UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Evaluación 1

1. [**40 puntos**] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) un conjunto abierto, limitado, conexo y con frontera Lipchitz Γ que puede ser descompuesta de forma disjunta en Γ_D y Γ_N. Además definimos $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\sigma \geq 0$ (c.t.p.), $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Considere la siguiente EDP: *Encontrar* $\psi \in H^2(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\alpha}\, \psi) + \sigma \psi = f\,, &\quad \textit{en } \Omega \\ \psi = 0\,, &\quad \textit{en } \Gamma_D \\ -\epsilon \nabla \psi \cdot \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})\, \psi = g\,, &\quad \textit{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

   a) Defina una formulación variacional para la EDP propuesta, a través de una forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y una forma lineal $F : V \to \mathbb{R}$ donde V es un espacio de Hilbert apropiado.

   b) Muestre que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $F : V \to \mathbb{R}$ son continuas. **Indicación:** considere que todos los paramétros pueden ser nulos excepto $\epsilon > 0$.

   c) Estudie la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ sobre $V \times V$ en las siguientes situaciones:

      1) $|\Gamma_N| = 0$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$;
      2) $|\Gamma_D| > 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ y $\langle (v\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\Gamma_N} > 0$ para todo, $v \in H^1(\Omega)$;
      3) $|\Gamma_D| = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}$ y existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\frac{1}{2}\,\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.);
      4) $|\Gamma_D| = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$, $\langle (v\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\Gamma_N} < 0$ para todo, $v \in H^1(\Omega)$ y existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.).

   d) Estudie existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional propuesta y una versión discreta definida sobre $V_h \leq V$;

   e) Enuncie una cota para el error $||u - u_h||_V$ donde $u \in V$ es solución de la formulación variacional propuesta y u_h de su versión discreta.

2. [**20 puntos**] Sea $\Omega =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_h$ una malla unidimensional sobre Ω, considere el espacio discreto

$$V_h^2 = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}^2(K), \forall\, K \in \mathcal{T}_h\}$$

   y $\mathcal{I}_h^2 : H^2(\Omega) \to V_h^2$ el operador de interpolación para V_h^2. Sea $v \in H^3(\Omega)$, demuestre que

$$|v - \mathcal{I}_h^2\, v|_{2,\Omega} \leq h\, |v|_{3,\Omega}\,,$$

   para todo $h > 0$.

Soluciones

1. *a)* Consideramos el espacio $V = \{v \in H_0^1(\Omega) : \gamma_0|(v)_{\Gamma_D} = 0\}$, notando que si $|\Gamma_D| = 0$ entonces $V = H^1(\Omega)$ y si $|\Gamma_N| = 0$ entonces $V = H_0^1(\Omega)$. Sea $v \in V$, de la definición de la EDP dada es inmediato que

$$(\nabla \cdot (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\alpha}\, \psi), v)_\Omega + (\sigma \psi, v)_\Omega = (f, v)_\Omega\,,$$

trataremos primero el término $(\nabla \cdot (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\alpha}\, \psi), v)_\Omega$ como sigue

$$(\nabla \cdot (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\alpha}\, \psi), v)_\Omega = (\nabla \cdot (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\beta}\, \psi), v)_\Omega + (\nabla \cdot ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\, \psi), v)_\Omega$$

donde, al observar que $-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\beta}\, \psi \in \mathbf{H}(\mathsf{div}, \Omega)$ podemos integrar por partes como sigue

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\beta}\, \psi), v)_\Omega &= (\epsilon \nabla \psi - \boldsymbol{\beta}\, \psi, \nabla v)_\Omega + \langle (-\,\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\beta}\, \psi) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\Gamma_N} \\ &= (\epsilon \nabla \psi - \boldsymbol{\beta}\, \psi, \nabla v)_\Omega + \langle g, v \rangle_{\Gamma_N}\,,\end{aligned}$$

y, usando regla del producto obtenemos

$$(\nabla \cdot ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\, \psi), v)_\Omega = ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla \psi, v)_\Omega + (\nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\, \psi, v)_\Omega,$$

luego,

$$(\epsilon \nabla \psi - \boldsymbol{\beta}\, \psi, \nabla v)_\Omega + ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla \psi, v)_\Omega + ((\nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \sigma)\, \psi, v)_\Omega = (f, v)_\Omega - \langle g, v \rangle_{\Gamma_N}\,.$$

