Análisis Numérico III
Problemas de valores de frontera para EDPs elípticas
Módulo 4, Presentación 8

Raimund Bürger

12 de mayo de 2022

4.1. Clasificación

Una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ para una función buscada $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ es la ecuación

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_n x_n}\right) = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Las ecuaciones de segundo orden que aparecen en las aplicaciones casi siempre son cuasi-lineales, semi-lineales o lineales y pueden ser representadas en la forma

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} u_{x_i x_k} = f. \tag{4.1}$$

4.1. Clasificación

Definición 4.1 Una ecuación diferencial parcial se llama

- cuasi-lineal, si por lo menos uno de los coeficientes A_{ik} es una función de por lo menos una de las variables $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$,
- semi-lineal, si las funciones A_{ik} son a lo más funciones de $x_1, \dots, x_n$, pero f depende en forma no lineal de por lo menos una de las variables $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$,
- lineal, si las funciones coeficientes A_{ik} son a lo más funciones de $x_1, \dots, x_n$, y

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i u_{x_i} + Au + B,$$

donde $A_1, \dots, A_n$, A y B pueden ser funciones de las variables independientes $x_1, \dots, x_n$.

4.1. Clasificación

Para la clasificación según tipo, definimos la forma cuadrática

$$Q = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} p_i p_k \tag{4.2}$$

con las variables $p_1, \ldots, p_n$. Definiendo la matriz $\boldsymbol{A} := (A_{ik})$ y el vector $\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$, podemos escribir (4.2) como

$$Q = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}.$$

Se supone que $\boldsymbol{A}$ es simétrica; si no lo es, reemplazamos $\boldsymbol{A}$ por

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}).$$

Supongamos que en un dominio $B \subset \mathbb{R}^n$ existe una solución $u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, \ldots, x_n)$. En el caso cuasi-lineal, se supone que la solución está insertada en los A_{ik}, entonces en cada caso $\boldsymbol{A}$ depende sólo de $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

4.1. Clasificación

Debido a la simetría de $\boldsymbol{A}$, existe una matriz ortonormal $\boldsymbol{T}$ tal que

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B},$$

donde $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_n)$, y $B_1, \dots, B_n$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Definiendo $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$, tenemos

$$Q = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{n} B_i q_i^2.$$

Se llama índice inercial τ al número de los B_i negativos y defecto δ al número de los $B_i = 0$ de la forma cuadrática Q.

Definición 4.2 En $\boldsymbol{x} \in B \subset \mathbb{R}^n$, la EDP (4.1) se llama

- hiperbólica, si allí $\delta = 0$ y $\tau = 1$ o $\tau = n - 1$,
- parabólica, si allí $\delta > 0$,
- elíptica, si allí $\delta = 0$ y $\tau = 0$ o $\tau = n$, y
- ultrahiperbólica, si allí $\delta = 0$ y $1 < \tau < n - 1$ (obviamente, esto puede ocurrir sólo si $n \geqslant 4$).

4.1. Clasificación

La clasificación es del tipo geométrico para EDPs de segundo orden, dado que

$$\sum_{i=1}^{n} B_i x_i^2 = c, \quad c > 0$$

es un hiperboloide, un paraboloide o un elipsoide en los respectivos casos de la Definición 4.2.

La clasificación puede ser realizada sólo en un punto $\boldsymbol{x}$, y entonces es de naturaleza local. Si todos los coeficientes A_{ik} son constantes, la clasificación es global.

El tipo de una ecuación cuasi-lineal no sólo depende de $\boldsymbol{x} \in B \subset \mathbb{R}^n$, sino que también del valor de la solución. Por ejemplo, la ecuación

$$u_{x_1 x_1} + u u_{x_2 x_2} = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica en un punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ dependiendo de si $u(\boldsymbol{x}) < 0$, $u(\boldsymbol{x}) = 0$ o $u(\boldsymbol{x}) > 0$ en este punto.

