Elementos Finitos – 521537
Cápsula 00

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

- Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, con un fontera *Lipschitz continua* $\partial\Omega$ y un vector normal $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots\ n_d)$ extrior a Ω
- Considere el operador diferencial de segundo orden $\mathcal{L}$ que actua sobre funciones $w : \Omega \to \mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{L}\, w = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \alpha_i\, w \right) + \sigma\, w$$

- $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$, $\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{x})$ y $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ son funciones dadas
- Denotaremos $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{d}$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Diremos que el operador $\mathcal{L}$ es *elíptico* en Ω si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x})\, \mathbf{y}\,,\, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{R}^d} \geq \varepsilon_0\, |\mathbf{y}|^2_{\mathbb{R}^d}\,, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

y para *casi todo* $\mathbf{x} \in \Omega$

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función dada, entonces la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\, u = f\ , \text{ en } \Omega$$

se dice *Ecuación Diferencial (Parcial, para $d \geq 2$) Elíptica*

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función dada. El problema: *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u = f\,, & \text{en } \Omega \\ \text{cond. de contorno}, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

se denomina *Problema de Valores de Frontera (PVF)*

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $g_D : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones dadas. El problema: *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u & = & f \,, en\ \Omega \\ u & = & g_D \,, en\ \partial\Omega \end{cases}$$

se denomina *Problema de Dirichlet*

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $g_N : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones dadas. El problema: *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u & = & f\,, en\ \Omega \\ -\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) n_i & = & g_N\,, en\ \partial\Omega \end{cases}$$

se denomina *Problema de Neumann*

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\beta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ y $g_R : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones dadas. El problema: *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}\, u & = & f \, , en \; \Omega \\ -\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) n_i + \beta\, u & = & g_R \, , en \; \partial\Omega \end{array} \right.$$

se denomina *Problema de Robin*

$\beta \equiv 0$ recupera un problema de Neumann

Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Definición

Considere Γ_D, $\Gamma_R \subset \partial\Omega$ tal que $|\Gamma_D \cap \Gamma_R|_{d-1} = 0$ y $\Gamma_D \cup \Gamma_R = \partial\Omega$. Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial elíptico $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\beta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $g_D : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ y $g_R : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones dadas. El problema: *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}\, u &=& f\,,\, en\ \Omega \\ u &=& g_D\,,\, en\ \Gamma_D \\ -\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) n_i + \beta\, u &=& g_R\,,\, en\ \Gamma_R \end{array} \right.$$

se denomina *Problema de Condiciones Mixtas*

Formulaciones Variacionales

- Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la solución a un problema de Dirichlet con $g_D \equiv 0$ y definido por la ED elíptica $\mathcal{L}\, u = f$
- Considere el siguiente espacio de funciones test

$$V = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : v \text{ es suf. reg. y } v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

entonces,

$$\int_\Omega \mathcal{L}\, u\, v = \int_\Omega f\, v\,, \forall v \in V$$

Formulaciones Variacionales

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{L}\, u\, v &= \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j} + \alpha_i\, u\right) + \sigma\, u\right] v \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v + \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_i\, u\right)\, v + \int_\Omega \sigma\, u\, v\end{aligned}$$

Formulaciones Variacionales

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) n_i \, v \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

Formulaciones Variacionales

$$\int_\Omega \mathcal{L}\, u\, v = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_i\, u)\; v + \int_\Omega \sigma\, u\, v := a\,(u\,,v)$$

entonces

$$a\,(u\,,v) = \int_\Omega f\, v\,,\ \forall v \in V$$

Formulaciones Variacionales

- $\mathcal{L}\, u = f$ implica $a\,(u\,,v) = \int_\Omega f\, v$ para todo $v \in V$
- Estudiaremos:
  - Una posible definición de V
  - Existencia, unicidad de solución y estabilidad para el problema: *Sea $u \in V$ tal que $a\,(u\,,v) = \int_\Omega f\, v$ para todo $v \in V$*
  - Condiciones para que $a\,(u\,,v) = \int_\Omega f\, v$ para todo $v \in V$ implique $\mathcal{L}\, u = f$
  - Posibilidad de *relajar* condiciones sobre la definición de V

Método de Galerkin

- Consideramos subespacios $V_h \leq V$ de dimensión finita *parametrizados* por $h > 0$
- $h' < h$ entonces: dim $V_{h'}$ > dim V_h
- En cierta forma: $h \to 0$ implica $V_h \to V$

Método de Galerkin

Sea $u_h \in V_h$ tal que

$$a\left(u_h\,,v_h\right) = \int_\Omega f\,v_h\,,\,\forall\,v_h \in V_h$$

- Demostraremos que

$$\lim_{h\to 0} u_h = u$$

Método de Galerkin

- Consideramos subespacios $V_h \leq V$ de dimensión finita *parametrizados* por $h > 0$
- $h' < h$ entonces: $\dim V_{h'} > \dim V_h$
- En cierta forma: $h \to 0$ implica $V_h \to V$

