Física y Mediciones

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315

1. Contenidos

2. Resultados de aprendizaje

1. Resolver problemas de cálculo dimensional para determinar las dimensiones de cantidades derivadas y la viabilidad de una expresión física.
2. Resolver problemas de conversión de unidades y de estimación de órdenes de magnitud de variables físicas.
3. Utilizar las reglas de manipulación de cifras significativas en la resolución de problemas de cálculo de variables físicas.
4. Aplicar las reglas de manipulación de la propagación de errores en problemas de cálculo de variables físicas.

3. Introducción

La **física** (ciencia) se sustenta en observaciones experimentales y mediciones cuantitativas. Como finalidad, intenta:

1. Identificar un número limitado de leyes que rigen los fenómenos naturales y usarlas para desarrollar teorías capaces de anticipar los resultados experimentales.

La leyes fundamentales usadas para elaborar teorías se expresan en el lenguaje de las matemáticas (herramienta): Puente entre teoría y experimento.

Cuando el pronóstico de una teoría y los resultados experimentales no concuerdan:

1. Se formulan nuevas teorías o se modifican las existentes para resolver los desacuerdos.

Algunas teorías son, por ejemplo:

1. **Leyes del movimiento (Newton 1642-1727):** Explican el movimiento de objetos que se mueven con rapideces normales ($\ll$ que la rapidez de la luz).
2. **Teoría especial de la relatividad (Einstein 1879-1955):** Se plica tanto a objetos que se mueven con rapideces normales y cercanas a la de la luz.

Física Clásica: Mecánica clásica, termodinámica, óptica y electromagnetismo (desarrollados antes de 1900).

- Newton: Importantes contribuciones a la física *clásica* y uno de los creadores del cálculo *diferencial* (herramienta matemática).
- Durante el siglo XVIII: Grandes adelantos en *mecánica*.
- Finales del siglo XIX: Gran despliegue de la *termodinámica* y el *electromagnetismo*.

Física Moderna: Se inicia a finales del siglo XIX. Nace de la necesidad de explicar fenómenos físicos que la física clásica no conseguía explicar.

- *Relatividad especial*: Modifica por completo los conceptos tradicionales de espacio, tiempo y energía. La rapidez de la luz es el límite superior de la rapidez que puede alcanzar un objeto. Establece la relación entre masa y energía.
- *Mecánica Cuántica*: Capaz de describir fenómenos físicos a escala atómica. Muchos dispositivos prácticos han sido desarrollado basados en los principios de esta física.

Actualmente científicos, ingenieros y técnicos trabajan en conjunto para mejorar la calidad de vida y un mejor entendimiento de las leyes de la naturaleza, con beneficios para la humanidad.

4. Estándares de longitud, masa y tiempo

La descripción de los fenómenos naturales requiere de mediciones. Cada medición está asociada a una cantidad física medible (por ejemplo, la longitud de un objeto).

El *estándar* (patrón) de medición elegido debe ser accesible y poseer ciertas propiedades que se puedan medir de manera confiable.

1. Deben producir el mismo resultado (sin importar quién ni dónde lo use).
2. No deben cambiar con el tiempo.

El conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia se llama **SI** (sistema internacional):

Cantidad fundamental	**Unidad SI**	**Símbolo**	**Dimensión**
longitud	metro	m	L
masa	kilogramo	kg	M
tiempo	segundo	s	T
temperatura	kelvin	K	Θ
corriente eléctrica	ampere	A	I
intensidad luminosa	candela	cd	J
cantidad de sustancia	mol	mol	N

Leyes físicas se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas.

Cantidades fundamentales en mecánica son: **longitud**, **masa** y **tiempo**. Otras cantidades se expresan como relaciones entre ellas.

4.1. Estándar de longitud: Metro (m).

- En 1779, Francia adoptó como estándar de longitud el **metro** (m): Diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al Polo Norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París.
- En 1960, la longitud del metro se redefinió como la distancia entre dos líneas en una barra específica de platino-iridio almacenada bajo condiciones especiales en un museo de Francia.
- En la década de los sesenta y setenta del siglo XX se redefinió como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-rojo emitida por una descarga eléctrica de una lámara de kriptón 86 ($^{86}\mathrm{Kr}$).
- En octubre de 1983 se redefinió como *la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/(299 792 458) segundos.* Esta definición establece que la luz en el vacío tiene una rapidez de 299 792 458 metros por segundo.

Cuadro 1. Valores aproximados de ciertas longitudes

	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al quasar conocido más remoto	1.4×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	9×10^{25}
Distancia de la Tierra a la galaxia grande más cercana (Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Próxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio orbital medio de la Tierra en torno al Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.846×10^{8}
Distancia del ecuador al Polo Norte	1.00×10^{7}
Radio medio de la Tierra	6.37×10^{6}
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite que orbita la Tierra	2×10^{5}
Longitud de un campo de football	9.1×10^{1}
Longitud de una mosca	5×10^{-3}
Tamaño de la partícula de polvo más pequeña	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de las células de la mayoría de los organismos vivientes	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$

4.2. Estándar de masa: Kilogramo (kg)

Es definido como la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en n museo de Francia. No ha cambiado desde 1887 porque la aleación platino-iridio es inusualmente estable.

Cuadro 2. Masa aproximada de varios objetos

	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.9×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim \times10^{3}$
Humano	$\sim 10^{2}$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim \times10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1\times10^{-15}$
Átomo de hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

4.3. Estándar de tiempo: Segundo (s)

En el año 1967 el segundo se redefinió con base en la precisión del reloj *atómico* basado en las vibraciones de átomos de cesio: Un segundo equivale a 9 192 631 770 veces el período de vibración del átomo de cesio 133 ($^{133}\mathrm{Cs}$).

Cuadro 3: Valore aproximados de intervalos de tiempo característicos.

	Intervalo de Tiempo (s)
Edad del Universo	5×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^{8}
Un año	3.2×10^{7}
Un día	8.6×10^{4}
Un período de clase	3.0×10^{4}
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Período de ondas sonoras audibles	$\sim\times10^{-3}$
Período de ondas de radio típicas	$\sim10^{-6}$
Período de vibración de un átomo en un sólido	$\sim10^{-13}$
Período de una onda de luz visible	$\sim10^{10-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz cruce un protón	$\sim10^{-24}$

5. Análisis dimensional

En física la palabra *dimensión* denota la naturaleza física de una cantidad. Aún cuando una distancia se mida en pies, metros, pulgadas o brazas, sigue siendo una distancia; se dice que su dimensión es la *longitud*.

Los símbolos de las dimensiones de longitud, masa y tiempo usados son, respectivamente, $\mathrm{L^1M^0T^0}$, $\mathrm{L^0M^1T^0}$ y $\mathrm{L^0M^0T^1}$.

Cuadro 4. Dimensiones y unidades de cuatro cantidades deducidas

Cantidad	**Área**	**Volumen**	**Rapidez**	**Aceleración**
Dimensiones	$\mathrm{L^2M^0T^0}$	$\mathrm{L^3M^0T^0}$	$\mathrm{L^1M^0T^{-1}}$	$\mathrm{L^1M^0T^{-2}}$
Unidades SI	$\mathrm{m^2}$	$\mathrm{m^3}$	$\mathrm{m/s}$	$\mathrm{m/s^2}$
Sistema estadounidense	$\mathrm{ft^2}$	$\mathrm{ft^3}$	$\mathrm{ft/s}$	$\mathrm{ft/s^2}$

Algunas veces se usará corchete, [ ], para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, las dimensiones de la rapidez se escriben como $[v] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-1}$.

El análisis *dimensional* ayuda a la verificación de una ecuación específica, en la cual las dimensiones son tratadas como *cantidades* algebraicas.

- Las cantidades se suma o restan sólo si tienen las mismas dimensiones.
- Los términos a ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimesniones.

Como ejemplo, considere la situación en la que desea determinar la posición x de un automóvil en un tiempo t que parte del reposo en $x = 0$ y se mueve con aceleración constante a. La expresión correcta para esa situación es $x = \frac{1}{2}at^2$.

Las dimensiones a ambos lados de la igualdad deben ser iguales. El $1/2$ es adimensional. Escribamos esto como sigue:

$$[x] = \left[at^2\right] = [a] \times [t]^2$$

Usando las dimensiones de aceleración del Cuadro 4, obtenemos

$$[x] = \left(\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2}\right)\left(\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^2\right) = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{(-2+2)} = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0.$$

Un procedimiento más general de análisis dimensional sería establecer una expresión de la forma:

$$x \propto a^n t^m,$$

donde $\propto$ quiere decir "proporcional a" y n y m son exponentes a ser determinados.

Las dimensiones a ambos lados de la igualdad deben ser iguales. Escribamos esto como sigue:

$$[x] = [a^n t^m] = [a]^n \, [t]^m$$

Usando, nuevamente, las dimensiones de aceleración del Cuadro 4, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0\mathrm{M}^0 &= \left(\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2}\right)^n \, \left(\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^1\right)^m = \left(\mathrm{L}^n\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2n}\right) \, \left(\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^m\right)\\
\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0\mathrm{M}^0 &= \left(\mathrm{L}^n\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2n}\right)\left(\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^m\right)\\
\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0\mathrm{M}^0 &= \mathrm{L}^n\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{(m-2n)}.
\end{aligned}$$

Los exponentes de L, M y T deben ser iguales a ambos lados de la igualdad, respectivamente. Por ejemplo, $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^n$, de lo que se deduce que $n = 1$. De la igualación de los exponentes de M se tiene $m - 2n = 0$ y sustituyendo el valor de $n = 1$ se obtiene $m = 2$. Se concluye así que $x \propto at^2$.

Ejemplo

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez constante v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r, digamos r^α, y a alguna potencia de v, digamos v^β. Determine los valores de α y β y escriba la forma más simple para una ecuación para la aceleración de dicha partícula.

Solución

Escribamos

$$a = kr^\alpha v^\beta \quad \rightarrow \quad [a] = k[r]^\alpha [v]^\beta.$$

Usando las dimensiones de a *(Cuadro 4),* r *y* v *(Cuadro 4), obtenemos:*

$$\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2} = \left(\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0\right)^\alpha \left(\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-1}\right)^\beta = \mathrm{L}^{(\alpha+\beta)}\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-\beta}$$

Igualando los exponentes de L, M *y* T *obtenemos*

$$\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{T}^{-\beta} \rightarrow \beta = 2; \qquad \mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^{\alpha+\beta} \rightarrow 1 = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = -1$$

Continuación

Sustituyendo los valores de α y β en la expresión para a, llegamos a

$$a = kr^{-1}v^2 = k\frac{v^2}{r}.$$

En el Capítulo §4, acerca del movimiento circular uniforme, se muestra que $k = 1$ si se usa un conjunto consistente de unidades. La constante de proporcionalidad k no sería igual a 1 si, por ejemplo, la rapidez v estuviese en $\mathrm{km/h}$ y quisieramos obtener la aceleración, a, en $\mathrm{m/s^2}$.

6. Conversión de unidades

La equivalencia entre unidades de longitud del SI y las usuale estadounidenses son las siguientes

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{mi} &= 1\,609\,\mathrm{m} = 1.609\,\mathrm{km} \\ 1\,\mathrm{ft} &= 0.304\,8\,\mathrm{m} = 30.48\,\mathrm{cm} \\ 1\,\mathrm{m} &= 39.37\,\mathrm{in} = 3.281\,\mathrm{ft} \\ 1\,\mathrm{pulg} &= 0.025\,4\,\mathrm{m} = 2.54\,\mathrm{cm}\ (\text{exactamente}). \end{aligned}$$

Del mismo modo que las dimensiones, las unidades se manipulan como cantidades algebraicas que se cancelan mutuamente. Por ejemplo, imagine que desea convertir 15 pulgadas ($15\,\mathrm{in}$) a centímetros. Dado que $1\,\mathrm{in}$ se define, exactamente, como $2.54\,\mathrm{cm}$, se encuentra que

$$(15.0\,\cancel{\mathrm{in}})\left(\frac{2.54\,\mathrm{cm}}{1\,\cancel{\mathrm{in}}}\right) = 38.1\,\mathrm{cm}.$$

Nota: Escriba las esquivalencias en forma de fracción y de modo a eliminar las unidades no deseadas.

Ejemplo

En una autopista intercomunal, de una dada región del país, un automóvil se mueve en línea recta con una rapidez de $38.0\,\mathrm{m/s}$. El límite de rapidez permitido es de $75\,\mathrm{mi/h}$. a) Argumente, en base a cálculos, si el automóvil se mueve bajo o sobre el límite de rapidez. b) Calcule la rapidez del automóvil en $\mathrm{km/h}$.

Solución

a) Convierta la rapidez de $\mathrm{m/s}$ *a* $\mathrm{mi/h}$*:*

$$\left(38.0\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}}\right)\times\left(\frac{1\,\mathrm{mi}}{1\,609\,\cancel{\mathrm{m}}}\right)\times\left(\frac{60\,\cancel{\mathrm{s}}}{1\,\cancel{\mathrm{min}}}\right)\times\left(\frac{60\,\cancel{\mathrm{min}}}{1\,\mathrm{h}}\right)=85.0\,\mathrm{mi/h}.$$

El conductor pasó del límite de rapidez permitido y debe reducirla.

b) Convierta la rapidez de $\mathrm{m/s}$ *a* $\mathrm{km/h}$*:*

$$\left(38.0\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}}\right)\times\left(\frac{1\,\mathrm{km}}{1\,000\,\cancel{\mathrm{m}}}\right)\times\left(\frac{60\,\cancel{\mathrm{s}}}{1\,\cancel{\mathrm{min}}}\right)\times\left(\frac{60\,\cancel{\mathrm{min}}}{1\,\mathrm{h}}\right)=137\,\mathrm{km/h}.$$

7. Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

¿Cuál es el número de bits de datos en un disco compacto musical de uso común? La respuesta no debe ser necesariamente exacta, sino más bién un valor estimado. El valor debe ser expresado como notación científica.