4.1. Clasificación

Sea $n = 2$, y ponemos $x = x_1$ e $y = x_2$. Consideremos la ecuación

$$Lu \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f, \quad \text{es decir,} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \qquad (4.3)$$

con los valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}.$$

Obviamente,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2 && \text{si } ac - b^2 < 0, \\
&\lambda_1 = a + c, \quad \lambda_2 = 0 && \text{si } ac - b^2 = 0, \\
&\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 && \text{si } ac - b^2 > 0.
\end{aligned}$$

Lema 4.1 En un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fijo, la ecuación diferencial parcial (4.3) es del tipo $\left\{ \begin{array}{c} \text{hiperbólico} \\ \text{parabólico} \\ \text{elíptico} \end{array} \right\}$ si en este punto, $\left\{ \begin{array}{c} ac - b^2 < 0 \\ ac - b^2 = 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{array} \right\}$.

4.2. PVFs para ecuaciones elípticas

El tipo de las condiciones de borde adecuadas para (4.3) depende intrinsecamente del tipo de la ecuación.

Para ecuaciones hiperbólicas, los problemas de valores iniciales, y para ecuaciones parabólicas, los problemas de valores iniciales y de frontera son bien puestos en general. (También hay situaciones donde los problemas "vice versa" son bien puestos.) Para las ecuaciones elípticas, los problemas de valores de frontera en general son bien puestos.

Se considera un dominio $G \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado, cuya frontera ∂G es una curva diferenciable, es decir, existe el vector normal $\boldsymbol{\nu}$.

4.2. PVFs para ecuaciones elípticas

Si α, β y γ son funciones continuas dadas sobre $\bar{G}$, podemos identificar el primer problema de valores de frontera

$$Lu!` \equiv f \quad \text{para } (x,y) \in G, \quad u(x,y) = \gamma(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \partial G,$$

el segundo problema de valores de frontera

$$Lu \equiv f \quad \text{para } (x,y) \in G, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x,y) = \gamma(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \partial G,$$

y el tercer problema de valores de frontera

$$\begin{aligned} Lu \equiv f \quad \text{para } (x,y) \in G, \\ \alpha(x,y)u(x,y) - \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x,y) = \gamma(x,y) \quad \text{para } (x,y) \in \partial G, \end{aligned}$$

donde definimos

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

En lo siguiente, siempre se supone que existe una solución del problema de valores de frontera considerado.

4.3. PVFs y problemas variacionales

Consideremos la ecuación

$$Lu \equiv -a_{11}u_{xx} - 2a_{12}u_{xy} - a_{22}u_{yy} - a_1u_x - a_2u_y + au = f,$$

donde a_{ik}, a_i, a y f $(i,k = 1,2)$ son funciones de (x,y). Si $a_{ik} \in C^2(G)$ y $a_i \in C^1(G)$, $i,k = 1,2$, el operador

$$L^*u \equiv -(a_{11}u)_{xx} - 2(a_{12}u)_{xy} - (a_{22}u)_{yy} + (a_1u)_x + (a_2u)_y + au$$

se llama operador adjunto de L. Si $L^*u = Lu$ para toda función $u \in C^2(G)$, el operador L s llama autoadjunto sobre G; en este caso, $Lu = f$ se llama ecuación diferencial autoadjunta.

Un operador autoadjunto siempre es de la forma

$$Lu = -(a_{11}u_x)_x - (a_{12}u_x)_y - (a_{12}u_y)_x - (a_{22}u_y)_y + au. \quad (4.4)$$

Para $a_{11} \equiv a_{22} \equiv 1$ y $a_{12} \equiv a \equiv 0$ obtenemos el operador de Laplace

$$Lu = -\Delta_2 u \equiv -u_{xx} - u_{yy}.$$

4.3. PVFs y problemas variacionales

Existe una conexión entre los PVFs para ecuaciones autoadjuntas y problemas variacionales. Consideremos el problema

$$Lu = f \quad \text{en } G, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial G, \tag{4.5}$$

donde L es el operador autoadjunto (4.4). El dominio de L es el conjunto de todas las funciones definidas sobre $\bar{G} = G \cup \partial G$ y dos veces continuamente diferenciables sobre G que desaparecen sobre ∂G, es decir, este dominio es

$$\mathcal{D} := \left\{ v \in C^0(\bar{G}) \cap C^2(G) \mid v = 0 \text{ en } \partial G \right\}.$$

Así, el problema (4.5) puede ser escrito en la siguiente forma: se busca una solución de

$$Lv = f, \quad v \in \mathcal{D}. \tag{4.6}$$

Sea $L^2(G)$ el espacio de las funciones cuadraticamente integrables sobre G con el producto escalar

$$(v, w) := \int_G v(x, y) w(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \quad v, w \in L^2(G).$$

4.3. PVFs y problemas variacionales

La norma asociada es

$$\|v\|_2 := (v, v)^{1/2}.$$

Respecto a la ecuación $Lu = f$, se supone que

$$a_{ik} \in C^2(\bar{G}), \quad i, k = 1, 2, \quad a, f \in C^0(\bar{G}), \quad a(x, y) \geqslant 0, \quad (x, y) \in \bar{G},$$
$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x, y)\xi_i\xi_k \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad (x, y) \in \bar{G}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

donde $\alpha > 0$ es independiente de ξ_1 y ξ_2.

