Otras nociones topológicas.

- **Espacios métricos discretos.**
- **Interior de un conjunto.**
- **Frontera de un conjunto.**
- **Densidad.**
- **Abiertos relativos.**
- **Conjuntos compactos.**

Espacios métricos discretos.

Def.: Un espacio métrico es **discreto** si todos sus puntos son aislados.

Ejemplo: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ son espacios métricos discretos.

Dem.: Sea $n \in \mathbb{N}$ (para $\mathbb{Z}$ es similar).

Notemos que en $\mathbb{N}$, $B_r(n) = \{m \in \mathbb{N} : |m - n| < r\}$.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{\frac{1}{2}}(n) = \{n\} \implies n$ es punto aislado

$\implies \mathbb{N}$ es discreto. $\square$

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ no tiene puntos aislados.

Dem.: Sean $p \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$. La bola de radio r y centro p es

$$B_r(p) = \{q \in \mathbb{Q} : |q - p| < r\} = (p - r, p + r) \cap \mathbb{Q}.$$

Veamos que esa bola contiene otros puntos de $\mathbb{Q}$ además de p.

En efecto, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, por ejemplo,

$$\exists q \in \mathbb{Q} : \ p < q < p + r \implies q \in B_r(p) \quad \text{y} \quad q \neq p$$

$\implies \forall p \in \mathbb{Q}, \ \forall r > 0, \ B_r(p) \neq \{p\}$

$\implies \mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados. $\square$

Interior de un conjunto.

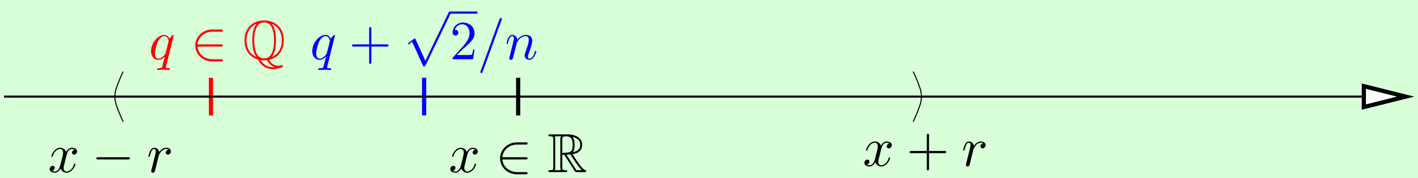
Def.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. El **interior** de E, que denotamos $\operatorname{int} E$, es el conjunto de **puntos interiores** de E.

Ej. Demuestra que si E es abierto, entonces $\operatorname{int} E = E$.

Ej.: Sea $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ el conjunto de los **números irracionales**.
Demuestra que $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$.

Sol.: Demostraremos que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r > 0, \ B_r(x) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$.

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q} : x - r < q < x$.



Por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N} : \ q + \frac{\sqrt{2}}{n} < x$ **Ej.**

$\Longrightarrow \ x - r < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < x + r$ y como $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$, **Ej.** $B_r(x) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$.

Entonces, $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r > 0, \ B_r(x) \not\subset \mathbb{Q} \Longrightarrow \operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$. $\square$

Frontera de un conjunto.

Def.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. La **frontera** de E es el conjunto de puntos de X tales que toda bola centrada en ese punto, contiene puntos de E y también puntos de su complemento E^{c}; vale decir, el conjunto

$$\partial E := \{x \in X : \ \forall r > 0, \quad B_r(x) \cap E \neq \emptyset \ \text{ y } \ B_r(x) \cap E^{\mathrm{c}} \neq \emptyset\}.$$

Ej. Sea $X = \mathbb{R}$. Demuestra que $\partial(0,1) = \{0,1\}$ y $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Ej. Denotamos $A \uplus B$ en vez de $A \cup B$, cuando A y B son disjuntos.
Sea $E \subset X$. Demuestra que:

- $X = \operatorname{int} E \uplus \partial E \uplus \operatorname{int} E^{\mathrm{c}}$;
- $\overline{E} = E \cup \partial E = \operatorname{int} E \uplus \partial E$;
- $\partial E = \partial E^{\mathrm{c}} = \overline{E} \cap \overline{E^{\mathrm{c}}}$ es un conjunto cerrado.

