Ayudantía 10.

Deuda: $\overset{\text{polinomio}}{P_{n,c}}(\mathbb{R}) = \{e^{cx}p(x) : p \in P_n(\mathbb{R})\}$. es un espacio cuyo vector nulo es $\theta(x) = \underbrace{e^{cx}}_{:=K>0} \cdot \underbrace{\theta_{P_n(\mathbb{R})}(x)}_{\text{Polinomio nulo}} = 0$.

Probamos que $B = \{e^{cx}, xe^{cx}, \dots, x^n e^{cx}\}_{n+1}$. es l.i. usando que, dados $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que.

$$\alpha_0 e^{cx} + \alpha_1 xe^{cx} + \dots + \alpha_n e^{cx} x_n = \theta$$
$$\Leftrightarrow e^{cx}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = \theta$$
$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = \theta_{P_n(\mathbb{R})}$$
$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Dado $v \in P_{n,c}(\mathbb{R})$, $v(x) = e^{cx}(k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n) = k_0 e^{cx} + k_1 xe^{cx} + \dots + k_n e$
$\Leftrightarrow v \in \langle B \rangle$.

---

b) Calcular $[\varphi - bI]_{BB}$

- Caso 1: $(i=0)$

$$(\varphi - bI)(e^{cx}) = ce^{cx} - be^{cx} = (c-b)e^{cx}.$$

- Dado $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$(\varphi - bI)(x^i e^{cx}) = cx^i e^{cx} + ix^{i-1}e^{cx} - bx^i e^{cx} = (c-b)\underbrace{e^{cx}x^i}_{\text{Pos } i+1} + \underbrace{ix^{i-1}e^{cx}}_{\text{pos } i}$$

$$[(\varphi - b I)(e^{cx} x^i)]_B = [0, \ldots, 0, \overbrace{i, c-b}^{i-1 \text{ } i\text{'s}}, 0, \ldots, 0]^T$$

$\hookrightarrow$ Pos i

$$[\varphi - b I]_{BB} = \begin{bmatrix} c-b & 1 & & 0 \\ & c-b & 2 & \\ 0 & & \ddots & n \\ & & & c-b \end{bmatrix}$$

c) $Sp(\varphi) = Sp([\varphi]_{BB})$ $\quad \sigma(\varphi) = \sigma([\varphi]_{BB})$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, el Polinomio Característico de $[\varphi]_{BB}$ es.

$$\begin{aligned}
P_{[\varphi]_{BB}}(\lambda) &= \det([\varphi]_{BB} - \lambda I_{n+1}) \\
&= \det([\varphi]_{BB} - \lambda I_{BB}) \\
&= \det([\varphi - \lambda I]_{BB}) \\
&= (c - \lambda)^{n+1}
\end{aligned}$$

$P(\lambda) = 0 \iff c = \lambda$

$\therefore \sigma([\varphi]_{BB}) = \{c\} = \sigma(\varphi)$

Problema 2: Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim(V) < +\infty$ y B una base de V. Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

a) Pruebe que ~~el~~ $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

b) Muestre que No necesariamente $[S \circ T]_{BB} \sim [T \circ S]_{BB}$.

---

a) $\boxed{\subseteq}$ Probemos que $\sigma(T \circ S) \subseteq \sigma(S \circ T)$.

Sea $\lambda \in \sigma(T \circ S) \iff \exists\, v \in V, v \neq \theta_v$ tal que $(T \circ S)v = \lambda v$.

Aplicando S, $S \circ T(S(v)) = \lambda S(v) \iff (S \circ T)(S(v)) = \lambda S(v)$

Si $\lambda \neq 0$: Si $S(v) = \theta_v$ → Esto generó la contradicción.

$\Rightarrow T(S(v)) = T(\theta_v) = \theta_v$

$\iff (T \circ S)(v) = \lambda v = \theta_v \rightarrow\leftarrow$, luego, $S(v) \neq \theta$.

Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(S \circ T)$.

Por otro lado, si $\lambda = 0$, $\underbrace{(T \circ S)(v) = \theta_v}_{T(S(v)) = \theta_v}$, $v \neq \theta$.

~~Queremos Mostrar~~ interesa ver que ocurre si T es inyectiva.

Si T es inyectiva, $S(v) = \theta$, (Pues $\ker(T) = \{\theta\}$)

Pero como $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\dim(V) < +\infty$, T es también sobreyectiva.