4.3. PVFs y problemas variacionales

Se sabe que bajo las hipótesis (4.7),

$$\forall v, w \in \mathcal{D}: \quad (v, Lw) = (Lv, w), \quad (Lv, v) > 0 \quad (v \neq 0).$$

Teorema 4.1 La función $u \in \mathcal{D}$ es una solución del PVF (4.6) con el operador elíptico autoadjunto L si y sólo si bajo las hipótesis (4.7) y definiendo $I[v] := (v, Lv) - 2(v, f)$, tenemos

$$I[u] = \min_{v \in \mathcal{D}} I[v].$$

Entonces podemos resolver el problema (4.5), (4.6) resolviendo

$$\begin{aligned} &(v, Lv) - 2(v, f) \\ &= \int_G \left(a_{11} v_x^2 + 2a_{12} v_x v_y + a_{22} v_y^2 + av^2 - 2vf \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad (4.8) \\ &\stackrel{!}{\longrightarrow} \min, \quad v \in \mathcal{D} \quad \text{(problema variacional).} \end{aligned}$$

Obviamente, no podemos resolver el problema variacional en forma exacta, sino que solamente en forma aproximada.

4.3. PVFs y problemas variacionales

Observamos que la integral en (4.8) no es definida solamente para funciones $v, w \in \mathcal{D}$, sino que para una clase de funciones mayor.

Definición 4.3 Una función v pertenece al espacio $V(G)$ si $v \in C^0(\bar{G})$, v es diferenciable por trozos con respecto a x e y sobre $\bar{G}$, y $v_x, v_y \in L^2(G)$, es decir,

$$\|v\|_{V(G)} := \left(\int_G \left(\bigl(v(x,y)\bigr)^2 + \bigl(v_x(x,y)\bigr)^2 + \bigl(v_y(x,y)\bigr)^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} < \infty.$$

(Se confirma fácilmente que $\|\cdot\|_{V(G)}$ es una norma.) Sea

$$D := \bigl\{ v \in V(G) \mid v = 0 \text{ sobre } \partial G \bigr\},$$

y para $v, w \in D$ la forma bilineal simétrica

$$[v, w] := \int_G \bigl(a_{11} v_x w_x + a_{12}(v_x w_y + v_y w_x) + a_{22} v_y w_y + a v w \bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Obviamente, $\mathcal{D} \subset D$ y $[v, w] = (Lv, w)$ para $v, w \in \mathcal{D}$

4.3. PVFs y problemas variacionales

Teorema 4.2 Sea $u \in \mathcal{D}$ la solución del problema de valores de frontera (4.6). Entonces

$$\forall v \in D : \quad I[u] \leqslant I[v],$$

donde

$$I[v] := [v, v] - 2(v, f) \quad \text{para } v \in D.$$

4.4. Métodos de diferencias

Consideremos ahora el problema modelo

$$\begin{aligned} -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in G := (0,1)^2, \\ u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial G, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $f \in C^0(\bar{G})$. Sobre $\bar{G} = G \cup \partial G$ se define una malla con $\Delta x = \Delta y = h$, donde G_h denota la totalidad de los puntos interiores y ∂G_h la de los puntos de frontera. Sea $u = u(x,y)$ una solución de la ecuación diferencial en (4.9), y sea $u \in C^4(\bar{G})$:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i,y_k) &= \frac{u(x_{i+1},y_k) - 2u(x_i,y_k) + u(x_{i-1},y_k)}{h^2} + \varepsilon_{ik}(h), \\ u_{yy}(x_i,y_k) &= \frac{u(x_i,y_{k+1}) - 2u(x_i,y_k) + u(x_i,y_{k-1})}{h^2} + \eta_{ik}(h), \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}(h) &= \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \vartheta_1 h, y_k), \quad -1 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1; \\ \eta_{ik}(h) &= \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_k + \vartheta_2 h), \quad -1 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.4. Métodos de diferencias

