UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 2. 12–Ago.–2020; 19:00.

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

1. (a) Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ con $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

   (b) Estudia la convergencia de la sucesión $\{s_n\}$ con $s_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

   (c) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(1+\log n)^n}.$

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Demuestra que si todas las subsucesiones de $\{x_n\}$ tienen una subsucesión que converge a $x \in X$, entonces $x_n \to x$.

   Sugerencia: Demuéstralo por el absurdo.

3. Sean X e Y dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una función continua y $E \subset Y$.

   (a) Demuestra que $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(\overline{E})$.

   (b) Da un ejemplo de una función discontinua que no cumpla esa propiedad.

4. Sea $\mathcal{C}([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$ que, dotado con la norma infinito $\|f\|_\infty := \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ es un espacio vectorial normado. Sea $\mathcal{C}_0([a,b])$ el subespacio de las funciones de $\mathcal{C}([a,b])$ que se anulan en los extremos a y b del intervalo. Demuestra que $\mathcal{C}_0([a,b])$ es cerrado.

5. Sean $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas $\forall n \in \mathbb{N}$ por $f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x \le n, \\ n, & x > n. \end{cases}$

   (a) Demuestra que $\{f_n\}$ converge puntualmente y determina la función límite.

   (b) Demuestra que $\{f_n\}$ no converge uniformemente.