Contents

1 Conceptos Básicos **1**
1.1 Clasificación de una ED según tipo . . . 2
1.2 Clasificación según orden . . . 3
1.3 Forma Normal de una EDO . . . 3
1.4 Solución de una EDO . . . 4
1.5 Curva Solución vs Gráfica de la Solución . . . 4
1.6 Problemas de Valores Iniciales . . . 5

2 Métodos de Solución de EDOs de Primer Orden **8**
2.1 Ecuaciones de Variables Separables . . . 8
2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$ . . . 10
2.3 Ecuaciones Lineales . . . 11
2.4 Aplicaciones: Fluidos en un Tanque . . . 15

A Teorema de Picar-Lindelöf (bosquejo de demostración) **16**

B Interpretación geométrica de EDOs **18**
B.1 Campos Direccionales . . . 18
B.2 Isoclinas . . . 19

C Otras EDOs conocidas **21**
C.1 Ecuación de Bernoulli . . . 21
C.2 Ecuación de Riccati . . . 23
C.3 EDOs tipo Homogéneas . . . 24
C.4 Ecuaciones Exactas . . . 26
C.5 Ecuación de Clairaut . . . 28

1 Conceptos Básicos

En lo que sigue, presentaremos los conceptos claves y notaciones que se utilizarán durante el curso. Empezaremos por dar una definición de las Ecuaciones Diferenciales:

Definición

Una Ecuación Diferencial (ED) es una ecuación en la que figura -al menos una- derivada de una o varias funciones incógnitas. En general, una ED puede escribirse de la forma:

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.
En este caso, a la **función incógnita** $y(x)$ se le llama **variable dependiente**, mientras que a la variable respecto a la cual derivamos esta función, la llamamos **variable independiente**.

Variable dependiente y

$$\frac{dy}{dx} = 4y.$$

Variable independiente x

Las EDs se clasifican comúnmente según su **tipo** y según su **orden**.

1.1 Clasificación de una ED según tipo

Si una ED contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes respecto a una variable independiente, las llamaremos **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)**. Si por el contrario, la ED involucra derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes, las llamaremos **Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs)**.

Ejemplo 1.1. *Las siguientes son ejemplos de EDOs:*

1. $\dfrac{dy}{dx} + 9y = \sin(x)$.
2. $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} = 5x + t$.
3. $\dfrac{d^2V}{dt^2} + 9\dfrac{dV}{dt} - 7V = e^t$.

Ejemplo 1.2. *Las siguientes son ejemplos de EDPs:*

1. $\dfrac{\partial y}{\partial x} + 9\dfrac{\partial y}{\partial t} = 6$.
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial t} = 3$.
4. $\dfrac{\partial z}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.2 Clasificación según orden

El orden de una ED, bien sea EDO o EDP, es el orden de la mayor derivada presente en la ED. Por ejemplo:

Derivada de 3er Orden

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \frac{d^3y}{dx^3} = 4xy.$$

Derivada de 2do Orden

Entonces, esta EDO es de **3er Orden**.

En la siguiente tabla, se presentan algunos ejemplos de clasificación de EDOs e identificación de las variables independientes y las variables dependientes:

Ecuación	Variables dependientes	Variables independientes	Orden	EDO o EDP
$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0$	ω	t, x	2do	EDP
$\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 + \frac{dy}{dt} = x + y$	x, y	t	1er	EDO
$9y''' - y'' + 5y' + y = e^t cos(2t)$	y	t	3er	EDO
$y^4 y' + y' - x^2 - 9x + 1 = 0$	y	x	1er	EDO
$\frac{d^3\theta}{dr^3} = \frac{\sin(\theta) r}{r + \theta}$	θ	r	3er	EDO

1.3 Forma Normal de una EDO

Si y denota una variable dependiente de una EDO de orden n, con variable independiente x, donde $y^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de y, podemos expresar esta EDO en su **Forma Normal**, la cual consiste en despejar la derivada de mayor orden:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

para alguna función G (no necesariamente lineal).

Ejemplo 1.3. *Podemos escribir la EDO*

$$2x\frac{d^3y}{dx^3} + e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = \sin(x),$$

en **Forma Normal** *como:*

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{e^x}{2x}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} + \frac{\sin(x)}{2x},$$

donde $G(x, y, y', y'') = -\frac{e^x}{2x}y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{y}{2x} + \frac{\sin(x)}{2x}$.

