UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°6$ (Espacios L^p)

Problemas a resolver en práctica

1. Suponga que $f \in L^2(\mu)$, donde μ medida positiva finita sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Pruebe que $f \in L^1(\mu)$. ¿Será cierto que $f \in L^1(\mu)$ en caso $\mu(\Omega) = +\infty$? Justifique su respuesta.

Solución

Supongamos que μ es una medida finita. Usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f| \, d\mu = \int_\Omega |f| \cdot 1 \, d\mu &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega 1 \, d\mu\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \mu(\Omega)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ya que $f \in L^2(\mu)$ y $\mu(\Omega)^{1/2} < +\infty$,

$$\left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \mu(\Omega)^{1/2} < +\infty.$$

Así que $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. Lo que demuestra que $f \in L^1(\mu)$.

Por otro lado, si $\mu(\Omega) = +\infty$ no siempre se cumple que $f \in L^1(\mu)$. Por ejemplo, consideremos la medida

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n$$

definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Aquí, $\delta_n(A) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$. Luego

$$\mu(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Elegimos $f(n) = 1/n$. Luego

$$\int_\Omega |f|^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Sin embargo,

$$\int_\Omega |f| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

2. Asuma que $p_1, \ldots, p_n \in]1, +\infty[$ satisfacen $\sum_{k=1}^{n} 1/p_k = 1$ con $n \geq 2$. Considere $f_k \in L^{p_k}(\mu)$ para todo $k = 1, \ldots, n$, con μ medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Demuestre que

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L^1(\mu)} \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^{p_k}(\mu)} .$$

Solución

Demostraremos por inducción la afirmación $Af(n)$ que establece:

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L^1(\mu)} \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^{p_k}(\mu)}$$

para cualesquiera $f_1, \ldots, f_n \in L^{p_k}(\mu)$ y todos los $p_1, \ldots, p_n \in]1, +\infty[$ tales que $\sum_{k=1}^{n} 1/p_k = 1$.

Inicio (caso $n = 2$): Como $1/p_1 + 1/p_2 = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder llegamos a

$$\begin{aligned} \|f_1 f_2\|_{L^1(\mu)} &= \int_\Omega |f_1 f_2| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f_1|^{p_1} \, d\mu \right)^{1/p_1} \left(\int_\Omega |f_2|^{p_2} \, d\mu \right)^{1/p_2} \\ &= \|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)} . \end{aligned}$$

Así que la afirmación $Af(2)$ es válida.

Paso de Inducción: Asumamos que se cumple $Af(n)$. Consideremos $f_1, \ldots, f_{n+1}$ pertenecientes a $L^{p_k}(\mu)$ y $p_1, \ldots, p_{n+1} \in]1, +\infty[$ con $\sum_{k=1}^{n+1} 1/p_k = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder llegamos a

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_{L^1(\mu)} &= \int_\Omega \prod_{k=1}^{n+1} |f_k| \; d\mu = \int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} |f_k| \right) |f_{n+1}| \; d\mu \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} |f_k| \right)^q d\mu \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |f_{n+1}|^{p_{n+1}} \; d\mu \right)^{1/p_{n+1}},
\end{aligned}$$

donde $q := p_{n+1}/(p_{n+1}-1) > 1$, pues $1/q + 1/p_{n+1} = 1$. Luego

$$\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_{L^1(\mu)} \leq \left(\int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} |f_k| \right)^q d\mu \right)^{1/q} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\mu)}.$$

Como $\frac{p_k}{q} = p_k \; \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} > 1$, usando la validez de $Af(n)$ deducimos que

$$\int_\Omega \prod_{k=1}^{n} (|f_k|^q) \; d\mu \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega (|f_k|^q)^{\frac{p_k}{q}} \; d\mu \right)^{1/(p_k/q)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega |f_k|^{p_k} \; d\mu \right)^{q/p_k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_{L^1(\mu)} &\leq \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega |f_k|^{p_k} \; d\mu \right)^{q/p_k} \right)^{1/q} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\mu)} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega |f_k|^{p_k} \; d\mu \right)^{q/p_k} \right)^{1/q} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\mu)}.
\end{aligned}$$

