Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

# Análisis Numérico II

(Código 525441)

**Certamen 1 — miércoles 3 de mayo de 2017**

**Pauta de evaluación**

**Problema 1** (15 puntos)**.**

a) Calcular una descomposición triangular $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LR}$, con búsqueda de pivote en la matriz restante, de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Indicar explícitamente las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$.

b) Resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{b} = (9, -5, 1)^{\mathrm{T}}$.

c) Sean $\boldsymbol{e} := (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E} := \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$, y $\boldsymbol{d} := \alpha \boldsymbol{e}$. Decidir si $\boldsymbol{x}_1 := (1.1, 1.9, -0.8)^{\mathrm{T}}$ es una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (i) para $\alpha = 0.1$, (ii) para $\alpha = 0.5$.

*Solución sugerida.*

a) Obtenemos la siguiente sucesión de esquemas, donde los elementos con $\boxed{\text{marco}}$ corresponden a multiplicadores:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & -4 & -5 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & \boxed{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & 3 & -\frac{13}{3} \\ 1 & \boxed{\frac{1}{6}} & \frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{53}{6} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \boxed{\frac{1}{6}} & \frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{53}{6} \\ 2 & \boxed{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & 3 & -\frac{13}{3} \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \boxed{\frac{1}{6}} & \frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{53}{6} \\ 2 & \boxed{-\frac{2}{3}} & \boxed{\frac{1}{11}} & \frac{63}{22} & \frac{-113}{22} \end{array},$$

**7 puntos**

lo que implica que

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{6}&1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{11}&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}6&2&3\\0&\frac{11}{3}&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{63}{22}\end{bmatrix}.$$

**2 puntos**

b) Aprovechando la transformacion de la columna $\boldsymbol{b}$ realizada en los esquemas obtenemos facilmente

$$\boldsymbol{x}=\left(-\frac{113}{63},\frac{22}{7},\frac{1}{63}\right)^{\mathrm{T}}\approx(-1.7937,3.1429,0.0159)^{\mathrm{T}}.$$

**3 puntos**

c) De acuerdo al criterio de Prager & Oettli, calculamos

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}|=\begin{pmatrix}0\\7.4\\1.3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_1|+\boldsymbol{d}=\big(4.8;4.8;4.8\big)$$

Observamos que

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}|>\alpha\big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_i|+\boldsymbol{d}\big) \tag{2}$$

para $\alpha=0.1$ y $\alpha=0.5$, es decir para ambos valores de $\alpha$, el vector $\boldsymbol{x}_1$ no es una solución aproximada compatibles (en el sentido del criterio de Prager & Oettli).

**3 puntos**

**Problema 2** (10 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A}:=\begin{bmatrix}5&-2&1\\2&4&2\\0&1&3\end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es invertible sin calcular $\det\boldsymbol{A}$.
b) Determinar una cota superior para $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})$ en una norma $\|\cdot\|$ apropiada *sin* invertir $\boldsymbol{A}$ o calcular $\det\boldsymbol{A}$.
c) Además consideramos

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\12\\5\end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}2.1\\11.8\\4.7\end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}5.1&-2.1&1.05\\2.1&3.9&2.05\\0.05&1&3.1\end{bmatrix}.$$

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sean la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Determinar una cota superior (la mejor posible) para $\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ sin calcular $\boldsymbol{x}$ o $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

*Solución sugerida.*

a) Como $|\alpha_{11}| = 5 > |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = 3$, $|\alpha_{22}| = 4 = |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}|$ y $|\alpha_{33}| = 3 > |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| = 1$ y además hay sólo una entrada nula (lo que evidencia que el grafo dirigido $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ es conexo), observamos que $\boldsymbol{A}$ es irreduciblemente diagonal dominante y por lo tanto invertible (Teorema 4.4). **2 puntos**

b) Podemos escribir $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})$, donde

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_\infty = 1, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 = \frac{11}{15} = 0.7\bar{3} < 1.$$

Notar que esto implica que $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}$ es invertible (respuesta alternativa a la parte (a)) Como

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 7, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 = \frac{1}{3},$$

$$\|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1} = \frac{1}{1 - \frac{11}{15}} = \frac{15}{4} = 3.75,$$

donde utilizamos el Teorema 3.7, obtenemos

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 \|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\|_1$$
$$\leq 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{35}{4} = 8.75.$$

