UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218)

Pauta Evaluación 1, primer semestre 2024

PROBLEMA 1. (20 puntos) Inicialmente un tanque contiene 50 ℓ de una solución de agua con sal, con 5 gramos de sal por cada litro de solución. Desde el exterior, entra al tanque a 5 $\ell/minuto$ salmuera (agua con sal) con concentración de sal igual a 3 g/ℓ. Simultáneamente sale la mezcla del tanque a 2 $\ell/minuto$. El tanque se llena en una hora, y la mezcla en el tanque se mantiene uniformemente homogénea. ¿Cuál es la capacidad total del tanque? Encuentre la cantidad de sal en la mezcla del tanque desde el instante inicial hasta que el tanque se llena.

Solución

Elegimos:

- t: tiempo medido en minutos
- $X(t)$: cantidad de sal (en gramos) en el instante t
- $V(t)$: volumen de la mezcla dentro del tanque (en litros) en el instante t

Primeramente, examinamos la evolución del volumen de la mezcla que se encuentra dentro del tanque. Desde el instante inicial hasta que el tanque se llena ($t \in [0, 60]$) tenemos que

$$V'(t) = 5 - 2 = 3.$$

Luego

$$V(t) = \int 3\, dt = 3t + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Como $V(0) = 50$,

$$50 = 3 * 0 + C = C.$$

Por lo tanto,

$$V(t) = 3t + 50 \qquad\qquad \text{para todo } t \in [0, 60].$$

[4 **puntos**]

Ya que el tanque se llena a los 60 minutos y

$$V(60) = 3 * 60 + 50 = 230,$$

la capacidad total del tanque es de 230 ℓ. [1 **punto**]

Pasaremos a estudiar la cantidad de sal en la mezcla. Desde el instante inicial hasta que el tanque se llena ($t \in [0, 60]$) tenemos que

$$X'(t) = 5 * 3 - 2\frac{X(t)}{V(t)}.$$

Luego

$$X'(t) = 15 - \frac{2}{3t+50} X(t).$$

Inicialmente hay $5 * 50 = 250$ gramos de sal. Luego $X(0) = 250$.

[5 **puntos**]

Ahora, resolveremos el siguiente problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} X'(t) = 15 - \dfrac{2}{3t+50} X(t) & \forall t \in [0, 60] \\ X(0) = 250 \end{cases}$$

Ya que

$$X'(t) + \frac{2}{3t+50} X(t) = 15, \tag{1}$$

buscamos una función $A(t)$ tal que

$$A'(t) = \frac{2}{3t+50}.$$

Entonces,

$$A(t) = \int \frac{2}{3t+50} = \frac{2}{3} \ln (3t+50),$$

donde le asignamos el valor 0 a la constante de integración. Así que,

$$e^{A(t)} = \exp\left(\ln\left((3t+50)^{\frac{2}{3}}\right)\right) = (3t+50)^{\frac{2}{3}}.$$

Multiplicando (1) por $e^{A(t)}$ se llega a que

$$(3t+50)^{\frac{2}{3}} X'(t) + \frac{2}{(3t+50)^{\frac{1}{3}}} X(t) = (3t+50)^{\frac{2}{3}} 15,$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\left((3t+50)^{\frac{2}{3}} X(t)\right) = (3t+50)^{\frac{2}{3}} 15.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (3t+50)^{\frac{2}{3}} X(t) &= 15 \int (3t+50)^{\frac{2}{3}} \, dt \\ &= 15 \, \frac{1}{5} (3t+50)^{\frac{5}{3}} + C = 3 (3t+50)^{\frac{5}{3}} + C. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$X(t) = 3(3t+50) + \frac{C}{(3t+50)^{\frac{2}{3}}}.$$

[7 **puntos**]

Usando la condición inicial $X(0) = 250$ se obtiene

$$250 = X(0) = 3(3*0+50) + \frac{C}{(3*0+50)^{\frac{2}{3}}} = 150 + \frac{C}{50^{\frac{2}{3}}}.$$

De donde se obtiene

$$C = 100 * 50^{\frac{2}{3}} = 2 * 50^{\frac{5}{3}}.$$

Así que

$$X(t) = 3\,(3t+50) + \frac{2 * 50^{\frac{5}{3}}}{(3t+50)^{\frac{2}{3}}}.$$

Luego, en la mezcla del tanque hay $3\,(3t+50) + \frac{2*50^{\frac{5}{3}}}{(3t+50)^{\frac{2}{3}}}$ gramos de sal cuando $t \in [0, 60]$.

[3 **puntos**]

PROBLEMA 2.

Este problema consta de dos partes (a) y (b), cada una independiente de la otra. En las respuestas de cada parte, escriba los pasos intermedios que utilizó para llegar a la solución.

(a) (8 puntos) Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(b) (12 puntos) Determine la solución general de la EDO

$$(D^2 - 8D + 41)^2(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = 0.$$

Puede utilizar que $y(t) = e^t$ es una de sus soluciones.

