

Vibraciones mecánicas amortiguadas

Sistemas masa/resorte

Mario Durán, Carlos M. Mora, Dominique Spehner

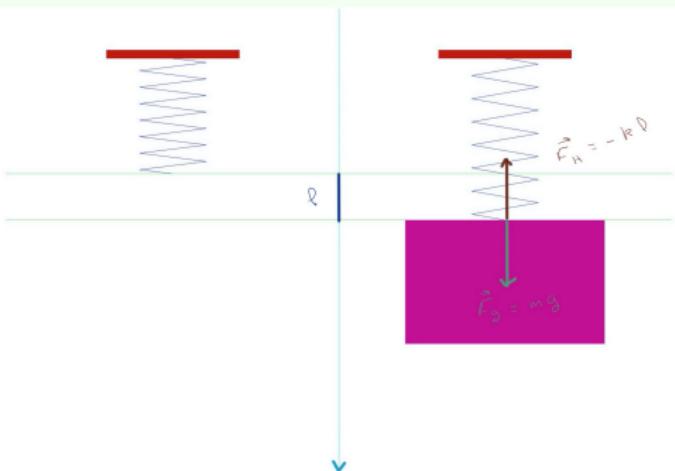
## Ley de Hooke

Un resorte ejerce una fuerza opuesta a la dirección del alargamiento con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento.

$x$  : valor del alargamiento

$k > 0$  : constante del resorte (o rigidez)

$$\vec{F}_H = -k x$$



$$\vec{F}_H + \vec{F}_g = 0$$

$$-k\ell + mg = 0 \Rightarrow k\ell = mg$$

$m$  : masa del cuerpo

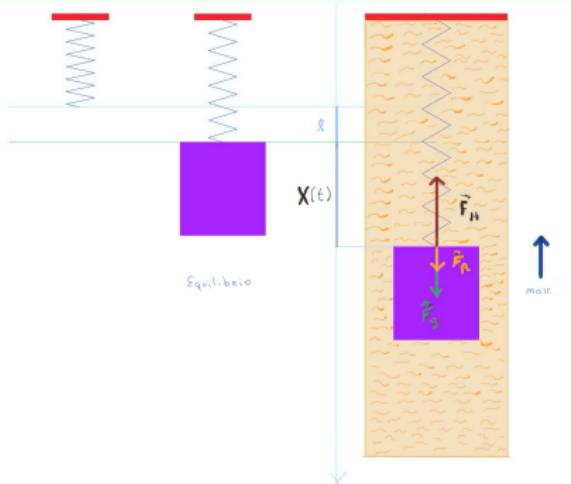
$\ell$  : alargamiento del resorte hasta la posición de equilibrio

## Fuerza de amortiguamiento

La viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del cuerpo con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo.

$X(t)$  : posición del extremo del resorte en el tiempo  $t$

$c > 0$  : constante de rozamiento



$$\vec{F}_R = -c X'(t)$$

## Segunda ley de Newton

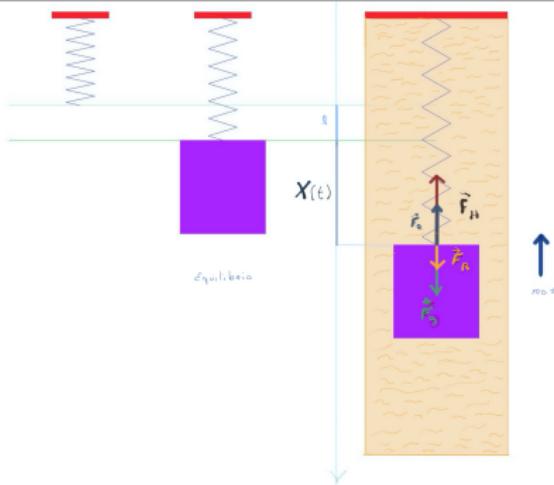
La suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a su masa multiplicada por la aceleración del cuerpo.

