Quiz 5 A_3

HIP. $\begin{cases} T: V \to V \quad \text{op. lineal} \\ v \in V, \quad T^K(v) = \theta \quad \wedge \quad T^{K-1}(v) \neq \theta \\ v \in Ker(T^K) \,/\, Ker(T^{K-1}) \end{cases}$

1 Demostrar que $B = \{ v, T(v), T^2(v), \dots, T^{K-1}(v) \}$ es l.i.

Sean $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{K-1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \alpha_2 T^2(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{K-1}(v) = \theta \qquad (\star)$$

Diremos que B es l.i ssi $\alpha_i = 0, \; i = 0, \dots, K-1$

Veamos,

$$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \alpha_2 T^2(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{K-1}(v) = \theta \qquad / \, T^{K-1}(\;)$$

$$\alpha_0 T^{K-1}(v) + \alpha_1 T^K(v) + \alpha_2 T^{K+1}(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{2(K-1)}(v) = T^{K-1}(\theta)$$

$$\alpha_0 T^{K-1}(v) + \alpha_1 T^K(v) + \alpha_2 T(T^K)(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{2K-2}(v) = \theta \qquad (i)$$

notamos que

$K \leq 2K-2$, para todo $K \geq 1$

Luego $T^K(v) = T(T^K)(v) = \dots = T^{2K-2}(v) = \theta$

obtenemos de (i),

$$\alpha_0 T^{K-1}(v) = \theta \implies \alpha_0 = 0$$

pues $T^{K-1}(v) \neq \theta$.

Volviendo a $(\star)$, aplicamos ahora, $T^{K-2}(\;)$

$$\implies \cancel{T^{K-2}(\alpha_0 v)}^{\theta} + T^{K-2}(\alpha_1 T(v)) + T^{K-2}(\alpha_2 T^2(v)) + \dots + T^{K-2}(\alpha_{K-1} T^{K-1}(v)) = T^{K-2}(\theta)$$

$$\iff \alpha_1 T^{K-1}(v) + \alpha_2 T^K(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{2K-3}(v) = \theta \qquad (ii)$$

Luego $T^K(v) = T^{K+1}(v) = T^{2K-3}(v) = \theta$, $\forall K \geq 2$.

obtenemos de (ii) que

$$\alpha_1 T^{K-1}(v) = \theta \implies \alpha_1 = 0$$

pues $T^{K-1}(v) \neq \theta$

Podemos repetir este procedimiento $K-2$ veces más hasta obtener

$$\alpha_{K-1} T^{K-1}(v) = \theta$$
$$\Rightarrow \alpha_{K-1} = 0$$

pues $T^{K-1}(v) \neq \theta$.

Luego, como

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{K-1} = 0$$

Tenemos que B es l.i. $\square$

2. Demuestre que el espacio $S = \langle \{ v, T(v), T^2(v), \dots, T^{K-1}(v) \} \rangle$ es T-invariante.

De (1) tenemos que $\langle B \rangle = S$ y dado que B es l.i., diremos que B es una base de S.
Luego para todo $s \in S$ tenemos que $T(s) \in S$ pues si $s \in S$ se puede escribir como c.l. de elementos en la base B de S, es decir existen $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, K-1$, tal que

$$s = \alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^{K-1}(v),$$

Entonces $T(s) = \alpha_0 T(v) + \alpha_1 T^2(v) + \dots + \alpha_{K-1} T^K(v)$

donde $T^K(v) = \theta$ (Hipótesis) y dado que S es un e.v., sabemos que $\theta \in S$.

$\square$

Así, S es T-invariante.

3. $T|_S : S \to S$, $T|_S(s) = T(s)$.
Demostrar que $T|_S(s)$ es nilpotente.

De la propiedad de T que dice que existe $v \in V$ tal que $T^K(v) = \theta$ pero $T^{K-1}(v) \neq \theta$, basta tomar $l \geq k$ para $T|_S$ y dado que S está definido para este tal v, tenemos que

$$T|_S^{\,l}(s) = \theta, \ \forall s \in S. \quad \square$$