Álgebra 1 (525140)
Listado 9
Problemas sobre *Capítulo 5: Trigonometría*
Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 9: Trigonometría

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Transforme los siguientes ángulos, dados en sistema sexagesimal, a radianes:

   (a) $50°$. (b) $450°$. (c) $120°$. (d) $800°$. (e) $150°$. (f) $-120°$. (g) $765°$. (h) $-270°$.

2. Transforme los siguientes ángulos, dados en radianes, a grados y grafique cada uno en posición normal de medida:

   (a) $\frac{3\pi}{2}$. (b) $\frac{2\pi}{3}$. (c) 7π. (d) $\frac{27\pi}{6}$. (e) $-\frac{\pi}{2}$. (f) $\frac{16\pi}{3}$. (g) $-\frac{7\pi}{2}$. (h) $-\frac{9\pi}{2}$.

3. Encuentre $\sin(\theta), \cos(\theta)$ y $\tan(\theta)$ para:

   (a) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ rad. (b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad. (c) $\theta = -\frac{7\pi}{4}$ rad. (d) $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad. (e) $\theta = \frac{8\pi}{3}$ rad. (f) $\theta = 3\pi$ rad. (g) $\theta = -3\pi$ rad. (h) $\theta = -\frac{9\pi}{2}$ rad.

4. Encuentre el valor de $\sin(\theta), \cos(\theta), \tan(\theta)$, según corresponda, sabiendo que:

   (a) $\sin(\theta) = \frac{3}{5},\ P(\theta) \in I$ cuadrante.
   (b) $\cos(\theta) = -\frac{4}{5},\ P(\theta) \in III$ cuadrante.
   (c) $\tan(\theta) = \frac{1}{2},\ \sin(\theta) > 0$.
   (d) $\cos(\theta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \tan(\theta) > 0$.

5. Determine $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, $\tan(\theta)$ y $\cot(\theta)$ sabiendo que:

   (a) $\sin(\theta) = -\frac{2}{5}$ y $P(\theta) \in III$ cuadrante.
   (b) $\cot(\theta)$ y $\cos(\theta)$, $\cos(\theta) = \frac{2}{9}$ y $P(\theta) \in IV$ cuadrante.
   (c) $\cot(\theta) = 2$ y $P(\theta) \in II$ cuadrante.

6. Calcule:

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(b) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

(c) $\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

(d) $\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)}$.

(e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

(f) $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.

(g) $\tan\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

7. Conociendo $\sin(\alpha) = \dfrac{1}{9}, P(\alpha)$ está en el primer cuadrante, $\cos(\beta) = -\dfrac{3}{5}$ y $P(\beta)$ está en el segundo cuadrante, determine $\cos(\alpha-\beta)$ y $\sin(\alpha+\beta)$.

8. Si $\sin(\alpha) = \dfrac{1}{2}, P(\alpha) \in II$ cuadrante, $\cos(\beta) = -\dfrac{1}{3}$, $P(\beta) \in III$ cuadrante, calcule el valor de:

   (a) $\cos(\alpha+\beta)$.
   (b) $\sin(\alpha-\beta)$.
   (c) $\dfrac{1}{\sin(\beta-\alpha)}$.
   (d) $\tan(2\alpha)$.

9. Si $P(\alpha) \in II$ cuadrante, $P(\beta) \in III$ cuadrante, $\sin(\alpha) = \dfrac{8}{17}$ y $\tan(\beta) = \dfrac{3}{4}$, determine:

   (a) **(A)** $\sin(\alpha+\beta)$.
   (b) $\sin(\alpha-\beta)$.
   (c) $\cos(\alpha+\beta)$.
   (d) $\cos(\alpha-\beta)$.

