Análisis Numérico III
Introducción al Método de Elementos Finitos
Módulo 6, Presentación 14

Raimund Bürger

14 de julio de 2022

6.3. PVFs de EDPs elípticas

El método de Ritz y elementos finitos para problemas de valores de frontera de ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Según el Teorema 4.1, ya sabemos que el problema

$$Lv = f, \quad v \in \mathcal{D}, \tag{6.26}$$

$$L^* u \equiv -(a_{11} u)_{xx} - 2(a_{12} u)_{xy} - (a_{22} u)_{yy} + (a_1 u)_x + (a_2 u)_y + au, \tag{6.27}$$

$$\mathcal{D} := \bigl\{ v \in C^0(\bar{G}) \cap C^2(G) \mid v = 0 \text{ en } \partial G \bigr\} \tag{6.28}$$

es solucionado si encontramos una función $u = u(x,y)$ tal que

$$I[u] = \min_{v \in \mathcal{D}} = \min_{v \in \mathcal{D}} \bigl\{ (v, Lv) - 2(v, f) \bigr\}, \tag{6.29}$$

donde

$$\begin{aligned} &(v, Lv) - 2(v, f) \\ &= \int_G \bigl(a_{11} v_x^2 + 2a_{12} v_x v_y + a_{22} v_y^2 + av^2 - 2vf \bigr) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

6.3. PVFs de EDPs elípticas

En el método de Ritz, $I[v]$ se minimiza aproximadamente. Este método es muy similar al método ya discutido para la solución de problemas de valores de frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias. Se elige un sub-espacio $D_M \subset D$ M-dimensional, donde

$$D = \left\{ v \in V(G) \mid v = 0 \,\text{en}\ \partial G \right\},$$

y se considera como base un sistema de funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ linealmente independientes. Cada función $v \in D_M$ es de la forma

$$v = \sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu \varphi_\mu, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{R}. \tag{6.30}$$

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Esta función v satisface

$$\begin{aligned} I[v] &= [v,v] - 2(v,f) \\ &= \left[\sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu \varphi_\mu, \sum_{\nu=1}^{M} \alpha_\nu \varphi_\nu\right] - 2\left(\sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu \varphi_\mu, f\right) \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{M} \alpha_\mu \alpha_\nu [\varphi_\mu, \varphi_\nu] - 2\sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu (\varphi_\mu, f) \\ &=: \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M). \end{aligned}$$

Tal como en el caso de EDOs, el requerimiento $I[v] \to \text{mín}$ lleva al sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M)}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{M} [\varphi_i, \varphi_j]\alpha_j - (\varphi_i, f) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \tag{6.31}$$

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Definiendo

$$\boldsymbol{S} = ([\varphi_i, \varphi_j]), \ (\varphi_i, f) = b_i, \ \boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_M)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^{\mathrm{T}},$$

podemos escribir el sistema (6.31) en la forma

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}. \tag{6.32}$$

La matriz $\boldsymbol{S}$ es simétrica y definida positiva, es decir (6.32) tiene una solución única $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*)^{\mathrm{T}}$. Tal como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, se demuestra que $\Phi(\boldsymbol{\alpha}^*) \leqslant \Phi(\boldsymbol{\alpha})$ y entonces

$$I[v^*] = \min_{v \in D_M} I[v], \quad v^*(x,y) = \sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu^* \varphi_\mu(x,y).$$

6.3. PVFs de EDPs elípticas

La selección de las funciones φ_μ, es decir, del sub-espacio D_M, es dificil; además, hay que determinar los valores de las integrales numericamente. Una parte de las dificultades puede ser evitada si subdividimos $\bar{G}$ en áreas pequeñas y usamos sólo funciones de base φ_μ donde cada una es diferente de cero sólo sobre pocos subdominios.

Subdividimos $\bar{G}$ en pequeños triángulos que forman una triangulación. Supongamos que G es un dominio acotado, abierto y convexo con una frontera ∂G continua, la cual puede ser aproximada por un trazado poligonal ∂G_h, el cual enteramente pertenece a G y cuyos vértices pertenecen a ∂G. Este trazado poligonal es el borde de un dominio poligonal G_h.

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Ahora triangulamos el dominio $\bar{G}$ en la siguiente forma, que permite representar $\bar{G}_h$ como

$$\bar{G}_h = \bigcup_{i=1}^{N} D_i,$$

con triángulos $D_1, \ldots, D_N$, donde dos triángulos o no tienen ningún punto en común, o coinciden en exactamente un lado que pertenece a ambos triángulos, o coinciden en exactamente un vértice. De este modo, se evitan los llamados nodos colgantes.

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Sea h_i la distancia máxima de dos vértices de D_i y

$$h := \max_{1 \leqslant j \leqslant N} h_j.$$

En este caso, ∂G_h y $\bar{G}_h$ dependerán de h, y obviamente, ∂G es mejor aproximado por ∂G_h cuando h es pequeño.

Los vértices de los triángulos D_i se llaman nodos, el conjunto de los nodos de llama R, el conjunto de los nodos en ∂G_h se llama ∂R. Bajo nustras hipótesis, ∂G_h puede ser contruido de tal forma que los nodos en ∂G_h también pertenece a ∂G, es decir, exigimos que $\partial R \subset \partial G$. En general, una modificación del parámetro h implicará un nuevo borde ∂G_h.