$$\text{Fuerza}_{\text{neta}} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

$X(t)$  : posición del extremo del resorte en el tiempo  $t$

$\ell$  : alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio,       $m$  : masa del cuerpo

$k > 0$  : constante del resorte (o rigidez),       $c > 0$  : constante de rozamiento



$$mX''(t) = \vec{F}_H + \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_e(t)$$

$$mX''(t)$$

$$= -k(\ell + X(t)) + mg - cX'(t) + \vec{F}_e(t)$$

$$= -k\ell - kX(t) + mg - cX'(t) + \vec{F}_e(t)$$

Ecuación del movimiento:

$$mX''(t) + cX'(t) + kX(t) \equiv \vec{F}_e(t)$$

## Vibraciones amortiguadas no forzadas

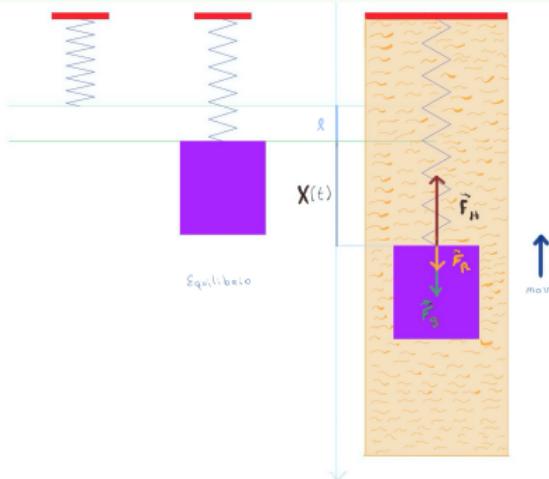
Una masa de  $m \text{ Kg}$  se sujeta a un resorte suspendido de un techo. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, es desplazado en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo cierta velocidad. Asumimos que la viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del cuerpo con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo. Describa el movimiento del cuerpo.

$X(t)$  : posición del extremo del resorte en el tiempo  $t$

$\ell$  : alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio

$k > 0$  : constante del resorte (o rigidez)

$c > 0$  : constante de rozamiento



Ecuación del movimiento:

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = 0$$

## Vibraciones amortiguadas no forzadas

Ecuación del movimiento:

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = 0 \Leftrightarrow X''(t) + \frac{c}{m} X'(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0$$

Polinomio característico:  $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{k}{m}$

Raíces:

$$\lambda_{1,2} = \left( -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{k}{m}} \right) / 2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km}$$

Caso  $c^2 > 4km$ : Vibraciones sobreamortiguadas

$$X(t) = C_1 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t\right)$$

Caso  $c^2 = 4km$ : Vibraciones críticamente amortiguadas

$$X(t) = (C_1 + C_2 t) \exp\left(-\frac{c}{2m} t\right)$$

Caso  $c^2 < 4km$ : Vibraciones subamortiguadas

$$X(t) = \exp\left(-\frac{c}{2m} t\right) \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t\right) \right)$$

Caso  $c^2 > 4 k m$ : Vibraciones sobreamortiguadas

$$X(t) = C_1 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m} t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m} t\right)$$

$$X(0) = C_1 + C_2,$$

$$X'(0) = C_1 \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m} + C_2 \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m} = -\frac{c}{2 m} X(0) + \frac{\sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m} (C_1 - C_2)$$

Lo que implica

$$\frac{2 m}{\sqrt{c^2 - 4 k m}} \left( X'(0) + \frac{c}{2 m} X(0) \right) = C_1 - C_2$$

$$C_1 = \frac{1}{2} X(0) + \frac{m}{\sqrt{c^2 - 4 k m}} \left( X'(0) + \frac{c}{2 m} X(0) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c}{2 \sqrt{c^2 - 4 k m}} \right) X(0) + \frac{m}{\sqrt{c^2 - 4 k m}} X'(0)$$

