

# 525476 MÉTODOS ESPECTRALES (2022-2): TAREA ACERCA DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DEL TERCER TIPO

LEONARDO FIGUEROA

**RESUMEN.** Esta tarea consiste en 9 preguntas, que suman 48 puntos en total.

## 1. PRIMERA TANDA DE DEFINICIONES

Los **polinomios de Chebyhsev del tercer tipo** están definidos en  $[-1, 1]$  por

$$V_n(x) := \frac{\cos((n + \frac{1}{2}) \arccos(x))}{\cos(\frac{1}{2} \arccos(x))}. \quad (1)$$

En  $x = -1$  esta fórmula debe entenderse como el correspondiente límite. En la Figura 1 graficamos algunos de los  $V_n$ .

Definimos al **peso de Chebyshev del tercer tipo**  $V: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(x) := (1 - x)^{-\frac{1}{2}}(1 + x)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Note que este peso no es simétrico respecto a la reflexión  $x \mapsto -x$  y no pertenece a la familia Gegenbauer. Definimos también al espacio de Lebesgue ponderado asociado  $L_V^2 :=$

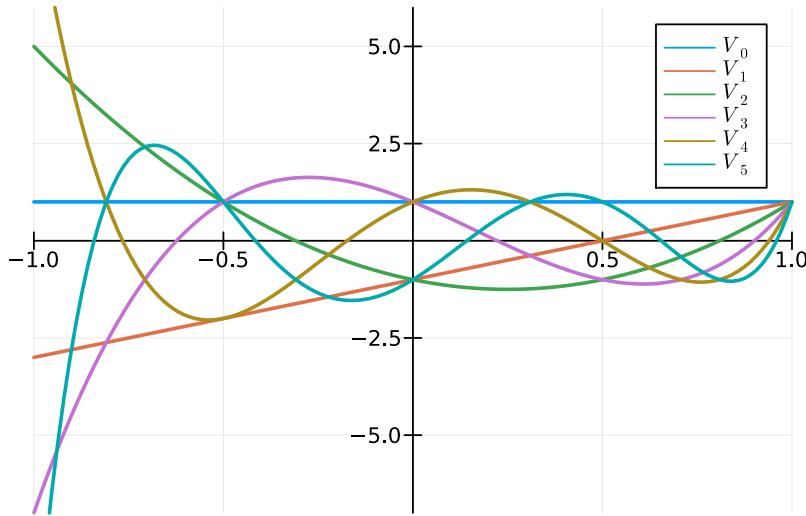


FIGURA 1. Gráfico de algunos polinomios de Chebyshev del tercer tipo.

$V^{-1/2} L^2(-1, 1)$  y al **producto interior de Chebysev del tercer tipo**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : L_V^2 \times L_V^2 \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\langle u, v \rangle_V := \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} V(x) dx. \quad (3)$$

Definimos también al peso promovido  $V^+ : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V^+(x) := (1 - x^2) V(x) = (1 - x)^{\frac{1}{2}} (1 + x)^{\frac{3}{2}}, \quad (4)$$

al correspondiente espacio de Lebesgue ponderado  $L_{V^+}^2 := (V^+)^{-1/2} L^2(-1, 1)$  y al producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^+} : L_{V^+}^2 \times L_{V^+}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\langle u, v \rangle_{V^+} := \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} V^+(x) dx. \quad (5)$$

Definimos al operador  $d^{(V,*)} : C^1([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$  por

$$d^{(V,*)} u(x) := -V(x)^{-1} \frac{d}{dx} [V^+(x) u(x)] = -(1 - x^2) u'(x) + (2x - 1) u(x). \quad (6)$$

Definimos también el operador  $\mathcal{L}^{(V)} : C^2([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$  por

$$\mathcal{L}^{(V)} u(x) := d^{(V,*)} u'(x) = -V(x)^{-1} \frac{d}{dx} [V^+(x) u'(x)] = -(1 - x^2) u''(x) + (2x - 1) u'(x). \quad (7)$$

Note que si se aplica el operador  $\mathcal{L}^{(V)}$  a un polinomio de grado  $n$ , se obtiene un polinomio del mismo grado  $n$ .

