

Desarrollos Evaluación 1
Cálculo I (527140)

Instrucciones. Desarrollar justificadamente los siguientes problemas.

Tiempo. 100 minutos

Problema 1. (26 puntos)

Encontrar el conjunto solución de cada uno de los siguientes problemas.

(a) $|2x^2 + 6x + 4| = 2x + 4$

Factorizamos $2x^2 + 6x + 4 = 2(x + 2)(x + 1)$. Por consiguiente hay que estudiar tres intervalos:

- $x \leq -2$: en este intervalo $2x^2 + 6x + 4$ es no negativo. La ecuación queda $2x^2 + 6x + 4 = 2x + 4$, que tiene las soluciones $x = -2$ y $x = 0$. Sólo $x = -2$ pertenece al intervalo estudiado.
- $-2 < x < -1$: en este intervalo $2x^2 + 6x + 4$ es negativo. La ecuación queda $-(2x^2 + 6x + 4) = 2x + 4$, que tiene la solución $x = -2$. No pertenece al intervalo.
- $x \geq -1$: en este intervalo $2x^2 + 6x + 4$ es no negativo. La ecuación queda nuevamente $2x^2 + 6x + 4 = 2x + 4$, que tiene las soluciones $x = -2$ y $x = 0$. Sólo $x = 0$ pertenece al intervalo estudiado.

El conjunto solución es $\{-2, 0\}$.

(b) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 4x + 3} < 0$

La expresión queda factorizada de la forma $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-1)} < 0$.

- Si $x < -2$, los cuatro factores son negativos: la fracción es positiva.
- Si $-2 < x < 1$, tres factores son negativos: la fracción es negativa.
- Si $1 < x < 3$, un factor es negativo: la fracción es negativa.
- Si $x > 3$, ningún factor es negativo: la fracción es positiva.

El conjunto solución es $(-2, 1) \cup (1, 3)$.

(c) $\sqrt{-x} \geq 2 + x$

El problema tiene la restricción $-x \geq 0$, es decir $x \leq 0$. La estrategia a seguir depende del signo de $2 + x$:

- Si $2 + x < 0$, es decir $x < -2$, la inecuación es verdadera. Considerando la restricción, queda el subconjunto $(-\infty, -2)$.

- Si $2 + x \geq 0$, es decir $x \geq -2$, ambos lados de la inecuación son no negativos, se pueden elevar al cuadrado y queda $-x \geq 4 + 4x + x^2$, lo que equivale a $0 \geq 4 + 5x + x^2 = (x+4)(x+1)$. Estudiando los signos, queda que $x \in [-4, -1]$. Considerando la restricción, queda el subconjunto $[-2, -1]$.

El conjunto solución es $(-\infty, -1]$.

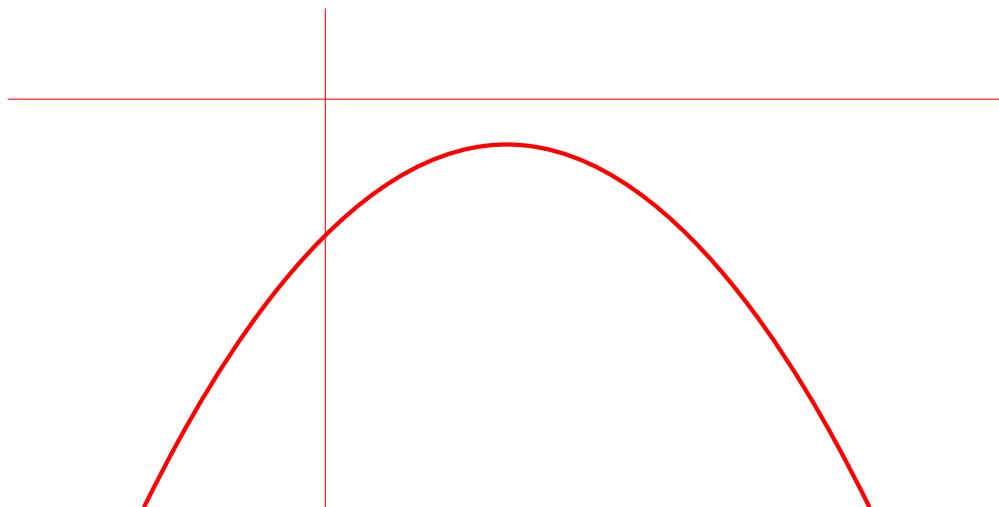
Problema 2. (12 puntos)

Considerar la parábola de ecuación $P : x - y = 3 + \frac{x^2}{8}$. Determinar su orientación, vértice, foco y directriz; y luego esbozar su gráfica.

