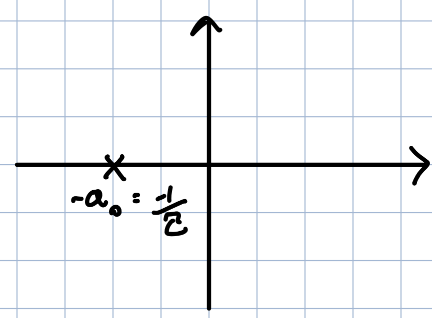
(i) Primer orden

$$\dot{y}(t) + a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \;; \quad y(0) = 0 \quad / \mathcal{L}$$

$$s\, Y(s) + a_0\, Y(s) = b_0\, U(s)$$

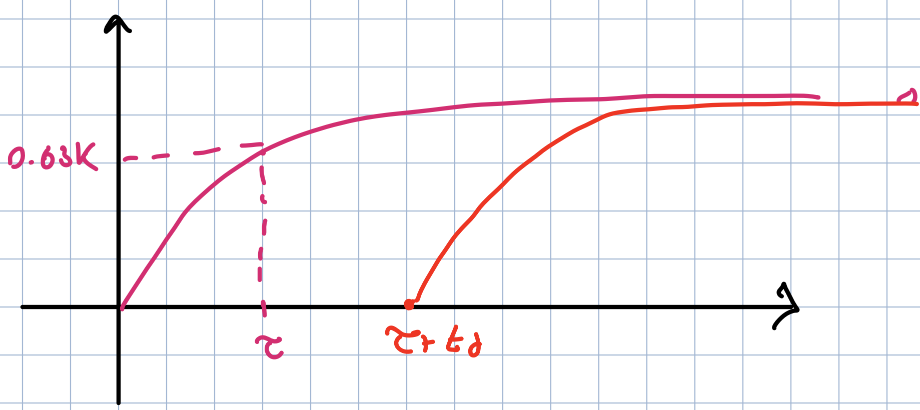
$$h(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad , \; K = b_0/a_0 \;\; \tau = 1/a_0$$

ganancia dc : $h(0) = K$



$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t)$$

$$t = \tau \rightarrow K\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0.63\,K$$



se alcanza el 63% de ?

(ii) Primer orden con retardo

$$\dot{y}(t) + a_0\, y(t) = b_0\, u(t - t_d) \quad / \mathcal{L}$$

$$s\, Y(s) + a_0\, Y(s) = b_0\, U(s)\, e^{-t_d s}$$

$$h(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot e^{-t_d s}$$

$$\hookrightarrow y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{(t - t_d)}{\tau}}\right) u(t - t_d)$$

(iii) Segundo orden

$$\ddot{y}(t) + 2\xi \omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2\, y(t) = K \omega_n^2\, u(t)$$

$$y(0) = 0 \;; \quad \dot{y}(0) = 0 \qquad / \mathcal{L}$$

ξ : factor de amortiguamiento

ω_n : frecuencia natural de vibración

$s^2 Y(s) + 2\xi\omega_n s\, Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$

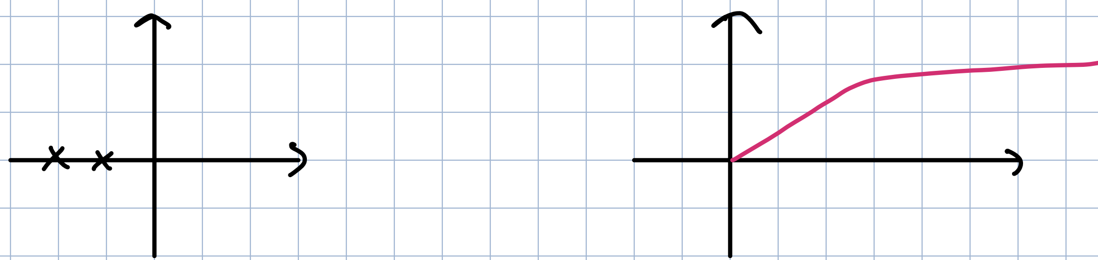
$H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + K\omega_n^2} \to s = \xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

