

Sucesiones (resumen)

Módulo 1, Presentación 2

Raimund Bürger

13 de marzo de 2025

S.1. Sucesiones y límites

Definición 0.1 Una **sucesión de números reales** es una aplicación $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, donde recordamos que $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es decir a cada $n \in \mathbb{N}_0$ se asigna un número $a_n \in \mathbb{R}$. A la sucesión nos referimos por $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ o (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Sea $n_0 \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Entonces a $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ o $(a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$ también nos referimos como sucesión.

Ejemplo 0.1 Algunas sucesiones:

$$a_n = a \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ lo que entrega } (a, a, a, \dots). \quad (\text{S.1})$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} : \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots). \quad (\text{S.2})$$

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 : \quad (1, -1, 1, -1, \dots). \quad (\text{S.3})$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 : \quad (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots). \quad (\text{S.4})$$

$$a_n = \frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 : \quad (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots). \quad (\text{S.5})$$

S.1. Sucesiones y límites

Ejemplo 0.2 Otras sucesiones:

1. Sea $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Esto es una definición **recursiva** de una sucesión. La sucesión generada

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) \quad (\text{S.6})$$

es conocida como sucesión de los **números de Fibonacci**.

2. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $a_n = b^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, luego

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, b, b^2, b^3, \dots).$$

Definición 0.2 Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales, es decir $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$. Entonces se dice que **la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge a $a \in \mathbb{R}$** , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow a \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{o} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$.

S.1. Sucesiones y límites

Formulación alternativa Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge a $a \in \mathbb{R}$ si cada ε -vecindad

$$\begin{aligned}U_\varepsilon(a) &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \\&= \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}\end{aligned}$$

contiene casi todos los miembros de la sucesión. (“casi todos”: “todos con la excepción de un número finito de ...”)

Podemos decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si cada intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (para $\varepsilon > 0$ arbitrario) contiene un número infinito de miembros de la sucesión y un número a lo más finito de miembros está fuera del intervalo.

Definición 0.3 Una sucesión de números reales se llama **divergente** si no converge a ningún número real.

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos

1. Si $a_n = a$ para todo n , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se tiene que

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

2. Para (S.2) se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$: sea $\varepsilon > 0$ dado y $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_\varepsilon.$$

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos (continuación)

3. La sucesión $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ es divergente. Demostración: si existiera $a \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \rightarrow a$ cuando $n \rightarrow \infty$, existiría para $\varepsilon = 1$ un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{para todo } n \geq N_1.$$

En tal caso se tiene para todo $n \geq N_1$, de acuerdo a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} 2 &= |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Se produce la contradicción $2 < 2$, es decir la sucesión no puede converger a a .

4. Para (S.4) se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Demostración: Sea ε arbitrario, entonces

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

S.1. Sucesiones y límites

Discusión de los ejemplos (continuación)

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Demostración: Por inducción se demuestra que $n^2 \leq 2^n$ para todo $n > 3$, luego

$$\frac{n^2}{2^n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado y $N_\varepsilon > \max\{3, \frac{1}{\varepsilon}\}$, luego

$$\left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_\varepsilon.$$

Definición 0.4 Una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ se llama **acotada superiormente** si existe $K \in \mathbb{R}$ (la **cota superior**) tal que $a_n \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La sucesión se llama **acotada inferiormente** si existe $K \in \mathbb{R}$ (la **cota inferior**) tal que $a_n \geq K$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La sucesión se dice **acotada** si es acotada superiormente e inferiormente.

S.1. Sucesiones y límites

Una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es acotada si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo n .

Theorema 0.1 Cada sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergente es acotada.

Demostración Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < 1$ para todo $n \geq N_1$. Esto implica que

$$|a_n| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1 \quad \text{para } n \geq N_1.$$

Sea $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N_1-1}|, |a| + 1\}$, entonces $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Discusión de los ejemplos (continuación)

- La sucesión $\{a_n\}$ diverge. Para demostrar esto, basta probar que $a_n \geq n$ para todo n (por inducción). La sucesión no es acotada, por lo tanto de acuerdo al Teorema 0.1 no es convergente.
- La convergencia de la sucesión $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ depende del valor de b .

S.1. Sucesiones y límites

Theorema 0.2 (Unicidad del límite) Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge a a y también a a' . Entonces $a = a'$.

Comentario Este teorema justifica la notación $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Demostración Supongamos que $a \neq a'$, y sea $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'| > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{para } n > N_\varepsilon.$$

Por otro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$,

$$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a'| < \varepsilon \quad \text{para } n > N'_\varepsilon.$$

Para $n > \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ se tiene tanto $|a_n - a| < \varepsilon$ como $|a_n - a'| < \varepsilon$. Esto implica que

$$\begin{aligned} |a - a'| &= |(a - a_n) + (a_n - a')| \\ &\leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|, \end{aligned}$$

es decir $|a - a'| < |a - a'|$, una contradicción, luego la hipótesis $a \neq a'$ es falsa y se debe tener $a = a'$.

