UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pauta Tarea 1 - Análisis $\mathbb{R}$eal I

1. *(10 puntos)* Dada una familia numerable $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios métricos, sea $X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} X_n := X_1 \times X_2 \times \cdots$.

a) Muestre que $\bar{d}_n(x_n, y_n) := \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\}$ define una métrica en X_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que si se define la función $\tilde{d}_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{d}_\infty(x, y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \right\},$$

entonces $(X, \tilde{d}_\infty)$ es un espacio métrico.

Solución:

a) Para mostrar que $\bar{d}_n$ define una métrica en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$ debemos comprobar que satisface las tres propiedades de métrica:

∘ Sean $x_n, y_n \in X_n, x_n \neq y_n$, luego

$$\text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} > 0 \text{ pues } 1 > 0 \wedge d_n(x_n, y_n) > 0$$

Si $x_n = y_n$ se tiene que $\text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} = \text{mín}\{1, 0\} = 0$. Por lo tanto, $\bar{d}_n$ cumple la primera propiedad de métrica.

∘∘ Sean $x_n, y_n \in X_n$, luego

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} = \text{mín}\{1, d_n(y_n, x_n)\} = \bar{d}_n(y_n, x_n)$$

Así, $\bar{d}_n$ cumple la segunda propiedad de métrica.

∘∘∘ Resta ver que $\bar{d}_n$ satisface la desigualdad triangular. Para verificarlo sean $x_n, y_n, z_n \in X_n$. Dado que d_n define una métrica en X_n se tiene que

$$d_n(x_n, y_n) \leq d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n), \quad \forall x_n, y_n, z_n \in X_n$$

Aplicando esta desigualdad triangular dentro del mínimo que define a $\bar{d}_n$ se tiene

$$\begin{aligned}\bar{d}_n &= \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} \\ &\leq \text{mín}\{1, d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)\} \\ &\leq \text{mín}\{1, d_n(x_n, z_n)\} + \text{mín}\{1, d_n(z_n, y_n)\} \\ &= \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)\end{aligned}$$

Como $\bar{d}_n$ satisface las tres propiedades de métrica concluimos que $\bar{d}_n$ define una métrica en $X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Todo bueno = 4 pts.

b) Sean $x, y, z \in X$. De la definición se sigue inmediatamente que $\tilde{d}_\infty(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$ (quedaría $\tilde{d}_\infty(x,x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{0\} = 0$), además $\tilde{d}_\infty(x,y) > 0$ para $x \neq y$ (pues se toma supremo de un conjunto que contiene únicamente números positivos) y también $\tilde{d}_\infty(x,y) = \tilde{d}_\infty(y,x)$ (por la simetría de $\bar{d}_n, \forall n \in \mathbb{N}$). Para concluir la prueba debemos mostrar que

$$\tilde{d}_\infty(x,z) \leq \tilde{d}_\infty(x,y) + \tilde{d}_\infty(y,z), \forall x, y, z \in X$$

Para ello basta ver que, como las $\bar{d}_j$ son métricas en $X_j, \forall j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\bar{d}_j(x_j, z_j)}{2^j} \leq \frac{\bar{d}_j(x_j, y_j)}{2^j} + \frac{\bar{d}_j(y_j, z_j)}{2^j} \leq \tilde{d}_\infty(x,y) + \tilde{d}_\infty(y,z)$$

donde x_j, y_j y z_j denotan a las j-ésimas coordenadas de x, y y z, respectivamente. Como la última desigualdad se cumple para cualquier $j \in \mathbb{N}$, entonces $\tilde{d}_\infty(x,y) + \tilde{d}_\infty(y,z)$ es una cota superior del conjunto:

$$\left\{\frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Pero como el supremo es la mínima cota superior, entonces:

$$\tilde{d}_\infty(x,z) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n}\right\} \leq \tilde{d}_\infty(x,y) + \tilde{d}_\infty(y,z)$$

Obteniendo así la desigualdad triangular. ∎

Todo bueno = 6 pts.

2. *(20 puntos)* Se dice que un espacio métrico es ***separable*** si contiene un subconjunto denso numerable.

a) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es separable, con $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Considere el conjunto de los puntos que tienen coordenadas racionales.

b) Sean (Λ, d) un espacio métrico y $\{\Omega_\beta\}_{\beta\in B}$ una familia de subconjuntos abiertos de Λ. Se dice que esa familia es una ***base de abiertos*** de Λ si, para todo $\lambda \in \Lambda$, todo subconjunto abierto $\Gamma \subset \Lambda$ que contenga a λ, cumple que $\exists \beta \in B$ tal que $\lambda \in \Omega_\beta \subset \Gamma$.

