

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 2. 9-Jul.-2021; 19:00.

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

En los ejercicios que siguen, X es un espacio métrico con métrica d .

1. Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1 + \log n)^n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones acotadas de números reales. Demuestra que

$$\limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Sugerencia: Puedes usar la caracterización del límite superior del Teor. 3.17 del libro de Rudin. En particular, si $A := \limsup a_n$, entonces, $\forall \varepsilon > 0$, solo hay finitos $n \in \mathbb{N}$: $a_n > A + \varepsilon$.

3. Sean X e Y dos espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ una función continua y $E \subset Y$.

Demuestra que $f^{-1}(\text{int}(E)) \subset \text{int}(f^{-1}(E))$.

Sugerencia: Puedes usar la definición por bolas de continuidad:

f es continua en x si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta^X(x)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x))$.

4. Sean $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y determina su límite.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$.

Sean $f, f_n : X \rightarrow [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, y $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz continua.

Demuestra que si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X , entonces también $\varphi \circ f_n \rightarrow \varphi \circ f$ uniformemente en X .