Funciones medibles a valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

- Funciones medibles.
- Operaciones algebraicas con funciones medibles.
- Supremos, ínfimos y límites de funciones medibles.

Funciones medibles.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X})$ es un espacio medible.

Def.: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una **función medible** (o $\mathscr{X}$**-medible**) si

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ f^{-1}((\alpha, +\infty]) := \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{X}.$$

- $M = M(X, \mathscr{X}) := \big\{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ medible}\big\}$ denota el conjunto de funciones medibles y
- $M^+ = M^+(X, \mathscr{X}) := \{f \in (X, \mathscr{X}) : f(x) \geq 0 \ \forall x \in X\}$ el conjunto de funciones medibles positivas.

Lema: Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Entonces,

$$A := f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathscr{X} \qquad \text{y} \qquad B := f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{X}.$$

Dem.: $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\} \in \mathscr{X}$

y $B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < -n\} \in \mathscr{X}$. ■

Lema: Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f es medible si y sólo si

- $A := f^{-1}(\{+\infty\})$ y $B := f^{-1}(\{-\infty\})$ son medibles y
- $f_1 : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin A \cup B, \\ 0, & \text{si } x \in A \cup B, \end{cases}$ es medible.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Ya vimos que A y B son medibles.

Veamos ahora que f_1 es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \geq 0$, entonces

$$\{x \in X : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \setminus f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathscr{X}.$$

- Si $\alpha < 0$, entonces

$$\{x \in X : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{X}.$$

Entonces, f_1 es medible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $A, B \in \mathscr{X}$ y f_1 es medible. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \geq 0$, entonces

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f_1(x) > \alpha\} \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathscr{X}.$$

- Si $\alpha < 0$, entonces

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f_1(x) > \alpha\} \setminus f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{X}.$$

Entonces, f es medible. $\blacksquare$

Operaciones algebraicas con funciones medibles.

A lo largo del curso, usaremos el convenio $\boxed{0 \cdot (\pm\infty) := 0.}$

Lema: Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y $c \in \mathbb{R}$.
Entonces, cf, $|f|$, f^2, f^+ y f^- son medibles.

Dem.: Son idénticas a las demostraciones para $f : X \to \mathbb{R}$. **Ej.** ■

Las demostraciones de que la suma y el producto de funciones medibles a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles, no son en cambio consecuncias inmediatas de las propiedades análogas para funciones a valores en $\mathbb{R}$.

De hecho, la suma de funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ ni siquiera está siempre bien definida. En efecto, dadas $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, su suma $f + g$ **no está bien definida** en

$$E_1 := \{x \in X : \ f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty\} \text{ ni en}$$

$$E_2 := \{x \in X : \ f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty\}.$$

Para definir $f+g$, consideramos $f_2, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin E, \\ 0, & \text{si } x \in E, \end{cases} \qquad g_2(x) := \begin{cases} g(x), & \text{si } x \notin E, \\ 0, & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

donde $E := E_1 \cup E_2$ con $E_1 := \{x \in X : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty\}$ y $E_2 := \{x \in X : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty\}$, como antes.

Def.: $(f+g)(x) := f_2(x) + g_2(x) = \begin{cases} f(x)+g(x), & \text{si } x \notin E, \\ 0, & \text{si } x \in E. \end{cases}$

Lema: Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces, $f+g$ es medible.

Dem.: Para demostrar que $f+g$ es medible, basta ver que f_2 y g_2 lo son, ya que la demostración de la clase pasada de que la suma de funciones reales medibles es medible, vale también para estas funciones. **Ej.**

Consideremos f_2 (la demostración para g_2 es idéntica). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$:

- si $\alpha \geq 0$, $\{x \in X : f_2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \setminus E \in \mathscr{X}$ y
- si $\alpha < 0$, $\{x \in X : f_2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup E \in \mathscr{X}$,

ya que $E := E_1 \cup E_2$ y $E_1, E_2 \in \mathscr{X}$. Entonces f_2 es medible. ■

Supremos, ínfimos y límites de funciones medibles.

