Álgebra II

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre 2 - 2024

Tema Nº4: Espacios Vectoriales con Producto Interior

Introducción

En este capítulo vamos a generalizar un aspecto de la geometría euclidiana a espacios vectoriales abstractos.

Para lograr lo anterior, buscaremos definir el producto interior en espacios vectoriales abstractos, y de dimensiones arbitrarias. Como buscamos total generalidad y total libertad, y como lo que nos gusta de producto interno son sus **cualidades**, no su forma precisa, entonces lo definiremos a través de las **propiedades que nos interesa que cumpla.**

Producto Interior en $\mathbb{R}^3$

Definición

Dados los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_2)^t$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)^t$ de $\mathbb{R}^3$, se llama producto interior, producto punto o producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al número real, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Propiedades: Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, luego se cumplen:

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2. $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{u})$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

E.V. con Producto Interior

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Un producto interior en V es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall u, v, w \in V : \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
2. $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
3. $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
4. $\forall u \in V : \langle u, u \rangle \geq 0$
5. $\forall u \in V : \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

E.V. con Producto Interior

Ejemplo:

Considere $\mathbb{R}^3$, la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_1 z_2$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ e $y = (y_1, y_2, y_3)^t$. Muestre que la aplicación es un producto interior sobre $\mathbb{R}^3$.

E.V. con Producto Interior

Ejemplo:

Considere $\mathbb{C}^3$, la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definida como:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_1 z_2$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ e $y = (y_1, y_2, y_3)^t$. Muestre que la aplicación no es un producto interior sobre $\mathbb{C}^3$.

E.V. con Producto Interior

De acuerdo con lo anterior, podemos definir dos productos interiores usuales, como sigue:

1. En $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, el producto interior usual:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   donde $x = (x_1, ..., x_n)^t$ e $y = (y_1, ..., y_n)^t$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$.
2. En $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, el producto interior usual:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \ \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

   donde $x = (x_1, ..., x_n)^t$ e $y = (y_1, ..., y_n)^t$ pertenecen a $\mathbb{C}^n$.

E.V. con Producto Interior

Propiedades

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interior sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces se cumplen:

1. $\forall u, v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}:\ \langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$
2. $\forall u, v, w \in V:\ \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
3. $\forall u, w \in V: |\langle u, w \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle w, w \rangle^{1/2}$

Normas y Espacios Normados

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Se dice que la función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ define una norma en V si verifica:

1. $\forall v \in V : \|v\| \geq 0.$
2. $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta.$
3. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|.$
4. $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

En tal caso, se dice que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

Normas y Espacios Normados

Ejemplo:

Si $V = \mathbb{R}^n$. Muestre que la función

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, \; \|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$$

es una norma.

Normas y Espacios Normados

Observación: Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un $\mathbb{K}$-e.v. con producto interior, entonces la función:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+, \ \|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

es una norma en V, llamada norma inducida por el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Normas y Espacios Normados

Proposición

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-e.v. con producto interior. Entonces la norma inducida $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ satisface:

1. $\forall u, v \in V : \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) = 0.$
2. $\forall u, v \in V : \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$

Ejercicio

Considere en $V = \mathbb{R}^2$ los siguientes productos interiores:

$$\langle x, y\rangle_2 = x_1y_1 + x_2y_2 \qquad \text{y} \qquad \langle x, y\rangle_* = x_1y_1 + 3x_2y_2$$

y las siguientes normas:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2\}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{y}$$
$$\|x\|_* = \sqrt{x_1^2 + 3x_2^2}$$

1. Calcule las normas anteriores para $(2, .1)$.
2. Pruebe que la norma $\|x\|_\infty$ no cumple la ley del paralelogramo, pero las otras dos si lo hacen.
3. Calcule el producto interior entre $(1, 2)$ y $(2, -1)$ con ambos productos.

E.V. con Producto Interior

Definición:

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-e.v. con producto interior, decimos que:

1. Si $u, v \in V$ son tales que $\langle u, v \rangle = 0$, se dice que u y v son vectores ortogonales.
2. Un conjunto $S \subseteq V$ se llamará ortogonal si
$$\forall u, v \in S, u \neq v : \langle u, v \rangle = 0$$
3. Un conjunto $S \subseteq V$ se llamará ortonormal si S es un conjunto ortogonal y
$$\forall u \in S : \|u\| = \langle u, v \rangle^{1/2} = 1$$

Lema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interior, y sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$. Si A es un conjunto ortogonal, entonces A es linealmente independiente.

