Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Tarea no. 5 — viernes 29 de junio de 2018

Plazo de entrega: miércoles 11 de julio de 2018, 10.15 horas

Problema 1.

a) Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Demostrar sin calcular el polinomio característico que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene tres valores propios reales distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, y determinar números α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$, tales que $\alpha_i \leq \lambda_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$.

b) Sea la matriz $\boldsymbol{B}$ dada por

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.04 \\ 0.01 & 2 & 0.01 \\ 0.02 & 0.02 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que $\boldsymbol{B}$ posee tres valores propios reales $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Considerando una transformación de similaridad con $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(0.1, 5, 1)$, demostrar que $\lambda_1 \in [0.995, 1.005]$.

Problema 2.

a) Sea $\boldsymbol{A} = \operatorname{blockdiag}(\boldsymbol{D}_1, \dots, \boldsymbol{D}_n)$ una matriz tridiagonal por bloques, donde los bloques $\boldsymbol{D}_i$ son cuadráticos. Demostrar que los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son la unión de los valores propios de todos los $\boldsymbol{D}_i$.

b) Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Usando estimaciones de los valores propios de matrices perturbadas, determinar los valores propios de $\boldsymbol{A}$ hasta un error de 10^{-5}. Aviso: Con alguna matriz $\boldsymbol{B}$ apropiada, considerar la diferencia $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$.

Problema 3. Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$r_i := \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad R_i := \big\{z : \ |z - a_{ii}| \leq r_i\big\}.$$

Demostrar que si $|a_{ii} - a_{jj}| > r_i + r_j$ para todos $i \neq j$, entonces $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Problema 4. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ satisface las presuposiciones para la ejecución de la iteración directa (método de von Mises), y que $\boldsymbol{x}_0 := (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ es un vector apropiado para iniciar la iteración.
b) Determinar $\boldsymbol{x}_3$ (usando el algoritmo básico, sin normalizar), y calcular usando $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_2$ un valor aproximado del valor propio. Para esta aproximación estimar el error rigurosamente.
c) Proceder en forma similar para la matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -20 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

Problema 5. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 17 & 2 \\ 8 & 2 & 21 \end{bmatrix}.$$

a) Transformar $\boldsymbol{A}$ a forma tridiagonal y demostrar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva.
b) Usando el método de bisección, determinar todos los valores propios hasta un error del valor absoluto ≤ 0.0625.

Problema 6. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ satisface las presuposiciones para la ejecución de la iteración directa (método de von Mises), y que $\boldsymbol{x}_0 := (0,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$ es un vector apropiado para iniciar la iteración.
b) Determinar $\boldsymbol{x}_3$ (usando el algoritmo básico, sin normalizar), y calcular usando $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_2$ un valor aproximado del valor propio. Para esta aproximación estimar el error rigurosamente.

Problema 7. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1000 & 20 & 2 \\ -500 & -40 & 5 \\ 500 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 20 & 2 \\ 0 & -30 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{LR}.$$

a) Ejecutar un paso del método de Wielandt para determinar el valor propio más pequeño de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ usando $\mu = 0$. Elegir el vector inicial para la iteración de Wielandt como $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$, $a,b,c = \pm 1$ de tal forma que $\|(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0\|_\infty$ sea lo más grande posible.
b) Determinar una cota inferior realista para $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2$.

Problema 8. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 17 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 20 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Transformar $\boldsymbol{A}$ a forma tridiagonal y demostrar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva.

b) Usando el método de bisección, determinar todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ grande hasta un error del valor absoluto ≤ 0.0625.

c) Sea μ una aproximación del valor propio de mayor valor absoluto de $\boldsymbol{A}$, obtenida en el paso (b). Calcular una aproximación del vector propio correspondiente.

Problema 9.

a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz del tipo Hessenberg. ¿$\boldsymbol{A}$ siempre es diagonalizable?

b) Sea $n = 4$ y

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Evaluando el polinomio característico $p(\lambda; \boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$ en puntos apropiados utilizando el método de Hyman, demostrar que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

c) Partiendo de $\lambda^{(0)} := 10$, aplicar tres pasos del método de Newton para obtener un valor aproximado $\lambda^{(3)}$ del valor propio mayor de $\boldsymbol{A}$. Utilizar el método de Hyman para evaluar $\mathrm{d}p(\lambda; \boldsymbol{A})/\mathrm{d}\lambda$.