$\xi^2 - 1 \geq 0$ | si $\xi \in [-1, 1]$

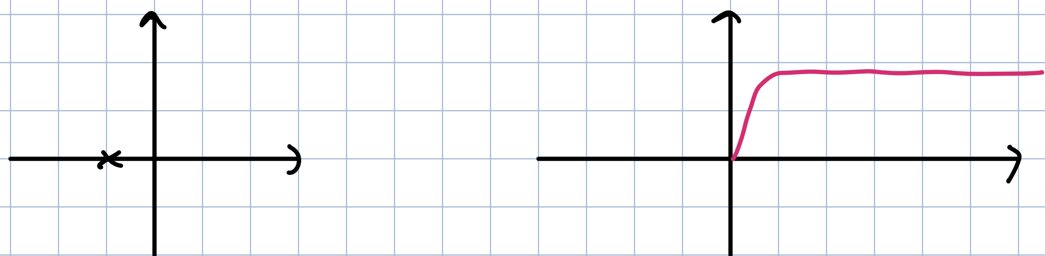
$\Leftrightarrow \xi^2 \geq 1$ | $\Leftrightarrow \xi^2 - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \xi \geq 1 \vee \xi \leq -1$

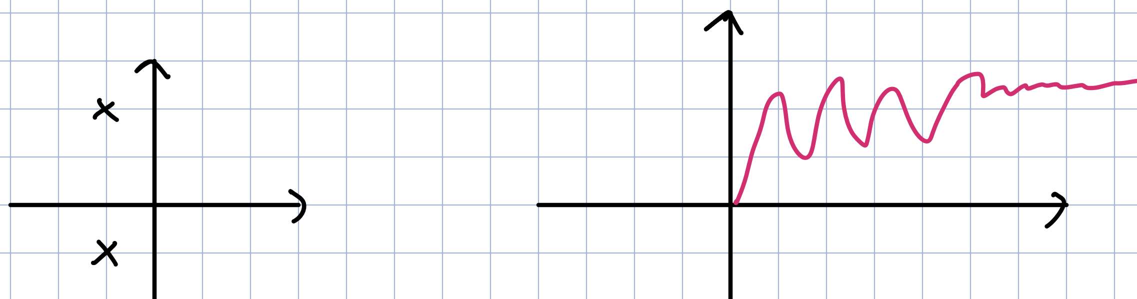
(a) $\xi > 1$



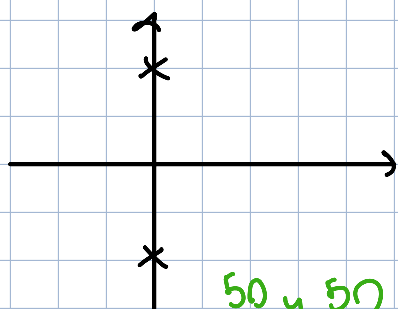
(b) $\xi = 1$

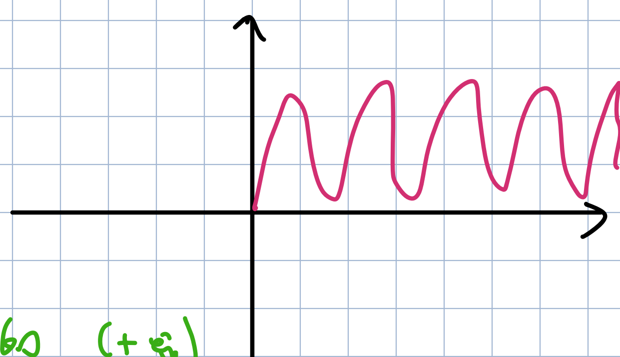


(c) $0 < \xi < 1$:



(d) $\xi = 0$





50 y 50, 40 y 60 (+ξ)

* Preguntas: - significado físico de los parámetros
- Concluir del gráfico si tiene amortiguador, y tipo (Análisis de figura ; generar figura)

¿Cómo se ve el gráfico con respuesta 0?
¿Cómo se ve el mapa de polos?

Ayudantía (Pre- certamen)

1) Dado el sistema descrito por: $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx + Du$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $D = 0$.

(a) Obtenga la matriz de transición en el plano s.

(b) Obtenga, en el tiempo, el elemento (1,2) de la matriz de transición.

(c) Obtenga la respuesta forzada $Y_f(s)$ para la entrada escalón unitario $u(t)$

(d) Obtenga la respuesta forzada $Y_f(s)$ para la entrada $u(t) + 2r(t-2) - 2r(t-3) - 3u(t-4)$

(e) Sea $f(t) = u(t) + 2r(t-2) - 2r(t-3) - 3u(t-4)$. Grafique $2f(t-1)$.

