UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 12 - Álgebra III (525201)

Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean invariantes para las transformaciones lineales

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 2y, -3x + 11y)$

b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (-y, x)$.

Demostración. Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, entonces los subespacios invariantes pueden tener dimensión 0, 1 o 2. En particular, sabemos que los subespacios de dimensión 0 y 2 son los triviales ($\{\theta\}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente).

Por tanto, resta determinar los subespacios invariantes de dimensión 1, los cuales corresponden a los subespacios propios de T.

Tomando la matriz representante $[T]$ de T con respecto a la base canónica,

$$\begin{aligned}\det([T] - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(11-\lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 - 15\lambda + 50 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 10)\end{aligned}$$

Así, $\sigma(T) = \{5, 10\}$. Es fácil ver que $(2, 1)^T$ es un vector propio asociado 5 y $(1, 3)^T$ es un vector propio asociado a 10. Luego, $S_{\lambda=5} = \langle\{(2, 1)^T\}\rangle$ y $S_{\lambda=10} = \langle\{(1, 3)^T\}\rangle$ son los subespacios invariantes de dimensión 1 de T.

Por otra parte, como $\sigma(S) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, entonces los únicos subespacios invariantes son $\{\theta\}$ y $\mathbb{R}^2$. ■

Ejercicio 2. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, 0)$.

a) Para todo $i = 1, \ldots, n$ hallar un subespacio T-invariante de dimensión i.

Demostración. Es fácil ver que $\langle\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}\rangle$ es un espacio T-invariante de dimensión i. ■

b) Demuestre que no existen S y R subespacios T-invariantes propios de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = S \oplus R$.

Demostración. Supongamos que existen S y R subespacios T-invariantes propios de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = S \oplus R$. Luego, existen los operadores restringidos $T|_S : S \to S$ y $T|_R : R \to R$.

Es fácil ver que $T|_S$ tiene Kernel de dimensión 1 (generado por $(1, 0, \ldots, 0)^T$ en las bases respectivas). Usando el Teorema de las Dimensiones tenemos que

$$\dim(T(S)) + 1 = \dim(S),$$

Como un resultado análogo se tiene para $\dim(T(R))$, vemos que

$$\dim(R^n) = \dim(S) + \dim(R) \implies \dim(T(R^n)) = \dim(T(S)) + \dim(T(R))$$

donde la segunda igualdad no es cierta, pues $\dim(T(R^n)) = n-1 \neq \dim(T(S)) + \dim(T(R)) = n-2$.

■

Ejercicio 3. Sea

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

una caja de Jordan de dimensión $k \times k$.

a) Muestre que λ es valor propio de $J_k(\lambda)$ y $\dim(S_\lambda) = 1$.

Demostración. Tenemos que $\det(J_k(\lambda) - \lambda I_k) = 0$ y por tanto λ es un valor propio de $J_k(\lambda)$. Para calcular S_λ, resolvemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$$

Por tanto, $S_\lambda = \langle \{e_1\} \rangle$. ■

b) Pruebe que $\forall j = 1, \ldots, k-1$, $\dim(Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j) = j$ y $\forall j \geq k$, $\dim(Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j) = k$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} J_k(\lambda) - \lambda I_k &= \texttt{diag(ones(k-1),1)} \\ (J_k(\lambda) - \lambda I_k)^2 &= \texttt{diag(ones(k-2),2)} \\ (J_k(\lambda) - \lambda I_k)^3 &= \texttt{diag(ones(k-3),3)} \\ &\vdots \\ (J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j &= \texttt{diag(ones(k-j),j)} \\ &\vdots \\ (J_k(\lambda) - \lambda I_k)^k &= \Theta_k \end{aligned}$$

Luego, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$

$$\begin{aligned}
x \in Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k) &\iff x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0\\
x \in Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^2 &\iff x_3 = x_4 = \cdots = x_k = 0\\
x \in Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^3 &\iff x_4 = x_5 = \cdots = x_k = 0\\
&\vdots\\
x \in Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j &\iff x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_k = 0\\
&\vdots\\
x \in Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^k &\iff x \in \mathbb{R}^k
\end{aligned}$$

Así, por cada potencia de la matriz se agrega un nuevo grado de libertad al Kernel, de modo que $\dim(Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j) = j$. Además, como $(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^k = \Theta_k$, entonces $(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j = \Theta_k$ para todo $j \geq k$, de modo que el Kernel sigue siendo el mismo (todo $\mathbb{R}^k$). ■