UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
24 de junio de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 9

1. Sea $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada con respecto a la base $\{1, 1+x, x+x^2\}$ es:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
Demuestre que B define un producto interior y calcule su expresión matricial respecto de la base $\{1, x, x^2\}$.

2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices definida positiva y definida negativa respectivamente. Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que $A + \alpha B$ es definida positiva.

3. Encuentre el lugar geométrico de:

   a) $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$
   b) $25x^2 + 120xy + 144y^2 = 0$
   c) $xy - yz = 1$
   d) $x^2 - 2xy + z = 2$

4. Clasificar según los valores de a las cónicas:

   a) $x^2 + 2axy + 3y^2 = 1$
   b) $9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0$

5. Considere la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida como sigue.
$$F((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xy$$

6. Considere la forma bilineal siguiente en $\mathbb{R}^2$.
$$D((x, y), (a, b)) = -3ax + 3xb + ay - by$$

   a) Encuentre la matriz asociada a D respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.
   b) Decida si D es o no degenerada.
   c) Calcule la forma cuadrática asociada a D definida para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por $C(x, y) = D((x, y), (x, y))$, y determine su forma bilineal simétrica asociada.
   d) Decida si C cumple que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, C(x, y) \leq 0$, o no.

7. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como sigue.
$$F(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$$

   a) Demuestre que se trata de una forma cuadrática y determine la forma bilineal simétrica B asociada.

b) Para la forma bilineal encontrada en la parte a), determine si es degenerada, definida positiva, semi-definida positiva, definida negativa, semi-definida negativa o ninguna de las cinco.

c) Calcule $Ker_I(B)$.

8. Demuestre que la forma bilineal $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un producto interno, para lo cual, calcule su matriz representante, evalúe simetría, obtenga sus valores propios y aplique los teoremas vistos en clases.

$$B((x, y), (a, b)) = 2ax + ay + bx + by$$

9. Considere la siguiente matriz que está en su forma canónica de Jordan y responda las preguntas de verdadero y falso que se indican abajo, justificando debidamente cada una de sus respuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $dim(E_3(13)) = 5$.

b) A es diagonalizable.

c) El polinomio minimal de A es $m(x) = x(x - 13)^5$.

d) La multiplicidad geométrica de 13 es 3.

10. Un operador $T : \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ tiene la siguiente forma de Jordan.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine el polinomio característico de T y también su polinomio minimal.

b) Calcule el espectro de T y la multiplicidad geométrica y algebraica de cada valor propio.

c) Si la base de Jordan es: $\{\binom{111}{000}, \binom{110}{001}, \binom{101}{010}, \binom{011}{100}, \binom{101}{111}, \binom{100}{000}\}$, determine entonces un espacio T-invariante de dimensión 3.