Procesos Estocásticos : Cadenas de Márkov en tiempo continuo

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Cadenas de Márkov en tiempo continuo. Definiciones

En adelante, consideremos $\{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados E discreto (que puede ser infinito) y con tiempo continuo.

- Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en Tiempo Continuo (CMTC) si $\forall s, t \geq 0$ y números enteros no negativos i y j, $x(u)$, $0 \leq u \leq s$, se cumple

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i; X_u = x(u), 0 \leq u \leq s) = P(X_{t+s} = j | X_s = i).$$

- En este caso, la probabilidad de transición es

$$p_{ij} = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

y si éstas son independientes de s, se tiene una CMTC homogénea.

Ejemplo

Consideremos una cadena que está en i en el instante $t = 0$.

- Supongamos que la transición a algún otro estado j no ocurre durante 10 minutos.
- ¿Cuál es la probabilidad que el proceso no deje i durante los próximos 5 minutos?
- Por la propiedad de Markov, se tiene que

$$P(T_i > 15 | T_i > 10) = P(T_i > 5)$$

- Es decir, T_i presenta falta de memoria. Por tanto, T_i tiene distribución esponencial. Esto motiva la siguiente definición alternativa.

Definición

Sea T_i el tiempo de permanencia en el estado i. Entonces $\{X_t : t \geq 0\}$ es una CMTC si

- $T_i \sim Exp(\nu_i)$

Es decir, la distribución del tiempo de permanencia antes de transitar a otro estado es exponencial con tasa ν_i.

- Cuando deja el estado i, el proceso entra en el estado j con probabilidad de transición p_{ij} de modo que

$$\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

y

$$p_{ii} = 0.$$

Observación

- El tiempo promedio que el proceso permanece en el estado i es $\frac{1}{\nu_i}$.
- Por tanto, no existen estados absorbentes pues $\frac{1}{\nu_i} < \infty$. Esto es, $p_{ii} = 0 \forall i$.

Outline

Distribución Exponencial

Una variable aleatoria $T \sim Exp(\lambda)$ si su función de densidad es

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{otro.} \end{cases}$$

Equivalentemente, su función de distribución es
$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$.

- $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$ y $\mathrm{Var}[T] = 1/\lambda^2$.
- Falta de memoria

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Distribución Exponencial : Repaso

- Sean $T \sim Exp(\lambda)$ y $S \sim Exp(\gamma)$ v.a. independientes.

Entonces,

$$T \wedge S \sim Exp\{\lambda + \gamma\}$$

.

- En general, si $T_1, \dots, T_n$ son v.a. independientes con

$T_i \sim Exp(\lambda_i)$, entonces

$$\min\{T_1, \dots, T_n\} \sim Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i).$$

- Sean $T \sim Exp(\lambda)$ y $S \sim Exp(\gamma)$ v.a. independientes.

Entonces

$$P(S > T) = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}.$$

Outline

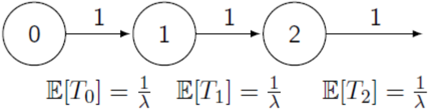
Proceso de Poisson homogéneo

Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ de tasa λ. Entonces

a) $E = \mathbb{N}_0$

b) $T_i \sim Exp(\lambda)$

c) $p_{i,i+1} = 1$



Proceso de Poisson homogéneo

Así, la matriz de transición es

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{\leftarrow \text{infinita}}$$

Proceso de Yule

Una población en que los individuos engendran nuevos miembros pero no pueden morir. Los individuos se comportan de manera independiente en un tiempo exponencial (de media $\frac{1}{\lambda}$) y producen un nuevo individuo.

- Sea $\{X_t : t \geq 0\}$: número de individuos en el instante t.
- Entonces, $E = \{1, 2, \ldots\}$ y $X_0 = 1$.

Proceso de Yule. Cont.

- Para pasar del estado i ("hay i individuos") al estado $i+1$ ("hay $i+1$ individuos"), basta con que cualquiera de los i individuos se reproduzca. Así,

$$P(T_i < t) = P\left(\min\{T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \ldots, T_i^{(i)}\} < t\right)$$
$$= 1 - e^{-i\lambda t}$$

- Por ende, $T_i \sim Exp(i\lambda)$.

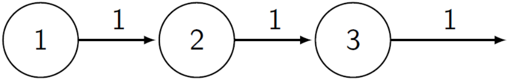
Proceso de Yule. Cont.

Además, dado que sólo nacen individuos y no mueren, se tiene que la matriz de transición es la misma que del proceso de Poisson,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \leftarrow \text{infinita}$$

Proceso de Yule. Cont.

No obstante, a cambio con el proceso de Poisson, los tiempos esperados antes que nace un nuevo individuo van disminuyendo :



$$\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbb{E}[T_2] = \frac{1}{2\lambda} \quad \mathbb{E}[T_3] = \frac{1}{3\lambda}$$