Universidad de Concepción

Cálculo II - Agosto 2015

Pauta Evaluación 1

---

(1) a) **Muestre que para la todo $x > 1$. vale la siguiente desigualdad:** **(20 puntos)**

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \frac{x^2 - x}{2 \ln x}$$

Ind: Use propiedad de comparación de la integral.

Solución. Sea $x > 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & \leq & t & \leq & x^2 & , & /\ln \\ \ln x & \leq & \ln t & \leq & \ln x^2 & , & /(\cdot)^{-1} \\ \dfrac{1}{\ln x^2} & \leq & \dfrac{1}{\ln t} & \leq & \dfrac{1}{\ln x} & & \end{array}$$

Por lo tanto, la función $\dfrac{1}{\ln t}$ es acotada.

Usamos la propiedad $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.
Entonces, tenemos:

$$\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Por lo tanto:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \geq \frac{x^2 - x}{2 \ln x}$$

b) **Deduzca de a) que**

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = +\infty$$

Solución. De a) tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

El límite de la parte izquierda es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, así que usamos la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{2 \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2x-1)}{2} = \infty$$

Luego;

$$+\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

Lo que implica que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt=\infty$$

c) **Calcule**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt}{x^2}$$

Solución. Este límite es de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, así que usamos regla de L'Hopital. Para derivar la integral, usamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\right)'=\frac{2x}{\ln x^2}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt}{x^2} &\overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x\ln x}\\ &\overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x+2}\\ &= 0\end{aligned}$$

(2) **Calcular la integral definida**

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{2}{x(1-\ln^2 x)}dx$$

Solución. Notemos que:

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{2}{x(1-\ln^2 x)}dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{2}{x(1-\ln x)(1+\ln x)}dx$$

Usamos la sustitución:

$$\begin{aligned} u &= 1+\ln x \quad \Rightarrow u-1=\ln x\\ du &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow u=1\\ x=\sqrt{e} &\Rightarrow u=\tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

Así que nuestra integral queda de la forma $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{2du}{u(2-u)}$

Usando fracciones parciales tenemos que:

$$\int_1^{3/2}\frac{2du}{u(2-u)}=\int_1^{3/2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2-u}\right)=(\ln(u)-\ln(2-u))\Big|_1^{3/2}=\ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right)=\ln 3$$

(3) **Considere la siguiente integral impropia**

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{1/x}}{x^p}dx,\quad p\in\mathbb{R}$$

a) **Usando un criterio de convergencia, determine todos los valores de $p \in \mathbb{R}$, para los cuales la integral es convergente.**

Solución. Esta es una integral impropia de 1ª especie. Usamos, por ejemplo, el criterio de comparación al límite con las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^p} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{x^p}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{1/x}}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1 > 0$$

Por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^p} dx \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{converge}$$

y

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty & , \quad p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & , \quad p > 1 \end{cases}$$

Entonces, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^p} dx$, para todo $p > 1$.

b) **Obtenga el valor de la integral para $p = 3$.**

Solución. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{x} \qquad \Rightarrow x = \tfrac{1}{t} \\ -dt &= \tfrac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow t = 1 \\ x \to +\infty &\Rightarrow t \to 0 \end{aligned}$$

Entonces, la integral queda:

$$-\int_1^0 te^t dt = \int_0^1 te^t dt$$

Ahora usamos sustitución por partes:

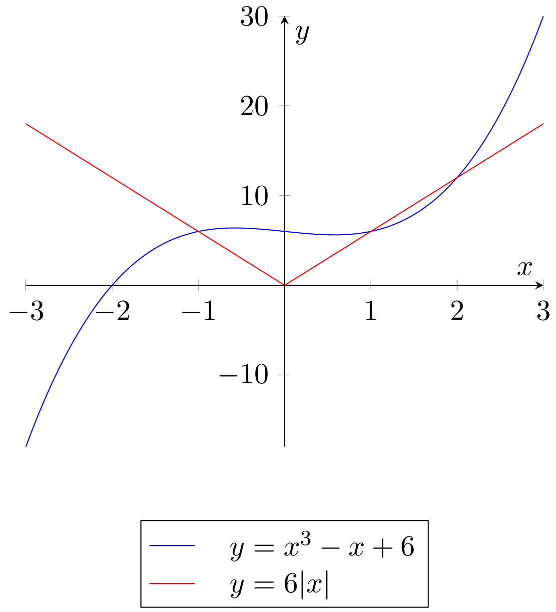
$$\begin{aligned} u &= t \quad , \quad du = dt \\ dv &= e^t dt \quad , \quad v = e^t \end{aligned}$$

Integrando, tenemos:

$$\int_0^1 te^t dt = (te^t)\big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \left(te^t - e^t\right)\big|_0^1 = 1$$

(4) Calcule el área de la región R limitada por las curvas: 15 puntos.

$$\begin{aligned} y &= 6|x| \\ y &= x^3 - x + 6 \end{aligned}$$



Puntos de Intersección:

- Para $x < 0$, tenemos que $x = -1$ es un punto de corte entre ambas curvas: $x^3 + 5x + 6 = 0$

- Para $x > 0$, tenemos: $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2) = 0$.

Luego, el área de la región R está determinada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x + 6 - (-6x)\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x^3 - x + 6 - (6x)\right) dx + \int_{1}^{2} \left(6x - (x^3 - x + 6)\right) dx \\ &= \left(\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{7x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{0}^{1} + \left(-\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{7x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{1}^{2} \\ &= \tfrac{13}{4} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{3}{4} \\ &= \tfrac{27}{4}. \end{aligned}$$