Lema: Dadas $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, $n \in \mathbb{N}$, sean $f, F, f^*, F^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas $\forall x \in X$ por:

$$f(x) := \inf_n f_n(x), \qquad F(x) := \sup_n f_n(x),$$
$$f^*(x) := \liminf_n f_n(x), \quad F^*(x) := \limsup_n f_n(x).$$

Entonces, f, F, f^* y F^* son medibles.

Dem.: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\forall x \in X, \quad f(x) = \inf_n f_n(x) \geq \alpha \iff \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geq \alpha$
$\implies \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{X}$.
- $\forall x \in X, \quad F(x) = \sup_n f_n(x) > \alpha \iff \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) > \alpha$
$\implies \{x \in X : F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\} \in \mathscr{X}$.
- Entonces, f y F son medibles. Por lo tanto, f^* y F^* también lo son, pues
$f^*(x) = \sup_n \left[\inf_{m\geq n} f_m(x)\right]$ y $F^*(x) = \inf_n \left[\sup_{m\geq n} f_m(x)\right]$. ■

Corol.: $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, $n \in \mathbb{N}$, y $f_n \xrightarrow{n} f \implies f$ medible.

Dem.: Como $f_n \xrightarrow{n} f$, entonces $f(x) = \liminf_n f_n(x) \implies f$ medible. ■

Def.: Dadas $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $A > 0$, la **truncación de f en A** es la función

$$f_A : X \to \mathbb{R} \text{ definida por } f_A(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq A, \\ A, & \text{si } f(x) > A, \\ -A, & \text{si } f(x) < -A. \end{cases}$$

Lema: Si $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces, $\forall A > 0$, las truncaciones f_A son medibles .

Dem.: $\boxed{\text{Ej. 2.K}}$ ■

Corol.: Sean $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Entonces, (fg) es medible.

Dem.: Dados $n, m \in \mathbb{N}$, sean f_n y g_m las truncaciones de f y g en $A = n$ y $A = m$, respectivamente. Entonces, $f_n \overset{n}{\to} f$, $g_m \overset{m}{\to} g$ $\boxed{\text{Ej.}}$ y, por el lema anterior, f_n y g_m son medibles.

Como f_n y g_m toman valores en $\mathbb{R}$ (y no en $\overline{\mathbb{R}}$), por los resultados de la clase pasada, $f_n g_m$ son medibles $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Entonces:

- $\forall m \in \mathbb{N}$, $f(x)\, g_m(x) = \lim_n f_n(x)\, g_m(x)$, $x \in X \implies f g_m$ medibles.
- $(fg)(x) = f(x)\, g(x) = \lim_m f(x)\, g_m(x)$, $x \in X \implies (fg)$ medible. ■

Lema: Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y positiva, hay una sucesión de funciones medibles $\{\varphi_n\}$ con $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que:

