Cálculo III
Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ I: límites y continuidad
Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$
Módulo 2, Presentación 6

Raimund Bürger

3 de abril de 2025

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Consideraremos aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tales aplicaciones mapean un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ a un punto $y = (y_1, \ldots, y_m) \in B(f) \subset \mathbb{R}^m$. Cada coordenada y_i, $i = 1, \ldots, m$, depende de $(x_1, \ldots, x_n)$, es decir f es definida por m funciones:

$$\begin{gathered} f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad D(f_1) = D(f); \quad y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad D(f_m) = D(f); \quad y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

Escribimos $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde f_i es la i-ésima función de coordenadas.

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Teorema 2.11 La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $x^0 \in D(f)$ si y sólo si cada función f_i, $i = 1, \ldots, m$, es continua en x^0.

Demostración La aplicación f es continua en x^0 si y sólo si para cada sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x^k \in D(f)$ y $x^k \to x^0$ cuando $k \to \infty$ se tiene que $f(x^k) \to f(x^0)$, es decir,

$$\big(f_1(x^k), \ldots, f_m(x^k)\big) \to \big(f_1(x^0), \ldots, f_m(x^0)\big) \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Según el Teorema 1.4, esto sucede si y sólo si $f_i(x^k) \to f_i(x^0)$ cuando $k \to \infty$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ fijo. Esto a su vez es válido si y sólo si todas las funciones f_i son continuas en x^0. ■

Ejemplo 2.11 Un ejemplo importante son las aplicaciones lineales, donde $D(f) = \mathbb{R}^n$ y existen constantes $a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ tales que

$$y_k = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Teorema 2.12 Cada aplicación lineal es continua.

Demostración Tarea. ■

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

También para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiremos el concepto de la diferenciabilidad. En analogía al caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aquí la diferenciabilidad en un punto x^0 significa que en una vecindad de x^0 podemos aproximar $f(x) - f(x^0)$ hasta un error de primer orden por una aplicación lineal.

Definición 2.10 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y x^0 un punto interior de $D(f)$. La función $f = (f_1, \ldots, f_m)$ se llama diferenciable en x^0 si existen una matriz

$$C = (c_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

y una aplicación $f^0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida en una vecindad $U(x^0)$ de x^0 tales que para $\mu = 1, \ldots, m$ se tiene que

1. $f^0_\mu(x^0) = \lim\limits_{x\to x^0} f^0_\mu(x) = 0$,
2. $f_\mu(x) = f_\mu(x^0) + \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}(x_\nu - x^0_\nu) + d(x, x^0) f^0_\mu(x)$.

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Según esta definición, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto si cada función coordenada f_i es diferenciable. Notar que

$$c_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{2.13}$$

Definición 2.11 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si existen las derivadas parciales $\partial f_\mu / \partial x_\nu (x^0)$ para $\mu = 1, \dots, m$ y $\nu = 1, \dots, n$ en un punto interior $x^0 \in D(f)$, entonces la matriz

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^0) = J_f(x^0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x^0) = \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0) \right)$$

se llama matriz funcional (de Jacobi) o matriz jacobiana de f en x^0.

Teorema 2.13 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si en un punto interior x^0 de $D(f)$ existe $J_f(x^0)$, entonces existen un $\delta > 0$ y una constante M tal que para todo h con $|h| < \delta$ y $\nu = 1, \dots, n$,

$$d\big(f(x^0 + h\vec{e}_\nu), f(x^0)\big) \leqslant M|h|.$$

Demostración Tarea.

