UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo III   Joaquín Riquelme, Javier Salinas   Concepción 2025, Mayo

CÁLCULO III

Listado (Teoremas integrales de Riemann-Darboux)

Ejercicios seleccionados

1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas sobre X, entonces

$$\underline{\int}_X f(x)\,dx \leq \overline{\int}_X f(x)\,dx$$

2. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas sobre X, entonces

$$\underline{\int}_X f(x)\,dx+\underline{\int}_X g(x)\,dx \leq \underline{\int}_X (f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int}_X (f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int}_X f(x)\,dx+\overline{\int}_X g(x)\,dx$$

3. (Criterio de integrabilidad de Riemann). Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. La función f es Riemann-integrable sobre el conjunto acotado X si y solo si para cada $\epsilon > 0$ y cada intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$ con $X \subset I$ existe una partición P de I tal que

$$\overline{S}_P(f_X) - \underline{S}_P(f_X) < \epsilon$$

4. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable sobre el conjunto X, entonces $f + g$ también es Riemann-integrable sobre X

$$\int_X (f(x) + g(x))\,dx = \int_X f(x)\,dx + \int_X g(x)\,dx$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable sobre el conjunto X, entonces $|f|$ es también Riemann-integrable sobre X

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leq \int_X |f(x)|\,dx$$