Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Valores propios complejos

Carlos M. Mora

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t)\,. \tag{1}$$

Suponga que las funciones $a_{i,j}(t)$, con $i, j = 1, \ldots, d$, son continuas en un intervalo $]a, b[$. Supongamos que $\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)$ son funciones linealmente independientes que satisfacen la EDO (1). Entonces, cualquier solución de (1) se puede escribir como

$$\overrightarrow{Z}(t) = c_1\,\overrightarrow{Z}_1(t) + c_2\,\overrightarrow{Z}_2(t) \cdots + c_d\,\overrightarrow{Z}_d(t)\,,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$.

$\left\{\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)\right\}$ es llamado conjunto fundamental de soluciones de (1).

Ejemplo

$$\begin{cases} X'(t) = 6\,X(t) - Y(t) \\ Y'(t) = 5\,X(t) + 2\,Y(t) \end{cases}$$

con $X(t)\,,\, Y(t) \in \mathbb{R}$

La funciones

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overrightarrow{Z}_2(t) = e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

son soluciones, linealmente independientes, de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix}6 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}\overrightarrow{Z}(t)\,.$$

Solución general

$$\overrightarrow{Z}(t) = c\,e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + k\,e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

con $c, k \in \mathbb{R}$.

Resultado general

Considere

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\overrightarrow{Z}(t) \tag{2}$$

con $\overrightarrow{Z}(t) \in \mathbb{R}^d$ y $A \in \mathbb{R}^{d,d}$.
Asuma que

$$A\left(\overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}\right) = (\alpha + i\beta)\left(\overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}\right)$$

con $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^d$.

$$\overrightarrow{Z}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\, sen(\beta t))\left(\overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}\right)$$

Entonces (2) es resuelto por

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\overrightarrow{u} - sen(\beta t)\overrightarrow{v}\right)$$

$$\overrightarrow{Z}_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\overrightarrow{v} + sen(\beta t)\overrightarrow{u}\right),$$

que son funciones linealmente independientes.

Resultado general

Considere $A \in \mathbb{R}^{d,d}$. Su polinomio característico es $\mathfrak{p}(\lambda) = |A - \lambda I|$.
Suponga las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathfrak{p}$ tienen multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.
Además, asuma que para cada $k = 1, \ldots, n$ el sistema

$$A \overrightarrow{v} = \lambda_k \overrightarrow{v}$$

tiene m_k soluciones linealmente independientes $\overrightarrow{v}_{k,1}, \ldots, \overrightarrow{v}_{k,m_k}$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{Z}(t) = A \overrightarrow{Z}(t)$$

está formado por las funciones:

- Cuando $\lambda_k \in \mathbb{R}$,

  $$e^{\lambda_k t} \overrightarrow{v}_{k,j}$$

  para $j = 1, \ldots, m_k$.
- Cuando $\lambda_k = \alpha \pm i \beta$ con $\beta \neq 0$,

  $$e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{u}_j - sen(\beta t) \mathbf{v}_j)$$

  y

  $$e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{v}_j + sen(\beta t) \mathbf{u}_j)$$

  para $j = 1, \ldots, m_k$. Aquí, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{v}_{k,j} = \mathbf{u}_j + i \mathbf{v}_j$.

Obtenga la solución general de

$$\begin{cases} X'(t) = 5\,X(t) + 5\,Y(t) + 2\,Z(t) \\ Y'(t) = -6\,X(t) - 6\,Y(t) - 5\,Z(t) \\ Z'(t) = 6\,X(t) + 6\,Y(t) + 5\,Z(t) \end{cases}$$

con $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}$

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

Elegimos $\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$$

Paso 1: Buscar los autovalores de A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A\,\overrightarrow{v} = {\color{red}\lambda}\,\overrightarrow{v}$$

$$\mathfrak{p}\,(\lambda) = |A - \lambda\, I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & 2 \\ -6 & -6-\lambda & -5 \\ 6 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & 2 \\ -6 & -6-\lambda & -5 \\ 6 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & -5 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -6 & -6-\lambda \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 13\,\lambda \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) \end{aligned}$$

Valores propios:

$\lambda_1 = 0$ con multiplicidad 1

$\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$ con multiplicidad 1

Paso 2: Buscar autovectores de A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A \vec{v} = \lambda \vec{v}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & m_1 = 1 \\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i & m_{2,3} = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\, v_1 + 5\, v_2 + 2\, v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{Z}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Buscar autovectores de A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & m_1 = 1 \\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i & m_{2,3} = 1 \end{cases}$$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$

$$(A - \lambda_2\, I)\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3i & 5 & 2 \\ -6 & -8-3i & -5 \\ 6 & 6 & 3-3i \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3i & 5 & 2 \\ -6 & -8-3i & -5 \\ 0 & -2-3i & -2-3i \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-3i & 5 & 2 \\ 0 & -1+i & -1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3i & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-3i)\,v_1 + 5\,v_2 + 2\,v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3-3i)\,v_1 + 5\,v_2 + 2\,v_3 = 0 \Rightarrow (3-3i)\,v_1 + 3\,v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{-1}{1-i}\,v_2 = -\frac{1+i}{(1-i^2)}\,v_2 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\,v_2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{Z}_2(t) = e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - sen(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{Z}_3(t) = e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + sen(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Solución general

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - sen(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$+ c_3\, e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + sen(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Observación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$