UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

P1 (15 pts.)

1. Encontrar la serie de Taylor de $Q(z) = \frac{z^2+1}{z-1}$ y su región de convergencia-
2. En seguida usando la Serie anterior deducir $Q^{(n)}(0),\ n = 0, 1, 2, \ldots$
3. Encontrar la Serie de Laurent de $Q(z)$ en torno a $z = 0$ en la región $|z| > 1$.

Solución Propuesta

Previo: $Q(z) = z + 1 + \frac{2}{z-1}$

1. Es una aplicación directa de la Serie Geométrica

$$\begin{aligned} Q(z) &= z + 1 - (2)\frac{1}{1-z} \\ &= z + 1 - (2)\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1 \\ &= -1 - z - 2\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

2. Por definición de Serie de Taylor

$$Q(0) = -1, \quad Q'(0) = -1, \quad Q^{(n)}(0) = -2n!,\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

3. Re-escribimos, para $|z| > 1$, $Q(z) = 1 + z + (\frac{2}{z})\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$
Usando nuevamente la Serie geométrica

$$\begin{aligned} Q(z) &= z + 1 + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k} + 1 + z \\ &= \cdots + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{\mathbf{2}}{z} + 1 + z, \qquad z| > 1 \end{aligned}$$

P2 (8+8 pts.)

1. Los puntos $z_1 = -i, z_2 = 1$ y $z_3 = i$ definen la trayectoria poligonal positivamente orientada $[z_1, z_2, z_3]$. Evaluar $\displaystyle\int_{[z_1,z_2,z_3]} \frac{\mathbf{Ln}(z)}{\mathbf{z}} dz.$

2. Determinar las singularidades de $f(z) = \frac{z+\cos(\pi z)}{(z-1)(z^2-1)}$ y evaluar $\displaystyle\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)dz$

Solución Propuesta

1. El integrando es analítico en la región $\text{Re}\{z\} > 0$ y luego se puede aplicar el TFC y observando que $F(z) = \frac{1}{2}\text{Ln}^2(z)$ es una primitiva del integrando. Como la trayectoria es positivamente orientada

$$\begin{aligned} \int_{[z_1,z_2,z_3]} \frac{\mathbf{Ln}(z)}{\mathbf{z}} dz &= \int_{[z_1,z_2]} \frac{\mathbf{Ln}(z)}{\mathbf{z}} dz + \int_{[z_2,z_3]} \frac{\mathbf{Ln}(z)}{\mathbf{z}} dz \\ &= F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} + F(z)\Big|_{z_2}^{z_3} \\ &= F(z_3) - F(z_1) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\ln|i| + i\tfrac{\pi}{2}\Big]^2 - \tfrac{1}{2}\Big[\ln|-i| - i\tfrac{\pi}{2}\Big]^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Re escribimos la función

$$f(z) = \frac{z+\cos(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)}$$

luego

- $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = 1 \cdot \dfrac{1}{2} \neq 0$ luego $z = 1$ es un polo simple.
- $\lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = \dfrac{-2}{4} \neq 0$ luego $z = -1$ es un polo simple.

Finalmente como

$$Res_1(f(z), 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \frac{1}{2}$$

se tiene

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)dz = (2\pi i)(\tfrac{1}{2}) = i\pi.$$

P3 (8+8 pts.)

1. Probar que si f tiene un polo simple en z_0 y g es analítica en z_0. Entonces

$$\mathrm{Res}_1(f(z)g(z), z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}_1(f(z), z_0)$$

2. Como $\mathrm{Res}_1(\cot(\pi z), k) = \frac{1}{\pi}$ cualquiera sea el entero k. Usando este resultado en conjunto con la primera parte evalué

$$\oint_{[z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]} \frac{\cot(\pi z)}{1+z^4} dz.$$

donde $z_1 = -\frac{1}{2}(1+i), z_2 = \frac{1}{2}(3-i), z_3 = \frac{1}{2}(3+i)$ y $z_4 = \frac{1}{2}(-1+i)$

Solución Propuesta

1. Como f tiene un polo simple en z_0 entonces se puede escribir

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + h(z), \quad b_1 = \mathrm{Res}_1(f(z), z_0)$$

donde $h(z)$ es una función analítica (Recordar la definición de polo de orden N). Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_1(f(z)g(z), z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\Big[\frac{b_1}{z - z_0} + h(z)\Big]g(z) \\ &= b_1 g(z_0) + 0 \end{aligned}$$

2. Ninguna raíz cuarta de -1 es encerrada por el rectángulo $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]$. pero, si encierra las raíces $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ de $\cot(\pi z)$. Enseguida, si $g(z) = \frac{1}{1+z^4}$ se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{[z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]} \frac{\cot(\pi z)}{1+z^4} dz &= \oint_{|z| = \frac{1}{10}} g(z)\cot(\pi z) dz + \oint_{|z-1| = \frac{1}{10}} (z)\cot(\pi z) dz \\ &= 2\pi i\big[g(0)\mathrm{Res}(\cot(\pi z), 0) + g(1)\mathrm{Res}(\cot(\pi z), 1)\big] \\ &= 2i\big[g(0) + g(1)\big] = 3i \end{aligned}$$

P4 (13 pts.) Defina un dominio indentado para determinar el

$$(VP) \qquad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin(x)}{x^2 - a^2} dx.$$

Solución Propuesta

- Valor principal requerido es igual a

$$\begin{aligned} VP\ \alpha &= \operatorname{Im}\Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xe^{ix}}{(x-a)(x+a)} dx \Big\} \\ &= \operatorname{Im}\Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx \Big\} + \operatorname{Im}\Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+a} dx \Big\} \\ &= \end{aligned}$$

- Aplicando el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx = i\pi e^{ia} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+a} dx = i\pi e^{-ia}$$

- Usando la Fórmula de Euler

$$VP\ \alpha = 2\pi\cos(a).$$

Los detalles han sido presentado en la Clase de Práctica.