UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2 (521218)

Problema 1. Resolver la siguiente EDO

$$x^2y''(x) \,+\, 2xy'(x) \,-\, 2y(x) = x^{-2} \,+\, \mathrm{sen}(\ln(x))$$

Solución Problema 1.

Notamos que la EDO $\boxed{Ly(x) = f(x)}$, con $L = x^2D^2 + 2xD - 2$ y $f(x) = x^{-2} \,+\, \mathrm{sen}(\ln(x))$, es del tipo Euler-Cauchy. Hacemos entonces el cambio de variable $\boxed{x = \mathrm{e}^z}$, con lo que nuestra EDO se escribe, respecto a la variable independiente z, como una de coeficientes constantes $\boxed{\tilde{L}\tilde{y}(z) = \tilde{f}(z)}$, siendo

$$\tilde{L} \,=\, \mathcal{D}(\mathcal{D}-1) + 2\mathcal{D} - 2 = \mathcal{D}^2 + \mathcal{D} - 2\,, \quad \tilde{f}(z) = f(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{-2z} \,+\, \mathrm{sen}(t)$$

Se recuerda que $D = \frac{d}{dx}$ y $\mathcal{D} = \frac{d}{dz}$, y que la solución general de la EDO transformada, es :

$$y(z) = y_h(z) + y_p(z)$$

Resolviendo $\tilde{L}\tilde{y} = 0$.
La ecuación característica asociada a la EDO es

$$\lambda^2 \,+\, \lambda \,-\, 2 \,= 0\,(\lambda+2)(\lambda-1)$$

de donde se tiene $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$.
En consecuencia, la solución de la EDO homogénea (en z!) , es:

$$\tilde{y}_h(z) = C_1\mathrm{e}^{-2z} + C_2\mathrm{e}^z,$$

siendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.
Hallando $\tilde{y}_p$ tal que $\tilde{L}\tilde{y}_p, = \tilde{f}$.
Aplicando el método de los aniquiladores, se busca un aniquilador para $\tilde{f}$ de menor orden posible, esto es,

$$\tilde{L}_1\tilde{f} = \,(\mathcal{D}+2)(\mathcal{D}^2+1)\tilde{f} = 0$$

.
Así , la solución particular buscada es de la forma

$$\tilde{y}_p = Az\mathrm{e}^{-2z} + B\mathrm{cos}(z) + C\mathrm{sen}(z) + D\mathrm{e}^{-2z} + E\mathrm{e}^z$$

que al reemplazar en la EDO se reduce a

$$\tilde{y}_p(z) = Az\mathrm{e}^{-2z} + B\cos(z) + C\mathrm{sen}(z)$$

con A, B y C reales a determinar. Derivando $\tilde{y}_p(z)$ y reemplazando en $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{f}$, resulta

$$-3A\mathrm{e}^{-2z} \; + \; (C - B)\cos(z) \; - \; (3C + B)\mathrm{sen}(z) \; = \; \mathrm{e}^{-2z} \; + \; \mathrm{sen}(z)$$

$$\text{de donde} \qquad A \; = \; -1/3\,, B \; = \; 1/2\,, C \; = \; -1/2\,,$$

con lo cual se obtiene

$$\tilde{y}_p(z) = -\frac{1}{3}z\mathrm{e}^{-2z} \; + \; \frac{1}{2}\cos(z) \; - \; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(z).$$

De esta manera, la solución general de $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{f}$ es

$$\tilde{y}(z) = C_1\mathrm{e}^{-2z} + C_2\mathrm{e}^{z} - \frac{1}{3}z\mathrm{e}^{-2z} + \frac{1}{2}\cos(z) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(z).$$

Finalmente, la solución general de la EDO original, es

$$y(x) = C_1x^{-2} + C_2x - \frac{1}{3}x^{-2}\ln(x) + \frac{1}{2}\Big\{\cos(\ln(x)) - \mathrm{sen}(\ln(x))\Big\}.$$

siendo $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Pregunta 2.

(i) Dos tanques A y B cada uno de 55 litros de capacidad, contienen respectivamente 12 y 15 lts de agua. Agua con sal a una concetración de 0,5 Kg/lt se bombea al tanque A a razón de 2lt/min. La mezcla fluye del tanque A al tanque B a razón de 4 lt/min, y del tanque B al tanque A a razón de 2 lt/min. Si del tanque B fluye al externo 1 lt/min de mezcla, escriba **(SIN RESOLVER)** el sistema de ecuaciones diferenciales que determina la cantidad de masa de sal hasta el instante del derrame. (No se pide resolver).

(ii) Considere el sistema masa-resorte dado por

$$m\,x''(t)\,+\,k\,x(t)\;=\;h(t)$$

Si $h(t) = 3\cos(wt)$, $m = 25$, ¿Para qué valores de k el sistema manifiesta resonancia si $\cos(wt)$ tiene una frecuencia de 15 Hz ?

Solución Problema 2.

(i) Sean $x(t)$ la masa de sal en el tanque A e $y(t)$ la masa de sal en el tanque B.

