

Universidad de Concepción
 Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
 Departamento de Ingeniería Matemática
 Dr. Raimund Bürger
 Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — lunes 8 de junio de 2015

Problema 1 (12 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 17 & 2 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

- a) Transformar \mathbf{A} a forma tridiagonal y aplicar el método de bisección para demostrar que \mathbf{A} es definida positiva. Se recuerda la fórmula

$$q_k = \alpha_k - \mu - \frac{(\beta_{k-1})^2}{q_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad q_0 := 1, \quad \beta_0 := 0, \quad (1)$$

relacionada a los elementos α_k y β_k de una matriz hermitiana tridiagonal \mathbf{T} . Partiendo de la enumeración $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ de los valores propios de \mathbf{T} , el índice j del valor propio deseado y de un intervalo $[a_0, b_0]$ que incluye el valor propio λ_j , la iteración del método de bisección procede como sigue para $s \in \mathbb{N}_0$:

$$\mu_s := \frac{a_s + b_s}{2}, \quad (2)$$

$$m := \#\{q_k \mid q_k < 0, \text{ calculados de (1) con } \mu = \mu_s\}, \quad (3)$$

$$a_{s+1} := \begin{cases} a_s & \text{si } m \geq j, \\ \mu_s & \text{sino,} \end{cases} \quad b_{s+1} := \begin{cases} \mu_s & \text{si } m \geq j, \\ b_s & \text{sino.} \end{cases} \quad (4)$$

- b) Usando nuevamente el método de bisección, determinar $r_\sigma(\mathbf{A})$ hasta un error de valor absoluto ≤ 0.1 .

Problema 2 (18 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

- a) Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz \mathbf{A} tiene tres valores propios reales distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, y determinar números α_i, β_i , $i = 1, 2, 3$, tales que $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de \mathbf{A} .

- b) Sean \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, 3$, los vectores propios de \mathbf{A} , es decir $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. Para la aproximación de los vectores propios se desea utilizar el método de Wielandt (iteración inversa) sin normalizar, dado por

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Demostrar que los “shifts” $\mu = \mu_1 = -2$, $\mu = \mu_2 = 7$ y $\mu = \mu_3 = 13$ son apropiados para aplicar el método (5) para la aproximación de \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 , respectivamente.

- c) Se considera $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$ como aproximación de \mathbf{u}_2 . Calcular una segunda aproximación \mathbf{x}_1 por el método (5), utilizando $\mu = \mu_2$, y a partir de \mathbf{x}_1 una aproximación mejorada de λ_2 .

Problema 3 (16 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

- a) Demostrar que \mathbf{A} posee tres valores propio $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, en particular $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, y que $\mathbf{x}_0 := (0, 0, 1)^T$ es un vector apropiado para iniciar la iteración directa (método de von Mises). Aviso:

$$\det(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 4.$$

- b) Determinar \mathbf{x}_2 (usando el algoritmo básico, sin normalizar), y calcular usando \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_1 un valor aproximado del valor propio. Para esta aproximación estimar el error rigurosamente.

Problema 4 (14 puntos). Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 100 & -10 & 1 \\ -100 & 20 & 0 \\ -100 & 20 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -10 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{R}.$$

- a) Ejecutar un paso del método de Wielandt para determinar el valor propio más pequeño de

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30000 & -5000 & 200 \\ -5000 & 900 & -30 \\ 200 & -30 & 2 \end{bmatrix}$$

usando $\mu = 0$. Elegir el vector inicial para la iteración de Wielandt como $(a, b, c)^T$, $a, b, c = \pm 1$ de tal forma que $\|(\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{x}_0\|_\infty$ sea lo más grande posible.

- b) Determinar una cota inferior realista para $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$.