Teoría de conjuntos

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

28 de abril de 2020

Conjuntos. Conjuntos universo y vacío.

Un conjunto es una colección de elementos.

Los conjuntos pueden describirse:

- por extensión: se listan todos los elementos del conjunto,
- por comprensión: se escriben las propiedades que cumplen los elementos del conjunto.

El conjunto A de los números naturales entre 1 y 5 puede describirse

- por extensión:
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
- por comprensión:
$$A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, (x \geq 1) \wedge (x \leq 5)\}.$$

Al conjunto formado por todos los elementos en una situación dada lo denotaremos por $\mathcal{U}$ y se denomina conjunto universo.
El conjunto que no tiene elementos es el conjunto vacío y se denota $\emptyset$.

Pertenencia y no pertenencia a un conjunto

Sea $x \in \mathcal{U}$

- si x pertenece a un cierto conjunto A, se escribe $x \in A$,
- si x no pertenece al conjunto A, se escribe $x \notin A$.

Ejemplos

- Con $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se cumple que $1 \in A$ y $10 \notin A$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + 5x + 6 = 0\right\}$ se cumple $-2 \in B$ y $0 \notin B$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $C = \mathbb{Q}$ se cumple $\frac{1}{2} \in C$ y $\sqrt{2} \notin C$.

Dados dos conjuntos A y B se dice que A es subconjunto de B y se denota $A \subseteq B$ si y sólo si cualquier $x \in A$ satisface $x \in B$, es decir,

$$A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathcal{U} \;:\; x \in A \to x \in B.$$

Ejemplos

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,
- $\{-2, -3\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

Los conjuntos A y B son iguales ($A = B$) si y sólo si contienen los mismos elementos, es decir,

$$\begin{aligned} A = B \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathcal{U} \;:\; (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A), \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathcal{U} \;:\; x \in A \leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Por ejemplo, $\{-2, -3\} = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

Propiedades de las relaciones de inclusión e igualdad entre conjuntos

Observe que

- para cualquier conjunto A se cumple que $A \subseteq \mathcal{U}$,
- para cualquier conjunto A se cumple que $\emptyset \subseteq A$,
- cualquier par de conjuntos A y B satisface

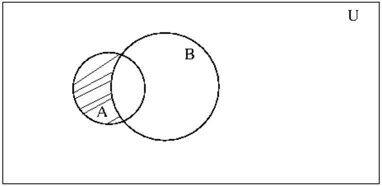
$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Diferencia entre conjuntos

Se denota $A - B$ al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que están en A, pero no están en B,

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Conjunto $A - B$



El conjunto $\mathcal{U} - A$ se denomina complemento de A y se denota A^c. Note que $\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \vee (x \in A^c)$, es decir, $A \cup A^c = \mathcal{U}$.

Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

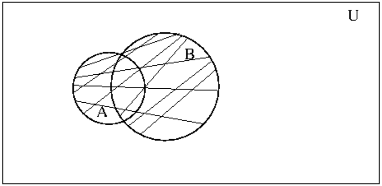
$$A - B = \{1,\, 3,\, 5,\, 7,\, 9\}, \qquad B^c = \mathbb{N} - B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es impar}\}.$$

Unión entre conjuntos

Se denota $A \cup B$ al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que están en A o están en B,

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Conjunto $A \cup B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

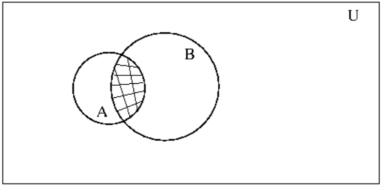
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots\}.$$

Intersección entre conjuntos

Se denota $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que están en A y están en B,

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Conjunto $A \cap B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Dos conjuntos son disjuntos si y sólo si no tienen elementos en común, es decir, si y sólo si su intersección es igual al conjunto vacío.

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $\mathcal{U}^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \mathcal{U}$,
- $(A^c)^c = A$,
- $A \cap A^c = \emptyset$,
- $A \cup A^c = \mathcal{U}$.

