Análisis Real I (525.301)

Pauta de corrección

Evaluación de recuperación, 2022

Ej. 1: (a) Sean $E \subset F \subset X$. Demuestra que $\operatorname{int}(E) \subset \operatorname{int}(F)$.

(b) Sean $A, B \subset X$. Demuestra que $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.

(c) Da un contraejemplo de que la otra inclusión en (b), en general, no vale.

Sol.: (a) Sea $x \in \operatorname{int}(E) \implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset E \subset F \implies x \in \operatorname{int}(F)$.

(b)
$$\left.\begin{array}{l} A \subset (A \cup B) \overset{\text{(a)}}{\implies} \operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(A \cup B) \\ B \subset (A \cup B) \overset{\text{(a)}}{\implies} \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B) \end{array}\right\} \implies \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B).$$

(c) $A := [-1, 0],\ B = [0, 1] \implies A \cup B = [-1, 1] \implies \operatorname{int}(A \cup B) = (-1, 1)$.

$\operatorname{int}(A) = (-1, 0),\ \operatorname{int}(B) = (0, 1) \implies \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

$\implies \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \not\supset \operatorname{int}(A \cup B)$. $\square$

Ej. 2: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos, tales que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n}{\to} \dfrac{1}{2}$.
Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$.

Sol.: Vamos a aplicar el criterio del cociente:

$$\frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\overset{n}{\to} 1} \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\overset{n}{\to} \frac{1}{2}} \overset{n}{\to} \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces, por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ converge. $\square$

Ej. 3: Sean $E \subset X$ y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que si hay una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $f(x_n) \xrightarrow{n} +\infty$, entonces E no es compacto.

Sol.: Por el absurdo. Supongamos que E es compacto.

Entonces, como f es continua, $f(E)$ también es compacto.

Por lo tanto, $f(E)$ es acotado.

Por otra parte, por hipótesis, hay una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $f(x_n) \xrightarrow{n} +\infty$.

Es decir que $f(E) \supset \{f(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ que es un conjunto no acotado.

Por lo tanto, $f(E)$ no es acotado. $\triangleright\!\!=\!\!\triangleleft$

La contradicción proviene de lo que hemos supuesto. Por lo tanto E no es compacto. $\square$

Ej. 4: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en $(-\infty, 0]$ y en $[0, +\infty)$.
Demuestra que entonces f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Sol.: Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $(-\infty, 0]$,

$$\exists \delta_1 > 0 : \quad \forall x, y \leq 0 : |x - y| < \delta_1, \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1}$$

Por otra parte, como f también es uniformemente continua en $[0, +\infty)$,

$$\exists \delta_2 > 0 : \quad \forall x, y \geq 0 : |x - y| < \delta_2, \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2}$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta$. Hay que considerar 4 casos.

Caso 1: si $x, y \leq 0, \quad |x - y| < \delta \leq \delta_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Caso 2: si $x, y \geq 0, \quad |x - y| < \delta \leq \delta_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Caso 3: si $x \geq 0$ e $y \leq 0$:

- $|x - 0| = x \leq x - y = |x - y| < \delta \leq \delta_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2},$
- $|0 - y| = -y \leq x - y = |x - y| < \delta \leq \delta_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Entonces, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

Caso 4: si $x \leq 0$ e $y \geq 0$, la demostración es similar, intercambiando los roles de x e y.

En consecuencia, $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. $\square$

Ej. 5: Considera la sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) := \frac{nx}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Estudia la convergencia puntual de esta sucesión.

(b) Estudia la convergencia uniforme de esta sucesión en $\mathbb{R}$.

(c) Estudia la convergencia uniforme de esta sucesión en $(-1, 1)$.

Sol.: (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{n+1} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n} x$

$\Longrightarrow$ f_n converge puntualmente a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{nx}{n+1} - x \right| = \left| \dfrac{-x}{n+1} \right|$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n+1} = +\infty \overset{n}{\not\to} 0$$

$\Longrightarrow$ f_n no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup\limits_{x \in (-1,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in (-1,1)} \dfrac{|x|}{n+1} < \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0$

$\Longrightarrow$ f_n converge uniformemente en $(-1, 1)$. $\square$