Método de Galerkin

Sea $u_h \in V_h$ tal que

$$a\left(u_h\,, v_h\right) = \int_\Omega f\, v_h\,,\ \forall\, v_h \in V_h$$

- Demostraremos que

$$\lim_{h\to 0} u_h = u$$

Método de Galerkin

- Consideramos subespacios $V_h \leq V$ de dimensión finita *parametrizados* por $h > 0$
- $h' < h$ entonces: $\dim V_{h'} > \dim V_h$
- En cierta forma: $h \to 0$ implica $V_h \to V$

Método de Galerkin

Sea $u_h \in V_h$ tal que

$$a\,(u_h\,, v_h) = \int_\Omega f\, v_h\,,\ \forall\, v_h \in V_h$$

- Demostraremos que

$$\lim_{h\to 0} u_h = u$$

Método de Galerkin

- Consideramos subespacios $V_h \leq V$ de dimensión finita *parametrizados* por $h > 0$
- $h' < h$ entonces: $\dim V_{h'} > \dim V_h$
- En cierta forma: $h \to 0$ implica $V_h \to V$

Método de Galerkin

Sea $u_h \in V_h$ tal que

$$a\left(u_h\,, v_h\right) = \int_\Omega f\, v_h\,,\, \forall\, v_h \in V_h$$

- Demostraremos que

$$\lim_{h \to 0} u_h = u$$

Método de Galerkin

- Consideramos subespacios $V_h \leq V$ de dimensión finita *parametrizados* por $h > 0$
- $h' < h$ entonces: $\dim V_{h'} > \dim V_h$
- En cierta forma: $h \to 0$ implica $V_h \to V$

Método de Galerkin

Sea $u_h \in V_h$ tal que

$$a\left(u_h\,, v_h\right) = \int_\Omega f\, v_h\,,\, \forall\, v_h \in V_h$$

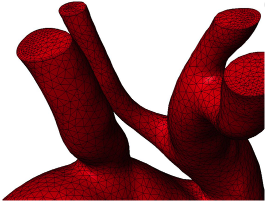
- Demostraremos que

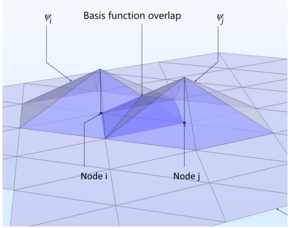
$$\lim_{h \to 0} u_h = u$$

Método de Elementos Finitos

Método de Elementos Finitos

Método de Galerkin + Elección particular de V_h





Método de Elementos Finitos

- $a\left(u_h\,,v_h\right) = \int_\Omega f\, v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a\left(u_h\,,\phi_j\right) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\, \phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\, a\left(\phi_i\,,\phi_j\right) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\,\mathbf{c} = \mathbf{f}$

Método de Elementos Finitos

- $a\,(u_h\,, v_h) = \int_\Omega f\, v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a\,(u_h\,, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\, \phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\, a\,(\phi_i\,, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\,\mathbf{c} = \mathbf{f}$

Método de Elementos Finitos

- $a\,(u_h\,, v_h) = \int_\Omega f\, v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a\,(u_h\,, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\, \phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\, a\,(\phi_i\,, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\,\mathbf{c} = \mathbf{f}$

Método de Elementos Finitos

- $a\,(u_h\,,v_h) = \int_\Omega f\,v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a\,(u_h\,,\phi_j) = \int_\Omega f\,\phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\,\phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\,a\,(\phi_i\,,\phi_j) = \int_\Omega f\,\phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\,\mathbf{c} = \mathbf{f}$

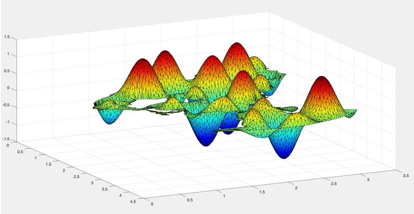
Método de Elementos Finitos

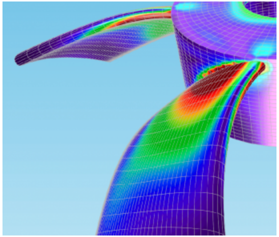
- $a(u_h, v_h) = \int_\Omega f\, v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a(u_h, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\, \phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\, a(\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\,\mathbf{c} = \mathbf{f}$

Método de Elementos Finitos

- $a(u_h, v_h) = \int_\Omega f\, v_h$ para todo $v_h \in V_h$
- $V_h = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{N_h} \rangle$
- $a(u_h, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i\, \phi_i$
- $\sum_{i=1}^{N_h} c_i\, a(\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega f\, \phi_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N_h\}$
- $A\, \mathbf{c} = \mathbf{f}$

Método de Elementos Finitos





Análisis de Error

- Estudiaremos teoria de interpolación: $\mathcal{I}_h : V \to V_h$
- Estableceremos cotas para $\|u - u_h\|_V$ a través de $\|u - \mathcal{I}_h\, u\|_V$
- Encontraremos tasas de convergencia óptima