Clase 14: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre I-2024

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x_1, x_2 \in I$. Diremos que:

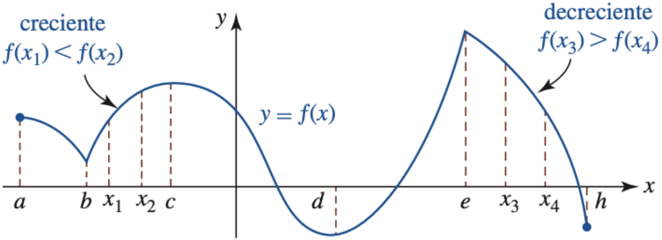
1. f es *estrictamente creciente* en I si

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. f es *estrictamente decreciente* en I si:

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Ejemplo



- f es estrictamente creciente sobre los intervalos $]b, c[$ y $]d, e[$.
- f es estrictamente decreciente sobre $]a, b[,]c, d[$ y $]e, h[$.

Teorema

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto I.

1. Si $f'(x) > 0$, para cada $x \in I$, entonces f es creciente en I.
2. Si $f'(x) < 0$, para cada $x \in I$, entonces f es decreciente en I.

Demostración: Basta discutir la demostración en el caso 1.

Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Debemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Consideremos f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y observemos que f satisface las hipótesis del TVM. Luego, $\exists c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ se tiene que $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Así, $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Ejemplos

1. Mostrar que la función $f(x) = \arctan(2x)$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

2. Determinar los intervalos donde la función f definida por

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$$

   es creciente o decreciente.

Definición

Sea f una función y $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un **máximo absoluto** en a si

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(a) > f(x).$$

2. f alcanza un **mínimo absoluto** en a si

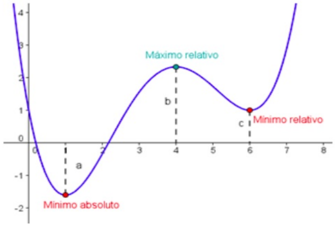
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(a) < f(x).$$

El número $f(a)$ se llama **valor de máximo absoluto** de f (o de **mínimo absoluto**, según corresponda). En general, se habla de **extremos absolutos**.

Definición

Sea f una función y $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Diremos que:

1. f alcanza un **máximo relativo (local)** en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ \ f(x_0) \geq f(x)$$
2. f alcanza un **mínimo relativo (local)** en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ \ f(x_0) \leq f(x)$$

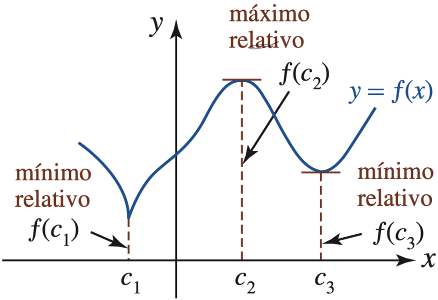


Localización de extremos relativos

Pregunta

Hemos llegado al planteamiento de una pregunta evidente:

¿Cómo se encuentran los extremos relativos (absolutos) de una función?



Puntos críticos

Definición

Sea f una función y $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Diremos que x_0 es un **punto crítico** de f si: $f'(x_0) = 0$, o bien, $f'(x_0)$ no existe.

Ejemplo

Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones:

- $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
- $h(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Teorema

Sea f una función derivable. Si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico.

¡Importante! El recíproco del Teorema previo en general no es cierto. Por ejemplo, en $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ es un punto crítico pero no es máximo ni mínimo relativo.

Demostración: Supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0.

- Si $f'(x_0)$ no existe, entonces por definición x_0 es un punto crítico.
- Si $f'(x_0)$ existe, hay 3 posibilidades: $f'(x_0) > 0, f'(x_0) < 0$ o bien $f'(x_0) = 0$.

Mostraremos que no puede suceder que $f'(x_0) > 0$ y $f'(x_0) < 0$.

