Otras nociones topológicas.

- **Espacios métricos discretos.**
- **Interior de un conjunto.**
- **Frontera de un conjunto.**
- **Abiertos relativos.**
- **Conjuntos compactos.**

Espacios métricos discretos.

Def.: Un espacio métrico es **discreto** si todos sus puntos son aislados.

Ejemplo: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ son espacios métricos discretos.

Dem.: Sea $n \in \mathbb{N}$ (para $\mathbb{Z}$ es similar).

Notemos que en $\mathbb{N}$, $B_r(n) = \{m \in \mathbb{N} : |m - n| < r\}$. Entonces,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{\frac{1}{2}}(n) = \{n\} \implies n$ es punto aislado $\implies \mathbb{N}$ es discreto. $\square$

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$ no tiene puntos aislados.

Dem.: $\forall p \in \mathbb{Q}$, $\forall r > 0$,

$$B_r(p) = \{q \in \mathbb{Q} : |q - p| < r\} = (p - r, p + r) \cap \mathbb{Q}.$$

Esa bola contiene otros puntos de $\mathbb{Q}$ además de p. En efecto, por ejemplo, por la **densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$**,

$$\exists q \in \mathbb{Q} : \ p < q < p + r \implies \exists q \in B_r(p) : \ q \neq p.$$

$\implies \forall p \in \mathbb{Q}$, $\forall r > 0$, $B_r(p) \neq \{p\} \implies \mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados. $\square$

Interior de un conjunto.

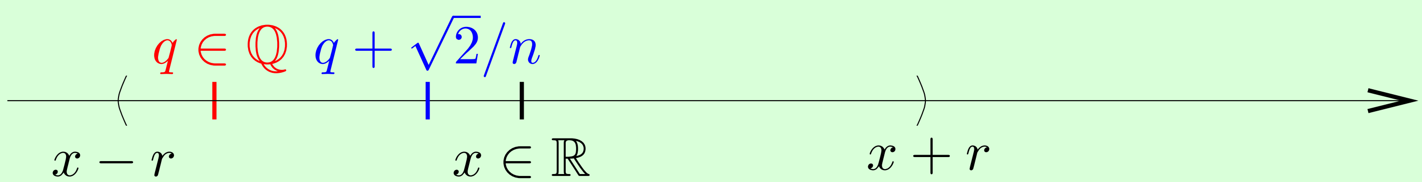
Def.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. El **interior** de E, que denotamos $\operatorname{int} E$, es el conjunto de **puntos interiores** de E.

$\boxed{\textbf{Ej.}}$: Demuestra que si E es abierto, entonces $\operatorname{int} E = E$.

Ej.: Sea $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ el conjunto de los **números irracionales**.
Demuestra que $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$.

Sol.: Demostraremos que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ B_r(x) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset.$

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Por la **densidad de** $\mathbb{Q}$ **en** $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q} : x - r < q < x$.



Por la **prop. arquimediana**, $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{\sqrt{2}}{x-q} \implies x > q + \frac{\sqrt{2}}{n} > q > x - r$.

Como $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$ ($\boxed{\textbf{Ej.}}$), entonces $B_r(x) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset \implies \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ B_r(x) \not\subset \mathbb{Q} \implies \operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$. $\square$

Frontera de un conjunto.

Def.: Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. La **frontera** de E es el conjunto

$$\partial E := \{x \in X : \ \forall r > 0, \quad B_r(x) \cap E \neq \emptyset \ \text{ y } \ B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset\}.$$

Ej.: Sea $X = \mathbb{R}$. Demuestra que $\partial(0,1) = \{0,1\}$ y $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Ej.: Sea $E \subset X$. Demuestra que:

- $X = \operatorname{int} E \,\dot\cup\, \partial E \,\dot\cup\, \operatorname{int} E^c$;
- $\overline{E} = E \cup \partial E = \operatorname{int} E \,\dot\cup\, \partial E$;
- $\partial E = \partial E^c$ es un conjunto cerrado.

Ej.: Sea $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demuestra que $\partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Sol.: De manera análoga a lo hecho en $\mathbb{Q}$, se demuestra que toda bola en $\mathbb{R}$ contiene puntos de $\mathbb{Q}$ y puntos de $\mathbb{I}$ (**Ej.**). Entonces, $\partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{I} = \mathbb{R}$. $\square$

Abiertos relativos.

Sea d una métrica en X. Sea $Y \subset X$ dotado de la métrica inducida d.

Sea $E \subset Y$. E es abierto **en** Y si $\forall x \in E,\ \exists r > 0:\ B_r^Y(x) \subset E$, donde

$$B_r^Y(x) := \{y \in Y:\ d(y,x) < r\} = B_r^X(x) \cap Y.$$

Teor.: Sea $E \subset Y$. E es abierto en Y si y sólo si $\exists G$ abierto en X tal que $E = G \cap Y$.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea E abierto en Y $\Longrightarrow$ $\forall x \in E,\ \exists r_x > 0:\ B_{r_x}^Y(x) \subset E$.

$\boxed{\text{Ej.}}$

$$\Longrightarrow\ E = \bigcup_{x \in E} B_{r_x}^Y(x) = \bigcup_{x \in E} \left(B_{r_x}^X(x) \cap Y\right) = \underbrace{\left(\bigcup_{x \in E} B_{r_x}^X(x)\right)}_{G} \cap Y$$

$\Longrightarrow\ E = G \cap Y$ con $G = \bigcup_{x \in E} B_{r_x}^X(x)$ **abierto en** X.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $E = G \cap Y$ con G abierto en X. Veremos que E **es abierto en** Y.

