El espacio $\mathbb{R}^n$, espacios métricos y espacios vectoriales (parte 2)
Módulo 1, Presentación 3

Raimund Bürger

17 de marzo de 2025

1.4. Sucesiones de Cauchy, límites, y aplicaciones continuas

Definición 1.9 Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) se llama sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un N_ε tal que para todo $m, n > N_\varepsilon$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definición 1.10 Un espacio métrico M se llama completo si cada sucesión de Cauchy converge en M, es decir, posee un límite en M.

Teorema 1.14 El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es completo.

Demostración

1. Sea $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un N_ε tal que

$$\forall k, l > N_\varepsilon : \quad d(x^k, x^l) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j^l\right)^2} < \varepsilon.$$

1.4. Sucesiones de Cauchy, límites, y aplicaciones continuas

Demostración del Teorema 1.14 (continuación)

2. Sea i fijo ($i = 1, \ldots, n$). Entonces

$$\forall k, l > N_\varepsilon : \quad |x_i^k - x_i^l| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j^l\right)^2} < \varepsilon,$$

   es decir $\{x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Puesto que $\mathbb{R}$ es completo, $\{x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un límite $x_i \in \mathbb{R}$.
3. Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ obtenemos $x^k \to x$, según Teorema 1.4.

Definición 1.11 Sean M_1 y M_2 espacios métricos, $f : M_1 \to M_2$. Sea x_0 un punto de acumulación del dominio $D(f)$ de f, y supongamos que existe un $g \in M_2$ tal que para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f)$ con $x_n \neq x_0$ y $x_n \to x_0$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$. En este caso, g se llama el límite de f en x_0: $g = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

La aplicación f no necesariamente debe ser definida en x_0.

1.4. Sucesiones de Cauchy, límites, y aplicaciones continuas

Teorema 1.15 Sean M_1 y M_2 espacios métricos y $f : M_1 \to M_2$. Entonces f es continua en un punto de acumulación x_0 de $D(f)$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Demostración Tarea. ∎

En particular, este teorema es válido para cada punto interior x_0 de $D(f)$.

Si (M, d) es un espacio métrico y $M_0 \neq \varnothing$, $M_0 \subset M$, entonces (M_0, d) también es un espacio métrico.

Ahora sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y $f : M_1 \to M_2$. Si $X_2 \subset M_2$, la imagen recíproca por f de X_2 es el conjunto

$$f^{-1}(X_2) := \{x_1 \in M_1 \mid f(x_1) \in X_2\}.$$

1.4. Sucesiones de Cauchy, límites, y aplicaciones continuas

Teorema 1.16 Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y f una aplicación de M_1 en M_2. Entonces los tres siguientes enunciados son equivalentes.

1. La aplicación f es continua sobre M_1.
2. Para cada conjunto abierto $X_2 \subset M_2$, el conjunto $f^{-1}(X_2)$ es abierto en M_1.
3. Para cada conjunto cerrado $Y_2 \subset M_2$, el conjunto $f^{-1}(Y_2)$ es cerrado en M_1.

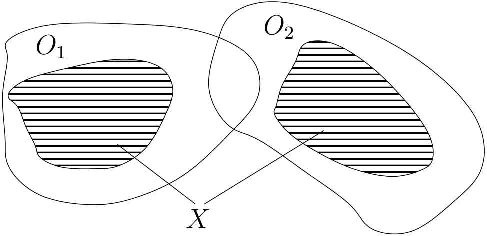
Demostración Apuntes pp. 14f. ∎

1.5. Conjuntos conexos

Definición 1.12 Sea (M, d) un espacio métrico y $X \neq \varnothing$ un subconjunto de M.

1. El conjunto X se llama disconexo si existen conjuntos abiertos O_1 y O_2 en M tales que
$$\begin{aligned} &X \subset O_1 \cup O_2; \quad O_1 \cap X \neq \varnothing; \quad O_2 \cap X \neq \varnothing; \\ &X \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing. \end{aligned} \tag{1.3}$$
2. El conjunto X se llama conexo si no es disconexo.

