# Análisis Numérico III
# Problemas de valores de frontera de ecuaciones diferenciales ordinarias
# Módulo 3, Presentación 7

Raimund Bürger

2 de mayo de 2022

# 3.3. Métodos de disparo

La solución de un problema de valores de frontera puede ser reducida a la solución de un número de problemas de valores iniciales. Esto es la idea básica de los métodos de disparo simple y múltiple.

**3.3.1 Métodos de disparo para problemas lineales** Comenzando con métodos de disparo simple, consideremos el problema

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{y} &\equiv \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(x), \quad a < x < b, \\ R\boldsymbol{y} &\equiv \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}(a) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Aquí $\boldsymbol{A}(x)$ es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son funciones continuas de $x$ en $[a, b]$, y las matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ son constantes. Cualquier PVF de mayor orden lineal puede ser reducido a este tipo.

# 3.3. Métodos de disparo

Método de disparo: Para un vector de parámetros $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)^{\mathrm{T}}$, calculamos la solución $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(x; \boldsymbol{s})$ del problema

$$L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{z}(a) = \boldsymbol{s}; \tag{3.29}$$

luego tratamos de determinar las componentes de $\boldsymbol{s}$ de tal forma que $\boldsymbol{z}$ también satisface las condiciones de frontera, es decir

$$R\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{z}(a; \boldsymbol{s}) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{z}(b; \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r}.$$

Eligiendo $\boldsymbol{s}$ de forma correcta, "disparamos" a las condiciones de frontera.

# 3.3. Métodos de disparo

Método de disparo para el problema (3.28):

1. Calcular $\boldsymbol{z}^0(x)$ de tal forma que
$$L\boldsymbol{z}^0 = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{z}^0(a) = 0. \tag{3.30}$$
2. Calcular un sistema fundamental $\boldsymbol{z}^i(x)$, $i = 1, \dots, n$, de soluciones del problema homogéneo $L\boldsymbol{z} = 0$, con la condición inicial $\boldsymbol{z}^i(a) = \boldsymbol{e}_i$ ($i$-ésimo vector unitario). Definiendo
$$\boldsymbol{Z}(x) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^1(x) & \cdots & \boldsymbol{z}^n(x) \end{bmatrix},$$
determinamos
$$\boldsymbol{z}(x; \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{z}^0(x) + \boldsymbol{Z}(x)\boldsymbol{s} = \boldsymbol{z}^0(x) + \sum_{i=1}^{n} s_i \boldsymbol{z}^i(x). \tag{3.31}$$
3. Suponiendo que $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}(b)$ es no singular, calculamos $\boldsymbol{s}$ como solución del sistema lineal
$$\bigl(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}(b)\bigr)\boldsymbol{s} = \bigl(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{z}^0(b)\bigr). \tag{3.32}$$

## 3.3. Métodos de disparo

Para el vector $\boldsymbol{s}$ que resulta de (3.32), la solución $\boldsymbol{z}(x;\boldsymbol{s})$ de (3.31) es la solución $\boldsymbol{z}^*(x)$ del PVF (3.28).

Para verificar esto, notamos primero que (3.31) es la solución del problema de valores iniciales (3.29), ya que

$$L\boldsymbol{z} = L\boldsymbol{z}^0 + \sum_{i=1}^{n} s_i L\boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{g} + 0 = \boldsymbol{g},$$

$$\boldsymbol{z}(a;\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{z}^0(a) + \sum_{i=1}^{n} s_i \boldsymbol{z}^i(a) = 0 + \sum_{i=1}^{n} s_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{s}.$$

Luego, del requerimiento $R\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= R(\boldsymbol{z}^0 + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{s}) \\
&= \boldsymbol{B}_1\big(\boldsymbol{z}^0(a) + \boldsymbol{Z}(a)\boldsymbol{s}\big) + \boldsymbol{B}_2\big(\boldsymbol{z}^0(b) + \boldsymbol{Z}(b)\boldsymbol{s}\big) \\
&= \big(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}(b)\big)\boldsymbol{s} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{z}^0(b),
\end{aligned}$$

lo que es precisamente (3.32).

# 3.3. Métodos de disparo

Efectivamente, hemos reducido la solución del PVF (3.28) a la solución de $n+1$ problemas de valores iniciales: un problema de valores iniciales es (3.30); los $n$ demás problemas son

$$L\boldsymbol{z}^i = 0, \quad \boldsymbol{z}^i(a) = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.33}$$

cuyas soluciones forman el sistema fundamental $\boldsymbol{Z}(x)$.

