Clase 11: Derivada de una función y Reglas de derivación.

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre I-2024

Definición

Sea I un intervalo abierto, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Llamaremos **derivada** de f en el punto a, denotada por $f'(a)$ o $\frac{df}{dx}(a)$, al límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \, .$$

Si el límite anterior existe, se dice que f es **derivable** en a.

Observación

Haciendo el cambio de variable $h = x - a$, se tiene que:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo 1

Dado $f(x) = x^2$, calculemos $f'(1)$, esto es:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Mas general, dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, se tiene que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

lo que nos entrega la derivada de $f(x) = x^2$ en cada número real $a \in \mathbb{R}$. Así, podemos considerar la función derivada de $f(x) = x^2$, definida por

$$f'(x) = 2x \text{ o bien } \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Ejemplo 2

Analicemos la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$, cada punto donde exista.

Notar que $f'(0)$ no existe ¿Por qué?. Por otro lado, dado $a > 0$ se tiene que

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Así, la *función derivada* de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ , \text{ para cada } x > 0\ .$$

Los ejemplos mostrados previamente, motivan la siguiente definición.

Definición

Dada una función real f se define la **función derivada de** f en x, o simplemente la derivada de f con respecto a x, como la función

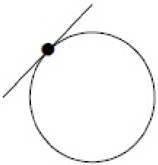
$$f' : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \ ,$$

donde $\mathrm{Dom}(f') = I = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } x\}$.

Interpretación geométrica de la derivada

Problema de la recta tangente

Sabemos que una recta es tangente a una circunferencia, si la intersecta en un único punto, como en la imagen.



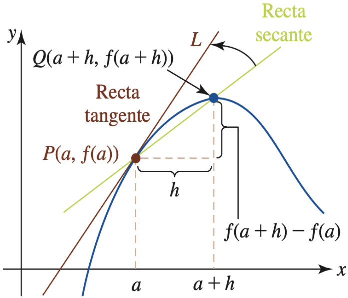
Pero, ¿Puede afirmarse en general que una recta es tangente a una curva si la intersecta en un único punto?

Interpretación geométrica de la derivada

Problema de la recta tangente

Con el propósito de precisar el concepto de recta tangente a una curva, procedemos como sigue:

Consideremos una curva C dada por la gráfica de una función f.
Sea $P(a, f(a)) \in C$ y $Q(a+h, f(a+h)) \in C$ un punto móvil cercano a P.



Interpretación geométrica de la derivada

Problema de la recta tangente

Notar que la recta que pasa por P y Q (recta secante a C) tiene pendiente

$$m_{\mathsf{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; .$$

Luego, la pendiente m de la recta **recta tangente** a C en el punto $P(a, f(a))$ viene dada por:

$$m = \lim_{h \to 0} m_{\mathsf{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

que corresponde a la derivada de f en a.

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$.

Función derivada
Ejemplos

Determine la derivada de las siguientes funciones, en cada punto donde exista.

1. $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. ¿Qué puede decir acerca de la derivada de x^n, con $n \in \mathbb{N}$?
6. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$
7. $f(x) = \cos(x)$

Soluciones: 1. 0, 2. 1, 3. $2x$, 4. $3x^2$, 5. nx^{n-1}, 6. $\cos(x)$, 7. $-\operatorname{sen}(x)$.

Derivadas laterales
Definición

Como la derivada es un límite, podemos definir las llamadas **derivadas laterales**.

Definición

Sea f una función real y $a \in \mathbb{R}$.

1. Se define la derivada por derecha de f en a como
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
2. Se define la derivada por izquierda de f en a como
$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivadas laterales

Ejemplo

Observación

$$f'(a) = L \in \mathbb{R} \iff f'_-(a) = f'_+(a) = L.$$

Por ejemplo, dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcular, si existe, $f'(1)$.

Teorema

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en un punto $a \in I$, entonces es continua en a.

Demostración. Suponiendo que $f'(a)$ existe con $a \in I$ sigue que

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

lo que muestra que f es continua en a.

Corolario

Si f no es continua en a, entonces no es derivable en a.

Observación

El recíproco del Teorema previo no es cierto en general. Por ejemplo, la función

$$f(x) = |x|$$

es continua en $x = 0$ pero $f'(0)$ no existe ¿Por qué?.

Teorema (Álgebra de derivadas)

Si f, g son funciones derivables en un punto a, entonces las funciones $f \pm g$, $f \cdot g$, αf, $\dfrac{f}{g}$, con $g \neq 0$ son derivables en a y además:

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
3. $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$, con $g(a) \neq 0$.

Algebra de derivadas

Demostración: Solo demostraremos 2., las restantes se dejan como ejercicio (¡Inténtalo!)

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\lim_{x\to a} g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&= f(a)\cdot g'(a)+g(a)\cdot f'(a)
\end{aligned}$$

Note que para la última igualdad se usa el hecho que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, o sea, la continuidad de f en a.

Ejemplos

Hemos visto que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}$. Utilizando el álgebra de derivadas (en particular la regla del cociente) se tiene que dado $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -nx^{-n-1}$$

Mas general, se puede probar que dado $r \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$. Por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

Sin embargo, esta última fórmula vale para $x > 0$ (en caso que el índice sea par) y es cierta para $x \neq 0$ (en caso que el índice sea impar).

Ejemplos

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+1}$

(d) $f(x) = -x^3\operatorname{sen}(x) + 7x^7$

(e) $f(x) = \dfrac{2x^3\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

(f) $f(x) = \dfrac{-6}{x^2} + \operatorname{sen}(x)(x+1) - x\cos(x)$

2. Demuestre que:

$$
\begin{aligned}
[\tan(x)]' &= \sec^2(x)\\
[\cot(x)]' &= -\csc^2(x)\\
[\sec(x)]' &= \sec(x)\tan(x)\\
[\csc(x)]' &= -\csc(x)\cot(x)
\end{aligned}
$$

Regla de la cadena

Teorema

Teorema (Regla de la cadena)

Sean f, g funciones. Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Ejemplo

Sea $h(x) = (5x^2 + 10)^{20}$. Si $f(x) = x^{20}$ y $g(x) = 5x^2 + 10$, entonces

$$h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \,.$$

Luego,

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 200x(5x^2 + 10)^{19}.$$

Ejercicios

1. Aplique la regla de la cadena para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{3x^6 + 5}$

(b) $f(x) = \cos(3x^4 - 2x + 1)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 - 2x)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(2x - 1)^3}$

(e) $f(t) = \left(\dfrac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^9$

(f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}}$

2. Determine la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^3 - 1)}{x - 2}$$

en el punto $(1, f(1))$.