Un conjunto X es disconexo si puede ser descompuesto en dos componentes disjuntos a través de los conjuntos O_1 y O_2:



1.5. Conjuntos conexos

Ejemplo 1.3 El conjunto $X = [0,1) \cup (1,2]$ es disconexo en $\mathbb{R}$. $O_2 = (1,3)$. Entonces $X \subset O_1 \cup O_2$; $O_1 \cap X = [0,1) \neq \varnothing$, $O_2 \cap X = (1,2] \neq \varnothing$, pero $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ y por lo tanto, también $X \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

Ejemplo 1.4 Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M,d) que consiste en solamente un punto, por ejemplo $X = \{\xi\}$. En este caso, X es conexo. Para ver esto, supongamos que X fuera disconexo. existen conjuntos abiertos O_1 y O_2 en M tales que $X \subset O_1 \cup O_2$ y $O_1 \cap X \neq \varnothing$, entonces $\xi \in O_1 \cap X$, y $O_2 \cap X \neq \varnothing$, entonces $\xi \in O_2 \cap X$. Por lo tanto, $\xi \in X \cap O_1 \cap O_2$, es decir, $X \cap O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$, una contradicción.

Teorema 1.17 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si X contiene sólo un elemento o X es un intervalo.

Demostración Apuntes p. 16. $\blacksquare$

1.5. Conjuntos conexos

Teorema 1.18 Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos. Consideremos una aplicación $f : M_1 \to M_2$ continua sobre el conjunto conexo $X \subset D(f) \subset M_1$. Entonces la imagen de X por f,

$$f(X) = \{y \mid y = f(x),\, x \in X\}$$

es un conjunto conexo en M_2.

Demostración Apuntes p. 17. ■

1.5. Conjuntos conexos

Teorema 1.19 (Teorema del valor intermedio) Sea (M, d) un espacio métrico y sea la función $f : M \to \mathbb{R}$ continua sobre el conjunto conexo $X \subset D(f) \subset M$. Sean $a, b \in X$ tales que $f(a) \leqslant f(b)$; además, sea $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) \leqslant \eta \leqslant f(b).$$

Entonces existe al menos un $\xi \in X$ con $f(\xi) = \eta$.

Demostración

1. Si $f(a) = f(b)$, basta tomar $\xi = a$.
2. Sea $f(a) < f(b)$. Según el Teorema 1.18, $f(X)$ es conexo y debido a $f(X) \subset \mathbb{R}$, en virtud del Teorema 1.17, $f(X)$ es un intervalo tal que $[f(a), f(b)] \subset f(X)$.
   Entonces para cada $\eta \in [f(a), f(b)]$ existe a lo menos un $\xi \in X$ con $f(\xi) = \eta$. ■

1.6. Espacios vectoriales

Definición 1.13 Sea $K = (K, +, \cdot)$ un cuerpo arbitrario. Entonces $V \neq \varnothing$ se llama espacio vectorial sobre K si para cada $v, w \in V$, la suma $v + w$ y para cada $v \in V$ y $\lambda \in K$, el múltiple λv son definidos y nuevamente son elementos de V, tal que para vectores $u, v, w \in V$ arbitrarios y $\lambda, \mu \in K$ se cumplan las siguientes reglas:

$$v + w = w + v, \tag{V1}$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \tag{V2}$$

$$\exists 0 \in V : \ \forall v \in V : \ v + 0 = v, \tag{V3}$$

$$\forall v \in V : \ \exists -v \in V : \ v + (-v) = 0, \tag{V4}$$

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \tag{V5}$$

$$\exists e \in K : \ ev = v, \tag{V6}$$

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \tag{V7}$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v. \tag{V8}$$

1.6. Espacios vectoriales

Definición 1.14 Sea V un espacio vectorial arbitrario sobre un cuerpo K, y sean $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

1. El vector $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ se llama combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Esta combinación se llama trivial si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
2. Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ se llaman linealmente dependientes si existe una combinación lineal no trivial tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. En los demás casos se llaman linealmente independientes.
3. El sub-espacio lineal
$$L(v_1, \ldots, v_n) := \left\{ v \,\middle|\, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \right\}$$
es la envoltura lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$.
4. Si los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes y $L(v_1, \ldots, v_n) = V$, entonces $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y n es la dimensión de V.