1.4 Solución de una EDO

Definición

La **solución** de una EDO de n-ésimo orden, es una función $y :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable (hasta orden n), que al sustituirla en la EDO se convierte en una identidad respecto a la variable x en el intervalo $]a, b[$.

Ejemplo 1.4. *Notemos que la función* $y(x) = \cos(2x) + \sin(x)$ *es solución de la ED:* $y'' + 4y = 3\sin(x)$. *Dado que no hay restricciones para el dominio de la función* y*, esta solución puede definirse sobre el intervalo* $]-\infty, \infty[$. *En efecto, si derivamos dos veces y sustituimos en la EDO:*

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -4\cos(2x) - \sin(x) + 4(\cos(2x) + \sin(x)) \\ &= 3\sin(x). \end{aligned}$$

Es importante notar de la definición anterior, que siempre que hablemos de la solución de una EDO, debemos hablar del intervalo sobre el cual la función solución está definida. A este intervalo se le conoce como **Intervalo de definición** o **Intervalo solución**.

Ejemplo 1.5. *La función* $y = \dfrac{1}{x}$ *es solución de la ED* $y' + y^2 = 0$*. Sin embargo, esta función y su primera derivada* $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ *no están definidas sobre ningún intervalo que contenga al cero. De hecho, podemos considerar cualquier intervalo que no contenga al cero como intervalo solución:* $]-3,0[,\ ]1,2[,\ ]0,\infty[,...$
Por lo general, se considera el intervalo más grande de definición (intervalo maximal). En este caso, el intervalo solución puede ser $(-\infty, 0)$ *o* $(0,\infty)$.

Ejemplo 1.6. *Si consideramos la EDO de primer orden:*

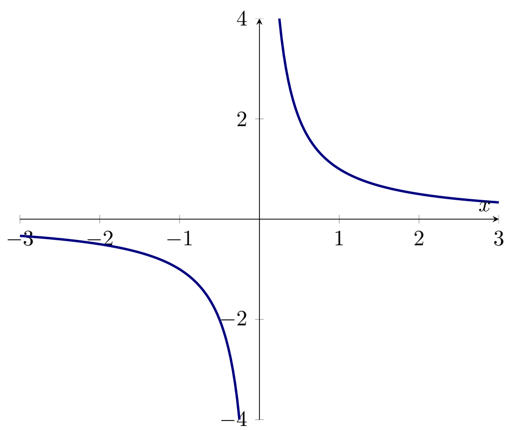
$$(x-2)y' - (y')^2 + 2y = x,$$

para que la ecuación diferencial tenga solución, la función debe ser al menos continua en su dominio. En este sentido, el intervalo solución podría ser $(-\infty, 2)$ *o* $(2, +\infty)$.

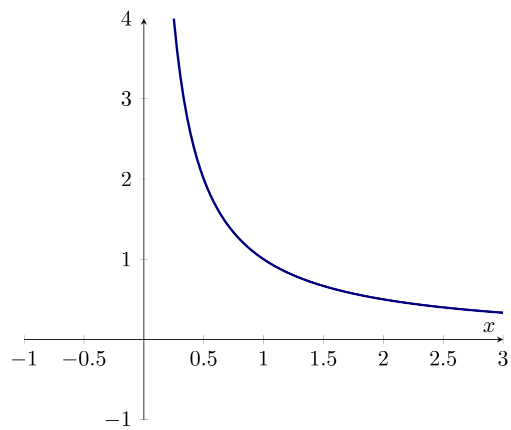
1.5 Curva Solución vs Gráfica de la Solución

A la gráfica de la solución de una ED sobre el intervalo de solución se le denomina **Curva solución**. Es importante no confundir esta definición con la gráfica de la solución. Consideremos el Ejemplo 1.5 para ver la diferencia:

Gráfica de la curva $y(x) = \dfrac{1}{x}$.



Gráfica de la curva solución $y(x) = \dfrac{1}{x}$.



En este caso, estamos considerando que la curva solución está definida sobre el intervalo $\mathbb{R}_+$.

1.6 Problemas de Valores Iniciales

Note que en el Ejemplo 1.5, la función $y(x) \equiv 0$ es solución en el intervalo $]-\infty,\infty[$. Para cualquier EDO cuya solución es cero en algún intervalo $]a,b[$, se le llamará **solución trivial**. Nos importaría la unicidad de una solución en una ecuación? Cómo elegimos entonces LA solución?

