Departamento de Ingeniería Matemática	Universidad de Concepción

Listado 1: Preliminares.

Optimización II 525352 *Profesor: Felipe Maldonado*

1. Dados los conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq x - 1, \quad y \leq -x + 1\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, \quad y \leq x, \quad y \geq -x\}$$

Dibuje ambas regiones y calcule las siguientes sumas de Minkowski:

- $A + B$
- $2A - B$

2. Probar las siguientes propiedades

   a) Demuestre que todo punto extremo[1] de $co(\{x_1, ..., x_m\})$ es necesariamente uno de los puntos x_i.

   b) Sean $A = \{a_1, ..., a_{m_1}\}$ y $B = \{b_1, ..., b_{m_2}\}$. Demostrar que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B).$$

   c) Sea S un conjunto convexo y $x \in S$. Demuestre que x es un punto extremo si y sólo si $S \setminus \{x\}$ es convexo.

3. Dados $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ y $\epsilon > 0$, se llama **Cono de Bisho-Phelps** al conjunto

$$K(v, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \epsilon \|v\| \|x\| \leq \langle v, x \rangle\}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ y $\gamma \in [0,1]$, se llama **Pétalo de Penot** al conjunto

$$P_\gamma(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \gamma \|a - x\| + \|x - b\| \leq \|b - a\|\}.$$

Pruebe que ambos conjuntos son convexos.

4. Pruebe que los siguientes conjuntos son convexos.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha x_1 + \beta x_2; x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$, donde S_1, S_2 son convexos, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   b) $B = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$, con C_γ convexos, Γ un conjunto arbitrario.

   c) Los semiespacios $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : p^t x \geq \alpha\}$, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : p^t x \leq \alpha\}$, con $p \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[1] x se dice punto extremo si no se puede escribir como combinación lineal entre otros elementos del conjunto

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, justifique porque se cumplen las siguientes propiedades:

   a) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$

   b) A cerrado $\not\Rightarrow co(A)$ cerrado.

   c) A compacto $\Rightarrow co(A)$ compacto.

6. Pruebe las siguientes propiedades.

   a) $A \neq \emptyset$, convexo $\Rightarrow ri(A) \neq \emptyset$

   b) A convexo $\Rightarrow \overline{A}, ri(A)$ convexos.

   c) $\overline{ri(A)} = \overline{A}$.

   d) $ri(A) = ri(\overline{A})$.