- $A \cup A = A$,
- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

- $A \cap A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap \mathcal{U} = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Conjunto partes de un conjunto

Dado un conjunto A, el conjunto partes de A, se denota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.
Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{1\}$ y $B = \{2, 3\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, A\}\,, \\ \mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, B\}\,, \\ \mathcal{P}(A \cup B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\,. \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B), \qquad \text{pero } \mathcal{P}(A \cup B) \not\subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ésta es una propiedad general del conjunto partes de un conjunto.
También se cumple que para cualquier par de conjuntos A y B

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Dados dos conjuntos A y B el producto cartesiano de A y B, que se denota $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(x, y) \;:\; x \in A \wedge y \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$, entonces

$$A \times B = \{(1,3), (2,3)\}, \qquad B \times A = \{(3,1), (3,2)\},$$
$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}, \qquad B \times B = \{(3,3)\}.$$

Para conjuntos cualesquiera A, B y C se cumplen las siguientes igualdades:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$,
- $A \times (B - C) = (A(A \times B) - (A \times C)$.

Dados n conjuntos no vacíos $A_1, A_2, ..., A_n$, se define el producto cartesiano entre ellos, el cual se denota $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, como el conjunto de las n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;:\; a_i \in A_i$, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, ..., a_n) : \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;:\; a_i \in A_i \}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \;:\; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$.

Cardinalidad de conjuntos

Dado un conjunto A con una cantidad finita de elementos, al número de elementos de A se le denomina cardinalidad de A y se denota $|A|$.
Por ejemplo,

$$|\{1, 2\}| = 2, \quad |\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \leq 10\}| = 10, \quad |\emptyset| = 0.$$

Si A y B tienen una cantidad finita de elementos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
|(A \cup B) \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|, \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|, \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \left(|A \cap C| + |B \cap C| - |\underbrace{A \cap C \cap B \cap C}_{=A \cap B \cap C}| \right), \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$

Familia de conjuntos

Sea I un conjunto cualquiera no vacío, que llamaremos conjunto de índices. Entonces, a la colección de conjuntos $A_i \subseteq \mathcal{U}$, denotado por

$$\{A_i\}_{i \in I} := \{A_i : \quad \in I\},$$

se le llama familia de conjuntos indexados por I.

Observaciones

- Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ puede tener elementos iguales, con lo cual no necesariamente es un conjunto.
- SI I es un conjunto finito, con $|I| = m \in \mathbb{N}$, entonces se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia finita de conjuntos. En estos casos, se suele denotar la familia por $\{A_i\}_{i=1}^{m}$.
- SI I no es conjunto finito, entonces se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia infinita de conjuntos.
- Cuando I es conjunto numerable ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, por ejemplo), se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia numerable de conjuntos. Si $I := \mathbb{N}$, se suele denotar la familia como $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \,:\, A_i \,:=\, \left\{ m \in \mathbb{N} \,: \quad m \,=\, \frac{i}{k}\,, \text{ para algún } \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Luego, los primeros elementos de esta familia son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\} \\ A_2 &= \{1,2\} \\ A_3 &= \{1,3\} \\ A_4 &= \{1,2,4\} \end{aligned}$$

Interesa:

- Si acaso es posible caracterizar cualquier conjunto A_i de manera más clara (precisa).
- Saber si existen al menos dos elementos de esta familia, con indexación distinta, que sean iguales.
- Saber si tiene sentido definir la unión (intersección) de todos los conjuntos de esta familia.
- En tal caso, ¿a qué será igual la unión de todos los conjuntos de esta familia?

Operaciones de familias de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$

Unión de una familia de conjuntos:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in \mathcal{U} \,:\, (\exists\, i \in I)(x \in A_i)\} \,.$$

Intersección de una familia de conjuntos:

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in \mathcal{U} \,:\, (\forall\, i \in I)(x \in A_i)\} \,.$$

Observaciones

- Si $I := \{1, \dots, m\}$, la unión y la intersección definidas arriba, se puede denotar por $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, respectivamente.
- SI $I := \mathbb{N}$, se suele denotar por $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, respectivamente.

Ejemplo

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \,:\, A_i \,:=\, \left\{ m \in \mathbb{N} \,: \quad m \,=\, \frac{i}{k}\,, \text{ para algún } \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determine su unión y su intersección.

Propiedades de operaciones con familias de conjuntos

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos en $\mathcal{U}$, y sea $B \subseteq \mathcal{U}$. Se verifica:

$$(1)\; B \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)\,.$$

$$(2)\; B \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)\,.$$

$$(3)\; \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c\,.$$

$$(4)\; \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c\,.$$

Observaciones

- Tener presente que las propiedades que son válidas para una cantidad finita de elementos, no necesariamente son válidas para una cantidad infinita de ellos.
- Ejemplo: Es cierto que $(\forall\, m \in \mathbb{N}) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \in \mathbb{R} \right)$, pero $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \notin \mathbb{R}$ pues diverge.