Demostrar que todo espacio métrico (Λ, d) separable tiene una base numerable.

Sugerencia. Usar todas las bolas de radio racional con centro en algún subconjunto denso numerable de Λ.

Solución

a) Sea $\mathbb{Q}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Por los teoremas vistos en clase, sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$, dado que $\mathbb{Q}$ es numerable. Ahora, debemos probar que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Para ver esto, sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo pero arbitrario, denotamos a x por $(x_1, \ldots, x_n)$ y sea un $r > 0$, debido a que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un $y_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|y_i - x_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$. Así, definiendo a $y := (y_1, \ldots, y_n)$, se tiene que $y \in \mathbb{Q}^n$ y

$$\|y - x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} < \sqrt{n\frac{r^2}{n}} = r$$

Lo que nos muestra que x es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}^n$, por lo que concluimos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Finalmente, se llegó a que $\mathbb{R}^n$ tiene un subconjunto denso numerable y por tanto, es separable. ∎

Todo bueno = 7 pts.

b) Sea Λ un espacio métrico separable, luego Λ contiene a un subconjunto denso numerable Y. Como Y es numerable podemos ordenar a los elementos de Y de forma tal que: $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, sea $\mathcal{C} = \{\Omega_\beta\}_{\beta \in B}$ la colección de todas las vecindades de radio racional y centro en un elemento de Y, esto es:

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{B}_r(y_i) : r \in \mathbb{Q}^+ \wedge y_i \in Y\}$$

Claramente, $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos abiertos y es numerable dado que Y y $\mathbb{Q}$ lo son, esto último se debe a que podemos escribir:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} \left(\bigcup_{y_i \in Y} \{\mathcal{B}_r(y_i)\} \right)$$

y porque la unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable. Luego, $\forall \lambda \in \Lambda$ definamos un conjunto abierto $\Gamma \subset \Lambda$ tal que $\lambda \in \Gamma$, debido a esto $\exists r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(\lambda) \subset \Gamma$. Si $\lambda \in Y$ como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $r' \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r' < r$, y dado que $\mathcal{B}_{r'}(\lambda) := \Omega_{\beta'} \in \mathcal{C}$, para algún $\beta' \in B$, entonces $\Omega_{\beta'} \subset \mathcal{B}_r(\lambda) \subset \Gamma$. Mientras que si $\lambda \notin Y$, existe $y \in Y$ e $y \in \mathcal{B}_\varepsilon(\lambda)$, con $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+_{<r/2}$, ya que λ es un punto de acumulación de Y debido a que Y es denso en Λ. Luego, $d(\lambda, y) < \varepsilon$, entonces $\lambda \in \mathcal{B}_\varepsilon(y)$ y $\mathcal{B}_\varepsilon(y) \in \mathcal{C}$. Además, por desigualdad triangular, $\forall z \in \mathcal{B}_\varepsilon(y)$:

$$d(\lambda, z) \leq d(\lambda, y) + d(y, z) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < r$$

y como $z \in \mathcal{B}_r(\lambda)$, entonces $\mathcal{B}_\varepsilon(y) \subset \mathcal{B}_r(\lambda)$. Combinando estos resultados, tenemos que:

$$\lambda \in \mathcal{B}_\varepsilon(y) \subset \mathcal{B}_r(\lambda) \subset \Gamma, \text{ y } \mathcal{B}_\varepsilon(y) \in \mathcal{C}$$

Finalmente, $\mathcal{C}$ es una base de abiertos para Λ. ■

Todo bueno = 13 pts.

3. *(30 Puntos)* Sea el espacio métrico $(\mathbb{Q}, \xi)$, donde

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto \xi(a, b) = |a - b| \end{aligned}$$

Sea $\Psi = \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \cup \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\}$.

a) Sea $\Psi^+ := \Psi \cap \mathbb{Q}^+$, demuestre que si $\psi_1, \psi_2 \in \Psi^+$, con $\psi_1 < \psi_2$, entonces $[\psi_1, \psi_2] \cap \mathbb{Q} \subset \Psi^+$.

b) Decida si Ψ es abierto, cerrado, *clopen* o ninguno. (Demuéstrelo).

c) ¿Es Ψ un compacto en $\mathbb{Q}$? Fundamente.

d) Calcule el diámetro de Ψ.