(a) $x(t) = \Phi(t)\, x_0$ $\qquad$ $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ -

$y(t) = C\,\Phi(t)$ $\qquad$ $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s-3)+2} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$s(s+3)+2 : \quad s^2 + 3s + 2 = (s+2)(s+1)$$

$$\frac{s}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow s = A(s+1) + B(s+2)$$

$s = -1 \rightarrow \boxed{-1 = B}$

$s = -2 \rightarrow -2 = -A \Rightarrow \boxed{A = 2}$

$$\frac{s}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow 1 = A(s+1) + B(s+2)$$

$$s = -1 \rightarrow \underline{1 = B}$$

$$s = -2 \rightarrow 1 = -A \rightarrow \underline{A = -1}$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s+1}$$

$$= -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

(b) $\Phi(t)_{1,2} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}\right\} = -e^{-2t} + e^{-t}$

(c) $y_f(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot B \cdot u(s)$

$$= [1 \ 0]\, \Phi(s) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(s)$$

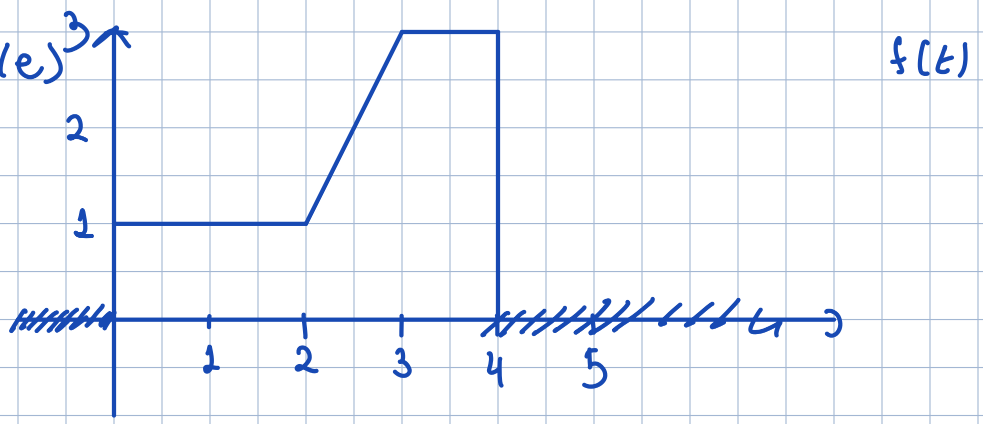
$$= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot 1 \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)(s+1)}$$

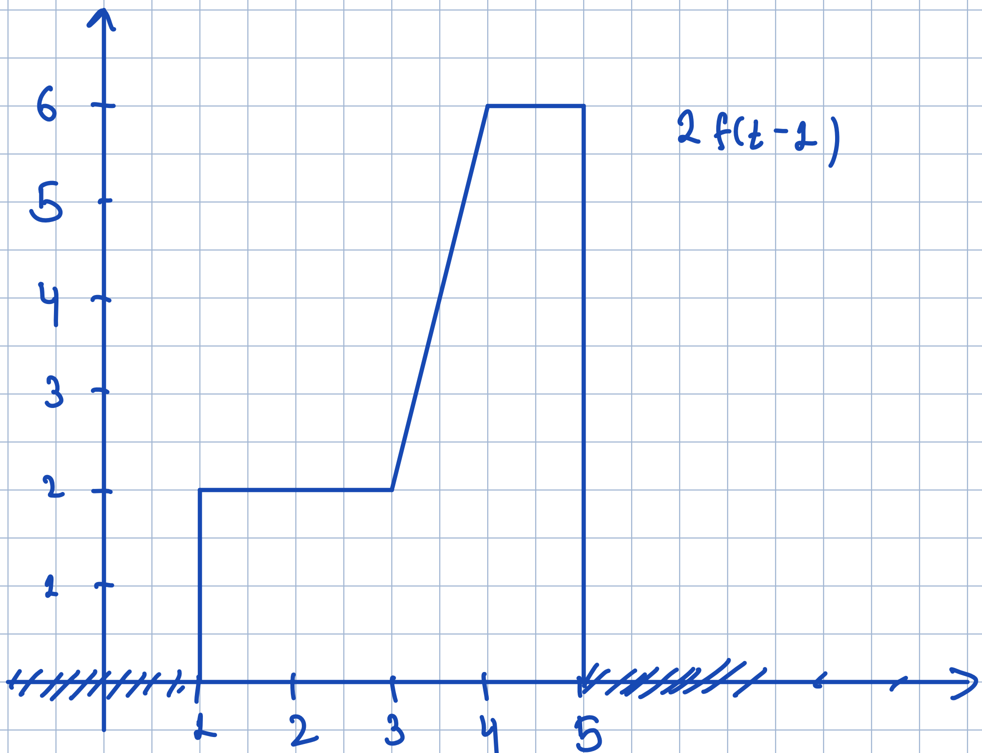
(d) $y_f(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} - \frac{3e^{-4s}}{s^2}\right)$