Reordenando y completando cuadrado de binomio,

$$\begin{aligned} 3 + \frac{x^2}{8} &= x - y \\ x^2 - 8x &= -8y - 24 \\ (x - 4)^2 &= -8(y + 1) \end{aligned}$$

Reconocemos que es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en $(4, -1)$ y distancia vértice-foco igual a 2. Por consiguiente su foco es el punto $(4, -3)$ y su directriz es la recta $y = 1$.



Problema 3. (22 puntos)

Considerar la siguiente definición:

La *potencia* de un punto P respecto a una circunferencia C de radio r es el valor $\mathbf{F}_C(P) = d^2 - r^2$, donde d es la distancia de P al centro de C .

- (a) Dados la circunferencia $C : x^2 - 6x + y^2 - 4y + 12 = 0$ y el punto $P = (1, 1)$, calcular $\mathbf{F}_C(P)$ usando la definición anterior.

Reordenando y completando cuadrado de binomio,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y &= -12 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

El radio de esta circunferencia es 1; la distancia entre su centro $(3, 2)$ y el punto P es $\sqrt{5}$. Por lo tanto la potencia pedida es $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$.

- (b) Sean P y Q los puntos de intersección de dos circunferencias C_1 y C_2 . Justificar por qué $\mathbf{F}_{C_1}(P) = \mathbf{F}_{C_2}(P)$ y $\mathbf{F}_{C_1}(Q) = \mathbf{F}_{C_2}(Q)$.

Notamos que si un punto está en una circunferencia de radio r , entonces su distancia al centro es igual al radio, por definición. Entonces la potencia del punto es $r^2 - r^2 = 0$. Observamos que las cuatro potencias del enunciado son de este tipo, y por consiguiente son todas iguales a cero e iguales entre sí.

- (c) Sean $C_1 : (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$ y $C_2 : (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2$ dos circunferencias con centros distintos. Plantear la ecuación del lugar geométrico de los puntos con igual potencia con respecto a C_1 y C_2 , y justificar por qué es siempre una recta.

Para un punto (x, y) la condición de que ambas potencias sean iguales se escribe

$$\left(\text{distancia entre } (x, y) \text{ & } (p_1, q_1) \right)^2 - r_1^2 = \left(\text{distancia entre } (x, y) \text{ & } (p_2, q_2) \right)^2 - r_2^2.$$

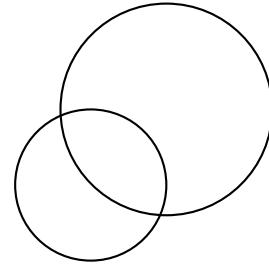
Desarrollando, queda

$$\begin{aligned} (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 &= (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 \\ -2p_1x - 2q_1y + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 &= -2p_2x - 2q_2y + p_2^2 + q_2^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

Observamos que los términos cuadráticos se cancelan; y como $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ los coeficientes de x e y no se cancelarán: por lo tanto queda una ecuación polinomial de grado uno, que corresponde a una recta.

- (d) Copiar el dibujo adjunto y esbozar el lugar geométrico de los puntos con igual potencia con respecto a ambas circunferencias. No es necesario encontrar ecuaciones o coordenadas.

Ayuda. Para abordar (d) se pueden usar las conclusiones de (b) y (c) aun sin haberlas respondido.



Por el item (c) sabemos que el lugar geométrico es una recta; por el item (b) sabemos que los puntos donde las circunferencias se intersectan se encuentran en el lugar geométrico. Como dos puntos determinan una recta, el dibujo queda

