

Análisis Numérico III

Problemas de valores iniciales y de frontera para EDPs hiperbólicas y parabólicas

Módulo 5, Presentación 11

Raimund Bürger

9 de junio de 2022

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

A parte de los métodos de características existen los **métodos de diferencias finitas**. Usan una **malla rectangular**, paralela a los ejes, y en los puntos de la malla se aproximan las derivadas por **cuocientes de diferencias**.

Debido a la regularidad de la malla este método posee grandes ventajas comparado con los métodos de características, pero posiblemente la malla rectangular **no refleja adecuadamente la naturaleza del problema matemático**: esta malla se impone artificialmente, y siempre hay que considerar las características.

Problema de valores iniciales de la **ecuación de la onda**:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

5.3.1 La fórmula de d'Alembert Demostraremos que (5.28) puede ser resuelto explícitamente. Usando la transformación de variables

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct, \quad \Phi(\xi, \eta) = u(x, t) \quad (5.29)$$

y observando que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad c > 0,$$

obtenemos de (5.28) la ecuación diferencial transformada

$$4c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

cuyas soluciones son fáciles de determinar:

$$\Phi(\xi, \eta) = P(\xi) + Q(\eta).$$

En virtud de (5.29),

$$u(x, t) = P(x + ct) + Q(x - ct).$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Aquí, P y Q son funciones arbitrarias y dos veces continuamente diferenciables. Utilizando esta solución general, obtenemos de las condiciones iniciales de (5.28) la siguiente expresión, conocida como la **fórmula de d'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi. \quad (5.30)$$

Las **características** de la ecuación de la onda (5.28) son

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c},$$

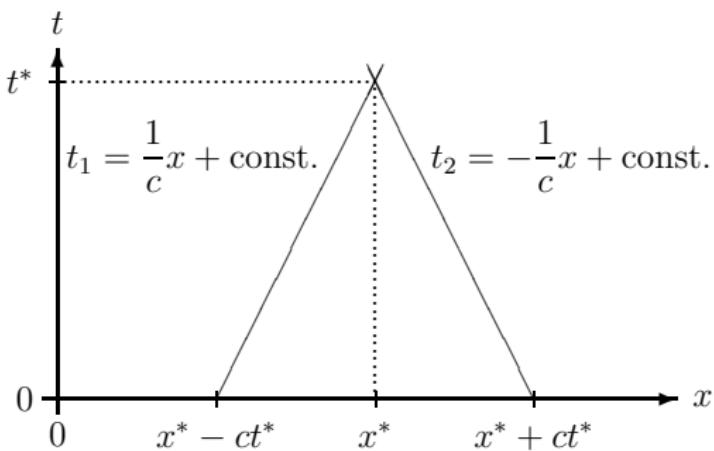
es decir,

$$t_1 = \frac{1}{c}x + \text{const.}, \quad t_2 = -\frac{1}{c}x + \text{const.} \quad (5.31)$$

La fórmula (5.30) implica directamente que el valor de la solución en el punto (x^*, t^*) depende precisamente de los valores iniciales en el intervalo $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ del eje x .

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Esto es precisamente el intervalo de dependencia del punto (x^*, t^*) :



5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

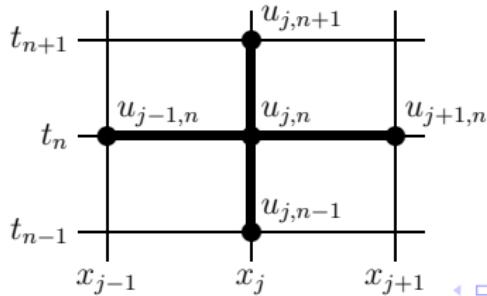
5.3.2 Métodos explícitos para la ecuación de la onda Consideraremos ahora aproximaciones de la ecuación de la onda por diferencias finitas. Utilizamos la **malla**

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

y los **cuocientes de diferencias** de segundo orden para aproximar las derivadas en (5.28):

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} &= 2(1 - c^2 \lambda^2)u_{jn} + c^2 \lambda^2(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}) - u_{j,n-1}, \\ j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda &:= \frac{\Delta t}{\Delta x}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

donde $u_{jn} \approx u(\Delta x, t_n)$. Este método conecta 5 puntos de la malla:



5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Para la computación de la **capa de t número $n + 1$** necesitamos los valores de las funciones de las **dos capas que están debajo**, por lo tanto tenemos que resolver el problema de calcular los valores numéricos en la primera capa t_1 , es decir, en los puntos de malla $(x_j, \Delta t)$.

