

Procesos Estocásticos : Proceso de Poisson

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

1 Proceso de Poisson no homogéneo

2 Ejemplos

- Ejemplo 1
- Ejemplo 2
- Ejemplo 3
- Ejemplo 4

Outline

1 Proceso de Poisson no homogéneo

2 Ejemplos

- Ejemplo 1
- Ejemplo 2
- Ejemplo 3
- Ejemplo 4

Proceso de Poisson no homogéneo

Ahora, el parámetro del proceso que representa la **intensidad** por unidades del tiempo con la cual ocurren los eventos, **no es constante** a lo largo del tiempo, es decir, tenemos un proceso no homogéneo.

► $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con tasa $\lambda(t)$, $t \geq 0$, determinista si

- 1 $N_0 = 0$,
- 2 N_t tiene incrementos independientes,
- 3 $N_{s+t} - N_s$ tiene distribución de Poisson con tasa $\int_s^{s+t} \lambda(u) du$.

Proceso de Poisson no homogéneo : Observaciones

- ❶ Los incrementos no son estacionarios.
- ❷ En el caso de proceso de Poisson no homogéneo, los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos $T_n, n \geq 1$ ya no son independientes ni tienen distribución exponencial.

❸ Sea

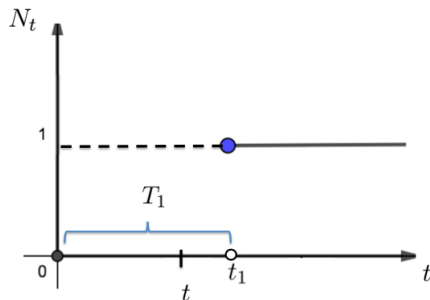
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

entonces $N_t \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$ y

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\Lambda(t)}.$$

Por tanto, $N_{s+t} - N_s \sim \text{Poisson}(\Lambda(s+t) - \Lambda(s)).$

Tiempo hasta la ocurrencia del primer evento



Donde T_1 es el intervalo de tiempo hasta el primer evento del proceso que ocurre en el instante τ_1 .

Tiempo hasta la ocurrencia del primer evento

Podemos obtener la densidad de la distribución de la v.a. T_1 :

$$\begin{aligned}f_{T_1}(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbb{P}(T_1 \leq t)) \\&= \frac{d}{dt}(1 - \mathbb{P}(T_1 > t)) \\&= -\frac{d}{dt}\mathbb{P}(T_1 > t) \\&= -\frac{d}{dt}e^{-\Lambda(t)}.\end{aligned}$$

Tiempo hasta la ocurrencia del primer evento

Obtuvimos :

$$\begin{aligned}f_{T_1}(t) &= \frac{d}{dt}\Lambda(t) \cdot e^{-\Lambda(t)} \\&= e^{-\Lambda(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(r) dr \\&= \lambda(t) e^{-\Lambda(t)}.\end{aligned}$$

Entonces, ¿es distribución exponencial ? ¡NO !

Outline

1 Proceso de Poisson no homogéneo

2 Ejemplos

- Ejemplo 1
- Ejemplo 2
- Ejemplo 3
- Ejemplo 4

Ejemplo 2

Ejemplo 2

Considere un proceso de Poisson no homogéneo tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 10 + 4t, & 0 \leq t \leq 5 \\ 50 - 4t, & 5 < t \leq 10, \\ 10, & t > 10. \end{cases} \quad (1)$$

- 1) Calcule el número esperado de eventos registrado en los instantes $t = 4$ y $t = 7$.
- 2) ¿Cuál es la probabilidad de que no se registren eventos entre los instantes $t = 9$ y $t = 11$?
- 3) Calcule el número esperado de eventos registrado al instante $t = 15$.

Ejemplo 2

Solución

Sea N_t : Número de evento $\sim \text{Pois}(\Lambda(t))$.