Notar que $\xi(a, b)$ es la métrica inducida por la distancia estándar en $\mathbb{R}$.

Solución

a) Notemos que: $(\psi - 3)(\psi + 3) = \psi^2 - 9$ y $(\psi - 2)(\psi + 2) = \psi^2 - 4$, así, podemos reescribir el conjunto Ψ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Big\{\psi \in \mathbb{Q} : 7 < \psi^2 < 13\Big\} \bigcup \Big\{\psi \in \mathbb{Q} : 13 < \psi^2 < 18\Big\} \\
\Longrightarrow \Psi^+ &= \Big\{\psi \in \mathbb{Q}^+ : 7 < \psi^2 < 13\Big\} \bigcup \Big\{\psi \in \mathbb{Q}^+ : 13 < \psi^2 < 18\Big\} \\
\Longrightarrow \Psi^+ &= \Big\{\psi \in \mathbb{Q}^+ : \sqrt{7} < \psi < \sqrt{13}\Big\} \bigcup \Big\{\psi \in \mathbb{Q}^+ : \sqrt{13} < \psi < \sqrt{18}\Big\}
\end{aligned}$$

Notemos que si $\sqrt{13}$ no fuera racional, entonces el conjunto Ψ^+ sería:

$$\Psi^+ = \Big\{\psi \in \mathbb{Q}^+ : \sqrt{7} < \psi < \sqrt{18}\Big\} = \Big(\sqrt{7}, \sqrt{18}\Big) \cap \mathbb{Q}$$

y entonces, llegamos a que:

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in \Psi^+ : \psi_1 < \psi_2 \Longrightarrow [\psi_1, \psi_2] \cap \mathbb{Q} \subset \Big(\sqrt{7}, \sqrt{18}\Big) \cap \mathbb{Q} = \Psi^+$$

Como se señalaba en la primera página, como solo podemos asumir la irracionalidad de $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{12}$, hace falta demostrar que en efecto: $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$, para esto probaremos primero que si $P^2 \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 13 entonces P también es múltiplo de 13. Procederemos a demostrar esto usando el argumento de que si P no fuera múltiplo de 13 entonces P^2 no puede ser múltiplo 13.

Por el algoritmo de la división, sabemos que $\forall P \in \mathbb{N}_{\geq 13}$ solo puede tener una de las dos siguientes representaciones:

$$\begin{aligned}
&P = 13y, \text{ con } y \in \mathbb{N} \\
&P = 13y + a, \text{ con } a \in \{i\}_{i=1}^{12}
\end{aligned}$$

Supongamos entonces que P no es múltiplo de 13, es decir:

$$\begin{aligned}
&P = 13y_1 + a, \text{ con } y_1 \in \mathbb{N},\ a \in \{i\}_{i=1}^{12} \\
\Longrightarrow &P^2 = (13y_1 + a)^2 = 13(13y_1^2) + 13y_1(2a) + a^2 = 13\underbrace{(13y_1^2 + 2ay_1)}_{y_2} + a^2 \\
\Longrightarrow &P^2 = 13y_2 + a^2, \text{ con } y_2 \in \mathbb{N},\ a^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144\}
\end{aligned}$$

Notamos que ningún valor posible de a^2 es múltiplo de 13, y por tanto hemos mostrado lo que queríamos, es decir, para que P^2 sea múltiplo de 13, necesariamente P también debe ser múltiplo de 13. Con este resultado ahora podemos empezar a demostrar la irracionalidad de $\sqrt{13}$.

Por absurdo, supongamos que $\exists x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 = 13$, esto quiere decir que $\exists\, n, m \in \mathbb{N}$ primos entre si, tales que:

$$x^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 13 \Longrightarrow n^2 = 13m^2 \Longrightarrow n^2 \text{ es múltiplo de } 13 \Longrightarrow n \text{ es múltiplo de } 13$$

Por la última implicancia sabemos que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n = 13p \Longrightarrow (13p)^2 = 13m^2 \Longrightarrow 13p^2 = m^2 \Longrightarrow m^2 \text{ es múltiplo de } 13 \Longrightarrow m \text{ es múltiplo de } 13 \rightarrow\leftarrow$$

Lo cual es una contradicción al hecho de que m y n son primos entre sí. Como la contradicción surge del hecho de suponer que $\exists x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 = 13$, entonces se concluye que no existe tal x, por último como estamos trabajando con x^2, da igual el signo de x y por tanto este resultado es válido en todo $\mathbb{Q}$, finalmente $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$. ■