De lo anterior definimos $a : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}a(u, v) &= (\epsilon \nabla u - \boldsymbol{\beta}\, u, \nabla v)_\Omega + ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla u, v)_\Omega + ((\nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \sigma)\, u, v)_\Omega \\ &= (\epsilon \nabla u, \nabla v)_\Omega + ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla u, v)_\Omega - (u, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v)_\Omega + ((\nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \sigma)\, u, v)_\Omega \\ &= (\epsilon \nabla u, \nabla v)_\Omega + ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla u, v)_\Omega - (u, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v)_\Omega + (\bar{\sigma}\, u, v)_\Omega\,,\end{aligned}$$

para todo $(u, v) \in V \times V$, donde, para facilitar la lectura definimos

$$\bar{\sigma} := \nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \sigma \in L^\infty(\Omega)\,.$$

Sea ahora $F : V \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(v) = (f, v)_\Omega - \langle g, v \rangle_{\Gamma_N}$$

para todo $v \in V$. Finalmente definimos el problema variacional: *Encontrar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u, v) = F(v)\,,\ \forall\, v \in V\,,$$

para el la EDP propuesta.

b) La continuidad de $F(\cdot)$ resulta de forma inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, las propiedades de producto dualidad, y la desigual da de trazas

$$\begin{aligned}
|F(v)| &= |(f,v)_\Omega - \langle g, v\rangle_{\Gamma_N}| \\
&\leq |(f,v)_\Omega| + |\langle g, v\rangle_{\Gamma_N}| \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}\, ||v||_{0,\Omega} + \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_N}\, \|v\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \\
&\leq (||f||_{0,\Omega} + C_T\, \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_N})\, \|v\|_{1,\Omega}\,,
\end{aligned}$$

donde $C_T > 0$ es la constante de la desigualdad de trazas. La continuidad de $a(\cdot,\cdot)$ resulta de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las deifiniciones de norma, en efecto

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |(\epsilon\nabla u, \nabla v)_\Omega + ((\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\cdot\nabla u, v)_\Omega - (u, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla v)_\Omega + (\bar{\sigma}\, u, v)_\Omega| \\
&\leq |(\epsilon\nabla u, \nabla v)_\Omega| + |((\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\cdot\nabla u, v)_\Omega| + |(u, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla v)_\Omega| + |(\bar{\sigma}\, u, v)_\Omega| \\
&\leq \epsilon\, \|\nabla u\|_{0,\Omega}\, \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|_{\infty,\Omega}\, \|\nabla u\|_{0,\Omega}\, \|v\|_{0,\Omega} \\
&\quad + \|\boldsymbol{\beta}\|_{\infty,\Omega}\, \|u\|_{0,\Omega}\, \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|\bar{\sigma}\|_{\infty,\Omega}\, \|u\|_{0,\Omega}\, \|v\|_{0,\Omega} \\
&\leq (\epsilon + 2\, \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty,\Omega} + \|\boldsymbol{\beta}\|_{\infty,\Omega} + \|\bar{\sigma}\|_{\infty,\Omega})\, \|u\|_{1\,\Omega}\, \|v\|_{1\,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

c) En lo que sigue asumiremos que $v \in V$ en cada caso.

1) Como $|\Gamma_N| = 0$ la condición sobre esta parte de la frontera no existe por lo tanto buscaremos eliminar $\boldsymbol{\beta}$ de la formulación. Notando que $V = H_0^1(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(u, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla v)_\Omega + ((\nabla\cdot\boldsymbol{\beta})\, u, v)_\Omega &= (u, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla v)_\Omega + (u, (\nabla\cdot\boldsymbol{\beta})\, v)_\Omega \\
&= (u, \nabla\cdot(v\,\boldsymbol{\beta}))_\Omega \\
&= -(\nabla u, v\,\boldsymbol{\beta})_\Omega\,,
\end{aligned}$$

luego,

$$(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u, v)_\Omega - (u, \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla v)_\Omega - ((\nabla\cdot\boldsymbol{\beta})\, u, v)_\Omega = 0\,.$$

Además, tenemos que $\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$, entonces

$$a(v,v) = (\epsilon\nabla v, \nabla v)_\Omega + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega + (\sigma\, v, v)_\Omega$$

para tratar el término $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega$ observemos que usando integración por partes para $v\,\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{H}(\mathsf{div},\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (v\,\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{n}, v\rangle_\Gamma \\
&= (\nabla\cdot(v\,\boldsymbol{\alpha}), v)_\Omega + (v\,\boldsymbol{\alpha}, \nabla v)_\Omega \\
&= ((\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha})\, v\,, v)_\Omega + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega + (v\,\boldsymbol{\alpha}, \nabla v)_\Omega \\
&= 2\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega\,,
\end{aligned}$$

finalmente, basta analizar

$$a(v,v) = (\epsilon\nabla v, \nabla v)_\Omega + (\sigma\, v, v)_\Omega \geq \epsilon\, |v|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{\epsilon}{C_P^2}\, \|v\|_{1,\Omega}^2\,,$$

donde $C_P > 0$ es la constante de Poincaré-Friedrichs.

