma(\boldsymbol{G}) = \bigl(1 + \lambda^2 \sin^2 \phi r_\sigma^2(\boldsymbol{A})\bigr)^{1/2}.$$

En virtud de $r_\sigma(\boldsymbol{A}) > 0$, esto implica que la condición de von Neumann (5.83) está satisfecha para todo $\phi \in [0, 2\pi]$ si y sólo si

$$\exists \beta \geqslant 0 : \quad \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \beta. \tag{5.85}$$

Por lo tanto, (5.85) es equivalente con la convergencia del método. Dado que la relación (5.85) es muy deventajosa, no se puede recomendar este método.

Ejemplo 5.3 Se examina el método (5.44):

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} + v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} + w_{j-1,n} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix},$$

$$j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

El método puede ser escrito en la forma

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{I}(T + T^{-1}) + \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{A}(T^{1} - T^{-1}) \right\} \begin{pmatrix} v_{j,n} \\ w_{j,n} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Definiendo $\phi := k\Delta x$ obtenemos las matrices de amplificación

$$\boldsymbol{G}(\Delta t, k) = \cos\phi \boldsymbol{I} + \mathrm{i}\lambda \sin\phi \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad k \in \mathcal{L}, \quad \Delta t > 0.$$

Vemos que $\boldsymbol{G}$ es normal. Si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$, entonces los valores propios $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}$ de $\boldsymbol{G}$ satisfacen

$$|\sigma_j|^2 = \cos^2\phi + \lambda^2 \mu_j^2 \sin^2\phi, \quad j = 1, 2.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.3 (continuación) Esto implica que la condición

$$\lambda \leqslant \frac{1}{r_\sigma(\boldsymbol{A})} \tag{5.86}$$

es equivalente con (5.83) y por lo tanto con la convergencia del método, puesto $\lambda > 0$ se considera fijo. Para cualquier constante λ que no satisface (5.86) el método ya no converge.

Ejemplo 5.4 Se examina el método (5.45):

$$\begin{aligned} v_{j,n+1} &= v_{jn} + c\lambda \left(w_{j+1/2,n} - w_{j-1/2,n} \right), \\ w_{j-1/2,n+1} &= w_{j-1/2,n} + c\lambda \left(v_{j,n+1} - v_{j-1,n+1} \right). \end{aligned}$$

Este método puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ -\lambda c(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}) & \boldsymbol{T}^{-1/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \lambda c(\boldsymbol{T}^{1/2} - \boldsymbol{T}^{-1/2}) \\ 0 & \boldsymbol{T}^{-1/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_n,$$

$$\lambda = \frac{\Delta}{\Delta x}.$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.4 (continuación) Para $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\Delta t, k)$, $\phi = k\Delta x$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda c(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda c(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} & 0 \\ \lambda c(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda c(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} & \lambda c(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) \\ \lambda c(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}) & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} + \lambda^2 c^2 (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \lambda c(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}) \\ \lambda c(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}}) & 1 + \lambda^2 c^2 (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}})^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sea $a = 2c\lambda \sin(\phi/2)$, entonces

$$\boldsymbol{G}(\Delta t, k) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i}a \\ \mathrm{i}a & 1-a^2 \end{bmatrix}. \tag{5.87}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.4 (continuación) Aquí $\boldsymbol{G}$ no es normal. La matriz $\boldsymbol{G}$ posee los valores propios

$$\sigma_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}a^2 \pm \mathrm{i}\frac{a}{2}\sqrt{4 - a^2}. \tag{5.88}$$

Según el Teorema de Schur existe una matrix unitaria $\boldsymbol{U}$ tal que

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*, \quad \text{con } \boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}^{-1} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}$ es una matriz triangular superior. obtenemos

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & b \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i}\dfrac{1-\bar{\sigma}_1}{a} \\ \mathrm{i}\dfrac{1-\sigma_1}{a} & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$b := a\left(-a\sqrt{4 - a^2} + \mathrm{i}\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)\right).$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.4 (continuación) En virtud de $\|\boldsymbol{U}\|_2 = \|\boldsymbol{U}^*\|_2 = 1$ sabemos que $\|\boldsymbol{G}^n\|_2 = \|\boldsymbol{\Lambda}^n\|_2$ para $n \in \mathbb{N}$, es decir podemos utilizar las matrices $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\Delta t, k)$ para verificar (5.82).