Entonces,

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(r) dr$$

y

$$N_t - N_s \sim (\text{Pois}(\Lambda(t) - \Lambda(s))).$$

Ejemplo 2

Pregunta 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_7 - N_4] &= \Lambda(7) - \Lambda(4) = \int_4^7 \lambda(r) dr \\&= \int_4^5 (10 + 4t) dt + \int_5^7 (50 - 4t) dt \\&= 10 \int_4^5 dt + 50 \int_5^7 dt + 4 \int_4^5 t dt - 4 \int_5^7 t dt \\&= 10 + 50 \cdot 2 + \frac{4t^2}{2} \Big|_4^5 - \frac{4t^2}{2} \Big|_5^7 \\&= 110 - 30 = 80.\end{aligned}$$

Obtuvimos que

$$\mathbb{E}[N_7 - N_4] = 80.$$

Ejemplo 2

Pregunta 2

$$P(N_{11} - N_9 = 0) = e^{-(\Lambda(11) - \Lambda(9))} = e^{-\int_9^{11} \lambda(r) dr}.$$

Dado que

$$\int_9^{11} \lambda(r) dr = \int_9^{10} (50 - 4r) dr + \int_{10}^{11} 10 dr = 22.$$

Obtuvimos que

$$P(N_{11} - N_9 = 0) = e^{-22}.$$

Ejemplo 2

Pregunta 3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{15}] &= \Lambda(15) = \int_0^{15} \lambda(r) dr \\ &= \int_0^5 (10 + 4t) dt + \int_5^{10} (50 - 4t) dt + \int_{10}^{15} 10 dt = 250.\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Un coche de venta de completos abre a las 08 :00 hrs. De las 8 :00 a las 11 :00 hrs llegan en promedio, de manera creciente y constante comenzando con una tasa de 5 clientes a las 8 :00 hrs. y alcanzando un máximo de 20 clientes a las 11 :00 hrs.

De las 11 :00 horas a las 13 :00 horas, en promedio, la tasa de clientes que llegan se mantiene constante en 20 clientes por hora. Luego, en promedio, la tasa de llegadas decae constantemente hasta las 17 :00 hrs, momento en el cual se registran 12 clientes por hora. Si se asume que el número de clientes que llegan al local en intervalos disjuntos son variables independientes, entonces.

- 1) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente llegue entre los 08 :30 hrs y las 09 :30 hrs. ?
- 2) ¿Cuál es el número esperado de llegadas en este periodo ?

Ejemplo 3

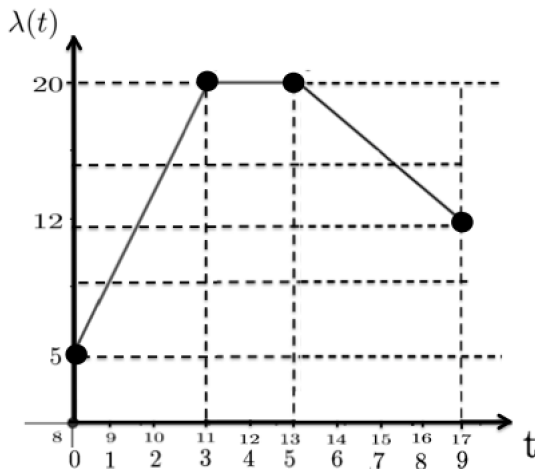
► Se puede modelar dicho proceso por un proceso de Poisson no-homogéneo.

► De primero, tenemos que determinar la función de la tasa $\lambda(t)$, $t \geq 0$,

$$\lambda(t) = a + bt,$$

para lo que tenemos que determinar las constantes a y b .

Ejemplo 3



Ejemplo 3

► Primer intervalo

$$t = 0 \quad = \quad \lambda(0) = a = 5,$$

$$t = 3 \quad = \quad \lambda(3) = a + 3b = 5 + 3b = 20 \Rightarrow b = 5.$$

Entonces, $\lambda(t) = 5 + 5t$, $t \in [0, 3]$.

► Luego, cuando $t \in [3, 5]$, $\lambda(t) = 20$.

