UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 1 ALGEBRA III 525201-0

ATENCIÓN: Considere que los conjuntos involucrados en cada ejercicio, son subconjuntos de cierto conjunto universo $\mathcal{U}$. Además tener en cuenta la notación $X \setminus Y := X - Y$.

1. Demuestre, aplicando equivalencias lógicas, las siguientes propiedades de conjuntos:

$$(a)\ (A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C\,.$$
$$(b)\ A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subseteq A \quad \wedge \quad A \subseteq C\,.$$
$$(c)\ A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A\,.$$
$$(d)\ A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset\,.$$

2. Demuestre, aplicando propiedades de conjuntos, las siguientes proposiciones:

$$(a)\ [A\backslash(B\backslash A)] \cup [(B\backslash A)\backslash A] = A \cup B\,.$$
$$(b)\ A \cap C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\backslash C)\,.$$
$$(c)\ (A\backslash C) \setminus (B\backslash C) = (A\backslash B) \setminus C\,.$$

3. Demuestre las siguientes propiedades de producto cartesiano de conjuntos:

$$(a)\ A \times (B \cap C) = (A \cap B) \times (A \cap C)\,.$$
$$(b)\ A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)\,.$$
$$(c)\ B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)\,.$$

4. Una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ se dice *creciente*, si $\forall\, j \in \mathbb{N} : A_j \subseteq A_{j+1}$.
   (a) Dada $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, distintos y creciente, se define la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:
   $$B_1 := A_1 \quad \wedge \quad B_k := A_k \setminus A_{k-1} \quad \forall\, k \geq 2\,.$$
   Demuestre que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$.
   (b) Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{j\in\mathbb{N}}$ creciente, y todos distintos, tal que:
   $$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{1\}\,.$$

5. Para la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dada, determine $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ y $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ en cada caso. Justifique su respuesta:

$$(a)\ A_j := \left(-\frac{1}{j}\,,\,\frac{1}{j}\right), \forall \in \mathbb{N}. \qquad (b)\ A_j := \left[-2 - \frac{1}{j}\,,\,3 + \frac{1}{j}\right], \forall \in \mathbb{N}\,.$$
$$(c)\ A_j := \{1, 2, ..., 2j+1\}\,, \forall \in \mathbb{N}\,. \qquad (d)\ A_j := \mathbb{R} \setminus [0, j]\,, \forall \in \mathbb{N}\,.$$

6. Defina una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, todos distintos, tal que verifique las condiciones en cada caso:

$$(a)\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = (-\infty, 0]\,, \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = [-1, 0]\,. \qquad (b)\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \mathbb{R}\,, \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{2\}\,.$$