**Ejemplo 3.1** Consideremos el problema de valores de frontera

$$y'' - y = x^2 - 2, \quad 0 < x < 1,$$
$$y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 1.$$

Este PVF es equivalente al problema para un sistema de primer orden

$$\boldsymbol{y}' - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < 1; \quad \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, en este caso tenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = -\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I}.$$

## 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.1 (continuación)** Un planteo polinomial entrega

$$\boldsymbol{z}^0(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, con los vectores propios correspondientes $(1,1)^{\mathrm{T}}$ y $(1,-1)^{\mathrm{T}}$. Entonces, la solución general del sistema $\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0$ es

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \\ C_1 \mathrm{e}^x - C_2 \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Para obtener el sistema fundamental, es decir $\boldsymbol{z}^1$ y $\boldsymbol{z}^2$, exigimos que

$$\boldsymbol{z}^1(0) = \begin{pmatrix} C_{11} + C_{12} \\ C_{11} - C_{12} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{z}^2(0) = \begin{pmatrix} C_{21} + C_{22} \\ C_{21} - C_{22} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.1 (continuación)** Esto entrega $C_{11} = C_{12} = \frac{1}{2}$ y $C_{21} = -C_{22} = \frac{1}{2}$, entonces

$$\boldsymbol{z}^1(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{z}^2(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh x \\ \cosh x \end{pmatrix}.$$

. Luego calculamos

$$\boldsymbol{Z}(x) = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}, \quad \det \boldsymbol{Z}(x) = 1,$$

$$\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Z}(1) = \begin{bmatrix} 1 - \cosh 1 & -\sinh 1 \\ -\sinh 1 & 1 - \cosh 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\alpha := \cosh 1$ y $\beta := \sinh 1$ hay que resolver (3.32), es decir

$$(1-\alpha)s_1 - \beta s_2 = -1,$$

$$-\beta s_1 + (1-\alpha)s_2 = -1-$$

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.1 (continuación)** La solución es

$$s_1^* = s_2^* = \frac{\alpha - \beta + 1}{2\beta} =: \gamma = 0{,}58198.$$

Entonces, la solución deseada del problema de valores de frontera es

$$\boldsymbol{z}(x; \boldsymbol{s}^*) = \boldsymbol{z}^*(x) = \begin{pmatrix} -x^2 + \gamma(\cosh x + \sinh x) \\ -2x + \gamma(\sinh x + \cosh x) \end{pmatrix}.$$

Esta solución también satisface las condiciones de frontera

$$\boldsymbol{z}^*(0) - \boldsymbol{z}^*(1) = (0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

**3.3.2 Método de disparo numérico para problemas lineales** En general, los $n+1$ problemas de valores iniciales no pueden ser resueltos exactamente; hay que utilizar métodos numéricos.

## 3.3. Métodos de disparo

Usando un método de paso simple (o de paso múltiple), se determinan soluciones aproximadas, es decir, vectores

$$\boldsymbol{z}_j^{h,i} = \left(z_{1,j}^{h,i}, \dots, z_{n,j}^{h,i}\right)^{\mathrm{T}}, \quad j = 0, \dots, N, \quad i = 0, \dots, n$$

con los valores iniciales

$$\boldsymbol{z}_0^{h,0} = 0; \quad \boldsymbol{z}_0^{h,i} = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

los vectores $\boldsymbol{z}_j^{h,0}$ son los valores aproximados de la solución de (3.30), evaluada en los puntos $x_j$, $j = 0, \dots, N$, y los vectores $\boldsymbol{z}_j^{h,i}$, $i = 1, \dots, n$, corresponden a los PVI homogéneos (3.33). Como en el paso 2 arriba, formamos en cada punto de malla $x_j$ las matrices

$$\boldsymbol{Z}_j^h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_j^{h,1} & \cdots & \boldsymbol{z}_j^{h,n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, N,$$

es decir, las matrices cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{z}_j^{h,i}$.

