

Universidad de Concepción
 Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
 Departamento de Ingeniería Matemática
 Dr. Raimund Bürger
 Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Tarea no. 3 — jueves 11 de mayo de 2017

Plazo de entrega: miércoles 24 de mayo de 2017, 10.15 horas

Problema 1. Para cada par (\mathbf{A}, \mathbf{b}) , usar el método de Householder para determinar una descomposición **QR** de \mathbf{A} , determinar un vector $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ que minimiza $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$, y calcular $\|\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}\|_2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \\ 70 & -35 \\ -14 & 77 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Se considera el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

- a) Preparar un dibujo que interpreta ambas ecuaciones del sistema lineal como rectas en el plano x_1-x_2 .
- b) Ejecutar desde $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ tres pasos de cada uno de los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, del método SOR con $\omega = 1.5$ y del método SOR con ω_{opt} . Agregar al dibujo las sucesiones

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \dots$$

en los casos de los métodos de Gauss-Seidel y SOR y la sucesión

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \dots$$

en el caso del método de Jacobi.

Problema 3. Resolver con cada uno de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, y SOR con $\omega = 1.5$ cada uno de los sistemas $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, partiendo desde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Se deben calcular en cada caso cinco aproximaciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5$, además la distancia $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*\|$ en las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$. Calcular en cada caso, además, $r_{\|\cdot\|_i} := \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_*\| / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*\|$ para $i = 0, \dots, 4$, y comparar con $r_\sigma(\mathbf{B}(\omega))$, para

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ -19 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \\ \text{b) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 4.

- a) Analizar si las siguientes matrices poseen algunas de las siguientes propiedades: irreducible, irreduciblemente diagonal dominante, estrictamente diagonal dominante, L-matriz, M-matriz:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Se considera la matriz

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Demostrar que \mathbf{A}_n es una M-matriz para todo $n \in \mathbb{N}$, y desarrollar una fórmula explícita de $\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(\mathbf{A}_n)$.

Problema 5.

- a) Analizar si (i) el método de Jacobi, (ii) el método de Gauss-Seidel y (iii) el método SOR con $\omega = \omega_{\text{opt}}$ convergen para el sistema $\mathbf{A}_i \mathbf{x} = \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, para las siguientes matrices (en el caso (iii), determinar ω_{opt} y $r_\sigma(\mathbf{B}(\omega_{\text{opt}}))$):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

- b) En todos los casos, dibujar la función $\omega \mapsto r_\sigma(\mathbf{B}(\omega))$ para $\omega \in (0, 2)$.