El *orden* de magnitud de un número se determina de la siguiente manera:

1. Exprese el número en notación científica, con el multiplicador de la potencia de 10 entre 1 y 10 unidades.
2. Si el multiplicador es $< 3.162 = \sqrt{10}$, el orden de magnitud del número es la potencia de diez en la notación científica. Si el multiplicador es > 3.162, el orden de magnitud es uno más grande que la potencia de diez en la notación científica.

El símbolo $\sim$, para "es del orden de", es usado.

Ejemplos de órdenes de magnitud de algunas longitudes

longitud	notación científica	orden de magnitud
$0.0086\,\mathrm{m}$	$8.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$\sim 10^{-2}\,\mathrm{m}$
$0.0021\,\mathrm{m}$	$2.1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$\sim 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$720\,\mathrm{m}$	$7.20 \times 10^{2}\,\mathrm{m}$	$\sim 10^{3}\,\mathrm{m}$

Ejemplo

Estime el número de respiraciones durante una vida humana promedio.

Solución

Comience por estimar que la vida humana promedio es de unos 70.0 años.

Considere el número promedio de respiraciones que una persona realiza en 1 minuto *(considere ejercitación, dormir, rabia, tranquilidad y cosas por el estilo). Digamos que el promedio es de* 10.0 *respiraciones por minuto.*

Estime el número de minutos en 1 *año:*

$$1\ \text{año}\left(\frac{365\ \cancel{\text{día}}}{1\ \cancel{\text{año}}}\right)\left(\frac{24.0\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\right)\left(\frac{60.0\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right) = 5.26\times 10^5\ \text{min}.$$

Estime el número de minutos en una vida promedio de 70.0 años*:*

$$70.0\ \cancel{\text{año}}\times\left(\frac{5.26\times 10^5\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{año}}}\right) = 3.68\times 10^7\ \text{min}.$$

Continuación

Estime el número de respiraciones (N) en una vida humana promedio

$$N = \left(\frac{10.0\,\text{respiraciones}}{1.00\,\cancel{\text{min}}}\right) \times (3.68 \times 10^7\,\cancel{\text{min}}) = 3.68 \times 10^8\,\text{respiraciones}$$

Vemos que el multiplicador en la notación científica es $3.68 > 3.162$ *así que de acuerdo a la segunda regla para estimación del orden de magnitud el exponente* 8 *de la potencia de* 10 *debe aumentar en una unidad,* $8 + 1 = 9$. *Así, en una vida humana promedio de* 70 *años una persona realiza* $\sim 10^9\,\text{respiracione}$.

8. Cifras significativas (CSs)

En cualquier medición los valores medidos son exactos dentro del error experimental (calidad del aparato, habilidad de experimentador y número de medidas).

El número de cifras *significativas* en una medición nos expresa algo sobre ese error.

Por ejemplo, se le pide calcular el área de un CD. Mide el radio (r) usando una regla con una precisión de $\pm 0.1\,\mathrm{cm}\,(\pm 1\,\mathrm{mm})$.

Suponga que mide un radio de $6.0\,\mathrm{cm}$. Dada la precisión de la regla, sólo puede afirmar que el valor del radio está en algún lugar entre 5.9 y $6.1\,\mathrm{cm}$.

El valor medido $6.0\,\mathrm{cm}$ tiene dos cifras significativas. Las cifras significativas *incluyen* el primer dígito estimado. Así, podemos escribir

$$r = (6.0 \pm 0.1)\,\mathrm{cm} \quad \text{y} \quad A = \pi r^2 = (3.1415) \times (6.0\,\mathrm{cm})^2 = 1.13 \times 10^2\,\mathrm{cm}^2,$$

o sea, un valor con tres cifras significativas.

8.1 Cifras significativas en la multiplicación y división

Cuando se multilpican o dividen cantidades:

> *El número de cifras significativas en el resultado final debe ser igual al de la cantidad con el menor número de cifras significativas.*

En el ejemplo anterior el radio tiene 2 CSs, luego el área es $A = 1.1 \times 10^2\,\mathrm{cm}^2$.

Los ceros pueden o no ser CSs. Por ejemplo, en los números 0.03 y 0.0075, no son significativos, y tienen 1 CS y 2 CSs, respectivamente.

Para evitar confusión se acostumbra usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. Considere los siguientes ejemplos:

cantidad	**notación científica**	**CSs**
$1500\,\mathrm{g}$	$1.5 \times 10^3\,\mathrm{g}$	2
	$1.50 \times 10^3\,\mathrm{g}$	3
	$1.500 \times 10^3\,\mathrm{g}$	4
$0.000\,23\,\mathrm{cm}$	$2.3 \times 10^{-4}\,\mathrm{cm}$	2
$0.000\,230\,\mathrm{s}$	$2.30 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$	3

8.2 Cifras significativas en la suma y resta

Cuando se suman o restan cantidades lo que importa son los *lugares* decimales:

> *El número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número de lugares decimales de la cantidad con el menor número de lugares decimales.*

Considere los siguientes ejemplos:

N°1	N°2	**Suma**	**CS**
123	5.35	128	3
1.000 1	0.000 3	1.000 4	5
1.002	0.998	2.000	4

N°1	N°2	**Resta**	**CS**
123	5.35	118	3
1.000 1	0.000 3	0.9998	4
1.002	0.998	0.004	1

Nota. Coloque los sumandos o restandos en forma de columna par visualizar mejor los lugares decimales.

8.3 Redondeo de números

Habrá notado que para escribir correctamente el resultado final de una operación generalmente debemos truncar (cortar) el resultado para que se adecue al requisito de las CSs.

Las siguientes reglas generales serán de utilidad para esto:

- Si el primer dígito a ser eliminado es > 5, el último dígito a ser retenido aumenta en una unidad.
- Si el primer dígito a ser eliminado es < 5, el último dígito a ser retenido permanece igual.
- Si el primer dígito a ser eliminado es $= 5$, el último dígito a ser retenido debe redondearse al número par mayor. Si ya es un número para se deja igual.

Veamos el siguiente ejemplo general: Obtiene el siguiente resultado $88527.3456\,\mathrm{cm}$ con 9 CSs. Primero lo reescribimos en notación científica:

$$8.85273456 \times 10^4\,\mathrm{cm} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{4 CSs} & 8.853 \times 10^4\,\mathrm{cm} \\ \text{5 CSs} & 8.827 \times 10^4\,\mathrm{cm} \\ \text{2 CSs} & 8.8 \times 10^4\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

Ejemplo

En una habitación de $12.71\,\mathrm{m}$ de largo y $3.46\,\mathrm{m}$ de ancho se instalará una alfombra. Calcule el área de la alfombra que calza con las dimensiones de la habitación.

Solución

Para calcular el área debemos multiplicar el largo por el ancho. O sea, $12.71\,\mathrm{m}$ *(4 CS) por* $3.46\,\mathrm{m}$ *(3 CS).*

Usando la calculadora, obtenemos

$$A = (12.71\,\mathrm{m})(3.46\,\mathrm{m}) = 43.976\,6\,\mathrm{m}^2.$$

Debemos escribirlo con 3 CSs. El primer dígito a ser eliminado es $7 > 5$*, el último dígito a ser retenido es el* 9 *que debe aumentar en una unidad, o sea a* 10*, de modo tal que, el área de la alfombra es*

$$A = 44.0\,\mathrm{m}^2.$$

Propuesta*: Calcule el perímetro de la alfombra.*

9. Propagación de incertidumbres (errores)

Medidas experimentales actúan como datos crudos (longitud, intervalos de tiempo, temperatura, masa, voltaje, corrientes eléctricas, etc.): Son tomadas con una amplia variedad de instrumentos.

Independiente de la medida y de la calidad de los instrumentos, siempre existe un *error* asociado en una medición física:

- Asociado al instrumento de medida: Por ejemplo, inhabilidad para determinar exactamente la posición de una medida de longitud entre dos líneas de una regla métrica.
- Sistema bajo medición: Por ejemplo, variación de temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que una única temperatura de la muestra es difícil de determinar.

Suponga que mide las cantidades a, b, $c, \ldots$ con errores Δa, Δb, Δc, $\ldots$.

Desea calcular la cantidad Q que depende de $a\,b\,c\,\ldots$, o sea, $Q(a\,b\,c\,\ldots)$.

Los errores Δa, Δb, $\Delta c\,\ldots$ "se propagan" al error de la cantidad Q. Esto es, $\Delta Q(\Delta a,\, \Delta b,\, \Delta c\,\ldots)$.

9.1 Propagación de error en la adición o sustracción

En el tratamiento que sigue los errores *siempre* se reducirán a 1 CS, y su lugar decimal siempre debe coincidir con el lugar decimal de la última CS de la cantidad señalada.

Sea la cantidad Q una combinación de sumas y restas, esto es:

$$Q = a + b + c + \cdots - (x + y + z)\,, \tag{1}$$

entonces

$$\Delta Q = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \cdots + \Delta x + \Delta y + \Delta z, \tag{2}$$

es decir, los errores se *suman*.

En particular, si $Q = a \pm b$, se tiene

$$\Delta Q = \Delta a + \Delta b. \tag{3}$$

Ejemplo

Suponga que la medida de la altura H de una puerta es $(2.00 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$. La puerta tiene una manilla que se encuentra a la altura $h = (0.88 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$ desde la base de la puerta. Calcule distancia desde la manilla al tope de la puerta, incluyendo el error en su resultado.

Solución

Queremos calcular Q. Escribamos $Q = H - h$, y su error ΔQ.

Primero calculamos Q, esto es:

$$Q = H - h = (2.00 - 0.88)\,\mathrm{m} = 1.12\,\mathrm{m}.$$

Luego calculamos ΔQ, usando la Ec.3:

$$\Delta Q = \Delta H + \Delta h = (0.01 + 0.01)\,\mathrm{m}) = 0.02\,\mathrm{m}$$

de modo que la cantidad procurada puede ser escrita como

$$Q = (1.12 \pm 0.02)\,\mathrm{m}$$

Si usted suma o resta una cantidad con error a una cantidad *exacta* (sin error), el error en la suma o la resta es exactamente igual al error de la cantidad con error.

Por ejemplo, suponga que $y = x \pm x_0$, donde $x \equiv x \pm \Delta x$ y x_0 es una constante exacta. Entonces

$$\Delta y = \Delta x + \cancelto{0}{\Delta x_0} \quad \rightarrow \quad \Delta y = \Delta x$$

9.2 Propagación de error en la multiplicación o división.

En el caso de catidades que resultan de multiplicaciones o divisiones de cantidades con errores se acostumbra calcular el error fraccional de la cantidad, $\Delta Q/|Q|$, y a partir de ella, el error ΔQ.

Sea Q un producto y división de cantidades con errores

$$Q = \frac{abc\cdots}{\cdots xyz}, \tag{4}$$

entonces, se tiene

$$\frac{\Delta Q}{|Q|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \cdots + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|}. \tag{5}$$

o sea, el error fraccional de una multiplicación o división de cantidades con errores es igual a la suma de los errores fraccionales.

Del error fraccional de una cantidad x se sigue directamente su error porcentual:

$$\text{error porcentual de}\, x: \quad \left(\frac{\Delta x}{|x|}\right) 100\%$$

Ejemplo

Un pájaro vuela una ditancia $d = (120 \pm 3)\,\mathrm{m}$ durante un tiempo $t = (20 \pm 1)\,\mathrm{s}$. Calcule la rapidez del pájaro, $v = d/t$, y su error.

Solución

Primero calculamos la rapidez v del pájaro:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{120\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}} = 6.0\,\mathrm{m/s}$$

Luego calculamos el error fraccional de v, esto es:

$$\frac{\Delta v}{|v|} = \frac{\Delta d}{|d|} + \frac{\Delta t}{|t|} = 0.02 + 0.05 = 0.07$$

Ahora calculamos Δv

$$\Delta v = \left(\frac{\Delta v}{|v|}\right)|v| = (0.07)(6.0\,\mathrm{m/s}) = 0.4\,\mathrm{m/s}$$

Así, la rapidez del pájaro es $v = (6.0 \pm 0.4)\,\mathrm{m/s}$.

En el caso de la multiplicación o división de una cantidad con error por una cantidad exacta (sin error) el error fraccional de la cantidad calculada es igual al error fraccional de la cantidad con error.

En ejemplo del CD, el radio era $r = (6.0 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$. Si le piden calcular el perímetro del CD debería hacer $2\pi r$. Note que el 2 y π son cantidades exactas, entonces el error fraccional en el cálculo del perímetro sería

$$\frac{\Delta P}{|P|} = \overbrace{\cancel{\frac{\Delta 2}{|2|}}}^{0} + \overbrace{\cancel{\frac{\Delta \pi}{|\pi|}}}^{0} + \frac{\Delta r}{|r|} = \frac{\Delta r}{|r|}$$

Y así, $P = 2\pi r = 2(3.1415)(6.0) = 37.697\,\mathrm{cm}$

$$\frac{\Delta P}{|P|} = \frac{\Delta r}{|r|} = \frac{0.1}{|6.0|} = 0.02 \quad \rightarrow \quad \Delta P = (0.02)(37.697\,\mathrm{cm}) = 0.8\,\mathrm{cm}$$

De modo que el perímetro del CD es

$$P = (37.7 \pm 0.8)\,\mathrm{cm} \equiv (3.77 \pm 0.08) \times 10^{1}\,\mathrm{cm}$$

En la propagación del error quien determina el número de CSs es el lugar decimal del error.

9.3. Propagación de error para potencias.

Las potencias se tratan como simples multiplicaciones, esto es, nos interesa el error fraccional. Mas en este caso existe una fórmula simple para calcularlo.

Suponga que n es un entero y $Q = x^n$, entonces:

$$\frac{\Delta Q}{|Q|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta x}{|x|} + \cdots = |n|\frac{\Delta x}{|x|} \tag{6}$$

Es decir, el error fraccional de la cantidad independiente (x) es multiplicado por $|n|$ (el valor absoluto de n) cuando x está elevado a la n-ésima potencia.

¿Qué pasa cuando $n = -1$? Nada. Suponda que $Q = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, entonces, usando el tratamiento del error para la multiplicación se tiene

$$\frac{\Delta Q}{|Q|} = \cancelto{0}{\frac{\Delta 1}{|1|}} + \frac{\Delta x}{|x||} = \frac{\Delta x}{|x|},$$

o sea, los errores fraccionales de la cantidad dependiente (Q) e independiente (x) son iguales.

Ejemplo

El período (T) de un partícula en movimiento armónico simple (tiempo que demora en hacer una oscilación completa) es $T = (0.20 \pm 0.01)\,\mathrm{s}$. Calcule la frecuencia $f = T^{-1}$ del movimiento, y su error.

Solución

La frecuencia del movimiento es:

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1} = \frac{1}{0.20\,\mathrm{s}} = 5.0\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Sabemos que el error fraccional de f es igual al error fraccional de T:

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta T}{|T|} = \frac{0.01}{0.20} = 0.05; \quad \Delta f = |f|(0.05) = (5.0\,1/\mathrm{s})(0.05) = 0.25\,1/\mathrm{s},$$

de modo que, redondeando a una CS, nos permite escribir f como:

$$f = (5.0 \pm 0.2)\,\mathrm{s}^{-1}$$

9.4. Propagación de error en fórmulas más complicadas

En estos casos la combinación de las reglas de arriba puede funcionar bien.

Ejemplo

Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial $v_{0y} = (4.0 \pm 0.1)\,\mathrm{m/s}$. Después de un tiempo $t = (0.60 \pm 0.01)\,\mathrm{s}$, la altura de la bola es dada por la expresión $y(t) = v_{0y}t - (4.9\,\mathrm{m/s^2})t^2$. Calcule $y(t)$ y su error.

Solución

Descompongamos la expresión para $y(t)$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= v_{0y}t = (4.0\,\mathrm{m/s})(0.60\,\mathrm{s}) = 2.4\,\mathrm{m} \\
Q_2 &= t^2 = (0.60\,\mathrm{s})^2 = 0.36\,\mathrm{s}^2 \\
Q_3 &= (4.9\,\mathrm{m/s^2})(0.36\,\mathrm{s}^2) = 1.764\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

De la que nos resulta:

$$y(t) = Q_1 - Q_3 = (2.4 - 1.764)\,\mathrm{m} = 0.636\,\mathrm{m}$$

Continuación

Ahora calculamos el error de Q_1:

$$Q_1 = v_{0y} t; \quad \frac{\Delta Q_1}{|Q_1|} = \frac{\Delta v_{0y}}{|v_{0y}|} + \frac{\Delta t}{|t|} = 0.02 + 0.02 = 0.04$$

de modo tal que

$$\Delta Q_1 = (0.04)|Q_1| = (0.04)(2.4\,\mathrm{m}) = 0.1\,\mathrm{m}$$

Ahora calculamos el error en Q_2

$$Q_2 = t^2; \quad \frac{\Delta Q_2}{|Q_2|} = 2\left(\frac{\Delta t}{|t|}\right) = 2(0.02) = 0.04$$