## 3.3. Métodos de disparo

Resulta el siguiente algoritmo:

1. Usando el método de paso simple o de pasos múltiples, determinamos los vectores $\boldsymbol{z}_j^{h,0}$, donce $\boldsymbol{z}_0^{h,0} = 0$ para $j = 0, \ldots, N$.
2. Para $\boldsymbol{z}_0^{h,i} = \boldsymbol{e}_i$ se calculan (mediante el método de paso simple o de pasos múltiples) los vectores $\boldsymbol{z}_j^{h,i}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, N$. Ponemos

$$\boldsymbol{z}_j^h = \boldsymbol{z}_j^{h,0} + \boldsymbol{Z}_j^h \boldsymbol{s}^h = \boldsymbol{z}_j^{h,0} + \sum_{i=1}^{n} s_i^h \boldsymbol{z}_j^{h,i}. \tag{3.34}$$

3. Si $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Z}_N^h$ es regular, resolvemos el sistema

$$(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Z}_N^h)\boldsymbol{s}^{h,*} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{z}_N^{h,0}. \tag{3.35}$$

Para el vector $\boldsymbol{s}^{h,*}$ que resulta de (3.35), (3.34) es, en los puntos de malla $x_0, \ldots, x_N$, una solución aproximada $\boldsymbol{z}_j^{h,*}$ de la solución exacta $\boldsymbol{z}^*(x_j)$ del PVF (3.28).

# 3.3. Métodos de disparo

La función de malla determinada así satisface las condiciones de frontera

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{z}_0^{h,*} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{z}_N^{h,*} = \boldsymbol{r};$$

en virtud de

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{B}_1\big(\boldsymbol{z}_0^{h,0} + \boldsymbol{Z}_0^h\boldsymbol{s}^h\big) + \boldsymbol{B}_2\big(\boldsymbol{z}_N^{h,0} + \boldsymbol{Z}_N^h\boldsymbol{s}^h\big),$$

y dado que $\boldsymbol{z}_0^{h,0} = 0$ y $\boldsymbol{Z}_0^h = \boldsymbol{I}$, tambien tenemos (3.35). Si el método de paso simple o de pasos múltiples es del orden $p$, entonces

$$\boldsymbol{z}^*(x_j) - \boldsymbol{z}_k^{h,*} = \mathcal{O}(h^p), \quad j = 0, \dots, N;$$

el esquema es del mismo orden.

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.2** Consideremos nuevamente el PVF frontera

$$\begin{gathered} y'' - y = x^2 - 2, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 1. \end{gathered}$$

Este PVF es equivalente al problema para un sistema de primer orden

$$\boldsymbol{y}' - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < 1; \quad \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, en este caso tenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = -\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I}.$$

Usando el método de Euler explícito ($p = 1$), obtenemos los siguientes valores numéricos para $h = 0{,}125$ ($N = 8$).

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.2 (continuación)**

1. Usando

$$\boldsymbol{z}_{j+1}^{h,0} = \boldsymbol{z}_j^{h,0} + 0{,}125 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_j^{h,0} + 0{,}125 \begin{pmatrix} 0 \\ (0{,}125j)^2 - 2 \end{pmatrix},$$

$$j = 0, \dots, 7,$$

$$\boldsymbol{z}_0^{h,0} = 0$$

obtenemos los valores de las primeras dos filas del Cuadro 3.1:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_{1,j}^{h,0}$ | 0 | −0,03125 | −0,06226 | −0,15528 | −0,27832 | −0,43113 | −0,61344 | −0,82494 |
| $z_{2,j}^{h,0}$ | −0,25 | −0,49805 | −0,74414 | −0,98434 | −1,22250 | −1,45846 | −1,69204 | −1,92302 |
| $z_{1,j}^{h,1} = z_{2,j}^{h,2}$ | 1 | 1,01563 | 1,04688 | 1,09400 | 1,15748 | 1,23805 | 1,33671 | 1,45471 |
| $z_{2,j}^{h,1} = z_{1,j}^{h,2}$ | 0,125 | 0,25 | 0,37695 | 0,50781 | 0,64456 | 0,78925 | 0,94401 | 1,11110 |
| $z_{1,j}^{h,*}$ | 0,69331 | 0,92313 | 0,78253 | 0,78259 | 0,76584 | 0,73397 | 0,68892 | 0,63288 |
| $z_{2,j}^{h,*}$ | 0,31256 | 0,15118 | 0,00054 | −0,13406 | −0,25499 | −0,36042 | −0,44836 | −0,51673 |

CUADRO 3.1. Ejemplo 3.1: Solución de un problema de valores de frontera mediante el método de disparo: valores numéricos.