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Ejemplo 2.12 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x, y) = 2x + y, \quad f_2(x, y) = 3x^2 + y^2, \quad f_3(x, y) = xy.$$

Aquí obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = x.$$

Para el punto $(1, -2)$ obtenemos

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y)}(1, -2) = J_f\big((1, -2)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7. Aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

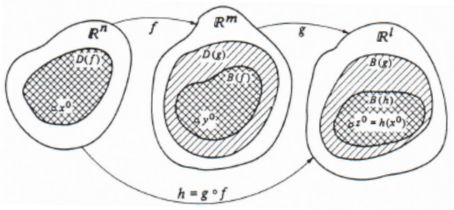
Ejemplo 2.13 Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f_1(x, y) = x \cos y, \quad f_2(x, y) = x \sin y.$$

Entonces

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(x, y) = J_f(x, y) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix}.$$

2.8. La regla de la cadena



Teorema 2.14 (Regla de la cadena) Se consideran las funciones

$$f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \ni x \mapsto f(x) \in B(f) \subset \mathbb{R}^m,$$

$$g : \mathbb{R}^m \supset D(g) \ni y \mapsto g(y) \in B(g) \subset \mathbb{R}^l,$$

donde sea $B(f) \subset D(g)$ y $h = g \circ f$. Además, sean x^0 un punto interior de $D(f)$ e $y^0 = f(x^0)$ un punto interior de $D(g)$. Sea la función g diferenciable en y^0. En este caso se tiene lo siguiente.

1. Si $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x(x^0)$ existe, también existe $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x(x^0)$, y

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x^0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y^0) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^0).$$

2. Si f es diferenciable en x^0, también h es diferenciable en x^0.

2.8. La regla de la cadena

Comentamos que la ecuación que aparece en el Teorema 2.14,

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x^0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y^0) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^0)$$

es una ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde la primera y la tercera matriz deben ser evaluadas en x^0 y la segunda en $y^0 = f(x^0)$.

2.8. La regla de la cadena

eEn las aplicaciones frecuentemente se presenta la situación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. En este caso, la aplicación $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta definida por

$$h(x) = g(y_1, \ldots, y_m),$$

donde

$$y_1 = f_1(x), \ldots, y_m = f_m(x).$$

Aquí la regla de la cadena asume la forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x^0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0) & \ldots & \frac{\partial g}{\partial y_m}(y^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_m}{\mathrm{d}x}(x^0) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_\mu}(y^0) \cdot \frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}x}(x^0). \end{aligned}$$

2.8. La regla de la cadena

Ejemplo 2.14 Sea

$$h(x) = g(y_1, y_2) = \mathrm{e}^{y_1 y_2}, \quad y_1 = f_1(x) = x \cos x, \quad y_2 = f_2(x) = x \sin x.$$

Queremos calcular $h'(x^0)$ para $x^0 = \pi$. Poniendo

$$y^0 = (y_1^0, y_2^0) = \big(f_1(x^0), f_2(x^0)\big) = (-\pi, 0)$$

obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = y_2 \mathrm{e}^{y_1 y_2}, \ \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1^0, y_2^0) = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial y_2} = y_1 \mathrm{e}^{y_1 y_2}, \ \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1^0, y_2^0) = -\pi;$$

además se tiene que

$$\frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} x} = \cos x - x \sin x, \ \frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} x}(x^0) = -1; \quad \frac{\mathrm{d} f_2}{\mathrm{d} x} = \sin x + x \cos x; \ \frac{\mathrm{d} f_2}{\mathrm{d} x} = -\pi.$$

Estos valores nos permiten calcular

$$h'(\pi) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1^0, y_2^0) \frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} x}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1^0, y_2^0) \frac{\mathrm{d} f_2}{\mathrm{d} x}(x^0) = \pi^2.$$

2.8. La regla de la cadena

Ejemplo 2.15 La regla de la cadena se usa mucho para derivar funciones que provienen de otras funciones a través de una sustitución de variables. Por ejemplo, sea dada la función $f(x, y)$. Introduciendo las llamadas coordenadas polares planas

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

podemos convertir $f(x, y)$ en una función $F(r, \varphi)$:

$$F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

La regla de la cadena nos entrega la siguiente relación entre $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial\varphi$, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\varphi.$$

2.8. La regla de la cadena

Demostración del Teorema 2.14 Sean $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $g = (g_1, \ldots, g_l)$ y $h = (h_1, \ldots, h_l)$. Como g es diferenciable en y^0, se tiene en una vecindad $U(y^0)$ de y^0 para $\lambda = 1, \ldots, l$:

$$\begin{aligned} g_\lambda(y) - g_\lambda(y^0) &= \nabla g_\lambda(y^0) \cdot (\vec{y} - \vec{y}^0) + d(y, y^0) g_\lambda^0(y) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0)(y_\mu - y_\mu^0) + d(y, y^0) g_\lambda^0(y), \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $g_\lambda^0(y)$ es continua en y^0 y satisface $g_\lambda^0(y^0) = 0$.

