UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EB/JB/GD/CF/NH/RM/CM/MN/LP/JQ/MV

LISTADO 3 - LÍMITES Y CONTINUIDAD

Cálculo I - 527140

1. Utilizando la definición formal de límite $(\epsilon - \delta)$, demuestre que:

   (a) $\lim_{x \to -2} 3x - 2 = -8$

   (b) $\lim_{x \to c} mx + b = mc + b, \quad m \neq 0.$

   (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5.$

2. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x \to 7} \dfrac{49 - x^2}{x - 7}$

   (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{5x^2 + 35x + 50}{x^2 - 2x - 8}$

   (c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x^6}{x - 1}$

   (d) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 + 2x - 8} \right)$

   (e) $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

   (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

   (g) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{5}}{\sqrt{x + 2} - 2}$

   (h) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1}{x - 3}$

   (i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 1}{x - 1}$

   (j) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

   (k) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x + \sqrt{x} - 2}{1 - x^2}$

   (l) $\lim_{x \to -a} \dfrac{\sqrt{(x - a)^2 + 4ax}}{|x + a|}$

   (m) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{3/2} - 1}{x - 1}$

   (n) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

   (o) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

   (p) $\lim_{x \to 8} \dfrac{1 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}}{x - 8}$

   (q) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^{3/2} - 2}{1 - x^6}$

3. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 9}}{x + 1} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$$

   y a partir de estos deducir el valor de $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt[3]{x + 9}}{x + 1}$.

4. Dada las siguientes funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 11}}{x - 3} & , x < 3 \\[2ex] x^2 \sin\left(\dfrac{x\pi}{2}\right) & , x \geq 3 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x|x^2 - 1|}{x - 1}$$

   (a) Calcular, si existe, $\lim_{x \to 3} f(x)$.

   (b) Calcular, si existen, $\lim_{x \to 1} g(x)$ y $\lim_{x \to -1} g(x)$.

5. Calcular, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

(b) $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{3}{x^3-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

(c) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{x^2+4}{x^3-4x^2+x-4}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x+|x|}$

(f) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{(x-3)\sqrt{4-x^2}}{x^2-4}$

(g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+\sin(x)}{e^x+\cos(x)}$

(h) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x-5}$

(i) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x-5}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(k) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(l) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-5}$

(m) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-3x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

(n) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4}$

(o) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^6+x^3} - \sqrt{x^6-x^2}$

6. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en todo su dominio.

(a)

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3x^2-3}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} & ,0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{4}{3} & ,x = 2 \\ \dfrac{8\sqrt[3]{4x}-12}{x-5} & ,x > 2 \end{cases}$$

(b)

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-6x}{x-3} & ,|x| < 3 \\ x^2-3 & ,|x| \geq 3 \end{cases}$$

(c)

$$f_3(x) = \begin{cases} |x|\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right) & ,x \neq 0 \\ 1 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

(d)

$$f_4(x) = \begin{cases} x+1 & ,0 < x < 1 \\ 2+x^2 & ,1 \leq x < 3 \\ 1+x & ,3 \leq x < 5 \end{cases}$$

7. Encuentre un valor para p, de modo que la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x^2-2}-\sqrt{x^2+7}} & \text{si} \quad x < 3 \\ 4p-1 & \text{si} \quad x = 3 \\ \dfrac{4x^2-12x}{x^2+3x-18} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$.

8. Determinar los valores de a y b de modo que la función

$$h(x) = \begin{cases} ax & ,1 \leq x < 2 \\ ax^2+bx+1 & ,2 \leq x \leq 5 \\ b & ,5 < x \leq 6 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

9. Si $|f(x)| \leq M$ para todo x en un intervalo que contiene a cero, demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

10. Si f es una función real tal que $|f(x) - 1| \leq x^2$ con $x \neq 0$, calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$.

11. Utilizar el teorema del sandwich o acotamiento para mostrar que el limite de las siguientes funciones es igual a cero.

    (a) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(2/x)$

    (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{6x^2+5}$

    (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5/2}{|x|} \left|\sin\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\right|$

    (d) $\lim_{x\to 1} (x-1)\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

12. Calcular los siguientes límites trigonométricos:

    (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin(3x)}{5x}$

    (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

    (c) $\lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

    (d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

    (e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(6x)}$

    (f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

    (g) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(5x)}$

    (h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\tan(x)$

    (i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

    (j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$

    (k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1}{4}x}{x}$

    (l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x)}{x(3x-\pi)}$

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1} & , x < -1 \\ \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & , x \geq -1 \end{cases}$$

    (a) Analizar la existencia de $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to -3} f(x)$.

    (b) ¿Es f una función continua en todo $\mathbb{R}$?

14. Decida si las siguientes ecuaciones poseen o no soluciones dentro del intervalo indicado. Justifique.

    (a) $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + e^x = 0$, con $x \in [-1, 0]$ (b) $x^4 + x = 1$, con $x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

    Indicación: en (b) puede ser útil recordar el método de la bisección.

15. Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x - 8 & , x \leq -2 \\ x^3 - \sqrt{x+2} & , x > -2 \end{cases}$$

    Justificando adecuadamente, probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene a lo menos una solución en el intervalo $[-3, 2]$.

16. Sean a y b dos constantes reales y $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{x+1} & , x < -1 \\ ax^2 + b & , -1 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{4x^2 - 40x + 100}{x^2 + 3x - 10} & , x > 5 \end{cases}$$

Determine, si es posible, los valores de a y b de modo que f sea continua en todo su dominio.

17. Determine, en caso que existan, todas las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas del gráfico de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 3}{x+2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$ (c) $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| - 1}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1}}$ (e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (f) $f(x) = \dfrac{1 - x^4}{x^3 - 1}$

18. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{6x^2 - 1}{2x + a}$, siento $a \in \mathbb{R}$. Determine, si existe, el valor de a de modo que:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (3x + 2)] = 0$$

19. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & , \quad -5 < x < 0 \\ \dfrac{5x + x^2}{4x + 4} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f en todo su dominio.

(b) Encuentre todas las asíntotas del gráfico de f.