2. Problemas intermedios

1. Demuestre que si $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$, entonces

$$(\exists k \in \mathbb{Z} : \alpha+\beta = (2k+1)\pi) \vee (\exists k \in \mathbb{Z} : \alpha-\beta = 2k\pi)\,.$$

2. Demuestre las siguientes identidades, indicando en cada caso cuáles son los valores admisibles para x:

   (a) $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$.
   (b) $\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$.
   (c) $\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = (\sec(x) - \tan(x))^2$.
   (d) $\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)} = \sec(2x) + \tan(2x)$.

   Indicación: Tenga en cuenta que sec y csc son tales que

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \qquad \csc : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sin(x) = 0\} \to \mathbb{R},$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas para $\alpha \in [0, 2\pi]$:

   (a) $2\sin(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$.
   (b) $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + 3\cos(\alpha) - 1 = 0$.
   (c) $\tan(\alpha)\cot(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) = 4$.
   (d) $3\tan^2(\alpha) - \sec^2(\alpha) - 5 = 0$.
   (e) $\cos(\alpha) = \cos^3(\alpha)$.
   (f) **(A)** $|\tan(\alpha)| = 1$.
   (g) $\cos^2(\alpha) = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha)$.
   (h) $2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha)$.
   (i) $3\cos^2(\alpha) - \cos(2\alpha) = 1$.
   (j) $1 + \tan(\alpha) = \sec(\alpha)$.
   (k) $4\cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) - 2 = 0$.
   (l) **(A)** $\sin^3(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos^3(\alpha) = \dfrac{1}{4}$.

   Indicación: Tenga en cuenta que sec es tal que

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

4. Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

(a) $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$.

(b) $\sin(x)=\sin(2x)$.

(c) $\cos(2x)+3\cos(x)-1=0$.

(d) $\cos(2x)+\cos(-x)=0$.

5. Calcule:

(a) $\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{5}{6}\right)\right)$.

(b) $\cos\left(\text{Arccos}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

(c) $\sin(\text{Arctan}(-2))$.

(d) $\sin\left(\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)+\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

(e) $\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\text{Arcsin}\left(\frac{-2}{3}\right)\right)$.

(f) $\sin(\pi+\text{Arccos}(4/5))$.

(g) $\cos\left(\text{Arccos}(2/3)+\frac{\pi}{2}\right)$.

(h) $\text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$.

(i) **(A)** $\text{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$.

(j) $\text{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

(k) $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

(l) $\tan\left(\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

(m) $\sin\left(\text{Arccos}\left(-\frac{1}{7}\right)+\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$.

(n) **(A)** $\cos\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

(ñ) $\cos\left(\text{Arctan}\left(-\frac{3}{4}\right)-2\text{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

(o) $\tan\left(2\text{Arccos}\left(\frac{2}{5}\right)-\text{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

6. En los siguientes problemas parta haciendo un dibujo de la situación, luego resuelva.

(a) David está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 47 metros de hilo y el ángulo que forma el hilo de la cometa con la horizontal es de 52°. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

(b) Un faro está ubicado sobre la playa. El faro tiene una altura de 675 metros. Desde lo alto del faro con un ángulo de depresión de 75° se divisa una embarcación. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra la embarcación?

(c) **(A)** Calcule la altura de un árbol, sabiendo que Vicente observa la copa de éste con un ángulo de elevación de 30° y si se acerca 10 metros hacia el árbol, el ángulo de elevación aumenta a 60°.

(d) El extremo superior de una escalera se encuentra apoyado a un muro en un punto A a una determinada altura del suelo y de tal manera que la escalera forma un ángulo de 30° con el muro. La escalera resbala y su extremo superior desciende hasta un punto B formándose entonces un ángulo de 60° entre la escalera y el muro. Si el largo de la escalera es de 4 metros. ¿Cuánto descendió el extremo superior de la escalera?

(e) Una torre vertical BC está ubicada sobre una colina cuya pendiente es 12°. Desde el punto A, que está a 43 metros colina abajo desde la base B de la torre, el ángulo de elevación de la cúspide C de la torre es 37°. Encuentre la altura de la torre.

