UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 13 - Álgebra III (525201)
Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ tal que su forma de Jordan asociada es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre el polinomio característico de A.

b) Encuentre los valores propios de A.

c) ¿Cuál es la multiplicidad geométrica y algebraica de estos valores propios?

d) ¿Cuántos espacios A-invariantes de dimensión 1 existen?

e) Encuentre la dimensión de todos los núcleos iterados de A.

Demostración. *a*) Notamos que J se compone de las siguientes cajas de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{-1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(0) & & & \\ & J_1(-1) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

Luego, $p_\lambda(A) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

b) Del polinomio característico obtenemos que $\sigma(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

c) De las cajas de Jordan podemos inferir que

d) Existen 4 subespacios propios de dimensión 1, los cuales a su vez son los invariantes de dimensión 1.

λ	Mult. algebraica	Mult. geomérica
-1	1	1
0	2	1
1	1	1
2	2	1

e) La dimensión de los nucleos iterados están dados por el orden de las cajas de Jordan. En este caso tenemos que los nucleos iterados son 2, 1, 2 y 1 respectivamente.

■

Ejercicio 2. Utilice el Teorema de Cayley-Hamilton para calcular:

a) $A^3 - A^2 + 2A - I$, para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) A^{1000}, para $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

d) A^{-1}, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Demostración.

a) Primero calculamos que

$$p_\lambda(A) = (2 - \lambda)^2 - 1$$

■

Ejercicio 3. Determine todas las formas posibles de Jordan para una matriz A cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizable. Considere las cantidades escalares:

1. $I_1(A) = \operatorname{tr}(A)$,
2. $I_2(A) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right)$,
3. $I_3(A) = \det(A)$.

Demuestre que $A^3 - I_1(A)A^2 + I_2(A)A - I_3(A)I_3 = \Theta_3$.

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr