PROBLEMA 1 (Bartle 5A). Demuestre que si $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $a > 0$, entonces el conjunto

$\mu(E_a) < +\infty$ $\quad E_a = \{x \in X : |f(x)| \geq a\} = \{x \in X : x \leq -a\} \cup$

tiene medida finita. Además, demuestre que el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tiene medida $\sigma-$finita.

Solución: Como $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$, f es medible,

$$E_a := \{x \in X : |f(x)| \geq a\} = \{x \in X : f(x) \leq -a\} \cup \{x \in X : f(x) \geq a\}$$

$$= \underbrace{f^{-1}((-\infty, a])}_{\in \mathcal{X}} \cup \underbrace{f^{-1}([a, +\infty))}_{\in \mathcal{X}}$$

- Recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable si y sólo si es absolutamente integrable.
  (i.e. $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$, $|f| \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$
  $|f| \geq 0$) $|f| \in M^+(X, \mathcal{X})$

- Definamos $E_a := \{x \in X : |f(x)| \geq a\}$, por lo mencionado antes, $E_a \in \mathcal{X}$. Además, como $|f| \in M^+(X, \mathcal{X}, \mu)$, y $E_a \subseteq X$ se tiene

$$\int_{E_a} |f| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu \overset{|f| \in L(X,\mathcal{X},\mu)}{<} +\infty \quad (*)$$

- Como, $\forall x \in E_a$, $|f(x)| \geq a$, de $(*)$ $\boxed{\int_{E_a} a \leq \int_{E_a} |f| \, d\mu < +\infty}$

Hasta ahora tenemos $\int_{E_a} a \, d\mu \leq \int |f| < +\infty$

Pero $\int_{E_a} a \, d\mu = a\left(\int_{E_a} d\mu\right) = a\mu(E_a) < +\infty$

Como a es fijo (arbitrario) se concluye que la medida de E_a es finita.

- (Medida σ-finita: un medible A posee medida σ-finita si $\exists \{A_n\} \subset \mathcal{X}$: $\mu(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$)

$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita. Definamos

$E_{1/n} = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$, y observemos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{1/n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}$$

$$= \{x \in X : |f(x)| > 0\} \quad (\text{Demostrar } \subseteq, \supseteq)$$

$$= \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

Como vimos $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_{1/n}) < +\infty$. Luego,

$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita.

PROBLEMA 2 (Bartle 5D). Sea $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$, $\varepsilon > 0$. Demuestra que existe una función simple y medible φ tal que

$$\int |f - \varphi| \, d\mu < \varepsilon$$

Solución. • $f = f^+ - f^-$, con $f^+, f^- \in M^+(X, \mathcal{X}, \mu)$ porque $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$

• Como $f^+ \in M^+(X, \mathcal{X})$ por lema visto en clases $\exists \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M^+(X, \mathcal{X})$ funciones simples tq $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f^+$.

• Dado que la sucesión es creciente y de elementos no negativos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\varphi_n| \leq |f^+|$. Entonces,

(Dominada) $$|f^+ - \varphi_n| \leq |f^+| + |\varphi_n| \leq 2|f^+|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aquí, vemos que $\{|f^+ - \varphi_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ está dominada por $2|f^+| \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$.

• Para aplicar TCD, nos faltaría probar la parte de convergencia, como $\varphi_n \overset{n}{\nearrow} f^+$, $|f^+ - \varphi_n| \xrightarrow{n} 0$ (Convergencia)

• Por otro lado, como f^+ y φ_n son medibles, $|f^+ - \varphi_n|$ es medible y como está dominado por una función integrable es integrable. (Primer Corolario 5.0.5 c1), Es decir

$$|f^+ - \varphi_n| \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$$

• Los últimos 3 puntos corresponden a las hipótesis del TCD de Lebesgue, lo que nos permite establecer

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int |f^+ - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

• Todos los pasos anteriores también son válidos para f^- (Escribir), Por lo tanto $\exists \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión simples y medibles tal que

(2) $$\lim_{n\to\infty} \int |f^- - \psi_n| \, d\mu = 0$$

• Sea $\varepsilon > 0$. Por (1), $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_1 \quad \int |f^+ - \varphi_n| \, d\mu < \varepsilon/2$$

Por (2), $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_2, \quad \int |f^- - \psi_n| \, d\mu < \varepsilon/2$$

• Recordemos que $f = f^+ - f^-$ y definamos la sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\xi_n := \varphi_n - \psi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ξ_n son simples y medibles.

Veamos ahora que

$$\int |f - \xi_n| \, d\mu = \int |f^+ - f^- - \varphi_n + \psi_n| \, d\mu$$

$$= \int |(f^+ - \varphi_n) - (f^- - \psi_n)| \, d\mu$$

$$\leq \int |f^+ - \varphi_n| \, d\mu + \int |f^- - \psi_n| \, d\mu$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$\int |f - \xi_n| \, d\mu \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Bastaría definir $\varphi = \xi_n$ con $n \geq N$

$$= \varphi_n - \psi_n$$

PROBLEMA 3 (Bartle 5Q). Si $t > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$$

Además, si $t \geq a > 0$, entonces $e^{-tx} \leq e^{-ax}$. Use esto para justificar la derivación bajo el signo integral

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx}\,dx \qquad f(x,t) = e^{-tx}$$

y finalmente deducir la fórmula

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución. Sea $X = [0, +\infty)$, $\mathcal{B}$ los borelianos de X y μ la medida de Lebesgue.

- La idea será considerar $f(x,t) = e^{-tx}$, $x \in X$, $t \in [a,b]$, $b > a$.

- Demostremos que $x^n e^{-ax}$ es integrable Lebesgue.

Del TP-0 sabemos que $\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} e^{-\gamma x} = 0 \quad \forall \alpha > 0, \gamma > 0$

Seleccionamos $\alpha = n+2$, $\gamma = a$, $\lim_{x \to \infty} x^{n+2} e^{-ax} = 0$

Tomemos $\varepsilon = 1$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < x^{n+2} e^{-ax} < 1 \;/\cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow 0 < x^n e^{-ax} < \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{Riemann Int sobre } [K,\infty)}$$

$\forall x \geq K$. Luego, por comparación directa $x^n e^{-ax}$ es Riemann Int. y p.l.t Lebesgue integrable

- Definamos $f(x,t) = e^{-tx}$, $t \in [a,b]$, $x \in X$

$$F(t) := \int f(x,t)\,d\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$$

- Ahora verifiquemos las condiciones del teorema

(a) $\exists\, t_0 \in [a,b]$, $t_0 = a$

$$\int_0^{+\infty} |f(\cdot, t_0)|\,d\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} < +\infty$$

$$f(\cdot, t_0) = f(\cdot, a) \in L(X, \mathcal{X}, \mu).$$

(b) Sabemos que $f(x,t)$ es derivable c.r a t $\forall t \in [a,b]$ y $\forall x \in X$, más aún

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} = -x e^{-tx}$$

(c) Observamos que $\forall t \in [a,b]$, $x \in X = [0, +\infty)$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| = |-x e^{-tx}| = x e^{-tx} \leq x e^{-ax} =: g(x)$$

Y ya probamos ($n=1$ antes) que $g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$

Aplicando teorema visto en clase,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)\,d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$$

$F(t) = 1/t$, $f(x,t) = e^{-tx}$,

$$\frac{1}{t^2} = \int_0^{+\infty} x e^{-tx}\,dx \xrightarrow{n \text{ veces}} \frac{\cancel{(-1)^n}\, n!}{t^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \cancel{(-1)^n}\, x^n e^{-tx}\,dx$$

Seleccionando $t=1$ se concluye el resultado

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

- Lo anterior se puede probar por inducción

PROBLEMA 4. Aplicando el teorema de convergencia dominada, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\cos\left(\frac{2^k}{n}\right)=2$$

Sol. Si $(X=\mathbb{N}_0,\ \mathcal{X}=\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu)$ con μ la medida de conteo, si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f=\{a_n\}$ las integrales se convierten en series.

- $f(k)=2^{-k}$ $\quad f_n(k)=2^{-k}\cos\left(\frac{2^k}{n}\right)$

Son medibles.

- $0\le |f_n(k)|\le 2^{-k}$ $\quad (*)$

la serie $\sum 2^{-k}$ converge absolutamente

$\Leftrightarrow$ $f(k)=2^{-k}$ es Lebesgue integrable $(**)$

- Por $(*)$ y $(**)$ f_n son integrables

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(i)}\ 2^{-k}\cos(2^k/n)\to 2^{-k} \quad (f_n(k)\to f_n(k) \\ \text{(ii)}\ |f_n(k)|\le g(k) \\ \qquad g(k)=\underline{2^{-k}}\in L(X,\mathcal{X},\mu) \end{array}\right.$$

Por el teorema de la convergencia dominada

$$\underbrace{\lim_n \int_{\mathbb{N}_0} f_n\,d\mu}=\int_{\mathbb{N}_0}\lim f_n\,d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k}\cos\left(\frac{2^k}{n}\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}2^{-k}$$

$$=2$$

$(X,\mathcal{X},\lambda)$

Lebesgue

$$\int f\,d\lambda=\int f$$