Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — lunes 8 de junio de 2015

Problema 1 (12 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 17 & 2 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Transformar $\boldsymbol{A}$ a forma tridiagonal y aplicar el método de bisección para demostrar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva. Se recuerda la fórmula

$$q_k = \alpha_k - \mu - \frac{(\beta_{k-1})^2}{q_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad q_0 := 1, \quad \beta_0 := 0, \tag{1}$$

relacionada a los elementos α_k y β_k de una matriz hermitiana tridiagonal $\boldsymbol{T}$. Partiendo de la enumeración $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ de los valores propios de $\boldsymbol{T}$, el índice j del valor propio deseado y de un intervalo $[a_0, b_0]$ que incluye el valor propio λ_j, la iteración del método de bisección procede como sigue para $s \in \mathbb{N}_0$:

$$\mu_s := \frac{a_s + b_s}{2}, \tag{2}$$

$$m := \#\{q_k \mid q_k < 0, \text{calculados de (1) con } \mu = \mu_s\}, \tag{3}$$

$$a_{s+1} := \begin{cases} a_s & \text{si } m \geq j, \\ \mu_s & \text{sino,} \end{cases} \qquad b_{s+1} := \begin{cases} \mu_s & \text{si } m \geq j, \\ b_s & \text{sino.} \end{cases} \tag{4}$$

b) Usando nuevamente el método de bisección, determinar $r_\sigma(\boldsymbol{A})$ hasta un error de valor absoluto ≤ 0.1.

Solución sugerida.

a) El método de bisección no puede ser aplicado directamente a $\boldsymbol{A}$ porque $\boldsymbol{A}$ no es tridiagonal. Para aplicar este método determinamos

$$\boldsymbol{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{U}}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

tal que $\hat{\boldsymbol{U}}_1 = \boldsymbol{I} - \beta_1 \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; con

$$\sigma_1 = -\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = -5$$

se tiene aquí

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -3+\sigma_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{1}{5\cdot(5+3)} = \frac{1}{40}; \quad \hat{\boldsymbol{U}}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz tridiagonal deseada

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 17 & 2 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 17 & 2 \\ 0 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

4 puntos

De acuerdo al Teorema de Gershgorin, los valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ de $\boldsymbol{T}$ (idénticos a los de $\boldsymbol{A}$) satisfacen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 24].$$

Para demostrar que $\boldsymbol{A}$, o equivalentemente $\boldsymbol{T}$, es definida positiva, basta entonces demostrar que 0 no es un valor propio. Esto es evidente si uno toma en cuenta que $\boldsymbol{T}$ es irreduciblemente diagonal dominante. Mediante el método de bisección podemos tratar de demostrar que $\lambda_1 > 0$, empezando (por ejemplo) con $[a_0, b_0] = [0, 1]$ (y, obviamente, $j = 1$). Así obtenemos $\mu = 1/2$ y

$$q_1 = 4.5, \quad q_2 = 16.5 - \frac{25}{4.5} = 10.9\bar{4}, \quad q_3 = 19.5 - \frac{4}{10.9\bar{4}} \approx 19.1345$$

Concluimos que $m = 0$, por lo tanto $\lambda_1 \geq 0.5 > 0$. **4 puntos**

b) Para la presente matriz, y de acuerdo al resultado de (a), sabemos que $\lambda_3 = r_\sigma(\boldsymbol{A})$. Para estimar este valor, aplicamos el método de bisección, empezando con el intervalo $[a_0, b_0] = [14, 24]$ (considerando que los valores propios son positivos y que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} = 42$, por lo tanto $\lambda_3 \geq 14$). Aquí obtenemos el siguiente resultado:

s	μ_s	q_1	q_2	q_3	m	Conclusión
0	19.00000	-14.0000	-0.2143	19.6667	1	$\lambda_3 \in [19, 24]$
1	21.50000	-16.5000	-2.9848	-0.1599	3	$\lambda_3 \in [19, 21.5]$
2	20.25000	-15.2500	-1.6107	2.2335	2	$\lambda_3 \in [20.25, 21.5]$
3	20.87500	-15.8750	-2.3002	0.8640	2	$\lambda_3 \in [20.875, 21.5]$
4	21.18750	-16.1875	-2.6431	0.3259	3	$\lambda_3 \in [21.1875, 21.5]$
5	21.34375	-16.3438	-2.8141	0.0777	2	$\lambda_3 \in [21.34375, 21.5]$

De acuerdo a la última conclusión, sabemos que $|\lambda_3 - 21.4| \leq 0.1$, por lo tanto el valor aproximado de $r_\sigma(\boldsymbol{A})$ (con la precisión indicada) es $r_\sigma(\boldsymbol{A}) = 21.4$. (El valor exacto es 21.3941.)