**4 puntos**

c) Aquí obtenemos

$$\|\boldsymbol{b}\|_1 = 19, \quad \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1 = 0.6, \quad \|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \right\|_1 = 0.25$$

y por lo tanto de acuerdo al Teorema 3.8

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \leq \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) \left( \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1} \right) \frac{1}{1 - \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) \dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1}}$$

$$\leq 8.75 \cdot \left( \frac{0.6}{19} + \frac{0.25}{7} \right) \frac{1}{1 - 8.75 \cdot \dfrac{0.25}{7}} = 0.8565.$$

**4 puntos**

**Problema 3** (10 puntos)**.**

a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$. Demostrar o refutar: $\boldsymbol{AA}^*$ es singular.

b) Calcular la descomposición en valores singulares

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^*, \quad \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \text{ unitarias},$$

para

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

c) Calcular la pseudo-inversa de Moore-Penrose $\boldsymbol{A}^+$ de $\boldsymbol{A}$.

*Solución sugerida.*

a) La afirmación es correcta. Sea $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$, y sean $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ las columnas de $\boldsymbol{A}$. Entonces la matriz $\boldsymbol{AA}^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$ está dada por

$$\boldsymbol{AA}^* = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{1,i}\boldsymbol{a}_i \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{2,i}\boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{m,i}\boldsymbol{a}_i\right]$$

Como cada una de las $m$ columnas de $\boldsymbol{AA}^*$ es una combinación lineal de los $n < m$ vectores $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, las columnas de $\boldsymbol{AA}^*$ son linealmente dependientes, por lo tanto $\boldsymbol{AA}^*$ es singular. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

b) Calculamos

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}.$$

El polinomio característico $p(\lambda) = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4$ posee los ceros $\lambda_1 = 7 = \sigma_1^2$, $\lambda_2 = 2 = \sigma_2^2$. Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},$$

luego la matriz $\boldsymbol{V}$ viene dada por

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Para calcular las primeras dos columnas $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ de $\boldsymbol{U}$ usamos que

$$\boldsymbol{AV} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\\ 5 & 0\end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix}\sigma_1\boldsymbol{u}_1 & \sigma_2\boldsymbol{u}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{7}\boldsymbol{u}_1 & \sqrt{2}\boldsymbol{u}_2\end{bmatrix},$$

lo que implica

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$$

Para determinar la tercera columna de $\boldsymbol{U}$ conviene calcular

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

o aproximadamente

$$\boldsymbol{U} \approx \begin{bmatrix} 0.5071 & -0.3162 & -0.8018 \\ 0.1690 & 0.9487 & -0.2673 \\ 0.8452 & 0 & 0.5345 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx \begin{bmatrix} 2.6458 & 0 \\ 0 & 1.4142 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} \approx \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 \\ -0.4472 & 0.8944 \end{bmatrix}.$$

**4 puntos**

c) A partir de una decomposición en valores singulares dada, podemos calcular la pseudo-inversa de Moore-Penrose como

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^+ & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^*, \quad \boldsymbol{\Sigma}^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+), \quad \sigma_i^+ := \begin{cases} 1/\sigma_i & \text{si } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Con

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^+ & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

y las matrices $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ definidas arriba obtenemos

$$\boldsymbol{A}^+ = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 8 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0714 & 0.3571 & 0.2857 \\ -0.2857 & 0.5714 & -0.1429 \end{bmatrix}.$$

**3 puntos**

**Problema 4** (15 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que el método de Jacobi converge a la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y vectores iniciales $\boldsymbol{x}_{i,0} \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios. Aviso: utilizar que si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{D}$ es la diagonal de $\boldsymbol{A}$, entonces este método está dado por la fórmula de iteración

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{Bx}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}).$$

Acotar $r_\sigma(\boldsymbol{B})$.

b) Utilizando el vector inicial $\boldsymbol{x}_{i,0} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, calcular una nueva aproximación de la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = (3,4,5)^{\mathrm{T}}$, utilizando los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, y SOR con $\omega = 1.5$.

c) Determinar la matriz $\boldsymbol{L}$ triangular inferior de la descomposición de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$. Utilizando la descomposición de Cholesky determinar la solución exacta de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Indicar todos los pasos intermedios.