Ej.: Sea $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demuestra que $\partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Sol.: Ya vimos que $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$. Análogamente, se demuestra que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ **Ej.**
Entonces, toda bola en $\mathbb{R}$ intersecta a $\mathbb{Q}$ y a $\mathbb{I} \implies \partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{I} = \mathbb{R}$. $\square$

Densidad.

Def.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. E es **denso** en X si $\overline{E} = X$.

Ej.: Sea $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son ambos densos en $\mathbb{R}$.

Sol.: Ya vimos que $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ y que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\square$

En la demostración de que $\mathbb{Q}$ es denso en R, usamos la propiedad demostrada en la Clase 3, que justamente por eso se denomina densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Prop.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$.
E es denso en X si y sólo si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E : d(x,y) < \varepsilon$.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea E denso en X. Entonces, $\overline{E} = X$.
Sean $x \in X = \overline{E}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \exists y \in E : d(x,y) < \varepsilon$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \underbrace{\exists y \in E : d(x,y) < \varepsilon}_{B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset} \Longrightarrow x \in \overline{E}$

$\Longrightarrow X \subset \overline{E} \Longrightarrow X = \overline{E}$. $\square$

Corol.: E es denso en X si y sólo si todas las bolas de X intersectan a E.

Abiertos relativos.

Sea d una métrica en X. Sea $Y \subset X$ dotado de la métrica inducida por d.

Sea $E \subset Y$. E es **abierto en** Y, si $\forall x \in E,\ \exists r > 0 :\ B_r^Y(x) \subset E$, donde

$$B_r^Y(x) := \{y \in Y :\ d(y,x) < r\} = B_r^X(x) \cap Y.$$

Teor.: Sea $E \subset Y$.

E es abierto en Y si y sólo si $\exists G$ abierto en X tal que $E = G \cap Y$.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea E abierto en Y $\Longrightarrow$ $\forall x \in E,\ \exists r_x > 0 :\ B_{r_x}^Y(x) \subset E$.

$\boxed{\text{Ej.}}$

$$\Longrightarrow\ E = \bigcup_{x\in E} B_{r_x}^Y(x) = \bigcup_{x\in E}\left(B_{r_x}^X(x) \cap Y\right) = \underbrace{\Big(\bigcup_{x\in E} B_{r_x}^X(x)\Big)}_{G} \cap Y$$

$\Longrightarrow$ $E = G \cap Y$ con $G := \bigcup_{x\in E} B_{r_x}^X(x)$ abierto en X.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $E = G \cap Y$ con G abierto en X. Veamos que E es abierto en Y.

Sea $x \in E = G \cap Y$. Como G es abierto en X, $\exists r > 0 :\ B_r^X(x) \subset G$.

$\Longrightarrow$ $\exists r > 0 :\ B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = E$.

$\Longrightarrow$ E es abierto en Y. $\square$

Conjuntos compactos.

Def.: Sean X un espacio métrico y $E \subset X$.

- La familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un **cubrimiento** de E si $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.
  Si todos los G_α son abiertos, se dice que es un **cubrimiento por abiertos.**
- Un cubrimiento es **finito** o **infinito**, según que A sea finito o infinito.
- Sea $B \subset A$. La familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in B}$ es un **subcubrimiento** de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si $E \subset \bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha$.

Def.: Un conjunto K es **compacto** si **todo** cubrimiento por abiertos de K tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplo: Si K es finito, entonces es compacto.