(f) Un barco navega hacia el Sur con una rapidez de 40km/h. A las 11:00 hrs se observa una isla en la dirección N30°E. A las 13:00 hrs se observa la misma isla en dirección N10°E. Calcule la distancia de la isla a cada uno de los puntos de observación.

(g) **(A)** Pedro y Juan viven en la misma ciudad a 10km de distancia (Pedro al Oeste y Juan al Este de un mismo punto en la ciudad) y trabajan en la misma empresa al norte de la ciudad.

Ambos tienen dos alternativas para llegar a su trabajo. Desde la casa de Pedro hay un camino lento en dirección $N15^oE$ que lo lleva directo al trabajo, mientras que desde la casa de Juan hay un camino lento directo al trabajo en dirección $N30^oO$.

La segunda alternativa para ambos es viajar unos kilómetros al Sur y tomar una pista rápida directa al trabajo. Para Pedro, la pista rápida se encuentra en dirección $S45^oE$ a 6km de su casa.

Determine la distancia desde el inicio de la pista rápida al trabajo. Determine la distancia de la casa de Juan al inicio de la pista rápida.

(h) Un volantín está sujeto a una cuerda de 12 metros de longitud y vuela a 6 metros de altura sobre el nivel de los ojos de la persona que eleva. ¿Cuál es el ángulo de elevación del volantín?

(i) Un avión de reacción pasa a 6000 metros de altura en vuelo horizontal sobre una estación de radar. 10 segundos después es observado desde el radar con un ángulo de elevación de 49°. Determine la rapidez del avión.

(j) Un trozo de alambre de 1 metro de largo se dobla en forma de triángulo isósceles con un ángulo igual a $120°$. Determine la longitud de cada lado del triángulo.

(k) Una persona observa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de $54°$. Si la persona mide 1,72 metros y está ubicada a 18 metros de la base del edificio, ¿cuál es la altura del edificio?

(l) Un poste tiene atado un cable en su extremo superior, que va hasta el suelo. Si se sabe que el ángulo entre el cable y el poste es de $58°$ y la distancia desde la base del poste hasta el cable es de 2 metros, determine la altura del poste y el largo del cable.

(m) Una persona se ubica a 200 metros de la base de una montaña y observa la cima con un ángulo de inclinación de $10°$. Si se sabe que la pendiente de la montaña es de $30°$, determine la altura de la montaña.

(n) Un dron se encuentra sobrevolando cerca de un edificio de altura 20 metros. El ángulo de elevación del dron desde la azotea del edificio al dron es de $15°$. Si desde la base del edificio el ángulo de elevación al dron es $30°$, determine la altura a la cual se encuentra volando el dron.

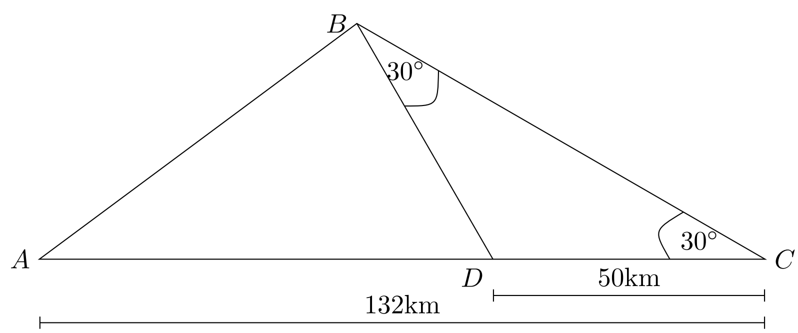
(ñ) Dos autos parten de la intersección de dos carreteras rectas y viajan a lo largo de ellas a 80 (km/h) y 100 (km/h) respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras es de $80°$, ¿qué tan separados están los automóviles al cabo de 45 minutos?.