a) el rango de cada φ_n es finito; $\boxed{\varphi_n(X) \text{ finito}}$

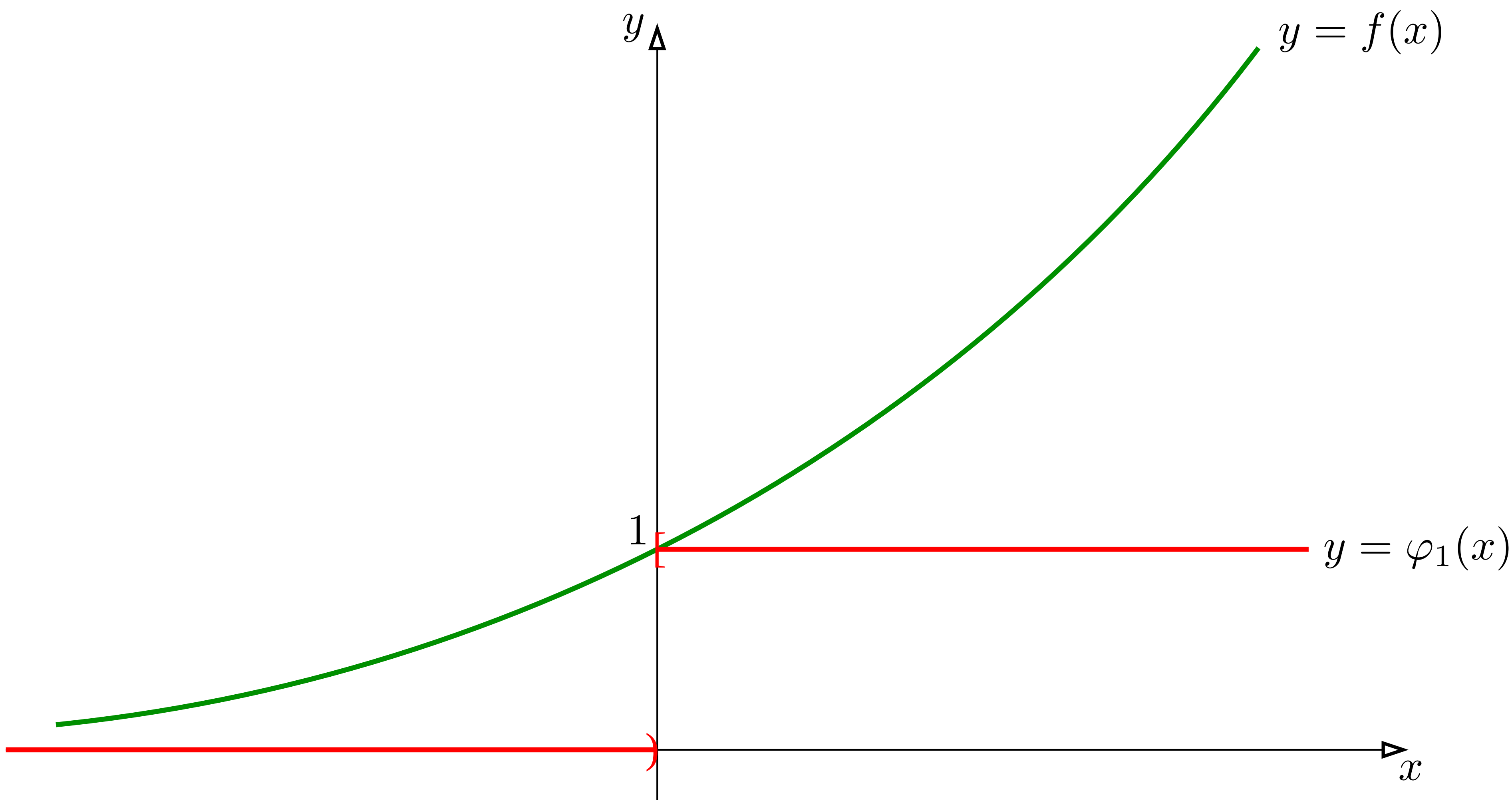
b) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

c) $\varphi_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \quad \forall x \in X.$