► Tercer intervalo : $t \in [5, 9]$.

$$\lambda(5) \quad = \quad 20 = a + 5b,$$

$$\lambda(9) \quad = \quad 12 = a + 9b.$$

Entonces, $\lambda(t) = 30 - 2t$, $t \in [5, 9]$.

Ejemplo 3

Obtuvimos que para un día la función de intensidad es :

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & t \in [0, 3], \\ 20, & t \in [3, 5], \\ 30 - 2t, & t \in [5, 9], \\ 0, & \text{otro.} \end{cases} \quad (2)$$

Sea $\{N_t, t \geq 0\}$ el número de clientes que llegan durante las primeras t horas mientras está atendiendo, un proceso con tasa $\lambda(t)$ dada por (2).

Ejemplo 3

Sea, como anteriormente, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$.

$$P\left(N_{\frac{3}{2}} - N_{\frac{1}{2}} = 0\right) = e^{-(\Lambda(\frac{3}{2}) - \Lambda(\frac{1}{2}))} = e^{-10},$$

puesto que

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\frac{3}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \lambda(r) dr \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (5 + 5t) dr = 10.\end{aligned}$$

Además,

$$\mathbb{E}\left[N_{\frac{3}{2}} - N_{\frac{1}{2}} = 0\right] = \Lambda\left(\frac{3}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 10.$$

Ejemplo 4

Ejemplo 4

A un banco llegan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson no-homogéneo cuya tasa promedio diaria es :

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; 8,5] \text{ horas,} \\ 2t, & t \in [8,5; 14,25] \text{ horas,} \\ 0, & t \in [14,25; 24] \text{ horas.} \end{cases}$$

El banco opera de las 09 :00 hasta 14 :00 hrs. Sin embargo, un día los clientes llegaron entre la 08 :45 hrs. y las 14 :12 hrs.

- 1) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cliente ha llegado entre las 10 :00 hrs y las 11 :00 hrs?
- 2) Calcule el número promedio de clientes que se retiraron indignadas pensando seriamente en cambiarse de banco este día (esto ocurre cuando el cliente encuentra que el banco ya cerro sus puertas, haciendo gala de mucha puntualidad y poca comprensión ? ¿A qué hora debiese cerrar sus puertas el banco para que este número disminuya a la mitad ?

Ejemplo 4

Solución

Sea $N_t - N_s, s \leq t$, el número de persona que han llegado de las "s" hasta "t" horas. Entonces,

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(r) dr$$

$$\Lambda(t) - \Lambda(s) = 2 \int_s^t t dt = (t^2 - s^2).$$

Puesto que 15 minutos = 1/4 hora,

$$\begin{aligned} & P(\text{el primer cliente llegó entre las 10 y 11 hrs.}) \\ &= P(N_{10} - N_{8,75} = 0 \text{ y } N_{11} - N_{10} \geq 1) \\ &= P(N_{10} - N_{8,75} = 0)(1 - P(N_{11} - N_{10})) \\ &= e^{-(\Lambda(10) - \Lambda(8,75))}(1 - e^{-(\Lambda(11) - \Lambda(10))}) \\ &= e^{-(10^2 - (8,75)^2)}(1 - e^{-(11^2 - 10^2)}). \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Luego, notemos que 12 min.=0,2 hora. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{14,2} - N_{14}] &= \Lambda(14, 2) - \Lambda(14) \\ &= (14, 2)^2 - 14^2 \\ &= 201,64 - 196 = 5,64.\end{aligned}$$

Esto es, "la mitad" sea $\simeq 3$ pers. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{14,2} - N_t] &= 3, \\ (14, 2)^2 - t^2 &= 3.\end{aligned}$$

Lo que implica $t = \sqrt{201,64 - 3} \simeq 15,09 \simeq 14,1$. Teniendo en cuenta que 6 min= 0,1 hora, podemos concluir que al cerrar las puertas a las 14 :06 horas se disminuye a la mitad la cantidad de clientes enojados.

Ejemplo 4

Gracias y hasta pronto!