## 2. PRIMERA TANDA DE PREGUNTAS

P1. (2 puntos) Obtenga expresiones explícitas para  $V_0$  y  $V_1$ .

P2. (7 puntos) Pruebe que los  $V_n$  satisfacen una recurrencia de tres términos de la forma

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x V_n(x) = A_n V_{n+1} + B_n V_n + C_n V_{n-1}$$

**proveyendo** fórmulas explícitas para los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$ . INDICACIÓN: Con la ayuda de algunos casos particulares, conjeture primero cuánto valen las constantes  $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$ . Tendrá entonces automáticamente una conjetura para la recurrencia de tres términos sin valores indeterminados, la que es más fácil de probar mediante identidades trigonométricas.

P3. (2 puntos) Concluya desde las partes P1 y P2 que cada  $V_n$  es un polinomio de grado exactamente  $n$ .

P4. (2 puntos) Calcule desde las partes P1 y P2, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , el valor del coeficiente principal  $\ell_n^{(V)} \in \mathbb{R}$  en la expansión de  $V_n$  respecto a la base de monomios; esto es, aquel número que hace que  $V_n(x) - \ell_n^{(V)} x^n$  sea un polinomio de grado  $n - 1$  respecto a  $x$ .

P5. (5 puntos) Pruebe que los  $V_n$  son polinomios ortogonales respecto al producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  de definido en (3); esto es, satisfacen

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}_0) \quad \langle V_m, V_n \rangle_V = h_n^{(V)} \delta_{m,n},$$

donde los  $h_n^{(V)} > 0$ , cuya fórmula usted **también debe proveer**, son las correspondientes normas al cuadrado de cada  $V_n$ .

P6. (3 puntos) Con  $d^{(V,\star)}$  como está definido en (6), pruebe que, para todo  $u, v \in C^1([1, 1])$ ,

$$\langle u', v \rangle_{V^+} = \langle u, d^{(V,\star)}v \rangle_V,$$

P7. (6 puntos) Con  $\mathcal{L}^{(V)}$  como está definido en (7), pruebe que, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\mathcal{L}^{(V)} V_n = \lambda_n^{(V)} V_n,$$

donde  $\lambda_n^{(V)}$  es una constante que usted **también debe proveer**. INDICACIÓN: Si usted es razonable, explote las partes P4, P5 y P6. Alternativamente, cometa la temeridad de aplicar directamente el operador  $\mathcal{L}^{(V)}$  a la fórmula (1) que define a  $V_n$  y desperdicie su juventud simplificando el embrollo trigonométrico resultante.

### 3. SEGUNDA TANDA DE DEFINICIONES

Dado  $N \in \mathbb{N}_0$ , definimos a los nodos  $(x_j)_{j=0}^N$  y a los pesos  $(w_j)_{j=0}^N$  de la **cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo** de  $N + 1$  nodos como las raíces de  $V_{N+1}$  y la solución del sistema lineal de ecuaciones

$$(\forall k \in \{0, \dots, N\}) \quad \sum_{j=0}^N V_k(x_j) w_j = \int_{-1}^1 V_k(x) V(x) dx, \quad (8)$$

respectivamente (podríamos usar la base de monomios  $x^k$  en lugar de los  $V_k$  y los pesos no cambian, pero los  $V_k$  nos convienen más). Note que esta cuadratura es para aproximar la integral **ponderada** por la función peso  $V$  y que, por definición, su versión de  $N + 1$  nodos es exacta para polinomios de grado menor o igual a  $N$ .