Supongamos que queremos resolver una ecuación diferencial de primer orden de variable dependiente y con variable independiente x y nos especifican que la curva solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) en el plano. En este caso, estamos imponiendo la condición $y(x_0) = y_0$, llamada **condición inicial**. A este tipo de planteamientos se les conoce como Problemas de Valores Iniciales (PVI).

Definición

Un **Problema con Valores Iniciales (PVI)**, es el problema de resolver una ED de n-ésimo orden sujeto a n condiciones para la solución y sus derivadas, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde x_0 pertenece al intervalo en el cual está definida la solución de la ED.

Observación. *Un PVI cuya ED es de primer orden*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se interpreta como la búsqueda de aquella solución de la ED que pasa por el punto (x_0, y_0).
Por su parte, un PVI cuya ED es de segundo orden

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

se interpreta como la búsqueda de aquella solución de la ED que pasa por el punto (x_0, y_0) *y que además la recta tangente en este punto tiene pendiente igual a* y_1.

El siguiente teorema nos proporciona las **condiciones suficientes** para garantizar la existencia y unicidad de la solución de un PVI de primer orden:

Teorema 1.1

Teorema de Existencia y Unicidad, Picard–Lindelöf
Sea R una región rectangular del plano XY definida por $R = [a, b] \times [c, d]$, que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si en el PVI de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

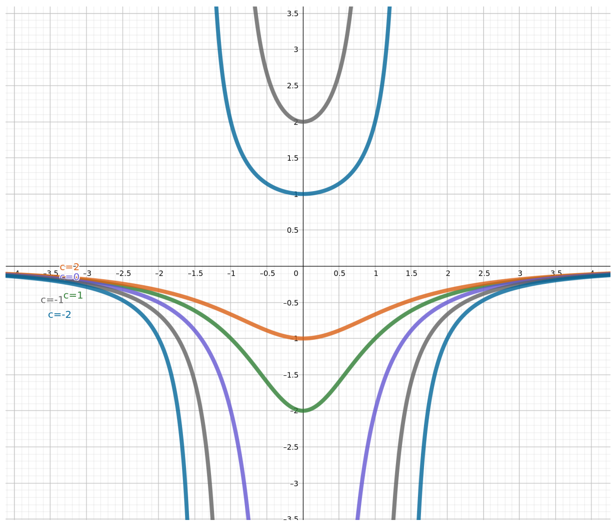
se tiene que f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, con $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y una única función ϕ definida en I que es solución de este PVI.

Para aquellos interesados, en el Apéndice A se bosqueja la demostración del resultado anterior.

Ejemplo 1.7. *Consideremos el siguiente PVI,*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Se tiene que $f(x,y) = xy^2$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy$, *estas son funciones continuas en todo* $\mathbb{R}^2$, *y en particular en cualquier región rectangular* R *que contenga al punto* $(1,2)$. *Luego, por teorema de existencia y unicidad, este PVI tiene única solución.*
La familia de funciones $y = -\dfrac{2}{c+x^2}$, *con* $c \in \mathbb{R}$, *son soluciones de la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$.



Note que, en principio, podemos elegir 3 curvas soluciones asociadas a esta función, definidas en los intervalos: $(-\infty, -\sqrt{-c})$, $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$, $(\sqrt{-c}, \infty)$, *si* $c < 0$. *En caso* $c > 0$ *tenemos que el intervalo solución es* $\mathbb{R}$.

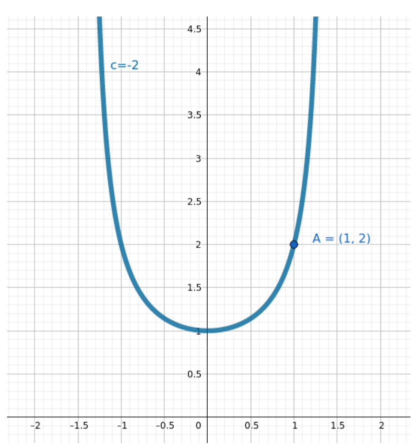
Para determinar cúal de todas las funciones de la famila anterior de soluciones satisface el PVI, además de cuál es el intervalo solución, debemos utilizar la condición inicial. Reemplazamos entonces $x = 1$ *e* $y = 2$*:*

$$2 = -\frac{2}{c+1^2} \quad \Longrightarrow \quad c = -2.$$

Luego, la solución del PVI viene dada por

$$y = -\frac{2}{x^2-2}$$

con intervalo solución $1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



2 Métodos de Solución de EDOs de Primer Orden

En las secciones anteriores, se realizó una introducción a las generalidades de las EDOs y a conceptos fundamentales que ahora utilizaremos para poder resolverlas analíticamente.