1.6. Espacios vectoriales

Definición 1.15 El conjunto

$$\mathbb{V}^n = \left\{\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \mid v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}\right\}$$

con las operaciones

$$\vec{v} + \vec{w} = \{v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n\}; \quad \lambda\vec{v} = \{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

se llama espacio vectorial *n*-dimensional sobre $\mathbb{R}$.

Se verifica fácilmente que $\mathbb{V}^n$ es un espacio vectorial si definimos $\vec{0} = \{0, \ldots, 0\}$. Considerando los vectores linealmente independientes

$$\vec{e}_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \quad \vec{e}_2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \quad \vec{e}_n = \{0, 0 \ldots, 0, 1\},$$

podemos representar $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{V}^n$ como $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$.

Definición 1.16 Los vectores $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ se llaman base natural de $\mathbb{V}^n$.

1.6. Espacios vectoriales

Definición 1.17 Sea $X \neq \varnothing$. El conjunto de todas las funciones

$$F(X) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R},\ D(f) = X\}$$

con las operaciones

$$\begin{aligned} f+g: &\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X, \\ \lambda f: &\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in X \end{aligned}$$

se llama espacio vectorial de las aplicaciones de X en $\mathbb{R}$.

Definición 1.18 Sea X un espacio métrico. El subconjunto de $F(X)$ de las funciones continuas,

$$C(X) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ es continua sobre } D(f) = X\}$$

se llama espacio vectorial de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

1.7. Espacios vectoriales normados

Definición 1.19 Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ se llama espacio vectorial normado si para cada $v \in V$ podemos definir un número $\|v\| \geqslant 0$ tal que para todo $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisfacen los siguientes axiomas:

$$\|v\| = 0 \text{ si y sólo si } v = 0, \tag{N1}$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \tag{N2}$$

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|. \tag{N3}$$

La cantidad $\|v\|$ se llama norma o longitud de v.

Ejemplo 1.5 Para $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{V}^n$ definamos

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Evidentemente, $\|\vec{v}\| \geqslant 0$; también es facil verificar (N1) y (N2). El axioma (N3) surge a partir de la desigualdad de Minkowski.

1.7. Espacios vectoriales normados

Definición 1.20 La norma definida sobre el espacio vectorial n-dimensional $\mathbb{V}^n$ por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

se llama norma euclidiana, y el espacio $\mathbb{V}^n = (\mathbb{V}^n, \|\cdot\|)$ espacio vectorial euclidiano n-dimensional.

Ejemplo 1.6 Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y $C[a, b]$ el espacio de las funciones continuas sobre $[a, b]$. En este caso, podemos definir la norma del máximo

$$\|f\| := \max_{[a,b]} \left|f(x)\right|. \tag{1.4}$$

1.7. Espacios vectoriales normados

Teorema 1.20 Sea V un espacio vectorial normado. Entonces $d(v, w) = \|v - w\|$ define una métrica sobre V.

Teorema 1.21 Sea una sucesión en $\mathbb{V}^n$ dada por $\vec{v}^k = \{v_1^k, \dots, v_n^k\}$, $k \in \mathbb{N}$; además, sea $\vec{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces son equivalentes:

1. $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{v}^k = \vec{v}$.
2. $\lim\limits_{k \to \infty} v_i^k = v_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Teorema 1.22 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C[a, b]$, y sea $f \in C[a, b]$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $f_n \to f$ en $C[a, b]$.
2. $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Demostración La equivalencia de los enunciados es evidente si tomamos en cuenta que el primer enunciado significa que

$$d(f_n, f) = \max_{x \in [a,b]} \left| f_n(x) - f(x) \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \quad \blacksquare$$

1.8. La conexión entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{V}^n$

Los elementos de ambos espacios son definidos por n componentes reales, y las fórmulas de la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y entre dos vectores de $\mathbb{V}^n$ son ideénticas. En la literatura es muy común identificar ambos espacios. Pero es importante distinguir entre $\mathbb{R}^n$ como un espacio de puntos y $\mathbb{V}^n$ como un espacio de vectores.

