La Derivada (parte 1)

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

La derivada

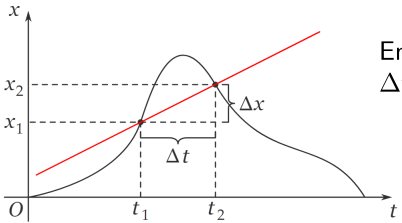
Velocidad media

Consideremos un móvil que se mueve en línea recta y cuyo movimiento está determinado por la **función posición**

$$x : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto x(t)$$

En el intervalo $[t_0, t]$ se define la **velocidad media** como

$$v_m = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$



Entonces, si $\Delta x = x(t) - x(t_0)$ y $\Delta t = t - t_0$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La derivada

Velocidad instantánea

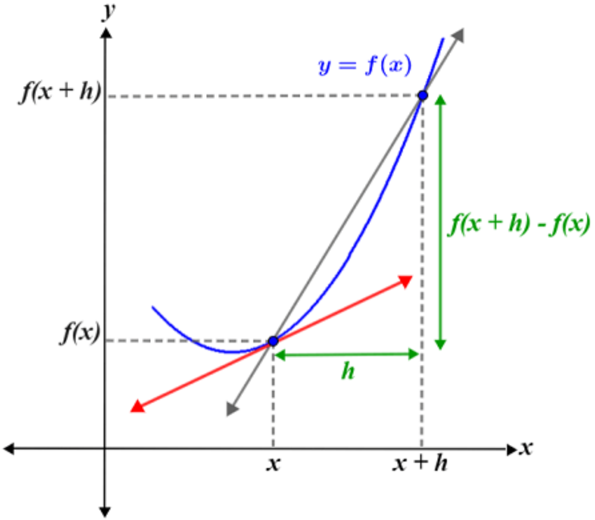
A medida que $\Delta t = t - t_0$ se va haciendo más pequeño, la velocidad del móvil casi no cambia. Esto hace razonable que se defina la **velocidad instantánea** en t_0 como

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

que es la *derivada* de la función posición en el instante t_0 (asumiendo que el límite existe).

La derivada

Pendiente de la recta tangente



Definición

Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ una función con $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ un intevalo abierto y $a \in I$. La **derivada** de f en el punto a es el valor del límite de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Cuando el límite (1) existe, como número real, lo denotamos por $f'(a)$. Si no existe, se dice que f **no es derivable** en a.

Observación. Por Teorema de Sustitución de límites con $h = x - a$, si $h \to 0$ entonces $x \to a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geométricamente, la derivada de f en el punto a determina la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de esta recta es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ejemplo 1. Si $f(x) = x^2$, su derivada en 1 es

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Más en general, para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

Ejemplo 2. Si $f(x) = x^3$ entonces su derivada en $a \in \mathbb{R}$ es...

La derivada

Función derivada

Definición

La **función derivada**, f', respecto a la variable x, está definida por

$$\begin{aligned} f' : A \subseteq \mathrm{Dom}(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

El dominio de f', denotado por A, es el conjunto de todos los puntos del dominio de f tal que el límite anterior existe.

Notación. La derivada de f respecto a x se denota por $f'(x)$ o $\dfrac{df(x)}{dx}$. Cuando $y = f(x)$, se establece una relación de variable dependiente, y, e independiente, x. Su función derivada se denota $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Derivadas de funciones

Ejemplo 3. Sea $f(x) = x^2$. Del ejemplo 1, tenemos que su derivada es $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En notación de *Leibniz*

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Más en general, $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4. Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$, en cada punto donde exista.

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$$

Ejemplo 5. Calcular la derivada de la función $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Sea $x \in \mathbb{R}$, notar que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\sin(x) \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Así, $\dfrac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

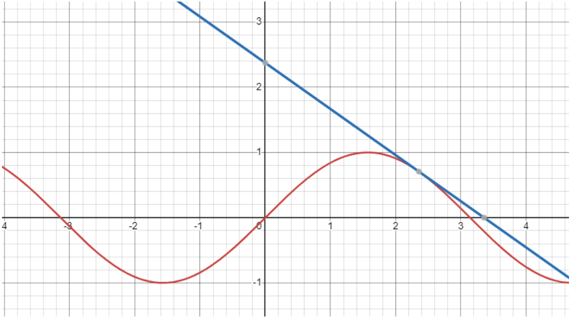
¿Cual sería la recta tangente a la curva $y = \sin(x)$ en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

Derivadas de funciones

Recta tangente a la gráfica de $y = \sin(x)$

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sin(x)$ en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Tarea. Mostrar que $\dfrac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

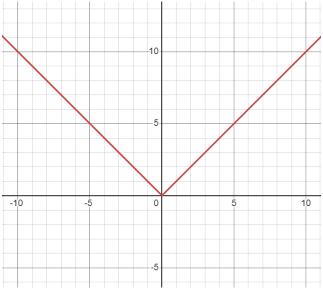
Derivadas de funciones

Función no derivable en un punto

Ejemplo 6. Sea $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. La función no es derivable en $a = 0$ ya que el límite

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe. La gráfica de $y = |x|$ no tiene recta tangente en el punto $(0, 0)$, como *se puede ver* en la imagen:



Observación. De la definición de derivada de una función, los límites laterales del límite (1) definen la **derivada por la derecha** de f y la **derivada por la izquierda** de f cuando $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$, resp. Estos son denotados por $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$, respectivamente. Así

$$f'(a) \text{ existe } \iff f'_+(a) = f'_-(a)$$

Ejemplo. Analizar la derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3x + 5 & x > 1 \end{cases}$$

en el punto $a = 1$. ¿Es continua en $a = 1$?