Operaciones de familias de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$

Producto cartesiano generalizado

$$\prod_{i\in I} A_i := \{(x_i)_{i\in I} : (\forall\, i \in I)(x_i \in A_i)\} .$$

Observaciones

- Cuando $I := \{1, ..., m\}$ (conjunto finito), denotamos

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m := \{(x_1, ..., x_m) : \forall\, i = 1, ..., m : x_i \in A_i\} .$$

- Si además $(\forall\, i \in \{1, ..., m\})(A_i = A)$, entonces

$$\prod_{i=1}^{m} A_i := \prod_{i=1}^{m} A := A^m := \{(x_1, ..., x_m) : (\forall\, i \in \{1, ..., m\})(x_i \in A)\} .$$

Es el caso de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^m$, por ejemplo.

Partición de conjuntos

Sea X un conjunto no vacío, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos en X, es decir, $(\forall\, i \in I)(A_i \subseteq X)$. Diremos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de X si se constata:

$$
\begin{aligned}
&(1)\, \forall\, i \in I \,:\, A_i \neq \emptyset\,,\\
&(2)\, \forall\, i, j \in I\,,\, i \neq j \,:\, A_i \cap A_j = \emptyset\,,\\
&(3)\, \bigcup_{i\in I} A_i = X\,.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

- $\{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.
- $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, donde $(\forall\, m \in \mathbb{N})(A_m := \{m\})$, define una partición de $\mathbb{N}$.

Propiedad

- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de X, entonces $(\forall\, x \in X)(\exists\,!\, i \in I)(x \in A_i)$.

Relaciones binarias

Dados dos subconjuntos arbitrarios A y B no vacíos, una **relación binaria** $\mathcal{R}$ es cualquier subconjunto de $A \times B$, es decir $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.
Cuando $A = B$, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ se llama una relación en A o sobre A.
Si $(a, b) \in \mathcal{R}$, entonces diremos que a está relacionado con b y escribiremos $a\mathcal{R}b$:

$$a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}\,.$$

Dado $\mathcal{R} \subseteq A \times B$:

$$(a)\ \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) := \{a \in A \,:\, \exists\, b \in B \,:\, a\,\mathcal{R}\,b\}\,,$$
$$(b)\ \mathrm{Rec}(\mathcal{R}) := \{b \in B \,:\, \exists\, a \in A \,:\, a\,\mathcal{R}\,b\}\,.$$

Ejemplos:

1. Sean $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 4\}$ y $\mathcal{R}$ definida por

$$a\mathcal{R}b \quad \iff \quad a + b \leq 5, \quad a \in A, b \in B.$$

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,4),(2,1),(3,1)\},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = A,\ \mathrm{Rec}(\mathcal{R}) = B.$$

2. $\mathcal{R}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \quad \iff \quad a + b \leq 1, \quad a, b > 0$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + b \leq 1\},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) =]0,1[$$

y $\mathrm{Rec}(\mathcal{R}) =]0, 1[$.

Clasificación de relaciones binarias en/sobre un conjunto A

Una relación $\mathcal{R}$ en A se llama:

1. Refleja (o reflexiva), si $\forall\, a \in A : a\mathcal{R}a$.
2. Simétrica, si $\forall\, a\,, b \in A : a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad b\mathcal{R}a$.
3. Antisimétrica, si $\forall\, a\,, b \in A : (a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}a) \quad \Rightarrow \quad a = b$.
4. Transitiva, si $\forall\, a\,, b\,, c \in A : (a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}c) \quad \Rightarrow \quad a\mathcal{R}c$.

Ejemplos: Discutir si cada una de las relaciones siguientes es refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva. Justifique.

1. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : ab \geq 0\}$ una relación en $\mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ : ab \geq 0\}$
3. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \text{ es factor de } b\}$.

Relaciones de orden

Una relación $\mathcal{R}$ en A se dice que es relación de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos:

1. $\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ en $\mathbb{R}$, siendo $\leq$ la relación "es menor o igual que".
2. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(X)$, definida por:
   $\forall\, A, B \subseteq X : \quad A\mathcal{R}B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$, o equivalentemente

$$\mathcal{R} := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}\,.$$

Conjunto o Estructura ordenada

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, se dice que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto o estructura ordenada. En este caso, se denota usualmente por $(A, \leq)$ en vez de $(A, \mathcal{R})$.
Además, $\forall\, a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ es denotado por $a \leq b$, y por $a < b$ si $a \leq b \quad \wedge \quad a \neq b$.