Definición 1.21 Un vector $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{V}^n$ define una aplicación

$$\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad D(\vec{v}) = \mathbb{R}^n,$$
$$x \mapsto \vec{v}(x) = \vec{v}((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n).$$

Esta aplicación se llama traslación.

1.9. La equivalencia de normas en $\mathbb{V}^n$

Definimos en la norma euclidiana para $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{V}^n$ por

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Las siguientes expresiones igualmente definen normas sobre $\mathbb{V}^n$:

$$\|\vec{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|, \quad \|\vec{v}\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|.$$

Demostraremos que es suficiente considerar la norma euclidiana , puesto que todas las normas sobre $\mathbb{V}^n$ son equivalentes.

Teorema 1.23 Consideremos $\mathbb{V}^n$ con la norma euclidiana. Sea $\vec{v}_0 \in \mathbb{V}^n$ fijo. Entonces para cada $R > 0$, el conjunto

$$S_R(\vec{v}_0) = \left\{\vec{v} \in \mathbb{V}^n \,|\, \|\vec{v} - \vec{v}_0\| = R\right\}$$

es compacto.

Demostración Tarea.

1.9. La equivalencia de normas en $\mathbb{V}^n$

Teorema 1.24 Todas las normas en $\mathbb{V}^n$ son equivalentes en el siguiente sentido. Si $\|\cdot\|^*$ y $\|\cdot\|^{**}$ son normas en $\mathbb{V}^n$, entonces existen constantes positivas κ y K tales que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^n : \; \kappa\|\vec{v}\|^* \leqslant \|\vec{v}\|^{**} \leqslant K\|\vec{v}\|^*.$$

Demostración

1. Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre $\mathbb{V}^n$ y $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana. Para demostrar el teorema es suficiente demostrar que existen constantes $\tilde{\kappa} > 0$ y $\tilde{K} > 0$ tales que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^n : \; \tilde{\kappa}\|\vec{v}\|_2 \leqslant \|\vec{v}\| \leqslant \tilde{K}\|\vec{v}\|_2. \tag{1.7}$$

1.9. La equivalencia de normas en $\mathbb{V}^n$

Demostración del Teorema 1.24 (continuación)

2. Sean $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ los vectores de la base natural de $\mathbb{V}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \right\| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|v_i \vec{e}_i\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \|\vec{e}_i\| \\ &\leqslant \|v\|_2 \sum_{i=1}^{n} \|\vec{e}_i\| = \tilde{K} \|\vec{v}\|_2, \end{aligned}$$

donde definimos

$$\tilde{K} = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{e}_i\|.$$

Esto concluye la demostración de la parte derecha de la desigualdad (1.7).

1.9. La equivalencia de normas en $\mathbb{V}^n$

Demostración del Teorema 1.24 (continuación)

3. Consideremos ahora en el espacio métrico $\mathbb{V}^n$ con la norma euclidiana la aplicación

$$\mathbb{V}^n = D(f) \ni \vec{v} \mapsto f(\vec{v}) = \|\vec{v}\| \in \mathbb{R}.$$

Utilizando la desigualdad triangular y la primera parte de esta demostración, obtenemos para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^n$

$$\begin{aligned} \big| f(\vec{v}) - f(\vec{w}) \big| &= \big| \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \big| \leqslant \|\vec{v} - \vec{w}\| \\ &\leqslant \tilde{K} \|\vec{v} - \vec{w}\|_2 = \tilde{K} d(\vec{v}, \vec{w}), \end{aligned}$$

lo que implica que f es continua sobre $\mathbb{V}^n$.

1.9. La equivalencia de normas en $\mathbb{V}^n$

Demostración del Teorema 1.24 (continuación)

4. Por otro lado, según el Teorema 1.23, el conjunto

$$S = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{V}^n \mid \|\vec{v}\|_2 = 1 \right\}$$

es compacto. Dado que f es continua, f posee un mínimo absoluto sobre S, es decir, existe un $\vec{v}_0 \in S$ tal que

$$\forall \vec{v} \in S: \quad \tilde{\kappa} := f(\vec{v}_0) \leqslant f(\vec{v}),$$

es decir,

$$\forall \vec{v} \in S: \quad \tilde{\kappa} = \|\vec{v}_0\| \leqslant \|\vec{v}\|.$$

Dado que $\vec{v}_0 \in S$, o sea, $\|\vec{v}_0\|_2 = 1$, $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ y por lo tanto $\tilde{\kappa} > 0$.

