

Listado 7 ALGEBRA III 525201-0: Aplicación adjunta. Aplicaciones autoadjuntas, unitarias, positivas, normales.

Aplicación raíz cuadrada (positiva). Descomposición polar. Descomposición en valores singulares

En lo que sigue, consideraremos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interno, pudiendo ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sea $\{v_j\}_{j=1}^m \subseteq V$. Demuestre que $\left(\{v_j\}_{j=1}^m\right)^\perp = \langle\{v_j\}_{j=1}^m\rangle^\perp$.
2. Sean U, W subespacios de V . Pruebe que
 - (a) U^\perp es un subespacio vectorial de V .
 - (b) $\{\theta\}^\perp = V$, y $V^\perp = \{\theta\}$.
 - (c) Si $U \subseteq W$, entonces $W^\perp \subseteq U^\perp$.
 - (d) $U \cap U^\perp = \{\theta\}$.
 - (e) $U \bigoplus U^\perp = V$, considerando el caso V de dimensión finita. Este resultado se conoce como **TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL**
 - (f) $U = (U^\perp)^\perp$, considerando el caso V de dimensión finita.

REMARK: La validez del **TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL** en dimensión infinita, requiere además que V sea un espacio de Hilbert y U un subespacio cerrado de V . Se discutirá en otra asignatura.
3. Sea V finito dimensional, y U un subespacio de V . Probar: $U^\perp = \{\theta\}$ si y sólo si $U = V$.
4. Sea V finito dimensional, y U un subespacio de V . Demuestre que $\text{Proj}_{U^\perp} = \tilde{I} - \text{Proj}_U$.
5. Sea U un subespacio de V , $\{u_j\}_{j=1}^m$ una base de U , y $B := \{u_j\}_{j=1}^m \cup \{w_k\}_{k=1}^n$ una base de V (i.e. V es finito dimensional). Sea $\tilde{B} := \{x_j\}_{j=1}^m \cup \{y_k\}_{k=1}^n$ la base ortonormal que resulta de aplicar el **PROCEDIMIENTO DE GRAMM-SCHMIDT** a la lista de vectores dada por B (respetando el orden). Demuestre que $\{x_j\}_{j=1}^m$ es una base ortonormal de U , mientras que $\{y_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de U^\perp .
6. Sobre $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, por $\forall A, B \in V : \langle A, B \rangle := \text{tr}(B^t A)$.
 - (a) Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno real sobre V .
 - (b) Se definen ahora los subespacios $U_1 := \{\alpha I_n \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle\{I_n\}\rangle$, y $U_2 := \{A \in V : A + A^t = \Theta\}$. Deducir y caracterizar (por comprensión) U_1^\perp y U_2^\perp .
 - (c) Aplique el **TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL** a una matriz cualquiera $B \in V$, respecto a los subespacios introducidos en (b).
7. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ inyectiva. Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ de modo que $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle_1 := \langle T(u), T(w) \rangle$. Analice si $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ es un producto interno sobre V . ¿Se requiere de alguna HIPÓTESIS adicional (razonable), para ello? Indique cuál, si corresponde.
8. Sea V de dimensión finita, y U un subespacio de V . Pruebe que
 - (a) $\forall z \in V : \|\text{Proj}_U(z)\| \leq \|z\|$.
 - (b) (**Sentido geométrico de Proj_U: distancia a un subespacio**) Para cualquier $w \in V$, $\text{Proj}_U(w)$ es el único elemento de U que resuelve el PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN: $(PM) : \text{dist}(w, U) := \min_{z \in U} \|w - z\| = \|w - \text{Proj}_U(w)\|$.
 - (c) $x \in U$ es la mejor aproximación de $w \in V$ por elementos de U (i.e. x es la solución de (PM)) si y sólo si $\forall y \in U : \langle w, y \rangle = \langle x, y \rangle$ (i.e. $w - x \in U^\perp$).
9. Sea $U = \langle\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2)\}\rangle$ subespacio de $V := \mathbb{R}^4$. Determine $\min_{z \in U} \|z - (1, 2, 3, 4)\|$, indicando el “vector de mínimo” donde esto sucede.
10. Determinar $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$, y minimiza el valor de $\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$. Indique también este valor mínimo.
11. Sea V finito dimensional, y $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$ (i.e. P es idempotente) y $\forall z \in V : \|P(z)\| \leq \|z\|$. Pruebe que existe un subespacio U de V tal que $P = \text{Proj}_U$.