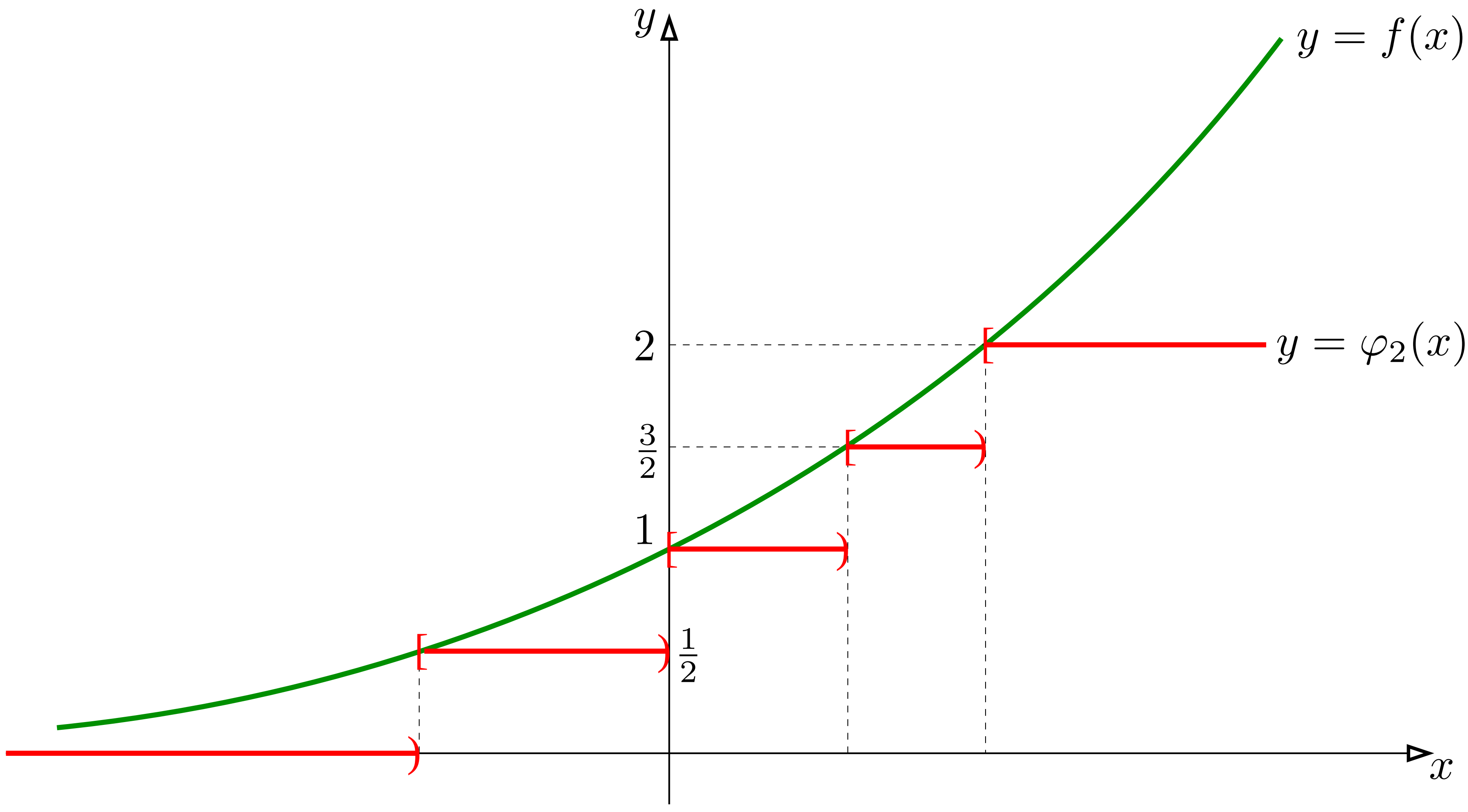
$\boxed{\varphi_n \nearrow f}$

Dem.: Ver Lema 2.11 del libro de Bartle. ■

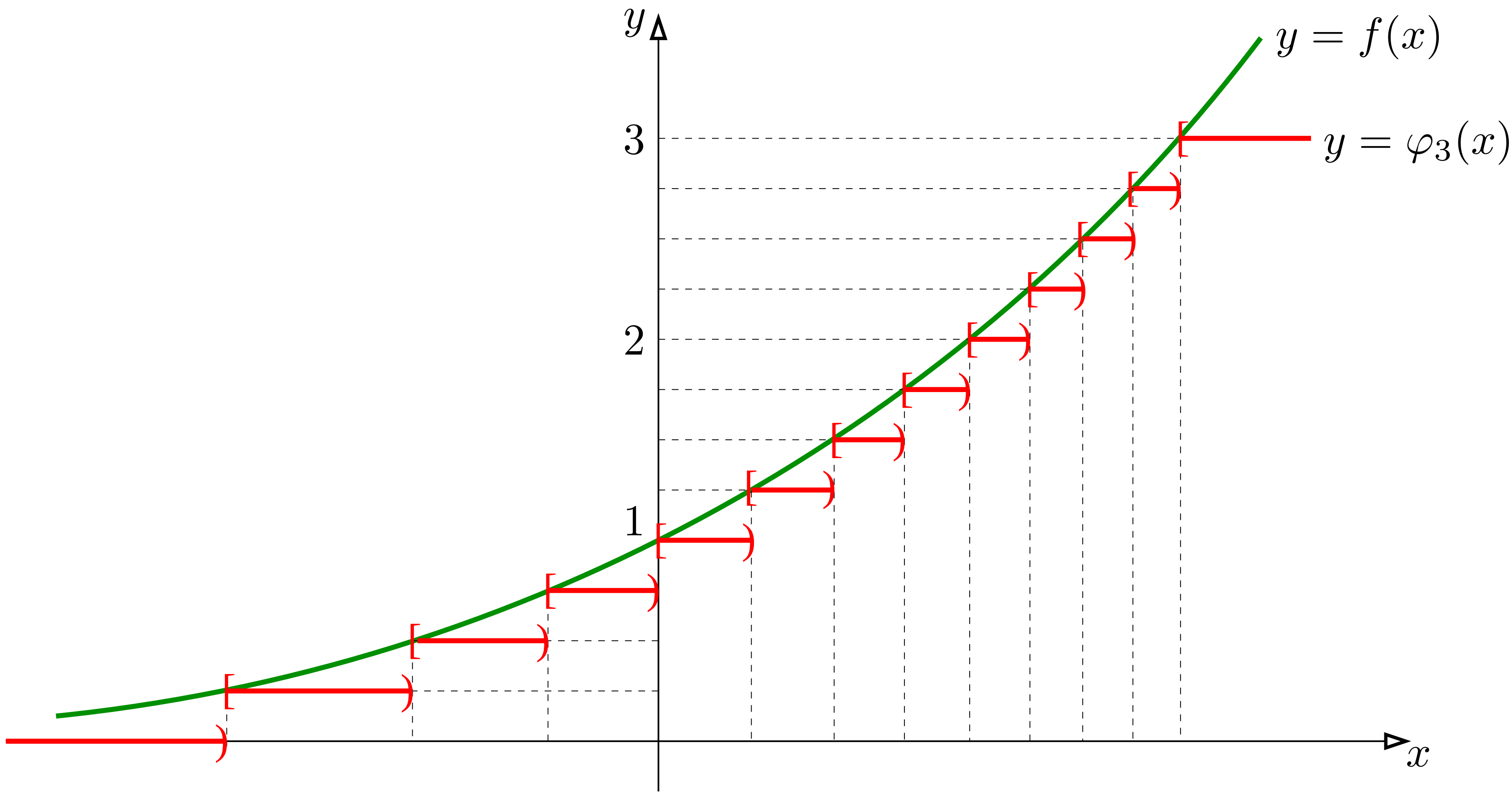
En lo que sigue, mostraremos gráficamente como construir una sucesión $\{\varphi_n\}$ que cumpla esas tres propiedades



y
$y = f(x)$
1
$y = \varphi_1(x)$
x



y
$y = f(x)$
2
$y = \varphi_2(x)$
$\frac{3}{2}$
1
$\frac{1}{2}$
x


y
$y = f(x)$
3
$y = \varphi_3(x)$
2
1
x