4 puntos

Problema 2 (18 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene tres valores propios reales distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, y determinar números α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$, tales que $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$.

b) Sean $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, los vectores propios de $\boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. Para la aproximación de los vectores propios se desea utilizar el método de Wielandt (iteración inversa) sin normalizar, dado por

$$(\boldsymbol{A} - \mu \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Demostrar que los "shifts" $\mu = \mu_1 = -2$, $\mu = \mu_2 = 7$ y $\mu = \mu_3 = 13$ son apropiados para aplicar el método (5) para la aproximación de $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$, respectivamente.

c) Se considera $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ como aproximación de $\boldsymbol{u}_2$. Calcular una segunda aproximación $\boldsymbol{x}_1$ por el método (5), utilizando $\mu = \mu_2$, y a partir de $\boldsymbol{x}_1$ una aproximación mejorada de λ_2.

Solución sugerida.

a) De acuerdo al Teorema de Gershgorin, aplicado "por filas", llegamos a la conclusión

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2| \leq 2\}; \\ &\lambda_2, \lambda_3 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 7| \leq 4\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 13| \leq 3\}, \end{aligned} \tag{6}$$

mientras que su aplicación "por columnas" entrega que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2| \leq 5\}; \\ &\lambda_2 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 7| \leq 2\}, \\ &\lambda_3 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 13| \leq 2\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Como la matriz $\boldsymbol{A}$ posee entradas reales solamente, la única posibilidad de existir un valor propio $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ corresponde a un par del tipo $\lambda_k = a + b\mathrm{i}$, $\lambda_{k+1} = \bar{\lambda}_k = a - b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Esta situación está excluida aquí porque (7) indica que no puede haber dos valores propios con la misma parte real. Combinando (6) y (7) obtenemos las inclusiones

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -4 \leq \lambda_1 \leq 0 = \beta_1, \\ \alpha_2 = 5 \leq \lambda_2 \leq 9 = \beta_2, \\ \alpha_3 = 11 \leq \lambda_3 \leq 15 = \beta_3. \end{aligned} \tag{8}$$

6 puntos

b) Para los valores de los "shifts" indicados y considerando (8) se tiene que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$|\lambda_i - \mu_i| < |\lambda_j - \mu_i| \quad \text{para } j = 1, 2, 3,\ j \neq i,$$

lo que indica que los shifts son apropiados. **3 puntos**

c) El vector $\boldsymbol{x}_1$ es solución del sistema

$$(\boldsymbol{A} - \mu_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0,$$

con la solución

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2.1538 \\ 0.1923 \\ -0.4231 \end{pmatrix},$$

6 puntos

la cual define la aproximación mejorada de λ_2 dada por

$$R(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1} = 7.4436.$$

(El valor exacto es $\lambda_2 = 7.4610$.) **3 puntos**

Problema 3 (16 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ posee tres valores propio $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, en particular $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, y que $\boldsymbol{x}_0 := (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ es un vector apropiado para iniciar la iteración directa (método de von Mises). Aviso:

$$\det(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 4.$$

b) Determinar $\boldsymbol{x}_2$ (usando el algoritmo básico, sin normalizar), y calcular usando $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_1$ un valor aproximado del valor propio. Para esta aproximación estimar el error rigurosamente.

Solución sugerida.

a) Dado que $\boldsymbol{A}$ es simétrica, sus valores propios son reales, y los círculos de Gershgorin son

$$\mathcal{K}_1 = [-15, -9], \quad \mathcal{K}_2 = [2, 6], \quad \mathcal{K}_3 = [9, 15].$$

Dado que $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \varnothing$ para $i \neq j$, cada uno de los círculos contiene exactamente un valor propio, es decir $\lambda_i \in \mathcal{K}_i$ para $i = 1, 2, 3$. En el presente caso, aun no podemos decidir si el valor propio de valor absoluto máximo pertenece a $\mathcal{K}_1$ o a $\mathcal{K}_3$. Para obtener más información, notamos que el polinomio carácteristico está dado por

$$p(\lambda; \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

(donde no nos interesan los valores de α, β y γ). Debido al signo del coeficiente de λ^3 y sabiendo ya que hay tres valores propios distintos reales, concluimos que

$$p(\lambda) \begin{cases} > 0 & \text{para } \lambda < \lambda_1, \\ = 0 & \text{para } \lambda = \lambda_1, \\ < 0 & \text{para } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \\ = 0 & \text{para } \lambda = \lambda_2, \\ > 0 & \text{para } \lambda_2 < \lambda < \lambda_3, \\ = 0 & \text{para } \lambda = \lambda_3, \\ < 0 & \text{para } \lambda > \lambda_3. \end{cases}$$