2) Al usar $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ en la formulación, obtenemos

$$a(u,v) = (\epsilon \nabla u, \nabla v)_\Omega + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u, v)_\Omega + ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma)\, u, v)_\Omega \,,$$

luego, debemos estudiar

$$a(v,v) = (\epsilon \nabla v, \nabla v)_\Omega + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_\Omega + ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma)\, v, v)_\Omega \,,$$

ahora notemos que

$$\begin{aligned}
0 &< \langle (v\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_\Gamma \\
&= (\nabla \cdot (v\,\boldsymbol{\alpha}), v)_\Omega + (v\,\boldsymbol{\alpha}, \nabla v)_\Omega \\
&= ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha})\, v\,, v)_\Omega + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_\Omega + (v\,\boldsymbol{\alpha}, \nabla v)_\Omega \\
&= 2\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_\Omega + ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha})\, v\,, v)_\Omega \,,
\end{aligned}$$

luego,

$$a(v,v) > (\epsilon \nabla v, \nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right) v, v \right)_\Omega \,,$$

de la expresión anterior, concluimos no tenemos herramientas para tratar el caso $\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma < 0$, sin embargo al asumir que $\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \geq 0$ podemos obtener la coercividad

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\geq (\epsilon \nabla v, \nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right) v, v \right)_\Omega \\
&\geq \epsilon\, |v|^2_{1,\Omega} \geq \frac{\epsilon}{C_P^2}\, \|v\|^2_{1,\Omega} \,,
\end{aligned}$$

donde $C_P > 0$ es la constante de Poincaré para el espacio $H_D(\Omega)$ con $|\Gamma_D| > 0$. Otra forma de lograr coercividad para formulación es observar lo siguiente

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\geq (\epsilon \nabla v, \nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right) v, v \right)_\Omega \\
&\geq \epsilon\, |v|^2_{1,\Omega} + \left(\left(\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right) v, v \right)_\Omega \\
&\geq \frac{\epsilon}{C_P^2}\, \|v\|^2_{1,\Omega} + \left(\left(\frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right) v, v \right)_\Omega \\
&\geq \frac{\epsilon}{C_P^2}\, \|v\|^2_{1,\Omega} - \left\| \frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right\|_{\infty,\Omega} \|v\|^2_{0,\Omega} \\
&\geq \left(\frac{\epsilon}{C_P^2} - \left\| \frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right\|_{\infty,\Omega} \right) \|v\|^2_{1,\Omega} \,,
\end{aligned}$$

ahora bastaría de asumir la existencia de una constate $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\frac{\epsilon}{C_P^2} - \left\| \frac{1}{2}\, \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \right\|_{\infty,\Omega} \geq \tilde{C} \,,$$

(note que esto implica una relación entre los datos) luego, $a(v,v) \geq \tilde{C}\,\|v\|_{1,\Omega}^2$. Un caso particular interesante de la condición anterior es dada por

$$\left\|\frac{1}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}+\sigma\right\|_{\infty,\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2\,C_P^2}\,,$$

esto implica, $a(v,v) \geq \frac{\epsilon}{2\,C_P^2}\,\|v\|_{1,\Omega}^2$ para todo $v \in V$.

3) Al usar $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}$ en la formulación, obtenemos

$$a(u,v) = (\epsilon\nabla u,\nabla v)_\Omega + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla u, v)_\Omega - \frac{1}{2}(u,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}+\sigma\right)\,u, v\right)_\Omega\,,$$

luego, usando la condición dada

$$\begin{aligned} a(v,v) &= (\epsilon\nabla v,\nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}+\sigma\right)\,v, v\right)_\Omega \\ &\geq \epsilon\,|v|_{1,\Omega}^2 + \sigma_0\,\|v\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \min\{\epsilon,\sigma_0\}\,(|v|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2) = \min\{\epsilon,\sigma_0\}\,\|v\|_{1,\Omega}^2\,, \end{aligned}$$

luego la forma bilineal es coerciva.

