UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de Examen. Análisis Real II (525302)

1. Sea Γ un espacio vectorial de funciones reales acotadas, definidas sobre un conjunto $\Omega \neq \emptyset$, que satisface las siguientes propiedades:

   - Γ contiene a la función $f(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \Omega$.
   - Si $f, g \in \Gamma$, entonces $\max\{f, g\} \in \Gamma$.
   - Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente uniformemente acotada de funciones de Γ, entonces $\lim_{n\to+\infty} f_n \in \Gamma$.

   (a) **(10 puntos)** Considere $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : I_A \in \Gamma\}$, donde $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$
   Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Solución:

- Como $I_\Omega \equiv 1 \in \Gamma$, $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Sea $A \in \mathcal{F}$. Ya que Γ un espacio vectorial, $I_{A^c} = 1 - I_A \in \Gamma$. Luego $A^c \in \mathcal{F}$.
- Supongamos que $A, B \in \mathcal{F}$. Puesto que $I_{A\cup B} = \max\{I_A, I_B\} \in \Gamma$, $A \cup B \in \mathcal{F}$. Lo que implica que $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ cuando $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.
- Consideremos $A_k \in \mathcal{F}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $I_{\cup_{k=1}^n A_k} \in \Gamma$ pues $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$. Ya que $I_{\cup_{k=1}^n A_k} \nearrow_{n\to+\infty} I_{\cup_{k=1}^\infty A_k}$, $I_{\cup_{k=1}^\infty A_k} \in \Gamma$. Por lo tanto, $\cup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{F}$.
  De los items primero, segundo y cuarto tenemos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Adicionalmente a Γ, considere la aplicación lineal $T : \Gamma \to \mathbb{R}$ tal que:

- Si $f \in \Gamma$ es positiva (o sea, $f(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$), entonces $T(f) \geq 0$.

- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos positivos de Γ tal que $f_n(\omega)$ decrece a 0 cuando $n \to +\infty$, entonces $T(f_n)$ decrece a 0 cuando $n \to +\infty$.

(b) **(10 puntos)** Para todo $A \in \mathcal{F}$ se define $\mu(A) = T(I_A)$. Demuestre que μ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

Solución:

- $\mu(\emptyset) = T(I_\emptyset) = T(0 \cdot I_\Omega) = 0$.
- Supongamos que $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$. Luego,

$$I_{\cup_{k=1}^\infty A_k} = \sum_{k=1}^\infty I_{A_k}.$$

Por lo tanto, $I_{\cup_{k=1}^\infty A_k} - \sum_{k=1}^n I_{A_k}$ es una sucesión de elementos positivos de Γ que decrece a 0 cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, $T\left(I_{\cup_{k=1}^\infty A_k} - \sum_{k=1}^n I_{A_k}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. Como T es lineal,

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\left(T\left(I_{\cup_{k=1}^\infty A_k}\right) - T\left(\sum_{k=1}^n I_{A_k}\right)\right) = T\left(I_{\cup_{k=1}^\infty A_k}\right) - \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n T\left(I_{A_k}\right).$$

Lo que implica

$$\mu\left(I_{\cup_{k=1}^\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

Así que μ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

(c) **(10 puntos)** Se sabe que Γ está formado por todas las funciones acotadas que son $\mathcal{F}$-medibles. Demuestre que para todo $f \in \Gamma$,

$$T(f) = \int_\Omega f\, d\mu. \tag{1}$$

Sugerencia: Utilice la técnica de aproximación por funciones simples.

Solución:

Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Usando que T y la integral son lineales obtenemos

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, I_{A_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, T\left(I_{A_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, \mu\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_\Omega I_{A_n}\, d\mu \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_{A_n}\right) d\mu. \end{aligned}$$

Entonces, (1) se cumple en caso que f sea una función simple no negativa.

Asumimos que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función acotada medible no negativa. Luego, existe una sucesión s_n de funciones simples tales que

$$s_n \nearrow_{n\to+\infty} f.$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona llegamos a

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega s_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} T\left(s_n\right).$$

Como $f - s_n$ es una sucesión de elementos positivos de Γ que decrece a 0 cuando $n \to +\infty$,

$$T(f) - T(s_n) = T(f - s_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} T\left(s_n\right) = T(f).$$

Entonces, (1) se cumple en caso que f sea una función acotada medible no negativa.

Consideremos $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ acotada y medible. Luego,

$$T(f) = T\left(f^+\right) - T\left(f^-\right) = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

2. **(25 puntos)** Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ (o sea, $\mathbb{P}$ es una medida positiva con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Suponga que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La función característica de X (o transformada de Fourier de X) está definida como

$$G(t) = \int_\Omega e^{i\,t\,X} d\mathbb{P} \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que G es derivable. Calcular la derivada de G.