2.1 Ecuaciones de Variables Separables

Este método consiste en la integración directa de la ED, pero esta debe tener una “forma específica” para poder realizar este tipo de metodología.

Definición

Consideremos $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ una EDO de primer orden. Diremos que es una EDO *variables separables* si podemos reescribirla como:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

para algunas funciones g y h que dependen únicamente de x e y, respectivamente.

Ejemplo 2.1. *Determinemos si las siguientes EDOs son o no EDs de variables separables:*

1. $\dfrac{dy}{dx} = e^{9x+2y}$.
   Esta ED es de variables separables. En efecto, por propiedad del exponencial se tiene que $e^{9x+2y} = e^{9x}e^{2y}$, *entonces:*

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{9x}}_{g(x)}\underbrace{e^{2y}}_{h(y)}$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} + 14y^3$.
   Esta EDO no es variables separables ya que no se puede escribir como el producto de una función de variable x *con una función de variable* y.

3. $(2x+5)\dfrac{dy}{dx} = 6xy + 9x + 2y + 3$.
   Note que podemos factorizar el lado derecho de la EDO:

$$\begin{aligned}(2x+5)\frac{dy}{dx} &= (3x+1)(2y+3)\\ \frac{dy}{dx} &= \underbrace{\frac{3x+1}{2x+5}}_{g(x)}\underbrace{(2y+3)}_{h(y)}\end{aligned}$$

   Así, $(2x+5)\dfrac{dy}{dx} = 6xy + 9x + 2y + 3$ *es variables separables.*

Observación. *Es claro que las EDOs donde la función* $f(x,y)$ *sólo depende de una variable, también son variables separables (con una de las funciones* g *o* h *idénticamente igual a 1). Por ejemplo,*

$$\frac{dy}{dx} = \sin(y),$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 12x.$$

¿Cómo resolvemos las EDOs Variables Separables?
Consideremos una EDO variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

y la reescribiremos como:

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Recordemos que y es una función que depende de x, es decir $y(x)$, entonces **integrando ambos lados respecto a** x tenemos:

$$\int \frac{1}{h(y(x))}\frac{dy(x)}{dx}\, dx = \int g(x)\, dx.$$

Haciendo el cambio de variables $u = y(x)$, $du = \dfrac{dy(x)}{dx}\, dx$. De donde,

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(x)\, dx.$$

De esta forma, podemos calcular explícitamente ambas integrales y luego devolver el cambio de variable $u = y(x)$.

Observación. Informalmente, *escribimos la separación de variables como:*

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx,$$

e integramos

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx,$$

obtendremos el mismo resultado.

Esta separación del diferencial no es matemáticamente correcta. Sin embargo, nos ayuda a obtener la solución más directamente.

Ejemplo 2.2. *Resuelva el siguiente PVI* $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r}{\theta}$*, considerando primero la condición inicial* $r(1) = 3$ *y luego* $r(-1) = 3$.

Notamos que es una EDO de variables separables. Por Teorema de Existencia, para que $f(r, \theta) = r/\theta$ *sea continuo debe pasar que el intervalo solución es subconjunto de* $\{\theta : \theta > 0\}$ *o* $\{\theta : \theta < 0\}$.

Calculamos ahora la solución separando variables e integrando a ambos de la EDO:

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{d\theta}{\theta}$$
$$\ln|r| = \ln|\theta| + c_1$$

Aunque **no siempre podremos encontrar una expresión de la variable dependiente únicamente en términos de la variable independiente**, *en este caso sí es posible. En este sentido, para escribir la solución* $r(\theta)$ *de manera explícita debemos manipular algebraicamente la expresión anterior.*

Aplicando exponencial y denotando $C = e^{c_1}$ *(que es una constante positiva) tenemos:*

$$|r| = e^{\ln|\theta| + c_1} = C|\theta|.$$

$$r(\theta) = \begin{cases} C\theta & , si \quad \theta > 0 \\ -C\theta & , si \quad \theta < 0 \end{cases}$$

Este signo lo "absorbe" la constante de integración C, por lo que la solución general será $r(\theta) = C\theta$, sin restricciones para C.