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.2 (continuación)**

2. Luego calculamos

$$\boldsymbol{z}_{j+1}^{h,i} = \boldsymbol{z}_j^{h,i} + 0{,}125 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_j^{h,i}, \quad i = 1, 2;$$

$$\boldsymbol{z}_0^{h,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_0^{h,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\boldsymbol{z}_k^{h,1} = (z_{1,k}^{h,1}, z_{2,k}^{h,1})^{\mathrm{T}}$, esto implica que $\boldsymbol{z}_k^{h,2} = (z_{2,k}^{h,1}, z_{1,k}^{h,1})^{\mathrm{T}}$. La tercera y la cuarta fila del Cuadro 3.1 muestran los valores numéricos.

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.2 (continuación)**

3. Hay que resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{Z}_8^h\right) \boldsymbol{s}^{h,*} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{z}_8^{h,0},$$

es decir

$$\left( \boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 1{,}45471 & 1{,}11110 \\ 1{,}11110 & 1{,}45471 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} s_1^{h,*} \\ s_2^{h,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}82494 \\ -1{,}92302 \end{pmatrix}.$$

El resultado es $s_1^{h,*} = 0{,}63288$, $s_2^{h,*} = 0{,}48345$. Las soluciones (3.31) son

$$\boldsymbol{z}_j^{h,*} = \boldsymbol{z}_j^{h,0} + s_1^{h,*} \boldsymbol{z}_j^{h,1} + s_2^{h,*} \boldsymbol{z}_j^{h,2}, \quad \boldsymbol{z}_0^{h,1} = \boldsymbol{s}^{h,*} = \begin{pmatrix} 0{,}63288 \\ 0{,}48345 \end{pmatrix}.$$

Las dos últimas filas del Cuadro 3.1 muestran los valores numéricos. La condición de borde en $x = 1$ es satisfecha aproximadamente ya que

$$\boldsymbol{z}_0^{h,*} - \boldsymbol{z}_8^{h,*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}00018 \end{pmatrix}.$$

# 3.3. Métodos de disparo

## 3.3.3 Métodos de disparo para problemas de valores de frontera no lineales

El método de disparo ya discutido de la reducción de un PVF a la solución de $n+1$ problemas de valores iniciales es simple por dos motivos:

1. Para un problema lineal la existencia de la solución del PVI

$$\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(x), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{s}$$

   para todo $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ y $x \in [a, b]$ está asegurada siempre que $\boldsymbol{A} \in C[a, b]$.
2. Existe un sistema fundamental $\boldsymbol{Z}(x)$ que describe la solución general del PVI homogéneo.

Ambas propiedades no son válidas para un problema de valores de frontera no lineal.

## 3.3. Métodos de disparo

Para describir el método de disparo que puede ser aplicado en el caso no lineal, consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{R}\bigl(\boldsymbol{y}(a), \boldsymbol{y}(b)\bigr) = 0, \\ &\boldsymbol{F} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{R} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

El problema de valores iniciales asociado es

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{s}. \tag{3.36}$$

Se supone que la solución de (3.36) existe en el intervalo $[a, b]$ completo; si $\boldsymbol{F}$ depende en forma diferenciable de $\boldsymbol{y}$, esa solución existe en un intervalo suficientemente pequeño $[a, a + \delta]$.

En lo siguiente, se supone que $\boldsymbol{F}$ es diferenciable. Entonces, la solución de (3.36) también es una función de $\boldsymbol{s}$, y depende en forma diferenciable de $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{s}).$$

# 3.3. Métodos de disparo

La ecuación se escribe entonces como

$$\boldsymbol{y}'(x;\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{F}\big(x, \boldsymbol{y}(x;\boldsymbol{s})\big); \quad \boldsymbol{y}(a;\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}.$$

Ahora tenemos que resolver el sistema no lineal

$$\boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{y}(a;\boldsymbol{s}), \boldsymbol{y}(b;\boldsymbol{s})\big) = \boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}(b;\boldsymbol{s})\big) = 0$$

con respecto a $\boldsymbol{s}$, donde $\boldsymbol{y}(b;\boldsymbol{s})$ es la solución de (3.36) evaluada en $x = b$.

En general, este sistema no lineal puede ser resuelto solamente por el método de Newton-Raphson o alguna de sus variantes.