Insertando (4.10) y (4.11) en (4.9), obtenemos

$$\begin{aligned}
&(-\Delta_2 u)(x_i, y_k) - f(x_i, y_k) \\
&= \frac{1}{h^2}\big(4u(x_i, y_k) - u(x_{i-1}, y_k) - u(x_{i+1}, y_k) \\
&\qquad\qquad - u(x_i, y_{k-1}) - u(x_i, y_{k+1})\big) \\
&\quad - f(x_i, y_k) - \varepsilon_{ik}(h) - \eta_{ik}(h) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Despreciando el término $\varepsilon_{ik}(h) + \eta_{ik}(h) = \mathcal{O}(h^2)$, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned}
-(L_h \boldsymbol{u}^h)_{ik} &= \frac{1}{h^2}\big(4u_{ik}^h - u_{i-1,k}^h - u_{i+1,k}^h - u_{i,k-1}^h - u_{i,k+1}^h\big) \\
&= f(x_i, y_k), \\
& i, k = 1, \ldots, N_h - 1.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aquí u_{ik}^h son valores de la función de malla $\boldsymbol{u}^h$, la cual podemos representar como un vector con las componentes u_{ik}^h, $i, k = 1, \ldots, N_h - 1$.

4.4. Métodos de diferencias

Se presenta el problema de la enumeración apropiada de los u_{ik}^h. Por motivos que se excplicarán más abajo, definimos

$$\boldsymbol{u}^h := \left(u_{11}^h, u_{21}^h, \dots, u_{l-1,1}^h, u_{l-2,2}^h, \dots, u_{1,l-1}^h, \dots, u_{N_h-1,N_h-1}^h\right)^{\mathrm{T}},$$

es decir, después de u_{11}^h siguen sucesivamente los u_{ik}^h con $i+k = 3, 4, \dots, 2N_h - 2$, donde dentro del bloque con $i+k = l$ el ordenamiento es

$$u_{l-1,1}^h, u_{l-2,2}^h, \dots, u_{1,l-1}^h, \quad l = 3, 4, \dots, 2N_h - 2.$$

Espacio ad-hoc:

4.4. Métodos de diferencias

Después de multiplicar con h^2, el sistema (4.13) asume la forma

$$\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{b}(h). \tag{4.14}$$

Teorema 4.3 La matriz $\boldsymbol{A}(h)$ es una M-matriz i.d.d. y simétrica, y $\boldsymbol{A}(h)$ es una matriz tridiagonal por bloques de la forma

$$\boldsymbol{A}(h) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{H}_1 & & & \\ \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{H}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{H}_{s-2} & \boldsymbol{D}_{s-1} & \boldsymbol{H}_{s-1} \\ & & & \boldsymbol{H}_{s-1} & \boldsymbol{D}_s \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{D}_i$ son matrices diagonales (de diferentes tamaños) de la forma $\boldsymbol{D}_i = \operatorname{diag}(4, \dots, 4)$, $i = 1, \dots, s$; además,

$$\boldsymbol{b}(h) = h^2 \begin{pmatrix} f(h,h) \\ f(2h,h) \\ \vdots \\ f((N_h-1)h,(N_h-1)h) \end{pmatrix}.$$

4.4. Métodos de diferencias

Como $\boldsymbol{A}(h)$ es definida positiva, el sistema (4.14) puede ser resuelto usando el método SOR con $0 < \omega \leqslant 2$.

Dado que además $\boldsymbol{A}(h)$ es ordenada consistentemente, existe un parámetro óptimo de relajación ω_{opt} que asegura la velocidad de convergencia óptima del método SOR. Con nuestra enumeración de las componentes de $\boldsymbol{u}^h$ hemos entonces asegurado que la matriz es ordenada consistentemente y admite la existencia de ω_{opt}.

En la mayoría de casos, el sistema (4.14) es esparso, pero de gran tamaño. Por otro lado, se puede demostrar

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{A}(h)) = \|\boldsymbol{A}(h)\|_2 \|\boldsymbol{A}(h)^{-1}\|_2 = \mathcal{O}(h^{-2}) = \mathcal{O}(N_h^2),$$

es decir, el sistema es mal acondicionado para $h \to 0$.