Sea $x \in E = G \cap Y$. Como G es abierto en X, $\exists r > 0:\ B_r^X(x) \subset G$.

$\Longrightarrow\ \exists r > 0:\ B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = E$.

$\Longrightarrow\ E$ es abierto en Y. $\square$

Conjuntos compactos.

Def.: Sea d una métrica en X y $E \subset X$.

- $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un **cubrimiento** de E si $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.
  Si los G_α son abiertos $\forall \alpha \in A$, se dice que es un **cubrimiento por abiertos.**
- Un cubrimiento es **finito** o **infinito**, según A sea **finito** o **infinito.**
- Sea $B \subset A$. $\{G_\alpha\}_{\alpha \in B}$ es un **subcubrimiento** de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si $E \subset \bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha$.

Def.: Un conjunto K es **compacto** si **todo** cubrimiento por abiertos de K tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplo: Si K es finito, entonces es compacto.

Dem.: Sean $K = \{x_1, \ldots, x_N\}$ y $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento por abiertos de K

$\Longrightarrow \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

$\Longrightarrow \forall n = 1, \ldots, N, \ \exists \alpha_n \in A : \ x_n \in G_{\alpha_n}$

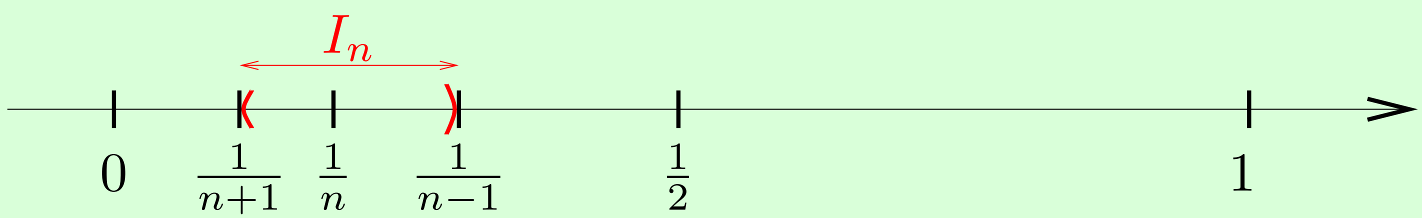
$\Longrightarrow K = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_{\alpha_n}$

$\Longrightarrow \{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^{N}$ es un subcubrimiento finito $\Longrightarrow$ K es compacto. $\square$

Ejemplo: $E := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ no es compacto.

Para demostrar que un conjunto **no es compacto**, basta encontrar **un** cubrimiento por abiertos del conjunto que no tenga ningún subcubrimiento finito.

Dem.: En este caso construiremos un cubrimiento de E por intervalos abiertos tales que cada uno contenga uno y sólo uno de los números $\frac{1}{n}$.



$\forall n \in \mathbb{N}$, sea $I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \implies I_n \cap E = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Entonces $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, de manera que la famiia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos de E.

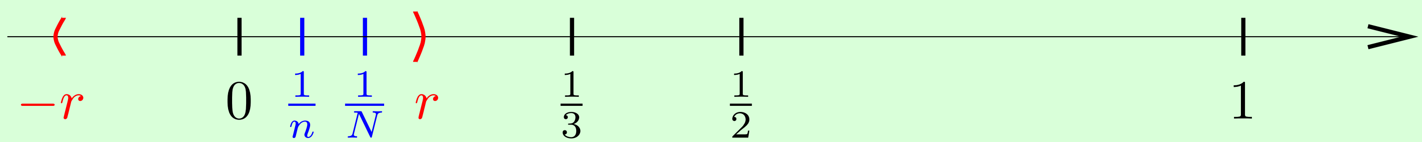
Como además cada intervalo contiene uno y sólo uno de los números $\frac{1}{n}$, cualquier colección finita de I_n sólo contendrá finitos términos de E y por lo tanto no será un subcubrimiento. Entonces, E no es compacto. $\square$

Ejemplo: $F := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ es compacto.

Para demostrar que un conjunto F **es compacto**, hay que considerar un cubrimiento por abiertos de F **arbitrario** y encontrar un subcubrimiento finito. No basta considerar un cubrimiento particular; debe ser un cubrimiento **cualquiera.**

Dem.: Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento por abiertos de F.

- Como $0 \in F \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, $\exists \alpha_0 \in A:\ 0 \in G_{\alpha_0}$.
- Como G_{α_0} es abierto, $\exists r > 0:\ B_r(0) := (-r, r) \subset G_{\alpha_0}$.



Por la **prop. arquimediana**, $\exists N \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{N} < r \implies \forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < r$

$\implies \forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \in (-r, r) \subset G_{\alpha_0}$.

- $\forall n < N$, sea $\alpha_n \in A:\ \frac{1}{n} \in G_{\alpha_n}$

Entonces, $F = \left\{\frac{1}{n},\ n < N\right\} \cup \left\{\frac{1}{n},\ n \geq N\right\} \cup \{0\} \subset \bigcup_{n=0}^{N-1} G_{\alpha_n}$

$\implies \{G_{\alpha_n}\}_{n=0}^{N-1}$ **es un subcubrimiento finito de** $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$\implies F$ es compacto. $\square$