Observe que el volumen en el tanque A es siempre constante en 12 lt; en cambio en el tanque B la variación de volumen es $\Delta V_B = 1$, de donde $V_B(t) = t + 15$. Por lo tanto el derrame en el tanque B inicia a los 40 minutos. Así, el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + 2\frac{y(t)}{t+15} - 4\frac{x(t)}{12}; \quad t \in [0, 40] \\ y'(t) = 4\frac{x(t)}{12}x(t)\;-\;3\frac{y(t)}{t+15}; \quad t \in [0, 40] \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

(ii) Tenemos que las soluciones del sistema homogéneo es

$$x_h(t) = A\cos(\frac{\sqrt{k}}{5}) + B\mathrm{sen}((\frac{\sqrt{k}}{5}).$$

Así , el sistema manifiesta resonancia , si $w = \frac{\sqrt{k}}{5}$ donde $\frac{w}{2\pi} = 15$, es decir, si $w = 30\pi$. Por lo tanto, existe resonancia si

$$\frac{\sqrt{k}}{5} = 30\pi,\ \text{esto es, si } \sqrt{k}\;=\;150\pi$$

Problema 3. Resuelva el siguiente PVI

$$y''(t) \,+\, 4y'(t) \,+\, 6y(t) \,=\, H(t-2)\delta(t-1) \,+\, \delta(t-2)$$
$$y'(0) = y(0) = 0$$

Solución:
Primero aplicamos T. de L. a $H(t-2)\delta(t-1)$; tenemos:

$$\mathcal{L}[H(t-2)\delta(t-1)](s) \,=\, \mathrm{e}^{-2s} L[f(t)]$$

donde $f(t-2) \,=\, \delta(t-1)$, esto es, $f(t) \,=\, \delta(t+1)$. Así,

$$\mathcal{L}[H(t-2)\delta(t-1)](s) \,=\, \mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[\delta(t+1)](s) \,=\, \mathrm{e}^{-2s}\mathrm{e}^{s} \,=\, \mathrm{e}^{-s}$$

Ahora, aplicamos Transformada de Laplace a la EDO dada, tenemos

$$s^2\mathcal{L}[y(t)] + 4s\mathcal{L}[y(t)] + 6\mathcal{L}[y(t)] \,=\, \mathrm{e}^{-s} \,+\, \mathrm{e}^{-2s}$$

$$(s^2+4s+6)\mathcal{L}[y(t)] \,=\, \mathrm{e}^{-s} \,+\, \mathrm{e}^{-2s}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] \,=\, \mathrm{e}^{-s}\Big(\frac{1}{(s+2)^2+2}\Big) \,+\, \mathrm{e}^{-2s}\Big(\frac{1}{(s+2)^2+2}\Big).$$

Aplicando Transformada inversa, obtenemos:

$$y(t) \,=\, \mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-s}\Big(\frac{1}{(s+2)^2+2}\Big)\right](t) \,+\, \mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-2s}\Big(\frac{1}{(s+2)^2+2}\Big)\right](t),$$

$$\text{esto es,} \quad y(t) \,=\, H(t-1)f_1(t-1) \,+\, H(t-2)f_1(t-2)$$

donde

$$f_1(t) \,=\, \mathcal{L}^{-1}\left[\Big\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\Big\}\right](t) \,=\, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{sen}\Big(\sqrt{2}\,t\Big).$$

Por lo tanto,

$$y(t) \,=\, H(t-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-2(t-1)}\mathrm{sen}\Big(\sqrt{2}\,(t-1)\Big) \,+\, H(t-2)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-2(t-2)}\mathrm{sen}\Big(\sqrt{2}\,(t-2)\Big).$$

Problema 4. Usando valores propios determine la solución del siguiente PVI:

$$\left\{ \begin{array}{rclr} x'(t) & = & x(t)\,; & x(0)=0 \\ y'(t) & = & 2x(t)\,+\,y(t)\,; & y(0)=0 \\ z'(t) & = & 2x(t)\,+\,y(t)\,+\,z(t)\,; & z(0)=0 \end{array} \right.$$

SOLUCION.

De $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, se obtiene que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Las soluciones del sistema se obtienen de

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \,+\, t(A-\lambda I) \,+\, 1/2\,t^2(A-\lambda I)^2 \,+\, 1/6\,t^3(A-\lambda I)^3 \Big\} u$$

para u autovector genearalizado asociado a $\lambda = 1$.

De $(A-\lambda I)u_1 = (0,0,0)^t$ obtenemos el primer autovector generalizado , que resulta ser $u_1 = (0,0,1)$ Así, la primera solución para el sistema ,es

$$X_1(t) \;=\; \mathrm{e}^t(0,0,1).$$

Ahora de $(A-\lambda I)^2 u_2 = (0,0,0)^t$ se obtiene $u_2 = (0,1,0)$ (que es l.i. con u_1 !); la correspondiente solución al sistema se obtiene de

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \,+\, t(A-\lambda I) \Big\} u_2,$$

realizando las respectivas operaciones se obtiene

$$X_2(t) \;=\; \mathrm{e}^t(0,1,t).$$

Finalmente de $(A-\lambda I)^3 u_3 = (0,0,0)^t$, se obtiene

$$u_3 = (1,0,0) \text{ (que es l.i. con } u_1 \text{ y con } u_2 \text{ !)}$$

y la tercera solución linealmente independientes con las otras dos, es

$$X_3(t) \;=\; \mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{ I \,+\, t(A-\lambda I) \,+\, 1/2\,t^2(A-\lambda I)^2 \Big\} u_3$$

que al realizar los cálculos, se obtiene

$$X_3(t) \;=\; (\mathrm{e}^t, 2t\mathrm{e}^t, (2t+t^2)\mathrm{e}^t).$$

Así, toda solución del sistema es dada por

$$X_h(t) \;=\; c_1 X_1(t) \,+\, c_2(t) X_2(t) \,+\, c_3 X_3(t)$$

Teniendo presente que $X_h(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$, se obtiene

$$X_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, + c_3 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2t\mathrm{e}^t \\ (2t+t^2)\mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

de donde la única solución al PVI dado, es.

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, \mathrm{e}^t) \; + \; (0, \mathrm{e}^t, t\mathrm{e}^t) \; + \; (\mathrm{e}^t, 2t\mathrm{e}^t, (2t+t^2)\mathrm{e}^t)$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t + 2t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t(1+3t+t^2) \end{pmatrix}$$

JMS/LNB//jms.
26/11/2008.