



PRÁCTICA 3: REGLA DE LA CADENA Y FUNCIÓN IMPLÍCITA CÁLCULO III (525221)

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clases \mathcal{C}^2 que verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}(r) = 0 \quad , r \neq 0$$

Pruebe que si $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, entonces $\Delta f = 0$.

Problema 2.

1. Escriba el primer y segundo Teorema Fundamental del Cálculo.
2. Suponga g es tal que la siguiente función está bien definida en cierto subconjunto abierto \mathcal{D}_f de \mathbb{R}^3 ,

$$f(u, v, w) = \int_u^v g(x, w) dx$$

Con ayuda de los teoremas que escribió antes, determine $\partial_u f(u, v, w)$ y $\partial_v f(u, v, w)$.

Observación: La regla de Leibnitz establece que

$$\partial_w f(u, v, w) = \int_u^v \partial_w g(x, w) dx.$$

3. Considere

$$h(t) = f(g_1(t), g_2(t), t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} g(t, x) dx.$$

Determine, con ayuda de la regla de la cadena, $h'(t)$.

Problema 3. Expresa la función

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - x^2 y + xy - 1$$

en potencias de $x + 1$ e $y - 2$ como un polinomio de tercer grado.

Problema 4. Establezca las condiciones para que el sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

defina implícitamente a u y v como funciones diferenciables de las variables x, y, z en un entorno del punto $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. Obtener las expresiones de du y dv a partir de las funciones F y G .

Problema 5. Analice si el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 1 \\ x^2 - y^2 - z^2 + 2uv = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a u y v como funciones implícitas de x, y, z en un entorno del punto $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y en caso afirmativo obtenga las derivadas parciales primeras de las funciones $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$. Obtener las expresiones de du y dv a partir de las funciones F y G .

PROBLEMAS PROPUESTOS

REGLA DE LA CADENA

Problema 6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x, y, z) = \int_{x^2+y^2}^{\sin(xyz)} \varphi(t) dt,$$

Calcule la derivada parcial con respecto a sus variables x, y, z la función f , siendo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Problema 7. Dado $n \in \mathbb{N}$ y un abierto A de \mathbb{R}^n , diremos que $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es **armónica** si

$$\Delta u(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Si $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|$ y v es tal que $u(\mathbf{x}) = v(r) = (\|\mathbf{x}\|)$, determinar una expresión equivalente para la ecuaciones $\Delta u = 0$ en términos de v , r y n . Posteriormente, resolver la ecuación diferencial ordinaria resultante y expresar la solución general de dicha ecuación en términos de la incógnita u , de \mathbf{x} y de n .

Problema 8 (Desafío). Dos objetos de masa m están unidos por un resorte. La función $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ describe la posición del primero de ellos en un tiempo t y la función $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ describe la posición del segundo. Entre ambas se cumple la siguiente relación

$$mX''(t) = k(Y - X), \quad mY''(t) = k(X - Y),$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es un valor constante que describe la fortaleza del resorte. Sea $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que al par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ hace corresponder

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2}k \|X - Y\|^2.$$

1. Suponga que $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^6$ es tal que $\forall t \in \mathbb{R} : W(t) = (X(t), Y(t))$. Demuestre que

$$mW''(t) = -\nabla \rho(W(t)).$$

2. Demuestre que la cantidad $\frac{1}{2}m \|W'(t)\|^2 + \rho(W(t))$ no cambia con t .

Problema 9. Sea $v = v(r, s) \in \mathbb{C}^2$ y considere el cambio de variables $r = x + ct$ y $s = x - ct$, donde c es una constante real. Se define la función u

$$u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$$

1. Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, en términos de las derivadas parciales de la función v

2. Pruebe que u es solución de la ecuación de onda unidimensional si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \iff -4 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} = 0$$

FUNCIÓN IMPLÍCITA

Problema 10. Compruebe si existen dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de clase \mathcal{C}^2 definidas localmente por :

$$\begin{cases} xy(u+v) + (x+y)uv = -2 \\ x+y+u+v = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} u(1,1) = 1 \\ v(1,1) = -1 \end{matrix}$$

Hallar $du(1,1)$, $dv(1,1)$, $d^2u(1,1)$ y $d^2v(1,1)$.

Problema 11. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 - x \sin(2u + 3v) = 2 \\ x^2 + z^2 - y \cos(uv) = 0 \\ xy + z - \sin(u) \cos(v) = 0 \end{cases}$$

1. Pruebe que el sistema define a las variables x, y, z como funciones de clase \mathcal{C}^2 en las variables u, v en una vecindad del punto $(u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right)$.
2. Sea $h = (h_1, h_2, h_3)$. Calcule la matriz jacobiana de h y la buena aproximación afín de h_2 en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
3. Calcule $dh_3\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y además $\frac{\partial h_3}{\partial \hat{u}}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, donde $\hat{u} = \hat{i} - 3\hat{j}$.

Problema 12. Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Considere la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) : F(x, y, z) = x^2 + y^2 + zg(x, y) - z^2$$

- (a) Determine una condición tal que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ defina implícitamente a z como una función diferenciable que depende de x e y .
- (b) Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por $w_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $w_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$, respectivamente. Asimismo, se definen las funciones $H_1, H_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$H_1(x, y, w_1) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$H_2(x, y, w_2) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Demuestre que, bajo la misma restricción anterior, las ecuaciones $H_1(x, y, w_1) = H_2(x, y, w_2) = 0$ definen a w_1 y a w_2 implícitamente como funciones diferenciables que dependen de x e y . Concluya que $z = z(x, y)$ es dos veces diferenciable.

- (c) Demuestre, derivando dos veces la ecuación $F(x, y, z) = 0$, que

$$4 + z\Delta g + 2\nabla z \cdot \nabla g - 2\|\nabla z\|^2 + (g - 2z)\Delta z = 0.$$

Problema 13 (Desafío). Sea A un abierto de \mathbb{R}^2 y M, N dos funciones de clase $\mathcal{C}^1(A)$. Considerar la EDO en la forma diferencial:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Suponiendo que la EDO es exacta, luego existe $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^2(A)$, tal que $\nabla\phi = (M, N)$. Además, suponer que $(x_0, y_0) \in A$ es tal que $N(x_0, y_0) \neq 0$. Usando el teorema de la función implícita, probar que existe una vecindad V de x_0 y una única función $y = y(x)$, de clase \mathcal{C}^1 , tal que:

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{M(x, y(x))}{N(x, y(x))}, & x \in V \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$