1. Supongamos que $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x(x^0)$ existe. Para $\nu = 1, \ldots, n$ definimos $x = x^0 + t\vec{e}_\nu$ para un $t \in \mathbb{R}$. Entonces existe un $t_0 > 0$ tal que $f(x^0 + t\vec{e}_\nu) \in U(y^0)$ para todo t con $|t| < t_0$ y todo $\nu = 1, \ldots, n$. insertamos lo siguiente en (2.14):

$$y = f(x^0 + t\vec{e}_\nu), \quad y_\mu = f_\mu(x^0 + t\vec{e}_\nu); \quad y^0 = f(x^0), \quad y_\mu^0 = f_\mu(x^0).$$

Demostración del Teorema 2.14 (continuación)

1. Considerando que $h_\lambda(x) = g_\lambda(f(x))$ para todo t con $0 < |t| < t_0$, obtenemos

$$\frac{h_\lambda(x^0 + t\vec{e}_\nu) - h_\lambda(x^0)}{t} = \frac{g_\lambda(f(x^0 + t\vec{e}_\nu)) - g_\lambda(f(x^0))}{t}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0)\frac{f_\mu(x^0 + t\vec{e}_\nu) - f_\mu(x^0)}{t}$$
$$+ \frac{d(f(x^0 + t\vec{e}_\nu), f(x^0))g_\lambda^0(f(x^0 + t\vec{e}_\nu))}{t}.$$

Para $t \to 0$ tenemos las convergencias

$$\frac{f_\mu(x^0 + t\vec{e}_\nu) - f_\mu(x^0)}{t} \to \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0),$$
$$g_\lambda^0\big(f(x^0 + t\vec{e}_\nu)\big) \to g_\lambda^0\big(f(x^0)\big) = g_\lambda^0(y^0) = 0.$$

2.8. La regla de la cadena

Demostración del Teorema 2.14 (continuación)

1. Por lo tanto en virtud del Teorema 2.13,

$$\frac{\partial h_\lambda}{\partial x_\nu} = \lim_{t \to 0} \frac{h_\lambda(x^0 + t\vec{e}_\nu) - h_\lambda(x^0)}{t} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0) \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0).$$

   Tomando en cuenta la definición del producto entre dos matrices, obtenemos el primer enunciado del Teorema 2.14.

2. Si f es diferenciable en x^0, entonces en una vecindad de x^0 para $\mu = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} f_\mu(x) - f_\mu(x^0) &= \nabla f_\mu(x^0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + d(x, x^0) f_\mu^0(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)(x_\nu - x_\nu^0) + d(x, x^0) f_\mu^0(x), \end{aligned}$$

   donde las funciones $f_\mu^0(x)$ son continuas en x^0 y satisfacen $f_\mu^0(x^0) = 0$.

2.8. La regla de la cadena

Demostración del Teorema 2.14 (continuación)

2. Insertando esto en (2.14) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&g_\lambda\big(f(x)\big) - g_\lambda\big(f(x^0)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)(x_\nu - x_\nu^0) + d(x,x^0) f_\mu^0(x)\right) \\
&\quad + d\big(f(x), f(x^0)\big) g_\lambda^0\big(f(x)\big).
\end{aligned}
$$

