UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 2 - 525301

Análisis Real I

La siguiente tarea se entrega en parejas (no se aceptarán tareas individuales) y consiste de 3 preguntas de 20 puntos cada una. La fecha de entrega es el **25 de Junio del 2021 a las 23:59 hrs**, se recomienda mandar antes para evitar atrasos (No se aceptarán). La tarea debe ser escrita en $\LaTeX$. Se debe entregar via e-mail a eshenriquez2016@udec.cl

Problema 1. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales, con $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, existe al menos un $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_j > 0$ (Es decir, no todos los términos son nulos). Demuestre que la serie $\sum b_n$, con

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es divergente.

Problema 2. Sea $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestra que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una suseción de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Da un ejemplo que ilustre que la condición de continuidad uniforme es necesaria.

Problema 3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

a) Se define la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que si $\lim_n x_n = L$, entonces $\lim_n y_n = L$. Además, dar un contraejemplo de por qué el recíproco no se cumple.

b) Demostrar que si

$$\lim_n x_{n+1} - x_n = L,$$

entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{n} = L.$$

(*Hint: Usar la parte a).*)