*Solución sugerida.*

a) Como $\boldsymbol{A}$ es estrictamente diagonal dominante, el método de Jacobi converge. Para

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui obtenemos las normas

$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{3}{4}, \quad \|\boldsymbol{B}\|_1 = \max\left\{\frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{9}{20}\right\} = \frac{5}{6}.$$

Como $r_\sigma(\boldsymbol{B}) \leq \min\{\|\boldsymbol{B}\|_\infty, \|\boldsymbol{B}\|_1\}$, concluimos que $r_\sigma(\boldsymbol{B}) \leq 3/4$. **3 puntos**

b) A partir de $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ el método de Jacobi

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

o en componentes (donde $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{x}_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{n,k})^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+1} = {} & \xi_{i,k} + \frac{1}{\alpha_{ii}} \left( -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_{j,k} + \beta_i \right), \\ & i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

produce los vectores (se informan algunos para ilustrar el método)

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.8 \\ 1.\bar{6} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.7\bar{3} \\ 0.7\bar{6} \\ 1.15 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0.8458 \\ 0.8633 \\ 1.1667 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0.8900 \\ 0.9050 \\ 1.0969 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Para el método de Gauss-Seidel,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

o en componentes (donde $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{x}_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{n,k})^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+1} =& \xi_{i,k} + \frac{1}{\alpha_{ii}} \left( -\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\xi_{j,k+1} - \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\xi_{j,k} + \beta_i \right), \\ & i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

obtenemos los vectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.1 \\ 1.05 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 1.0375 \\ 1.0050 \\ 0.9858 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 1.0060 \\ 1.0053 \\ 0.9962 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 1.0036 \\ 1.0022 \\ 0.9981 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Para el método SOR, descrito por

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\big((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}\big)\boldsymbol{x}_k + \omega(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

o en componentes

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+1} =& \xi_{i,k} + \frac{\omega}{\alpha_{ii}} \left( -\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\xi_{j,k+1} - \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\xi_{j,k} + \beta_i \right), \\ & i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

obtenemos los vectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 1.875 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 1.5938 \\ 0.9188 \\ 0.7437 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 0.7383 \\ 0.9605 \\ 1.2787 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0.9967 \\ 0.9341 \\ 0.8952 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

c) Suponiendo que $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, obtenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},$$

lo que nos permite calcular sucesivamente

$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2;$

$l_{11}l_{21} = -2 \Rightarrow l_{21} = \dfrac{-2}{l_{11}} = -1;$

$l_{11}l_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \dfrac{1}{l_{11}} = \dfrac{1}{2};$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{5 - l_{21}^2} = 2;$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = \frac{1 - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \frac{1-(-1)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4};$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{3 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4} \approx 1.4790,$$

es decir

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{35}}{4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1.4790 \end{bmatrix}.$$

**4 puntos**

Para resolver $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se resuelve primero el sistema $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, lo cual entrega $\boldsymbol{y} = (1.5, 2.75, 1.4790)^{\mathrm{T}}$; luego resolvemos $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ obteniendo $\boldsymbol{x} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

**2 puntos**

**Problema 5** (10 puntos)**.** Resolver el problema de aproximación

$$\sum_{i=1}^{m}\bigl(y_i - (\alpha_0^*\varphi_0(t_i) + \alpha_1^*\varphi_1(t_i) + \alpha_2^*\varphi_2 t_i)\bigr)^2 = \min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2}\sum_{i=1}^{m}\bigl(y_i - (\alpha_0\varphi_0(t_i) + \alpha_1\varphi_1(t_i) + \alpha_2\varphi_2 t_i)\bigr)^2$$

para los datos

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | 2 | -1 | 1 | 3 |

para $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$, transformando la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.

*Solución sugerida.* Se esta buscando la solución $\boldsymbol{x}^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^{\mathrm{T}}$ del problema

$$\|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3}\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2^2,$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**1 punto**

Aquí calculamos sucesivamente

(1)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\alpha_{11}^{(1)}\right| = 1, \quad \left\|\boldsymbol{a}_2^{(1)}\right\|_2 = 2, \quad \beta = \frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2^{(2)} = \boldsymbol{a}_2^{(1)} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 0 \cdot \hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(1)} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

(2)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \left\|\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)}\right\| = \sqrt{5}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}(0+\sqrt{5})} = \frac{1}{5},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_3^{(3)} &= \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)} - \frac{1}{5}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}+5\right)\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \dfrac{4}{15}\sqrt{5} - \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)} - \frac{1}{5}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

(3)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15}\sqrt{5}-\frac{1}{3} \\ \frac{8}{15}\sqrt{5}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)}\|_2 = 2, \quad \beta = \frac{1}{\frac{20}{3}-\frac{8}{15}\sqrt{5}},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}+\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{3}+\frac{8}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)} - \frac{1}{\frac{20}{3}-\frac{8}{15}\sqrt{5}}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

De acuerdo a la información generada, el vector $\boldsymbol{x}^*$ es la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

con la solución

$$\alpha_2^* = \frac{5}{4}, \quad \alpha_1^* = \frac{1}{2} - \alpha_2^* = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_0^* = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \alpha_1^* - 3\alpha_2^*\right) = -\frac{1}{4}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$