Como el método (5.32) es de **segundo orden de consistencia** en Δt y Δx , queremos mantener el segundo orden de consistencia también al calcular la **primera capa de tiempo**.

A partir de (5.28) obtenemos mediante un desarrollo de Taylor:

$$u(x, \Delta t) = f(x) + \Delta t g(x) + \frac{\Delta t^2}{2} c^2 f''(x) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.33)$$

lo que corresponde a la aproximación

$$u_{j1} = f_j + \Delta t g_j + \frac{c^2 \lambda^2}{2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (5.34)$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Extendiendo el desarrollo en serie de Taylor en (5.33) podemos lograr aproximaciones de mayor precisión; por ejemplo, (5.28) implica que

$$u(x, \Delta t) = f(x) + \Delta t g(x) + \frac{\Delta t^2}{2} c^2 f''(x) + \frac{\Delta t^3}{6} c^2 g''(x) + \mathcal{O}(\Delta t^4),$$

lo que motiva la aproximación de **tercer orden**

$$\begin{aligned} u_{j1} &= f_j + \Delta t g_j + \frac{c^2 \lambda^2}{2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) \\ &\quad + \Delta t \frac{c^2 \lambda^2}{6} (g_{j-1} - 2g_j + g_{j+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

(Si podemos calcular las derivadas de f y g en forma explícita, **no es necesario** utilizar las aproximaciones por diferencias en (5.34) y (5.35).)

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

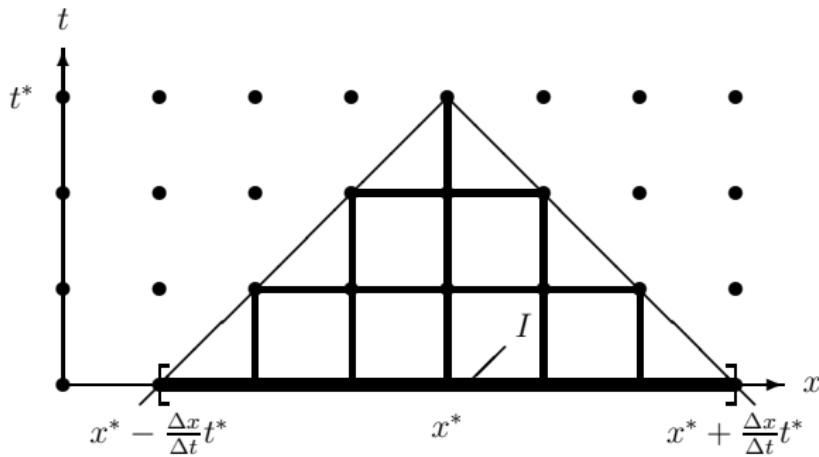
5.3.3 La condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) La **convergencia** del método (5.32) o de un método equivalente se estudiará más adelante en el marco de una teoría general para problemas de valores iniciales lineales. Aquí queremos estudiar desde un punto de vista **puramente geométrico** bajo qué condiciones (5.32) **no puede converger** a la solución de (5.28) para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

La ecuación (5.32) implica que el valor de la solución aproximada en el punto (x^*, t^*) depende precisamente de los datos iniciales en los puntos de malla en el intervalo

$$I := \left[x^* - \frac{\Delta x}{\Delta t} t^*, x^* + \frac{\Delta x}{\Delta t} t^* \right]$$

del eje x . El intervalo I se llama **intervalo de dependencia numérica** del punto de malla (x^*, t^*) :

