El Teorema de la Aplicación Abierta

Sebastián Pérez Garbayo

23 de enero de 2020

1. Contexto

El Teorema de la Aplicación Abierta es un resultado de análisis funcional mostrado por Banach y Steinhaus en 1927.

Teorema 1.1 *(Teorema de la Aplicación Abierta) Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T \in B(X,Y)$ sobreyectivo. Luego, T es una aplicación abierta.*

Este resultado es el análogo al teorema de la aplicación abierta de Análisis Complejo, reemplazando holomorficidad por linealidad y acotamiento y ajustando lógicamente dominios y definiciones donde sea necesario. Necesitaremos un lema previo a la demostración.

2. Teorema de Categorías de Baire

Entregamos una definición preliminar:

Definición Sea X un espacio topológico. X se dice de Baire si cada familia numerable $\{U_i\}$ de abiertos densos en X tiene intersección densa en X.

Esta definición es más general que en el contexto de análisis funcional; es simplemente una definición topológica. El siguiente teorema (irrespetuosamente denotado como lema) sí utilizará herramientas de análisis para su demostración.

Lema 2.1 *(Teorema de Categorías de Baire) Todo espacio métrico completo es de Baire.*

Demostración:
Sea X un espacio métrico completo, y $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ abiertos densos. Sea W un abierto no vacío. Basta probar que W intersecta a $\bigcap U_n$.
Como U_1 es denso, $U_1 \cap W \neq \emptyset$. Sean x_1 en X y r_1, con $0 < r_1 < 1$ tal que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq U_1 \cap W \tag{1}$$

que existen porque $U_1 \cap W$ es un abierto. Asimismo, recursivamente, enontramos x_n, r_n tal que $0 < r_n < \frac{1}{n}$ tal que

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n \tag{2}$$

Ahora, notemos que $x_m \in B(x_n, r_n)$ cuando $m > n$. Luego, (x_n) es de Cauchy y por lo tanto tiene límite x en X (por completitud). Notemos que $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ para cada n natural (porque la sucesión $(x_i)_{i \geq n}$ está completamente contenida en $\overline{B(x_n, r_n)}$). Luego, se tiene que $x \in U_n$ para cada n (por (2)).
Por otra parte, x está en $\overline{B(x_1, r_1)}$. Así, por (1), $x \in W$.
Finalmente, concluimos que x está en la intersección de W y $\bigcap U_n$, y luego $\bigcap U_n$ es denso en X. ■

Es claro de la demostración que la hipótesis de completitud no es removible.
Un corolario que utilizaremos más adelante es el siguiente:

Corolario 2.1 *Si X es un espacio métrico completo tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, con F_n cerrados en X, entonces algún F_n tiene interior no vacío.*

Demostración: Mostramos primero que si un conjunto $F \subseteq X$ tiene interior vacío entonces su complemento U es denso. Sea x en $X \setminus U = F$. Como F tiene interior vacío, entonces existe $x_m \in B(x, \frac{1}{m}) \cap U$. Luego, (x_m) es una sucesión en U y tiende a x.
Supongamos que la proposición del corolario es falsa. Luego, los complementos U_n de F_n son abiertos y densos. Por el Teorema de Baire, $\bigcap U_n$ es denso. Sin embargo:

$$\emptyset = X \setminus X = X \setminus \bigcup F_n = \bigcap U_n$$

Una contradicción. ■

3. Teorema Central

Pasamos al teorema principal de este trabajo. Volvemos a enunciarlo:

Teorema 3.1 *(Teorema de la Aplicación Abierta) Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T \in B(X, Y)$ sobreyectivo. Luego, T es una aplicación abierta.*

Demostración: Sea T como arriba. Denotaremos $B_s^K := B_K(0, s)$. Primero, probaremos que existe $r > 0$ tal que

$$B_r^Y \subseteq T(B_1^X)$$

Notemos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X$; y por la sobreyectividad de T,

