UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 2 - Álgebra III (525201)

Ejercicio 1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos distintos no vacíos. Se define $B_1 = A_1$, y $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. Pruebe que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Ejercicio 2. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se dice creciente si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq A_{i+1}$.

a) Dada $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia creciente de conjuntos no vacíos y todos distintos, se define la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:
$$B_1 = A_1 \quad \wedge \quad B_k = A_k - A_{k-1}, \forall k \geq 2$$
Pruebe que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

b) Defina una familia creciente de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no vacíos y todos distintos tal que:
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}$$

Ejercicio 3 (*). Dada una familia de conjuntos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, defina Φ como la familia de intersecciones finitas de conjuntos en $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\mathcal{F}$ como la familia de uniones arbitrarias de conjuntos en Φ.

a) Pruebe que $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}$, i.e. $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{F}$.

b) Pruebe que $\mathcal{F}$ es *estable* bajo intersecciones finitas, i.e. dados $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$.

Ejercicio 4. Estudie y clasifique las siguientes relaciones:

a) En $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} \leq 100$

b) En $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \iff \gcd\{x, y\} = 1$

c) En $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x^2 + y^2 \leq 1$

d) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $X\mathcal{R}Y \iff X \subseteq Y^c$

e) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A\mathcal{R}B \iff A \cdot B = I$

f) En $\mathcal{M}_{22}(\{0, 1\})$: $X\mathcal{R}Y \iff X \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A\mathcal{R}B \iff \exists m \in \mathbb{N}$, tal que $A^m = B^m$.

h) $\mathbb{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

i) En $\mathbb{R}^n : (x_i)_{i=1}^n \mathcal{R} (y_i)_{i=1}^n \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i$.

j) En $\mathbb{C} : (a + bi)\mathcal{R}(c + di) \iff a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$

Ejercicio 5. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas de X. Es decir, los elementos de $\mathcal{P}$ son las particiones $\{A_i\}_{i=1}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Se define la relación $\leq$ en $\mathcal{P}$ como sigue:
$$\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m \iff \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \exists i \in \{1, \ldots, n\}, B_j \subseteq A_i$$

a) Pruebe que $\leq$ es relación de orden.

b) Muestre que si $|X| > 3$, entonces $\leq$ es relación de orden parcial.

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr