UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

FPV/fpv 09.12.24 (11:00) **PAUTA Pauta ER** **MAT 225212**

P1 (**8 + 8pts.**)

1. Resolver: $S = \Big\{ z \in \mathbb{C} : z^2 = \bar{z}^2 \Big\}$
2. Determinar las partes real e imaginaria de $\alpha \in \mathbb{C}$ si $\alpha = \dfrac{(1+i)^5 \mathrm{Ln}(1-i)}{(1-i)^5 \sinh(\frac{\pi}{2}+i)}$

Solución Propuesta

1. Como $\bar{z}^2 = \overline{z^2}$ e $Im(z^2) = z^2 - \overline{z^2} = 4xy$, se tiene
$$S = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 0 \} = \{ x + iy : \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \}.$$
2. Desarrollo de cada factor
   - $\mathrm{Ln}(1-i) = \ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}$
   - $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2i}{2}\right)^{4+1} = i$
   - $\sinh(\frac{\pi}{2}+i) = \cosh(1)$.

   se infiere que $\alpha = \frac{\pi}{4\cosh(1)} + i\frac{\ln(2)}{2\cosh(1)}$

P2 (**8 + 8 pts.**) Determinar el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

1. $\mathbf{f(z)} = \dfrac{\sin(\mathbf{z^2+1})}{\mathbf{iz^3+1}}$
2. $\mathbf{g(z)} = \mathrm{Ln}(\mathbf{z^2+1})$

Solución Propuesta

1. Como $z \longmapsto \sin(z^2+1)$ es compuesta de funciones enteras. f es continua en $\mathbb{C}$ salvo en los ceros $p(z) = iz^3 + 1$. Finalmente como
$$p^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, -i \big\}.$$
Se concluye $\mathrm{Dom}(f) = \big\{ z \in \mathbb{C} : z \notin p^{-1}\big(\{0\}\big) \big\}$.
2. Siguiendo la indicación dada $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{C} - \{ iy \in \mathbb{C} : |y| \geq 1 \}$

P3 (**8 + 8 pts.**)

1. Si $a = a(x,y)$ es una *función armónica* sobre un conjunto V del plano.
Entonces, la función f definida por
$$f(z) := \frac{\partial a}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial a}{\partial y}(x,y)$$
es *holomorfa* en $D := \big\{ x + iy : (x,y) \in V \big\}$.
2. Determinar la constante $a > 0$ tal que $\mathbf{u(x,y)} = \mathbf{e^{-ax}} \cos(\mathbf{3y})$ sea *armónica* sobre $\mathbb{R}^2$. Enseguida, para ese valor de a determine la función *entera* $\mathbf{f}$ tal $\mathbf{u(x,y)} = \mathrm{Re}(\mathbf{f})$.

Solución Propuesta

1. Primero V de ser un dominio de $\mathbb{R}^2$ y $u \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$. Enseguida, se identifican las funciones componentes de f, es decir, $u = a_x$ y $v = -a_y$ las cuales son funciones con derivadas parciales continuas. Finalmente sobre V se verifica

- $a_{xx} = -a_{yy} \Longrightarrow u_x = v_y$
- $a_{yx} = a_{xy} \Longrightarrow u_y = -v_x$.

En consecuencia, $u, v \in C^1(V)$ y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir, f es holomorfa sobre el dominio D.

2. (1º) Observamos
$$\triangle u(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow (a^2-9)u(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a| = 3.$$
Debemos elegir $a = 3$, pues, la constante debe ser positiva.

(2º) Como u es armónica en todo $\mathbb{R}^2$, ella es la parte real de una función holomorfa, y sabemos que $e^{-3z} = e^{-3x}\cos(3y) - ie^{-3x}\sin(3y)$. En consecuencia, $f(z) = e^{-3z}$.

P4 (8 + 8 pts.) Determine el valor de las siguientes integrales, fundamentando su desarrollo en los teoremas o lemas pertinentes. En caso contrario: <u>respuesta no admisible.</u>

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{a} + \cos(\mathbf{t})}, \ \mathbf{a > 1} \qquad\qquad (VP) \quad \mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\mathbf{4x})}{\mathbf{1+x^2}}\mathbf{dx}$$

Solución Propuesta

1. Si $|z| = 1$ infiere que $\cos(t) = \frac{1+z^2}{2z}$. Realizando la transformación $z = e^{it}$ se tiene
$$I = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2a + 1}$$
Enseguida, $q(z) = z^2 + 2a + 1 = (z+a)^2 - (\sqrt{a^2-1})^2$. Los polos involucrados son reales, pues, $a > 1$. Sea $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$ y observamos
   - Si $z_1 \geq 1$ entonces $0 \geq 2(1+a)$, es decir, $a \leq -1$, lo que contradice que $a > 1$.
   - Si $z_1 \leq -1$ entonces $0 \leq 2(1-a)$, es decir, $a \leq 1$, nuevamente una contradicción.

   Se concluye que $|z_1| < 1$ y $|-a-\sqrt{a^2-1}| > a > 1$. Finalmente, gracias al Teorema de los Residuos de Cauchy-Jordan:
$$\mathrm{Res}_1\big(q(z), z_1\big) = \frac{1}{q'(z_1)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \quad \wedge \quad \mathrm{I} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. Como $\cos(z)$ no es acotada, se debe, utilizar la Fórmula de Euler y definir
$$J = \mathrm{Re}(J_1) \quad \text{donde} \quad J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i4x}}{1+x^2}dx$$
Definimos $F(z) = \frac{e^{i4z}}{1+z^2}$, función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en los polos $z = \pm i$.
La función F satisface las hipótesis del Lema de Jordan, luego
$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} F(z)dz = 0, \quad \text{donde} \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi.$$
Además, si $\Gamma_R = \overrightarrow{-R0} \cup \overrightarrow{0R}$ entonces para $R > 1$
$$\oint_{\gamma_R \cup \Gamma_R} F(z)dz = (2\pi i)\mathrm{Res}_1\big(F(z), i\big) = (2\pi i)\frac{e^{i4z}}{2z}\bigg|_{z=1} = \frac{\pi}{e^4}.$$
Finalmente como
$$\oint_{\gamma_R \cup \Gamma_R} F(z)dz = \oint_{\gamma_R} F(z)dz + \oint_{-R}^{R} F(x)dx$$
y pasando al límite y tomado parte real se tiene de la definición de Valor principal que $\mathrm{I} = \pi e^{-4}$.