# Teoremas de Tonelli y Fubini.

- **Teorema de Tonelli.**
- **Teorema de Fubini.**

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ son espacios de medidas, $\mathscr{Z}$ es la $\sigma$-álgebra generada por los rectángulos medibles de $X \times Y$ y $\pi : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}}$ es la medida producto. Recordemos lo visto en la clase anterior:

Sean $\mu$ y $\nu$ medidas $\sigma$-finitas y $E \in \mathscr{Z}$.

Entonces, $\begin{aligned} f : X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \nu(E_x) \end{aligned}$ y $\begin{aligned} g : Y &\to \overline{\mathbb{R}} \\ y &\mapsto \mu(E^y) \end{aligned}$ son funciones medibles **(1)**

y $\int_X f \, d\mu = \int_X \nu(E_x) \, d\mu = \pi(E) = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu = \int_Y g \, d\nu,$ **(2)**

lo que también puede escribirse del siguiente modo:

$$\int_X \left[ \int_Y (\chi_E)_x \, d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} \chi_E \, d\pi = \int_Y \left[ \int_X (\chi_E)^y \, d\mu) \right] d\nu.$$

El objetivo de esta clase es extender este resultado, primero a funciones medibles positivas y después a funciones integrables en el espacio producto $X \times Y$.

Para ello, vamos a usar la siguiente propiedad, cuya demostración queda como **Ej.**

**Lema:** Sean $F_n, \ F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \ n \in \mathbb{N},$ tales que $F_n \xrightarrow{n} F$.
Entonces, $(F_n)_x \xrightarrow{n} F_x \quad \forall x \in X$ y $(F_n)^y \xrightarrow{n} F^y \quad \forall y \in Y$.
Además, si $F_n \nearrow F$, entonces $(F_n)_x \nearrow F_x$ y $(F_n)^y \nearrow F^y$.

# Teorema de Tonelli.

**Teor. [de Tonelli]:** Sean $\mu$ y $\nu$ medidas $\sigma$-finitas y $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}^+$ medible. Entonces, $\begin{array}{l} f : X \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \quad x \mapsto \int_Y F_x \, d\nu \end{array}$ y $\begin{array}{l} g : Y \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \quad y \mapsto \int_X F^y \, d\mu \end{array}$ son funciones medibles y

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X \times Y} F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu,$$

vale decir: $\boxed{\int_X \left( \int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F \, d\pi = \int_Y \left( \int_X F^y \, d\mu \right) d\nu.}$

**Dem.:** Sean $\Phi_n : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, funciones simples, medibles y positivas tales que $\Phi_n \nearrow F$.

$\Longrightarrow \; \Phi_n = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \chi_{E_k^n}$ con $\lambda_k^n \geq 0$ y $E_k^n \in \mathscr{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sean $\begin{array}{l} \varphi_n : X \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \quad x \mapsto \int_Y (\Phi_n)_x \, d\nu \end{array}$ y $\begin{array}{l} \psi_n : X \to \overline{\mathbb{R}}^+ \\ \quad y \mapsto \int_X (\Phi_n)^y \, d\mu \end{array}$ $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \int_Y \left( \chi_{E_k^n} \right)_x d\nu = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \, \nu\big( (E_k^n)_x \big), & x \in X, \\ \psi_n(y) = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \int_X \left( \chi_{E_k^n} \right)^y d\mu = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \, \mu\big( (E_k^n)^y \big), & y \in Y. \end{cases}$$

Usando los resultados vistos en la clase anterior, tenemos que

$E_k^n \in \mathscr{Z} \overset{\text{(1)}}{\Longrightarrow} x \mapsto \nu\big((E_k^n)_x\big)$ e $y \mapsto \mu\big((E_k^n)^y\big)$ son funciones medibles

$\Longrightarrow \varphi_n$ medibles en $\mathscr{X}$ y $\psi_n$ medibles en $\mathscr{Y}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