4) Aplicando la condición $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$ a la formulación variacional obtenemos

$$a(u,v) = (\epsilon\nabla u,\nabla v)_\Omega - (u,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v)_\Omega + (\sigma\,u, v)_\Omega\,,$$

así analizaremos,

$$a(v,v) = (\epsilon\nabla v,\nabla v)_\Omega - (v,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v)_\Omega + (\sigma\,v, v)_\Omega\,,$$

similar a lo realizado en el item 2) observamos

$$\begin{aligned} 0 &< -\,\langle(v\,\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{n}, v\rangle_\Gamma \\ &= -\,(\nabla\cdot(v\,\boldsymbol{\alpha}), v)_\Omega - (v\,\boldsymbol{\alpha},\nabla v)_\Omega \\ &= -\,((\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha})\,v\,, v)_\Omega - \,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega + (v\,\boldsymbol{\alpha},\nabla v)_\Omega \\ &= -\,2\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v, v)_\Omega - ((\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha})\,v\,, v)_\Omega\,, \end{aligned}$$

y luego obtenemos

$$a(v,v) \geq (\epsilon\nabla v,\nabla v)_\Omega + \left(\left(\frac{1}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}+\sigma\right)\,v, v\right)_\Omega\,,$$

luego la condición propuesta sobre σ es insuficiente para asegurar coercividad de la formulación, sin embargo si asumimos que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} + \sigma_0 \geq \tilde{C}$$

se obtiene la coercividad $a(v,v) \geq \min\{\epsilon\,,\tilde{C}\}\,\|v\|_{1,\Omega}^2$, esto incluye el caso $\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$ para el cual $\tilde{C} = \sigma_0$.

d) Dada la continuidad de la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ y asumiendo la coercividad $a(v,v) \geq \gamma \|v\|_{1,\Omega}^2$ para todo $v \in V$ y $\gamma > 0$ (por ejemplo en los casos estudiados anteriormente), podemos aplicar el lema de Lax-Milgram para garantizar existencia y unicidad de la formulación variacional: *Encontrar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u,v) = F(v)\,,\forall v \in V\,.$$

Este resultado además entrega la siguiente estabilidad

$$\begin{aligned}
\|u\|_V &\leq \frac{1}{\gamma}\|F\|_{V'} \\
&= \frac{1}{\gamma}\sup_{v\in V}\frac{|(f,v)_\Omega - \langle g,v\rangle_{\Gamma_N}|}{\|v\|_V} \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\sup_{v\in V}\frac{\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\|v\|_{\frac{1}{2},\Gamma}}{\|v\|_V} \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\sup_{v\in V}\frac{\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + C_T\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\|v\|_{1,\Omega}}{\|v\|_V} \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\left(\|f\|_{0,\Omega} + C_T\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\right),
\end{aligned}$$

conde $C_T > 0$ es la constante de la desigualdad de trazas. La continuidad sobre $V_h \times V_h$ es inmediata de la continuidad sobre $V \times V$ mostrada en el item 1 debido a la hipótesis $V_h \leq V$, de la misma manera se garantiza la coercividad $a(v_h,v_h) \geq \gamma\|v_h\|_V^2$ para todo $v_h \in V_h$, y por lo tanto el problema: *Encontrar* $u_h \in V_h$ *tal que*

$$a(u_h,v_h) = F(v_h)\,,\forall v_h \in V_h\,.$$

tiene una única solución y se satisface la estabilidad

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\|F\|_{V_h'} \leq \frac{1}{\gamma}\left(\|f\|_{0,\Omega} + C_T\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\right).$$

e) De la formulación variacional continua podemos obtener inmediatamente la relación $a(u,v_h) = (f,v_h)$ para todo $v_h \in V_h$, si a la expresión anterior se sustrae la formulación variacional discreta obtener la ortoganalidad

$$a(u-u_h,v_h) = 0\,,\forall\, v_h \in V_h\,,$$

usando coercividad, ortogonalidad y continuidad de la forma bilineal obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\gamma\|u-u_h\|_V^2 &\leq a(u-u_h,u-u_h) \\
&= a(u-u_h,u) \\
&= a(u-u_h,u-v_h) \\
&\leq C\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V\,,
\end{aligned}$$

donde $v_h \in V_h$ es arbitrario, de esto obtenemos $\|u-u_h\|_V \leq \frac{C}{\gamma}\|u-v_h\|_V$ para todo $v_h \in V_h$, por lo tanto

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{C}{\gamma} \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_V$$

en virtud de que en cada caso estudiado tenemos que $V \leq H^1(\Omega)$, podemos enunciar la estimación

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\gamma} \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{1,\Omega}\,.$$

