UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo / Indicaciones de algunos ejercicios Listado 10 (2021-I)

Primero revisaremos unas propiedades importantes. En lo que sigue, consideraremos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, pudiendo ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Problema 4. Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, provisto de un producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$ y U un subespacio de V. Pruebe que U es T-invariante si y sólo si $U^\perp$ es T^*-invariante.
Demostración: Se hará por doble implicación.
$(\Rightarrow)$: Hipótesis: U es T-invariante, i.e. $T(U) \subseteq U$.
Sea $z \in T^*(U^\perp)$, lo cual significa que $\exists\, w \in U^\perp : z = T^*(w)$. Considerando $v \in U$, tenemos

$$\langle v, z\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle = \langle \underbrace{T(v)}_{\in T(U)\subseteq U}, \underbrace{w}_{\in U^\perp}\rangle = 0\,.$$

De esta manera se deduce que $\forall\, v \in U : \langle z, v\rangle = \overline{\langle v, z\rangle} = 0$, lo que equivale a decir que $z \in U^\perp$. Luego, como $z \in T^*(U^\perp)$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $T^*\big(U^\perp\big) \subseteq U^\perp$.
$(\Leftarrow)$: Hipótesis: $T^*\big(U^\perp\big) \subseteq U^\perp$.
Sea $z \in T(U)$, lo cual significa que $\exists\, w \in U : z = T(w)$. Considerando $v \in U^\perp$, tenemos

$$\langle z, v\rangle = \langle T(w), v\rangle = \langle \underbrace{w}_{\in U}, \underbrace{T^*(v)}_{\in T^*(U^\perp)\subseteq U^\perp}\rangle = 0\,.$$

De esta manera se deduce que $\forall\, v \in U^\perp : \langle z, v\rangle = 0$, lo que equivale a decir que $z \in \big(U^\perp\big)^\perp = U$. Luego, como $z \in T(U)$ es fijo pero arbitrario, concluye que $T\big(U\big) \subseteq U$.

Problema 5. Exhibir un espacio vectorial V finito dimensional con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que exista un subespacio vectorial de V invariante respecto de T, cuyo complemento ortogonal no es T-invariante.
Indicación: Considere el espacio real $V := \mathbb{R}^2$, provisto del producto interno usual. Sea la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto T(x_1, x_2) := (2\,x_1 + x_2, -5\,x_2)$. Pruebe que T es lineal y satisface lo pedido considerando el subespacio (propio) $U := \langle\{(1,0)\}\rangle$.

Problema 7. Pruebe que no existe operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1,2,3) = (0,0,0)$ y $T(2,5,7) = (2,5,7)$.
Indicación: Por reducción al absurdo. Suponga que T es autoadjunta y deduzca una contradicción.

Problema 8. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x,y) := (2\,x - 3\,y\,, 3\,x + 2\,y)$. Demuestre que T no es autoadjunta, pero si es normal.
Indicación: **Primera forma:** como estamos en Dimensión Finita. sabemos que $\exists\, T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Luego, determinar T^*, y concluir lo que se pide.
Otra forma: como estamos en Dimensión Finita, considere / construya una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Luego determine las matrices asociadas de T y T^*, y concluir.

Problema 9. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que T es normal si y sólo si $\forall\, z \in V : ||T(z)|| = ||T^*(z)||$. Concluya a partir de esta propiedad, que si T es normal, entonces $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.
Demostración: Por doble implicación:
$(\Rightarrow)$ Hipótesis: T es normal. i.e. $T^*T = TT^*$.
Sea $z \in V$. Aplicando definición de norma inducida y aplicación adjunta, resulta

$$||T(z)||^2 = \langle T(z), T(z)\rangle = \langle\big(T^*T\big)(z), z\rangle = \langle\big(TT^*\big)(z), z\rangle = \langle T^*(z), T^*(z)\rangle = ||T^*(z)||^2\,,$$