Dem.: Sean $K = \{x_1, \ldots, x_N\}$ y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cubrimiento por abiertos de K

$\Longrightarrow \ \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

$\Longrightarrow \ \forall n = 1, \ldots, N, \ \exists \alpha_n \in A : \ x_n \in G_{\alpha_n}$

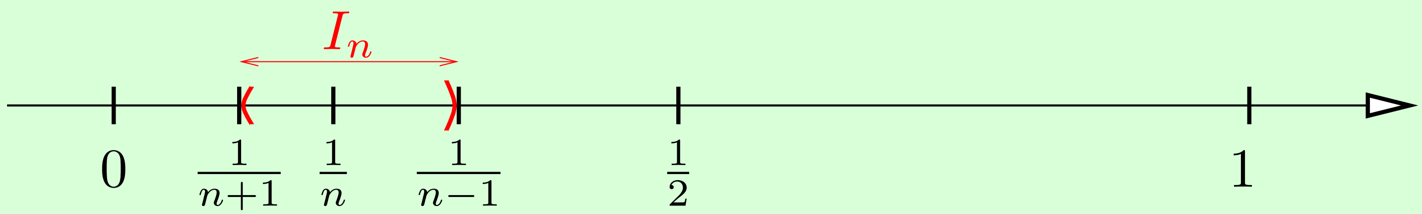
$\Longrightarrow \ K = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_{\alpha_n}$

$\Longrightarrow \ \{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^{N}$ es un subcubrimiento finito $\Longrightarrow$ K es compacto. $\square$

Ejemplo: $E := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ no es compacto.

Para demostrar que un conjunto no es compacto, basta encontrar **un** cubrimiento por abiertos del conjunto que no tenga ningún subcubrimiento finito.

Dem.: En este caso construiremos un cubrimiento de E por intervalos abiertos tales que cada intervalo contenga uno y sólo uno de los números $\frac{1}{n}$.



$\forall n \in \mathbb{N}$, sea $I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \implies I_n \cap E = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Entonces $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, de manera que la famiia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos de E.

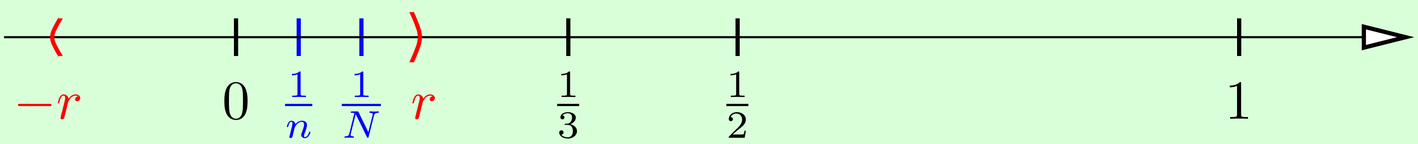
Como además cada intervalo contiene uno y sólo uno de los números $\frac{1}{n}$, cualquier colección finita de I_n sólo contendrá finitos términos de E y por lo tanto no será un subcubrimiento de E. En consecuencia, E no es compacto. $\square$

Ejemplo: $F := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ es compacto.

Para demostrar que un conjunto F es compacto, hay que considerar un cubrimiento por abiertos de F **arbitrario** y encontrar un subcubrimiento finito. ¡No basta considerar un cubrimiento particular! Debe ser un cubrimiento cualquiera.

Dem.: Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un cubrimiento por abiertos de F.

- Como $0 \in F \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$, $\exists \alpha_0 \in A:$ $0 \in G_{\alpha_0}$.
- Como $0 \in G_{\alpha_0}$ y G_{α_0} es abierto, $\exists r > 0:$ $B_r(0) := (-r, r) \subset G_{\alpha_0}$.



Por la **propiedad arquimediana**, $\exists N \in \mathbb{N}: \frac{1}{N} < r$

$\implies \forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < r \implies \forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \in (-r, r) \subset G_{\alpha_0}$.

- Por otra parte, $\forall n < N$ sea $\alpha_n \in A:$ $\frac{1}{n} \in G_{\alpha_n}$.

Entonces, $F = \left\{\frac{1}{n},\ n < N\right\} \cup \left\{\frac{1}{n},\ n \geq N\right\} \cup \{0\} \subset \bigcup_{n=0}^{N-1} G_{\alpha_n}$

$\implies$ $\{G_{\alpha_n}\}_{n=0}^{N-1}$ es un subcubrimiento finito de $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$

$\implies$ F es compacto. $\square$