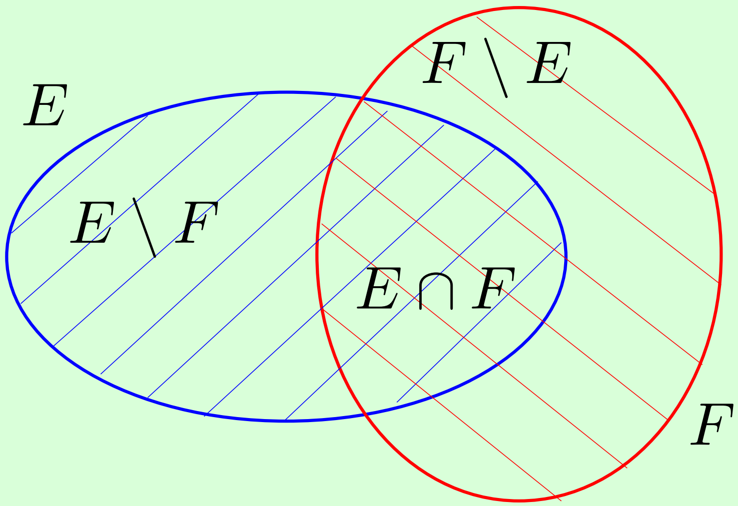
Análisis Real II (525.302)

Pauta de corrección

Examen de repetición, 2021

1. Demuestra que $\forall E, F \in \mathscr{X}, \quad \mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

Sol.: Sean $E, F \in \mathscr{X}$.



$$E = (E \cap F) \,\dot\cup\, (E \setminus F)$$
$$\Longrightarrow \mu(E) = \mu(E \cap F) + \mu(E \setminus F)$$

$$F = (E \cap F) \,\dot\cup\, (F \setminus E)$$
$$\Longrightarrow \mu(F) = \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E)$$

$$E \cup F = (E \setminus F) \,\dot\cup (E \cap F) \,\dot\cup (F \setminus E)$$
$$\Longrightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E)$$
$$\Longrightarrow \mu(E \cap F) + \mu(E \cup F) = \underbrace{\mu(E \cap F) + \mu(E \setminus F)}_{\mu(E)} + \underbrace{\mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E)}_{\mu(F)}$$
$$\Longrightarrow \mu(E \cap F) + \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F). \quad \blacksquare$$

2. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue, sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_{(-\infty,\, x]} f\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Demuestra que F es continua.

Sugerencia: Puedes usar, sin necesidad de demostrarlo, que si $x_n \xrightarrow{n} x$, entonces $\chi_{(-\infty,\, x_n]} \xrightarrow{n} \chi_{(-\infty,\, x]}$ c.t.p.

Sol.: Sea $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que F es continua en x si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \xrightarrow{n} x$, se tiene que $F(x_n) \xrightarrow{n} F(x)$.

Por lo tanto, demostraremos esta última propiedad.

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \xrightarrow{n} x$.

De acuerdo a la sugerencia, $\chi_{(-\infty,\, x_n]} \xrightarrow{n} \chi_{(-\infty,\, x]}$ c.t.p.

$\Longrightarrow$ $\chi_{(-\infty,\, x_n]} f \xrightarrow{n} \chi_{(-\infty,\, x]} f$ c.t.p.

Además, como $\left|\chi_{(-\infty,\, x_n]}\right| \leq 1$, se tiene que $\left|\chi_{(-\infty,\, x_n]} f\right| \leq |f|$, integrable

$\overset{\text{T.C.D.}}{\Longrightarrow}$ $\int \chi_{(-\infty,\, x_n]} f\, d\lambda \xrightarrow{n} \int \chi_{(-\infty,\, x]} f\, d\lambda \Longrightarrow F(x_n) \xrightarrow{n} F(x)$. $\blacksquare$

3. Sea $F: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida $\forall t \in [0,1]$ por

$$F(t) := \int_1^\infty \frac{1}{t+x^2}\,dx.$$

Calcula $F'(0)$ justificando rigurosamente cada paso.

Sol.: Aplicaremos el teorema de derivabilidad de una integral respecto de un parámetro.

Teor.: Si (i) $\exists t_0 \in [a,b] : f(\cdot, t_0) \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$,

(ii) $f(x,t)$ es derivable respecto de t $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in X$ y

(iii) $\exists\, g \in L(X, \mathscr{X}, \mu) : \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in X$,

entonces, $\forall t \in [a,b]$, se tiene que:

- $f(\cdot, t)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$,
- F es derivable y
- $\dfrac{dF}{dt}(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int f(x,t)\,d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$ $\forall t \in [a,b]$.

Sean $X := [1,+\infty)$, $\mathscr{X}$ la σ-álgebra de Borel en X, λ la medida de Lebesgue en X y $f(x,t) := \frac{1}{t+x^2}$, $t \in [0,1]$, $x \in X$.

(i) $\exists t_0 \in [0,1]$ tal que $f(\cdot, t_0)$ es integrable en X.