y así, siendo $z \in V$ fijo pero arbitrario, se concluye $\forall\, z \in V : ||T(z)|| = ||T^*(z)||$.
$(\Leftarrow)$ Hipótesis: $\forall\, z \in V : ||T(z)|| = ||T^*(z)||$.
El objetivo es probar que $TT^* = T^*T$, i.e. $\forall\, z \in V : \big(TT^*\big)(z) = \big(T^*T\big)(z)$. Para ello, consideramos $z \in V$. Luego,

$$\langle\big(TT^* - T^*T\big)(z), z\rangle = \langle\big(T^*T\big)(z), z\rangle - \langle\big(TT^*\big)(z), z\rangle = ||T(z)||^2 - ||T^*(z)||^2 = 0\,.$$

Así hemos establecido que $TT^* - T^*T \in \mathcal{L}(V)$ cumple $\forall\, z \in V : \langle\big(TT^* - T^*T\big)(z), z\rangle = 0$. Nótese que $(TT^* - T^*T)^* = TT^* - T^*T$ (¡Verificar!), por lo cual $TT^* - T^*T$ es Autoadjunta. Luego, aplicando la Propiedad dada en el Listado 10 (Ejercicio 18), se concluye que $TT^* - T^*T = \Theta$, i.e. T es normal.
Como consecuencia de la equivalencia anterior, tenemos para T normal: Sea $z \in V$ fija pero arbitraria. Tenemos

$$z \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(z) = \theta \Leftrightarrow T^*(z) = \theta \Leftrightarrow z \in \mathrm{Ker}(T^*)\,,$$

y de aquí se concluye (por un argumento de FIJO PERO ARBITRARIO sobre z) la propiedad pedida: $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.
En los incisos siguientes, consideraremos que V es de dimensión finita, y también que $T \in \mathcal{L}(V)$ es NORMAL.

(a) Demuestre que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^*)$.

DEMOSTRACIÓN: Aplicando las propiedades de la APLICACIÓN ADJUNTA EN DIMENSIÓN FINITA discutidas en clases, tenemos

$$\mathrm{Im}(T^*) = \Big(\mathrm{Ker}(T)\Big)^{\perp} = \Big(\mathrm{Ker}(T^*)\Big)^{\perp} = \Big(\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \mathrm{Im}(T)\,.$$

(b) Demuestre, usando la definición, que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : (T - \alpha\,\tilde{I})^* = T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}$, siendo $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la aplicación identidad. Concluya después que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : (T - \alpha\,\tilde{I})$ es una aplicación normal.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $z, x \in V$. Tenemos $T - \alpha\,\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ y

$$\langle (T - \alpha\,\tilde{I})(z), x\rangle = \langle T(z) - \alpha\, z, x\rangle = \langle T(z), x\rangle - \alpha\,\langle z, x\rangle = \langle z, T^*(x)\rangle - \langle z, \overline{\alpha}\, x\rangle = \langle z, \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)(x)\rangle\,.$$

De esta manera, se ha establecido que $\forall\, z, x \in V : \langle (T - \alpha\,\tilde{I})(z), x\rangle = \langle z, \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)(x)\rangle$, lo cual implica que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^* = T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}$. Además, para $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^*\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big) &= \big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big)\,\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big) = T^*T - \alpha\,T^* - \overline{\alpha}\,T + |\alpha|^2\,\tilde{I}\\
\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)\big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)^* &= \big(T - \alpha\,\tilde{I}\big)\,\big(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}\big) = TT^* - \overline{\alpha}\,T - \alpha\,T^* + |\alpha|^2\,\tilde{I}\,,
\end{aligned}$$

y en vista que T es normal, se concluye, dado que $\alpha \in \mathbb{C}$ es fijo pero arbitrario, que
$\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : T - \alpha\,\tilde{I}$ es normal.

(c) (λ, v) es un autopar de T si y sólo si $(\overline{\lambda}, v)$ es un autopar de T^*.