Ahora, considerando que de acuerdo al aviso $p(4; \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) > 0$, concluimos que $\lambda_2 < 4$. Por otro lado, la traza de $\boldsymbol{A}$ es la suma de sus valores propios. En nuestro caso, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$, es decir

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 4 - \lambda_2 > 0,$$

es decir $\lambda_1 > -\lambda_3$. Dado que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_3 > 0$, esta desigualdad implica que

$$|\lambda_1| = -\lambda_1 < \lambda_3 = |\lambda_3|.$$

Por lo tanto, λ_3 es el valor propio de mayor valor absoluto. **4 puntos**

Como $\boldsymbol{A}$ es simétrica, $\boldsymbol{A}$ posee un sistema de vectores propios ortonormales. Sean $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ los vectores propios correspondiente a los valores propios respectivos λ_1, λ_2, λ_3. Sea $\boldsymbol{x}_0 = \xi_1\boldsymbol{u}_1 + \xi_2\boldsymbol{u}_2 + \xi_3\boldsymbol{u}_3$. De acuerdo al Teorema 5.13 hay que demostrar que $\xi_3 \neq 0$. Ahora, si fuera $\xi_3 = 0$, se tendria que

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{A}) = R(\xi_1\boldsymbol{u}_1 + \xi_2\boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{A}) &= \frac{(\xi_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\xi_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}})(\lambda_1\xi_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\xi_2\boldsymbol{u}_2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ &= \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\lambda_1 + \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_2] \subset [-15, 6]. \end{aligned}$$

Pero, efectivamente,

$$R(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{A}) = \alpha_{33} = 12 \notin [-15, 6],$$

es decir $\xi_3 \neq 0$; por lo tanto, $\boldsymbol{x}_0$ es apropiado. **4 puntos**

b) Iterando obtenemos

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 149 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

y el valor propio aproximado

$$\lambda_3 \approx \tilde{\lambda}_3 = R(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2}{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_1} = 12.0805.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Para estimar el error, utilixamos la parte (iii) del Teorema 5.4. Aquí esto significa que existe un valor propio λ_j de $\boldsymbol{A}$ tal que

$$\left| \frac{\lambda_j - \tilde{\lambda}_3}{\lambda_j} \right| \leq \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - 13.0336\boldsymbol{x}_1\|_2}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1\|_2} = \frac{\|\boldsymbol{x}_2 - 13.0336\boldsymbol{x}_1\|}{\|\boldsymbol{x}_2\|_2} = 0.1333$$

Evidentemente, $j = 3$, y puesto que $\lambda_3 \in [9, 15]$, llegamos a

$$|\lambda_3 - \tilde{\lambda}_3| \leq 15 \times 0.1333 = 1.9994.$$

Mejores cotas son posibles. (El valor exacto es $\lambda_3 = 12.2672$.) $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Problema 4 (14 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 100 & -10 & 1 \\ -100 & 20 & 0 \\ -100 & 20 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -10 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}.$$

a) Ejecutar un paso del método de Wielandt para determinar el valor propio más pequeño de

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 30000 & -5000 & 200 \\ -5000 & 900 & -30 \\ 200 & -30 & 2 \end{bmatrix}$$

usando $\mu = 0$. Elegir el vector inicial para la iteración de Wielandt como $(a, b, c)^{\mathrm{T}}$, $a, b, c = \pm 1$ de tal forma que $\|(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0\|_\infty$ sea lo más grande posible.

b) Determinar una cota inferior realista para $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2$.

Solución sugerida.

a) Usamos que

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.1 & 0 \\ 0.02 & 0.1 & -1 \end{bmatrix},$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

entonces $\boldsymbol{x}_0 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Aprovechando que $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$, podemos resolver el sistema $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0$ para obtener

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.0349 \\ 0.1240 \\ -2.1300 \end{pmatrix}.$$

3 puntos

Entonces tenemos que

$$R(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1} = \frac{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1} = 0.7630,$$

lo que representa un valor aproximado del valor propio menor de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. **2 puntos**

b) Sabemos que el valor propio mas pequeño de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ satisface $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \leq 0.7630$, entonces $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}) \geq 1.3107$. Dado que para cada matriz $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ tienen los mismos valores propios, sabemos ahora que

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}})} \geq \sqrt{1.3107} = 1.1448.$$

4 puntos