Nota: Para $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = cos(y) + i\, sen(y)$.

Solución: De acuerdo a la representación polar de los números complejos,

$$G(t) = \int_\Omega e^{i\,t\,X} d\mathbb{P} = \int cos(t\,X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) + i \int sen(t\,X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega).$$

Para $j = 1, 2$, definimos

$$f_j(t) = \int \phi_j(t\,X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $\phi_1(y) = cos(y)$ y $\phi_2(y) = sen(y)$. Luego,

$$G(t) = f_1(t) + i\, f_2(t).$$

Sea $t \in \mathbb{R}$. Consideremos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que satisfacen $t_n \neq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_n \to_n t$. Elegimos

$$g_n(\omega) = (\phi_j(t_n\,X(\omega)) - \phi_j(t\,X(\omega)))\,/\,(t_n - t) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

De acuerdo a la definición de derivada y a la regla de la cadena tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(\omega) = \frac{d}{dt}\phi_j(t\,X(\omega)) = X(\omega)\;\phi_j'(t\,X(\omega)).$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial deducimos

$$g_n(\omega) = X(\omega)\;\phi_j'(\xi_n\,X(\omega)),$$

donde ξ_n está entre t y t_n. Ya que $\phi_1'(y) = -sen(y)$ y $\phi_2(y) = cos(y)$, $\left|\phi_j'(y)\right| \leq 1$. De donde se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(\omega)| \leq |X(\omega)|.$$

Ya que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega X(\omega)\ \phi_j'(t\, X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} (f_j(t_n) - f_j(t)) / (t_n - t) = \int_\Omega X(\omega)\ \phi_j'(t\, X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Lo que implica que f_j es derivable y

$$f'(t) = \int_\Omega X(\omega)\ \phi_j'(t\, X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Entonces G es derivable y

$$\begin{aligned}G'(t) &= f_1'(t) + i\, f_2'(t) \\ &= -\int_\Omega X(\omega)\ sen(t\, X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) + i \int_\Omega X(\omega)\ cos(t\, X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega).\end{aligned}$$

3. **(20 puntos)** Sea μ es una medida positiva sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Demuestre que

$$\left\{[f] \in \mathcal{L}^2(\mu) : \int_\Omega f^2\, d\mu = 1\right\}$$

es un conjunto cerrado de $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Sugerencia: Utilice que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Solución: Sea $[g]$ un punto de acumulación del conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{[f] \in \mathcal{L}^2(\mu) : \int_\Omega f^2\, d\mu = 1\right\}$$

Entonces, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n - g)^2\, d\mu = 0.$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|f_n^2 - g^2\right| \, d\mu &= \int_\Omega |f_n - g| \, |f_n + g| \, d\mu \\ &\le \left(\int_\Omega |f_n - g|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |f_n + g|^2 \, d\mu\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Ya que

$$|f_n + g|^2 = |f_n - g + 2g|^2 \le (|f_n - g| + |2g|)^2 \le 2\left(|f_n - g|^2 + |2g|^2\right),$$

$$\int_\Omega |f_n + g|^2 \, d\mu \le 2\int_\Omega |f_n - g|^2 \, d\mu + 8\int_\Omega |g|^2 \, d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|f_n^2 - g^2\right| \, d\mu \le \left(\int_\Omega |f_n - g|^2 \, d\mu\right)^{1/2} &\left(2\int_\Omega |f_n - g|^2 \, d\mu + 8\int_\Omega |g|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \\ &\longrightarrow_{n\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

Lo que implica

$$\left|\int_\Omega \left(f_n^2 - g^2\right) \, d\mu\right| \le \int_\Omega \left|f_n^2 - g^2\right| \, d\mu \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Como $f_n \in \mathcal{S}$,

$$\int_\Omega g^2 \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^2 \, d\mu = 1.$$

Por lo tanto, $[g] \in \mathcal{S}$.

Nota: A continuación presentamos una manera alternativa de acotar $\int_\Omega |f_n + g|^2 \, d\mu$.

$$|f_n + g|^2 \le (|f_n| + |g|)^2 \le 2\left(|f_n|^2 + |g|^2\right).$$

Usando que $f_n \in \mathcal{S}$ deducimos que

$$\int_\Omega |f_n + g|^2 \, d\mu \le 2\int_\Omega |f_n|^2 \, d\mu + 2\int_\Omega |g|^2 \, d\mu = 2 + 2\int_\Omega |g|^2 \, d\mu.$$