Conjunto o Estructura ordenada

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, se dice que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto o estructura ordenada. En este caso, se denota usualmente por $(A, \leq)$ en vez de $(A, \mathcal{R})$.
Además, $\forall\, a\,, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ es denotado por $a \leq b$, y por $a < b$ si $a \leq b \quad \wedge \quad a \neq b$.

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Se dice que $\leq$ es relación de orden de tipo:

1. Total, si $\forall\, a\,, b \in A\,:\, a \leq b \quad \vee \quad b \leq a$. Es decir, todos los elementos de A están relacionados entre sí (son comparables).
2. Parcial, si no es total, es decir $\exists\, a\,, b \in A\,:\, a \not\leq b \quad \wedge \quad b \not\leq a$.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\forall\, a\,, b \in \mathbb{N}\,:\, a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a$ es factor de b, es un conjunto ordenado parcialmente, pues $4 \not\leq 5 \quad \wedge \quad 5 \not\leq 4$.
2. $(\mathcal{P}(X), \leq)$, donde $\forall\, A\,, B \subseteq X\,:\, A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$, resulta ser un conjunto ordenado parcialmente, puesto que si $A\,, B \in \mathcal{P}(X)$ no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \not\subseteq B \quad \wedge \quad B \not\subseteq A$.
3. $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto ordenado totalmente, ya que $\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}\,:\, x \leq y \quad \vee \quad y \leq x$.

Elementos maximal, minimal, máximo, mínimo

Sera $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Entonces, se dice que

1. $a \in A$ es maximal, si $\forall\, x \in A \,:\, a \leq x \quad \Rightarrow \quad a = x$.
2. $a \in A$ es minimal, si $\forall\, x \in A \,:\, x \leq a \quad \Rightarrow \quad a = x$.
3. $a \in A$ es máximo, si $\forall\, x \in A \,:\, x \leq a$.
4. $a \in A$ es mínimo, si $\forall\, x \in A \,:\, a \leq x$.

Se observa:

- $a \in A$ es máximo, entonces $a \in A$ es maximal.
- $a \in A$ es mínimo, entonces $a \in A$ es minimal.

Ejemplos:

1. Para el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \leq)$, donde $\forall\, A\,, B \subseteq X \,:\, A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$, se tiene que $X \in \mathcal{P}(X)$ y $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ son elementos máximo y mínimo de $(\mathcal{P}(X), \leq)$, respectivamente. Por otro lado, no existen elementos maximales o minimales distintos de X y $\emptyset$.
2. En el conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$, siendo $\leq$ la relación de orden usual, sólo hay un elemento mínimo ($1 \in \mathbb{N}$), que por la observación, también es minimal.
3. Sea $A := \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Se define la relación $\forall\, a\,, b \in A \,:\, a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \ast b$. ($a \ast b$ se lee: a es factor de b) Se prueba que $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado parcial (3 y 4 son elementos de A no comparables). Además, $(A, \leq)$ no posee elemento máximo, pero 6 y 4 son elementos maximales, y 1 es mínimo.

Calculando maximal(es) de $(A, \leq)$ del ejemplo 3 anterior

$a \in A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ es maximal si

$$\forall x \in A : (a \leq x \Rightarrow a = x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : (a \neq x \Rightarrow a \not\leq x)$$

$a \in A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ NO es maximal si

$$\exists x \in A : (a \leq x \wedge a \neq x) .$$

En el contexto del ejercicio, significa que el elemento maximal a será aquel elemento de A que no sea factor / no es divisor de otro elemento de A.
Es por ello, que quedan descartados 1, 2 y 3 como candidatos a ser elemento maximal, pues

$$\begin{array}{llll} 1\,,2 \in A : & 1 \leq 2 & \wedge & 1 \neq 2 \\ 2\,,4 \in A : & 2 \leq 4 & \wedge & 2 \neq 4 \\ 3\,,6 \in A : & 3 \leq 6 & \wedge & 3 \neq 6\,. \end{array}$$

No así para 4 y 6. Ambos no tienen otro elemento mayor que ellos en A, del cual sean factor. En consecuencia, $\{4, 6\}$ es el conjunto de elementos maximales de $(A, \leq)$.

¿Tiene el conjunto $A \backslash \{1\}$, elemento minimal, considerando la misma relación de orden $\leq$? ¿mínimo?

