UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 7
Análisis Real II (525302)
Convergencia de Funciones en Espacios de Medida

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, restringido a la $\sigma-$Álgebra de Borel.

Problema 1 Sean $M(X, \mathcal{X})$ el conjunto de las funciones simples y medibles, $p \in [1, +\infty)$ y

$$S = \left\{ f \in M(X, \mathcal{X}) \mid \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) < +\infty \right\}$$

Demuestre que S es denso en L^p.[1]

Problema 2 Se define la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x)$. Analice la convergencia puntual, casi segura, en medida y uniforme.

Problema 3 Se define la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$

a) Demuestre que converge en medida a la función $f(x) \equiv 0$.

b) Demuestre que converge en $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ a la misma función, para $p \in (1, +\infty]$, pero no para $p = 1$.

c) Demuestre que la sucesión converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$.

Problema 4 Sean $p \in [1, +\infty)$ y la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^{1/p}}\chi_{[0,n]}(x)$.

a) Demuestre que la sucesión converge uniformemente a la función $f(x) \equiv 0$.

b) Demuestre que la sucesión converge en medida a $f(x) \equiv 0$.

c) Demuestre que la sucesión no converge en $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ a $f(x) \equiv 0$.

Problema 5 Demuestre que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x)$

a) Converge uniformemente a la función $f(x) \equiv 0$ en todo intervalo $(\delta, +\infty)$, con $\delta > 0$.

b) Converge en medida a la función $f(x) \equiv 0$.

c) No converge en $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, para $p \in [1, +\infty]$.

Problema 6 Demuestre que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$ converge puntualmente a la función $f(x) \equiv 0$, pero que no en medida.

---

[1] En general, esto se denota por $\overline{S}^{\|\cdot\|_p} = L^p$

Problema 7 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en L^p y existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = g$. Demuestre que $f = g$ casi seguramente.

Problema 8 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ casi seguramente, el Lema de Fatou permite concluir que $\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$. Demuestre que el resultado anterior también se cumple si f_n converge a f en medida.
Indicación: Es fácil ver, si f_n converge a f en medida, entonces toda subsucesión de f_n converge en medida al mismo límite.

Problema 9 Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible, se define

$$r(f) = \int \frac{|f|}{1 + |f|} \, d\mu$$

Demuestre que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en medida si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} r(f_n - f) = 0$.

Problema 10 Sean $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que converge casi seguramente a la función medible f. Demuestre que $\{\varphi \circ f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi seguramente a $\varphi \circ f$.

Problema 11 Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Demuestre que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en medida si y sólo si la convergencia es uniforme.

Definición 1 Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e funciones medibles converge casi uniformemente a la función medible f si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ y que f_n converge uniformemente a f en A^C.

Problema 12 Demuestre que, si una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$ converge casi uniformemente a la función medible f, entonces la convergencia también es casi segura.

Teorema 1 (de Egoroff) *Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida finita y una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge casi seguramente a f. Entonces, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi uniformemente a f.*

Problema 13 Demuestre el teorema de Egoroff.

---

20 de Octubre de 2014