UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 4 ALGEBRA III 525201-0 - COMENTARIOS

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 120 minutos. Adicionalmente, tendrán 30 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Para el desarrollo de esta evaluación, puede asumir válida la propiedad (P):
Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y $S \in \mathcal{L}(V)$. Si $\forall\, w \in V\, :\, \langle S(w), w\rangle = 0$, entonces $S = \Theta_{\mathcal{L}(V)}$.

Problema 1. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$.

1.1) Demuestre que T es normal si y sólo si $\forall\, z \in V\, :\, ||T(z)|| = ||T^*(z)||$. Concluya a partir de esta propiedad, que si T es normal, entonces $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$. **(15 puntos)**

Demostración: Por doble implicación:
$(\Rightarrow)$ Hipótesis: T es normal. i.e. $T^*T = TT^*$.
Sea $z \in V$. Aplicando definición de norma inducida y aplicación adjunta, resulta

$$||T(z)||^2 = \langle T(z), T(z)\rangle = \langle \big(T^*T\big)(z), z\rangle = \langle \big(TT^*\big)(z), z\rangle = \langle T^*(z), T^*(z)\rangle = ||T^*(z)||^2\,,$$

y así, siendo $z \in V$ fijo pero arbitrario, se concluye $\forall\, z \in V\, :\, ||T(z)|| = ||T^*(z)||$.
$(\Leftarrow)$ Hipótesis: $\forall\, z \in V\, :\, ||T(z)|| = ||T^*(z)||$.
El objetivo es probar que $TT^* = T^*T$, i.e. $\forall\, z \in V\, :\, \big(TT^*\big)(z) = \big(T^*T\big)(z)$. Para ello, consideramos $z \in V$. Luego,

$$\langle \big(TT^* - T^*T\big)(z), z\rangle = \langle \big(T^*T\big)(z), z\rangle - \langle \big(TT^*\big)(z), z\rangle = ||T(z)||^2 - ||T^*(z)||^2 = 0\,.$$

Así hemos establecido que $TT^* - T^*T \in \mathcal{L}(V)$ cumple $\forall\, z \in V\, :\, \langle \big(TT^* - T^*T\big)(z), z\rangle = 0$. Luego, aplicando la Propiedad (P), se concluye que $TT^* - T^*T = \Theta$, i.e. T es normal.

Como consecuencia de la equivalencia anterior, tenemos para T normal:

$$z \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(z) = \theta \Leftrightarrow T^*(z) = \theta \Leftrightarrow z \in \mathrm{Ker}(T^*)\,,$$

y de aquí se concluye (por un argumento de Fijo pero arbitrario sobre z) la propiedad pedida $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

En los incisos siguientes, considere que $T \in \mathcal{L}(V)$ es Normal.

1.2) Demuestre, usando la definición, que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\, :\, (T - \alpha\,\tilde{I})^* = T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}$, siendo $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la aplicación identidad. Concluya después que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\, :\, (T - \alpha\,\tilde{I})$ es una aplicación normal.
Luego, aplique 1.1) para probar: (λ, v) es un autopar de T si y sólo si $(\overline{\lambda}, v)$ es un autopar de T^*.
(10 puntos)

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $z, x \in V$. Tenemos $T - \alpha\,\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ y

$$\langle \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)(z), x\rangle = \langle T(z) - \alpha\, z, x\rangle = \langle T(z), x\rangle - \alpha\,\langle z, x\rangle = \langle z, T^*(x)\rangle - \langle z, \overline{\alpha}\, x\rangle = \langle z, \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)(x)\rangle\,.$$

De esta manera, se ha establecido que $\forall\, z, x \in V\, :\, \langle \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)(z), x\rangle = \langle z, \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)(x)\rangle$, lo cual implica que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\, :\, \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^* = T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}$. Además, para $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\begin{aligned}\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^*\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big) &= \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)\,\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big) = T^*T - \alpha\, T^* - \overline{\alpha}\, T + |\alpha|^2\,\tilde{I}\\ \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^* &= \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)\,\big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big) = TT^* - \overline{\alpha}\, T - \alpha\, T^* + |\alpha|^2\,\tilde{I}\,,\end{aligned}$$

y en vista que T es normal, se concluye, dado que $\alpha \in \mathbb{C}$ es fijo pero arbitrario, que
$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\, :\, T - \alpha\,\tilde{I}$ es normal.

