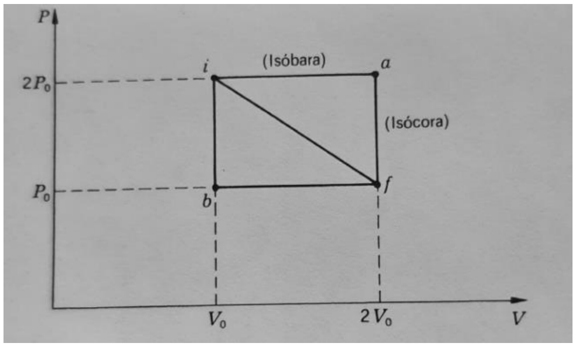
Clase 3.2. Seminario (jueves 11/09/25). EdE; coeficientes; Trabajo (W).

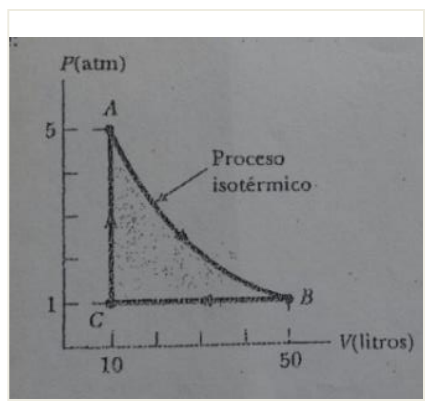
Problema 1: Se representan dos estados de equilibrio ***i*** y ***f*** . Existen varias formas de pasar de ***i*** a ***f.*** Determine el trabajo por las siguientes trayectorias: a) i-a-f ; b)i-b-f ; c) i-f.
Resp. a) $2P_0V_0$; b) P_0V_0 ; c) $\frac{3}{2}P_0V_0$



Problema 2: Un gas ideal y un bloque de cobre tienen volúmenes iguales de 0.5 m^3 a 300 K y presión atmosférica. La presión de ambos se incrementa reversible e isotérmicamente a 5 atm.
La compresibilidad del cobre es $\kappa = 0.7\,x\,10^{-6}\,atm^{-1}$. Calcular el trabajo en cada caso. $\boldsymbol{Resp}$: $a)\ -81518.0$ J ; b) -0.4255 J

Problema 3: Un mol de gas ideal se somete al ciclo que se muestra en la figura. El proceso AB es una expansión isotérmica reversible.

Calcule:
a) El trabajo en los Procesos AB; BC y CA.
b) El trabajo neto.
Resp: a) 8151.8 J; -4052 J; 0. b) 4099.8 J



Problema 4: Demostrar que el trabajo realizado en un proceso arbitrario sobre un gas puede expresarse en la forma:

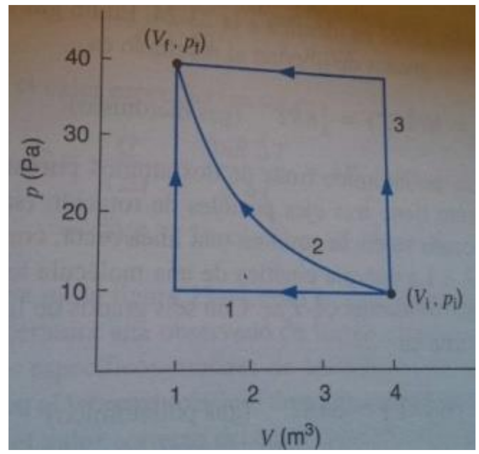
$$d\'W = P(\beta V\, dT - \kappa V dP)$$

Problemas Propuestos:

Problema 5: Una muestra de 0.11 mol de un gas ideal se comprime de un volumen de 4.0 m^3 a 1.0 m^3, mientras su presión aumenta de 10 Pa a 40 Pa.
Determine el trabajo efectuado a lo largo de las tres trayectorias indicadas (1, 2 y 3). La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico.
Resp: trayectoria 1: $-30\,J$; trayectoria 2: $-55.4\,J$; trayectoria 3: $-120\,J$

Datos:

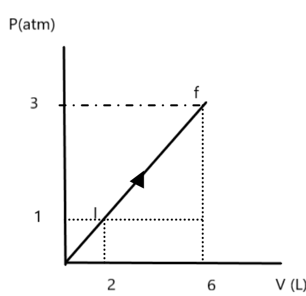
n = 0.11 mol
$V_i = 4.0\ m^3$; $P_i = 10$ Pa
$V_f = 1.0\ m^3$; $P_f = 40$ Pa



Problema 6: Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$$

Problema 7: Se tiene inicialmente en un tanque con émbolo móvil 2 L de aire a la presión de 1 atm y a la temperatura de 27^0C. Si este gas se expande de acuerdo al gráfico P-V mostrado, calcular:
a) El trabajo de ***i*** hasta **f**
b) El número de moles y la temperatura final T_f.
Resp. a) 810.4 J ; b) 0.0812 moles ; 2701 K



Problema 8: La presión de un gas en un cilindro dotado de un pistón desplazable varía con el volumen según la expresión: $P = \frac{C}{V^2}$. Donde C es una constante. La presión inicial es de 500 kPa, el volumen inicial de 0.05 m^3 y la presión final 200 kPa. Calcule:

a)El volumen final

b) El trabajo realizado por el sistema

Resp. a) 0.07905 m^3 ; b) 9187.2 J

Problema 9: Diez moles de un gas ideal a 100^0 C, se expanden isotérmicamente efectuando un trabajo de 400 J sobre sus alrededores. Inicialmente el gas ocupa un volumen de 10 L, determine:

a) Volumen final ocupado por el gas; b) Las presiones inicial y final del gas.

c) Represente el proceso en un Diagrama P-V

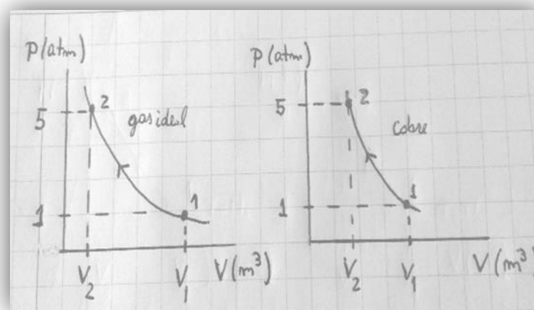
Resp. a) $1.013x10^{-2}$ m^3 ; b) $3.101x10^6$Pa y $3.061x10^6$ Pa

Problemas resueltos:

Problema 2: Un gas ideal y un bloque de cobre tienen volúmenes iguales de 0.5 m^3 a 300 K y presión atmosférica. La presión de ambos se incrementa reversible e isotérmicamente a 5 atm.
La compresibilidad del cobre es $\kappa = 0.7\ x\ 10^{-6}\ atm^{-1}$.
Calcular el trabajo en cada caso.

Datos:

V_1 = 0.5 m^3
T = 300 K
P_1 = 1 atm
$\kappa = 0.7\ x\ 10^{-6}\ atm^{-1}$
P_2 = 5 atm



Calcular
$W\ en\ cada\ caso\ =?$
a) Para gas ideal y b) para el cobre

Desarrollo

a) Gas ideal a T = 300 K = cte

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT\ ln\frac{V_2}{V_1} = P_1\ V_1\ ln\frac{V_2}{V_1}$$

A T = cte → $PV = nRT\ = cte$

$$P_1V_1 = P_2V_2 \rightarrow \quad V_2 = \frac{P_1}{P_2}V_1 = \left(\frac{1\ atm}{5\ atm}\right) x\ 0.5\ m^3 = 0.1\ m^3$$

$$W_{12} = P_1\ V_1\ ln\frac{V_2}{V_1} = 1\ x\ 1.013x10^5\ \frac{N}{m^2} x\ 0.5\ m^3\ x\ ln\left(\frac{0.1\ m^3}{0.5\ m^3}\right) = \ -81518.0\ \text{J}$$

b) Cobre

$Dato\ \kappa = 0.7\ x\ 10^{-6}\ atm^{-1}$

$\kappa = -\frac{1}{V_1}\left(\frac{V_2 - V_1}{P_2 - P_1}\right) = \quad -\frac{1}{V_1}\left(\frac{\Delta V}{\Delta P}\right)$ a T = constante