2. Definiremos la malla unidimensional $\mathcal{T}_h := \{I_j\}_{j=1}^N$, sea $I_k \in \mathcal{T}_h$ definido por $I_k = [a_k\,, b_k]$, sobre este intervalo definiremos los nodos de Lagrange $x_0^{(k)} = a_k$, $x_1^{(k)} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, y $x_2^{(k)} = b_k$ y la base nodal $\{\phi_0^k, \phi_1^k, \phi_2^k\}$ para $\mathbb{P}^2(I_k)$ con elementos definidos por $\phi_j : I_k \to \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, 2$ a través de

$$\phi_0^k(x) = \frac{\left(x-x_1^{(k)}\right)\left(x-x_2^{(k)}\right)}{\left(x_0-x_1^{(k)}\right)\left(x_0-x_2^{(k)}\right)}\,,$$

$$\phi_1^k(x) = \frac{\left(x-x_0^{(k)}\right)\left(x-x_2^{(k)}\right)}{\left(x_1-x_0^{(k)}\right)\left(x_1-x_2^{(k)}\right)}\,,$$

$$\phi_2^k(x) = \frac{\left(x-x_0^{(k)}\right)\left(x-x_1^{(k)}\right)}{\left(x_2-x_0^{(k)}\right)\left(x_2-x_1^{(k)}\right)}\,,$$

para todo $x \in I_k$. Si ahora definimos globalmente los nodos $x_0, \ldots, x_{2\,N}$ a través de $x_0 = x_0^{(1)}$ y $x_{2\,k+j-1} = x_j^{(k)}$ para $k = 1, \ldots, N$, y $j = 0, 1$, y a las funciones de base $\phi_{2\,k+j-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ a través de

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \phi_0^{(1)}(x)\,, & x \in I_1 \\ 0\,, & x \notin I_1 \end{cases}\,, \qquad \phi_{2k-1}(x) = \begin{cases} \phi_1^{(k)}(x)\,, & x \in I_k \\ 0\,, & x \notin I_1 \end{cases}\,,$$

$$\phi_{2\,k}(x) = \begin{cases} \phi_2^{(k)}(x)\,, & x \in I_k \\ \phi_0^{(k+1)}(x)\,, & x \in I_{k+1} \\ 0\,, & x \notin I_k \cup I_{k+1} \end{cases}\,, \qquad \phi_{2\,N}(x) = \begin{cases} \phi_2^{(N)}(x)\,, & x \in I_N \\ 0\,, & x \notin I_N \end{cases}\,.$$

Ahora podemos definir el interpolante de orden 2, $\mathcal{I}_h^2 : H^1(\Omega) \to V_h^2$, como

$$\mathcal{I}_h^2\, v = \sum_{i=0}^{2\,N} v(x_i)\,\phi_j\,.$$

Dado que $v \in H^3(\Omega)$ se tiene que $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y por lo tanto $w = (v - \mathcal{I}_h^2\, v)|_{I_k} \in \mathcal{C}^2(I_k)$, de la definición de $\mathcal{I}_h^2$ tenemos que

$$w\left(x_0^{(k)}\right) = w\left(x_1^{(k)}\right) = w\left(x_2^{(k)}\right) = 0\,,$$

gracias al *Teorema de Rolle* sabemos que existen $c_i \in]x_i^{(k)}\,, x_{i+1}^{(k)}[$ para $i = 0, 1$, tales que $w'(c_0) = w'(c_1) = 0$, (note que $c_1 > c_0$ por definición) usando el mismo resultado una vez más obtenemos $c \in]c_0\,, c_1[$ tal que $w''(c) = 0$, del resultado (1) en el slide 7, capsula 6 del curso, tenemos

$$|w''(x)| = |w''(x) - w''(c)| \leq h_k^{\frac{1}{2}}\, |w''|_{1,I_k} = h_k^{\frac{1}{2}}\, |w|_{3,I_k}\,, \forall\, x \in I_k\,,$$

luego,

$$\|w''\|_{0,I_k} = \left(\int_{I_k} |w''(x)|^2\, \mathsf{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{I_k} h_k\, |w|_{3,I_k}^2\, \mathsf{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq h_k\, |w|_{3,I_k}\,,$$

de esto se desprende inmediatamete $|v - \mathcal{I}_h^2\, v|_{2,I_k} \leq h_k\, |v|_{3,I_k}$, finalmente

$$|v - \mathcal{I}_h^2\, v|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{N} |v - \mathcal{I}_h^2\, v|_{2,I_k}^2 \leq \sum_{k=1}^{N} h_k^2\, |v|_{3,I_k}^2 \leq h^2 \sum_{k=1}^{N} |v|_{3,I_k}^2 = h^2\, |v|_{3,\Omega}^2$$

y se demuestra lo pedido.