UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 8

1. Sean $T : V \to V$ una transformación lineal. Muestre que:

   a) $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2)$.

   b) $\mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

   c) $T^2 = \theta \iff \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$.

2. Sean U y W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y B_U y B_W bases de U y W respectivamente. Sea además $T : V \to V$ un automorfismo.

   a) Pruebe que $V = U \oplus W$ si y sólo si $B_U \sqcup B_W$ es base de V, donde $\sqcup$ denota unión disjunta.

   b) Demuestre que si $V = U \oplus W$, entonces $V = T(U) \oplus T(W)$.

3. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T = Id$. Pruebe que:

   a) T es automorfismo.

   b) $V = Ker(T + Id) \oplus Ker(T - Id)$

4. Suponga que V es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal y $B_U = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de U. Demuestre que T es sobreyectiva si y solo si $V = \langle\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}\rangle$. Concluya que $\dim(U) \geq \dim(V)$.

JAL/RAE/rae — 9 de mayo de 2022