Para discutir eso, definimos

$$\boldsymbol{G}(s) := \boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{y}(b;\boldsymbol{s})\big).$$

Hay que determinar la matriz $\nabla_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ para poder ejecutar el método de Newton-Raphson.

# 3.3. Métodos de disparo

Teóricamente podemos calcular esa matriz a través de un problema de valores iniciales. Sin embargo, es más simple (y el método preferido en las aplicaciones) aproximar la matriz por diferencias finitas, por ejemplo

$$\nabla_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) \approx \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s} + \tau \boldsymbol{e}_1) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) & \cdots & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s} + \tau \boldsymbol{e}_n) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) \end{bmatrix}.$$

Para calcular $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ y la aproximación para $\nabla_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ se deben resolver $n+1$ problemas de valores iniciales (3.36) con los valores iniciales $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s} + \tau \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{s} + \tau \boldsymbol{e}_n$.

Un paso con el método de Newton-Raphson (amortiguado) entrega un valor mejorado de $\boldsymbol{s}$ con el cual se repite el procedimiento, etc. En la mayoría de las aplicaciones, no se conoce un valor inicial $\boldsymbol{s}^{(0)}$ muy bueno para buscar $\boldsymbol{s}^*$ con $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}^*) = 0$.

Además, para algún valor de $k$, $\boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{s}^{(k)})$ puede no existir en el intervalo completo $[a, b]$, pero sólo en un sub-intervalo.

# 3.3. Métodos de disparo

**Ejemplo 3.3** Consideremos el problema

$$y'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = -4$$

con la solución exacta $y(x) = \ln(s^* x + 1) + 1$, $s^* = \mathrm{e}^{-5} - 1$, y

$$y'(x) = \frac{s^*}{s^* x + 1},$$

entonces, $y'(0) = s^*$. El problema de valores iniciales

$$y'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s$$

tiene la solución $y(x; s) = 1 + \ln(sx + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} y(1; -0{,}99) &= -3{,}6052, \\ y(1; s^* = -0{,}993262053\ldots) &= -4, \\ y(1; -0{,}999) &= -5{,}9078, \end{aligned}$$

mientras que para $s \leqslant -1$, la solución del problema de valores iniciales existe solamente en en intervalo $[0, -1/s]$.

# 3.3. Métodos de disparo

**3.3.4 Métodos de disparos múltiples** Como para cada $x_i \in [a, b]$, la solución del problema de valores iniciales

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_i) = \boldsymbol{s}^i$$

existe en un intervalo $x_i - \delta_i < x < x_i + \delta_i$, podemos tratar de evitar el problema de no existencia de una solución global mediante la subdivisión en problemas parciales.

Para una partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

y valores iniciales apropiados $\boldsymbol{s}^i \in \mathbb{R}^n$ en las posiciones $x_i$ se definen soluciones parciales $\boldsymbol{y}_{[i]}(x; \boldsymbol{s}^i)$ a través de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'_{[i]}(x; \boldsymbol{s}^i) &= \boldsymbol{F}\big(x, \boldsymbol{y}_{[i]}(x; \boldsymbol{s}^i)\big), \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ \boldsymbol{y}_{[i]}(x_i, \boldsymbol{s}^i) &= \boldsymbol{s}^i, \quad i = 0, \ldots, m-1, \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde

$$\boldsymbol{y}_{[0]}(a; \boldsymbol{s}^0) = \boldsymbol{y}(a).$$

## 3.3. Métodos de disparo

Las soluciones parciales de (3.37) forman una función continua si

$$\boldsymbol{y}_{[i]}(x_{i+1}; \boldsymbol{s}^i) = \boldsymbol{s}^{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \tag{3.38}$$

donde

$$\boldsymbol{s}^m = \boldsymbol{y}(b),$$

y la solución así compuesta es una solución del PVF si

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{s}^0, \boldsymbol{s}^m) = 0. \tag{3.39}$$

En total, tenemos $m+1$ ecuaciones de $n$ componentes para las $m+1$ incógnitas de $n$ componentes $\boldsymbol{s}^0, \dots, \boldsymbol{s}^m$, cuya solución simultánea entrega la solución del problema de valores de frontera. El sistema no lineal definido por (3.38) y (3.39) se resuelve por el método de Newton-Raphson amortiguado. Este procedimiento se llama método de disparos múltiples.