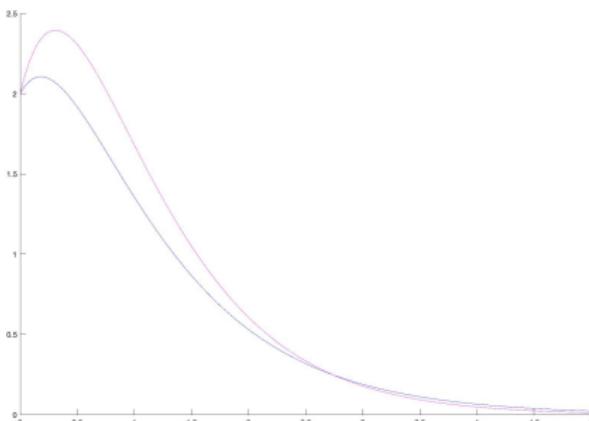
$$C_2 = \frac{1}{2} X(0) + \frac{m}{\sqrt{c^2 - 4 k m}} \left( X'(0) + \frac{c}{2 m} X(0) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c}{2 \sqrt{c^2 - 4 k m}} \right) X(0) - \frac{m}{\sqrt{c^2 - 4 k m}} X'(0)$$

Caso  $c^2 = 4 k m$ : Vibraciones críticamente amortiguadas

$$X(t) = (C_1 + C_2 t) \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right)$$

$$X(0) = C_1$$

$$X'(t) = C_2 \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) - \frac{c}{2m}(C_1 + C_2 t) \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \Rightarrow C_2 = X'(0) + \frac{c}{2m}X(0)$$



Sobreamortiguadas (azul) y críticamente amortiguadas (magenta): el equilibrio se restaura rápidamente sin oscilaciones.

Intervalo de tiempo inicial:  
las vibraciones críticamente amortiguadas decaen más lentamente que las sobreamortiguadas.

Intervalo de tiempo final:  
las vibraciones críticamente amortiguadas decaen más rápidamente que las sobreamortiguadas.

Caso  $c^2 < 4 k m$ : Vibraciones subamortiguadas

$$X(t) = \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) \right)$$

$$X(0) = C_1$$

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\frac{c}{2m} \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m} \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \left( -C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}t\right) \right) \end{aligned}$$

$$X'(0) = -\frac{c}{2m}X(0) + \frac{\sqrt{4k m - c^2}}{2m}C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{2m}{\sqrt{4k m - c^2}} \left( X'(0) + \frac{c}{2m}X(0) \right)$$

## Caso $c^2 < 4 k m$ : Vibraciones subamortiguadas

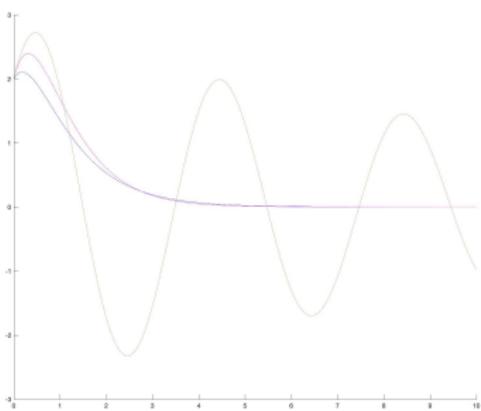
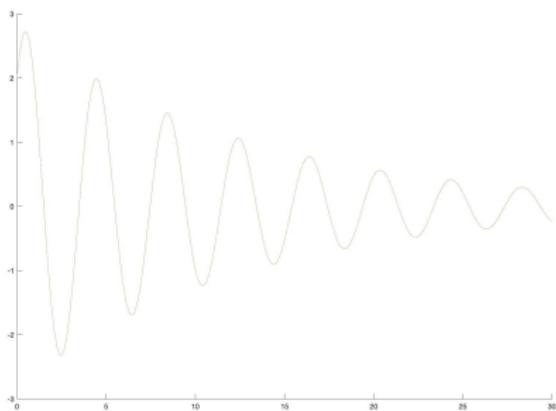
$$X(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left( X(0) \cos(2\pi f t) + \frac{2m}{\sqrt{4km - c^2}} \left( X'(0) + \frac{c}{2m} X(0) \right) \sin(2\pi f t) \right)$$