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

Por el corolario al Teorema de Categorías de Baire, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_{n_0}^X)} = n_0^{-1}\overline{T(B_1^X)}$ tiene interior no vacío, donde la igualdad es por linealidad de T. Entonces, existe $y_0 \in \overline{T(B_1^X)}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$y_0 + B_\varepsilon^Y \subseteq \overline{T(B_1^X)} \tag{1}$$

Afirmamos que

$$\overline{T(B_1^X)} - y_0 \subseteq \overline{T(B_2^X)} \tag{2}$$

En efecto, sea $y \in \overline{T(B_1^X)}$; y sea y_n en X tal que $y_n \to y$ con $|y_n| < 1$ (que existe por definición). También tenemos z_n en X con $z_n \to y_0$, $|z_n| < 1$. Entonces, se tiene:

$$y - y_0 = \lim_{n\to\infty} T(y_n - z_n), \text{ con } |y_n - z_n| < 2$$

y luego $y - y_0 \in \overline{T(B_2^X)}$. De (1) y (2), tenemos que $B_\varepsilon^Y \subseteq \overline{T(B_2^X)}$. Además, por linealidad de T,

$$B_{\varepsilon/2^n}^Y \subseteq \overline{T(B_{1/2^{n-1}}^X)}, \quad \forall n \geq 1 \tag{3}$$

Sea $y \in B_{\varepsilon/8}^Y$. Luego, $y \in \overline{T(B_{1/4}^X)}$, y por lo tanto existe $x_1 \in B_{1/4}^X$ tal que $|y - Tx_1| < \frac{\varepsilon}{16}$. Recursivamente, encontramos $x_k \in B_{1/2^{k+1}}$ tal que

$$|y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} \tag{4}$$

Sea $z_n = x_1 + \ldots x_n$. Con $m > n$:

$$|z_m - z_n| = |x_m + \ldots x_{n+1}| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

O sea, z_n es de Cauchy. Sea z su límite (que existe ya que X es Banach). Notemos que

$$|z| = |\lim_{n\to\infty} z_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

es decir, $z \in B_1^X$. Notemos que, de (4),

$$|y - T(z_k)| = |y - \sum_{i=1}^{k} Tx_i| < \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$$

es decir, $T(z_k) \to y$. Por continuidad de T, $T(z_k) \to T(z)$ y luego $T(z) = y$. Así,

$$B_{\varepsilon/8}^y \subseteq T(B_1^X) \tag{5}$$

Con esto podemos concluir. Sea $U \subseteq X$ abierto. Sea $y \in T(U)$, y x tal que $y = Tx$. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $x + B_\delta^X \subseteq U$. Por (5), y usando la linealidad de T:

$$B_{\delta\varepsilon/8}^Y = \delta B_{\varepsilon/8}^Y \subseteq \delta T(B_1^X) = T(B_\delta^X)$$

Y luego

$$y + B_{\delta\varepsilon/8}^Y \subseteq T(x + B_\delta^X) \subseteq T(U)$$

Es decir, y es un punto interior de $T(U)$. Así, $T(U)$ es abierto y luego T es una función abierta. ■

En la demostración, utilizamos a cabalidad todas las hipótesis: La continuidad, sobreyectividad de T se utilizan explícitamente, al igual que la propiedad Banach de X. La propiedad Banach de Y se utiliza al invocar el Teorema de Baire (en el cual, recordemos, no era una hipótesis removible).

4. Consecuencias

Como consecuencia, tenemos dos importantes teoremas:

Corolario 4.1 *(Teorema de Isomorfismos de Banach) Sea $T \in B(X,Y)$ biyectiva, con X, Y Banach. Entonces, T es un isomorfismo.*

Este es, en esencia, un teorema de función inversa: indica que toda aplicación lineal acotada biyectiva entre espacios Banach tiene inversa igualmente acotada.