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interior, y sea $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ un conjunto ortogonal tal que $S = \langle A \rangle$. Luego, para todo $w \in S$ tal que:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

se verifica que:

$$\alpha_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \quad \text{y} \quad \|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle w, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2}$$

Método de Gram-Schmidt

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interior y sea $A = \{v_1, ..., v_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Se construye otro conjunto $B = \{u_1, ..., u_n\}$ por recurrencia, como sigue:

$$u_1 = v_1 \qquad \text{y} \qquad u_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle v_{i+1}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

Entonces, B es ortogonal y genera al mismo espacio que A.

Ejercicios

1. Si $V = \mathbb{R}^2$, provisto del producto usual y sea
$$A = \{(1,1)^t, (2,1)^t\}.$$
Determine un conjunto B ortogonal. ¿Es B una base de V?
2. Si $V = \mathbb{C}^3$, provisto del producto usual y sea
$$S = \left\langle \{(1,0,-1)^t, (0,i,2i)^t, (i,3i,-i)^t\} \right\rangle.$$
Determine una base ortogonal para S.
3. Determinar una base B ortogonal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto al siguiente producto interior:
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Ejercicios

Solución 2: Primero se debe verificar que el conjunto

$$B_1 = \{(1,0,-1)^t, (0,i,2i)^t, (i,3i,-i)^t\}$$

es base de S (hacerlo). Ahora bien, para obtener una base ortogonal para S utilizamos el Método de Gram-Schmidt, como sigue:

$$u_1 = (1,0,-1)^t$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1 = (i,i,i)^t$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}u_2 = (-i,2i,-i)^t$$

Así la base ortogonal pedida es:

$$B_2 = \{(1,0,-1)^t, (i,i,i)^t, (-i,2i,-i)^t\}$$

Complemento Ortogonal

Definición

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior, y $A \subseteq V$, no vacío. Se define el complemento ortogonal de A como:

$$A^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in A\}$$

Propiedades: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior. Si V es finito dimensional, entonces:

1. Para todo $A \subseteq V$, no vacío. El complemento ortogonal de A es un s.e.v. de V.
2. $\{\theta\}^{\perp} = V$ y $V^{\perp} = \{\theta\}$.
3. Para todo $A \subseteq V$, no vacío, se cumple que $A^{\perp} = \langle A\rangle^{\perp}$.
4. Para cualquier s.e.v de S de V, se cumple que:

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S \quad \text{y} \quad S \cap S^{\perp} = \{\theta\}$$

Complemento Ortogonal

Teorema de la Descomposición Ortogonal

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior. Si V es finito dimensional, entonces:

1. Para todo $A \subseteq V$, se cumple que $V = \langle A \rangle \oplus A^{\perp}$.
2. Para cualquier s.e.v S de V, se cumple que $V = S \oplus S^{\perp}$.

Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ provisto de su producto interior usual. Determine el complemento ortogonal del s.e.v.

$$S = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$$

2. Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, provisto del producto interior usual

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^t A)$$

Determine el complemento ortogonal de los siguientes s.e.v

$$U = \{A \in V : A^t = A\} \quad \text{y} \quad W = \{\alpha I \in V : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Proyección Ortogonal

Si consideramos a $\mathbb{R}^2$, podemos recordar que la proyección de un vector u sobre otro w_1 es paralela al vector w_1, es decir,

$$w = \text{Proy}_{w_1} u = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

Ahora bien, si consideramos un conjunto $B = \{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ base ortogonal de un plano, se cumple que cualquier vector w del plano se puede escribir como:

$$w = \frac{\langle w, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle w, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \text{Proy}_{w_1} w + \text{Proy}_{w_2} w$$

Proyección Ortogonal

Ahora bien, si consideramos el teorema de la descomposición ortogonal, sabemos que si v es un vector de un e.v. V, finito dimensional, dotado con un producto interior, se tiene que:

$$v = u + w$$

donde $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$, siendo S un subespacio vectorial de V. Notemos que, si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortogonal de S, se tiene:

