

Cálculo III (521227)

Listado 1

1. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x+y, x-y) = x^2 + y^2$. Determine $f(2, 5)$, $f(x, 3)$, $f(5, y)$. ¿A dónde manda f los puntos de la recta $y = -x$?
2. La función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x-y, \frac{y}{x}) = y^2 - x^2$. Determine $f(x, y)$. ¿Cuál es el dominio U de esta función?
3. Describa el dominio de la función $f(x, y)$ y haga un esquema de dominio en el plano \mathbb{R}^2 .
 - (a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$.
 - (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 - 4)$.
 - (c) $f(x, y) = \sqrt{y} \cos x$.
4. Encuentre los conjuntos de nivel $N_a(f)$ y haga un esbozo.
 - (a) $f(x, y) = |x - y|$ con $a = 0, 1$.
 - (b) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ con $a = -1, 0, 2$.
 - (c) $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$ con $a = -1, 0, 1$.
 - (d) $f(x, y) = \cos(x+y)$ con $a = 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Encuentre los conjuntos de nivel $N_a(f)$ y haga un esbozo.
 - (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ con $a = -1, 0, 1$
 - (b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ con $a = -1, 0, 1$
 - (c) $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z}$ con $a = -1, 0, 1$
 - (d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ con $a = 0, 6, 12$.
6. Considere los siguientes conjuntos:
 - (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$.
 - (ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
 - (iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x^2 + 2)(y + x^2 - 4) < 0\}$.

Responda lo siguiente para cada uno de los conjuntos en (i) y (iii).

- (a) Encuentre el interior, la frontera y los puntos de adherencia.
- (b) Decida si el conjunto es abierto o si es cerrado.
- (c) Decida si el conjunto es compacto o no.