Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Certamen 1 — viernes 7 de octubre de 2016

Problema 1 (10 puntos)**.** Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{2x^4+3y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determinar las derivadas parciales de f.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$?
c) Sea $(x_0,y_0)=(1,1)$. Determinar la derivada direccional de f en (x_0,y_0) en la dirección $\vec{a}=(0{,}6,0{,}8)$.
d) Determinar en (x_0,y_0) la dirección de mayor crecimiento de f.

Problema 2 (10 puntos)**.** Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x-y}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) ¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz para f en el punto $(x_0=0,y_0=0)$?
b) Sea el conjunto $\mathcal{E}$ dado por

$$\mathcal{E}=\bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,x+y=1,\,-1\leq x\leq 1\bigr\}.$$

¿Cuales son los extremos de f sobre $\mathcal{E}$?

Problema 3 (10 puntos)**.** Se consideran las funciones

$$\begin{aligned}f_1(x,y,u,v)&=y-x+(u+v)(u-v),\\ f_2(x,y,u,v)&=x+4y+(u^2-1)\cos v+1.\end{aligned}\tag{1}$$

Sea $P=(x_0=0,y_0=0,u_0=0,v_0=0)$.

a) Analizar si en una vecindad de P, existen funciones $g_1=g_1(u,v)$ y $g_2=g_2(u,v)$ tales que las variables $x=g_1(u,v)$ e $y=g_2(u,v)$ pueden ser despejadas de

$$\begin{aligned}f_1(x,y,u,v)&=0,\\ f_2(x,y,u,v)&=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Si posible, calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0), \quad \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0), \quad \frac{\partial g_2}{\partial u}(0,0), \quad \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,0).$$

b) Analizar si en una vecindad de P, existen funciones $h_1 = h_1(x,y)$ y $h_2 = h_2(x,y)$ tales que las variables $u = h_1(x,y)$ y $v = h_2(x,y)$ pueden ser despejadas de (2). Si posible, calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial h_1}{\partial y}(0,0), \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0).$$

Problema 4 (10 puntos)**.** Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^x y^4 \cos z.$$

a) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(x,y,z)$ de f correspondiente al punto de desarrollo $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$.

b) Determinar el termino residual $R_2(x,y,z,x_0,y_0,z_0)$ correspondiente.

c) Sea

$$B := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x,y \leq 1, -\pi/4 \leq z \leq \pi/4\big\}.$$

Determinar una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{(x,y,z)\in B} \big|R_2(x,y,z,x_0,y_0,z_0)\big| \leq C.$$

Problema 5 (10 puntos)**.** Se considera la ecuación

$$F(x,y) = x + \mathrm{e}^x - y^2 - \frac{1}{2} x \sin y - 1 = 0.$$

a) ¿Es posible despejar en forma única $y = g_1(x)$ o $x = g_2(y)$ a partir de esta ecuación en una vecindad de $(x_0,y_0) = (0,0)$?

b) Si posible, calcular $g_1'(0)$ y $g_2'(0)$.