Probabilidades Límites

Def $\pi_j \stackrel{def}{=} \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ [se supone que el límite $\exists$ y es $\perp\!\!\!\perp$ del estado inicial]

De las ec. forward

$$P_{ij}'(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t)$$

mandando t al infinito and asuming que se puede intercambiar el límite y sumación:

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}'(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t)\right]$$

$$= \sum_{k\neq j} q_{kj} \lim_{t\to\infty} P_{ik}(t) - \nu_j \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$$

$$= \sum_{k\neq j} q_{kj}\pi_k - \nu_j \pi_j.$$

$\lim_{t\to\infty} P_{ij}'(t) = 0$ porque $P_{ij}(t) \in [0,1]$
(if $\exists \lim_{t\to\infty} P_{ij}'(t) \Rightarrow$ debe ser 0)

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k\neq j} q_{kj}\pi_k - \nu_j \pi_j \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nu_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k & \forall j \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

Obs. Supuesto que $\exists \pi_j$ (las probab. límites)

Es así, si 1) todos los estados de la cadena comunican (si estaba en i, ∃ probab. >0 que en algún momento estaré en j)

2) los estados son recurrentes (el tiempo promedio de retorno es finito).

Obtuvimos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nu_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k & \forall j \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

Despejando π_j podemos encontrar las probabilidades límites.

Probabilidades Límites para el Proceso de Nacimiento y muerte.

En general:
$$\begin{cases} \nu_j \pi_j = \sum_{k\neq j} q_{kj}\, \pi_k & \forall j \\ \sum \pi_j = 1 \end{cases}$$

en el proc. de nacim. y muerte, tenemos $\nu_j = \lambda_j + \mu_j$

y $\begin{cases} q_{n,n+1} = \lambda_n \\ q_{n,n-1} = \mu_n \end{cases}$, porque $p_{n,n+1} = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}$, $p_{n,n-1} = \dfrac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}$

sumamos las ecuaciones.

$j=0$: $\nu_0 \pi_0 = q_{10}\pi_1 \iff \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$ +

$j=1$: $\nu_1 \pi_1 = q_{01}\pi_0 + q_{21}\pi_2 \iff (\lambda_1+\mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$ +

$j=2$: $\nu_2\pi_2 = q_{12}\pi_1 + q_{32}\pi_3 \iff (\lambda_2+\mu_2)\pi_2 = \lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3$

....

$j=n$, $n\geq 1$
$$\boxed{(\lambda_n+\mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1}}$$

$\rightarrow$
$$\begin{cases} \lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \\ \lambda_1\pi_1 = \mu_2\pi_2 \\ \lambda_2\pi_2 = \mu_3\pi_3 \\ \dots \\ \lambda_n\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1}, \quad n\geq 0 \end{cases}$$

Despejando π_1, π_2, etc. tenemos que

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0.$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

. . . .

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1} = \underbrace{\frac{\lambda_{n-1}\cdot\lambda_{n-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_n\cdot\mu_{n-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1}}_{=\rho_n}\pi_0 \quad = \rho_n\pi_0$$

Teniendo en cta que $\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1$, tenemos:

$$1 = \pi_0 + \pi_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_n\cdot\ldots\cdot\mu_1} \iff$$

$$\boxed{1 = \pi_0 + \pi_0\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\lambda_0\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n}}_{=:\rho_n}} \implies \pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n}$$

$$\pi_n = \frac{\rho_n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n}$$

Obvio que la condición para que las prob. límites $\exists$ es $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty$.

Ejemplos: M | M | 1 : $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ $\Rightarrow$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \text{y} \quad \pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, \quad n \geq 0, \quad \text{si } \lambda < \mu.$$

Los clientes deben llegar a tasa λ menor que μ la tasa del servicio.