Así que

$$\left\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \right\|_{L^1(\mu)} \leq \left(\left\| \prod_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L^{p_k}(\mu)} \right) \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\mu)}.$$

Por lo tanto, la afirmación $Af(n+1)$ es cierta. El método de inducción matemática nos asegura que $Af(n)$ es cierta para todo número natural $n \geq 2$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Considere $1 \leq p < r < q$. Demuestre que para toda función medible $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ se tiene

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \text{máx}\left\{\|f\|_{L^p(\mu)}, \|f\|_{L^q(\mu)}\right\}.$$

Solución

Elegimos $\alpha = (q-r)\,/\,(q-p)$. Así que $r = \alpha\, p + (1-\alpha)\, q$. Luego

$$\int_\Omega |f|^r \; d\mu = \int_\Omega |f|^{\alpha\, p} \; |f|^{(1-\alpha) q} \, d\mu.$$

Usando $1 \leq p < r < q$ obtenemos que $\alpha \in \,]0,1[$, lo que implica que $1/\alpha > 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^r \; d\mu &\leq \left(\int_\Omega \left(|f|^{\alpha\, p}\right)^{1/\alpha} d\mu\right)^\alpha \left(\int_\Omega \left(|f|^{(1-\alpha)q}\right)^{1/(1-\alpha)} d\mu\right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^\alpha \left(\int_\Omega |f|^q \, d\mu\right)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|^r_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\alpha\, p}_{L^p(\mu)} \, \|f\|^{(1-\alpha)q}_{L^q(\mu)}. \tag{1}$$

Si $\|f\|_{L^p(\mu)} \geq \|f\|_{L^q(\mu)}$, de (1) obtenemos

$$\|f\|^r_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\alpha\, p}_{L^p(\mu)} \, \|f\|^{(1-\alpha)q}_{L^q(\mu)} \leq \|f\|^{\alpha\, p}_{L^p(\mu)} \, \|f\|^{(1-\alpha)q}_{L^p(\mu)} = \|f\|^r_{L^p(\mu)}.$$

Lo que implica $\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} = \text{máx}\left\{\|f\|_{L^p(\mu)}, \|f\|_{L^q(\mu)}\right\}$.

En caso que $\|f\|_{L^p(\mu)} < \|f\|_{L^q(\mu)}$, de (1) obtenemos

$$\|f\|^r_{L^r(\mu)} \leq \|f\|^{\alpha\, p}_{L^p(\mu)} \, \|f\|^{(1-\alpha)q}_{L^q(\mu)} < \|f\|^{\alpha\, p}_{L^q(\mu)} \, \|f\|^{(1-\alpha)q}_{L^q(\mu)} = \|f\|^r_{L^q(\mu)}.$$

Entonces, $\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^q(\mu)} = \text{máx}\left\{\|f\|_{L^p(\mu)}, \|f\|_{L^q(\mu)}\right\}$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Considere $f, g \in L^2(\mu)$, donde μ medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Demuestre que
$$\int_\Omega f\, g\, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2\, d\mu\right)^{1/2}.$$

2. Asuma que μ medida positiva finita sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y que $1 < p < q$. Demuestre que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.

3. Sea μ una medida de probabilidad en $([a, b], \mathfrak{B}([a, b]))$, donde $0 < a < b < +\infty$. Demuestre que
$$\left(\int_{[a,b]} \sqrt[3]{t}\, \mu(dt)\right)^3 \leq \int_{[a,b]} t\, \mu(dt).$$

4. Suponga que $f, f_1, g, g_1 \in L^p(\mu)$, donde $p \geq 1$ y μ medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Asuma que $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$. Demuestre que $f\, g \sim f_1\, g_1$, o sea que $[f\, g] = [f_1\, g_1]$.

CMG/cmg.