UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 4
Análisis Real II (525302)
Propiedades casi seguras e Introducción a la Integral de Lebesgue

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida.

Problema 1 Sean $\{a_k\}_{k=1}^n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\{F_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{X}$ y $f : X \to [0, +\infty]$ una función simple y medible tal que se puede representar (no necesariamente de forma estándar o canónica) como

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{F_k}$$

Demuestre que

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(F_k)$$

Indicación: Construya una representación estándar de esta función. Puede asumir, sin pérdida de generalidad, que algunos conjuntos que cumplan cierta propiedad son disjuntos.

Problema 2 Sean $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones simples medibles. Demuestre que las funciones $\max\{f_1, f_2\}$ y $\min\{f_1, f_2\}$ definidas por

$$\begin{aligned} (\forall x \in X) \quad \max\{f_1, f_2\}(x) &= \max\{f_1(x), f_2(x)\} \\ \min\{f_1, f_2\}(x) &= \min\{f_1(x), f_2(x)\} \end{aligned}$$

son simples medibles.

Problema 3 Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ un espacio de medida, con μ la medida de contar. Demuestre que toda función $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ es medible y que

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Definición 1 Una medida $\mu : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ es *completa* si todo subconjunto de un conjunto de medida nula es un elemento de $\mathcal{X}$ y, por ende, también tiene medida nula. Es decir,

$$(\forall A \in \mathcal{X}) \;\; \mu(A) = 0 \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{X} \wedge \mu(B) = 0$$

Problema 4 Sea μ una medida completa. Demuestre que, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son tales que f es medible y $f = g$ casi seguramente, entonces g es medible.

Problema 5 Sean μ una medida completa, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : X \to \mathbb{R}$, y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$, ambas casi seguramente. Demuestre que $f = g$ casi seguramente.

Problema 6 Sea $f : X \to [0, +\infty)$ una función medible. Demuestre que existe una sucesión creciente de funciones medibles y acotadas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n : X \to [0, +\infty)$, tales que $(\forall x \in X)\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Problema 7 Sean $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demuestre que f' es medible.

---

8 de Septiembre de 2014