En relación al PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} & = \dfrac{r}{\theta} \\ r(1) & = 3 \end{cases}$$

Desde la solución general $r(\theta) = C\theta$, obtenemos

$$3 = r(1) = C,$$

i.e. la solución a este PVI queda como $r(\theta) = 3\theta$.

Por otro lado, para el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} & = \frac{r}{\theta} \\ r(-1) & = 3 \end{cases}$$

tendremos que la solución viene dada por $r(\theta) = -3\theta$.

2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

puede ser reducida a una ED variables separables, si realizamos el cambio de variables: $u = Ax + By + C$.

Ejemplo 2.3. *Resuelva el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Consideremos el cambio de variables $u = 3x + 2y + 2$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 3 + 2\frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{3}{2}.$$

Sustituimos en la EDO asociada al PVI:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2} \\ \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{3}{2} &= \frac{u - 2}{u} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{5u - 4}{u}. \end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a una EDO de primer orden de variables separables y con variable dependiente u e independiente x. Resolvemos esta EDO:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{5u - 4}{u} \\ \int \frac{u}{5u - 4} du &= \int dx \\ \frac{u}{5} + \frac{4}{25}\ln(5u - 4) &= x + C. \end{aligned}$$

Devolvemos el cambio de variables y tenemos que la solución implícita es:.

$$\frac{3x+2y+2}{5}+\frac{4}{25}\ln(15x+10y+6)=x+C.$$

A partir de la condición inicial hallamos el valor de C, que en este caso es $C=\frac{6}{5}$. Luego, la solución del PVI está dada por:

$$\frac{3x+2y+2}{5}+\frac{4}{25}\ln(15x+10y+6)=x+\frac{6}{5}.$$

2.3 Ecuaciones Lineales

Definición

Diremos que una EDO de n-ésimo orden es **lineal** cuando es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

donde $a_i(x)$ y $g(x)$ son funciones reales continuas definidas en algún intervalo real I.

Observación. *De la definición anterior, podemos notar algunas características de las EDOs lineales:*

1. *Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ dependen únicamente de la variable independiente.*
2. *La variable dependiente y todas sus derivadas aparecen únicamente como factores lineales, y no como argumentos de otras funciones.*
3. *En el caso $g(x)\equiv 0$ decimos que la EDO es lineal y* **homogénea**.

Ejemplo 2.4. *Las siguientes EDOs son lineales:*

1. $\ln(x)\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3e^{9x}y=\sin(x).$
2. $9y\frac{d^3x}{dy^3}+\frac{13}{5}\frac{d^2x}{dy^2}+7\frac{dx}{dy}=2y.$

Ejemplo 2.5. *Las siguientes EDOs* ***no son*** *lineales:*

1. $\frac{d^3y}{dx^3}+\sin(y)=0.$
2. $y''+2y^2=0.$
3. $9x\frac{d^3x}{dy^3}+\frac{13}{5}\frac{d^2x}{dy^2}+7\frac{dx}{dy}=2y.$

De la definición de EDOs lineales, tenemos en particular:

Definición

Una EDO lineal de primer orden es de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Más aún, podemos reescribir una EDO lineal de primer orden en su **forma normal** como

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = G(x), \tag{2}$$

sobre el conjunto $\{x : a_1(x) \neq 0\}$, donde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $G(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$.

Para resolver este tipo de EDOs, se suele construir una función que al multiplicarla por la ED, la convierte en la derivada de un producto. A esta función se le conoce como **factor integrante**.

Más específicamente, si multiplicamos esta ED en forma estándar por una función $\mu(x)$ que dependa únicamente de la variable independiente, tenemos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)G(x). \tag{3}$$

Si escogemos de manera conveniente una función $\mu(x)$ tal que

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x), \tag{4}$$

entonces la igualdad (3) se convierte en

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] = \mu(x)G(x), \tag{5}$$

¡Que es una EDO variables separables!

De hecho, la identidad deseada (4) nos pide resolver también una EDO de variables separables, cuya solución es:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx} &= \mu\, P(x) \\ \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int P(x)dx \end{aligned}$$

Resolviendo y despejando tenemos

$$\mu(x) = c\, e^{\int P(x)dx}.$$

Llamaremos a la función

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ **factor integrante**.

