UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 2. 9–Ago.–2019; 12:15.

Nombre y apellidos	
Matrícula	

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Nota
Puntaje						

1. Calcula justificando rigurosamente cada paso:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

   b) $\displaystyle\limsup\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ y $\displaystyle\liminf\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

2. Sean $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

   a) Demuestra que si $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ es una sucesión acotada y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

   b) Aplica lo demostrado en (a) para concluir el *Criterio de Comparación al Límite*:

   Si $\dfrac{a_n}{b_n} \to L \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

   c) Demuestra que si $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ es una sucesión acotada y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

3. Sea $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ continua. Demuestra que si hay un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) > 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

   Sugerencia. Demuestra que hay un intervalo alrededor de c donde $f(x) > \dfrac{f(c)}{2}$ y usa la monotonía de la integral.

4. a) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ para todo $x \geq 0$.

   b) Demuestra que la serie anterior converge uniformemente en $[0, a]$ para todo a tal que $0 < a < 1$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funciones uniformemente continuas tales que $f_n \to f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente. Demuestra que f es uniformemente continua.