Teniendo en cuenta 1.1), lo anterior implica que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\, :\, \mathrm{Ker}(T - \alpha\,\tilde{I}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I})$. Luego,

$$(\lambda, v) \text{ es un autopar de } T \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\tilde{I}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\,\tilde{I}) \Leftrightarrow (\overline{\lambda}, v) \text{ es un autopar de } T^*\,.$$

1.3) Demostrar: T es autoadjunta si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. **(10 puntos)**

DEMOSTRACIÓN: Sea T normal. Procederemos a establecer la propiedad por doble implicación:
($\Rightarrow$) HIPÓTESIS: T es autoadjunta, i.e. $T^* = T$. Sea $\lambda \in \sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$. Sea $z \in V \backslash \{\theta\}$ un vector propio de T asociado a λ. Por la propiedad dada en 1.2), $(\overline{\lambda}, z)$ es un autopar de T^*. Esto implica

$$\lambda z = T(z) = T^*(z) = \overline{\lambda} z \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) \underbrace{z}_{\neq \theta} = \theta \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Luego, siendo $\lambda \in \sigma(T)$ fijo pero arbitrario, se concluye que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) HIPÓTESIS: $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
Sea (λ, z) un autopar de T. Entonces $T(z) = \lambda z = \overline{\lambda} z = T^*(z)$, lo cual implica que para cualquier vector propio z de T, se cumple: $T(z) = T^*(z)$. En vista que T es NORMAL, podemos aplicar el TEOREMA ESPECTRAL COMPLEJO EN DIMENSIÓN FINITA, el cual asegura la existencia de una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^{\dim(V)}$ de V formada por vectores propios de T. Así

$$\forall\, j \in \{1, ..., \dim(V)\} : T(z_j) = T^*(z_j) \Rightarrow \forall\, x \in V : T(x) = T^*(x)\,, (\text{... ¡Hacerlo!})$$

con lo cual se concluye que $T = T^*$, i.e. T es autoadjunta.

Problema 2. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios vectoriales propios (i.e. no triviales) de V. Demostrar que: $U \subseteq W \Leftrightarrow W^\circ \subseteq U^\circ$. **(10 puntos)**
DEMOSTRACIÓN: Por doble implicación:
($\Rightarrow$) HIPÓTESIS: $U \subseteq W$.
Sea $F \in W^\circ$, es decir (definición)

$$\begin{aligned} & F \in V' \wedge \forall\, z \in W : F(z) = 0 \\ \Rightarrow\ & F \in V' \wedge \forall\, z \in U : F(z) = 0 \\ \Rightarrow\ & F \in U^\circ\,. \end{aligned}$$

Luego, como el funcional lineal $F \in W^\circ$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $W^\circ \subseteq U^\circ$.
($\Leftarrow$) HIPÓTESIS: $W^\circ \subseteq U^\circ$.
Sea $x \in U = {}^\circ\big(U^\circ\big)$, es decir (definición)

$$\begin{aligned} & \forall\, F \in U^\circ : F(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & \forall\, F \in W^\circ : F(x) = 0 \\ \Rightarrow\ & x \in {}^\circ\big(W^\circ\big) = W\,. \end{aligned}$$

De esta manera, como $x \in U$ es fijo pero arbitrario, se infiere que $U \subseteq W$.

Problema 3. Considere el subespacio vectorial $S := \langle\{(1,1,-1,1), (2,1,-3,1)\}\rangle$ de $\mathbb{R}^4$, provisto del producto interno usual. Determine una base para $S^\perp$ y otra para S°, en forma explícitas. **(10 puntos)**
DESARROLLO:
Primero, para $S^\perp := \{x \in \mathbb{R}^4 : \forall\, z \in S : \langle x, z\rangle = 0\}$.
Sea $x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^\perp$. Esto equivale a decir que

$$\begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,-1,1)\rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (2,1,-3,1)\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales por filas, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_1 - f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, resolviendo el sistema equivalente, obtenemos

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \,=\, (2r, -r-s, r, s)\,,\; r, s \in \mathbb{R}\,,$$

lo cual implica que $S^{\perp} \,=\, \langle\{(2,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}\rangle$. Así, $\{(2,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$ es l.i. (¿Por qué?) y genera $S^{\perp}$. Por tanto, es una base de $S^{\perp}$.
Segundo, para $S^{\circ} \,:=\, \{F \,\in\, (\mathbb{R}^4)' \,|\, \forall\, z \,\in\, S \,:\, F(z) \,=\, 0\}$.
Recordamos primero que como estamos en dimensión finita: $\dim(S^{\circ}) \,=\, \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(S) \,=\, 4-2 \,=\, 2$.
Consideremos ahora la base $B \,:=\, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, formada por la unión de las bases de S y $S^{\perp}$ (¿Por qué?), siendo

$$v_1 \,:=\, (1,1,-1,1)\,, \quad v_2 \,:=\, (2,1,-3,1)\,, \quad v_3 \,:=\, (2,-1,1,0)\,, \quad v_4 \,:=\, (0,-1,0,1)\,.$$

