Listado 7: Normas de matrices y vectores

1. Problemas con papel y lápiz

1. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_1 \|x\|_\infty}$.

   (b) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

   (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

   (d) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

   Observación: Para demostrar la primera de las desigualdades en $1b$ puede utilizar la desigualdad en $1a$ y para demostrar la segunda de las desigualdades en $1b$ puede utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz entre los vectores

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Recuerde que la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para cualquier par de vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$ se cumple que $|\langle u; v\rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$, donde

$$\langle u; v\rangle = v^* u = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i.$$

2. Sea $x \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

3. Calcule $\|A\|_F$ y $\|A\|_p$ con $p \in \{1, 2, \infty\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida por una norma vectorial, es decir,

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{1}$$

   Dado que $\mathbb{C}^n$ es un espacio de dimensión finita, se cumple que

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

   Demuestre que

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

5. Considere las siguientes matrices:

   (a)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $\|C\|_1$, $\|C\|_2$, $\|C\|_\infty$ y $\|C\|_F$.

   (b)
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $\|D\|_1$, $\|D\|_\infty$ y $\|D\|_F$.

   (c) $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i > j, \\ -1, & \text{si } i < j. \end{cases}$$

   Calcule $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$ y $\|B\|_F$.

   (d)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{pmatrix}$$

   con
$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \qquad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

   siendo $h_0, h_1, \ldots, h_n$ números reales positivos que satisfacen
$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, \frac{1}{2} \le \frac{h_i}{h_{i-1}} \le 2.$$

   Calcule $\|A\|_\infty$ y demuestre que $\|A\|_1 \le \frac{10}{3}$.

6. Sean $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in \mathbb{C}^n$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Calcule $\|ab^*\|_1$, $\|ab^*\|_\infty$, $\|ab^*\|_2$. Cada uno de estos valores puede expresarse en términos de normas de los vectores a y b.

7. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Demuestre que $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

   Observación: Puede ser útil el siguiente resultado: para todo par de matrices $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ las matrices BC y CB tienen los mismos valores propios.

8. Suponga que $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria. Demuestre que

   (a) $\|U\|_2 = 1$.

   (b) Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.

   (c) Para toda matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se cumple que $\|UB\|_2 = \|BU\|_2 = \|B\|_2$.

9. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Demuestre que el rango de la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$, es n, entonces A^*A es invertible.

10. Sea $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, Demuestre que para todo número real $p \in [1, +\infty[$ se cumple que $\|D\|_p = \rho(D)$, donde $\rho(D)$ es el radio espectral de D y

$$\|D\|_p = \max_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{\theta\}} \frac{\|Dx\|_p}{\|x\|_p}.$$

¿Ocurre también que $\|D\|_\infty = \rho(D)$?

11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. En clase se demostró que si existe norma matricial inducida por norma vectorial $\|\cdot\|$ para la que se cumpla que $\|A\| < 1$, entonces la matriz $I + A$ es no singular.

    (a) Demuestre que
    $$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

    (b) Note que para toda norma matricial se cumple que $\|-A\| = \|A\|$. Por tanto, si existe una norma matricial $\|\cdot\|$, inducida por una norma vectorial, de modo que $\|A\| < 1$, también se cumple que $\|-A\| < 1$ y la matriz $I + (-A) = I - A$ también es no singular. ¿Cumple $\|(I-A)^{-1}\|$ las mismas cotas que $\|(I+A)^{-1}\|$? Es decir, ¿se cumple que
    $$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}\ ?$$

    Observación: Este resultado puede proporcionar cotas para la norma de la inversa de una matriz, como veremos en el siguiente problema.

12. Verifique si puede utilizar el resultado anterior para estimar la norma 1 o la norma infinito de la inversa de las siguientes matrices. En caso de no poder utilizarlo, justifique por qué.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    (b) $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

    (c) Matriz en $5d$.

2. Experimentos computacionales

1. Escriba un programa en Matlab que muestre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}_p := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\|_p = 1\right\}, \qquad p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty\}.$$

- No grafique los elementos de S_p como vectores de $\mathbb{R}^2$ (flechas), sino como puntos.
- Los conjuntos deben mostrarse en la misma ventana, con colores distintos.
- Se debe mostrar una leyenda para diferenciarlos.
- Los gráficos no se deben ver distorsionados, por ejemplo, S_2 debe verse como una circunferencia.