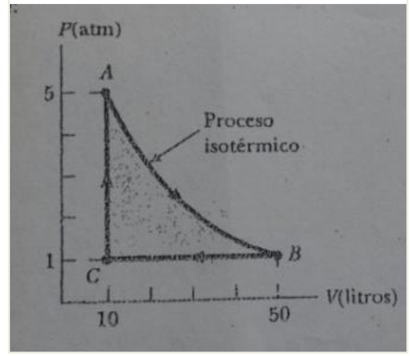
$\kappa = -\frac{1}{V_1}\frac{dV}{dP} \quad \rightarrow dV = -\kappa\, V_1 dP$

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{P_1}^{P_2} \kappa\, V_1 PdP = -\kappa\, V_1 \int_{P_1}^{P_2} PdP = -\kappa\, V_1 \left[\frac{P_2^2 - P_1^2}{2}\right]$$

$$W_{12} = -\kappa\, V_1 \left[\frac{P_2^2 - P_1^2}{2}\right] = -0.7\ x\ 10^{-6}\ atm^{-1}\ x\ \ 0.5\ m^3 x \left[\frac{5^2 atm^2 - 1^2 atm^2}{2}\right]$$

$$W_{12} = -4.2\ x\ 10^{-6} atm\ \ m^3 = -4.2\ x\ 10^{-6}\ x\ 1.013x10^5\ \frac{N}{m^2}\ m^3 = \ -0.4255 \text{ J}$$

Problema 3: Un mol de gas ideal se somete al ciclo que se muestra en la figura. El proceso AB es una expansión isotérmica reversible.



Calcule:
a) El trabajo en los Procesos AB; BC y CA.
b) El trabajo neto.
Resp: a) 8151.8 J; -4052 J; 0. b) 4099.8 J

Desarrollo:

Datos:

$P_A = 5$ atm; $\quad$ 1 atm = 1.013×10^5 N/m^2

$P_C = P_B = 1$ atm

$V_C = V_A = 10$ L ; $\quad$ 1L = $1\text{x}10^{-3}$ m^3

R = 8.31 J/mol K

a) Cálculo de los trabajos W_{AB} ; W_{BC} y W_{CA}

Proceso AB es isotérmico. T = cte

EdE gas ideal $\quad PV = nRT$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT\, ln\frac{V_B}{V_A} = P_A\, V_A\, ln\frac{V_B}{V_A} = P_B\, V_B\, ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$W_{AB} = 5\, x\, 1.013x10^5 \frac{N}{m^2}\, x\, 10\, x\, 1\, x\, 10^{-3} m^3\, ln\left(\frac{50\, x\, 1\, x\, 10^{-3} m^3}{10\, x\, 1\, x\, 10^{-3} m^3}\right) = 8151.8\text{ J}$$

Proceso BC es isobárico. P = cte

$$W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} PdV = P_B(V_C - V_B) = 1\, x\, 1.013x10^5 \frac{N}{m^2} x(10\, x\, 1\, x\, 10^{-3} m^3 - 50\, x\, 1\, x\, 10^{-3} m^3) = -4052\text{ J}$$

Proceso CA es isocórico. V = cte

$$W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} PdV = 0$$

b) Cálculo del trabajo Neto

$$W_{Neto} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 8151.8\text{ J} - 4052\text{ J} + 0$$

$$W_{Neto} = 4099.8\text{ J}$$

Problema 4: Demostrar que el trabajo realizado en un proceso arbitrario sobre un gas puede expresarse en la forma:

$$d\acute{}W = P(\beta V\, dT - \kappa V dP)$$

Desarrollo:

Sabemos que:

