

**Desarrollo Propuesto Test 4 Taller de Razonamiento Matemático I 525041-1**

NOTA: para la calificación final de este Test, se considerará una suma máxima de 60 puntos, sobre 65 puntos posibles (no acumulables ni transferibles).

1. Determinar el valor de  $m \in \mathbb{N}$  tal que:  $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} = 4$ . Para ello, debe aplicar en su desarrollo alguna(s) propiedad(es) de sumatorias, que debe(n) ser indicada(s). **15 puntos**

HINT: Primero, racionalizar.

DESARROLLO: Racionalizando cada sumando, nos queda

$$4 = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(2k+1) - (2k-1)}$$

(FACTOR CONSTANTE)  $\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) = 4$ . (1)

Ahora, introduciendo  $a_k := \sqrt{2k+1}$ , con  $k \in \mathbb{Z}_0^+$ . Se verifica que  $a_{k-1} = \sqrt{2(k-1)+1} = \sqrt{2k-1}$ , con lo cual la expresión de la sumatoria en (1) se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^m (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) = \sum_{k=1}^m (a_k - a_{k-1})$$

(PROPIEDAD TELESCÓPICA)  $= a_m - a_0$ .

De esta manera, reemplazando en (1), resulta

$$\begin{aligned} \sqrt{2k+1} - 1 = 2(4) = 8 &\Rightarrow \sqrt{2k+1} = 9 \\ &\Rightarrow 2k+1 = 9^2 = 81 \\ &\Rightarrow k = 40. \end{aligned}$$

2. (a) Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3 : (a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow ab \mid c.$$

Fundamentar su respuesta, según corresponda.

**10 puntos**

DESARROLLO: La proposición es equivalente a (en términos de conjunciones y disyunciones)

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3 : \sim (a \mid c \wedge b \mid c) \vee ab \mid c.$$

Tenemos la sospecha que esta proposición es FALSA. Para ello, validaremos su negación:

$$\exists (a, b, c) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3 : a \mid c \wedge b \mid c \wedge ab \nmid c. \quad (2)$$

En efecto, considerando  $(a, b, c) = (6, 4, 12) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3$ . Se verifica que  $6 \mid 12$  y  $4 \mid 12$ , pero  $(6)(4) = 24 \nmid 12$ . De esta manera, (2) es VERDADERA. En consecuencia, la proposición dada es FALSA.

(b) Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  dados. Interesa estudiar la ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL:

Determinar  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$ .

Demostrar que la ecuación diofántica planteada tiene soluciones enteras si y sólo si  $\text{mcd}(a, b) \mid c$ .

**10 puntos**

HINT: puede ser útil considerar  $d = \text{mcd}(a, b)$  en su demostración. Cada implicación debe establecerse por separado.

DEMOSTRACIÓN:

En lo que sigue introducimos  $d := \text{mcd}(a, b)$ .

( $\Rightarrow$ ) HIPÓTESIS: la ecuación diofántica planteada tiene soluciones enteras.

Consideremos una de tales soluciones. Por ejemplo, sea  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$ . Como  $d = \text{mcd}(a, b)$ , se garantiza que  $\exists(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $a = k_1d$  y  $b = k_2d$ . De esta manera, la ecuación nos queda

$$k_1dx + k_2dy = c \Rightarrow d(\underbrace{k_1x + k_2y}_{\in \mathbb{Z}}) = c \Rightarrow d \mid c.$$

( $\Leftarrow$ ) HIPÓTESIS:  $d = \text{mcd}(a, b) \mid c$ .

Esto implica que  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = kd$ . Por otro lado, gracias al LEMA DE BÉZOUT,  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $a\alpha + b\beta = d$ . Multiplicando por  $k \in \mathbb{Z}$ , resulta

$$a(k\alpha) + b(k\beta) = kd = c,$$

de donde se concluye que la ECUACIÓN DIOFÁNTICA propuesta tiene solución.

3. Aplique el ALGORITMO DE EUCLIDES para determinar el valor exacto de  $d := \text{mcd}(117, 51)$ . Luego, use su mismo desarrollo para determinar un par  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  satisfaciendo:  $117\alpha + 51\beta = d$ .

**15 puntos**

DESARROLLO: Aplicando el ALGORITMO DE EUCLIDES, resulta

$$117 = (51)(2) + 15 \tag{3}$$

$$51 = (15)(3) + 6 \tag{4}$$

$$15 = (6)(2) + 3 \tag{5}$$

$$6 = (3)(2) + 0 \tag{6}$$

De esta manera, se concluye que  $d = \text{mcd}(117, 51) = 3$ .

Ahora procederemos a determinar una combinación lineal entera de 117 y 51 para su MCD.

$$\text{de (5): } 3 = 15 - (6)(2)$$

$$\text{de (4): } = 15 - (51 - (15)(3))(2) = (15)(7) - (51)(2)$$

$$\text{de (3): } = (117 - (51)(2))(7) - (51)(2)$$

$$\Rightarrow (117)(7) + (51)(-16) = 3 = \text{mcd}(117, 51).$$

Finalmente, identificando,  $(\alpha, \beta) = (7, -16) \in \mathbb{Z}^2$  es una pareja de escalares enteros que satisface lo pedido.

4. Del aeropuerto de Ciudad de México, sale un avión a Madrid cada 30 minutos, uno a Bogotá cada 20 minutos y otro a Lima cada 50 minutos. Si a las 00:00 horas comienza la programación de los vuelos, determine los horarios del día en los cuales despegan 3 aviones al mismo tiempo con destino distinto (hasta las 24:00 horas).

**15 puntos**

DESARROLLO: Del enunciado, todos los vuelos se programan desde las 00:00 horas, de tal manera que

- un avión sale hacia Madrid a los 30', 60', 90', etc. (múltiplos de 30')
- un avión sale hacia Bogotá a los 20', 40', 60', etc. (múltiplos de 20')
- un avión sale hacia Lima a los 50', 100', 150', etc. (múltiplos de 50')

Luego, 3 aviones despegarán al mismo tiempo, con destinos distintos, cada  $mcm(30, 20, 50) = 300$  minutos. Es decir, cada  $300 : 60 = 5$  horas.

De esta manera, los horarios del día en que se dan estos despegues simultáneos de aviones con destinos distintos son: 5:00, 10:00, 15:00 y 20:00 horas.