12. Sea V finito dimensional, U un subespacio de V , y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que:
 U es T -invariante si y sólo si $\text{Proj}_U \circ T \circ \text{Proj}_U = T \circ \text{Proj}_U$.
13. Demostrar las llamadas IDENTIDADES DE POLARIZACIÓN:
- Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, se cumple $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle = \frac{1}{4}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2)$.
 - Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, se cumple $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle = \frac{1}{4}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2 + i\|u+iw\|^2 - i\|u-iw\|^2)$.
14. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que
- $$\forall u, w \in V : \langle T(u), w \rangle = \frac{1}{4}(\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle) + \frac{i}{4}(\langle T(u+iw), u+iw \rangle - \langle T(u-iw), u-iw \rangle).$$
15. Considera $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que si $\forall u \in V : \langle T(u), u \rangle = 0$, entonces $T = \Theta$.
HINT: Primero muestre que $\forall u, w \in V : \langle T(u), w \rangle = 0$, con la ayuda del Ejercicio 14. Luego, concluya.
16. Considera $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x, y) := (-y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Muestre que $\forall u \in \mathbb{R}^2 : \langle T(u), u \rangle = 0$, y $T \neq \Theta$.
17. Sea $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que T es autoadjunta si y sólo si $\langle T(u), u \rangle \in \mathbb{R}$.
18. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que si T es autoadjunta y $\forall u \in V : \langle T(u), u \rangle = 0$, entonces $T = \Theta$.
REMARK: el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ya está cubierto en el Ejercicio 15, sin necesidad de pedir que T sea autoadjunta.
19. Considera $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x, y) := (2x - 3y, 3x + 2y)$. Demuestre que T no es autoadjunta, pero si es normal.
20. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que T es normal si y sólo si $\forall u \in V : \|T(u)\| = \|T^*(u)\|$. Luego, aplique esta caracterización para probar que si T es normal, entonces $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*)$. Si además V es finito dimensional, entonces
 - $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^*)$.
 - si (λ, u) es un autopar de T , entonces $(\bar{\lambda}, u)$ es un autopar de T^* .
 - vectores (espacios) propios de T asociados a valores propios distintos, son ortogonales.
21. Sea $n \in \mathbb{Z}_0^+$ fijo. Se define $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ por $\mathbb{K}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto T(z_1, \dots, z_n) := (0, z_1, \dots, z_{n-1})$. Determine T^* .
22. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que $T^* \in \mathcal{L}(V)$ existe. Demuestre $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.
23. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$, y U un subespacio de V . Pruebe que U es T -invariante si y sólo si U^\perp es T^* -invariante.
24. Sea V finito dimensional, y $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Pruebe que existe un subespacio U de V tal que $P = \text{Proj}_U$ si y sólo si P es autoadjunto.
25. Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjuntas. No es difícil establecer que $ST \in \mathcal{L}(V)$. Luego, demuestre que ST es autoadjunta sobre V si y sólo si $ST = TS$.
26. Sea V un espacio finito dimensional complejo. Demuestre que una aplicación lineal normal definido sobre V , es autoadjunta si y sólo si todos sus valores propios son reales.
27. Sea V un espacio vectorial complejo, dotado de un producto interior, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal tal que $T^9 = T^8$. Pruebe que T es autoadjunta y que $T^2 = T$.
28. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ normal, tal que $\{3, 4\} \subseteq \sigma(T)$. Pruebe que $\exists z \in V : \|z\| = \sqrt{2}$ y $\|T(z)\| = 5$.
29. Suponga que $\dim(V) \geq 2$. Pruebe que el conjunto de todos los operadores normales definidos sobre V no es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V)$.
30. Pruebe que no existe operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$ y $T(2, 5, 7) = (2, 5, 7)$.
31. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ normal, tal que $T(1, 1, 1) = (3i, 3i, 3i)$ y $(z_1, -5iz_2, 2iz_3) \in \text{Ker}(T) \setminus \{\theta\}$. Puebe que $iz_1 + 5z_2 - 2z_3 = 0$.
32. Sea $n \in \mathbb{Z}_0^+$ fijo. Considere las familias de funciones circulares $B_1 := \{\varphi_j(x) := \cos(jx)\}_{j=0}^n$ y $B_2 := \{\psi_j(x) := \sin(jx)\}_{j=1}^n$ en el espacio de las funciones continuas de valor real sobre $[-\pi, \pi]$, $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, provisto del producto interno usual $\forall f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) : \langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$.