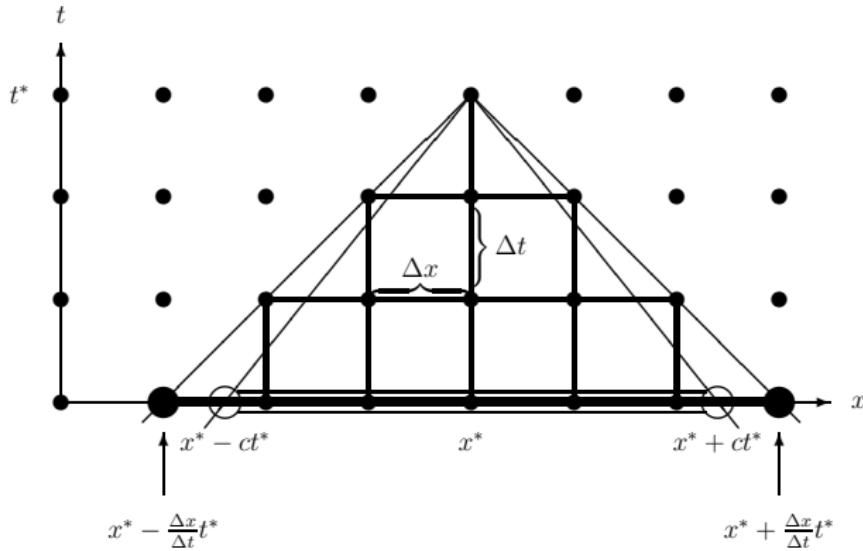


5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Ahora, si

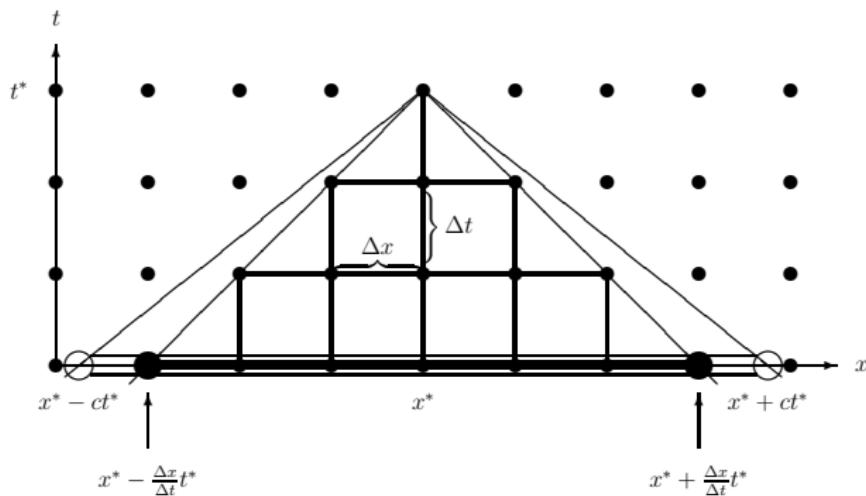
$$\text{si } c\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1, \text{ entonces } \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{1}{c},$$

y el intervalo de dependencia numérica de (x^*, t^*) **incluye** el intervalo de dependencia analítica $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ de este punto:



5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Por otro lado, si $\lambda > 1/c$ y dejamos Δx y Δt tender a cero, entonces llegamos a un intervalo de dependencia de (x^*, t^*) que intrínsecamente está contenido en el intervalo de dependencia analítica:



Por lo tanto, en este caso el método (5.32) no puede converger.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Teorema 5.2 (Condición de Courant, Friedrichs y Lewy (CFL))

Una **condición necesaria** para que la solución de (5.32) converja en (x^*, t^*) hacia la solución de (5.28) para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ y datos iniciales $f(x)$ y $g(x)$ arbitrariamente suaves es la condición que el intervalo de dependencia numérica de (x^*, t^*) incluya el intervalo de dependencia analítica de este punto.

Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik.

Von

R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy in Göttingen,

Ersetzt man bei den klassischen linearen Differentialgleichungsproblemen der mathematischen Physik die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten in einem — etwa rechtwinklig angenommenen — Gitter, so gelangt man zu algebraischen Problemen von sehr durchsichtiger Struktur. Die vorliegende Arbeit untersucht nach einer elementaren Diskussion dieser algebraischen Probleme vor allem die Frage, wie sich die Lösungen verhalten, wenn man die Maschen des Gitters gegen Null streben lässt. Dabei beschränken wir uns vielfach auf die einfachsten,

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

wobei sich die Indizes auf den Mittelpunkt P_0 und die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines „Elementarrhombus“ (vgl. Fig. 8) beziehen. Vermöge der Gleichung

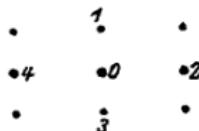


Fig. 8.

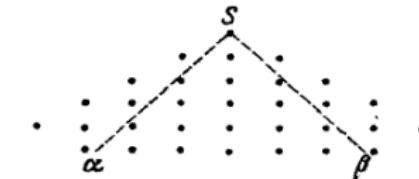


Fig. 9.