Resultados importantes

Proposición

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Si $a \in A$ es elemento máximo (mínimo), entonces éste es único.

Resultados importantes ...

Proposición

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado finito. Entonces, existe un elemento maximal y un elemento minimal en $(A, \leq)$.

Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es de equivalencia, si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo

Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definida por

$$\forall\, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad \boldsymbol{A} \mathcal{R} \boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \boldsymbol{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ no singular } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{P}^{-1}.$$

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Se definen las clases de equivalencia a los siguientes conjuntos

$$\forall\, x \in A \,:\, [x]_{\mathcal{R}} := \{y \in A \,:\, y\mathcal{R}x\} \,.$$

Observaciones

1. Al conjunto $[x]_{\mathcal{R}}$ se le llama clase de equivalencia de $x \in A$, según la relación $\mathcal{R}$.
2. Como $\mathcal{R}$ es refleja, entonces $\forall\, x \in \mathcal{R} \,:\, x \in [x]_{\mathcal{R}}$, es decir $\forall\, x \in A \,:\, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
3. Sea $[x]_{\mathcal{R}}$ una clase de equivalencia, a x se le suele llamar representante de dicha clase.
4. Al conjunto de las clases de equivalencia se le denomina espacio cuociente, y es denotado por $A/\mathcal{R}$.
$$A/\mathcal{R} := \{[x]_{\mathcal{R}} \,:\, x \in A\} \,.$$
5. Con frecuencia, la relación de equivalencia se denota por el símbolo $\sim$.

Proposición (CE1)

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Entonces se cumple $\forall\, a\,,b \in A$:

$$\begin{aligned}
&(a)\ [a]_\sim \ = \ [b]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b\,,\\
&(b)\ [a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim \ = \ [b]_\sim
\end{aligned}$$

Proposición (CE2)

$A/\sim$ (sin clases repetidas) es una partición de A.

Proposición (CE3)

Sea $\{A_j\}_{j\in I}$ una partición cualquiera de A. Entonces, existe una relación de equivalencia $\sim$ en A, tal que $A/\sim = \{A_j\}_{j\in I}$.

Demostración de Proposición CE2

Tenemos $S := \{[x]_\sim : x \in A\}$. Hay que notar, en virtud a la Proposición CE1, que si $x, y \in A$, tales que $y \sim x$, entonces $[y]_\sim = [x]_\sim$. Esto nos sugiere que pueden haber clases de equivalencias repetidas en la familia de conjuntos S. Por ello, procedemos a contar cada clase de equivalencia de A respecto de $\sim$ una sola vez, lo cual conducirá a una segunda familia de conjuntos $T := \{[x_j]_\sim : j \in I\}$, donde I es un conjunto de índices (puede ser finito o no finito), tal que $\forall\, j \in I : x_j \in A$, con la propiedad:
$\forall\, i, j \in I : i \neq j : [x_i]_\sim \neq [x_j]_\sim \Leftrightarrow \forall\, i, j \in I : i \neq j : [x_i]_\sim \cap [x_j]_\sim = \emptyset$.
Luego, resta probar que considerando el espacio cuociente $A/\sim$ sin clases repetidas, es decir, $A/\sim := T$, resulta ser una partición de A.

1. Por definición de clase de equivalencia, se tiene que $\forall\, j \in I : [x_j]_\sim \neq \emptyset$, pues $x_j \in [x_j]_\sim$ siempre.
2. Sean $i, j \in I$, con $i \neq j$. Por la construcción de T, resulta que $[x_i]_\sim \cap [x_j]_\sim = \emptyset$, y así se infiere que los elementos de la familia T son disjuntos dos a dos.
3. Sea $a \in A$. Entonces $a \in [a]_\sim$, es decir $\exists\, j_0 \in I : [a] = [x_{j_0}]_\sim$, lo cual implica que $a \in [x_{j_0}]_\sim \subseteq \bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim$. Así queda establecido que $A \subseteq \bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim$.
   Dado que $\forall\, j \in I : [x_j]_\sim \subseteq A$, se desprende que $\bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim \subseteq A$. Finalmente, se concluye que $\bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim = A$, y termina la demostración.

