Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº4: Polinomios
Clase N°28 - 18/06/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Funciones Racionales Impropias

Lema

Dados $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ siendo $p, q \neq \theta$, con $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$, es decir, $\frac{p}{q}$ es una función racional impropia. Luego, existen y son únicos dos polinomios s, r pertenecientes a $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, tales que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{con } r(x) = \theta \ \vee \ \mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(q)$$

Los polinomios s y r se denominan **cociente** y **resto** que resultan de dividir p por q.

Regla de Ruffini

La **Regla de Ruffini** nos permitira calcular los coeficientes del cociente y el resto de dividir un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - c$.

Ejemplos: Determine el cociente y resto de la división de p con s:

1. $p(x) = 5x^7 - 9x^6 - 3x^5 + x^3 + 8x + 1$ y $s(x) = x - 2$
2. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y $s(x) = x - 16$
3. $p(x) = x^6 - 4ix^2 - 9x^4 - 64$ y $s(x) = x + 3$

Raíces de un Polinomio

Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, de grado mayor o igual a 1, por otro de la forma $x - c$ es $p(c)$.

Raíces de un Polinomio

Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, de grado mayor o igual a 1, por otro de la forma $x - c$ es $p(c)$.

Definición

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$, c es raíz o cero de p si y solo si $p(c) = 0$ (note que $p(c) = 0$ si y solo si p es divisible por $x - c$ o el resto de la división de p por $x - c$ es el polinomio nulo.)

Polinomios

Teorema de la Factorización Única

Todo polinomio no constante de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ se puede escribir como producto de una constante por polinomios irreducibles mónicos y esta descomposición es única salvo el orden de los factores.

Polinomios

Definición

Si c es una raíz del polinomio $p(x)$, se llama **orden de multiplicidad** de la raíz c al mayor número natural k tal que $p(x)$ es divisible por $(x-c)^k$ y no lo es por $(x-c)^{k+1}$, es decir,

$$p(x) = (x-c)^k \cdot q(x)$$

donde $q(x)$ no es divisible por $(x-c)$, o sea, c no es raíz de $q(x)$.

Ejemplo

Verificar que 2 es una raíz del polinomio

$$p(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$$

y hallar su orden de multiplicidad.

Polinomios

Teorema

Un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ de $\mathrm{gr}(p) = n$, siendo n mayor que cero, tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{K}$.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene a lo menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Teorema

Si z es una raíz compleja de un polinomio p con coeficientes reales, su conjugado $\bar{z}$ también es raíz de p y las raíces de z y $\bar{z}$ tienen el mismo orden de multiplicidad.

Ejercicios:

1. Hallar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$$

sabiendo que -3 es una raíz múltiple y expresarlo como producto de polinomios irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

2. Hallar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 10$$

sabiendo que $1 + i$ es una raíz del mismo, y expresarlo como productor de polinomios irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Ejercicios:

3. Sea p un polinomio definido por:

$$p(x) = x^4 + \alpha x^3 - 3x^2 - 7x + \beta$$

determine, si existen, α y β reales, de modo que $p(x) - 8$ sea divisible por $x + 1$ y $p(x)$ sea divisible por $x - 1$. Luego, considerando los valores encontrados, determine la descomposición de $p(x)$ en factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.