R. Courant, K. Friedrichs & H. Lewy, ‘Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik’, *Mathematische Annalen* **100** (1928), 32–73.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

El método (5.32) es un **método de dos pasos explícito**. Queremos indicar dos **métodos implícitos** para la ecuación de la onda. La computación de la primera capa de tiempo se realiza como en (5.32) o (5.34).

Utilizando la notación

$$\delta^2 \phi_j := \phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}$$

podemos aproximar (5.28) por

$$u_{j,n+1} - 2u_{jn} + u_{j,n-1} = \frac{c^2 \lambda^2}{2} (\delta^2 u_{j,n+1} + \delta^2 u_{j,n-1}).$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} & -\frac{c^2 \lambda^2}{2} u_{j-1,n+1} + (1 + c^2 \lambda^2) u_{j,n+1} - \frac{c^2 \lambda^2}{2} u_{j+1,n+1} \\ & = 2u_{jn} + \frac{c^2 \lambda^2}{2} u_{j-1,n-1} - (1 + c^2 \lambda^2) u_{j,n-1} + \frac{c^2 \lambda^2}{2} u_{j+1,n-1}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Una sola aplicación del esquema (5.36) conecta **7 puntos de la malla**. La evaluación numérica de (5.36) se realiza para cada capa de t mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz es una **M-matriz simétrica**, por lo tanto la solución de (5.36) es única y no pone problemas.

Otra posibilidad de aproximación es la fórmula

$$u_{j,n+1} - 2u_{jn} + u_{j,n-1} = \frac{c^2\lambda^2}{4}(\delta^2 u_{j,n+1} + 2\delta^2 u_{jn} + \delta^2 u_{j,n-1}),$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} & -\frac{c^2\lambda^2}{4}u_{j-1,n+1} + \left(1 + \frac{c^2\lambda^2}{2}\right)u_{j,n+1} - \frac{c^2\lambda^2}{4}u_{j+1,n+1} \\ &= \frac{c^2\lambda^2}{2}u_{j-1,n} + (2 - c^2\lambda^2)u_{jn} + \frac{c^2\lambda^2}{4}u_{j+1,n} \\ &+ \frac{c^2\lambda^2}{4}u_{j-1,n-1} - \left(1 + \frac{c^2\lambda^2}{2}\right)u_{j,n-1} + \frac{c^2\lambda^2}{4}u_{j+1,n-1}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

El esquema (5.37) **conecta 9 puntos**. Igualmente, tal como para el método (5.36), la solución de (5.37) requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Los métodos (5.36) y (5.37) son consistentes de segundo orden en Δt y Δx , lo que se puede demostrar fácilmente calculando el error de truncación local (Tarea). También se puede demostrar la convergencia de estos métodos para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ y $\lambda > 0$ arbitrario (ver Richtmyer & Morton 1967).

5.3.4 Ecuación de la onda con datos iniciales y de frontera

Hasta ahora solamente hemos considerado el **problema de valores iniciales** para la ecuación de la onda.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Frecuentemente aparecen datos iniciales **y de frontera**, por ejemplo en el siguiente problema de valores iniciales y de frontera (PVIF):

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(L, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Los datos iniciales y de frontera deben satisfacer ciertas **condiciones de compatibilidad**. Utilizando un planteo de separación también podemos resolver exactamente el problema (5.38). En otras situaciones se presentan condiciones de periodicidad, por ejemplo

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) &= u(x + L, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

El tratamiento numérico de (5.38) y (5.39) puede ser realizado mediante el método (5.32), (5.36) o (5.37). Debido a la periodicidad, el problema (5.39) debe ser resuelto **sólo en el intervalo $0 \leq x \leq L$** , y para la computación de cada capa de t se pueden utilizar los puntos de malla en $[0, L]$ a la izquierda y a la derecha.

5.3.5 Métodos de diferencias finitas para sistemas hiperbólicos de primer orden Las EDPs de segundo orden pueden ser transformadas en sistemas equivalentes de primer orden. Por ejemplo, sea

$$v(x, t) := u(x, t), \quad w(x, t) := \frac{1}{c} \int_0^x g(\xi) d\xi + c \int_0^t u_x(x, \tau) d\tau, \quad c > 0.$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Un cálculo directo entrega las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}v_t &= u_t = \int_0^t u_{\tau\tau} d\tau + g(x) = c^2 \int_0^t u_{xx} d\tau + g(x) \\&= c \left(c \int_0^t u_{xx}(x, \tau) d\tau + \frac{g(x)}{c} \right) = cw_x,\end{aligned}$$

