UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
<u>Evaluación 1</u>
Tiempo: 100 Mins.

1. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se define la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

   a) Muestre que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia creciente de conjuntos, es decir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \subseteq B_{n+1}.$$

   b) Suponga ahora que $\forall k \in \mathbb{N},\ A_{k+1} \subseteq A_k$. Pruebe que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

2. Sea la relación R en $\mathbb{N}^2$ definida por:

$$\forall\, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2, \quad x\, R\, y \iff x_1 \leq y_1 \wedge y_2 \leq x_2.$$

   a) Pruebe que R es relación de orden.
   b) Determine si R de orden total o parcial. Además, determine si R tiene un elemento máximo o un elemento mínimo.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T, L : V \to V$ transformaciones lineales tal que $T \circ L = L \circ T$.

   a) Pruebe que $T(Ker(L)) \subseteq Ker(L)$ y $T(Im(L)) \subseteq Im(L)$.
   b) Demuestre que $Ker(L) \subseteq Ker(L \circ T)$ y $Ker(T) \subseteq Ker(T \circ L)$. Deduzca que:

$$r(T \circ L) \leq \min\{r(T), r(L)\}.$$

JAL, semestre otoño de 2013.