### 4. SEGUNDA TANDA DE PREGUNTAS

P8. (3 puntos) Pruebe que los nodos de la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de  $N + 1$  nodos son (ordenados de derecha a izquierda):

$$(\forall j \in \{0, \dots, N\}) \quad x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2N+3}\pi\right).$$

P9. (18 puntos) Pruebe que los pesos de la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de  $N + 1$  nodos, respetando el orden que asumimos para los correspondientes nodos en la parte P8, son

$$(\forall j \in \{0, \dots, N\}) \quad w_j = \frac{4\pi}{2N+3} \cos\left(\frac{2j+1}{2N+3}\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (9)$$

y **también que** la cuadratura resulta coincidir exactamente con la integral ponderada por  $V$  para polinomios de grado menor o igual a  $2N+1$ . INDICACIÓN: Siga las subpartes P9.1–P9.5 que aparecen a continuación; **alternativamente**, quizás a usted se le ocurra un procedimiento más corto (a mí no).

- P9.1. (4 puntos) Dado  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N$  **impar**, considere el polinomio  $\rho := \frac{1}{2}T_0 - \frac{1}{2}T_N$ . Como ocurre con todo miembro de  $\mathbb{P}_N$ , los coeficientes de Fourier–Chebyshev exactos  $\hat{\rho}_k$  de  $\rho$  coinciden con los coeficientes de Fourier–Chebyshev discretos  $\tilde{\rho}_k$  de  $\rho$  respecto a la cuadratura de Gauss–Lobatto–Chebyshev de  $N+1$  nodos,  $0 \leq k \leq N$  (Lema 41 del Capítulo 2). Explotando este hecho y de que se dispone de la segunda fórmula en la diapositiva 102 del Capítulo 2 (que después llamamos DCT) para expresar a los  $\tilde{\rho}_k$ , pruebe que

$$(\forall k \in \{0, \dots, N\}) \quad \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} \left( \frac{1 - (-1)^j}{2} \right) \cos\left(\frac{k j \pi}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq N-1, \\ -1 & \text{si } k = N, \end{cases}$$

donde  $\bar{c}_j = 1$  si  $1 \leq j \leq N-1$  y  $2$  si  $j = 0$  o  $j = N$ .

- P9.2. (2 puntos) A partir de la subparte P9.1, pruebe que, para  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N$  impar,

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \left( \frac{1 - (-1)^j}{2} \right) \cos\left(\frac{k j \pi}{N}\right) = \begin{cases} (N+1)/N & \text{si } k = 0, \\ (-1)^k/N & \text{si } 1 \leq k \leq N-1, \\ -(N+1)/N & \text{si } k = N. \end{cases}$$

- P9.3. (5 puntos) Volviendo a la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de  $N+1$  nodos, pruebe que la validez de la fórmula (9) para sus pesos **junto** a la afirmación de que esta cuadratura es exacta para polinomios de grado menor o igual a  $2N+1$  equivalen a la afirmación:

$$(\forall k \in \{0, \dots, 2N+1\})$$

$$\frac{4\pi}{2N+3} \sum_{j=0}^N \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) = \pi \delta_{k,0}. \quad (10)$$

- P9.4. (2 puntos) Con la ayuda de una identidad trigonométrica pruebe que la igualdad deseada (10) es equivalente a la afirmación:

$$(\forall k \in \{0, \dots, 2N+1\})$$

$$\frac{2}{2N+3} \sum_{j=0}^N \left[ \cos\left((k+1) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) + \cos\left(k \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) \right] = \delta_{k,0}. \quad (11)$$

- P9.5. (5 puntos) Cualquiera sea la función a valores escalares  $f$ , es obvio que:

$$\sum_{j=0}^N f(2j+1) = \sum_{j=0}^{2N+3} \left( \frac{1 - (-1)^j}{2} \right) f(j) - f(2N+3).$$

Aplique esta obviedad al lado izquierdo de la igualdad (11) que ahora deseamos y explote la variante de la subparte P9.2 en la que se sustituyó  $N \leftarrow 2N+3$  para obtener el lado derecho de (11) y, por lo tanto, terminar con toda esta gran parte P9 y con esta tarea por fin.