# Series de términos positivos.

- Series de términos positivos.
- Criterio lacunar de Cauchy.
- Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.
- El número e.

# Series de términos positivos.

**Teor.:** Una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada.

**Dem.:** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ una serie de términos positivos.

Sean $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \ n \in \mathbb{N}$, sus sumas parciales.

Entonces, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{S_n\}$ es una sucesión monótona creciente y ya demostramos que las sucesiones monótonas convergen si y sólo si están acotadas. $\square$

# Criterio lacunar de Cauchy.

**Teor. [Criterio lacunar de Cauchy]:** Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

**Dem.:** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos, monótona decreciente:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0.$$

Sean $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $T_k := a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$ las sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, respectivamente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k+1} > n$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2} + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k} \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge $\Longrightarrow$ $\{T_k\}$ acotada $\Longrightarrow$ $\{S_n\}$ acotada $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2^k$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{2} + \cdots + \underbrace{(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})}_{2^{k-1}} \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}\right) = \frac{1}{2}T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow$ $\{S_n\}$ acotada $\Longrightarrow$ $\{T_k\}$ acotada $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge. $\square$

# Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.

**Teor.:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

**Dem.:** **Si** $p \leq 0$, entonces $\frac{1}{n^p} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n^p} \overset{n}{\not\to} 0$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ no converge.

**Si** $p > 0$, entonces $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\implies \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ es una sucesión monótona decreciente de términos positivos.

Por lo tanto, se puede aplicar el criterio lacunar de Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k}_{\text{serie geométrica}} \text{ converge}$$

$$\iff \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \iff p > 1. \quad \square$$

**Corol.:** La **serie armónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pese a que $\frac{1}{n} \to 0$.

No hemos definido las **funciones elementales: exp, log, sen, cos, etc.**

Sin embargo supondremos que están definidas y que satisfacen las propiedades básicas que conocemos del curso de Cálculo.

En particular, $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva, estrictamente creciente y $\log(1) = 0$.

**Teor.:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

**Dem.:** $\boxed{\textbf{Ej.}}$ (Ver el Teor. 3.29 del libro de Rudin.)

# El número e.

Veamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

En efecto, $\forall n \geq 1, \quad 2^{n-1} = \underbrace{2 \cdots 2}_{n-1} \leq 2 \cdots n = n! \implies \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Entonces, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ es una serie geométrica convergente, por el criterio de comparación $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ también converge.

**Def.:** **e** $:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Veamos que $\boxed{2 < \mathrm{e} < 3.}$

En efecto, por un lado $\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots > 1 + 1 = 2$

y por el otro $\mathrm{e} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$

**Teor.:** $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$

**Dem.:** **Ej.** (Ver el Teor. 3.31 del libro de Rudin.)

El número $\mathrm{e}$ puede calcularse aproximadamente mediante las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ que lo define. Veamos el error que se comete si se aproxima $\mathrm{e}$ por la suma parcial $n$-ésima $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathrm{e} - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k}}_{\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n!n}.
\end{aligned}
$$

Es decir que
$$\boxed{0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

**Ej.**.: Calcula $S_{10}$ y demuestra que $0 < \mathrm{e} - S_{10} < 10^{-7}$.
En consecuencia, $S_{10}$ permite determinar las primeras 7 cifras decimales de $\mathrm{e}$.

**Teor.:** El número $\mathrm{e}$ es irracional.

**Dem.:** Por el absurdo. **Supongamos que** $\mathrm{e} \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{N} : \mathrm{e} = \frac{m}{n}$.

Sustituimos en la desigualdad anterior: $$0 < \frac{m}{n} - S_n < \frac{1}{n!n}.$$

Multiplicamos por $n!$: $$0 < \underbrace{(n-1)!m}_{\in\mathbb{N}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} < \frac{1}{n} < 1.$$

Sea $z := (n-1)!m - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$. Entonces $z \in \mathbb{N}$ y $0 < z < 1$.

Pero todos los naturales son mayores o iguales que 1. $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$