UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218**

Evaluación 2
6 de Julio de 2007

**Pregunta 1** (15 puntos). Considere el modelo para el sistema masa-resorte sin amortiguamiento ni roce con forzamiento periódico dado por

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} \;+\; k\,x \;=\; \cos 2\pi t \;+\; \operatorname{sen} 3\pi t \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

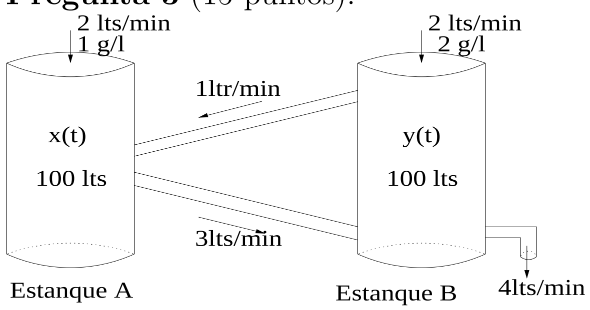
a) Indique para que valores de $k$ y $m$ se produce resonancia.
b) Resuelva el PVI cuando hay resonancia en el caso de la menor frecuencia del término forzado.
c) Determine la taza de aumento de la amplitud cuando el tiempo $t$ se hace muy grande bajo los supuestos en b).

**Pregunta 2** (15 puntos). Resuelva el siguiente PVI mediante Laplace

$$\begin{cases} x'' \;+\; 2\,x' \;+\; 2\,x \;=\; u(t-1)\,e^{-t} \;+\; \delta(t-1) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

donde $u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

**Pregunta 3** (15 puntos).




Dos estanques de 100 litros cada uno, están inicialmente llenos de agua pura. Agua que contiene sal con una concentración de $1\,g\,/\,ltr$ entra al estanque A (izquierda) desde una fuente externa a $2\,ltr\,/\,min.$, y por otra fuente externa entra agua salada con una concentración de $2\,g\,/\,ltr$ al estanque B (derecha) a $2\,ltr\,/\,min.$
El agua salada bien mezclada en el estanque A fluye al estanque B a razón de $3\,ltr\,/\,min.$ De regreso, el agua salada bien mezclada en el estanque B fluye al estanque A a razón de $1\,ltr\,/\,min.$ Finalmente el agua salada bien mezclada sale del estanque B al exterior a razón de $4\,ltr\,/\,min.$ Encuentre la cantidad de sal en cada estanque como una función del tiempo $x(t)$, $y(t)$.

**Pregunta 4** (15 puntos). Resuelva el PVI

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

tiempo = 110 minutos
HMM/JMS/LNB/MSC/msc.

# Tabla de Transformadas de Laplace

| | |
|---|---|
| $\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$ | (propiedad de linealidad) |
| $\mathcal{L}\{\,1\} = \dfrac{1}{s}$ | $\mathcal{L}\{\,e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ |
| $\mathcal{L}\{\,t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ | $\mathcal{L}\{\,\text{sen}(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\mathcal{L}\{\,\cos(\omega t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\mathcal{L}\{\,\text{senh}(bt)\} = \dfrac{b}{s^2-b^2}$ |
| $\mathcal{L}\{\,\cosh(bt)\} = \dfrac{s}{s^2-b^2}$ | $\mathcal{L}\{\,\ln(t)\} = -\dfrac{\ln(t)+\gamma}{s}$ |
| $\mathcal{L}\{\,\sqrt[n]{t}\} = s^{-\frac{n+1}{n}} \cdot \Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ | $\mathcal{L}\{\,J_n(t)\} = \dfrac{\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)^n}{\sqrt{1+s^2}}$ |
| $\mathcal{L}\{\,I_n(t)\} = \dfrac{\left(s+\sqrt{-1+s^2}\right)^{-n}}{\sqrt{-1+s^2}}$ | $\mathcal{L}\{\,\text{erf}(t)\} = \dfrac{e^{s^2/4}\,\text{erfc}\,(s/2)}{s}$ |
| **Derivación e Integración:** | |
| $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ | $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ |
| $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ | |
| $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$ | |
| $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ | $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,d(s)$ |
| $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}$ | |
| **Fórmulas de Desplazamiento:** | |
| $\mathcal{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a)$ | $\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$ |
| $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)u(t-a)$ | $\mathcal{L}\{\,t^nf(t)\} = (-1)^nD_s^n[F(s)]$ |
| **Funciones impulso y escalón unitario:** | |
| $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$ | $\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \dfrac{1}{s}$ |
| **Otras transformadas:** | |
| $\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ (Convolución) | |
| $\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt$ | (Función periódica con periodo $p$) |
| $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\right\} = \dfrac{1}{(s+a)^n}$ | $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})\right\} = \dfrac{1}{s(s+a)}$ |
| $\mathcal{L}\left\{\text{sen}(at+\varphi)\right\} = \dfrac{\text{sen}\varphi s + a\cos\varphi}{s^2+a^2}$ | $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\right\} = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| $\mathcal{L}\left\{e^{-at}\left(\cos(bt) + \left(\dfrac{c-a}{b}\right)\text{sen}(bt)\right)\right\} = \dfrac{s+c}{(s+a)^2+b^2}$ | |