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + ... + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

este último vector se conoce como proyección ortogonal de v sobre S y se denota por $u = \text{Proy}_S(v)$

Proyección Ortogonal

Definición

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y S un s.e.v de V. Se define la **proyección ortogonal** de v sobre S como el vector u **que está más cerca** de v, es decir, el vector $u \in S$ que cumple:

$$\forall w \in S : \|v - u\| \leq \|v - w\|$$

tal vector lo denotamos por $u = \text{Proy}_S(v)$.

Observaciones:

1. Sea $v \in V$ y S un subespacio de V, finito dimensional. Luego, $u \in S$ es la **mejor aproximación** de v sobre S ssi $u = \text{Proy}_S(v)$
2. Si V es un e.v con p.i $B = \{v_1, .., v_n\}$ es una base ortogonal de S, entonces para todo $v \in V$, se tiene que $u = \text{Proy}_S(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$.
3. El teorema de la descomposición ortogonal también puede plantearse como sigue:

$$\forall v \in V : v = \text{Proy}_S(v) + \text{Proy}_{S^\perp}(v)$$

Ejercicios

1. Si $\mathbb{R}^3$ está provisto de su p.i usual. Determine la proyección ortogonal de $(4,3,-2)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}$$

2. Si $\mathbb{R}^4$ está provisto de su p.i usual. Determine la proyección ortogonal de $(4,8,-4,12)^t \in \mathbb{R}^4$ sobre el subespacio:

$$W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a - 2b + c = a - 3b + c + d = 0\}$$

3. Si $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ está provisto del siguiente p.i:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \ \ \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

   Calcular la proyección ortogonal de $v(x) = x^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre el subespacio $W = \langle \{(x+1)^2, x^2+1\} \rangle$

Ejercicios

Solución 3): Para determinar la proyección ortogonal de $v(x)$ sobre W no es necesario tener base ortogonal de W. Ahora bien, podemos recordar que:

$$v(x) = \text{Proy}_W(x^2) + \text{Proy}_{W^\perp}(x^2) = a(x) + b(x)$$

luego, podemos notar que $b(x) = v(x) - a(x) \in W^\perp$. Además, sabemos que $a \in W$, por ende, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$a(x) = \alpha_1(x+1)^2 + \alpha_2(x^2+1)$$

Así, considerando todo lo anterior, se tiene que:

$$\left\langle x^2 - a(x), (x+1)^2 \right\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \left\langle x^2 - a(x), x^2+1 \right\rangle = 0$$

Ejercicios

Resolviendo lo anterior, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle x^2, (x+1)^2 \right\rangle - \left\langle a(x), (x+1)^2 \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle x^2, (x+1)^2 \right\rangle - \alpha_1 \left\langle (x+1)^2, (x+1)^2 \right\rangle - \alpha_2 \left\langle x^2+1, (x+1)^2 \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 \left\langle (x+1)^2, (x+1)^2 \right\rangle + \alpha_2 \left\langle x^2+1, (x+1)^2 \right\rangle = \left\langle x^2, (x+1)^2 \right\rangle
\end{aligned}
$$

además,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle x^2, x^2+1 \right\rangle - \left\langle a(x), x^2+1 \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle x^2, x^2+1 \right\rangle - \alpha_1 \left\langle (x+1)^2, x^2+1 \right\rangle - \alpha_2 \left\langle x^2+1, x^2+1 \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 \left\langle (x+1)^2, x^2+1 \right\rangle + \alpha_2 \left\langle x^2+1, x^2+1 \right\rangle = \left\langle x^2, x^2+1 \right\rangle
\end{aligned}
$$

Al plantear el sistema de ecuaciones, se obtendrán los valores de α_1 y α_2, y con ellos la proyección ortogonal de $v(x)$ sobre W.

Mejor Aproximación

Corolario

Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ cualquier base de un s.e.v S de $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un e.v con p.i de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Entonces, la mejor aproximacíın de $v \in V$ por vectores de S está dada por $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$. Los escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_n\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n\rangle \end{pmatrix}$$