UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
1 de abril de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 4

1. Calcule el conjunto cuociente para cada una de las siguientes relaciones de equivalencia, y en cada caso intente encontrar la característica que tienen en común los elementos de cada clase de equivalencia.

   a) La siguiente relación R en $\mathbb{Z}^2$.
   $$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = cb$$
   b) La siguiente relación R en $\mathbb{R}$ dada por:
   $$x\ R\ y \Leftrightarrow (\exists z \in Z)\ x + z = y.$$
   c) La siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   $$A\ \mathcal{R}\ B\ \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in B)\ x \leq y \wedge (\forall x \in A)(\exists y \in B)\ y \leq x$$
   d) La siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   $$A\ \mathcal{R}\ B\ \Leftrightarrow |A| = |B|$$

2. Considere la siguiente relación en $\mathbb{R}[x]$:
   $$p(x)\ \mathcal{R}\ q(x) \Leftrightarrow (x^2+1)|p(x) - q(x)$$
   a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   b) Demuestre que $[0] = \{q(x)(x^2+1) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.
   c) Demuestre que si $(x^2+1) \not| q(x)$, entonces existe $f(x)$ tal que $q(x)f(x)\mathcal{R}1$.
   d) Demuestre que para todo polinomio $q(x)$ existe otro polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 1 tal que $q(x)\mathcal{R}p(x)$.
   e) Demuestre que si $a_1x + a_0\mathcal{R}b_1x + b_0$, entonces $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0$.
   f) Demuestre que la siguiente función es biyectiva:
   $$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}[x]/\mathcal{R}; \phi(c+id) = f(x),\ \text{donde } f(x) = dx + c.$$

3. Dado un espacio vectorial V con producto interno y U uno de sus subespacios, considere la relación R en V definida como sigue.
   $$x\ R\ y \Leftrightarrow (\exists z \in U)\ x + z = y.$$
   a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
   b) Demuestre que si $v, w \in U^\perp$ son dos vectores distintos del ortogonal de U, entonces $v \not R\ w$.
   c) Demuestre que $[0] = U$.
   d) Si $w \in U^\perp$, caracterice $[w]$.

4. Aplique el algoritmo de Euclides a los siguientes pares de números.

   a) $a = 240$, $b = 84$; *b)* $a = 288$, $b = 51$; *c)* $a = 144$, $b = 89$.

   Luego, en cada caso, encuentre los enteros e, f tales que $mcd(a, b) = ea + fb$.

5. Encuentre la factorización prima de los siguientes números.

   a) 240 *b)* 17 *c)* 288 *d)* 89

6. Decida, en cada caso, si existen enteros x, y tales que:

   a) $2x - 6y = 17$, *b)* $84x - 240y = 72$, *c)* $30x - 7y = 17$.

(Bonus) Sean a, b, e, f tales que $MCD(a, b) = ea + fb$, demuestre que entonces e y f son primos relativos.

7. Calcule el $MCD(6x^3 + 13x^2 + 4x - 3, 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6)$.

8. Calcule $g(x) = MCD(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2, 3x^2 - 8x + 4)$ y encuentre los polinomios $e(x)$, $f(x)$ tales que $g(x) = e(x)(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) + f(x)(3x^2 - 8x + 4)$.

9. Dos polinomios $p(x)$, $q(x)$ se dicen *primos relativos* si $MCD(p(x), q(x)) = 1$.

   Demuestre que $p(x)$, $q(x)$ son primos relativos si y sólo si existen dos polinomios $r(x)$, $s(x)$ tales que $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 1$.

10. Demuestre que $p(x)$, $q(x)$ son primos relativos si y sólo si, al mirarlos en $\mathbb{C}$ no tienen raíces comunes.

11. Demuestre que si $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos y el polinomio $r(x)$ es tal que $p(x)$ divide a $q(x)r(x)$, entonces $p(x)$ divide a $r(x)$.

12. Demuestre que si $p(x)$ y $q(x)$ tienen coeficientes enteros, entonces $MCD(p(x), q(x))$ tiene coeficientes racionales.

13. Demuestre que si $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ es un polinomio de grado n y sus coeficientes son números enteros, entonces si j/i es una raíz racional de $p(x)$ e i es primo relativo de j, entonces $j|a_0$ e $i|a_n$.

14. Use el resultado anterior para demostrar que si $m \in \mathbb{N}$ no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{m}$ es irracional.