UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 3 ALGEBRA III 525201-1

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Estudie las siguientes relaciones, indicando aquellas que son de orden total o parcial. Justifique su respuesta.

   $(a)\ \forall\, x, y \in \mathbb{N} : x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x \geq y\,.$ $\quad (b)\ \forall\, X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \subseteq Y^c\,.$

   $(c)\ \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : A^m = B^m\,.$ $\quad (d)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : (x_i)_{i=1}^n \,\mathcal{R}\, (y_i)_{i=1}^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i\,.$

2. Sea $A := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, junto con la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ dada por

   $$\mathcal{R} := \{(x,x) : x \in A\} \cup \{(c,a), (d,a), (e,b), (g,d), (g,a), (h,f), (h,g), (h,c), (h,d), (h,e), (h,b), (h,a), (i,g), (i,d), (i,a)\} \cup \{(j,x) : x \in A\}\,.$$

   (a) Determinar si $\mathcal{R}$ es relación de orden. En caso de serlo, clasificarla y dibujar el diagrama de Hasse.
   (b) Determinar las cotas superiores e inferiores, si existen, de $X := \{c, d, g, h, i\}$, $Y := \{c, d, f, g, h\}$, y $Z := \{a, c, e\}$. Luego indique, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, de los conjuntos anteriores.
   (c) Determinar si hay maximal, minimal en A de los conjuntos anteriores.
   (d) Analizar qué elementos característicos tiene el mismo conjunto A.

3. Determinar, si existen, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimos, para los siguientes conjuntos ordenados:

   $$(a)\ (\mathcal{P}(X), \subseteq)\,,\ \text{siendo } X \neq \emptyset \quad (b)\ (\mathbb{N}, \geq) \quad (c)\ (\mathbb{N}, |\,) \quad (d)\ (\mathbb{N}\backslash\{1\}, |\,)$$

4. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}^2$, definida por: $\forall\, x := (x_1, x_2)\,, y := (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 : x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge y_2 \leq x_2\,.$

   a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{N}^2$.
   b) Determine si $\mathcal{R}$ es de orden parcial o total en $\mathbb{N}^2$. Además, determine si $\mathcal{R}$ tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo.

5. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}^+$ dada por: $\forall\, a\,, b \in \mathbb{Z}^+ : a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}_0^+ : a = b^m\,.$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{Z}^+$.
   (b) Determine si $\mathcal{R}$ es de orden parcial o total en $\mathbb{Z}^+$.
   (c) Además, determine si $\mathcal{R}$ tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo. En caso de existir, indique cuál(es) es/son tal(es) elemento(s).

6. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\emptyset \neq A \subseteq (\mathbb{Z}\backslash\{0\})^2$ por: $\forall\, (a, b)\,, (c, d) \in A : (a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \Leftrightarrow ad = bc\,.$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en A.
   (b) Sea $A := \{(-4, 20)\,, (-3, -9)\,, (-2, -4)\,, (-1, -11)\,, (-1, -3)\,, (1, 2)\,, (1, 5)\,, (2, 10)\,, (2, 14)\,, (3, 6)\,, (4, 8)\,, (4, 12)\}$. Determinar las clases de equivalencia $[(2, 14)]_{\mathcal{R}}$, $[(-3, -9)]_{\mathcal{R}}$, $[(4, 8)]_{\mathcal{R}}$.
   (c) Determine la partición de A inducida por $\mathcal{R}$, siendo A el conjunto definido en el item anterior.

7. Sea $E \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}$ una relación refleja y transitiva en E. Se define la relación $\sim$ por: $\forall\, a\,, b \in E : a \sim b \Leftrightarrow a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, a\,.$

   (a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   (b) Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$, entonces $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow a' \,\mathcal{R}\, b'\,.$

8. Sea A un conjunto no vacío, y sea $B \subseteq A$ un subconjunto fijo de A. Se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(A)$ por:

   $$\forall\, X\,, Y \subseteq A : X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow B \cap X = B \cap Y\,.$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$.
   (b) Para $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B := \{1, 2, 3\}$, determine $[X]_{\mathcal{R}}$, siendo $X := \{1, 3, 5\}$.
   (c) Para $A := \{1, 2, 3\}$, y $B := \{1, 2\}$, determine de manera **explícita** una partición de $\mathcal{P}(A)$ inducida por $\mathcal{R}$.

