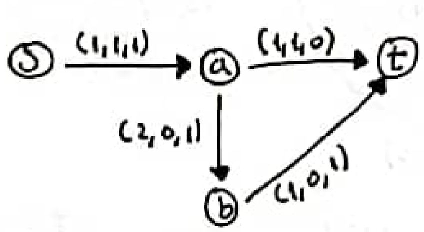
Brayan Sandoval

P1| Sea (G, s, t, c, w, f_0) una instancia dada del PFCM. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) F Si f^* es un flujo óptimo que es solución del PFCM con la instancia inicial dada y G° el subgrafo obtenido de la red residual G_{f^*} por considerar sólo los arcos con costo residual igual a cero, entonces hay otra solución óptima al problema dado si y sólo si G° tiene un ciclo.

Sol: considere la siguiente instancia (G, s, t, c, w, f_0) definida por el grafo

G: (c, w, f^*)

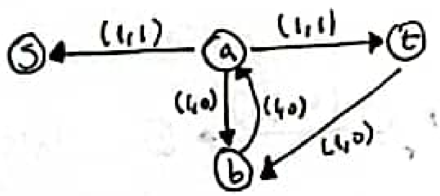


donde $f_0 = 1$

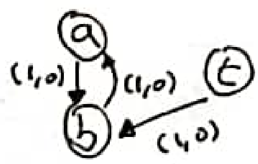
$w(f^*) = 1.1 + 1.0 + 0.1 + 0.1 = 1$

el grafo residual

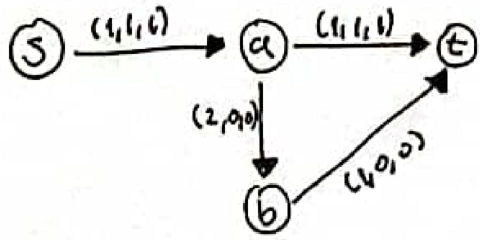
G_f:



G°:



notemos que no existe un ciclo C en G_f tal que $w(C) < 0$ por lo que f^* es la solución del PFCM. notemos que es el único pues sólo hay dos flujos con valor igual 1. Esto se puede ver ya que el grafo residual tiene sólo un ciclo de largo mayor que 3. este flujo es



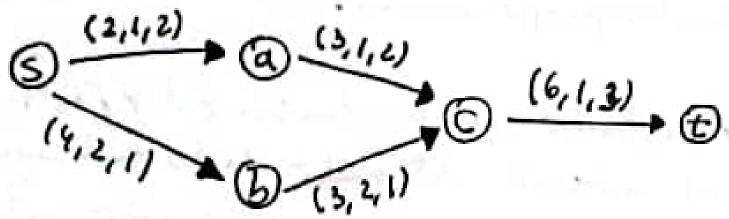
$w(f) = 1.1 + 1.1 + 0.0 + 0.0 = 2$

como $w(f) > w(f^*)$ y como f y f^* son los únicos flujos tales que $Val(f) = Val(f^*) = 1$, se tiene que sólo hay un flujo óptimo pero G° tiene un ciclo, por tanto la proposición es falsa

b) F Si f^* es un flujo óptimo que es solución del PFCM con la instancia dada, entonces f^* es también solución óptima del PFCM, considerando ahora que las capacidades superiores de cada arco igual al valor de $2f^*$.

Sol: considere la instancia $(G, s, t, c, \omega, f_0)$ definida por el grafo

G:

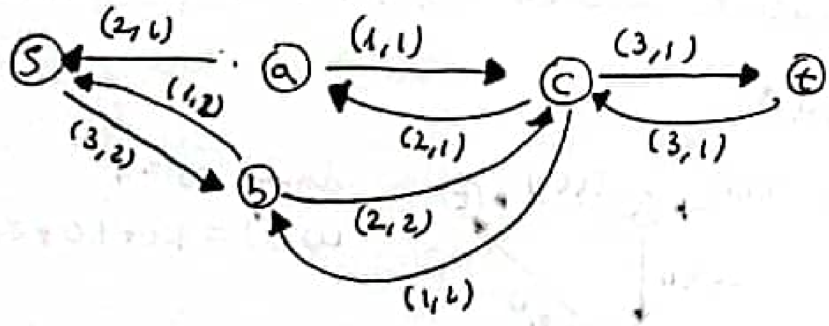


$\omega(f) = 11$

$f_0 = 3$

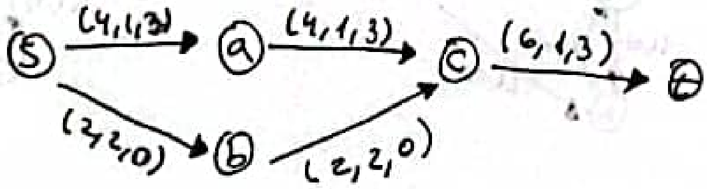
donde

G_f:



como no hay ciclo C tales que $\omega(C) < 0$, entonces f es solución del PFCM. Luego la instancia $(\bar{G}, s, t, 2f, \omega, f_0)$

$\bar{G}$:



$\omega(\bar{f}) = 9$

luego f no es solución del PFCM de $(\bar{G}, s, t, 2f, \omega, f_0)$ ■

c) V El problema del camino más corto (PCC) con pesos no negativos puede ser modelado matemáticamente como un Problema de flujo de costo mínimo (PFCM).