de modo tal que

$$\Delta Q_2 = (0.04)|Q_2| = (0.04)(0.36\,\mathrm{s}^2) = 0.01\,\mathrm{s}^2$$

Continuación

Ahora calculamos el error en Q_3

$$Q_3 = (4.9\,\mathrm{m/s^2})Q_2; \quad \frac{\Delta Q_3}{|Q_3|} = \frac{\Delta Q_2}{|Q_2|} = 0.04$$

de modo que

$$\Delta Q_3 = (0.04)|Q_3| = (0.04)(1.764\,\mathrm{m}) = 0.07\,\mathrm{m}$$

Finalmente, calculamos el error en $y(t)$

$$y(t) = Q_1 - Q_3; \quad \Delta y(t) = \Delta Q_1 + \Delta Q_3 = (0.1 + 0.07)\,\mathrm{m} = 0.2\,\mathrm{m}$$

y podemos escribir

$$y(t) = (0.6 \pm 0.2)\,\mathrm{m}$$

Como regla general escriba la expresión de la forma más reducida posible.

Suponga que mide una vez la variable x y una vez la variable y, ambas con sus respectivos errores asociados. Desea calcular:

$$Q = \frac{x}{x+y} \quad \text{y} \quad \Delta Q.$$

La variable x aparece dos veces, mas ella fue medida solo una vez. Lo primero sería reducir la expresión para Q de modo que las variables aparezcan solo una vez:

$$Q = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}}.$$

Ahora reescribamos la expresión para Q de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Q_1 = \frac{y}{x} \quad &\rightarrow \quad \frac{\Delta Q_1}{|Q_1|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \\
Q_2 = 1 + Q_1 \quad &\rightarrow \quad \Delta Q_2 = \Delta Q_1 \\
Q = \frac{1}{Q_2} = Q_2^{-1} \quad &\rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{|Q|} = \frac{\Delta Q_2}{|Q_2|}
\end{aligned}$$

9.5. Comparación de dos cantidades

Pedro y Pablo miden la rapidez de una bola en movimiento. Pedro mide $A = (3.6 \pm 0.2)\,\mathrm{m/s}$ y Pablo, $B = (3.3 \pm 0.3)\,\mathrm{m/s}$. ¿Concuerdan, son iguales, las dos mediciones?

Si los dos valores fueran muy próximos entre sí, o si los errores fueran ligeramente mayores, la respuesta sería un bonito ¡Si!

Si los errores fueran pequeños, o los valores muy diferentes, la respuesta sería un rotundo ¡No! Pero en este caso la respuesta no sería del todo clara.

Para ver si las medidas son iguales calcule la diferencia $D = |A - B|$.

$$D = |A - B| = (3.6 - 3.3)\,\mathrm{m/s} = 0.3\,\mathrm{m/s};$$
$$\Delta D = \Delta A + \Delta B = (0.2 + 0.3)\,\mathrm{m/s} = 0.5\,\mathrm{m/s}$$

La cuestión de si A es igual a B ha sido reducida a la cuestión de si D se aproxima de cero, y el error de las medidas pasado al error de la resta.

No hemos mostrado que las medidas de Pedro y de Pablo sean *iguales*, sino que ellas *podrían* ser iguales.

Si hubieramos encontrado que $D = (0.002 \pm 0.004)\,\mathrm{m/s}$, estaríamos más convencido de que $A = B$.

Se podría mostrar que dos cantidades *no* son iguales, por lo menos en un alto grado de seguridad.

Por ejemplo, si D es 3 veces mayor que ΔD, pone serias dudas en la hipótesis de que las dos cantidades sean iguales, debido a que $D = 0$ está tres desviaciones estándares lejos de su resultado observado.

A menudo, las descubiertas en la ciencia se realizan con ese procedimiento: Primero, se hace una predicción sobre lo que se verá *si sea lo que sea que está tratando de descubrir no está realmente ahí*: **hipótesis nula**.

Luego, se compara la hipótesis nula con los resultados experimentales.

Si los dos difieren por tres desviaciones estándares, $3\Delta = 3\sigma$, puede estar seguro de que la hipótesis nula estaba errada. Se hizo una *decubierta*.

Si la descubierta es importante, la comunidad científica querrá repetir o extender el experimento, para aumentar el nivel de seguridad en el resultado más allá de una simple medición de 3Δ.

En el ejemplo de las medidas de Pedro y Pablo:

Hipótesis nula: Las medidas son iguales:	$\rightarrow$	$D = 0$
Resultado experimental:	$\rightarrow$	$D = (0.015 \pm 0.04)\,\mathrm{m/s}$
Comparación:	$\rightarrow$	$D > 3\Delta D; \quad D \neq 0$
Descubierta:	$\rightarrow$	Las medidas no son iguales