

Cálculo II (527150)

Clase 10: Integrales impropias

Integrales sobre dominios no acotados

Ejemplo

Estudiar las integrales

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Integrales impropias

Definición

Sea f una función definida en un intervalo $[c, \infty)$. Se define la *integral impropia*

$$\int_c^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_c^a f(x) \, dx$$

Definición

Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, c]$. Se define la *integral impropia*

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) \, dx$$

Propiedad fundamental

Teorema

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$, entonces $\int_c^{\infty} f(x) dx$ diverge.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq 0$, entonces $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ diverge.

Ejemplos

Ejemplos

Determinar la convergencia de las siguientes integrales. Para aquellas que converjan, determinar el valor.

► $\int_1^{\infty} \ln(x) \, dx$

► $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$

► $\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$

► $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$

► $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$ para $p > 0$.

Álgebra de integrales impropias

Regla general

Las reglas para operaciones entre integrales impropias son las mismas que para integrales usuales, pero siguiendo la misma condición que para la operatoria entre límites:

se debe operar entre integrales convergentes.

Criterio de comparación directa

Criterio

Sean f, g funciones positivas, definidas en $[a, \infty[$. Suponer que $f(x) \leq g(x)$ para todo x en dicho intervalo.

Si $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ también converge.

Ejemplos

Determinar la convergencia de las siguientes integrales.

► $\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$

► $\int_1^\infty \frac{2 + \cos(x)}{x} dx$