UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

CÁLCULO IV (MAT 225212 & MAT 225252)

Caso de estudio: Construcción de Armónica conjugada

Probar que $u(x,y) = e^{-x}\big(x\sin(y) - y\cos(y)\big)$ es armónica. Encontrar una armónica conjugada, $v = v(x,y)$ tal que la función analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ verifique que $f(0) = 0$. Encontrar las dos primeras derivadas de f.

`Primera Forma de Resolución.` Nos basamos en la propiedad que si u es armónica entonces sus armónicas conjugadas difieren en una constante y $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$

Procedemos a construir por inspección cual será la f analítica, hasta encontrar que su parte real sean los términos que definen u (Difícil):

(i) $e^{-z} = e^{-x}\big(\cos(y) - i\sin(y)\big)$

(ii) $ie^{-z} = e^{-x}\big(\sin(y) + i\cos(y)\big)$

(iii) $ize^{-z} = e^{-x}(x+iy)\big(\sin(y) + i\cos(y)\big) := f(z)$ $(f(0) = 0)$.

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(e^{-x}\big(x\sin(y) - y\cos(y) + i(x\cos(y) + iy\sin(y)\big)$$

Luego, por teorema las partes reales e imaginarias de f son armónicas. Finalmente

$$v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)) = e^{-x}\big(x\cos(y) + y\sin(y).$$

Derivadas: $f'(z) = ie^{-z}(1-z)$ y $f''(z) = ie^{-z}(2-z)$

`Segunda Forma de Resolución.` (Clásica)

1º Se prueba que u es función armónica.

2º Se integran las condiciones de Cauchy-Riemann para determinar la armónica conjugada v.

3º Definir $f = f(z)$ y calcular sus derivadas, o bien $z = x + iy$:
$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ y $f''(z) = u_{xx}(x,y) + iv_{xx}(x,y)$

Desarrollo

- ⋆ $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Observar

$$u_{xx}(x,y) = u - 2e^{-x}\sin(y) \qquad\qquad u_{yy}(x,y) = -u + 2e^{-x}\sin(y)$$

- ⋆ Construcción de v. Como $u(0,0) = 0$ necesariamente $v(0,0) = 0$ para verificar que $f(0) = 0$. Integramos el sistema

$$1.\ \begin{array}{rcl} v_y(x,y) & = & u_x(x,y) \\ & = & -u + e^{-x}\sin(y) \end{array} \qquad\qquad 2.\ \begin{array}{rcl} v_x(x,y) & = & -u_y(x,y) \\ & = & (1-x)e^{-x}\cos(y) - e^{-x}(y\sin(y)) \end{array}$$

Integrando (1) existe una función derivable arbitraria $\phi(x)$ tal que

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \phi(x) + \int u_x(x,y)dy \\ &= \phi(x) - e^{-x}\cos(y) - \int u(x,y)dy \\ &= \phi(x) + e^{-x}\big[x\cos(y) + y\sin(y)\big] \end{aligned}$$

como $v(0,0) = 0$ se tiene que $\phi(0) = 0$. Luego reemplazando en (2) la derivada $v_x(x,y)$ se tiene

$$\phi'(x) + (1-x)e^{-x}\cos(y) - e^{-x}(y\sin(y)) = (1-x)e^{-x}\cos(y) - e^{-x}(y\sin(y))\ s/a\ \phi(0) = 0,$$

es decir, $\phi'(0) = 0$ s/a $\phi(0) = 0$ sobre todo $\mathbb{R}$. Esto es $\phi \equiv 0$, la función nula, por tanto

$$v(x,y) = e^{-x}\big[x\cos(y) + y\sin(y)\big]$$

Para obtener f re-escribimos u, esto es

$$u(x,y) = e^{-x}\big(x\sin(y) - y\cos(y)\big) = e^{-x}\big(x\sin(y) + i^2 y\cos(y)\big)$$

asi

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= e^{-x}\big(x\sin(y) + i^2 y\cos(y)\big) + ie^{-x}\big[x\cos(y) + y\sin(y)\big] \\ &= xe^{-x}\big(\sin(y) + i\cos(y)\big) + iye^{-x}\big(\sin(y) + i\cos(y)\big) \\ &= (x+iy)e^{-x}\big(\sin(y) + i\cos(y)\big) \\ &= i(x+iy)e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y)\big) \\ &= ize^{-z} \end{aligned}$$

- ⋆ Derivadas: $f'(z) = ie^{-z}(1-z)$ y $f''(z) = ie^{-z}(2-z)$

Nota. La re-escritura de f, usa las identidades complejas

$$-1 = i^2 \qquad -i = \frac{1}{i}.$$

`Tercera Forma de Resolución.` (Semi-Clásica) Único cambio: realizamos **`integración parcial definida`** de las condiciones de Cauchy-Riemann. Se obtiene un algoritmo directo para la construcción de la armónica conjugada v de u.

Desarrollo.

Integrando la condición $v_y(x,s) = u_x(x,s)$ en el intervalo [0,y] con $y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$v(x,y) = \int_0^y u_x(x,s)ds + \phi(x)$$

pero $v_x(x,0) = -u_y(x,0)$. Luego $\phi'(s) = -u_y(s,0)$ y $\phi(x) = -\int_0^x u_y(s,0)ds$.

Conclusión

$$v(x,y) = \int_0^y u_x(x,s)ds + \int_0^x \left[-u_y(s,0)\right] ds$$

Para el ejemplo

$$v(x,y) = e^{-x}\left(x\cos(s) + s\sin(s)\right)\Big|_0^y + se^{-s}\Big|_0^x = e^{-x}\left(x\cos(y) + y\sin(y)\right)$$