$$w_t = cu_x = cv_x,$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) = f(x),$$

$$w(x, 0) = \frac{1}{c} \int_0^x g(\xi) d\xi =: G(x).$$

Entonces, podemos escribir el problema de valores iniciales como

$$\begin{pmatrix} v_t(x, t) \\ w_t(x, t) \end{pmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x(x, t) \\ w_x(x, t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v(x, 0) \\ w(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ G(x) \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Sustituyendo

$$v := u_t, \quad w := cu_x$$

obtenemos el mismo sistema de ecuaciones, pero con

$$\begin{pmatrix} v(x, 0) \\ w(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) \\ cf'(x) \end{pmatrix}.$$

Para la aplicación de métodos de diferencias finitas la ventaja de sistemas de primer orden (comparado con ecuaciones escalares de segundo orden) es la posibilidad de poder aplicar **métodos de paso simple**, es decir podemos considerar métodos de diferencias finitas que conecten **solamente dos capas de t** .

Por supuesto, también aquí hay que considerar el comportamiento de las características. Se puede verificar que las características del sistema (5.40) son idénticas a las características de la ecuación de la onda (5.28).

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Consideremos ahora PVI's hiperbólicos en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t &= \mathbf{A}\mathbf{u}_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{5.41}$$

donde

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} v(x, t) \\ w(x, t) \end{pmatrix}, \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

y donde se supone que \mathbf{A} es regular y

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) > 0.\tag{5.42}$$

En virtud de la Definición 5.2, (5.42) implica la **hiperbolicidad del sistema (5.41)**. La hipótesis de simetría de \mathbf{A} no es una restricción esencial, dado que en muchas aplicaciones prácticas \mathbf{A} es efectivamente simétrica.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Sea $\lambda := \Delta t / \Delta x$. Se puede definir el método de diferencias

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jn} \\ w_{jn} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$
$$\begin{pmatrix} v_{j,0} \\ w_{j,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5.43}$$

En el Ejemplo 5.2 veremos que este método posee propiedades de convergencia **muy desventajosas**. Es **inútil** para la práctica.

Otro método (mucho mejor, como veremos en el Ejemplo 5.3) es

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j,n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} + v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} + w_{j-1,n} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j+1,n} - v_{j-1,n} \\ w_{j+1,n} - w_{j-1,n} \end{pmatrix},$$
$$j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.44}$$

Los métodos (5.43) y (5.44) son métodos de paso simple que son consistentes de segundo orden en Δx y de primer orden en Δt .

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Otro método consiste en calcular los valores de v en $(j\Delta x, n\Delta t)$ y los valores de w en los puntos intermedios $((j+1/2)\Delta x, n\Delta t)$. Esto entrega, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} v_{j,n+1} \\ w_{j-1/2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jn} \\ w_{j-1/2,n} \end{pmatrix} + \lambda \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_{j,n+1} - v_{j-1,n+1} \\ w_{j+1/2,n} - w_{j-1/2,n} \end{pmatrix},$$
$$j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Este es un método implícito. En el caso de que \mathbf{A} posee la forma especial dada por (5.40), obtenemos el método

$$\begin{aligned} v_{j,n+1} &= v_{jn} + c\lambda (w_{j+1/2,n} - w_{j-1/2,n}), \\ w_{j-1/2,n+1} &= w_{j-1/2,n} + c\lambda (v_{j,n+1} - v_{j-1,n+1}). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Este método es fácil de resolver, dado que podemos primero calcular los valores $v_{j,n+1}$ desde la primera ecuación (explícita), luego utilizando los valores $v_{j,n+1}$ podemos calcular todos los valores $w_{j-1/2,n+1}$ usando la segunda ecuación.

5.3. Diferencias finitas para problemas hiperbólicos

Otro método para el sistema (5.40) es

$$\begin{aligned} v_{j,n+1} &= v_{jn} + \frac{c\lambda}{2} (w_{j+1/2,n} - w_{j-1/2,n} + w_{j+1/2,n+1} - w_{j-1/2,n+1}), \\ w_{j-1/2,n+1} &= w_{j-1/2,n} + \frac{c\lambda}{2} (v_{j,n+1} - v_{j-1,n+1} + v_{jn} - v_{j-1,n}). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Los sistemas de ecuaciones de diferencias (5.45) y (5.46) son equivalentes a las ecuaciones (5.32) y (5.37), respectivamente, si identificamos v_{jn} con $(1/\Delta t)(u_{jn} - u_{j,n-1})$ y $w_{j-1/2,n}$ con $(c/\Delta x)(u_{jn} - u_{j-1,n})$. Esto es razonable en virtud de la sustitución $v = u_t$ y $w = cu_x$.

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

5.4.1 Solución exacta y características de la ecuación del calor Para las ecuaciones diferenciales parabólicas tenemos **una sola dirección característica** en cada punto, y por lo tanto no podemos aplicar los métodos característicos descritos en Sección 5.2.

Problema de valores iniciales para la ecuación del calor:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.47)$$

Sea $f \in C(\mathbb{R})$ acotada. La solución explícita de (5.47) es dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) f(\xi) d\xi, \quad (5.48)$$

Por otro lado, en virtud de

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}$$

podemos escribir la solución (5.48) en la forma

$$u(x, t) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) (f(\xi) - f(x)) d\xi, \quad t > 0.$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Notamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) = 0 \quad \text{para } \xi \neq x,$$

además el integrando en (5.49) desaparece para $\xi = x$. Por lo tanto, las funciones (5.49) y (5.48) satisfacen la condición inicial en (5.47).

A través de la sustitución

$$v := u, \quad w := u_x$$

podemos transformar (5.47) en el problema de valores iniciales

$$v_x = w,$$

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ v(x, 0) &= f(x), \\ w(x, 0) &= f'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

La ecuación característica para el sistema (5.50) entrega $(dt/dx)^2 = 0$, es decir

$$t = \text{const.}$$

Entonces, las características de (5.47) son la familia de rectas paralelas al eje x . El comportamiento de la solución $u(x, t)$ en un punto (x^*, t^*) depende de la función inicial $f(x)$ en la totalidad de la recta $t = 0$: el intervalo de dependencia de cada punto (x^*, t^*) , $t^* > 0$, es el eje x entero. La condición inicial in (5.47) es dada a lo largo de una característica, al contrario de los PVI hiperbólicos.

Normalmente, la ecuación del calor aparece en la combinación con datos iniciales y de la frontera:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= g(t), \quad t > 0, \\ u(1, t) &= \tilde{g}(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{5.51}$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

5.4.2 Métodos de paso simple para la ecuación del calor Utilizamos la malla de puntos

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j = 0, \dots, N+1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (N+1)\Delta x = 1,$$

sobre la cual definimos la **aproximación por diferencias**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u_{j,n+1} - u_{jn}) &= \frac{1}{\Delta x^2} ((1-\alpha)(u_{j-1,n} - 2u_{jn} + u_{j+1,n}) \\ &\quad + \alpha(u_{j-1,n+1} - 2u_{j,n+1} + u_{j+1,n+1})). \end{aligned}$$

Definimos $\lambda := \Delta t / \Delta x^2$, $\delta^2 \phi_j := \phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}$. Con las condiciones iniciales y de frontera adicionales de (5.51) obtenemos

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} - \alpha \lambda \delta^2 u_{j,n+1} &= u_{jn} + (1-\alpha) \lambda \delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \geq 0, \\ u_{j0} &= f_j, \quad j = 0, \dots, N+1, \\ u_{0n} &= g_n, \quad u_{N+1,n} = \tilde{g}_n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{5.52}$$

El método es **explícito** para $\alpha = 0$ e **implícito** para $\alpha > 0$.

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Este **método de paso simple** conecta la nueva “capa” de tiempo $(n+1)\Delta t$ con el peso α y la capa antigua con el peso $1 - \alpha$.

Podemos reescribir (5.52) en la forma

$$(\mathbf{I} + \alpha\lambda\mathbf{B})\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{I} - (1 - \alpha)\lambda\mathbf{B})\mathbf{u}_n + \lambda\mathbf{g}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.53)$$

con $\mathbf{u}_0 := (f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u}_n := (u_{1n}, \dots, u_{Nn})^T \in \mathbb{R}^N$, y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_n = \begin{pmatrix} g_n + \alpha(g_{n+1} - g_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{g}_n + \alpha(\tilde{g}_{n+1} - \tilde{g}_n) \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{I} + \alpha\lambda\mathbf{B}$ es una **M-matriz tridiagonal**, la solución de (5.53) no presenta problemas.

