UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAs Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Calculo III   Joaquin Riquelme, Javier Salinas.   Concepción 2025, marzo

Listado 2

Problemas a resolver en practica

- **Problema 1:** Muestre que toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ convergente, es una sucesión de Cauchy.
- **Problema 2:** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{(y-1)(x^2+y^2)}, \forall (x, y) \in D$.
  Encontrar $Dom(f), int(Dom(f)), \overline{Dom(f)}$ e indicar si $Dom(f)$ es abierto, cerrado o ninguna de ellas.
- **Problema 3:** estudie la existencia de los siguientes limites y determine el limite cuando existe:

  (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
- **Problema 4:** Muestre que la función
  $$f(x) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad (x, y) \in D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$
  es continua en D, y se puede prolongar por continuidad en $(0, 0)$.
- **Problema 5:** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función que satisface
  $$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha \quad \forall (x, y) \in D,$$
  Donde $K > 0$ y $\alpha > 0$ son constantes (dichas funciones se llaman Hölder-continuas o, si $\alpha = 1$, Lipschitz-contiuas). Muestre que f es continua en D

Problemas para el estudiante

- Represente gráficamente y halle el interior, el cierre y la frontera del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < (x - 1^2 + y^2 \leq 2) \cup \{(0, 0), (1, 0)\}\}$.
- Graficar si es posible, y encontrar el conjunto de puntos interiores, de acumulación, de frontera y de puntos aislados. Además, indicar si los conjuntos son abiertos, cerrados y compactos.

  (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 \leq x^2 + 4y^2 < 64\}$

  (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$
- Estudie el limite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ de la funcion $D \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, \frac{xy^5}{x^2 + y^{10}} \right), \quad (x, y) \in D = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$$

- Muestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0$$

  Indicación: Use la desigualdad (por demostrar)

$$\frac{|x^3 y|}{x^4 + y^2} \leq \begin{cases} \sqrt{|y|} & \text{si } |x| \leq \sqrt{|y|} \\ |x| & \text{si } |x| \geq \sqrt{|y|} \end{cases}$$

- dilucidar si la función

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$$

  se puede prolongar por contiunuidad en $(0, 0)$