Dado que para cada par de normas matriciales $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ existen constantes $m > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} : \quad m\|\boldsymbol{A}\|' \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \leqslant M\|\boldsymbol{A}\|',$$

sabemos que (5.82) se satisface si y sólo si todos los elementos de $\boldsymbol{\Lambda}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ son uniformemente acotados.

En nuestro caso,

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = \begin{bmatrix} \sigma_1^n & bp_n \\ 0 & \sigma_2^n \end{bmatrix}, \quad p_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_1^{\nu} \sigma_2^{n-\nu-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.89}$$

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.4 (continuación) Supongamos ahora que

$$\lambda < \frac{1}{c}.$$

En este caso, en virtud de (5.87),

$$a^2 < 4, \quad |\sigma_1| = |\sigma_2| = 1.$$

Además, sabemos que

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geqslant \delta |a|, \quad \delta := 2\sqrt{1 - c^2\lambda^2} > 0.$$

Utilizando (5.89) sabemos que

$$p_n = \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad \text{si } a \neq 0, \text{ luego} \quad |p_n| \leqslant \frac{2}{|a|\delta}.$$

Ademas chequeamos que $|b| \leqslant 4|a|$, por lo tanto

$$|bp_n| \leqslant \frac{8}{\delta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

lo que significa que (5.82) se satisface para $\boldsymbol{\Lambda}(\Delta t, k)$, y el método converge.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.4 (continuación) Supongamos ahora que

$$\lambda \geqslant \frac{1}{c}.$$

En el caso $\lambda > 1/c$, para algunos $\phi = k\Delta x$ la condición de von Neumann (5.83) ya no se cumple, y el método ya no converge.

Para $\lambda = 1/c$ tenemos que $a^2 = 4$ para ciertos ϕ y debido a (5.88) $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$. Utilizando (5.89) se tiene en este caso

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & -nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $b \neq 0$ (acordándonos que $\boldsymbol{G}$ no es normal) vemos que (5.82) no está satisfecha y por lo tanto el método no converge.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.5 Consideremos el método (5.52):

$$v_{j,n+1} = v_{jn} + \frac{c\lambda}{2}\left(w_{j+1/2,n} - w_{j-1/2,n} + w_{j+1/2,n+1} - w_{j-1/2,n+1}\right),$$

$$w_{j-1/2,n+1} = w_{j-1/2,n} + \frac{c\lambda}{2}\left(v_{j,n+1} - v_{j-1,n+1} + v_{jn} - v_{j-1,n}\right).$$

Las matrices de amplificación para este método son

$$\boldsymbol{G}(\Delta t, k) = \frac{1}{1+\frac{a^2}{4}}\begin{bmatrix} 1-\frac{a^2}{4} & \mathrm{i}a \\ \mathrm{i}a & 1-\frac{a^2}{4} \end{bmatrix}, \quad a := 2c\lambda \sin\frac{\phi}{2}.$$

Aquí $\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{G}^*\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$, lo que significa $r_\sigma(\boldsymbol{G}) = \|\boldsymbol{G}\|_2 = 1$ (Tarea) para todo $a \in \mathbb{R}$. La condición (5.82) está satisfecha para todo $\lambda > 0$, lo que implica la convergencia del método para todo valor de $\lambda = \Delta t/\Delta x > 0$. Tales métodos de diferencias se llaman incondicionalmente estables.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.6 Consideremos el método (5.52):

$$u_{j,n+1} - \alpha\lambda\delta^2 u_{j,n+1} = u_{jn} + (1-\alpha)\lambda\delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad n \geqslant 0,$$
$$u_{j0} = f_j, \quad j = 0, \ldots, N+1,$$
$$u_{0n} = g_n, \quad u_{N+1,n} = \tilde{g}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Este método puede ser escrito como

$$\begin{aligned} &\left\{\boldsymbol{I} - \alpha\lambda(T^{-1} - 2I + T)\right\} u_{j,n+1} \\ &= \left\{\boldsymbol{I} + (1-\alpha)\lambda(T^{-1} - 2I + T)\right\} u_{j,n}, \quad \alpha \in [0,1], \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6 (continuación) Para las matrices de amplificación ($p = 1$) obtenemos

$$G(\Delta t, k) = \frac{1 - 2(1-\alpha)\lambda(1-\cos\phi)}{1 + 2\alpha\lambda(1-\cos\phi)} \in \mathbb{R}, \quad \phi = k\Delta x.$$