Todo bueno = 7 pts.

b) Sea $q \in \Psi \Longrightarrow \sqrt{7} < |q| < \sqrt{18}$ y definiendo a ε como:

$$\varepsilon := \text{mín}\left\{d\left(q, -\sqrt{18}\right), d\left(q, -\sqrt{7}\right), d\left(q, \sqrt{7}\right), d\left(q, \sqrt{18}\right)\right\} > 0$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\text{si } y \in \mathcal{B}_\varepsilon(q) \Longrightarrow & \xi(y,q) < \varepsilon \\
\Longrightarrow & y \in (q-\varepsilon, q+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset \left[\left(-\sqrt{18}, -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7}, \sqrt{18}\right)\right] \cap \mathbb{Q} = \Psi \\
\Longrightarrow & y \in \Psi \\
\Longrightarrow & \mathcal{B}_\varepsilon(q) \subset \Psi \\
\Longrightarrow & \Psi \textbf{ es abierto.}
\end{aligned}$$

Por definición de Ψ, se tiene que:

$$\Psi^c := \left\{\eta \in \mathbb{Q} : \eta^2 \geq 18\right\} \bigcup \left\{\eta \in \mathbb{Q} : \eta^2 \leq 7\right\}$$

Dandonos cuenta que $18 = 9 \cdot 2$ entonces $\sqrt{18} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, pero como $\sqrt{2}$ es irracional y 3 es racional, como el producto entre un racional distinto de 0 y un irracional da siempre un irracional, entonces $\sqrt{18}$ es un irracional. Además, $\sqrt{7}$ también es un irracional (su demostración es análoga al caso $\sqrt{13}$). Por esto:

$$\Psi^c := \underbrace{\left\{\eta \in \mathbb{Q} : \eta^2 > 18\right\}}_{A} \bigcup \underbrace{\left\{\eta \in \mathbb{Q} : \eta^2 < 7\right\}}_{B}$$

Sea $p_1 \in A \Longleftrightarrow p_1^2 > 18 \Longleftrightarrow |p_1| > \sqrt{18} \Longleftrightarrow |p_1| - \sqrt{18} > 0$ y definiendo a $\varepsilon_1 := |p_1| - \sqrt{18}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Si } q_1 \in \mathcal{B}_{\varepsilon_1}(p_1) \Longrightarrow & |p_1 - q_1| < |p_1| - \sqrt{18} \\
\Longrightarrow & |p_1| - |q_1| < |p_1| - \sqrt{18} \\
\Longrightarrow & |q_1| > \sqrt{18} \\
\Longrightarrow & q_1^2 > 18 \\
\Longrightarrow & q_1 \in A \\
\Longrightarrow & \mathcal{B}_{\varepsilon_1}(p_1) \subset A \\
\Longrightarrow & A \text{ es abierto.}
\end{aligned}$$

Sea $p_2 \in B \Longleftrightarrow p_2^2 < 7 \Longleftrightarrow |p_2| < \sqrt{7} \Longleftrightarrow \sqrt{7} - |p_2| > 0$ y definiendo $\varepsilon_2 := \sqrt{7} - |p_2|$, así:

$$\begin{aligned}
\text{Si } q_2 \in \mathcal{B}_{\varepsilon_2}(p_2) \Longrightarrow & |p_2 - q_2| < \sqrt{7} - |p_2| \\
\Longrightarrow & |q_2 - p_2| < \sqrt{7} - |p_2| \\
\Longrightarrow & |q_2| - |p_2| < \sqrt{7} - |p_2| \\
\Longrightarrow & |q_2| < \sqrt{7} \\
\Longrightarrow & q_2^2 < 7 \\
\Longrightarrow & q_2 \in B \\
\Longrightarrow & \mathcal{B}_{\varepsilon_2}(p_2) \subset B \\
\Longrightarrow & B \text{ es abierto.}
\end{aligned}$$

Puesto que $\Psi^c = A \cup B$ y la unión de abiertos es un abierto, entonces Ψ^c es abierto. Luego, como el complemento de un abierto es un cerrado, entonces Ψ **es cerrado**, en conclusión **Ψ es clopen.** ∎
Todo bueno = 9 pts.

c) Tenemos que $\Psi \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, además ξ es la métrica inducida por la distancia estándar en $\mathbb{R}$. Recordando que la propiedad de ser un conjunto compacto es intrínseca, es decir:

$$\Psi \text{ es compacto en } \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \Psi \text{ es compacto en } \mathbb{R}$$

Y el teorema de Heine-Borel:

$$E \subset \mathbb{R}^k \text{ es compacto} \Longleftrightarrow E \text{ es cerrado y acotado}$$

Se procederá a demostrar que Ψ no es compacto por no ser cerrado en $\mathbb{R}$.

