Procesos Estocásticos : Clase 1. Intro

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Recuerde : Espacio de probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad,

donde Ω : espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.

Los elementos de Ω se denominan sucesos elementales.

$\mathcal{F}$: Conjunto de sucesos aleatorios

P : Medida de probabilidad

Supongamos un experimento de lanzamiento de una moneda

$$\Omega = \{\{C\}, \{+\}\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{C, +\}, \{C\}, \{+\}, \emptyset\}$$

Recuerde : Variable aleatoria

Una v.a. X es una función real medible definida en el espacio muestral $(\Omega, \mathcal{F})$ asociado a un experimento aleatorio, esto es

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

En otras palabras, $X = X(\omega)$, donde $\omega \in \Omega$, esto es es la función de una variable.

Proceso estocástico

- Modelar un sistema que evoluciona a lo largo de tiempo (o de espacio), de acuerdo a unas leyes aleatorias.

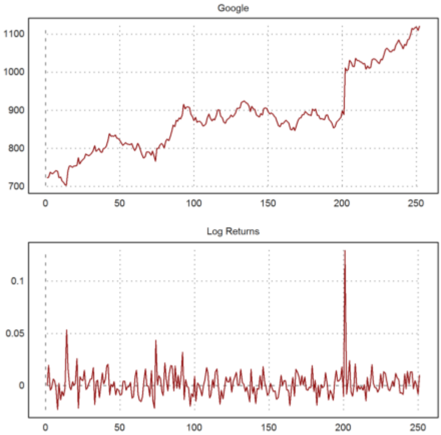
- Necesitamos introducir un parámetro más, sea discreto o continuo.

Ejemplos :

- Número de personas esperando ante una ventanilla de un banco en un instante de tiempo t.

- Tipo de cambio de dólar durante año.

Ejemplo : StockDataGoogle



Proceso estocástico : Definición

- Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un espacio de probabilidad, de modo que para todo $t \in T$ fijo

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

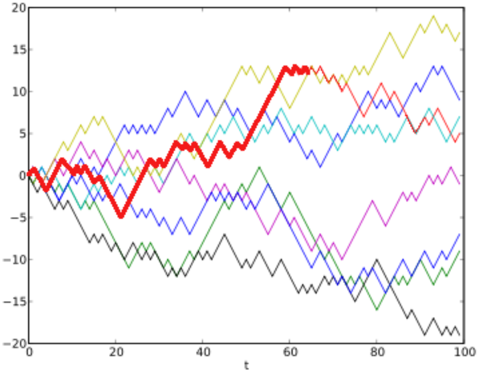
es una variable aleatória ; y para cada $\omega \in \Omega$ fijo, $X_{\cdot}(\omega)$ es una función de t.

- Notación $X = \{X_t, t \in T\}$
- T : Conjunto paramétrico y puede ser continuo o numerable.
- $X_t(\omega)$ es una función de dos variables.
- **Trayectorio o Realización del proceso estocástico**

Ejemplos de T :

- $T = \{t_1\}$, entonces X es una v.a.
- $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ una colección finita, entonces X es un vector aleatorio.
- $T = \mathbb{N}$, entonces X es una sucesión aleatoria.
- $T = (a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces X es un proceso estocástico de tiempo continuo.

Ejemplo : Camino aleatório



Conjunto de Estados

- Se denomina Conjunto de Estados , E, al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$.

- **Nota :** En general, se piensa en el subíndice $t \in T$ como el indicativo del "tiempo" y en X_t como el estado o posición del proceso estocástico en el instante t.

Outline

1. Capítulo 0 : Procesos Estocásticos : Definición

2. Capítulo 1 : Clasificación de los Procesos Estocásticos
   - Clasificación según la estructura de T y de E
   - Clasificación según las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$

Clasificación de los Procesos Estocásticos

Se puede clasificar según

- La estructura del conjunto paramétrico T y del conjunto de estados E ;
- Las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$.

Según la estructura del conjunto paramétrico T y del conjunto de estados E, los procesos estocásticos se puede clasificar en cuarto tipos :

$E \setminus T$	Discreto	Continuo
Discreto	Cadena	Proc. Puntual
Continuo	Secesión de v.a.	Proc. Continuo

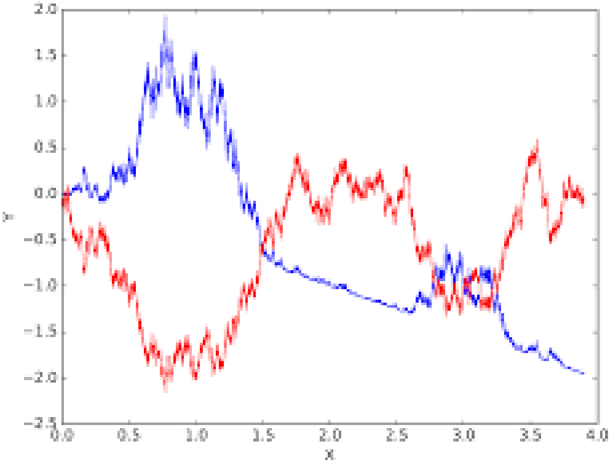
Según las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$

- Procesos de incrementos independientes
- Procesos Gausianos
- De incrementos estacionarios
- Procesos Estacionarios
- Procesos Markovianos
- Martingalas
- etc.

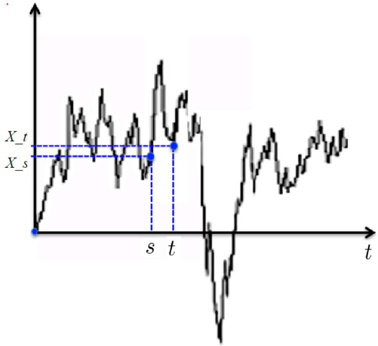
Procesos de incrementos independientes

Sea $T = [0, \infty)$ ó $T = \mathbb{N}$.
Se dice que un proceso $\{X_t, t \in T\}$ es de incrementos independientes si $\forall n$, $\forall t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$, con $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ las v.a. X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

Clasificación según las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$



Clasificación según las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$



Los incrementos $(X_t - X_s)$ y X_s

son independientes. En este caso $X_0 = 0$.

Proceso de incrementos independientes : Ejemplo

Sea $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ v.a. independientes.
Sea $X_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k$.
Entonces, el proceso $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso de incrementos independientes.
Demo. En efecto, con la notación $t_0 = 0, t_1 = 1$, etc.,

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \xi_0 \\
X_1 &= \xi_0 + \xi_1 \\
X_2 &= \xi_0 + \xi_1 + \xi_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $X_1 - X_0 = \xi_1$, $X_2 - X_1 = \xi_2$, etc. y son independientes por def.✓

Gracias y hasta pronto !

Clasificación según las características probabilísticas de las v.a. $X = \{X_t, t \in T\}$