Preliminares

- Números naturales.
- Números enteros.
- Números racionales.
- Incompletitud de los racionales.

Números naturales:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} .$$

- **Factorización:** Todo número natural se factoriza de manera única en producto de potencias de números primos.
- **Demostraciones por inducción:** Si una propiedad:
  - se cumple para $n = 1$ y
  - se demuestra que si se cumple para un $n \in \mathbb{N}$ particular, entonces también se cumple para $n + 1$,

  entonce se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Números enteros:

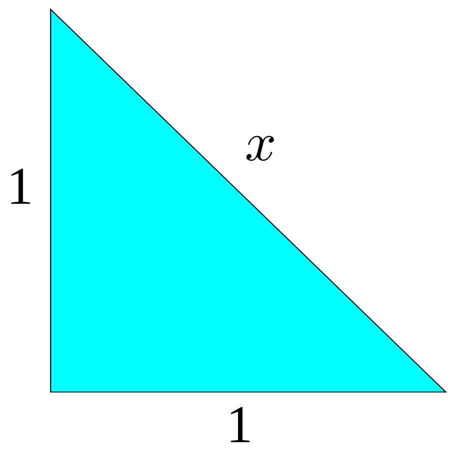
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} .$$

Números racionales:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

- m y n pueden escogerse **primos entre si** (es decir, sin divisores comunes).

Incompletitud de los racionales.



Teorema de Pitágoras: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

Pregunta: ¿ $\exists x \in \mathbb{Q} : \; x^2 = 2$?

Respuesta: Demostraremos que **¡No!**

Para ello, veamos antes algunas propiedades.

Def: Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,

- m es **par** si $\exists k \in \mathbb{Z} : \; m = 2k$;
- m es **impar** si $\exists k \in \mathbb{Z} : \; m = 2k - 1.$

Prop.: Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,

- m es par si y sólo si m^2 es par;
- m es impar si y sólo si m^2 es impar.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Teor.: $\nexists x \in \mathbb{Q} : \; x^2 = 2.$

Dem.: **Por el absurdo.** Supongamos que $\exists x \in \mathbb{Q} : \; x^2 = 2.$

$x \in \mathbb{Q} \implies x = \dfrac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ primos entre si. Entonces,

$$\frac{m^2}{n^2} = x^2 = 2 \implies m^2 = 2n^2 \implies m^2 \text{ par } \implies m \text{ par.}$$

$$\implies m = 2k, \; k \in \mathbb{Z} \implies 2n^2 = m^2 = 4k^2 \implies n^2 = 2k^2 \implies n \text{ par.}$$

$\implies m$ y n tienen el factor 2 en común $\implies$ no son primos entre si. $\triangleright\!\!=\!\!\triangleleft$ $\square$

Acabamos de demostrar que no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 2.

Refinaremos ese resultado del siguiente modo.

Sea $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : \; q > 0\}$ el conjunto de los racionales positivos. Sean

$$A := \left\{p \in \mathbb{Q}^+ : \; p^2 < 2\right\} \qquad \text{y} \qquad B := \left\{p \in \mathbb{Q}^+ : \; p^2 > 2\right\}.$$

Demostraremos que A no tiene máximo y B no tiene mínimo.

Prop.: Dados $A := \{p \in \mathbb{Q}^+ : \ p^2 < 2\}$ y $B := \{p \in \mathbb{Q}^+ : \ p^2 > 2\}$,

i) $\forall p \in A, \ \exists q \in A : \ q > p$;

ii) $\forall p \in B, \ \exists q \in B : \ q < p$.

Esquema de la demostración: Demostraremos (i); (ii) quedará como ejercicio.

Dado $p \in A$, buscaremos $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $(p+r)^2 < 2$. Entonces,

$$q := p + r \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{y} \quad q^2 < 2 \implies q > p \quad \text{y} \quad q \in A.$$

Vale decir que debemos buscar

$$r \in \mathbb{Q}^+ : \ (p+r)^2 = p^2 + 2pr + r^2 < 2.$$

Como r tiene que ser menor que 2, entonces

$$p^2 + 2pr + r^2 < p^2 + 2pr + 2r.$$

Por lo tanto, basta encontrar $r < 2$ tal que $p^2 + 2pr + 2r = 2$. Vale decir,

$$(2p+2)r = 2 - p^2 \iff r = \frac{2-p^2}{2p+2}.$$

Dem.: (i) Sea $r := \dfrac{2-p^2}{2p+2} \in \mathbb{Q}$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 2 - p^2 < 2 \\ 2p + 2 > 1 \end{array}\right\} \implies 0 < r < 2.$$

Sea $q := p + r$. Entonces $q \in \mathbb{Q}^+$ y $\boxed{q > p}$.

Además, como $r < 2$,

$$q^2 = (p+r)^2 = p^2 + 2pr + r^2 < p^2 + 2pr + 2r$$

y, por la definición de r,

$$p^2 + 2pr + 2r = 2.$$

Entonces,

$$q^2 < 2 \implies \boxed{q \in A}.$$

De manera que encontramos $\boxed{q \in A:\ q > p.}$ $\square$

(ii) $\boxed{\textbf{Ej.}}$