Como trabajaremos ahora en el espacio de los reales, sean $\varepsilon > 0$ y la bola $\hat{\mathcal{B}}_\varepsilon\left(\sqrt{18}\right) := \left\{x \in \mathbb{R} : d\left(x, \sqrt{18}\right) < \varepsilon\right\} = \left(\sqrt{18} - \varepsilon, \sqrt{18} + \varepsilon\right)$ y sea $\tau = \text{máx}\left\{\sqrt{18} - \varepsilon, \sqrt{7}\right\} \in \mathbb{R}^+$, por la densidad de los racionales, sabemos que $\exists x \in \mathbb{Q}$ tal que: $\tau < x < \sqrt{18}$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \hat{\mathcal{B}}_\varepsilon\left(\sqrt{18}\right) \cap \Psi$$

y por tanto, $\sqrt{18}$ es un punto de acumulación de Ψ en $\mathbb{R}$, pero $\sqrt{18} \notin \Psi$, es decir, Ψ no contiene a todos sus puntos de acumulación y por tanto no es cerrado en $\mathbb{R}$, por lo que concluímos que Ψ no es compacto. $\blacksquare$

Todo bueno = 5 pts.

d) Sabemos que Ψ se puede escribir como:

$$\Psi = \left\{\psi \in \mathbb{Q} : \psi \in \left(-\sqrt{18}, -\sqrt{7}\right) \vee \psi \in \left(\sqrt{7}, \sqrt{18}\right)\right\}$$

Claramente, $\Psi \subset \mathcal{B}_{\sqrt{18}}(0)$, entonces Ψ es acotado y por tanto su diámetro está bien definido, definamos ahora al conjunto $\Xi := \{\xi(x,y) \in \mathbb{R} : x, y \in \Psi\}$, como $\forall x, y \in \Psi \subset \mathcal{B}_{\sqrt{18}}(0) \Longrightarrow \xi(x,0) < \sqrt{18}$ y $\xi(y,0) < \sqrt{18}$ así, por desigualdad triangular:

$$\forall x, y \in \Psi : \xi(x,y) \leq \xi(x,0) + \xi(y,0) < 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

de esta forma $6\sqrt{2}$ es una cota superior de Ξ, veamos ahora si existe otra cota superior más pequeña.
Sea $0 < \varepsilon < 2\left(\sqrt{18} - \sqrt{7}\right)$, supongamos que $6\sqrt{2} - \varepsilon$ también es cota superior de Ξ, esto quiere decir:

$$\forall x, y \in \psi : \xi(x,y) \leq 6\sqrt{2} - \varepsilon$$

sin embargo, por densidad de $\mathbb{Q}$, $\forall x_1 > -\sqrt{18}, \exists q_1 \in \mathbb{Q} : -\sqrt{18} < q_1 < x_1$ y $\forall x_2 < \sqrt{18}, \exists q_2 \in \mathbb{Q} : x_2 < q_2 < \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Q} : -\sqrt{18} < q_1 < -\sqrt{18} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \exists q_2 \in \mathbb{Q} : \sqrt{18} - \frac{\varepsilon}{2} < q_2 < \sqrt{18} \\
&\Longrightarrow \exists q_1, q_2 \in \Psi : q_1 < -\sqrt{18} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } q_2 > \sqrt{18} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Longrightarrow \exists q_1, q_2 \in \Psi : q_2 - q_1 > 2\sqrt{18} - \varepsilon > 0 \\
&\Longrightarrow \exists q_1, q_2 \in \Psi : |q_2 - q_1| > 2\sqrt{18} - \varepsilon \\
&\Longrightarrow \exists q_1, q_2 \in \Psi : \xi(q_1, q_2) > 6\sqrt{2} - \varepsilon \\
&\Longrightarrow 6\sqrt{2} - \varepsilon \text{ No es cota superior de } \Xi
\end{aligned}$$

De esta forma, como no existe una cota superior más chica, se concluye que:

$$\text{diam}\Psi := \sup_{x,y \in \Psi} \xi(x,y) = 6\sqrt{2}$$

$\blacksquare$

Todo bueno = 9 pts.