Laboratorio 10: Sistemas de Ecuaciones Lineales – 2$^{\text{da}}$ parte.

Cálculo Numérico 521230/525240

Ejercicio 1 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Recordemos la función creada en el **Ejercicio 0** del laboratorio anterior, la cual, dado un número natural n y tres parámetros reales a, b, c, devuelve la matriz de n filas y n columnas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

Este tipo de matrices se llaman *tridiagonales*. Se puede mostrar que cuando $|a| \geq |b| + |c|$, la factorización LU se puede hacer sin pivoteo, es decir, la matriz $\mathbf{P}$ resulta ser exactamente la matriz identidad. En lo que sigue, consideremos el vector $\boldsymbol{b}$ de n componentes iguales a 1.

1. Llame a su función anterior con $n = 10$, $a = 4$, $b = c = 3$, y calcule su factorización LU con ayuda del comando `lu`. Verifique que las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ resultantes no son tridiagonales y que la matriz $\mathbf{P}$ no es la matriz identidad. Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con la ayuda de estas matrices (utilice para ello sustitución progresiva y regresiva según corresponda).

2. Llame nuevamente a su función con $n = 10$, $a = 4$, $b = c = 1$, y encuentre su factorización LU. Observe que en este caso las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ sí son tridiagonales y que la matriz $\mathbf{P}$ sí es la matriz identidad. ¿Por qué ocurre esto? Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con la ayuda de estas matrices (utilice para ello sustitución progresiva y regresiva según corresponda).

Ejercicio 2 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Considere ahora la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Modifique la función escrita por usted en el Laboratorio anterior para que, dado $n \in \mathbb{N}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, esta nueva función cree esta nueva matriz.

2. Escriba un rutero en el que:

   a) Llame a esta nueva función con $n = 100$, $a = 4$, $b = c = -1$ y $d = 0$ (se genera la misma matriz tridiagonal del laboratorio anterior). Guarde el resultado en la variable `A_0`.

b) Calcule la factorización `lu` de `A_0` con pivoteo parcial, y almacene las matrices triangular inferior y superior en las variables `L_0` y `U_0`, respectivamente.

c) "Espíe" la estructura de ambas matrices triangulares obtenidas con el comando `spy` de MATLAB, y observe que ellas mantienen la estructura de la matriz `A_0`.

d) Cuente, con el comando `nnz` de MATLAB, la cantidad de elementos no nulos de las matrices `A_0`, `L_0` y `U_0`, y observe que las matrices triangulares no tienen más elementos no nulos de los que tiene `A_0`.

e) Repita lo anterior, ahora llamando a esta nueva función con $n = 100$, $a = 4$, $b = c = -1$ y $d = 2$ (observe que esta matriz tiene sólo 6 coeficientes no nulos más que la matriz tridiagonal anterior). Calcule su factorización `lu` con pivoteo parcial, espíe la estructura de las matrices triangulares obtenidas y cuente los elementos no nulos que hay en ellas. ¿Qué se observa en este caso?

Ejercicio 3 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Dado $n \in \mathbb{N}$, considere ahora la matriz tridiagonal de n filas y n columnas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el vector columna $\boldsymbol{b} = (2, 4, \ldots, 2n)^T$. Escriba un rutero en MATLAB en el que se realice lo siguiente:

1. Construya la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ para $n = 20$.
2. Verifique que la matriz $\mathbf{A}$ es simetrica a través del comando `issymmetric`.
3. Verifique que la matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva a través del comando `eig`.
4. Efectue la factorización `R = chol(A)` solamente cuando las condiciones anteriores son satisfechas (se recomienda anidar dos estructuras `if`).
5. Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ usando la factorización de Cholesky encontrada en el ítem anterior (utilice nuevamente sustitución progresiva y regresiva según corresponda).