Conceptos Básicos de Matrices (Continuación)

M. Sepúlveda

Marzo, 2021

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema (SVD)

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Entonces existen dos matrices ortogonales* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tales que*

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\mu_i) \quad \textit{(es matriz diagonal).}$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces existen dos matrices unitarias* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tales que*

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\mu_i) \quad \textit{(es matriz diagonal).}$$

Descomposición en valores singulares (SVD) - Comentarios

1. Demostración (ver Libro de Ciarlet / Lectura en pizarra virtual)
2. Observar que el Teorema es válido para matrices rectangulares
3. Aplicación en la definición de pseudo-inversa de Moore-Penrose (ver apuntes de Bürger & Bustinza).
4. Ver ejemplos con comando $svd(\cdot)$ de Matlab.

Pseudo-inversa de Moore-Penrose

Definición

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*. La pseudo-inversa de Moore-Penrose es una matriz* $\mathbf{A}^+$ *con*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+\mathbf{A} &= (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^*, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^*, \\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la matriz $\mathbf{A}^+$ *siempre existe y es única.*

Lema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*,* $m \geqslant n$*, y*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^*$$

la descomposición en valores singulares de $\mathbf{A}$*. Entonces*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\left[\Sigma^+ \; 0\right]\mathbf{U}^*, \qquad \Sigma^+ := diag(\sigma_1^+, \ldots, \sigma_n^+), \qquad \sigma_i^+ := \begin{cases} 1/\sigma_i & \text{si } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

El cociente de Rayleigh para matrices hermitianas

Definición

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *una matriz hermitiana representando una aplicación lineal del espacio vectorial* V *(de dimensión* n*) en* $\mathbb{C}$*. El cociente de Rayleigh de* $\mathbf{A}$ *es la aplicación*

$$R_{\mathbf{A}} : V \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

definida por

$$R_{\mathbf{A}} = \frac{(Av, v)}{(v, v)} = \frac{v^* A v}{v^* v}, \qquad v \neq 0.$$

Se observa que si $\mathbf{A}$ es hermitiana entonces $R_{\mathbf{A}}$ es a valores reales. Además

$$R_{\mathbf{A}}(\alpha v) = R_{\mathbf{A}}(v) \qquad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Consideremos ahora los valores propios de esta matriz hermitiana:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

los valores propios y los vectores propios asociados $p_1, \ldots, p_n$, verificando

$$p_i^* p_j = \delta_{ij}.$$

Principio mínimo-máximo de Courant-Fischer-Weyl

Teorema (Min-Max)

Para $k = 1, \ldots, n$, se denota por V_k el subespacio de V engendrado por los vectores p_i, $i = 1, \ldots, k$, y se denota $\mathcal{V}_k$ el conjunto de todos los subespacios de dimensión k de V. Denotamos adicionalmente $V_0 = \{0\}$, $\mathcal{V}_0 = \{V_0\}$. Los valores propios admiten entonces las caracterizaciones siguientes, para $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lambda_k = R_{\mathbf{A}}(p_k) \tag{1}$$

$$\lambda_k = \max_{v \in V_k} R_{\mathbf{A}}(v) \tag{2}$$

$$\lambda_k = \min_{v \perp V_{k-1}} R_{\mathbf{A}}(v) \tag{3}$$

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{v \in W} R_{\mathbf{A}}(v) \tag{4}$$

$$\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{v \perp W} R_{\mathbf{A}}(v) \tag{5}$$

Además

$$\{R_{\mathbf{A}}(v) \mid v \in V\} = [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R} \tag{6}$$