Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº3: Números Complejos
Clase N°25 - 06/06/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

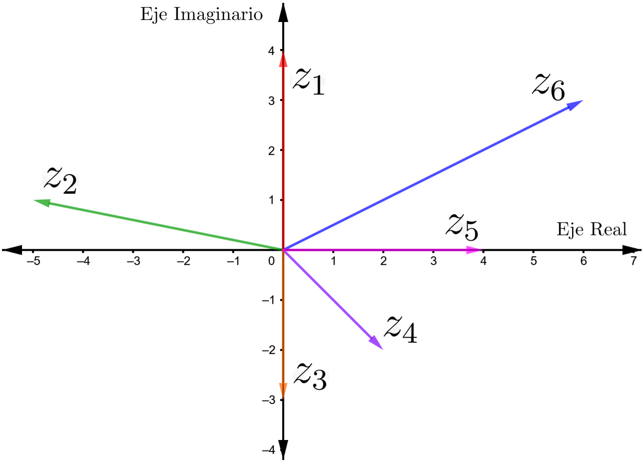
Representación de un Número Complejo

Un número complejo puede ser representado de cuatro formas y estas se utilizarán de acuerdo a su utilidad y al contexto donde esten inmersos. Sea $z \in \mathbb{C}$, las cuatro formas de representar a z que veremos son:

- Binomial: z se escribe como $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$.
- Par ordenado: z se escribe como $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ y se asocia a z un punto o un vector en el plano cartesiano que, cuando lo utilizamos para representar números complejos, lo llamamos **plano de Argand** o **plano complejo**.
- Polar y exponencial (las trabajaremos más adelante)

Números Complejos

También podemos representar un número complejo como un vector dirigido desde el origen hasta un punto en el plano, por ejemplo:



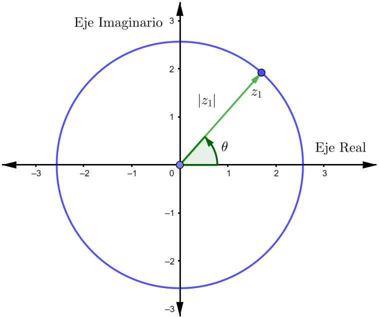
Ejercicios

Determine los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes relaciones y represente gráficamente.

1. $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right| = 1$
2. $|z-1| \geq 2$
3. $|z+1-2i| = 3$
4. $\mathrm{Im}(z^2) > \mathrm{Im}(z)$
5. $1 < |z+2i| \leq 4$

Forma Polar de un Número Complejo

Además, si consideramos $z = (a, b)$ sabemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ representa la distancia del origen del sistema al punto (a, b). Dado lo anterior, podemos representar la situación como se muestra a continuación:



y si consideramos el ángulo θ podemos obtener la forma polar de un número complejo.

Forma Polar de un Número Complejo

Al ángulo θ, en posición normal, que forma el vector con el eje X, en este caso se dice que este ángulo es el argumento de z y lo denotamos por

$$\theta = \arg(z)$$

y como ya mencionamos las funciones son periódicas es por esto que:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ahora bien, para evitar que haya infinitas formas de representar a un número complejo en forma polar el valor de θ en la representación polar de z se restringe al intervalo $]-\pi, \pi]$

Ejercicio

Escriba los siguientes números complejos en forma polar, si están en forma binomial, y en forma binomial, si están en forma polar.

1. $z = 4$
2. $z = -3i$
3. $z = 1 + i$
4. $z = 2\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
5. $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6. $z = -2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
7. $z = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Forma Exponencial de un Número Complejo

La historia de la matemática nos menciona que Roger Cotes descubrió en 1714 la relación entre las funciones trigonométricas y el logaritmo natural, dada por:

$$ix = \ln(\cos(x) + i\sin(x))$$

Luego, fue Euler veinte años después quien logró desarrollar la fórmula utilizando la función exponencial, es decir:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Considerando esta última igualdad podemos tomar a $x = \theta$ y además multiplicar por $|z|$, obteniéndose:

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$$

Operaciones entre Complejos

De acuerdo con lo anterior podemos definir el producto y suma de complejos en forma polar, como sigue:

Teoremas

1. El producto de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos de los factores.
2. El cociente de dos números complejos tiene módulo igual al cociente de los módulos y argumento igual a la diferencia de los argumentos.

Ejercicios

Considere z_1 y z_2 dos números complejos dados por:

$$z_1 = -1 - i \qquad \text{y} \qquad z_2 = 2 + 2i$$

1. Escriba los números complejos en forma polar.
2. Determine su producto y cociente.
3. Escriba ambos núneros complejos en forma exponencial

Potencias con Exponente Natural

Definición

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, la potencia con exponente natural n de z se define, como el producto de z por sí mismo n veces y $z^0 = 1$. Luego, se tiene:

$$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \quad z^3 = z^2 \cdot z, \quad \ldots, \quad z^n = z^{n-1} \cdot z$$

Fórmula de Moivre

Teorema

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que:

$$z^n = (|z|\text{cis}(\theta))^n = |z|^n \text{cis}(n\theta) = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Ejercicios

Calcule y escriba el resultado en forma polar.

1. $(1+i)^4(1-i)^4$
2. $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2020}$
3. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$
4. $\left(\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i}\right)^{-3}$