2 Sistema lineales de primer orden

Desde la observación anterior, podemos enfocarnos primero en el análisis de sistemas de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{GS}$$

Cuando las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *en el sistema lineal* (GS) *son lineales en las variables dependientes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, obtenemos la forma normal de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden:*

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{cases} \tag{4}$$

Definición

Nos referimos a un sistema de la forma (4) *como un* **sistema lineal***, y puede escrbirse como*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t),$$

donde $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{A}$ *es una matriz cuadrada de orden* $n \times n$ *con coeficientes* $\mathbf{A}_{ij}(t) = a_{ij}(t)$*, y* $\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) & \ldots & g_n(t) \end{pmatrix}^T$.

Supondremos que los coeficientes $a_{ij}(t)$*, así como las funciones* $g_i(t)$*, son continuas en un intervalo común* I*, para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Cuando $g_i(t) = 0$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$*, el sistema lineal* (4) *se dice que es* **homogéneo***; en caso contrario, se dice que es* **no homogéneo**.

Las soluciones de un sistema de ecuación diferencial se puede ver como una parametrización de una curva. Por ejemplo, en un sistema de dos ecuaciones, tendremos trayectorias de un sistema en el plano XY *—también llamada imagen del plano de fase.*

Cuando los coeficientes de un sistema homogéneo (GS) *son constantes, decimos que tenemos una ecuación (o sistema) autónoma(o), y para estos podemos bosquejar fácilmente la forma de la curva solución.*

Definición

Un vector solución en un intervalo I *es cualquier matriz columna de la forma*

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyas entradas son funciones diferenciables que satisfacen el sistema (GS) *en dicho intervalo.*

Ejemplo 2.1. *Resolvamos el siguiente PVI*

$$\begin{cases} x' &= -y, \\ y' &= x - y, \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = -1. \end{cases}$$

Este sistema es un sistema homogéneo de primer orden que podemos escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Note que, si derivamos la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} x'' &= -y' \\ &= -(x - y). \end{aligned}$$

Sustituyendo $-y = x'$ se obtiene la EDO lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$x'' + x' + x = 0.$$

Sabemos ya que las soluciones tienen forma exponencial $x(t) = e^{\lambda t}$, donde λ es raíz del polinomio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Este polinomio tiene raíces complejas conjugadas $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, lo que nos da la solución general:

$$x(t) = e^{-t/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}t/2)).$$

Usando la condición inicial $x(0) = 0$, tenemos $C_1 = 0$ y así:

$$x(t) = C_2\, e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2).$$

Volviendo a la primera ecuación del sistema ($x' = -y$) podemos resolver para $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= -x'(t) \\ &= -C_2 \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) \right). \end{aligned}$$

Dado que $y(0) = -1$, tenemos que $C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y así

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) - e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2). \end{aligned}$$

Se puede verificar que el vector $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) - e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix}$ es solución del sistema homogéneo

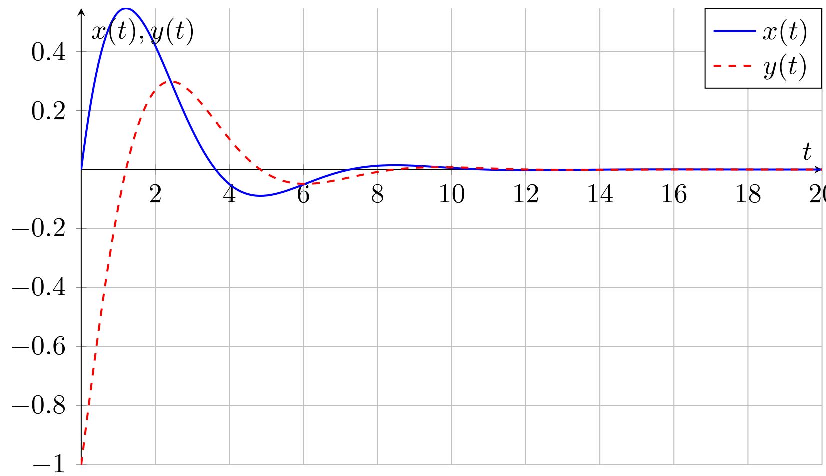
$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

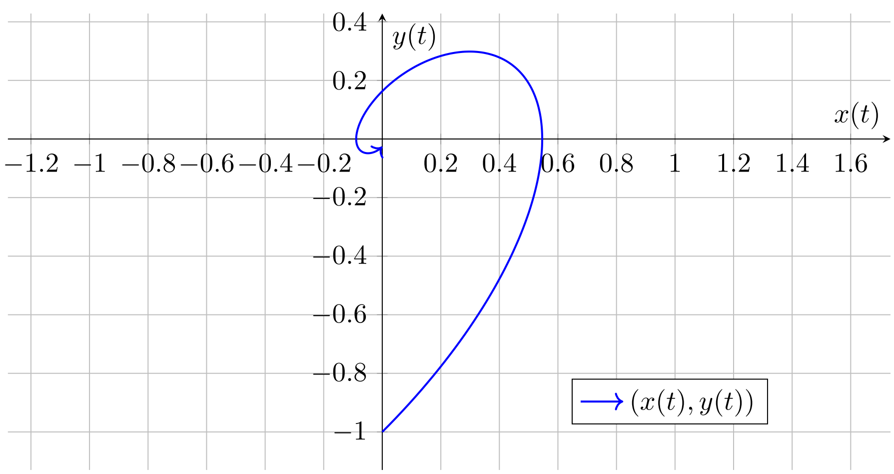
En efecto, derivando el vector $\mathbf{X}(t)$ tenemos que:

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) + e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) + e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t),$$

i.e. se satisface la igualdad y $\mathbf{X}(t)$ *es un vector solución que además satisface* $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Una vez tenemos la solución, podemos notar que la curva describe un segmento de una espiral que tiende al origen a medida que t *tiende al* $+\infty$.





Viendo el signo de las derivadas (x', y') *sobre regiones del plano* XY *podemos saber si la curva alrededor de la región es creciente/decreciente, y contruir más precisamente el campo de direcciones*

$$\begin{cases} x' &= -y, \\ y' &= x - y, \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = -1. \end{cases}$$