S.1. Sucesiones y límites

Teorema 0.3 (Sumas, productos etc. de sucesiones convergentes) Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Entonces converge también $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con ...

1. ... $c_n = a_n \pm b_n$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b.$$

2. ... $c_n = a_n b_n$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = ab.$$

3. ... $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ (suponiendo que $b \neq 0$), y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 0.4 Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales convergentes con $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

S.1. Sucesiones y límites

Definición 0.5 Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge positivamente** si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $N_K \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ para todo $n \geq N_K$. Se dice que la sucesión **diverge negativamente** si para cada $K \in \mathbb{R}$ existe $N_K \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < K$ para todo $n \geq N_K$. También se escribe en los casos respectivos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Teorema 0.5 Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión divergente positivamente o negativamente. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, y la sucesión $\{\frac{1}{a_n}\}_{n \geq n_0}$ es convergente con $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

S.1. Sucesiones y límites

Definición Una sucesión de números reales se llama **sucesión de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N_\varepsilon.$$

Teorema 0.6 Cada sucesión de números reales convergente es una **sucesión de Cauchy**.

Demostración Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado existe $N_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N_{\varepsilon/2}.$$

Entonces para todo $n, m \geq N_{\varepsilon/2}$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) - (a_m - a)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

S.1. Sucesiones y límites

Axioma de completitud Cada sucesión de Cauchy converge en \mathbb{R} .

Para hacer plausible este axioma, consideremos una sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces existen números $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \in \mathbb{N}$, tales que

$$|a_n - a_m| < 2^{-k-1} \quad \text{para todo } n, m \geq n_k.$$

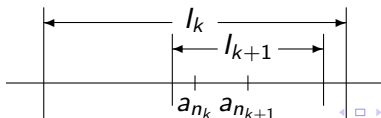
Sea ahora

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k}\}.$$

Se tiene $I_{k+1} \subset I_k$ para todo k . Para explicar esto, sea $x \in I_{k+1}$, entonces $|x - a_{n_{k+1}}| \leq 2^{-k-1}$; además $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < 2^{-k-1}$, luego a partir de la desigualdad triangular

$$|x - a_{n_k}| \leq |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < 2^{-k},$$

es decir $x \in I_k$.



S.1. Sucesiones y límites

Entonces tenemos una sucesión de intervalos anidados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ cuyas longitudes convergen a cero y se tiene $a_n \in I_k$ para todo $n \geq n_k$. Hay que imaginarse que los intervalos se contraen al límite de la sucesión de Cauchy considerada.

Definición 0.6 Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión y $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ una sucesión de números enteros no negativos. Entonces se dice que

$$\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

es una **subsucesión** de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Evidentemente, si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión acotada con el límite a , entonces cada subsucesión converge al mismo límite a .

Teorema 0.7 (Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión acotada $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de números reales posee una subsucesión convergente.

S.1. Sucesiones y límites

Demostración del Teorema 0.7

1. Como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es acotada, existen $A, B \in \mathbb{R}$ con $A \leq a_n \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Construiremos una sucesión de intervalos $[A_k, B_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, con las siguientes propiedades:

- (i) $[A_k, B_k]$ contiene un número infinito de miembros de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- (ii) $[A_k, B_k] \subset [A_{k-1}, B_{k-1}]$.
- (iii) $B_k - A_k = 2^{-k}(B - A)$.

Procedemos por inducción. Sea $[A_0, B_0] := [A, B]$.

Supongamos que se ha construido $[A_k, B_k]$ con (i)–(iii). Sea $M := \frac{A_k + B_k}{2}$. Como $[A_k, B_k]$ contiene un número infinito de miembros de la sucesión, por lo menos uno de los subintervalos $[A_k, M]$ y $[M, B_k]$ debe contener un número infinito de miembros de la sucesión.

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [A_k, M] & \text{si } [A_k, M] \text{ contiene un número infinito } \dots, \\ [M, B_k] & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

S.1. Sucesiones y límites

Demostración del Teorema 0.7 (continuación)

- Definiremos ahora (por inducción) una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ con $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, empezando por $a_{n_0} := a_0$. Como $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ contiene un número infinito de miembros de la sucesión, podemos elegir $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$ tal que $n_{k+1} > n_k$.
- Demostraremos ahora que la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ converge. Basta demostrar que es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ dado y N elegido tan grande que $2^{-N}(B - A) < \varepsilon$. Entonces

$$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subset [A_N, B_N], \quad a_{n_j} \in [A_j, B_j] \subset [A_N, B_N]$$

para todo $k, j \geq N$, luego

$$|a_{n_k} - a_{n_j}| \leq |B_N - A_N| = 2^{-N}(B - A) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definición 0.7 Un número a se llama **punto de acumulación** de una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ si existe una subsucesión que converge a a .