UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 2 ALGEBRA III 525201-0

1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos distintos no vacíos. Se define $B_1 := A_1$, y $\forall\, i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$: $B_i := A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. Demuestre que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

2. Estudie y clasifique las siguientes relaciones:

   (a) En $\mathbb{N} : x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \max\{x,y\} \leq 100\,.$

   (b) En $\mathbb{N} : x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \mathrm{MCD}\{x,y\} = 1\,.$

   (c) En $\mathbb{R} : x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1\,.$

   (d) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) : X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow X \subseteq Y^c\,.$

   (e) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{N}) : A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow A \cdot B = I\,.$

   (f) En $\mathcal{M}_2(\{0,1\}) : X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow X \cdot Y = \Theta\,.$

   (g) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : A^m = B^m\,.$

   (h) En $\mathbb{R}^n : (x_i)_{i=1}^n\,\mathcal{R}\,(y_i)_{i=1}^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i\,.$

3. Este ejercicio da una caracterización de aquellas relaciones $\mathcal{R}$ en un conjunto A (no vacío), que son simétricas y antisimétricas:

$$\mathcal{R} \text{ es simétrica y antisimétrica } \Leftrightarrow \forall\, x\,,y \in A : (x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x = y)\,.$$

4. Sea $X := \{a,b,c\}$. Considere el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X),\leq)$, donde $\leq$ es la relación inclusión $\subseteq$.
   (a) Determinar los elementos maximales de $\mathcal{P}(X)\backslash\{X\}$.
   (b) Determinar los elementos minimales de $\mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$.

5. Sea $X := \{0,1\}$, con el cual se define $A := X \times X$. Defina la relación $\mathcal{R}$ sobre A, como

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d) \in A : (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow \Big(a < c \quad \vee \quad (a = c \wedge b \leq d)\Big)\,.$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de orden parcial en A.
   (b) Determine todos los elementos maximales y minimales para este orden parcial.
   (c) ¿Existe un elemento mínimo? ¿Existe un elemento máximo?
   (d) ¿Es este orden parcial un orden total?

6. Sea $F := \{f : A \to B : \quad f \text{ es función}\}$, y sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define en F la relación $\mathcal{R}^*$ por: $\forall\, f\,,g \in F : f\,\mathcal{R}^*\,g \Leftrightarrow \forall\, a \in A : f(a)\,\mathcal{R}\,g(a)\,.$
   (a) Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden en F.
   (b) Muestre que si $|A| = |B| = 2$, entonces $\mathcal{R}^*$ es relación de orden parcial.

7. Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden en dos conjuntos no vacíos A y B, respectivamente. Demuestre que la relación $\mathcal{S}$ definida en $A \times B$ por:

$$\forall\,(a,b)\,(c,d) \in A \times B : (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \Leftrightarrow (a\,\mathcal{R}_1\,c) \wedge (b\,\mathcal{R}_2\,d)\,,$$

   es relación de orden también.

8. Se define en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, siendo $m\,,n \in \mathbb{N}$, la relación de matrices rectangulares similares:

$$\forall\, A\,,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) : A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow (\exists\, P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})\,,\text{ no singular}) : (\exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\text{ no singular}) : A = P\,B\,Q^{-1}\,.$$

   Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

9. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\emptyset \neq A \subseteq (\mathbb{Z}\backslash\{0\})^2$ por:

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d) \in A\,:\,(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc\,.$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en A.

   (b) Para

$$A := \{(-4,20)\,,(-3,-9)\,,(-2,-4)\,,(-1,-11)\,,(-1,-3)\,,(1,2)\,,(1,5)\,,(2,10)\,,(2,14)\,,(3,6)\,,(4,8)\,,(4,12)\}\,,$$

   determinar las clases de equivalencia $[(2,14)]_{\mathcal{R}}$, $[(-3,-9)]_{\mathcal{R}}$, $[(4,8)]_{\mathcal{R}}$.

   (c) Determine $A/\mathcal{R}$, siendo A el conjunto definido en el item anterior.

10. Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación refleja y transitiva. Se define la relación $\sim$ por:

$$\forall\,a\,,b \in E\,:\,a \sim b \Leftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a\,.$$

   (a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   (b) Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$, entonces $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a'\,\mathcal{R}\,b'$.

11. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\exists\,m \in \mathbb{N}\,:\,A^m = I_n$. Se define la relación $\mathcal{R}_A$ en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\forall\,x\,,y \in \mathbb{R}^n\,:\,x\,\mathcal{R}_A\,y \Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{N}\,:\,A^k \cdot x = y\,.$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}_A$ es relación de equivalencia.

   (b) Determine $\forall\,(a,b) \in \{0,1\}^2$, $[(a,b)^{\mathtt{t}}]_{\mathcal{R}_A}$, siendo $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Sea $p \in \mathbb{N}$. Se define la relación *congruencia módulo p* ($\mathcal{R}_p$) en $\mathbb{Z}$ por

$$\begin{aligned}\forall\,x\,,y \in \mathbb{Z}\,:\,x\,\mathcal{R}_p\,y &\Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}\,:\,x - y = k\,p \\ &\Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}\,:\,x = k\,p + y\,.\end{aligned}$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}_p$ es relación de equivalencia.

   (b) Determine $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\mathcal{R}_p$

RBP/rbp 24.04.2020