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad y \quad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$V = V(T, P)$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

$$dV = \beta V\, dT - \kappa V\, dP \qquad (1)$$

Sabemos que: $d\acute{}W = PdV \qquad (2)$

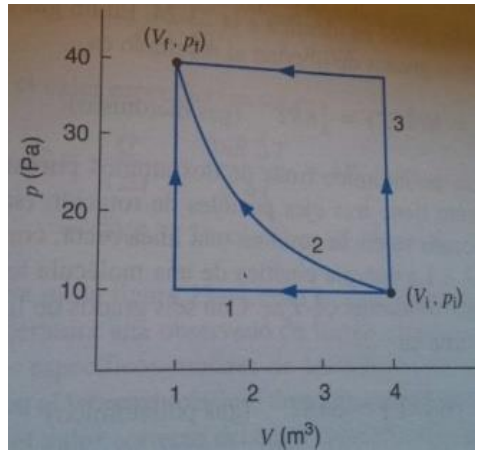
Reemplazando (1) en (2), se obtiene

$$d\acute{}W = P(\beta V\, dT - \kappa V\, dP)$$

Problema 5: Una muestra de 0.11 mol de un gas ideal se comprime de un volumen de 4.0 m^3 a 1.0 m^3, mientras su presión aumenta de 10 Pa a 40 Pa.
Determine el trabajo efectuado a lo largo de las tres trayectorias indicadas (1, 2 y 3). La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico.
Resp: trayectoria 1: $= -30\,J$; trayectoria 2: $-55.4\,J$; trayectoria 3: $-120\,J$

Datos:

n = 0.11 mol
$V_i = 4.0\ m^3$; $P_i = 10$ Pa
$V_f = 1.0\ m^3$; $P_f = 40$ Pa



Desarrollo:

Trayectoria 1: Hay un proceso a P = cte, seguido de un proceso a V=cte.
El W a V = cte es Cero.

$$W_1 = \int_{V_i}^{V_f} PdV + \int_{V_f}^{V_f} \overset{0}{\cancel{PdV}} = P_i(V_f - V_i) + 0 = 10Pa\ x\ (1.0\ m^3 - 4.0\ m^3)$$

$$W_1 = -30\,J$$

Trayectoria 2: La trayectoria 2 representa un proceso isotérmico. T = cte

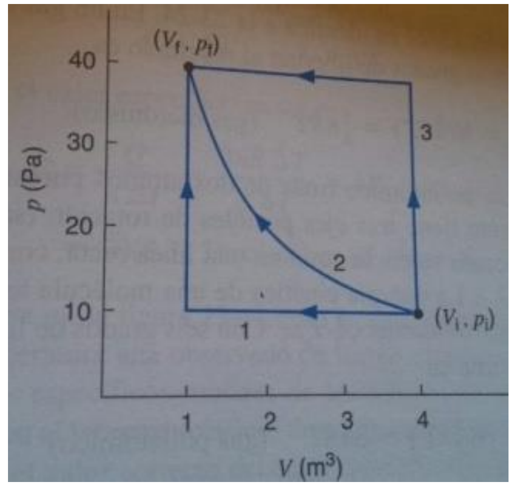
$$W_2 = \int_{V_i}^{V_f} PdV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT\ ln\frac{V_f}{V_i} = P_i V_i\ ln\frac{V_f}{V_i} = P_f V_f\ ln\frac{V_f}{V_i}$$

$$W_2 = 10\ Pa\ x\ 4.0\ m^3\ x\ \ln\frac{1.0\ m^3}{4.0\ m^3}$$

$$W_2 = -55.4\,J$$

Trayectoria 3: Hay un proceso a V = cte, seguido de un proceso a P=cte.

El W a V = cte es Cero.



$$W_3 = \cancelto{0}{\int_{V_i}^{V_i} PdV} + \int_{V_i}^{V_f} PdV \;=\; 0 \;+\; P_f\left(V_f - V_i\right) = \;40\; Pa\; x\; (1.0\, m^3 - \;4.0\;\; m^3)$$

$$W_3 = \;-120\, J$$

Problema 6: Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$$

Desarrollo:

Conocemos la relación

$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$ (*) y las definiciones de los coeficientes $\beta \;\; y \;\; \kappa$

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \;\; ; \;\; \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

La ecuación (*) puede escribirse como:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (**)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \beta V$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\kappa V$$

Reemplazando en (**) se tiene:

$$-V\kappa\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\beta V$$

Luego $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$