UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO 2024 – 2

Pauta Evaluación N°2

ÁLGEBRA 2 - 525150

Problema 1.

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

(a) **(5 puntos)** El conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Si consideramos a $v = (1, 0, 0)^t \in S$ y $\alpha = 2 \in \mathbb{R}$, se tiene que $\alpha \cdot v = (2, 0, 0) \notin S$, ya que $2^2 + 0^2 + 0^2 = 4 > 1$, con esto se prueba que el producto por escalar no es cerrado en S, en efecto, S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

(b) **(5 puntos)** Si $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ es un s.e.v. del e.v. real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces la dimensión de W es 3.

Solución: Notemos que:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

en efecto, $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Luego, por el lema de dependencia lineal, se tiene que:

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

por lo tanto la $\dim(W) < 3$. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

(c) **(5 puntos)** Existe un único plano que contiene a los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$ y $C(3, 2, 1)$.

Solución: Notemos que la recta que pasa por A y B, está dada por:

$$L : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

luego con $t = -1$ se prueba que $C \in L$, y por ende, A, B y C son puntos colineales, por lo tanto existen infinitos planos que contienen a aquellos puntos. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

Problema 2.

Considerar el punto $P = (1, 3, 1)$ y la recta L_1 definida por

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - 2x = y = 2 - 2z\}$$

(a) **(3 puntos)** Determinar la representación paramétrica de la recta L_1

Solución: Notemos que la recta L_1 está definida por:

$$L_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 1 = \frac{y - 0}{-2} = z - 1 \right\}$$

De aquí, se observa que el vector director de L_1 es $\vec{d_1} = (1, -2, 1)^t$. Además, escogiendo $P_0 = (1, 0, 1) \in L_1$, una representación paramétrica para L_1, está dada por:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

(b) **(6 puntos)** Determinar la representación paramétrica de la recta L_2 tal que $P \in L_2$ y $L_1 \perp L_2$.

Solución: Consideremos $\vec{d_2} = (a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3$, el vector director de L_2. Ahora bien, $L_1 \perp L_2$ ssi sus vectores directores son ortogonales, es decir, $\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$. Dado lo anterior, se tiene:

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + c = 0$$

Luego, podemos escoger $\vec{d_2} = (1,1,1)$ y como $P \in L_2$, la ecuación de L_2, está dada por:

$$L_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

(c) **(6 puntos)** Determinar la ecuación del plano Π, tal que $P \in \Pi$ y $L_1 \subseteq \Pi$.

Solución: Sea $P_0 = (1,0,1) \in L_1$, luego el vector normal del plano está dado por:

$$\vec{n} = \vec{d_1} \times \overrightarrow{P_0P} = (1,-2,1)^t \times (0,3,0)^t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3,0,3)^t$$

finalmente, como $P \in \Pi$, la ecuación del plano Π queda dada por:

$$\Pi : -3(x-1) + 0(y-3) + 3(z-1) = 0$$

Problema 3.

Sobre el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{x^3 + x,\ x^2 - x,\ x - 1\} \qquad \text{y} \qquad W = \{p \in V : p(-x) = -p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

(a) **(3 puntos)** Determinar si A es un conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

Solución: Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} &\alpha_1(x^3 + x) + \alpha_2(x^2 - x) + \alpha_3(x - 1) = \theta_V \\ \Rightarrow\ &\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

por igualdad entre polinomios se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por lo tanto A es un conjunto linealmente independiente.

(b) **(4 puntos)** Caracterizar el subespacio S generado por A.

Solución: Sea $q \in \langle A \rangle$, en efecto, existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$q(x) = \alpha_1(x^3 + x) + \alpha_2(x^2 - x) + \alpha_3(x - 1)$$

considerando lo obtenido en el ítem anterior y que $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

por igualdad entre polinomios, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = c \\ -\alpha_3 = d \end{cases}$$

en el cual obtenemos que $a - b - d = c$. Por lo tanto

$$S = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in V : a - b - d = c\}$$

(c) **(5 puntos)** Determinar una base y la dimensión de S y de W.

Solución: Para S, podemos notar que $\langle A\rangle = S$ y como A es linealmente independiente, se concluye que A es una base de S y en efecto, $\dim(S) = |A| = 3$. Por otro lado, para W, consideremos $p(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h \in W$, con $e, f, g, h \in \mathbb{R}$, en efecto

$$\begin{aligned} p(-x) = -p(x) &\Leftrightarrow -ex^3 + fx^2 - gx + h = -ex^3 - fx^2 - gx - h \\ &\Leftrightarrow 2fx^2 + 2h = 0 \\ &\Leftrightarrow f = h = 0 \end{aligned}$$

luego, se tiene:

$$W = \{ex^3 + fx^2 + gx + h \in V : f = h = 0\} = \{ex^3 + gx : e, g \in \mathbb{R}\}$$

dado lo anterior, podemos concluir que $W = \langle \{x^3, x\}\rangle$. Ahora bien, si $B = \{x^3, x\}$, como $p_1(x) = x^3$ y $p_2(x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$, no son paralelos, podemos notar que B es un conjunto linealmente independiente y como $\langle B\rangle = W$, se tiene que B es base de W y por ende la $\dim(W) = |B| = 2$.

(d) **(3 puntos)** Decidir si $S + W$ es una suma directa.

Solución: Supongamos que $S + W$ están en suma directa, por ende $S \cap W = \{\theta_V\}$, y en efecto, $\dim(S \cap W) = 0$, luego por el Teorema de Grassmann, se tiene:

$$\dim(S + W) = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W) \Rightarrow \dim(S + W) = 3 + 2 - 0 = 5,$$

además, sabemos que $\dim(V) = 4$, pero $\dim(S + W) = 5 > \dim(V)$, lo cual no puede ocurrir pues $S + W$ es un subespacio vectorial de V, por lo tanto $S \cap W \neq \{\theta_V\}$, es decir, $S + W$ no están en suma directa

Problema 4.

(a) **(7 puntos)** Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un $\mathbb{K}$-e.v. V. Mostrar que

$$A = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_3\}$$

es una base de V.

Solución: Debemos probar que A es una base de V, por ende, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, tales que

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 - v_2) + \alpha_3(v_1 + v_2 - v_3) = \theta_V \\ \Leftrightarrow\ &(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_1 + (-\alpha_2 + \alpha_3)v_2 - \alpha_3 v_3 = \theta_V \end{aligned}$$

luego, por hipótesis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, por lo cual es un conjunto l.i, en efecto, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $-\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ y $-\alpha_3 = 0$. Es claro que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por lo tanto $A = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente y dado que la cardinalidad de A es igual a la dimensión de V, se concluye que A es una base de V.

(b) **(8 puntos)** Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)^t$ y $\vec{v} = (-1, 1, 0)^t$. Determinar un vector $\vec{w} = (a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\|\vec{w}\| = 2$ y $\measuredangle(\vec{w}, \vec{v}) = 45°$, en simultáneo.

Solución: Lo primero que se debe cumplir es que $\vec{w} \perp \vec{u}$, es decir $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, por ende:

$$(a, b, c)^t \cdot (1, 0, -1)^t = 0 \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \quad \mathbf{(1)}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\|\vec{w}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4 \quad \mathbf{(2)}$$

Además, sabemos que $\vec{w} \cdot \vec{v} = \|w\|\|v\| \cos(\theta)$, luego si $\theta = \measuredangle(\vec{w}, \vec{v}) = 45°$, se tiene:

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|w\|\|v\| \cos(\theta) \Leftrightarrow (a, b, c)^t \cdot (-1, 1, 0) = 2\sqrt{2} \cos(45°) \Leftrightarrow b = a + 2 \quad \mathbf{(3)}$$

Finalmente, resolviendo el sistema formado por **(1)**, **(2)** y **(3)**, se obtiene que $a = 0$, $b = 2$ y $c = 0$, o que $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ y $c = -\frac{4}{3}$, por ende $\vec{w} = (0, 2, 0)^t$ o $\vec{w} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)^t$.