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Supongamos que R y ∂R contienen M y $\tilde{M}$ nodos, respectivamente, los que enumeramos en un cierto orden; sean (x_j, y_j), $j = 1, \dots, M$ y $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$, $k = 1, \dots, \tilde{M}$ estos puntos. Definimos las funciones base φ_i, $i = 1, \dots, M$, de la siguiente forma:

1. Para $i = 1, \dots, M$, $\varphi_i \in C^0(\bar{G}_h)$.
2. Sobre cada triángulo D_l, $l = 1, \dots, N$, cada función φ_i es un polinomio de grado 1 en x e y.
3. Para $i, j = 1, \dots, M$, $\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$.
4. Para $i = 1, \dots, M$ y $k = 1, \dots, \tilde{M}$, $\varphi_i(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = 0$.

Estos requerimientos determinan las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ en forma única. En (x_i, y_i), la función φ_i tiene el valor 1, y en todos los demás nodos el valor cero.

6.3. PVFs de EDPs elípticas

Las funciones φ_i son elementos del espacio $V(G_h)$: podemos formar las formas bilineales $[\varphi_i, \varphi_j]$ reemplazando G por G_h, dado que las funciones φ_i son diferenciables con respecto a x e y sobre cada triángulo D_l, $l = 1, \ldots, N$:

$$\int_{G_h} = \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} .$$

Las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ son linealmente independientes sobre $\bar{G}_h$. (Si no fuera así, debería existir una ecuación

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \varphi_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{G}_h,$$

donde no todos los coeficientes α_i desaparecen. Pero

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \varphi_i(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = 0, \quad j = 1, \ldots, M,$$

así que todos los coeficientes deben desaparecer.)

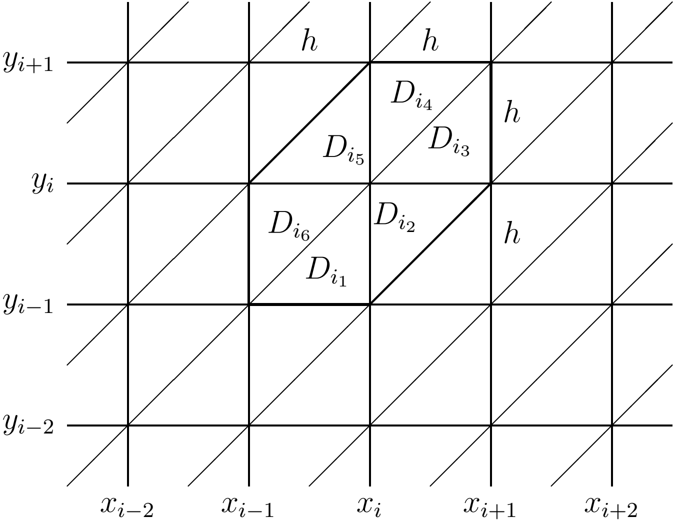
6.3. PVFs de EDPs elípticas

Las funciones φ_i generan como funciones base un espacio D_M; específicamente, D_M es el espacio de aquellas funciones continuas definidas sobre G_h que son afinamente lineales sobre cada triángulo D_l, y que desaparecen sobre ∂G_h.

En el interior de G, en muchos casos fácilmente de puede generar una triangulación donde x_i e y_i son múltiples enteros de h, por ejemplo $x_i = m_i h$, $y = n_i h$. En este caso

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} 1 - n_i + \frac{y}{h} & \text{en } D_{i_1}, \\ 1 + m_i - n_i - \frac{x-y}{h} & \text{en } D_{i_2}, \\ 1 + m_i - \frac{x}{h} & \text{en } D_{i_3}, \\ 1 + n_i - \frac{y}{h} & \text{en } D_{i_4}, \\ 1 - m_i + n_i + \frac{x-y}{h} & \text{en } D_{i_5}, \\ 1 - m_i + \frac{x}{h} & \text{en } D_{i_6}, \\ 0 & \text{en todas otras partes.} \end{cases} \tag{6.33}$$

6.3. PVFs de EDPs elípticas



6.3. PVFs de EDPs elípticas

Ahora queremos aproximar la solución del problema variacional (13):

$$I[u] = \min_{v\in\mathcal{D}} = \min_{v\in\mathcal{D}}\left\{(v, Lv) - 2(v, f)\right\}$$

por una función de D_M; esta función será también una aproximación del problema de valores de frontera (6.26):

$$Lv = f, \quad v \in \mathcal{D},$$

$$L^* u \equiv -(a_{11}u)_{xx} - 2(a_{12}u)_{xy} - (a_{22}u)_{yy} + (a_1 u)_x + (a_2 u)_y + au,$$

$$\mathcal{D} := \left\{v \in C^0(\bar{G}) \cap C^2(G) \mid v = 0 \text{ en } \partial G\right\}.$$

El planteo (6.30) nos lleva a la solución aproximada

$$v^*(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^* \varphi_i(x,y),$$

donde $v^*(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^* \varphi_i(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^* \delta_{ij} = \alpha_j^*$, es decir

$$v^*(x,y) = \sum_{i=1}^{M} v^*(x_i, y_i)\varphi_i(x,y).$$