[1] $\gamma = -\int_0^\infty \frac{e^x}{\ln x}dx \approx 0.577215$ (Constante de Euler-Mascheroni).
[2] $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$.
[3] $J_n(x)$, función de Bessel de primera especie, solución analítica de $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$.
[4] $I_n(x)$, función de Bessel modificada de primera especie, sol. analítica de $x^2y'' + xy' + (x^2+n^2)y = 0$.
[5] $\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau$ (función error), y $\text{erfc}(t) = 1 - \text{erf}(t)$ (función error complementaria).

# Pauta de Corrección

### Pregunta 1

a)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + x_p(t)$$

Hay resonancia cuando $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\pi$ o bien $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 3\pi$.

b) Las dos frecuencias en las que se manifiesta resonancia debido al término forzado son $w_1 = 2\pi/2\pi = 1.0\ Hz$ y $w_2 = 3\pi/2\pi = 1.5\ Hz$. La menor de ellas $w_1 = 1$ ocurre cuando $k = 4\pi^2 m$. En este caso, la solución particular toma la forma

$$x_p(t) = A\,t\cos 2\pi t + B\,t\operatorname{sen} 2\pi t + C\cos 3\pi t + D\operatorname{sen} 3\pi t$$

Reemplazando $x_p(t)$ en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} m(x_p'' + 4\,\pi^2 x_p) \;=\; & m\big(-4\,A\,\pi\operatorname{sen} 2\pi t - \;4\,A\,\pi^2 t\cos 2\pi t \\ & + 4\,B\,\pi\cos 2\pi t - 4\,B\,\pi^2 t\operatorname{sen} 2\pi t - 9\,C\,\pi^2\cos 3\pi t - 9\,D\,\pi^2\operatorname{sen} 3\pi t\big) \\ & + 4\,\pi^2\,m\,(A\,t\cos 2\pi t + B\,t\operatorname{sen} 2\pi t + C\cos 3\pi t + D\operatorname{sen} 3\pi t) \\ = \;& \cos 2\pi t + \operatorname{sen} 3\pi t \end{aligned}$$

Luego se deduce el valor de los coeficientes indeterminados

$$\begin{aligned} -4A\pi m = 0, &\quad -5C\pi^2 m = 0, \\ 4B\pi m = 1, &\quad -5D\pi^2 m = 1. \end{aligned}$$

Es decir, $x_p(t) = \dfrac{t}{4\pi m}\operatorname{sen} 2\pi t - \dfrac{1}{5\pi^2 m}\operatorname{sen} 3\pi t$.
Reemplazando en las condiciones iniciales

$$x(0) = C_1 = 0; \qquad x'(0) = 2\pi C_2 - \frac{2\pi}{5\pi^2 m} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = \frac{3}{10\pi^2 m}$$

Finalmente, $\boxed{x(t) = \dfrac{3}{10\pi^2 m}\operatorname{sen} 2\pi t + \dfrac{t}{4\pi m}\operatorname{sen} 2\pi t - \dfrac{1}{5\pi^2 m}\operatorname{sen} 3\pi t.}$

c)

Amplitud $A(t) \approx \dfrac{t}{4\pi m}$, cuando $t$ es grande. Luego la tasa de aumento de la amplitud es aproximadamente igual a $\dfrac{1}{4\pi m}$ cuando $t$ es grande.