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta (b) y la PROPIEDAD INICIAL DE ESTE PROBLEMA, se tiene que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Ker}(T - \alpha\,\tilde{I}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I})$. Luego,

$$(\lambda, v) \text{ es un autopar de } T \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\tilde{I}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\,\tilde{I}) \Leftrightarrow (\overline{\lambda}, v) \text{ es un autopar de } T^*\,.$$

(d) vectores (espacios) propios de T asociados a valores propios distintos, son ortogonales.

DEMOSTRACIÓN: Sean $(\lambda, u), (\mu, w)$ dos autopares de T, con $\lambda \neq \mu$. Se cumple así que $T(u) = \lambda\, u$ y $T(w) = \mu\, w$. En vista que T es normal, se tiene también que $(\overline{\lambda}, u)$ y $(\overline{\mu}, w)$ son dos autopares de T^*. Queremos probar que $\langle u, w\rangle = 0$. Veámoslo. Por la definición de T^*, tenemos

$$\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle \quad\Rightarrow\quad \langle \lambda\, u, v\rangle = \langle u, \overline{\mu}\, w\rangle \quad\Rightarrow\quad \lambda\,\langle u, v\rangle = \mu\,\langle u, w\rangle \quad\Rightarrow\quad \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle u, v\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \langle u, v\rangle = 0\,.$$

De esta manera se concluye que vectores propios de T asociados a valores propios distintos, son ortogonales. Esto equivale también a afirmar que espacios propios de T asociados a valores propios distintos, son ortogonales.

Problema 10. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ normal, tal que $T(1,1,1) = (3i, 3i, 3i)$ y $(z_1, -5iz_2, 2iz_3) \in \mathrm{Ker}(T)\backslash\{\theta\}$. Puebe que $iz_1 + 5z_2 - 2z_3 = 0$.

INDICACIÓN: Notar que $\{3i, 0\} \in \sigma(T)$. Luego, aplicar Problema 10-d).

Problema 11. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunta y U un subespacio de V que es T-invariante. Pruebe que:

$$(a)\, U^{\perp} \text{ es } T\text{-invariante}\,. \quad (b)\, T|_U \in \mathcal{L}(U) \text{ es autoadjunta}\,. \quad (c)\, T|_{U^{\perp}} \in \mathcal{L}(U^{\perp}) \text{ es autoadjunta}\,.$$

INDICACIÓN: (a) Aplicar Problema 4.
(b) Como U es T-invariante, entonces se puede restringir T a U (tanto el espacio de partida como el de llegada). Esto induce la aplicación $\tilde{T} := T|_U :\to U$, tal que $U \ni x \mapsto \tilde{T}(x) := T(x)$. Luego, pruebe que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(U)$ y es autoadjunta también.
(c) Repetir el razonamiento descrito para $U^{\perp}$.

Problema 12. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) T es una isometría.

(b) $\forall\, u, w \in V\, :\, \langle T^*(u), T^*(w)\rangle\, =\, \langle u, w\rangle$.

(c) Para cualquier conjunto ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^m \subseteq V$, $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^m$ es también ortonormal.

(d) Existe una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^n$ de V, tal que $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^n$ es también base ortonormal de V.

Indicación: Como V es finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$, se tiene que $\exists\, T^* \in \mathcal{L}(V)$. Luego, acorde a lo discutido en clases, se sabe que T es una isometría $\Leftrightarrow$ T^* es una isometría.
Las demás equivalencias se deducen de forma casi inmediata.

Problema 13. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva, y considere U un subespacio de V, T-invariante. Demuestre que $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ es positiva.

Indicación: Tomar en cuenta Problema 11-b).

Problema 15. Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es positiva, entonces $\forall\, k \in I\!N\, :\, T^k$ es también positiva.

Indicación: Debe probarse

- $\forall\, k\, \in\, \mathbb{N}\, :\, T^k$ es autoadjunta (Por Inducción Matemática)
- $\forall\, k\, \in\, \mathbb{N} : \forall\, z\, \in\, V\, :\, \langle T^k(z), z\rangle\, \geq\, 0$. Para esto, sea $k\, \in\, \mathbb{N}$, fijo pero arbitrario. Luego, analice los casos: k es par y k es impar, y concluya.

RBP/rbp 15.07.2021