Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo III (521227)
Listado 5

1. Una ecuación muy importante en la física Matemática es la **ecuación de Laplace**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

   (a) Muestre que la función $u(x,y) = \arctan\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$ satiface la ecuación de Laplace.

   (b) Supongamos que la función $u = f(x,y)$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace. Muestre que la función
$$v = f(2x+y, x-2y)$$
   también la satisface.

2. Hallar una constante $a \in \mathbb{R}$ para la cual $u = y^3 + ax^2y$ satisface la ecuación de Laplace.

3. La sustitución
$$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$
   cambia $f(u,v)$ en $F(x,y)$. Aplicar en forma adecuada la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

   Lo mismo en $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x}$, sabiendo que f es de clase C^2.

4. Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = M(s,t)$, $y = N(s,t)$ definen u como función de s y t, es decir $u = F(s,t)$.

   (a) Aplicar una forma adecuada de la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial s}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$ en función $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial M}{\partial s}$, $\frac{\partial M}{\partial t}$, $\frac{\partial N}{\partial s}$, $\frac{\partial N}{\partial t}$.

   (b) Suponiendo que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, muestre que que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial M}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial M}{\partial s}\frac{\partial N}{\partial s}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)^2.$$

(c) Encontrar fórmulas parecidas para las derivadas parciales $\partial^2 F/(\partial s \partial t)$ y $\partial^2 F/\partial t^2$.

5. Sea $v(x,y) = y^n e^{-x^2/(4y)}$. Hallar un valor de la constante n tal que satisfaga la siguiente ecuación:
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

6. Dada $z = u(x,y)\, e^{ax+by}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Hallar valores de las constantes a y b tales que
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

7. Sea $F(t) = f\left(t\cos t, t^2, t\right)$, donde f es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0,0,0) = (2,3,5)$ .Encuentre $F'(0)$.

8. Muestre que la función $F(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)$ donde f es una función derivable en $\mathbb{R}$, satisface la ecuación diferencial parcial (EDP)
$$2xy\frac{\partial F}{\partial x} + \left(x^2+y^2\right)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

9. Si $f(x,y) = \ln\left(e^x + e^y\right)$, mostrar que f satisface la EDP
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$$

10. Defínase $f(x,y)$ como:
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan(y/x) - y^2 \arctan(x/y) & , \text{ si } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}.$$
Muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

11. Sea $u = f(x,y) = xy + \sqrt{2x^2+y^2}$, donde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. Encontrar $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ para $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

12. Sea $u = f(x,y)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Expresar $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ en términos de u_r y u_θ.

13. Dado $z = r^2\cos\theta$, donde r y θ son coordenadas polares, hallar z_x y z_y en el punto $\theta = \pi/4, r = 2$. Expresar z_r y z_θ en términos de z_x y z_y.

14. Se da una función F que involucra una composición de una cierta función (suficientemente diferenciable) f con otra cierta función g. Obtenga todas las derivadas parciales de orden 2 de la función F con respecto a x a y :

(a) $F(x,y) = f\left(ax^2 + bxy + cy^2\right)$, donde a, b y c son constantes reales.

(b) $F(x,y) = f\left(ax^2 + bxy + cy^2, dx^2 + exy + fy^2\right)$, donde a, b, c, d, e y f son constantes reales.

(c) $F(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) f\left(x^2, xy\right)$.

(d) $F(x,y) = f(x+y, xy, x)$.

(e) $F(x,y) = x^2 f\left(y^2, y\right) + y^2 f\left(x, x^2\right)$.

(f) $F(x,y) = \int_{f(x,y)}^{y^2} g(t)\, dt$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

15. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en el punto A.

(a) $x^2 + y^3 = 5,\ A = (-2, 1)$.

(b) $3x^2y + e^{xy} - \cos(\frac{\pi y}{2}) = 1, A = (0, 1)$.

(c) $x^2 - xy^3 - y^5 = 1, A = (-1, 1)$.

16. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel en el punto A.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ A = (1, 1, -1)$.

(b) $x^5 + xz^4 + yz + y^2 = 0,\ A = (-1, 1, 0)$

(c) $e^{2x+z} \sec(2y) + xy - z = 3, A = (1, 0, -2)$.

17. Determinar ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $y = 2$ en el punto $(1, 2, 2)$.

18. Hallar un par de ecuaciones para la recta que es tangente a las dos superficies

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \text{ y } z = e^{x-y} \text{ en el punto } (1, 1, 1).$$

19. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto (x_0, y_0, z_0), donde a es una constante positiva. Muestre que el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los tres planos coordenados es $9a^3/2$ unidades al cubo.