En efecto, sea $t_0 := 0$. Entonces

$$\int_X |f(\cdot,t_0)|\,d\lambda = \int_1^{+\infty} |f(x,0)|\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

(ii) $f(x,t)$ es derivable respecto de t $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in X$.

En efecto, $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{(t+x^2)^2}$ $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \geq 1$.

(iii) $\exists g \in L(X,\mathscr{X},\lambda) : \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in X$.

En efecto, sea $g(x) := \frac{1}{x^4}$, $x \geq 1$. Entonces:

- $g \in L(X,\mathscr{X},\lambda)$, pues $\int_X |g|\,d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$;
- $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-\frac{1}{(t+x^2)^2}\right| \leq \frac{1}{(x^2)^2} = g(x)$ $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \geq 1$.

Entonces, por el teorema de derivabilidad de una integral respecto de un parámetro:

$$F'(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\,dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

4. Sean $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, medibles, tales que $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida y $g_n \xrightarrow{n} g$ en medida. Demuestra que $f_n + g_n \xrightarrow{n} f + g$ en medida.

Sol.: Dados $\alpha > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, sean

$$E_n(\alpha) := \{x \in X : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \geq \alpha\},$$
$$F_n(\alpha) := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\},$$
$$G_n(\alpha) := \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \alpha\}.$$

Sea $\alpha > 0$. Por hipótesis, $\mu(F_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0$ y $\mu(G_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0.$
Debemos demostrar que $\mu(E_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0.$

Como, $|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$,
es fácil chequear que $E_n(\alpha) \subset F_n(\frac{\alpha}{2}) \cup G_n(\frac{\alpha}{2})$. **Ej.**
$\Longrightarrow \mu(E_n(\alpha)) \leq \mu(F_n(\frac{\alpha}{2})) + \mu(G_n(\frac{\alpha}{2}))$

$f_n \xrightarrow{n} f$ en medida $\Longrightarrow \mu(F_n(\frac{\alpha}{2})) \xrightarrow{n} 0.$
$g_n \xrightarrow{n} g$ en medida $\Longrightarrow \mu(G_n(\frac{\alpha}{2})) \xrightarrow{n} 0.$
$\Longrightarrow \mu(E_n(\alpha)) \xrightarrow{n} 0 \Longrightarrow f_n + g_n \xrightarrow{n} f + g$ en medida. ■

$\boxed{\textbf{Ej.}}$ Sea $x \in E_n(\alpha)$. Entonces $|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) - g(x))| \geq \alpha$

$\Longrightarrow \ |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$ o $|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$,

pues, si ambos fueran menores que $\frac{\alpha}{2}$, entonces

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) - g(x))| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\alpha/2} + \underbrace{|g_n(x) - g(x)|}_{<\alpha/2} < \alpha.$$

Si $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$, entonces $x \in F_n(\frac{\alpha}{2})$.

Si $|g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$, entonces $x \in G_n(\frac{\alpha}{2})$.

Por el párrafo anterior, $x \in F_n(\frac{\alpha}{2})$ o $x \in G_n(\frac{\alpha}{2})$ y, por lo tanto,

$x \in F_n(\frac{\alpha}{2}) \cup G_n(\frac{\alpha}{2})$.

5. Sean $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, $Z := X \times Y$, $\mathscr{Z}$ la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles de Z y π la medida producto.

   Dado $E \in \mathscr{Z}$, demuestra que:

   a) el conjunto $\{x \in X : \nu(E_x) > 0\}$ es medible y

   b) si $\pi(E) = 0$, entonces $\mu(\{x \in X : \nu(E_x) > 0\}) = 0$.

   Sugerencia: Usa el Lema 10.8 del texto de Bartle (o, lo que es lo mismo, el lema de la pag. 5 de `S14C1.pdf`).

Sol.: El lema mencionado en la sugerencia dice lo siguiemte:

Lema: Sean μ y ν σ-finitas. Dado $E \in \mathscr{Z}$, sean

$$\begin{aligned} f:\ X &\to \overline{\mathbb{R}}, \\ x &\mapsto \nu(E_x), \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g:\ Y &\to \overline{\mathbb{R}}, \\ y &\mapsto \mu(E^y). \end{aligned}$$

Entonces, f y g son medibles y

$$\int_X f\,d\mu = \pi(E) = \int_Y g\,d\nu.$$

a) Como, de acuerdo al lema, $f(x) = \nu(E_x)$ es una función medible, por la definición de función medible, $\{x \in X :\ \nu(E_x) > 0\}$ es un conjunto medible.

b) De acuerdo al lema, $\pi(E) = 0 \implies \int_X f\,d\mu = 0.$

Como $f \geq 0$, entonces $f = 0$ μ–c.t.p. (Corol. 4.10 del texto de Bartle).

$\implies \nu(E_x) = f(x) = 0 \quad \forall x \in X$ μ–c.t.p.

$\implies \exists N \in \mathscr{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $\nu(E_x) = 0 \quad \forall x \notin N$

$\implies \{x \in X :\ \nu(E_x) > 0\} \subset N$

$\implies \mu\left(\{x \in X :\ \nu(E_x) > 0\}\right) \leq \mu(N) = 0.$ ■