$$= \frac{1}{s(s+2)(s+1)} + \frac{2e^{-2s}}{s^2(s+2)(s+1)} - \frac{2e^{-3s}}{s^2(s+2)(s+1)} - \frac{3e^{-4s}}{s^2(s+2)(s+1)}$$

$$\mathcal{L}\{r(t-a)\}(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-as}}{s^2}, & a \geq 0 \\ -\dfrac{a}{s} + \dfrac{1}{s^2}, & a < 0 \end{cases}$$

(e)





2) (a) De un ejemplo de un sistema no lineal variante en el tiempo. Indique cómo verificar si un sistema es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Defina y mencione características de la señal impulso en tiempo continuo. Indique qué significado tiene la respuesta a impulso de un S. L. I.

(c) Indique qué información entrega la transformada de Fourier de una función. Indique qué significa $f(\omega) = 1$.

(d) Obtenga la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{T}[u(t+T) - u(t-T)]$. Bosqueje y comente la gráfica de $|F(\omega)|$ para 3 valores de T tendiendo a 0.

(a) $\frac{d}{dt} y(t) + a(t)\sqrt{y(t)} = u(t)$ ✓✓ (no lineal)

Para verificar: homogeneidad y superposición.

$$\frac{d}{dt} y(t) + y(t) + 2 = u(t) \iff \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = u(t) - 2$$

$H(u_1(t) + u_2(t)) = y_1(t) + y_2(t)$

$H(\alpha u(t)) = \alpha H(u(t))$ con $y_1(t) = H(u_1(t))$, $y_2(t) = H(u_2(t))$ } Linealidad

Invariante en el tiempo → Los parámetros no dependen del tiempo.

(b) $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

- $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$
- $\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$

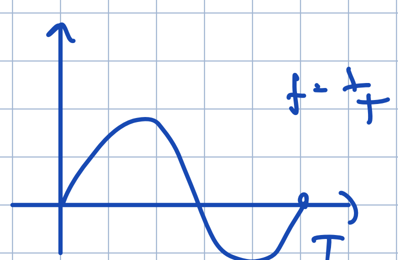
↳ Respuesta ... ?

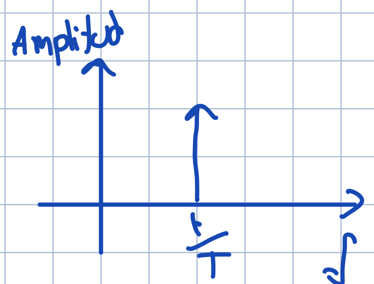
$y(t) = h(t) * u(t)$ → Se puede obtener la respuesta a cualquier entrada haciendo convolución.

(c) $F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = f_2(s)\Big|_{s=j\omega} = f(\omega)$ ↳ transformada bilateral (Laplace)

Entrega información sobre las frecuencias en el tiempo (de la señal). (las frecuencias contenidas en la función)

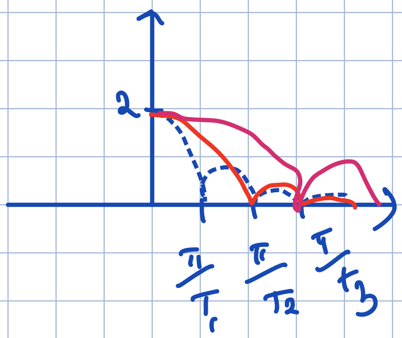
$f(\omega) = 1$ → Tiene todas las frecuencias, y corresponde a la T.F. del impulso.





(d) $F(\omega) = f_2(\omega)\Big|_{s=j\omega} = \dfrac{e^{sT} - e^{-sT}}{sT}\Bigg|_{s=j\omega}$

$$f(\omega) = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega T} = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T)}{\omega T}$$



$T_1 = 1$
$T_2 = 0.5$
$T_3 = 0.25$

A medida que disminuye T el gráfico se aplana, a medida que tiende a 0