Como $S(v) = \theta$, $v = T(w)$, $w \in V \longrightarrow \lambda$

$S(T(w)) = \theta \Rightarrow (S \circ T)(w) = \theta = 0 \cdot w$

Además, como T inyectiva , $v \neq \theta$, $T(w) \neq \theta \Rightarrow w \neq \theta$.

En definitiva, Probamos que si T es inyectiva, $\lambda = 0$ es valor propio de $S \circ T$.

Finalmente si T No es inyectiva

$\exists\, w \in \ker(T)$, $w \neq \theta$ tal que $T(w) = \theta$

$\Rightarrow (S \circ T)(w) = \theta \Rightarrow S(\theta) = \theta = 0 \cdot w$

Como $w \neq \theta$, w es vector propio asociado a $\lambda = 0$.

$\Rightarrow$ Si $\lambda = 0 \wedge \lambda \in \sigma(T \circ S) \Rightarrow \lambda \in \sigma(S \circ T)$.

$\supseteq$] De forma análoga a lo anterior (se invierten los roles).

b) Indicación: Definir S y T en función de

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dem: Sea $S, T : \underset{\mathbb{R}^2}{V} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^2}{V}$ definidos por

$$S(x) = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

$$T(x) = Dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

* Por ejercicio 2 de la Ayudantía 9.:

Si B es la base Canónica de $\mathbb{R}^2$,

$$[T]_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D.$$

$$[S]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

$$[S \circ T]_{BB} = [S]_{BB} [T]_{BB} = CD.$$

$$[T \circ S]_{BB} = [T]_{BB} [S]_{BB} = DC.$$

Supongamos $DC \sim CD$.

$CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\exists P \in M_2(\mathbb{R})$ No singular (nula) Tal que:

$$DC = \underbrace{P \overset{\theta}{CD} P^{-1}}_{\theta} \quad \rightarrow\leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq$$

Problema 3: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ de sus vectores propios. Sea λ_i el valor propio asociado a v_i. Sea $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tal que.

$$L(B) = A \cdot B.$$

Sea $B_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que su columna j-ésima es el v_i y los demás son nulos.

a) Pruebe que $L(B_{ij}) = \lambda_i B_{ij}$.

b) Dem que L es diagonalizable.

---

a) Dem: Sea $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$.

$$L(B_{ij}) = A \cdot B_{ij} = A \cdot [0 | \cdots | 0 | v_i | 0 | \cdots | 0]$$

$$\Leftrightarrow A A_{ij} = [A \cdot B_{ij} | A \cdot B_{ij}^2 | \dots]$$

$$= [\cancel{A \Theta}^{\,\Theta} | \cdots | \cancel{A v_i}^{\,\lambda_i v_i} | \cdots | \cancel{A \Theta}^{\,\Theta}]$$

$$AB_{ij} = \lambda_i [\Theta | \cdots | v_i | \Theta | \cdots | \Theta] = \lambda_i B_{ij}$$

b) Sea $\mathcal{B} = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{nn}\} = \{B_{ij}\}_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$.

Afirmación: $\mathcal{B}$ es base de $M_n(\mathbb{R})$.

Sea $C \in M_n(\mathbb{R})$, $C = [c_1 | c_2 | \cdots | c_n]$.

Cada columna de C es un vector de $\mathbb{R}^n$, luego, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists \alpha_j^i \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

$$C_i = \alpha_1^i v_1 + \alpha_2^i v_2 + \dots + \alpha_n^i v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i v_j.$$

$$C = \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j^1 v_j \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j^n v_j \right]$$

$$\begin{aligned} = \ & \alpha_1^1 B_{11} + \alpha_2^1 B_{21} + \dots + \alpha_n^1 B_{n1} \\ & + \alpha_1^2 B_{12} + \alpha_2^2 B_{22} + \dots + \alpha_n^2 B_{n2} \\ & + \cdots \\ & + \alpha_1^n B_{1n} + \alpha_2^n B_{2n} + \dots + \alpha_n^n B_{nn}. \end{aligned}$$

$C \in \langle \mathcal{B} \rangle$

Sean $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que.

B_j columnas de B

$$\xi = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} B_{ij} = \Theta.$$

es $\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} B_{ij} = \Theta$, la columna de j es ui

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} z_i = \Theta \Rightarrow \gamma_{ij} = 0 \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

$$\Rightarrow \gamma_\mu = 0.$$