Demostración: Basta probar que T^{-1} es una función continua. Sea U abierto en X. Notemos que

$$(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$$

Como T es abierta por el Teorema de la Aplicación Abierta, $(T^{-1})^{-1}(U)$ es un abierto. Así, T^{-1} es continua y luego acotada. ■

Nuestro otro importante resultado es el siguiente:

Corolario 4.2 *(Teorema del Grafo Cerrado) Sea $T \in L(X,Y)$ biyectiva, con X, Y Banach. Entonces, T es continua si y sólo si $Gr(T)$ es cerrado como subconjunto de $X \times Y$.*

Este resultado es relevante porque simplifica el chequear que una transformación lineal sea continua: usualmente esto implica chequear cosas de la forma $x_n \to x \implies T(x_n) \to T(x)$; a la luz de este nuevo teorema, se debe chequear que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y \implies y = T(x)$ (en otras palabras, no se debe chequear que $T(x_n)$ sea una sucesión convergente, que es usualmente la parte compleja).

Demostración: Ya sabemos $\implies$. Supongamos que $\mathrm{Gr}(T)$ es cerrado, lo que implica que $\mathrm{Gr}(T)$ es un espacio de Banach con las operaciones usuales en $X \times Y$. La proyección

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad \mathrm{Gr}(T) &\to X \\ (x, T(x)) &\mapsto x \end{aligned}$$

Es claramente lineal, biyectiva y continua entre espacios de Banach. Del corolario anterior, π^{-1} es continua. Además,

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathrm{Gr}(T) &\to Y \\ (x, T(x)) &\mapsto T(x) \end{aligned}$$

es también claramente lineal y continua. Luego, la función $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} = T$ es continua. ■

5. Equivalencia

Mostramos una interesante proposición final:

Teorema 5.1 *El Teorema de la Aplicación Abierta, de Isomorfismos de Banach y del Grafo Cerrado son equivalentes.*

Ya hemos mostrado (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3). Mostraremos (2) $\implies$ (1) y (3) $\implies$ (2). La primera flecha requerirá un lema previo.

Lema 5.1 *Sea X un espacio de Banach, Y un subespacio cerrado de él. Entonces, la aplicación cociente $\pi : X \to X/Y$ es abierta.*

Demostración Sea U un abierto en X, y sea $\pi(x) \in \pi(U)$. Entonces, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Sea $\pi(z) \in B(\pi(x), r)$, es decir, $|\pi(x) - \pi(z)| < r$ y luego

$$\inf_{y \in Y} |x - z - y| < r$$

por la definición de la métrica en el cociente. Esto implica que existe un $y_0 \in Y$ tal que $|x - z - y_0| < r$, y luego $z - y_0 \in B(x, r)$. Así,

$$\pi(z) = \pi(z - y_0) \in \pi(B(x, r)) \subseteq \pi(U)$$

Lo que implica que $B(\pi(x), r) \subseteq \pi(U)$. Así, $\pi(U)$ es abierto y luego π es una función abierta. ■

Con esto, estamos listos para mostrar (2) $\implies$ (1).

Demostración Sea $T \in B(X, Y)$ sobreyectiva, donde X, Y son espacios de Banach. Queremos mostrar que T es abierta. Definamos la función $\widetilde{T}$ como la función que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/Ker(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\widetilde{T}(x + Ker(T)) = T(x)$. Es fácil ver que $\widetilde{T}$ está bien definida; y es lineal y biyectiva por definición. Así, por el Teorema de Isomorfismos de Banach, $\widetilde{T}$ es abierta. Como π es abierta por el lema, $T = \widetilde{T} \circ \pi$ es abierta. ■

Ahora mostramos (3) $\implies$ (2).

Demostración Sea $T \in B(X, Y)$ biyectiva, donde X, Y son espacios de Banach. Queremos mostrar que T^{-1} es continua. Notemos que

$$\begin{aligned} Gr(T^{-1}) &= \{(y, T^{-1}(y)) : y \in Y\} \\ &= \{(T(x), T^{-1}(T(x))) : x \in X\} \\ &= \{(T(x), x) : x \in X\} \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es porque T es biyectiva. Así, $Gr(T^{-1})$ es homeomorfo a $Gr(T)$. Como T es continua, $Gr(T)$ es cerrado, lo que implica que $Gr(T^{-1})$ es cerrado. Por el Teorema del Grafo Cerrado, T^{-1} es continua. ■