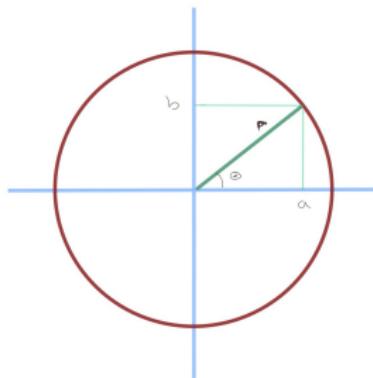
$$X(t) = \sqrt{X(0)^2 + \frac{4m^2}{4km - c^2} \left( X'(0) + \frac{c}{2m} X(0) \right)^2} e^{-\frac{c}{2m}t} \cos(2\pi f t - \theta)$$

Frecuencia:  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}$

Período:  $\frac{1}{f}$

Amplitud:  $\sqrt{X(0)^2 + \frac{4m^2}{4km - c^2} \left( X'(0) + \frac{c}{2m} X(0) \right)^2} e^{-\frac{c}{2m}t}$





$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} a \cos(\gamma) + b \operatorname{sen}(\gamma) &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta) \cos(\gamma) + \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\gamma) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\gamma - \theta) \end{aligned}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{signo}(b) & \text{si } a = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

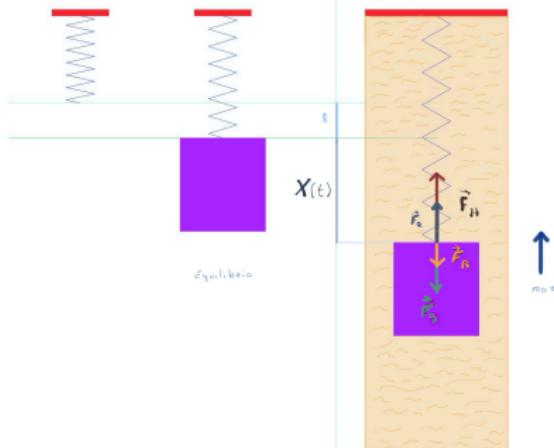
## Vibraciones amortiguadas y forzadas

Una masa de  $m \text{ Kg}$  se sujeta a un resorte suspendido de un techo. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, es desplazado en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo cierta velocidad. Asumimos que la viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del cuerpo con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo. Describa el movimiento del cuerpo si sobre él actúa la fuerza externa  $\vec{F}_e(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , donde  $F_0, \omega \in \mathbb{R}$ , el tiempo  $t$  está dado en segundos y el sistema de referencia lo da la dirección y el sentido del campo gravitatorio.

$X(t)$  : posición del extremo del resorte en el tiempo  $t$

$\ell$  : alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio

$k > 0$  : constante del resorte (o rigidez)       $c > 0$  : constante de rozamiento



$$m X''(t) = \vec{F}_H + \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_e(t)$$

Ecuación del movimiento:

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

## Ecuación del movimiento

$$X''(t) + \frac{c}{m} X'(t) + \frac{k}{m} X(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

$$X_h(t) = \begin{cases} C_1 \exp\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}t\right) & \text{si } c^2 > 4km \\ e^{-\frac{c}{2m}t}(C_1 + C_2 t) & \text{si } c^2 = 4km \\ e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right)\right) & \text{si } c^2 < 4km \end{cases}$$

$X_h(t)$  es una solución transiente, pues

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_h(t) = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(t) - X_p(t)| = 0$$

$$X_p''(t) + \frac{c}{m} X_p'(t) + \frac{k}{m} X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\lambda_{1,2} = \left( -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{k}{m}} \right) / 2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 k m}}{2 m}$$

