UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 5
Análisis Real II (525302)
Integral de Lebesgue

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, restringido a la $\sigma-$Álgebra de Borel.

Problema 1 Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right\}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a la función *parte entera*. Demuestre que

$$\int f \, dm = 2$$

Problema 2 Sean $f, g : X \to [0, +\infty]$ funciones medibles. Se define la medida $\lambda : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ como

$$(\forall E \in \mathcal{X}) \;\; \lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

Demuestre que $(\forall E \in \mathcal{X}) \displaystyle\int_E fg \, d\mu = \int_E g \, d\lambda$.

Problema 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible e integrable tal que

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \;\; \int_{(-\infty, a)} f \, dm = 0$$

Demuestre que $f = 0$ casi seguramente.

Problema 4 Demuestre que $\displaystyle\int_{(1,+\infty)} \frac{1}{x} \, dm = +\infty$.

Problema 5 Sean $f : X \to (0, +\infty]$ una función medible no negativa y $E \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(E) > 0$. Demuestre que

$$\int_E g \, d\mu > 0$$

Problema 6 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tal que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n = f$ y tal que

$$(\exists K > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \int f_n \, d\mu \leq K$$

Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Problema 7 Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función integrable y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ uan sucesión decreciente de conjuntos tal que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = 0$$

Problema 8 Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones integrables tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ es integrable, al igual que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, y tales que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; |f_n| \leq g_n$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Problema 9 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ es integrable. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu$.

Problema 10 Determine el valor de los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} \, dx$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x\,(1 + x^2)^n} \, dx$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \, dx$

Problema 11 Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \ln 2$ calculando de dos formas distintas las expresiones $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \, dx$ y $\displaystyle\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx$.

Problema 12 Sea $(X, \mathcal{X}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ el espacio de medida discreto (donde μ es la medida de conteo). Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \, (\forall k \in \mathbb{N}) \;\; f_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente, donde $f(k) = \dfrac{1}{k}$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \neq \int f \, d\mu$.

---

17 de Septiembre de 2014