**Pregunta 2**

Aplicando Transformada de Laplace se tiene

$$\begin{aligned} s^2X(s)+2sX(s)+2X(s) &= \frac{1}{e}\mathcal{L}\left\{u(t-1)e^{-(t-1)}\right\}+e^{-s} \\ &= \frac{1}{e}\cdot e^{-s}\frac{1}{s+1}+e^{-s}=e^{-s}\left(\frac{1/e+s+1}{s+1}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} X(s) &= e^{-s}\left(\frac{1/e+s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right)=e^{-s}\left(\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}\right) \\ &= e^{-s}\left(\frac{1/e}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}\right) \qquad \begin{array}{l}\text{(multiplicando por } (s+1) \\ \text{y haciendo } s=1 \quad \Longrightarrow \quad A=1/e)\end{array} \\ &= e^{-s}\left(\frac{(1/e+B)s^2+(2/e+B+C)s+(2/e+C)}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right) \end{aligned}$$

Luego igualando el numerador a $(1/e+s+1)$, se obtiene

$$1/e+B=0 \Longrightarrow B=-1/e, \qquad 2/e+C=1/e+1 \Longrightarrow C=1-1/e$$

Es decir,

$$X(s)=e^{-s}\left(\frac{1/e}{s-1}+\left(-\frac{1}{e}\right)\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t)=H(t-1)\left(e^{-t}-e^{-t}\cos(t-1)+e^{1-t}\operatorname{sen}(t-1)\right)}$$

**Pregunta 3**

Las ecuaciones que describen el cambio en las cantidades de sal son:

$$\begin{cases} x'(t)=2\times 1+1\times\dfrac{y}{100}-3\times\dfrac{x}{100} \\ y'(t)=2\times 2+3\times\dfrac{x}{100}-(1+4)\times\dfrac{y}{100} \end{cases}$$

Este sistema escrito en forma matricial queda como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -3/100 & 1/100 \\ 3/100 & -5/100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz se determinan a través del polinomio característico

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3/100-\lambda & 1/100 \\ 3/100 & -5/100-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2+\frac{8}{100}+\frac{12}{100^2} \\ &= \left(\lambda+\frac{6}{100}\right)\left(\lambda+\frac{2}{100}\right)=0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = -\dfrac{6}{100}$ y $\lambda_2 = -\dfrac{6}{100}$ son los valores propios.

Si $\lambda_1 = -6/100$,

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{vector propio } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_2 = -2/100$,

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{vector propio } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-6t/100}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t/100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Suponiendo la solución particular de la forma (coef. indeterminados) $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, con $A$ y $B$ constantes, se tiene que (reemplazando en la ecuación):

$$\begin{cases} A' + \dfrac{3A}{100} - \dfrac{B}{100} = 2 \\ \\ B' - \dfrac{3A}{100} + \dfrac{5B}{100} = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 350/3 \\ B = 150 \end{cases}$$

Es decir

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-6t/100} + C_2 e^{-2t/100} + 350/3 \\ y(t) = 3C_1 e^{-6t/100} + C_2 e^{-2t/100} + 150. \end{cases}}$$

Reemplazando en las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = -C_1 + C_2 + 350/3 = 0 \\ y(0) = 3C_1 + C_2 + 150 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} C_1 = -25/3 \\ C_2 = -125 \end{cases}}$$

**Pregunta 4**

Los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ (matriz triangular).

Si $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{vector propio } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{vector propio } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Suponiendo la solución particular de la forma (coef. indeterminados)

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ate^t + Be^t + C \\ Dte^t + Ee^t + F \end{pmatrix}.$$

Se tiene que (reemplazando en la ecuación):

$$\begin{cases} (A - A + D)te^t + (A + B - B + E)e^t - C + F = e^t \\ (D - 2D)te^t + (D + E - 2E)e^t - 2F = 1 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} D = 0, & A + E = 1, & -C + F = 0, \\ -D = 0, & D - E = 0, & -2F = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1, & B = \beta, & C = -1/2, \\ D = 0, & E = 0, & F = -1/2 \end{cases}$$

con $\beta$ una constante arbitraria cualquiera que podemos escoger igual a 0 (por ejemplo). Luego

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^t - 1/2 \\ y(t) = -C_2 e^{2t} - 1/2. \end{cases}}$$

Reemplazando en las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 1/2 = 1 \\ y(0) = -C_2 - 1/2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -3/2 \end{cases}}$$