En virtud de lo anterior,

$$
\begin{aligned}
h_\lambda(x) = h_\lambda(x^0) &+ \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0)\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)\right)(x_\nu - x_\nu^0) \\
&+ d(x,x^0) h_\lambda^0(x),
\end{aligned}
$$

donde definimos $h_\lambda^0(x) = 0$ si $x = x^0$ y

$$
h_\lambda^0(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(y^0) f_\mu^0(x) + \frac{d(f(x), f(x^0))}{d(x,x^0)} g_\lambda^0\big(f(x)\big) \text{si } x \neq x^0.
$$

2.8. La regla de la cadena

Demostración del Teorema 2.14 (continuación)

2. Según el Teorema 2.6 existen una constante $M > 0$ y un $\delta > 0$ tales que para todo x con $0 < d(x, x^0) < \delta$,

$$\frac{d(f(x), f(x^0))}{d(x, x^0)} = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \frac{f_\mu(x) - f_\mu(x^0)}{d(x, x_0)} \right\}^2} \leqslant M.$$

Como

$$\lim_{x \to x^0} f_\mu^0(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x^0} g_\lambda^0(f(x)) = g_\lambda^0(y^0) = 0$$

se tiene que

$$\lim_{x \to x^0} h_\lambda^0(x) = 0 = h_\lambda^0(x^0).$$

Entonces cada función h_λ es diferenciable en x^0. ■

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Definición 2.15 Sean $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \neq x^2$. Entonces al siguiente conjunto se dice segmento lineal que une los puntos x^1 y x^2:

$$\overline{x^1, x^2} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = x^1 + \lambda(\vec{x}^2 - \vec{x}^1),\ \lambda \in [0,1]\right\}.$$

Teorema 2.15 (Teorema del Valor Intermedio) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $X \subset D(f)$ abierto, y sea f diferenciable sobre X. Sean $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ y sea el segmento lineal $\overline{x^1, x^2}$ contenido en X. Entonces existe por lo menos un $\xi \in \overline{x^1, x^2}$ tal que $\xi \neq x^1$, $\xi \neq x^2$, y

$$f(x^2) - f(x^1) = \nabla f(\xi) \cdot (\vec{x}^2 - \vec{x}^1).$$

Demostración

1. Sea para $t \in [0,1]$ la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) := f\left(x^1 + t(\vec{x}^2 - \vec{x}^1)\right).$$

Es continua sobre $[0,1]$ y diferenciable sobre $(0,1)$, así que según el T.V.I. de funciones de una variable

$$\exists \vartheta \in (0,1) : \quad F(1) - F(0) = F'(\vartheta).$$

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Demostración del Teorema 2.15 (continuación)

2. Según el Teorema 2.14,

$$F'(t) = \left(\nabla f\left(x^1 + t(\vec{x}^2 - \vec{x}^1)\right)\right) \cdot (\vec{x}^2 - \vec{x}^1),$$

por lo tanto

$$F(1) - F(0) = \left(\nabla f\left(x^1 + \vartheta(\vec{x}^2 - \vec{x}^1)\right)\right) \cdot (\vec{x}^2 - \vec{x}^1).$$

Para $\xi = x^1 + \vartheta(\vec{x}^2 - \vec{x}^1)$ se tiene que

$$f(x^2) - f(x^1) = F(1) - F(0) = \nabla f(\xi) \cdot (\vec{x}^2 - \vec{x}^1). \quad \blacksquare$$

Un caso particular de los conjuntos X que satisfacen las hipótesis del Teorema 2.15 son los conjuntos convexos.

Definición 2.13 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama convexo si con cada par de puntos x^1 y x^2 también el segmento lineal $\overline{x^1, x^2}$ es contenido en X.

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Para $n = 1$, el enunciado del Teorema 2.15 es

$$f(x^2) - f(x^1) = f'(\xi)(x^2 - x^1),$$

lo que es el T.V.I. para funciones de una variable.

Para funciones $f(x, y)$ de dos variables, el Teorema 2.15 entrega la siguiente fórmula, donde $x^1 = (x_1, y_1)$ y $x^2 = (x_2, y_2)$:

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (x_2 - x_1)f_x(\xi, \eta) + (y_2 - y_1)f_y(\xi, \eta),$$

donde ξ está localizado entre x_1 y x_2 y η entre y_1 e y_2.

