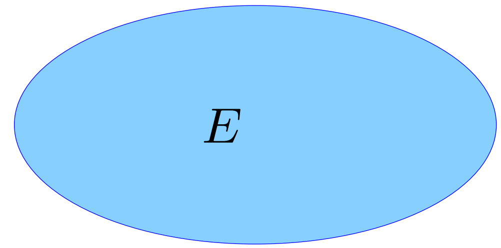
Conectividad. Sucesiones

- **Conectividad.**
- **Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.**
- **Sucesiones en espacios métricos.**
- **Propiedades algebraicas de sucesiones numéricas.**

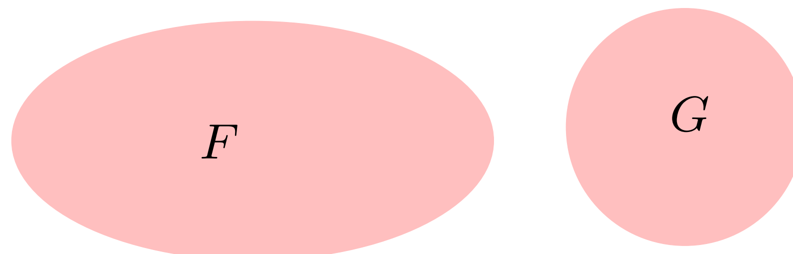
Conectividad.

Se trata de distinguir conjuntos “conexos” como

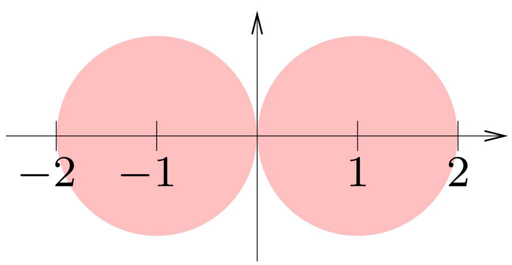


de conjuntos “disconexos” como

$$H := F \cup G$$

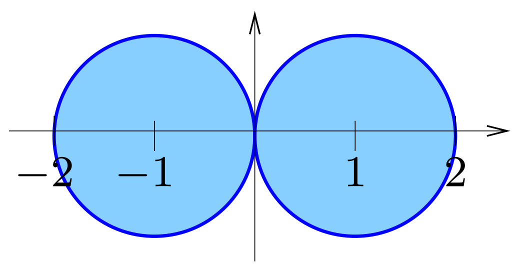


Pero **¡cuidado!**



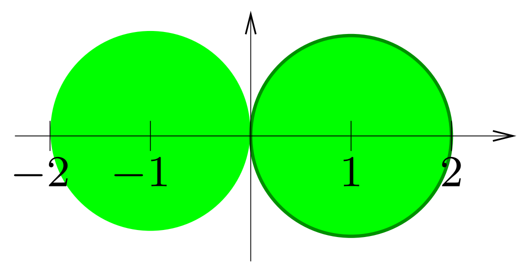
$B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0))$

disconexo



$\overline{B_1((-1,0))} \cup \overline{B_1((1,0))}$

conexo



$B_1((-1,0)) \cup \overline{B_1((1,0))}$

¡conexo!

Def.: Sea E un conjunto de un espacio métrico. Una **separación** de E es un par de subconjuntos $\{A, B\}$ tales que
$$\begin{cases} E = A \cup B, \\ A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset. \end{cases}$$
E es **disconexo** si admite alguna separación y es **conexo** si tal separación no existe.

Ejemplos en $\mathbb{R}$:

- $E := \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x| < 1\}$ es disconexo.

Dem.: $\{(-1, 0)\, , (0, 1)\}$ es una separación de E. $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

- $\{(-1, 0)\, , [0, 1)\}$ no es una separación de $F := (-1, 1)$.

Dem.: $\overline{(-1, 0)} \cap [0, 1) = [-1, 0] \cap [0, 1) = \{0\} \neq \emptyset$.

De hecho, veremos más adelante que todos los intervalos son conexos. $\square$

- $\mathbb{Q}$ es disconexo.

Dem.: Sean $A := \{q \in \mathbb{Q} : \ q < \sqrt{2}\}$ y $B := \{q \in \mathbb{Q} : \ q > \sqrt{2}\}$.

Entonces, $\overline{A} = \left(-\infty, \sqrt{2}\,\right]$ y $\overline{B} = \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$.