Solución:

(a) El polinomio asociado a la EDO homogénea anterior es $p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - 3$ cuyas raíces son $\alpha_1 = -3$ y $\alpha_2 = 1$. Por tanto, las soluciones son

$$\begin{cases} y_1(t) &= e^{-3t}, \\ y_2(t) &= e^t \end{cases} \qquad (\mathbf{2pts}.)$$

y puesto que

$$W[\mathrm{e}^{-3t}, e^t](t) := \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & e^t \\ -3e^{-3t} & e^t \end{vmatrix} = 4\mathrm{e}^{-2t}$$

estas funciones son l.i. Así, por el Teorema de la dimensión la solución general de la EDO dada es

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \qquad (\mathbf{3pts}.)$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales que se determinan del sistema

$$\begin{cases} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= -1. \end{cases}$$

Esto es,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 1, \\ -3c_1 + c_2 &= -1. \end{cases}$$

de donde $c_1 = c_2 = 1/2$.

Finalmente la única solución al PVI dado, es

$$y(t) = (1/2)e^{-3t} + (1/2)e^{t}. \qquad \textbf{(3pts.)}$$

(*b*) Puesto que la EDO involucra dos operadores diferenciales lineales a coeficientes constantes, la EDO dada, que es de orden siete, tiene las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y &= 0, \qquad (2)\\ (D^2 - 8D + 41)^2 y &= 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

La ecuación característica asociada a la primera EDO es $(r^3 + 2r^2 - 13r + 10) = 0$, que tiene a $r = 1$ entre sus raíces. De esta forma obtenemos que

$$\begin{aligned}r^3 + 2r^2 - 13r + 10 &= (r-1)(r^2 + 3r - 10)\\ &= (r-1)(r-2)(r+5).\end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones para la primera EDO son

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{t},\\ y_2(t) = e^{2t},\\ y_3(t) = e^{-5t}. \end{cases} \qquad \textbf{(4pts.)}$$

De otra parte, la EDO $(D^2 - 8D + 41)y = 0$ tiene polinomio asociado

$$(r^2 - 8r + 41) = [r - (4 + 5i)][r - (4 - 5i)].$$

Por tanto, la EDO $(D^2 - 8D + 41)y = 0$ tiene soluciones

$$\begin{cases} y_4(t) = e^{4t}cos(5t),\\ y_5(t) = e^{4t}sen(5t). \end{cases} \qquad \textbf{(4pts.)}$$

Así, finalmente, si $u(x)$ es una solución arbitraria de la EDO

$$(D^2 - 8D + 41)^2(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = 0,$$

entonces

$$u(t) = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-5t} + c_4e^{4t}cos(5t) + c_5e^{4t}sen(5t) + c_6t\,e^{4t}cos(5t) + c_7t\,e^{4t}sen(5t)$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 y c_7 son constantes reales y arbitrarias.

(04 puntos)

PROBLEMA 3. Considere la EDO lineal no homogénea de segundo orden:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1}. \qquad (4)$$

1. (4 puntos) Encuentre la solución general de

$$z''(x) - 5z'(x) + 6z(x) = 0.$$

2. (2 puntos) Calcule el Wronskiano de las funciones que constituyen el Sistema Fundamental de Soluciones obtenido en el inciso anterior.

3. (12 puntos) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial (4) utilizando el método de variación de parámetros.

4. (2 puntos) Determine la solución general de la ecuación diferencial (4).

Solución

1. Polinomio característico:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Longrightarrow \text{Soluciones: } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

[2 puntos]

$\Longrightarrow$ Soluciones fundamentales:

$$y_1(x) = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{3x}$$

$\Longrightarrow$ **Solución general del problema homogéneo:**

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \qquad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

[2 puntos]

2. **Wronskiano de las soluciones fundamentales:**

$$W[e^{2x}; e^{3x}] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

[2 puntos]

3. Por variación de parámetros

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{3x}$$

[2 puntos]

con

$$u_1'(x) = \frac{1}{W[e^{2x}; e^{3x}]} \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{-5x} \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

[2 puntos]

$$\Longrightarrow u_1(x) = -\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+1} \overset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} -\int \frac{t\,dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\ln|t^2+1| = -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$$

[2 puntos]

y con

$$u_2'(x) = \frac{1}{W[e^{2x}; e^{3x}]} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = e^{-5x} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

[2 puntos]

$$\Longrightarrow u_2(x) = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \overset{\substack{t=e^x \\ dt=e^x dx}}{=} \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) = \arctan(e^x)$$

[2 puntos]

$\Longrightarrow$ **Solución particular:**

$$y_p(x) = e^{3x}\arctan(e^x) - \frac{e^{3x}}{2}\ln(e^{2x}+1)$$

[2 puntos]

4. **Solución general del problema no-homogéneo:**

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}\arctan(e^x) - \frac{e^{2x}}{2}\ln(e^{2x}+1)$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias. **[2 puntos]**