Ahora se verifica facilmente que la condición (5.59):

$$\lambda \begin{cases} \leqslant \dfrac{1}{2(1-2\alpha)} & \text{si } 0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \text{arbitrario} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

es equivalente con $\left|G(\Delta t, k)\right| \leqslant 1$ para $\Delta t > 0$, $k \in \mathcal{L}$.
Esto la satisfacción de (5.82), y el método converge. El método aún converge si la cota para λ en (5-59) se excede en $\mathcal{O}(\Delta t)$ (la condición (5.83) aún está satisfecha). Para cualquier λ fijo tal que

$$\lambda > \frac{1}{2(1-2\alpha)}, \quad \alpha < \frac{1}{2},$$

el método diverge.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.6 (continuación) Consideremos el método (5.62)

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + 2\lambda\delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \geqslant 1.$$

Primero transformamos este método de dos pasos en un método de paso simple. La substitución $\boldsymbol{v}_{jn} := \boldsymbol{u}_{j,n-1}$ entrega

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{j,n+1} \\ \boldsymbol{v}_{j,n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda(T^{-1} - 2\boldsymbol{I} + T) & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{jn} \\ \boldsymbol{v}_{jn} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Las matrices de amplificación son

$$\boldsymbol{G}(\Delta t, k) = \begin{bmatrix} -4\lambda(1 - \cos\phi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi = k\Delta x. \tag{5.90}$$

Para $\cos\phi \neq 1$, los valores propios σ_1 y σ_2 de (5.90) satisfacen

$$\sigma_1\sigma_2 = -1, \quad \sigma_1 + \sigma_2 < 0,$$

por lo tanto $r_\sigma(\boldsymbol{G}) > 1$ para $\cos\phi \neq 1$ y cada valor fijo $\lambda > 0$. Entonces, no está satisfecha la condición de Neumann (5.83), y vemos que el método es inútil.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.7 Consideremos el método de Du Fort y Frankel (1953), (5.63):

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + 2\lambda(u_{j+1,n} - u_{j,n+1} - u_{j,n-1} + u_{j-1,n}),$$
$$j = 1, \dots, N, \quad n \geqslant 1.$$

Transformamos el método a un método de paso simple. Aquí obtenemos las matrices de amplificación

$$\boldsymbol{G}(\Delta t, k) = \begin{bmatrix} \dfrac{4\lambda\cos\phi}{1+2\lambda} & \dfrac{1-2\lambda}{1+2\lambda} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \phi = k\Delta x.$$

Los valores propios de (5.66) son

$$\sigma_{1,2} = \frac{2\lambda\cos\phi \pm \sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\phi}}{1+2\lambda}, \tag{5.91}$$

lo que implica que $|\sigma_1| \leqslant 1$, $|\sigma_2| \leqslant 1$ para todo $\lambda > 0$ y $\phi \in \mathbb{R}$.

5.5. La teoría de Lax y Richtmyer

Ejemplo 5.7 (continuación) Podemos proceder analizando las potencias de la matriz triangular $\mathbf{\Lambda}(\Delta, k)$. Para $\lambda \leqslant 1/2$ podemos concluir que (5.82) es válido. Nos queda para analizar el caso $\lambda > 1/2$.

a) Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, un cálculo (utilizando (5.91)) verifica que

$$\min\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leqslant \frac{2\lambda}{1+2\lambda} < 1,$$

luego $|p_n| \leqslant 1 + 2\lambda$ y (5.82) queda válido para $\mathbf{\Lambda}(\Delta t, k)$.

b) Si $\sigma_1, \sigma_2 \notin \mathbb{R}$, podemos calcular (utilizando (5.91)) que

$$|\sigma_1^2| = |\sigma_2^2| = \frac{4\lambda^2 - 1}{4\lambda^2 + 4\lambda + 1} =: \gamma^2 < 1.$$

Esto inmediatamente entrega que $|p_n| \leqslant n\gamma^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Las potencias en (5.89) son uniformemente acotadas.

Cocluimos que el método converge para todo $\lambda > 0$, es decir, el método es incondicionalmente estable.