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Para verificar la **consistencia** del método queremos calcular el error de truncación de (5.52). Supongamos que la solución de (5.51) es suficientemente suave. Como

$$u_{tt} = u_{xxxx},$$

un desarrollo en serie de Taylor entrega

$$\begin{aligned} & u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) \\ &= \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x_j, t_n) \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \delta^2 u(x_j, t_n) - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Insertando (5.55) en (5.54) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) &= \lambda \delta^2 u(x_j, t_n) + \Delta t \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) \\ &\quad + \Delta t (\mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^2)). \end{aligned}$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Análogamente, desarrollando por (x_j, t_{n+1}) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) &= \lambda \delta^2 u(x_j, t_{n+1}) \\ &\quad + \Delta t \left(-\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) \\ &\quad + \Delta t (\mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^2)). \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $(1 - \alpha)$, la segunda por α , y sumando los resultados obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) \\ = \lambda ((1 - \alpha) \delta^2 u(x_j, t_n) + \alpha \delta^2 u(x_j, t_{n+1})) + \Delta t \tau_{jn}. \end{aligned}$$

Aquí τ_{jn} depende de los valores de α y λ :

$$\tau_{jn} = \begin{cases} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{para } 0 \leq \alpha \leq 1, \alpha \neq 1/2, \\ \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4) & \text{para } \alpha = 0 \text{ y } \lambda = 1/6, \\ \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{para } \alpha = 1/2. \end{cases} \quad (5.56)$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

El resultado (5.56) implica que (5.52) es **consistente** a (5.51). Para el caso explícito ($\alpha = 0$) la selección $\lambda = 1/6$ entrega un orden de consistencia mayor que para $\lambda \neq 1/6$ (Milne, 1953).

El método para $\alpha = 1/2$ se llama **método de Crank-Nicolson** (1947) y se usa frecuentemente debido a su **alto orden de consistencia**. Obviamente, un método explícito posee la **ventaja** de que no es necesario resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Conoceremos sus desventajas ahora al investigar las propiedades de convergencia.

No consideraremos errores de redondeo o de ingreso de datos. Sea

$$z_{jn} := u_{jn} - u(x_j, t_n), \quad j = 0, \dots, N+1, \quad n = 0, \dots, M$$

el error entre la solución exacta y la solución aproximada.

Supongamos que las computaciones se realizan hasta un tiempo fijo y fijo $T = M\Delta t$. Definamos

$$\mathbf{z}_n := (z_{1n}, \dots, z_{Nn})^T \in \mathbb{R}^N, \quad n = 0, \dots, M$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Consideremos que

$$u_{jn} = u(x_j, t_n) \quad \text{para } n = 0, j = 0 \text{ y } j = N + 1$$

y por lo tanto

$$z_{0n} = z_{N+1,n} = z_{j0} = 0, \quad j = 0, \dots, N + 1, \quad n = 0, \dots, M. \quad (5.57)$$

Restando (5.52):

$$u_{j,n+1} - \alpha \lambda \delta^2 u_{j,n+1} = u_{jn} + (1 - \alpha) \lambda \delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \geq 0,$$

$$u_{j0} = f_j, \quad j = 0, \dots, N + 1,$$

$$u_{0n} = g_n, \quad u_{N+1,n} = \tilde{g}_n, \quad n \geq 0.$$

de (5.56):

$$u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) = \lambda((1 - \alpha) \delta^2 u(x_j, t_n) + \alpha \delta^2 u(x_j, t_{n+1})) + \Delta t \tau_{jn}$$

obtenemos en virtud de (5.57)

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{Cz}_n + \Delta t \boldsymbol{\sigma}_n, \quad n = 0, \dots, M - 1; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.58)$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Aquí definimos

$$\mathbf{C} := (\mathbf{I} + \alpha \lambda \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{I} - (1 - \alpha) \lambda \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n := (\mathbf{I} + \alpha \lambda \mathbf{B})^{-1} \boldsymbol{\tau}_n \in \mathbb{R}^N,$$

$$\boldsymbol{\tau}_n := (\tau_{1n}, \dots, \tau_{Nn})^T \in \mathbb{R}^N.$$

Para $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T \in \mathbb{R}^N$ definimos la norma Euclíadiana

$$\|\mathbf{y}\|_2 := \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{1/2};$$

entonces la norma matricial inducida es la norma espectral. Supongamos ahora que $\lambda := \Delta t / \Delta x^2$ satisface la condición

$$\lambda \begin{cases} \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)} & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \\ \text{arbitrario} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (5.59)$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Entonces la simetría de \mathbf{C} entrega después de un pequeño cálculo

$$\|\mathbf{C}\|_2 = r_\sigma(\mathbf{C}) < 1,$$

ya que los valores propios $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ de \mathbf{B} satisfacen

$$\gamma_j = 4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(N+1)} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

