

**Listado de Ejercicios**  
OPTIMIZACION II (525352)

**Ejercicio 1.** Sea  $\{f_i\}$ ,  $i \in I$ , cualquier familia de funciones sci. Entonces

$$\sup_{i \in I} f_i$$

es también sci.

**Ejercicio 2.** Sea  $\{f_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , una familia finita de funciones sci. Entonces

$$\min_{1 \leq i \leq m} f_i$$

es sci. De ejemplos que muestre la falsedad del resultado si la familia de funciones no es finita.

**Ejercicio 3.** Let  $A$  be a nonempty set in  $\mathbb{R}^n$ , and consider the following assertions with  $x \in A$  and  $\text{aff } A = x + L$ , where  $L$  is a vector subspace:

- (a)  $x \in \text{ri } A$ ;
- (b)  $\forall v \in L \exists \varepsilon_0 > 0 : a + \varepsilon v \in A \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ;
- (c)  $\forall v \in L \exists \varepsilon > 0 : a + \varepsilon v \in A$ ;
- (d)  $L = \text{cone}(A - x)$  (so, it is a subspace).

Then, if  $\dim L = 1$  then  $(a) \iff (b)$ . Furthermore,

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \iff (d).$$

**Ejercicio 4.** Usando la proyección de un punto sobre un conjunto convexo y cerrado, se re-demostró en clase que  $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$  para cualquier subespacio vectorial  $L$  de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ .

- (a) Argumente el hecho que  $L$  es un subespacio vectorial, y describa  $L^\perp$ ;
- (b) Dado  $x = (1, 2, 3)$ , encontrar su proyección sobre  $L$  y sobre  $L^\perp$ .

**Ejercicio 5.** Let  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  be any nonempty set. Prove the set

$$\bigcap_{t \geq 0} tC, \quad \bigcup_{t \geq 0} tC$$

are the largest cone contained in  $C$ , and the smallest cone containing  $C$ , respectively.

**Ejercicio 6.** Let  $A$  be a real matrix. Prove the set  $\{Ax : x \geq 0\}$  is closed.

**Ejercicio 7.** Let  $C$  be a pointed convex cone (pointed means  $C \cap (-C) = \{0\}$ ; think  $C = \mathbb{R}_+^n$  and so  $C^* = \mathbb{R}_+^n$ ) with nonempty interior. Consider

$$B_0 \doteq \{x \in C : e^\top x = 1\},$$

with  $e \in \text{int } C^*$ . Take any  $\bar{x} \in \text{int } C$  satisfying  $e^\top \bar{x} = 1$ . Prove that

$$\text{aff } B_0 = X \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : e^\top x = 1\}.$$

Write  $X = \bar{x} + e^\perp$ ,  $Y \doteq \bar{x} + Y_0$  with  $Y_0$  being a subspace such that  $\text{aff } B_0 = Y$ . We claim that  $X \subseteq Y$ , or equivalently,  $e^\perp \subseteq Y_0$ . In fact, let  $x \in e^\perp$ , then for some  $t_0 > 0$ , one has  $\bar{x} + t_0 x \in C$ . Thus  $\bar{x} + t_0 x \in B_0 \subseteq \bar{x} + Y_0$ , which implies that  $x \in Y_0$ , proving the claim.

**Ejercicio 8.** Assume that  $0 \in A \cap B$ . Then  $(A + B)^* = A^* \cap B^*$ . Indeed, by assumption  $A \subseteq A + B$  and  $B \subseteq A + B$ . Thus  $(A + B)^* \subseteq A^* \cap B^*$ , and since  $A^* \cap B^* \subseteq (A + B)^*$  always holds, we obtain

$$(A + B)^* = A^* \cap B^*.$$

**Ejercicio 9.** Let  $A, B$  be no empty sets with  $B$  being a cone. Then

$$(A + B)^* = A^* \cap B^*.$$

Apply Ejercicio 8 and use the fact (prove it!) that

$$\text{cone } A + B \subseteq \overline{\text{cone}(A + B)}.$$