### Aniquilador

$$\hat{L} \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = 0 \Leftrightarrow \hat{L} \cos(\omega t) = 0$$

$$(D - i\omega)(D + i\omega) \cos(\omega t) = 0$$

### Solución particular

$$(D - i\omega)(D + i\omega)(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) X_p(t) = 0$$

$$X_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$X_p''(t) + \frac{c}{m} X_p'(t) + \frac{k}{m} X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$X_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$X_p'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$X_p''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$$

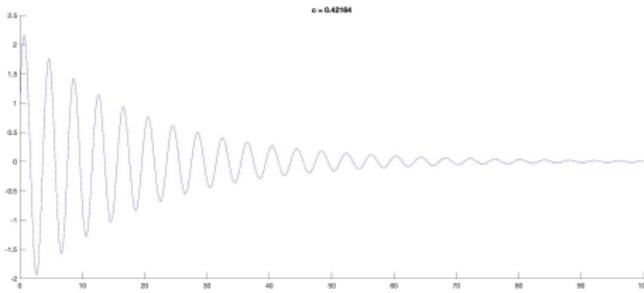
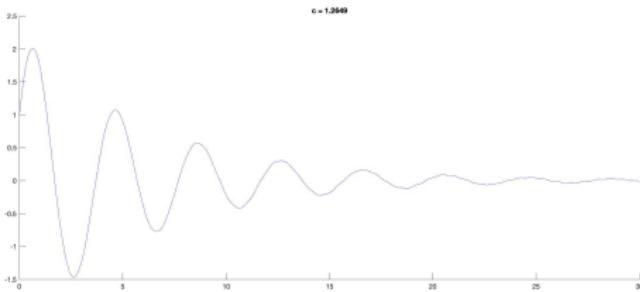
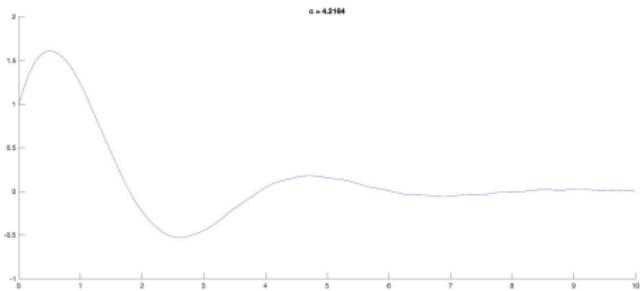
$$\begin{aligned} \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) + 0 \sin(\omega t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) - \frac{c}{m} A\omega \sin(\omega t) + \frac{c}{m} B\omega \cos(\omega t) \\ &\quad + \frac{k}{m} A \cos(\omega t) + \frac{k}{m} B \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A + \frac{c\omega}{m} B = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{c\omega}{m} A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & c\omega \\ -c\omega & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{F_0 (k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}, \quad B = \frac{c\omega F_0}{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}$$

Solución estacionaria = solución particular

$$X_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}} F_0 \cos(\omega t - \theta)$$



Solución estacionaria = solución particular

$$X_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}} F_0 \cos(\omega t - \theta)$$

$$(k - x m)^2 + c^2 x = m^2 x^2 + (c^2 - 2 m k) x + k^2 = m^2 \left( x + \frac{c^2 - 2 m k}{2m^2} \right)^2 + k^2 - \left( \frac{c^2 - 2 m k}{2m} \right)^2$$

Mínimo en  $[0, +\infty[$

$$\text{Si } 2 m k > c^2, x_{min} = \frac{2 m k - c^2}{2m^2} . \quad \text{Si } 2 m k \leq c^2, x_{min} = 0 .$$

Máxima ganancia (resonancia práctica) cuando  $2 m k > c^2 (> 0)$

$$\omega_R = \pm \frac{1}{2m} \sqrt{4 m k - 2 c^2}$$

$$X_p(t) = \frac{2 m}{\sqrt{c (4 m k - c^2)}} F_0 \cos(\omega_R t - \theta_R)$$

