UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Listado 3

1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $T : V \to V$ una transformación lineal para la cual existe $n \in \mathbb{N}$ y $v_0 \in V$ tales que $T^n(v_0) = \theta$ y $T^{n-1}(v_0) \neq \theta$. Pruebe que el conjunto $\{v_0, T(v_0), \ldots, T^{n-1}(v_0)\}$ es l.i.

2. Sea $B = \{e^x, xe^x, x^2e^x\} \subseteq \mathcal{F}$ y $D : \langle B\rangle \to \langle B\rangle$ el operador derivada definido por:
$$D(f) = \frac{df}{dx}, \qquad \forall f \in \langle B\rangle.$$
   a) Muestre que B es linealmente independiente.
   b) Pruebe que D es un automorfismo.
   c) Determine D^{-1}.

3. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal definida por:
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ L(x) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$
   a) Muestre que L no es un isomorfismo.
   b) Demuestre que $\mathbb{R}^n = Ker(L) \oplus Ker(L - nId)$.

4. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Muestre que:
   a) $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$.
   b) $Im(T^2) \subseteq Im(T)$.
   c) $T^2 = \theta \Longleftrightarrow Im(T) \subseteq Ker(T)$.

5. Dos transformaciones lineales $S, T : V \to V$ se dicen similares, denotado por $S \sim T$ si $\exists P : V \to V$ automorfismo tal que $T = P^{-1} \circ S \circ P$.
   a) Muestre que la relación de similaridad definida por $S \sim T$ es de equivalencia en $\mathcal{L}(V, V)$.
   b) Determine $[Id]_{\sim}$.

6. Sea V y W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con $dim(V) = dim(W) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $V \cong W$.

7. Sea la función $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(p) = \int_0^x p(t)\,dt, \qquad \forall p \in P_2(\mathbb{R}).$$

   a) Muestre que T es lineal.
   b) Determine si T es inyectiva o sobreyectiva.

8. Sea $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ una función definida por: $f(A) = A + A^t$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

   a) Muestre que f es lineal.
   b) Determine si f es un isomorfismo.
   c) Calcule $\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ f^k(A)$.

9. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que:

   a) $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.
   b) $Ker(T + I) \subseteq Ker(T)$ y $T + I$ es un automorfismo.