Sol: Sea $G=(V,E)$ y sea $u\in E$ además sea $w: E \to \mathbb{R}^+_0$ una función peso (costo). Así, tenemos el (PCC) para $u\in E$, transformemos el (PCC) para $u \in E$ en un PFCM, para esto se define

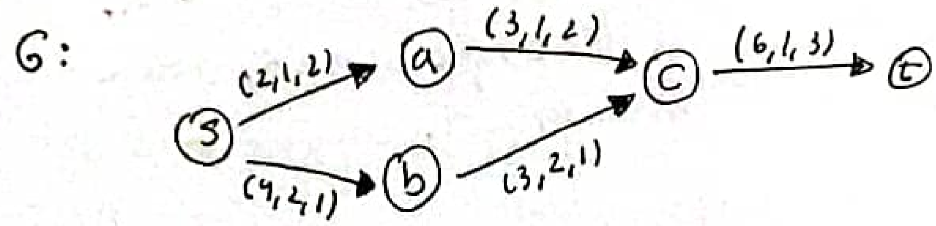
$$\bar{G}=(\bar{V},\bar{E}) \quad \text{con} \quad \bar{V} = V\cup\{s,t\}, \quad \bar{E} = E\cup\{(s,u),(v,t)\}, \quad c(u,v)=|V|-1 \quad \forall (u,v)\in\bar{E}.$$

para algún $v\in V$. además, consideremos $f_0 \leq |V|-1$, de aquí se tiene que para cada $f_0 \leq |V|-1$ se tendrá un problema de flujo de costo mínimo el cual entregará el camino más corto de u a un vértice $\hat{u}\in V$

Escaneado con CamScanner

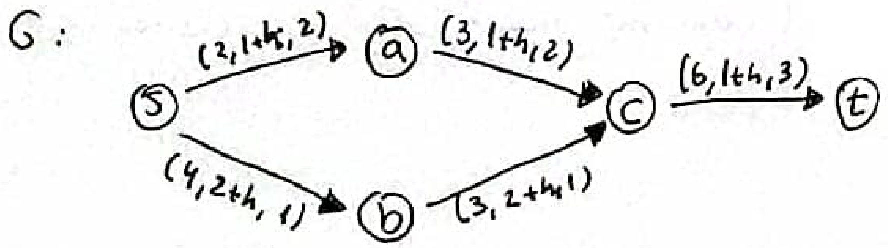
d) F. Las soluciones óptimas del PFCM con la instancia dada no cambian si al costo de cada arco se le suma un mismo valor positivo.

Sol: sea f^* una solución óptima del PFCM con la instancia (G, s, t, c, w, f_0) definida por



$$w(f^*) = 11$$
$$f_0 = 3$$

donde f^* resuelve PFCM. Ahora, dado $h > 0$ se tiene la instancia $(G, s, t, c, w+h, f_0)$ definida por



donde f^* también resuelve el PFCM con la instancia dada y donde

$$\begin{aligned} w(f^*) &= 2(1+h) + 2(1+h) + (2+h) + (2+h) + 3(1+h) \\ &= 2+2h+2+2h+2+h+2+h+3+3h \\ &= 11+9h \quad , h > 0 \end{aligned}$$

luego la solución cambia respecto al número positivo que ~~...~~ sumamos.

P2) Modele cada uno de los siguientes problemas como un problema de flujo de los vistos en clases, y sugiera una forma de resolverlo en tiempo polinomial.

a) Sea $G=(V,A)$ un grafo dirigido con $|A|\geq 2$ fuertemente conexo y $w: A \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función de costo. Un circuito $C: u_1, u_2, \ldots, u_r, u_1$ en G es un camino cerrado en G con posibles repeticiones de nodos y arcos. El problema del circuito Euleriano (PCE) consiste en determinar un circuito en G que contenga todos sus arcos y con el menor costo posible.

Sol: La idea principal que nos permitirá resolver este problema será usar el hecho que la circulación en una red se puede entender (con capacidad inferior mayor o igual a 1) como una forma de recorrer el grafo de tal forma que pase por todas las aristas y vertices, esto se desprende de la propiedad

$$\forall u \in V, \ \sum_{v} f(u,v) = \sum_{v} f(v,u)$$

notar que esto por la misma propiedad se puede deducir que si se empieza por un nodo $u_1 \in V$ se podrá formar un circuito. Notar que el hecho que G sea fuertemente conexo con $|A|\geq 2$ implica que se puede encontrar un circuito Euleriano.

