UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 1

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

   a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
   b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   d) $x \in \{x\}$
   e) $x \in \{\{x\}\}$
   f) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b, c\}\}$
   g) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
   h) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$
   i) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

2. Demuestre las siguientes tautologías sin utilizar tablas de verdad.

   a) $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
   b) $\neg[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
   c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
   d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg s \Rightarrow \neg r)] \Rightarrow [\neg p \vee \neg r \vee (q \wedge s)]$

3. Si es necesario, considere $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$. Niegue las siguientes proposiciones lógicas.

   a) $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (\forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$
   b) $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (\forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$
   c) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
   d) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : (x < y \longrightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y))$.

4. Pruebe, usando equivalencias lógicas, las siguientes proposiciones.

   a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
   b) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.
   c) $A \cup B = A \cap C \implies B \subseteq A \wedge A \subseteq C$.
   d) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$

5. Sea $\odot$ una ley de operación entre conjuntos definida por $A \odot B = A^c \cap B^c$. Considere una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ que cumple la siguiente propiedad:

   $$\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \odot B \in \mathcal{F}$$

   Sean $A, B \in \mathcal{F}$, demuestre que:

   a) $A^c \in \mathcal{F}$
   b) $A \cap B \in \mathcal{F}$
   c) $A \cup B \in \mathcal{F}$
   d) $A \triangle B \in \mathcal{F}$
   e) $\emptyset \in \mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mathcal{F}$
