Listado 1: Sistemas de numeración. Aritmética en punto flotante. Números de máquina. Redondeo y truncamiento. Overflow / Underflow.

1. Problemas con papel y lápiz

1. Convierta los siguientes números reales a base 10.

   (a) 101.101_2 (b) $111.\overline{011}_2$ (c) $-1010.01\overline{101}_2$ (d) $0.\overline{1}_2$

2. Convierta los siguientes números reales a base 2.

   (a) -1.125 (b) 37.2 (c) -24.3

3. Escriba los siguientes números reales en notación científica normalizada, sin modificar la base en la que están escritos.

   (a) $-1.\overline{6}$ (b) 111.0101_2 (c) 0.000325 (d) -0.0000122_3

4. Sea $\mathbb{F} := \mathbb{F}(10, 2, -1, 1) \cup \{0\}$. Escriba:

   (a) el menor número positivo en $\mathbb{F}$.
   (b) el mayor número en $\mathbb{F}$.
   (c) Redondee 1.12, 0.022, 1.056 a un elemento de $\mathbb{F}$.
   (d) Trunque 1.12, 0.022, 1.056 a un elemento de $\mathbb{F}$.
   (e) Decida si ocurre overflow/underflow al realizar las siguientes operaciones aritméticas entre elementos de $\mathbb{F}(10, 2, -1, 1)$.

      (i) $5.7 \cdot 1.2$
      (ii) $(-5.7) \cdot (4.3)$
      (iii) $(0.05)^2$
      (iv) $9.9 + 0.01$
      (v) $(-0.03) \cdot (0.1)$
      (vi) $-9.9 - 0.01$

      Observación: Aunque los números reales en las operaciones anteriores no están escritos en notación científica normalizada, ellos son elementos de $\mathbb{F}(10, 2, -1, 1)$. Comprobarlo.

5. Redondee los siguientes números siguiendo la norma IEEE-754 con precisión simple.

   (a) $1 + 2^{-24}$.
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} 4^{-i}$.
   (c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 2^{-i}$.
   (d) $2^{-126} + 2^{-150}$.

6. Sea $x = (-1)^s \cdot 2^b \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$ con $x_1 = 1$, $s \in \{0, 1\}$, $x_i \in \{0, 1\}$ para cada $i \geq 2$ y b un número entero entre -2 y 2. Demuestre que si $\mathrm{rd}(x)$ denota el elemento de $\mathbb{F}(2, 5, -2, 2)$ al que se redondea x, entonces

$$\frac{|\mathrm{rd}(x) - x|}{|x|} \leq 10000, \qquad |\mathrm{rd}(x) - x| \leq 10^{5-b}.$$

2. Experimentos computacionales

1. Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de números reales normalizados que puede ser representado de manera exacta en el computador. Suponga que x_{min} y x_{max} son el menor y el mayor número positivo en $\mathbb{F}$ respectivamente. Diseñe un experimento en MATLAB que le permita decidir si en el computador con el que usted trabaja un número real $x \in [x_{min}, x_{max}]$ se aproxima por redondeo o truncamiento a un elemento de $\mathbb{F}$.

2. Considere la sucesión

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\dots. \tag{1}$$

Los elementos de esta sucesión anterior pueden calcularse utilizando la siguiente relación de recurrencia

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{3}, \qquad y_n = \frac{10}{3}y_{n-1} - y_{n-2} \ \text{ para } n = 3, 4, \dots \tag{2}$$

(a) Demuestre que para cada número natural n se cumple que $y_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Escriba un programa MATLAB en el que calcule $y_1, y_2, \dots, y_{20}$ utilizando (2). Determine además, para $n = 1, 2, \dots, 20$ los valores de $3^{n-1}y_n - 1$. ¿Son todos cercanos a cero? Note que los errores crecen a medida que n crece y para $n \geq 16$ la diferencia entre $3^{n-1}y_n$ y 1 es incluso mayor que 10^{-3}. Éste es un ejemplo de un algoritmo inestable para el cálculo de elementos de (1).

(c) Determine $a, b \in \mathbb{R}$, distintos de cero, de modo que

$$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{3}, \qquad z_n = az_{n-1} + bz_{n-2} \ \text{ para } n = 2, 3, \dots$$

sea un algoritmo estable para el cálculo de elementos de (1). Repita el experimento anterior y compruebe si los errores $3^{n-1}z_n - 1$ para $n = 1, 2, \dots, 20$ se mantienen cercanos a cero.