Supongamos que $f'(x_0) > 0$. Como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tenemos que $\forall x :\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

Luego,

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

lo que muestra que x_0 no es un extremo relativo. Si suponemos que $f'(x_0) < 0$ la demostración procede de manera análoga. Por lo tanto, solo puede pasar que $f'(x_0) = 0$ y hemos terminado.

Localización de puntos extremos

Si consideramos la discusión anterior, y ya tenemos determinado el conjunto de puntos críticos de la función, la pregunta que surge es la siguiente:

¿Existe algún criterio que me permita decidir cuál (o cuales) de esos puntos son puntos de extremo relativo o absoluto?.

Criterio de la primera derivada

El siguiente criterio es una consecuencia directa del Teorema de monotonía mostrado en la página 4.

Teorema (Criterio de la 1era derivada)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I (I abierto) y sea $c \in I$.

1. Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces c es un punto de máximo relativo de f.
2. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces c es un punto de mínimo relativo de f.

Resolver

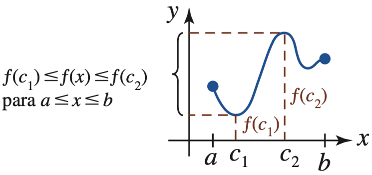
Determine los puntos donde las siguientes funciones alcanzan máximos y/o mínimos relativos. Indicar además, intervalos de monotonía de f.

1. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$
2. $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$
3. $f(x) = x^2 e^x$

Extremos absolutos en un cerrado

Teorema (Teorema de los valores extremos)

Una función f continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, siempre tiene un máximo y un mínimo absoluto sobre dicho intervalo.



En este caso, basta encontrar los puntos críticos en $]a, b[$. Evaluar dichos puntos en f, incluyendo también los extremos del intervalo (ya que los extremos absolutos podrían estar en la frontera del intervalo), comparar y decidir quien es el mayor o menor de la lista.

Criterio de la 2^{da} derivada

Otra forma de detectar si un punto crítico es máximo o mínimo relativo, está dado por el siguiente resultado:

Teorema (Criterio de la 2^{da} derivada)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable y $a \in I$ un punto crítico de f.

1. $f''(a) > 0 \Longrightarrow a$ es un punto de mínimo relativo.
2. $f''(a) < 0 \Longrightarrow a$ es un punto de máximo relativo.

Observación

Si $f''(a) = 0$, el criterio no proporciona información. Para ver esto, basta considerar las funciones: $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$. Para cada una de ellas, $x = 0$ es crítico con segunda derivada nula y, en cada caso, la naturaleza es distinta.

Criterio de la 2^{da} derivada

Demostración (1):

Por hipótesis, tenemos:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

Luego, en una vecindad $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0 tenemos

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

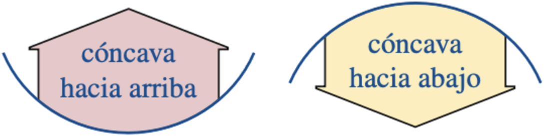
Así, $x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f'(x) > 0$. Además, $x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f'(x) < 0$.

Luego, f' cambia de positiva a negativa en x_0 y así x_0 es un punto de máximo relativo.

Concavidad

Al graficar una función, es importante considerar la forma en como se *curva* la gráfica, para ello se estudiará el concepto de **concavidad**.

Esta propiedad tiene que ver con la idea de *si la curva se abre hacia arriba o hacia abajo*.



Criterio de Concavidad

El criterio para determinar concavidad de un gráfico en un intervalo, está dado por el presente Teorema.

Teorema

Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función que admite derivadas de orden 2. Luego, las siguientes son ciertas:

1. Si $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Puntos de inflexión

Ejemplo

Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. Determinar los extremos relativos de f y los intervalos en donde el gráfico de f es cóncavo hacia arriba y cóncavo hacia abajo.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Si la concavidad de f cambia en $c \in I$, el punto c recibe el nombre de **punto de inflexión** de f.

En el ejemplo anterior, los puntos $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$ son puntos de inflexión.