**(2)** $\Longrightarrow \int_X \nu\big((E_k^n)_x\big)\, d\mu = \underbrace{\pi(E_k^n)}_{\int_{X\times Y} \chi_{E_k^n}\, d\pi} = \int_Y \mu\big((E_k^n)^y\big)\, d\nu.$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \int_X \nu\big((E_k^n)_x\big)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \int_{X\times Y} \chi_{E_k^n}\, d\pi$$
$$= \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_k^n \int_Y \mu\big((E_k^n)^y\big)\, d\nu.$$

$$\Longrightarrow \int_X \varphi_n\, d\mu = \int_{X\times Y} \Phi_n\, d\pi = \int_Y \psi_n\, d\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Phi_n \nearrow F \overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} \begin{cases} (\Phi_n)_x \nearrow F_x & \forall x \in X \\ (\Phi_n)^y \nearrow F^y & \forall y \in Y \end{cases}$$

$$\overset{\text{T.C.M.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \varphi_n(x) = \int_Y (\Phi_n)_x\, d\nu \nearrow \int_Y F_x\, d\nu =: f(x) & \forall x \in X \\ \psi_n(y) = \int_X (\Phi_n)^y\, d\mu \nearrow \int_X F^y\, d\nu =: g(y) & \forall y \in Y \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $f$ **medible en** $\mathscr{X}$, $g$ **medible en** $\mathscr{Y}$ y

$$\overset{\text{T.C.M.}}{\Longrightarrow} \int_X f\, d\mu = \int_{X\times Y} F\, d\pi = \int_Y g\, d\nu. \quad \blacksquare$$

# Teorema de Fubini.

**Teor. [de Fubini]:** Sean $\mu$ y $\nu$ medidas $\sigma$-finitas y

$F : X \times Y \to \mathbb{R}$ **integrable respecto de la medida producto $\pi$.**

Entonces, $\begin{array}{l} f : X \to \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \int_Y F_x \, d\nu \end{array}$ y $\begin{array}{l} g : Y \to \overline{\mathbb{R}} \\ y \mapsto \int_X F^y \, d\mu \end{array}$

- están bien definidas c.t.p.,
- coinciden c.t.p. con funciones medibles,
- tienen integral finita y
- $\int_X f \, d\mu = \int_{X \times Y} F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu$,

vale decir: $\boxed{\int_X \left( \int_Y F_x \, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F \, d\pi = \int_Y \left( \int_X F^y \, d\mu \right) d\nu.}$

La hipótesis de que $F$ sea integrable en el espacio producto $X \times Y$ es necesaria. El Teorema de Fubini puede fallar si $F$ no es integrable. **Ej. 10.O.**

**Dem.:** Como $F$ es integrable, sus partes positiva y negativa, $F^+$ y $F^-$, tienen integral finita.

Sean $f^+(x) := \int_Y (F^+)_x \, d\nu$ y $f^-(x) := \int_Y (F^-)_x \, d\nu, \quad x \in X$

$\overset{\text{Tonelli}}{\Longrightarrow}$ $f^+$ y $f^-$ son medibles y $\begin{cases} \int_X f^+ \, d\mu = \int_{X\times Y} F^+ \, d\pi < \infty, \\ \int_X f^- \, d\mu = \int_{X\times Y} F^- \, d\pi < \infty. \end{cases}$

Entonces, $\begin{cases} \mu(\{x \in X : \ f^+(x) = +\infty\}) = 0, \\ \mu(\{x \in X : \ f^-(x) = +\infty\}) = 0. \end{cases}$

Sea $N := \{x \in X : \ f^+(x) = +\infty\} \cup \{x \in X : \ f^-(x) = +\infty\}$.

Por lo tanto, $\mu(N) = 0$.

$f^+ - f^-$ está bien definida fuera de $N$ y,

$\forall x \notin N, \quad f^+(x) - f^-(x) = \int_Y \left[(F^+)_x - (F^-)_x\right] d\nu = \int_Y F_x \, d\nu =: f(x)$.

Entonces, $f = f^+ - f^-$ **está bien definida fuera de** $N$ **y por lo tanto c.t.p.**

Además, $f$ **coincide c.t.p. con** $f^+\chi_{X\setminus N} - f^-\chi_{X\setminus N}$, **que es medible,**

$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$ **es finita** y

$\int_X f \, d\mu = \int_{X\times Y} F^+ \, d\pi - \int_{X\times Y} F^- \, d\pi = \int_{X\times Y} F \, d\pi.$

La demostración para $g$ es similar. ■