Demostración de Proposición CE3

La prueba es constructiva. Comenzaremos, definiendo la siguiente relación $\sim$ en A:

$$\forall\, a\,, b \in A \;:\; a \sim b \Leftrightarrow \exists\, i \in I \;:\; \{a, b\} \subseteq A_i\,.$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.
$\sim$ es refleja: Sea $a \in A$. Como $\{A_j\}_{j\in I}$ es una partición, $\exists!\, j_0 \in I \;:\; a \in A_{j_0} \Rightarrow \{a\} \subseteq A_{j_0}$. De esta forma, se tiene que $\exists\, j_0 \in I \;:\; \{a, a\} = \{a\} \subseteq A_{j_0}$, lo cual permite concluir que $\forall\, a \in A \;:\; a \sim a$, es decir $\sim$ es refleja.
$\sim$ es simétrica: Sean $a\,, b \in A$, con $a \neq b$.

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists\, i \in I \;:\; \{a, b\} \subseteq A_i \Leftrightarrow \exists\, i \in I \;:\; \{b, a\} \subseteq A_i \Leftrightarrow b \sim a\,.$$

Y así, se deduce que $\sim$ es simétrica.
$\sim$ es transitiva: Sean $a\,, b\,, c \in A$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Entonces,

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists\, j_1 \in I \;:\; \{a, b\} \subseteq A_{j_1}\,,$$
$$b \sim c \Leftrightarrow \exists\, j_2 \in I \;:\; \{b, c\} \subseteq A_{j_2}\,.$$

Se tiene así que $b \in A_{j_1} \cap A_{j_2}$, pero $A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$, por ser $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A. Para que no haya contradicción, la única posibilidad es que $j_1 = j_2$. Así, tenemos que $\exists\, j_1 \in I \;:\; \{a, c\} \subseteq A_{j_1} = A_{j_2} \Leftrightarrow a \sim c$, con lo que se infiere que $\sim$ es transitiva.
CONCLUSIÓN 1: $\sim$ ES RELACIÓN DE EQUIVALENCIA EN A.

Veamos ahora que $A/\sim = \{A_i\}_{i\in I}$:
Sea $a \in A$. Siendo $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A, $\exists!\, j_0 \in I \,:\, a \in A_{j_0}$. Probemos que $A_{j_0} = [a]_\sim$.
$\subseteq$: Sea $b \in A_{j_0}$. Como $a \in A_{j_0}$, se tiene que $\{b, a\} \subseteq A_{j_0}$, lo cual implica que $b \sim a$, es decir $b \in [a]_\sim$. Así se deduce que $A_{j_0} \subseteq [a]_\sim$
$\supseteq$: Sea $b \in [a]_\sim$. Esto significa que $b \sim a$, y siendo que $a \in A_{j_0}$, se infiere que $\{b, a\} \subseteq A_{j_0}$ (¿por qué?). De esta forma, se tiene $b \in A_{j_0}$, con lo cual $[a]_\sim \subseteq A_{j_0}$.
Conclusión 2: $\forall\, a \in A \,:\, \exists\, j \in I \,:\, A_j = [a]_\sim$
Ahora, si denotamos por $a_j \in A$, un representante de A_j, con $j \in I$, se tendrá $\forall\, j \in I \,:\, A_j = [a_j]_\sim$, y así se concluye que $A/\sim := \{[a_j]_\sim \,:\, j \in I\} = \{A_j\}_{j\in I}$.

Ejemplo 1: Relación de congruencia módulo 2

Sea $\sim$ una relación en $\mathbb{Z}$ definida por

$$\begin{aligned} \forall\, x\,, y \in \mathbb{Z} : x \sim y &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = 2\,k + y \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = 2\,k\,. \end{aligned}$$

Probar que $\sim$ es relación de equivalencia, y determinar $\mathbb{Z}/\sim$.

Ejemplo 2:

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, A^m = I_n$. Se define la relación $\mathcal{R}_A$ en $\mathbb{R}^n$ por

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}^n \,:\, x\,\mathcal{R}_A\, y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, A^k \cdot x = y\,.$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}_A$ es una relación de equivalencia (en $\mathbb{R}^n$).

b) Determine, $\forall\,(a,b) \in \{0,1\}^2 \,:\, [(a,b)^{\mathtt{t}}]_{\mathcal{R}_A}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Considerando ahora $\mathbb{R}^2_{\mathtt{bin}} := \{x := (x_1, x_2)^{\mathtt{t}} \,:\, x_1\,, x_2 \in \{0,1\}\}$, pruebe que $\mathcal{R}_A$ sigue siendo relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2_{\mathtt{bin}}$, siendo la matriz A la misma dada en b). Luego, determine una partición de $\mathbb{R}^2_{\mathtt{bin}}$, inducida por $\mathcal{R}_A$.