

Espacios L_p (cont.).

- Completitud de los espacios L_p , $1 \leq p < +\infty$.
- Espacios L_∞ .

Completitud de los espacios L_p , $1 \leq p < +\infty$.

En esta clase, sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y $L_p := L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$.

Teor.: $\forall p \in [1, +\infty)$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un **espacio de Banach**.

Dem.: Ya vimos que L_p es un E.V.N. Veamos ahora que es **completo**.

Sea $\{f_n\}$ una **sucesión de Cauchy en L_p** .

Sea $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión tal que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Ej.

Sean $g_k := f_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, y $h := |g_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \in M^+(X, \mathcal{X})$

$$\implies \left(|g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p \xrightarrow{K \nearrow} h^p$$

$$\stackrel{\text{T.C.M.}}{\implies} \int h^p d\mu = \lim_K \int \left(|g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu$$

$$\begin{aligned} \implies \|h\|_p &= \lim_K \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \\ &\leq \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_p. \end{aligned}$$

Como $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$, entonces $\|h\|_p \leq \|g_1\|_p + 1 \implies h^p \in L_1$

$\implies N := \{x \in X : h(x) = +\infty\}$ satisface $\mu(N) = 0$.

$\forall x \notin N$, $\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < +\infty$ (convergencia absoluta en \mathbb{R})

$\implies \forall x \notin N$, $\sum_{k=1}^{\infty} [g_{k+1}(x) - g_k(x)]$ converge.

$$\text{Sea } f(x) := \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [g_{k+1}(x) - g_k(x)], & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

$$\implies f \text{ medible y, como } g_1 + \sum_{k=1}^K (g_{k+1} - g_k) = g_{K+1}, \quad (\text{telescópica})$$

$$\implies |f(x)|^p = \lim_K |g_{K+1}(x)|^p \text{ c.t.p.} \quad (\forall x \notin N)$$

$$\begin{aligned} \text{Además, } \forall K \in \mathbb{N}, |g_{K+1}|^p &= \left| g_1 + \sum_{k=1}^K (g_{k+1} - g_k) \right|^p \\ &\leq \left(|g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p \leq h^p \in L_1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{T.C.D.}}{\implies} \int |f|^p d\mu = \lim_K \int |g_{K+1}|^p \leq \int h^p d\mu < +\infty \implies f \in L_p.$$

Nuestro siguiente paso es demostrar que $g_k \xrightarrow{k} f$ en L_p .

$$|f| \leq h \implies |f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2|h|)^p = 2^p h^p \in L_1$$

$$\text{y } g_k \xrightarrow{k} f \text{ c.t.p.} \implies |f - g_k|^p \xrightarrow{k} 0 \text{ c.t.p.} \text{ Por lo tanto,}$$

$$\stackrel{\text{T.C.D.}}{\implies} \|f - g_k\|_p^p = \int |f - g_k|^p d\mu \xrightarrow{k} 0 \implies g_k \xrightarrow{K} f \text{ en } L_p.$$

Así demostramos que cualquier sucesión $\{f_n\}$ de Cauchy en L_p , tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ convergente en L_p , lo cual es una condición suficiente para que $\{f_n\}$ converja en L_p al mismo límite. Por lo tanto, L_p es completo. ■

Espacios L_∞ .

Def.: Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible.

- $S \in \mathbb{R}^+$ es una **cota esencial** de f , si $|f| \leq S$ c.t.p.
- f es **esencialmente acotada** si tiene una cota esencial.
- $L_\infty := L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu) := \{ [f], f \text{ esencialmente acotada} \}$.
- $\forall f \in L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu), \|f\|_\infty := \inf \{ S, \text{ cota esencial de } f \}$.

Como antes, escribimos f en vez de $[f]$, pero debemos recordar que cualquier propiedad de $f \in L_\infty$ debe ser satisfecha por todos los representantes de $[f]$.

Por ejemplo, dada $f \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, no tiene sentido afirmar que f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$, ya que, si un representante $f_1 \in [f]$ fuera continuo en x , redefiniendo el valor de $f_1(x)$, obtendríamos otro representante $f_2 \in [f]$ que sería discontinuo en ese punto x .

Lema: $\forall f \in L_\infty, \|f\|_\infty$ es una cota esencial de f .

Dem.: Ej. (Ej. 6.T.) Hay que demostrar que $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p.

Teor.: $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un **espacio de Banach**.

Dem.: Es fácil ver que $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un E.V.N. **Ej.** Veamos que es **completo**.

Sea $\{f_n\}$ una **sucesión de Cauchy en L_∞** . (1)

Como $\|\cdot\|_\infty$ es cota esencial, $\forall m, n \in \mathbb{N}, \exists M_{mn} \in \mathcal{X} : \mu(M_{mn}) = 0$ y

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \quad \forall x \notin M_{mn}.$$

Sea $M := \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} M_{mn}$. Entonces, $\mu(M) = 0$ y, $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \quad \forall x \in X \setminus M. \quad (2)$$

Entonces, $\forall x \in X \setminus M, \{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} .

Por lo tanto, como \mathbb{R} es completo, $\forall x \in X \setminus M, \exists \lim_n f_n(x) \in \mathbb{R}$.

$$\text{Sea } f(x) := \begin{cases} \lim_n f_n(x), & x \notin M, \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Entonces, **f es medible**. Veamos que $f \in L_\infty$ y $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. $\xRightarrow{(1)} \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$$\xRightarrow{(2)} \forall m, n \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M.$$

Tomando $\lim_{m \rightarrow \infty}$ tenemos que **$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M$** .

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M \Rightarrow f \in L_\infty, \\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$