UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Definiciones equivalentes de la Suma Directa Generalizada

Teorema: Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $\{W_j\}_{j=1}^{m}$ una familia finita de subespacios de V. Las siguientes afirmaciones son Equivalentes:

(a) $V \,=\, \bigoplus\limits_{j=1}^{m} W_j$.

(b) $V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} W_j \quad \wedge \quad \forall\, z \,\in\, V \,:\, \exists!(u_j)_{j=1}^{m} \,\in\, \prod\limits_{j=1}^{m} W_j \,:\, z \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} u_j$.

(c) $V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} W_j \quad \wedge \quad \forall\,(u_j)_{j=1}^{m} \,\in\, \prod\limits_{j=1}^{m} W_j \,:\, \left(\sum\limits_{j=1}^{m} u_j \,=\, \theta_V \,\Rightarrow\, \forall\, j \,\in\, \{1,...,m\} \,:\, u_j \,=\, \theta_V\right)$.

Proof:

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $z \in V$. Por (a), tenemos que $V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} W_j$. Esto permite inferir que $\exists\,(u_j)_{j=1}^{m} \,\in\, \prod\limits_{j=1}^{m} W_j \,:\, z \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} u_j$. Supongamos también que $\exists\,(v_j)_{j=1}^{m} \,\in\, \prod\limits_{j=1}^{m} W_j \,:\, z \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} v_j$. Sea $k \in \{1,...,m\}$, fijo pero arbitrario. De lo anterior se desprende:

$$W_k \,\ni\, v_k \,-\, u_k \,=\, \sum_{j=1\,,\,j\neq k}^{m} (u_j \,-\, v_j) \,\in\, \sum_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j\,.$$

Como $W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j \,=\, \{\theta_V\}$, por (a), se infiere que $u_k \,=\, v_k$. Siendo $k \in \{1,...,m\}$, fijo pero arbitrario, se concluye que $\forall\, k \in \{1,...,m\} \,:\, u_k \,=\, v_k$, completándose la demostración de (b).

(b)$\Rightarrow$(c) De (b) se tiene que $V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} W_j$. Establezcamos la otra condición dada en (c).

Sean $(u_j)_{j=1}^{m} \,\in\, \prod\limits_{j=1}^{m} W_j$, fijos pero arbitrarios, tales que $\sum\limits_{j=1}^{m} u_j \,=\, \theta_V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} \theta_V$. Por la unicidad de la descomposición dada por (b), se deduce que $\forall\, j \,\in\, \{1,...,m\} \,:\, u_j \,=\, \theta_V$. De esta forma, se concluye (c).

(c)$\Rightarrow$(a) De (c) tenemos ya que $V \,=\, \sum\limits_{j=1}^{m} W_j$.

Resta por establecer que $\forall\, k \,\in\, \{1,...,m\} \,:\, W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j \,=\, \{\theta_V\}$. Sea $k \,\in\, \{1,...,m\}$, fijo pero arbitrario. Consideremos $z \,\in\, W_k \,\cap\, \sum_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j$. Entonces $z \,\in\, W_k$ y $z \,\in \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j$. Lo último implica la existencia de $(u_j)_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{k\}} \,\in \prod\limits_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j$ tales que $z \,= \sum\limits_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{k\}} u_j$. De esta manera, resulta

$$\sum_{j=1}^{m} W_j \,\ni\, z \,-\, \sum_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{k\}} u_j \,=\, \theta_V \overset{(c)}{\Rightarrow} z \,=\, \theta_V \,\wedge\, \forall\, j \,\in\, \{1,...,m\}\backslash\{k\} \,:\, u_j \,=\, \theta_V\,.$$

Esto permite establecer que $W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j \,\subseteq\, \{\theta_V\}$. Como $\{\theta_V\} \,\subseteq\, W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j$ Siempre, se infiere que $W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j \,=\, \{\theta_V\}$. Finalmente, como k es fijo pero arbitrario, se concluye

$\forall\, k \,\in\, \{1,...,m\} \,:\, W_k \,\cap \sum\limits_{j\,\in\,\{1,...,m\}\backslash\{k\}} W_j \,=\, \{\theta_V\}$, y con ello queda establecido (a).