(o) Tres amigos se encuentran situados en una cancha de fútbol. Pedro y Carlos se encuentran a 24 metros de distancia, en cambio Carlos y Joaquín están a sólo 12 metros. Además Pedro ve a sus dos amigos separados por un ángulo de $30°$. Calcule la distancia entre Pedro y Joaquín.

(p) En una ciudad existen 4 estaciones de abastecimiento: A, B, C y D. La estación B está a 12 km al norte de la estación A, la estación D está en dirección $N25°E$ de B, mientras que C está en dirección $N80°E$ y a 9 km de B. Por último, el ángulo BCD es $60°$. Encuentre el largo de los caminos $ACBA$ y ABD.

Observación: En los problemas (a) y (c) suponga que conoce las alturas de David y Vicente.

7. En el punto D (ver figura) está ocurriendo un incendio forestal, dos helicópteros contra incendios, situados uno en el punto A y el otro en el punto C, a 132km uno del otro, intentarán apagarlo. Para esto, tienen que recoger agua de una piscina que se encuentra en el punto B y luego ir al lugar del incendio. ¿Qué longitud recorre cada helicóptero en su primera descarga?



8. Determine los ángulos interiores de un triángulo si sus vértices son $(2, -1)$, $(-3, 1)$ y $(1, 4)$.

9. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en un plano. Si r_1 y r_2 denotan las longitudes de los segmentos que unen estos puntos con el origen y θ ($0 \leq \theta < \pi$) es el ángulo que forman estos segmentos, demuestre que:

$$\cos(\theta) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1r_2}.$$

10. Pruebe que no existe ningún triángulo ABC tal que la medida del ángulo en A sea $63°$ y la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sean 754 metros y 600 metros respectivamente.

    Sugerencia: Suponga que tal triángulo existe y compruebe si satisface los teoremas del seno y/o el coseno.

11. Considere un octógono regular (8 lados de igual longitud) de lado 12 cm. Calcule los radios de las circunferencias inscrita (r) y circunscrita (R) a él (ver figura 1).

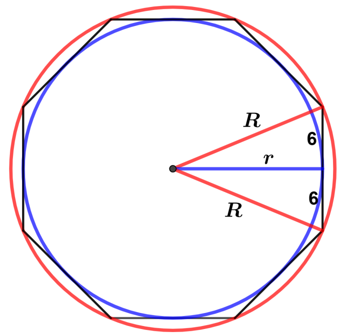


Figura 1: Octógono regular y circunferencias inscrita y circunscrita a él

3. Problemas avanzados

1. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas para $\alpha \in [0, 2\pi]$:

   (a) $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = 1$.

   (b) $\cot(\alpha) - 2\sin(2\alpha) = 1$.

2. Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

   (a) $\sin(x) + \cos(x) = 1$.

   (b) $\sin^3(x) - \cos^3(x) = 0$.

   (c) **(A)** $\sin(2x) + \cos(2x) = \cos(x) - 1$,

   (d) $\sin(2x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

   Observación: Para resolver el ejercicio $2d$ puede necesitar conocer que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $2x^3 - x + 1 = 0$ y es $x = -1$.

3. Para cada una de las siguientes funciones $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine dominio (conjunto D) y recorrido. Decida además si son funciones inyectivas, sobreyectivas y, cuando sea posible, pares.

   (a) $f(x) = \left(\sin(\frac{\pi}{2}x + 1)\right)^2$.

   (b) $f(x) = \cos(|x|)$.

   (c) $f(x) = \text{Arcsen}(\cos(x))$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin(x) + 1}} - 1$.

4. Sea $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)} - 1.$$

   (a) Demuestre que el recorrido de f es $[0, +\infty[$.

   (b) Determine $D \subseteq]0, \pi[$ de modo que la función $g : D \to [0, +\infty[$ con $g(x) = f(x)$ sea biyectiva. Justifique su respuesta.

   (c) Defina la inversa de g.

   (d) Defina, si es posible, la función $f \circ \text{Arcsin}$.