Además, sabemos que

$$\|(\mathbf{I} + \alpha \lambda \mathbf{B})^{-1}\|_2 < 1,$$

y por lo tanto

$$\|\boldsymbol{\sigma}_n\|_2 \leq \|\boldsymbol{\tau}_n\|_2.$$

Entonces, tomando la norma en (5.58) obtenemos

$$\|\mathbf{z}_{n+1}\|_2 \leq \|\mathbf{z}_n\|_2 + \Delta t \|\boldsymbol{\tau}_n\|_2, \quad n = 0, \dots, M-1 = \frac{T - \Delta t}{\Delta t},$$

$$\|\mathbf{z}_0\|_2 = 0.$$

(5.60)

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Como

$$\|\boldsymbol{\tau}_n\|_2 \leq \max_{1 \leq j \leq N} |\tau_{jn}|,$$

se tiene que (5.56) también es válido para $\|\boldsymbol{\tau}_n\|_2$, $n = 0, \dots, M$.

Definiendo

$$\tau := \max_{0 \leq n \leq M} \|\boldsymbol{\tau}_n\|_2,$$

obtenemos de (5.56) y (5.60)

$$\|\mathbf{z}_n\|_2 \leq T\tau = \begin{cases} \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{para } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4) & \text{para } \alpha = 0 \text{ y } \lambda = 1/6, \\ \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{para } \alpha = 1/2, \end{cases}$$

$n = 0, \dots, M$.

(5.61)

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Resumimos los resultados de nuestro análisis en el siguiente teorema.

Teorema 5.3 Bajo la condición (5.59):

$$\lambda \begin{cases} \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)} & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \\ \text{arbitrario} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

la solución del método de diferencias (5.52):

$$\begin{aligned} u_{j,n+1} - \alpha \lambda \delta^2 u_{j,n+1} &= u_{jn} + (1-\alpha) \lambda \delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \geq 0, \\ u_{j0} &= f_j, \quad j = 0, \dots, N+1, \\ u_{0n} &= g_n, \quad u_{N+1,n} = \tilde{g}_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

converge para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ a la solución de (5.51) en la norma Euclidiana, y del orden indicado por (5.61). Aquí se supone que la solución de (5.51) es suficientemente suave.

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

5.4.3 Métodos de dos pasos para la ecuación del calor Enseguida discutiremos dos **métodos de dos pasos** para el tratamiento numérico de (5.47):

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

y (5.51):

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

$$u(1, t) = \tilde{g}(t), \quad t > 0,$$

respectivamente.

Se podría considerar el siguiente método

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + 2\lambda\delta^2 u_{jn}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \geq 1. \quad (5.62)$$

Veremos que este método es **enteramente inútil**, puesto que no converge para ningún valor de λ , tan pequeño que sea.

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Sí se recomienda el uso del **método de Du Fort y Frankel** (1953):

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + 2\lambda(u_{j+1,n} - u_{j,n+1} - u_{j,n-1} + u_{j-1,n}), \quad (5.63)$$
$$j = 1, \dots, N, \quad n \geq 1.$$

El método (5.63) tiene **muy buenas propiedades** de convergencia. Además, es **explícito**; requiere sólo poco esfuerzo computacional.

Una **particularidad de la consistencia** de (5.63). Algunos desarrollos en serie de Taylor de la solución exacta entregan:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^4), \\ & \frac{1}{\Delta x^2} \delta^2 u(x_j, t_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4), \\ & \frac{1}{\Delta x^2}(u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}) + u(x_{j-1}, t_n)) \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \delta^2 u(x_j, t_n) - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right). \end{aligned}$$

5.4. Diferencias finitas para problemas parabólicos

Debido a $u_t = u_{xx}$ la combinación de esas tres ecuaciones lleva a

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} \\ & - \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} \\ & = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t_n) - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) \\ & + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Condición necesaria para la consistencia de (5.63) con $u_t = u_{xx}$:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (\Delta t / \Delta x) = 0,$$

ya que si existiera un número $\beta > 0$ tal que $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} (\Delta t / \Delta x) = \beta$, entonces (5.63) sería consistente con la ecuación **hiperbólica**

$$u_t - u_{xx} + \beta^2 u_{tt} = 0.$$