- (a) Pruebe que B_1 y B_2 son conjuntos ortogonales, respectivamente.
- (b) Pruebe que $B := B_1 \cup B_2$ es también un conjunto ortogonal. Deducza una base ortonormal que genere el mismo espacio que genera B . Ahora considere $W := \langle B \rangle$, subespacio del espacio vectorial $V := \mathcal{C}([-\pi, \pi])$.
- (c) Definimos $D \in \mathcal{L}(W)$, para cada $f \in W$, por $D(f) := f''' - 2f' + 3f$. Determine D^* . ¿Es D autoadjunta?, ¿normal?
- (d) Definimos $T \in \mathcal{L}(W)$, para cada $f \in W$, por $T(f) := f'' - 5f$. Determine T^* . ¿Es T autoadjunta?, ¿normal?
33. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunta y U un subespacio de V que es T -invariante. Pruebe que:
- U^\perp es T -invariante.
 - $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ es autoadjunta.
 - $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ es autoadjunta.
34. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva, y considere U un subespacio de V , T -invariante. Demuestre que $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ es positiva.
35. Pruebe que la adición de dos aplicaciones lineales positivas sobre V , es también positiva.
36. Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es positiva, entonces $\forall k \in \mathbb{N} : T^k$ es también positiva.
37. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva. Pruebe que T es isomorfismo si y sólo si $\forall u \in V \setminus \{\theta\} : \langle T(u), u \rangle > 0$.
38. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, con la cual se define la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \rightarrow V$ tal que $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle_T := \langle T(u), w \rangle$. Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ es un producto interno sobre V si y sólo si T es un isomorfismo positivo (con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
39. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
- T es una isometría.
 - $\forall u, w \in V : \langle T^*(u), T^*(w) \rangle = \langle u, w \rangle$.
 - Para cualquier conjunto ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^m \subseteq V$, $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^m$ es también ortonormal.
 - Existe una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^n$ de V , tal que $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^n$ es también base ortonormal de V .
40. Exhibir un espacio vectorial V finito dimensional con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que exista un subespacio vectorial de V invariante respecto de T , cuyo complemento ortogonal no es T -invariante.
41. Sea V finito dimensional. Demuestre que toda aplicación normal definida sobre V , admite al menos una raíz cuadrada.
42. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$, $S \in \mathcal{L}(V)$ isometría, y $R \in \mathcal{L}(V)$ positiva, tales que $T = SR$. Pruebe que $R = \sqrt{T^*T}$.
43. De un ejemplo de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tal que 0 es el único valor propio de T , mientras que 0 y 5 son los valores singulares de T .
44. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, para cualquier $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, definida por $T(z_1, z_2) := (-4z_2, z_1)$.
- Determine los valores singulares de T .
 - Determine explícitamente una isometría $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.
45. Sea V finito dimensional. Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunta, entonces los valores singulares de T son iguales a los valores absolutos de los valores propios de T (repetidos según sea necesario).
46. Sea V finito dimensional. Pruebe o de un contra-ejemplo: Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces los valores singulares de T^2 son iguales a los cuadrados de los valores singulares de T .
47. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que si T es un isomorfismo, entonces existe una única isometría $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.
48. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que T es un isomorfismo si y sólo si 0 no es un valor singular de T .
49. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES PARA MATRICES CUADRADAS. Demuestre que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, existen dos matrices unitarias $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $P^*AQ = \Sigma := \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, siendo $\{\mu_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$
- la lista de valores singulares de A (considerando repeticiones, si corresponde).
- REMARK 1: Del enunciado, la relación entre A y Σ exhibe que estas matrices son EQUIVALENTES.

REMARK 2: La versión real de este resultado también es cierta. En este contexto, las matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales.

REMARK 3: También hay versiones de este resultado (para el caso real y complejo), para matrices rectangulares cualesquiera.

50. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que $\dim(\text{Im}(T))$ es igual al número de valores singulares no nulos de T .
HINT: Matrices equivalentes, tienen el mismo rango.

51. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$, de modo que tiene la siguiente DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES:

$$\forall z \in V : T(z) = \sum_{j=1}^n s_j \langle z, x_j \rangle y_j,$$

donde $\{s_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$ es el conjunto de valores singulares de T , mientras que $\{x_j\}_{j=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^n$ son bases ortonormales de V . Demuestre que:

(a) $\forall z \in V : T^*(z) = \sum_{j=1}^n s_j \langle z, y_j \rangle x_j.$

(b) $\forall z \in V : (T^*T)(z) = \sum_{j=1}^n s_j^2 \langle z, x_j \rangle x_j.$

(c) $\forall z \in V : \sqrt{T^*T}(z) = \sum_{j=1}^n s_j \langle z, x_j \rangle x_j.$

(d) Si T es un isomorfismo, entonces

$$\forall z \in V : T^{-1}(z) = \sum_{j=1}^n s_j^{-1} \langle z, y_j \rangle x_j,$$

52. Sea V finito dimensional y $S \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que S es una isometría si y sólo si todos los valores singulares de S son iguales a 1.