No existe una versión del Teorema 2.15 válida para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Para ver eso, basta discutir el ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = (x^2, x^3)$ sobre $[0, 1]$.

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Para funciones de una variable ya sabemos que del T.V.I. e sigue que una función f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ sobre (a, b). Podemos definir un teorema análogo para funciones de n variables basándonos en el concepto de una región en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.14 Un conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ se llama

1. poligonalmente conexo si para cada par $x, \tilde{x} \in G$ existe un número finito de puntos $x = x^1, x^2, \ldots, x^m = \tilde{x} \in G$ tales que el trazado poligonal

$$P = \bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{x^i, x^{i+1}}$$

pertenece enteramente a G;

2. una región si G es abierto y poligonalmente conexo.

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Teorema 2.16 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; además, sea $G \subset \mathbb{R}^n$ una región y sea f diferenciable sobre G. Entonces f es constante sobre G si y sólo si

$$\nabla f(x) = \vec{0} \quad \text{para todo } x \in G.$$

Demostración

1. Si $f = \text{const.}$ sobre G, entonces $\nabla f(x) = \vec{0}$ para todo $x \in G$.
2. Sea $\nabla f(x) = \vec{0}$ para todo $x \in G$. Si $x, \tilde{x} \in G$, entonces existen puntos $x^1 = x, x^2, \ldots, x^m = \tilde{x}$ tales que todos los segmentos lineales $\overline{x^i, x^{i+1}}$ estan completamente contenidos en G. un $\xi^i \in \overline{x^i, x^{i+1}}$ para el cual

$$f(x^{i+1}) - f(x^i) = \nabla f(\xi^i) \cdot (\vec{x}^{i+1} - \vec{x}^i) = 0,$$

por lo tanto

$$f(x^i) = f(x^{i+1}) \quad \text{para } i = 1, \ldots, m-1,$$

luego $f(x) = f(\tilde{x})$. Como x fue elegido arbitrario, $f(x) = f(\tilde{x})$ para todo $x \in G$, es decir f es constante sobre G. ■

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Ejemplo 2.16 Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$$

sobre las regiones

$$\begin{aligned} G_1 &= \big\{(x, y) \,|\, x > 0,\ y > 0\big\}, \\ G_2 &= \big\{(x, y) \,|\, x < 0,\ y > 0\big\}, \\ G_3 &= \big\{(x, y) \,|\, x < 0,\ y < 0\big\}, \\ G_3 &= \big\{(x, y) \,|\, x > 0,\ y < 0\big\}. \end{aligned}$$

La función f es diferenciable sobre $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0.$$

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Ejemplo 2.16 (continuación)

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ sobre $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$. Puesto que cada uno de los conjuntos G_1, G_2, G_3 y G_4 es una región, el Teorema 2.16 implica que $f(x,y)$ debe ser constante sobre cada una de estas regiones. Efectivamente,

$$\begin{aligned} f(x,y) \equiv f(1,1) = 2\arctan 1 &= \frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } (x,y) \in G_1, \\ f(x,y) \equiv f(-1,1) = 2\arctan(-1) &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } (x,y) \in G_2, \\ f(x,y) \equiv f(-1,-1) = 2\arctan 1 &= \frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } (x,y) \in G_3, \\ f(x,y) \equiv f(1,-1) = 2\arctan(-1) &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } (x,y) \in G_4. \end{aligned}$$

No podemos aplicar el Teorema 2.16 para el conjunto G, puesto que G es un conjunto abierto, pero no es poligonalmente conexo y por lo tanto no es una región. Tenemos $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ para todo $(x,y) \in G$, pero $f(x,y)$ no es constante sobre G. Solamente sobre cada una de las cuatro sub-regionen $f(x,y)$ es constante.

2.9. El Teorema del Valor Intermedio

Teorema 2.17 Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto poligonalmente conexo. Entonces G es conexo.

Teorema 2.18 Un conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ es una región si y sólo si es abierto y conexo.