Volviendo a la ED (5) podemos separar variables e integrar sobre el intervalo $[x_0, x]$. Luego, a partir del Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_0)y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \mu(z)G(z)dz.$$

Usando la forma del factor integrante y manipulando algebraicamente la igualdad anterior obtenemos la **fórmula de Duhamel**:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(z)dz}y(x_0) + e^{-\int_{x_0}^{x} P(z)dz}\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{z} P(r)dr}G(z)dz. \tag{6}$$

Ejemplo 2.6. *Consideremos el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La ED asociada al PVI ya está en su forma estándar, así identificamos $P(x) = 1$. El factor integrante (FI) es:

$$\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x.$$

Multiplicamos toda la ED por el FI:

$$\underbrace{e^x \frac{dy}{dx} + e^x y}_{\frac{d}{dx}[e^x\, y]} = e^x x.$$

Luego, integramos a ambos lados de la igualdad y resolvemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}[e^x\, y]\, dx &= \int e^x x\, dx \\ e^x\, y &= xe^x - e^x + C \\ y &= x - 1 + Ce^{-x}. \end{aligned}$$

De la condición inicial, sabemos que $y = 1$ cuando $x = 0$, de donde obtenemos que $C = 2$. Entonces, la solución al PVI es:

$$y = x - 1 + 2e^{-x}.$$

Note que el mismo resultado se obtiene al aplicar la fórmula de Duhamel para $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$.

Ejemplo 2.7. *Si consideramos el PVI*

$$\begin{cases} x'(t) + e^{t^2-t}x(t) &= \cos(t), \\ x(1) &= -5. \end{cases}$$

podemos clasificar a la ED como una EDO lineal de primer orden. Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad es fácil ver que este PVI tiene solución única. Sin embargo, al intentar calcular la solución a través del factor integrante vemos que

$$\mu(t) = e^{\int e^{t^2-t}dt}$$

no tiene una expresión explícita en términos de funciones conocidas.

Ejemplo 2.8. *Determinar la solución al PVI*

$$\begin{cases} (x^2+1)y' + xy &= \frac{x}{x^2+1}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Normalizamos primero la EDO, notando que $x^2 + 1 > 0$ así pues no tenemos que preocuparnos por el intervalo solución hasta esta instancia. La existencia de una única solución está garantizada por el Teorema 1.1.

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Identificamos $P(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $G(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ y calculamos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2+1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)},$$

es decir $\mu(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Multiplicamos ahora la EDO por el factor integrante y resolvemos

$$\begin{aligned} y'\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y &= \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \\ \int \frac{d[y\sqrt{x^2+1}]}{dx} &= \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \\ y\sqrt{x^2+1} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C \end{aligned}$$

Sabiendo que $y(0) = 1$ *obtenemos* $C = 2$. *Concluimos que la solución del PVI es:*

$$y(x) = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.4 Aplicaciones: Fluidos en un Tanque

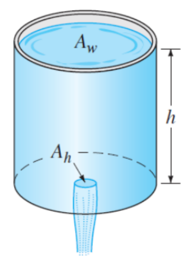
Imagine que se tiene un tanque lleno hasta una altura h. La Ley de Torricelli establece que la velocidad v de un fluido que pasa a través de un hoyo en el fondo de este tanque es la misma que la velocidad de un cuerpo en caida libre desde una altura h. Por otro lado, desde la ley de conservación de energía tenemos que la energía potencial debe ser igual a la energía potencial. Dicho de otra forma

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad.

Lo que nos da la relación

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}.$$



Según la figura, el tanque (cilindrico) tiene un área transversal A_w y el agujero por donde drena el agua del tanque tiene área A_h.

Si queremos describir la tasa de cambio del volumen del agua que queda en el tanque en el tiempo t, $V(t)$, podemos escribir:

$$\frac{dV}{dt} = -A_h v(t) = -A_h\sqrt{2gh(t)}.$$

Luego, es más conveniente describir la profundidad $h(t)$ del agua que queda en el tanque en el instante de tiempo t. Para esto usamos la relación $V(t) = A_w h(t)$. Sustituyendo en la EDO:

$$A_w\frac{dh}{dt} = -A_h\sqrt{2gh(t)}.$$

Qué ocurrirá si A_w no es constante en tiempo?