Para modelar este problema como un problema de circulación de costo mínimo definimos

$$l(u,v) = 1 \ \text{y} \ c(u,v) = +\infty \quad \text{para todo } (u,v) \in A.$$

ahora, para resolver este problema usaremos el enfoque descrito en el problema 2 del listado 6 de la asignatura.

Dado una instancia $(G=(V,A), l, c, w)$ de PCCM podemos definir una instancia $(G'=(V',A'), l', c', w', s, t, f_0)$ de PFCM por:

$$V' = V \cup \{s,t\}$$
$$A' = A \cup \{(s,u_0),(v_0,t)\}$$

Escaneado con CamScanner

donde $u_0, v_0 \in V$ son vértices cualesquiera fijos de la red G. además se define la función de costo inferior y la de costo superior $l', c' : A' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in A, \quad l'(u,v) = \begin{cases} l(u,v) & \text{si } (u,v) \in A \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

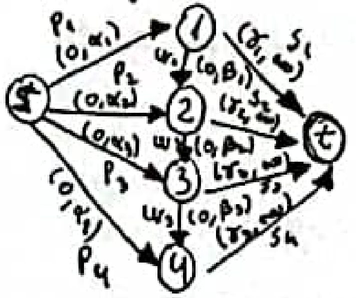
$$c'(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{si } (u,v) \in A \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

obs: dado que tenemos capacidades inferiores modificamos el grafo residual usando la misma idea realizada en la tarea 3 P2a)

finalmente, se define $f_0 = 0$. Esta versión de PFCM con capacidades inferior en los arcos puede ser resuelto por el algoritmo de Klein. comenzando por cualquier s-t flujo factible de valor cero. Para encontrar un flujo factible, se usa la transformación de PFM con capacidades inferiores a uno sin capacidades inferiores.

b) Un comerciante tiene el siguiente problema. En cada uno de los siguientes cuatro años, puede comprar, vender o guardar para una posterior venta una cierta mercancía, sujeto a las siguientes restricciones: en cada periodo i puede comprar a lo más α_i unidades del producto o puede conservar a lo más β_i unidades para el siguiente periodo y debe vender al menos γ_i unidades. Asumiendo que p_i, w_i y s_i denota el costo (no negativo) por unidad de compra, guardar y vender el producto, respectivamente ¿Qué política debe adoptar el comerciante para minimizar el costo total en los siguientes cuatro años?

sol: el grafo que modela el problema es el siguiente



donde cada vértice i representa el periodo donde se realiza la compra. se definen las capacidades inferiores

$$l(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = s \wedge v = j \text{ con } j \in \{1,2,3,4\} \\ \gamma_i & \text{si } u = i \wedge v = t \text{ con } i \in \{1,2,3,4\} \\ 0 & \text{si } u = i \wedge v = j \text{ con } i \neq j \text{ y } i,j \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

$$c(u,v) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } u = s \wedge v = j \text{ con } j \in \{1,2,3,4\} \\ \beta_j & \text{si } u = i \wedge v = j \text{ con } i \neq j \text{ y } i,j \in \{1,2,3,4\} \\ +\infty & \text{si } u = i \wedge v = t \text{ con } i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

$$w(u,v) = \begin{cases} p_j & \text{si } u = s \wedge v = j \text{ con } j \in \{1,2,3,4\} \\ w_j & \text{si } u = i \wedge v = j \text{ con } i \neq j \text{ y } i,j \in \{1,2,3,4\} \\ s_i & \text{si } u = i \wedge v = t \text{ con } i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Estamos ~~interesado~~ interesados en minimizar el costo total en los siguientes cuatro años, en terminos mas abstractos, estamos interesado en encontrar un s-t flujo tal que minimize el costo, donde ademas tenemos capacidades inferiores y superiores, dado que

$$0 \leq f(s,i) \leq \alpha_i, \ \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

$$\Rightarrow Val(f) \leq \sum_{i=1}^{4} \alpha_i$$

y como

$$\gamma_i \leq f(i,t) < +\infty \quad , \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

por conservatividad

$$Val(f) \geq \sum_{i=1}^{4} \gamma_i$$

por lo que

$$f_0 \in \left[\sum_{i=1}^{4} \gamma_i , \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \right] \cap \mathbb{N}$$

de aqui se obtiene una cantidad finita de f_0, si aplicamos Klein a cada uno de ellos obtendremos una cantidad finita de flujos de peso minimo con distinto f_0, el que tenga menor costo será el menor costo que puede tener el comerciante en los siguientes cuatro años, luego el algoritmo es polinomial ya que el algoritmo de Klein es polinomial y la cantidad de ejecuciones del algoritmo es finita y de orden lineal.

∎