Ecuaciones Diferenciales MAT 525223

Pauta Evaluación No 1. (05.05.14-13:15hrs.)

P1 Resolver solo dos de las tres ecuaciones diferenciales del primer orden.

1. $ydx = (y - xy^2)dy$
2. $\left(x^2 + \frac{2y}{x}\right) dx = (3 - \ln(x^2))dy$
3. $xydy = (y^2 - x^2)dx$

Pauta P1

1. La función nula, $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ es solución. Si $x = x(y)$, entonces resolviendo de la forma diferencial de la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} + xy = 1 \Longleftrightarrow x(y) = e^{-x^2/2} \int_{x_0}^{x} e^{s^2/2} dc + ce^{-\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right)}$$

c constante arbitraria y para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nota: Este tipo de problema fue discutido en clase. [1.0 puntos]

2. Para $x \neq 0$ se definen $M(x,y) = x^2 + \frac{2y}{x}$ y $N(x,y) = \ln(x^2) - 3$ las cuales resultan ser de clase C^1 a condición que $x \neq 0$ ($N(x,y) = 2\ln|x| - 3$). Se verifica que $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ si $x \neq 0$. Luego la ecuación es exacta y existe $F = F(x,y)$ tal que si $x \neq 0$:

$$(*) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \wedge \quad (\star) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Nx,y)$$

Enseguida integrando parcialmente con respecto a x la identidad $(*)$ se infiere

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y\ln(x^2) + g(y)$$

y derivando parcialmente con respecto a y se tiene gracias a $(\star)$ que

$$\ln(x^2) - 3 = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \ln(x^2) + g'(y)$$

elegimos $g(y) = -3y$, y la solución es definida implícitamente por

$$\frac{1}{3}x^3 + y(\ln(x^2) - 3) = c$$

con c constante arbitraria. [1.0 puntos]

3. La ecuación es de coeficientes homogéneos. Realizamos la sustitución $y(x) = xv(x)$, y en tal caso $dy = vdx + xdv$ y en consecuencia

$$x^2 v(vdx + xdv) = x^2(v^2 - 1)dx \Longrightarrow xvdx = -dx.$$

Luego, si $x \neq 0$ se tiene que $d(v^2 + \ln(x^2)) = 0$ y podemos inferir que la solución es definida implícitamente por

$$y^2 + x^2\ln(x^2) = cx^2$$

donde c es una constante arbitraria. [1.0 puntos]

P2 Determinar cuales de los siguientes PVI tienen solución no constantes

1. $y' = \sqrt{y} - y$
   $y(0) = 1$
2. $y' = \sqrt{y} - y$
   $y(0) = 0$

Encuéntrelas y decidir si ellas se interceptan.

Pauta P2

Primero observamos que las soluciones constantes son

$$y_1(x) = 1,\ x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad y_2(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

y ellas satisfacen los PVI (1) y (2), respectivamente. [0.4 puntos]

Si escribimos la ecuación como $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = \sqrt{y} - y,\ y \geq 0$ observamos que f es continua en la región $\mathcal{R}_1 =]-\infty, \infty[\times[0, \infty[$ pero $\frac{\partial f}{\partial y}$ solo es continua en la región $\mathcal{R}_2 =]-\infty, \infty[\times]0, \infty[$.

Así el Teorema de Existencia y Unicidad nos permite afirmar que $y_1(x)$ es la única solución del PVY (1), y en consecuencia ninguna curva solución del PVI (2) la puede interceptar. [0.8 puntos]

Finalmente observamos que si resolvemos la ecuación de Bernoulli, esto es:

$$y' = \sqrt{y} - y \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x/2}y^{1/2}\right) = \frac{1}{2}e^{x/2}$$

y luego integrando

$$y(x) = (1 - ce^{-x/2})^2, \quad x \geq 0$$

y por tanto $y(x) = (1 - e^{-x/2})^2, \quad x \geq 0$ satisface también el PVI (2). [0.8 puntos]

Nota: Observar que $\sqrt{y(x)} = |1 - e^{-x/2}| = 1 - e^{-x/2}$ si y solamente si $x \geq 0$.

P3 Un tanque de 100 galones está inicialmente en reposo y lleno hasta la mitad con agua pura. Se agrega agua que contiene 0,1 [lb/gal] de sal, a una velocidad de 4 [gal/min]. El contenido bien mezclado del tanque fluye hacia afuera por un tubería a una tasa de 2 [gal/min]. Cuando han transcurrido 20 [min] la valvula en la tubería de salida se acciona para que la velocidad de salida equiparé a la de entrada. Encuentre la cantidad y la concentración de sal en el estanque. [2.0 puntos]

Pauta P2

Sea $Q(t)$, la cantidad de sal en el estanque en el instante t, $C(t)$ la concentración y $V(t)$ el volumen de salmuera en el estanque. Se verifica que

(a) $V(t)$ es una función continua con derivada continua por tramos con un punto de discontinuidad en $T = 20$ minutos con $V(0) = 50$ [galones]

$$\frac{dV}{dt}(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si} \quad t > 20 \end{cases} \iff V(t) = \begin{cases} 50 + 2t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 20 \\ 90 & \text{si} \quad t \geq 20. \end{cases}$$

(b) $Q(t) = \begin{cases} Q_1(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 20 \\ Q_2(t) & \text{si} \quad 20 \leq t \end{cases}$ donde $Q_i(t)$ satisfacen los siguientes PVI:

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_1'(t) + \frac{Q_1(t)}{25+t} & = & 0{,}4, \quad 0 < t < 20 \\ Q_1(0) & = & 0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rcl} Q_2'(t) + \frac{4Q_2(t)}{90} & = & 0{,}4, \quad 20 < t. \\ Q_2(0) & = & Q_1(20) \end{array}\right|$$

Resolviendo se infiere

c

d

P4 La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de 200^oC. La temperatura del aire que le rodea es 30^oC. Después de 10 min, la temperatura de la superficie del motor es de 180^oC.

1. ¿Cuánto tiempo tomará que la temperatura de la superficie del motor baje a 40^oC?
2. Para una temperatura T^oC entre 200^oC y 30^oC determinar la función $t(T)$ que corresponde al tiempo que se necesita para que el motor se enfrié de 200^oC a T^oC.

[2.0 puntos]

Bonus (**Z**) Si $x(t)$ [ft] designa la longitud de una cadena colgante que sobresale de una plataforma en el instante $t > 0$, entonces su velocidad con que cae es $v = \frac{dx}{dt}$. Cuando se ignoran todas las fuerzas resistivas, es posible establecer que $v = v(x)$ satisface:

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x$$

Encuentre una solución explícita $v(x)$. [1.0 puntos]

FPV/fpv.
05 de Abril de 2014