Demostración del Teorema 1.24 (continuación)

5. Sea ahora $\vec{v} \in \mathbb{V}^n$ dado. Si $\vec{v} = \vec{0}$, trivialmente $\tilde{\kappa}\|\vec{v}\|_2 \leqslant \|\vec{v}\|$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|_2}\vec{v} \in S$$

y por lo tanto

$$\tilde{\kappa} \leqslant \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|_2}\vec{v} \right\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|_2},$$

es decir $\tilde{\kappa}\|\vec{v}\|_2 \leqslant \|\vec{v}\|$, lo que demuestra la parte izquierda de la desigualdad (1.7). ∎

Un análogo del Teorema 1.24 no es válido en espacio normados generales. Por ejemplo el espacio $C[a, b]$ admite normas que poseen estructuras tan diferentes que no existe una equivalencia tal como en el Teorema 1.24.

1.10. Espacios de Hilbert

Definición 1.22 Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ se llama espacio de Hilbert o espacio unitario si para cada $v, w \in V$ está definido un número $(v, w) \in \mathbb{R}$ (el producto escalar o producto interior de los vectores v y w) tal que para todo $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(v + w, u) = (v, u) + (w, u), \tag{H1}$$

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w), \tag{H2}$$

$$(v, w) = (w, v), \tag{H3}$$

$$(v, v) \geqslant 0; \quad (v, v) = 0 \text{ si y sólo si } v = 0. \tag{H4}$$

Ejemplo 1.7

1. Para $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n), \vec{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{V}^n$ definimos

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Es fácil verificar que $(\cdot, \cdot)$ satisface (H1)–(H4). También escribimos para este producto escalar $(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

1.10. Espacios de Hilbert

Ejemplo 1.7 (continuación)

2. Para un intervalo cerrado $[a, b]$ consideramos el espacio $C[a, b]$ y definimos para $f, g \in C[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Los axiomas (H1)–(H4) pueden ser verificados fácilmente.

1.10. Espacios de Hilbert

Ejemplo 1.7 (continuación)

3. Definimos el espacio de sucesiones

$$l^2 = \left\{ v = \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 < \infty \right\}.$$

Para $v = \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$, $w = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ definimos $v + w := \{v_i + w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\lambda v = \{\lambda v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. En este caso, $v + w, \lambda v \in l^2$; además se verifica fácilmente que para $v, w \in l^2$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} v_i w_i$ convergen absolutamente, y que

$$(v, w) := \sum_{i=1}^{\infty} v_i w_i$$

define un producto escalar que convierte l^2 en un espacio de Hilbert.

1.10. Espacios de Hilbert

Teorema 1.25 (Desigualdad de Schwarz) Si V es un espacio de Hilbert, entonces

$$\forall v, w \in V: \quad \big|(v, w)\big| \leqslant \sqrt{(v, v)} \cdot \sqrt{(w, w)}.$$

Demostración

1. Si $v = 0$ o $w = 0$, la desigualdad es trivialmente correcta.
2. Sea $v \neq 0$ y $w \neq 0$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ consideremos la desigualdad

   $$0 \leqslant (\lambda v + w, \lambda v + w) = \lambda^2 (v, v) + 2\lambda (v, w) + (w, w).$$

   Para

   $$\lambda = -\frac{(v, w)}{(v, v)}$$

   obtenemos

   $$0 \leqslant \frac{(v, w)^2}{(v, v)} - 2\frac{(v, w)^2}{(v, v)} + (w, w) \Leftrightarrow (v, w)^2 \leqslant (v, v)(w, w),$$

   lo que concluye la demostración. ■

1.10. Espacios de Hilbert

Teorema 1.26 Cada espacio de Hilbert es un espacio normado si definimos

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

Demostración Tarea. $\blacksquare$