Sea $B' \,:=\, \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ la base dual de B. Dado que $\forall\, i, j \in \{1,2,3,4\} \,:\, \psi_j(v_i) \,=\, \delta_{ij}$, notamos que

$$\begin{aligned} \psi_3(v_1) \,&=\, 0 \,=\, \psi_3(v_2) \,\Rightarrow\, \psi_3 \,\in\, S^{\circ} \\ \psi_4(v_1) \,&=\, 0 \,=\, \psi_4(v_2) \,\Rightarrow\, \psi_4 \,\in\, S^{\circ}\,, \end{aligned}$$

y en vista que $\{\psi_3, \psi_4\} \,\subseteq\, S^{\circ}$ es L.I. (¿Por qué?), se deduce que $\{\psi_3, \psi_4\}$ es una base de S°. Resta definir explícitamente estos funcionales lineales. Sea $x \,:=\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \,\in\, \mathbb{R}^4$. Sean $\{\alpha_j\}_{j=1}^{4} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$x \,=\, \sum_{j=1}^{4} \alpha_j\, v_j \,\Leftrightarrow\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz del sistema, aplicando operaciones elementales por filas, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & | & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & x_2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & | & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & x_4 \end{pmatrix} \underset{f_3+f_2}{\overset{f_4-f_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & | & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & x_2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & | & x_3+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & x_4-x_2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{f_3-2f_1}{\overset{f_2-f_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & | & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & | & x_3-x_2+2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & x_4-x_2 \end{pmatrix} \underset{f_4 \leftarrow f_3}{\overset{f_3-6f_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & | & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & x_4-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & | & x_3+5x_2+2x_1-6x_4 \end{pmatrix}.$$

Así, resolviendo el sistema equivalente (sólo requerimos despejar α_3 y α_4...¿Por qué?), se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_4 \,&=\, -\frac{1}{11}\big(x_3+5x_2+2x_1-6x_4\big) \\ \alpha_3 \,&=\, \frac{1}{11}\big(4x_1-x_2+2x_3-x_4\big)\,. \end{aligned}$$

De esta manera, teniendo en cuenta la propiedad de la base dual, se concluye

$$\begin{aligned} \forall\, x \,:=\, (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \psi_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \,&:=\, \frac{1}{11}\big(4x_1-x_2+2x_3-x_4\big)\,, \\ \forall\, x \,:=\, (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \psi_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \,&:=\, -\frac{1}{11}\big(2x_1+5x_2+x_3-6x_4\big)\,. \end{aligned}$$

Comentario: hay varias respuestas posibles, siguiendo esta estrategia. Cada una de ellas dependerá de cómo se completa la base de S para que sea una base de $\mathbb{R}^4$.

Problema 4.

4.1) Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno $(\mathbb{C}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T(1, i, 1-i) = (i, 1, 1)$ y $T(-2i, -1, -1) = (0, 1+i, 1)$. ¿Puede ser T autoadjunta? Justifique su respuesta. **(05 puntos)**

Desarrollo: En el caso T fuera autoadjunta (i.e. $T^* = T$), se cumpliría:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{C}^3 \,:\, \langle T(x), y\rangle \,=\, \langle x, T(y)\rangle\,.$$

Para $x := (1, i, 1-i), y := (-2i, -1, -1) \in \mathbb{C}^3$ se tiene

$$\langle T(x), y\rangle \,=\, \langle (i,1,1), (-2i,-1,-1)\rangle \,=\, i(2i) \,-\, 1 \,-\, 1 \,=\, -4\,,$$
$$\langle x, T(y)\rangle \,=\, \langle (1,i,1-i), (0,1+i,1)\rangle \,=\, (1)(0) \,+\, (i)(1-i) \,+\, (1-i)(1) \,=\, i+1+1-i \,=\, 2\,,$$

y como los valores son distintos, entonces T no puede ser autoadjunta.

Comentario: Algunos desarrollos aplican la propiedad dada en el Ejercicio 18 del Listado 7, sin haber sido previamente demostrada antes de ser aplicada. También incurren en error al definir el producto interno involucrado de manera incorrecta. Se penalizará por ello.

4.2) Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y μ un valor singular de $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que existe $z \in V$ unitario, tal que $||T(z)|| = \mu$. **(05 puntos)**

Demostración: Como $\mu \geq 0$ es un valor singular de T significa que μ^2 es un valor propio de T^*T. Sea $z \in V$ un vector propio de T^*T, el cual puede considerarse unitario (si no lo es, se normaliza). Se tiene así que $\big(T^*T\big)(z) = \mu^2\, z$. Luego, $||z|| = 1$ y

$$||T(z)||^2 \,=\, \langle T(z), T(z)\rangle \,=\, \langle \big(T^*T\big)(z), z\rangle \,=\, \langle \mu^2\, z, z\rangle \,=\, \mu^2\, ||z||^2 \,\Rightarrow\, ||T(z)|| \,=\, \mu.$$

RBP/rbp 24.08.2020