Ejercicios propuestos:

1. Estudie las siguientes relaciones, indicando aquellas que son de orden total o parcial. Justifique su respuesta.

   $(a)\ \forall\, x, y \in \mathbb{N} : x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \max\{x,y\} \leq 100\,.$ $\qquad (b)\, \forall\, x, y \in \mathbb{N} : x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \mathrm{MCD}\{x,y\} = 1\,.$

   $(c)\ \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N}) : A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow A\,B = I\,.$ $\qquad (d)\, \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_2(\{0,1\}) : X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow X\,Y = \Theta\,.$

2. Este ejercicio da una caracterización de aquellas relaciones $\mathcal{R}$ en un conjunto A (no vacío), que son simétricas y antisimétricas. Demostrar que

   $$\mathcal{R} \text{ es simétrica y antisimétrica } \Leftrightarrow \forall\, x\,, y \in A : (x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x = y)\,.$$

3. Sea $F := \{f : A \to B : \quad f \text{ es función}\}$, y sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define en F la relación $\mathcal{R}^*$ por: $\forall\, f\,, g \in F : f\,\mathcal{R}^*\,g \Leftrightarrow \forall\, a \in A : f(a)\,\mathcal{R}\,g(a)\,.$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden en F.

   (b) Exhiba un ejemplo en el cual $|A| = |B| = 2$, y $\mathcal{R}^*$ es relación de orden parcial.

4. Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden en dos conjuntos no vacíos A y B, respectivamente. Demuestre que la relación $\mathcal{S}$ definida en $A \times B$ por: $\forall\,(a,b)\,(c,d) \in A \times B : (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \Leftrightarrow (a\,\mathcal{R}_1\,c) \wedge (b\,\mathcal{R}_2\,d)$, es relación de orden también.

5. Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados. En $A \times B$. Se define la relación $\leq_{\texttt{lex}}$ por :

   $$\forall\,(a,b),(c,d) \in A \times B : (a,b) \leq_{\texttt{lex}} (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a <_A c) \vee \Big(a = c \wedge b \leq_B d\Big)\,. \tag{1}$$

   (a) Demostrar que $\leq_{\texttt{lex}}$ es una relación de orden en $A \times B$, llamada relación de Orden Lexicográfico.

   (b) Demostrar que si $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son conjuntos totalmente ordenados, entonces $(A \times B, \leq_{\texttt{lex}})$ también lo será.

6. En $(\mathbb{N}, |) \times (\mathbb{N}, |)$ se considera el orden lexicográfico (similar a (1)). Determinar, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto $A := \{(2,1),(3,4)\}$.

7. Determinar el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 010, 011, 000, 100, basado en el orden $0 \leq 1$. Dibujar el diagrama de Hasse de estas cadenas, ahora con el orden producto.

8. Considere el conjunto ordenado $(A, |)$, siendo $A := \{2,4,5,7,8,16,32,40,48,160,240\}$, y los subconjuntos (de A) $B := \{8,16,40\}$ y $C := \{160,240\}$.

   (a) Determinar, si existen, los elementos característicos de B con respecto a $(A, |)$.

   (b) Determinar, si existen, los elementos característicos de C con respecto a $(A, |)$.

   (c) Determinar, si existen, los elementos maximal, minimal, máximo, mínimo de $(A, |)$.

9. Sea A un conjunto no vacío, y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se dice que $\mathcal{R}$ es **circular** si y sólo si

   $$\forall\, a\,, b\,, c \in A : \Big(a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,c\Big) \Rightarrow c\,\mathcal{R}\,a\,.$$

   Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es refleja y circular.

10. Se define en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, siendo $m\,, n \in \mathbb{N}$, la relación de matrices rectangulares similares:

    $$\forall\, A\,, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) : A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow (\exists\, P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),\ \text{no singular}) : (\exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{no singular}) : A = P\,B\,Q^{-1}\,.$$

    Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

11. Sea $p \in \mathbb{N}$. Se define la relación *congruencia módulo* p $(\mathcal{R}_p)$ en $\mathbb{Z}$ por

    $$\begin{aligned}\forall\, x\,, y \in \mathbb{Z} : x\,\mathcal{R}_p\,y &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = k\,p \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k\,p + y\,.\end{aligned}$$

    (a) Pruebe que $\mathcal{R}_p$ es relación de equivalencia.

    (b) Determine $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\mathcal{R}_p$

12. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas de X. Es decir, los elementos de $\mathcal{P}$ son de la forma $\{A_j\}_{j=1}^m$, siendo $m \in \mathbb{N}$. Se define ahora la relación $\leq$ en $\mathcal{P}$ como sigue:

    $$\forall\, \{A_j\}_{j=1}^k, \{B_j\}_{j=1}^\ell \in \mathcal{P} : \{A_j\}_{j=1}^k \leq \{B_j\}_{j=1}^\ell \Leftrightarrow \forall\, j \in \{1, ..., \ell\} : \exists\, r \in \{1, ..., k\} : B_j \subseteq A_r\,.$$

    (a) Demostrar que $(\mathcal{P}, \leq)$ es un conjunto ordenado.

    (b) Exhibir un ejemplo, con $|X| > 3$, tal que $\leq$ sea una relación de orden parcial en $\mathcal{P}$.