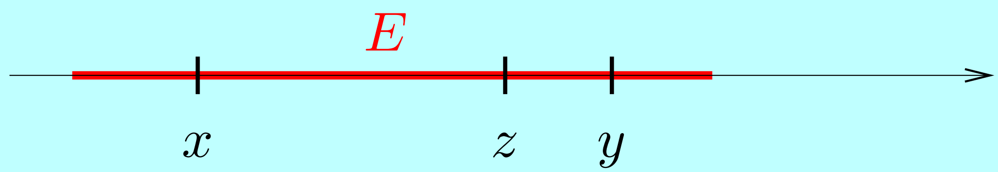
Por lo tanto, $\{A, B\}$ es una separación de $\mathbb{Q}$. $\square$

Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Teor.: $E \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si $\forall x, y \in E: \ x < y, \ \ [x, y] \subset E$.

Dem.: $\boxed{\ \Longrightarrow\ }$ Sean $E \subset \mathbb{R}$ conexo y $x, y \in E: \ x < y$.

Por el absurdo. Supongamos que $[x, y] \not\subset E \implies \exists z \in [x, y]: \ z \notin E$.



Sean $A := (-\infty, z) \cap E$ y $B := (z, +\infty) \cap E$. Entonces,

- $A \cup B = (\mathbb{R} \setminus \{z\}) \cap E = E \setminus \{z\} = E$ (pues supusimos que $z \notin E$);
- $x \in A \implies A \neq \emptyset, \quad y \in B \implies B \neq \emptyset$;
- $\left\{ \begin{array}{c} A \subset (-\infty, z) \\ B \subset (z, +\infty) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{A} \cap B \subset (-\infty, z] \cap (z, +\infty) = \emptyset, \\ A \cap \overline{B} \subset (-\infty, z) \cap [z, +\infty) = \emptyset. \end{array} \right.$

Por lo tanto, $\{A, B\}$ es una separación de $E \implies E$ es disconexo. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$

$\boxed{\quad\Longleftarrow\quad}$ Sea $E \subset \mathbb{R}: \ \forall x, y \in E: \ x < y, \ [x, y] \subset E$.

Por el absurdo. Supongamos que E es disconexo.

Sea $\{A, B\}$ una separación de $E \implies \begin{cases} E = A \cup B, \\ A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset. \end{cases}$

Sean $x \in A$ e $y \in B: \ x < y$. (Si $x > y$, intercambiamos sus roles.)

Sea $z := \sup(A \cap [x, y])$

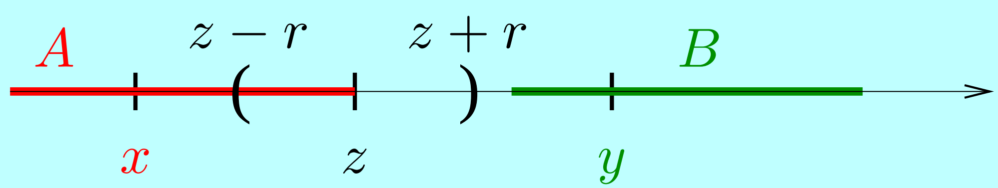
$\implies z \in \overline{A \cap [x, y]} \implies z \in \overline{A}$ y $z \in [x, y] \subset E$.

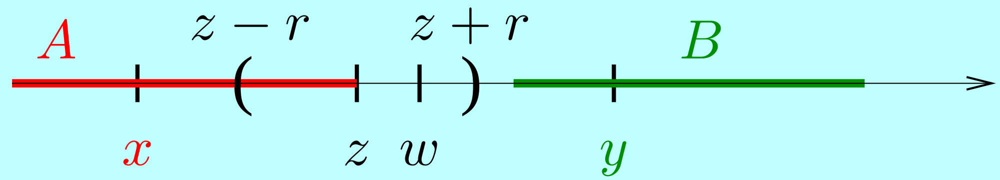
$z \in \overline{A} \implies z \notin B \implies z \in A \implies z \notin \overline{B}$.

$z \in [x, y]$ y $z \notin B$, pero $y \in B \implies z \neq y \implies x \leq z < y$.

$z \notin \overline{B} \implies \exists r > 0: \ (z - r, z + r) \cap B = \emptyset$.

En particular, elegimos $r > 0: \ r < y - z$, de manera que $z + r < y$.





Sea $w \in (z, z+r) \implies \begin{cases} w \notin B, \\ x \le z < w < z+r < y \implies w \in [x,y]\,. \end{cases}$

$w > z := \sup(A \cap [x,y]) \implies w \notin A.$

$\implies \ w \notin E = A \cup B,$ pero $w \in [x,y] \subset E.$ $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

Ej. Los conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ que verifican la propiedad del teorema anterior:

$$\forall x, y \in E: \ x < y, \ \ [x,y] \subset E,$$

son los **intervalos (en sentido amplio):**

- $(a,b)\,, \quad (a,b]\,, \quad [a,b)\,, \quad [a,b]\,, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}: \ a < b;$
- $(-\infty, b)\,, \quad (-\infty, b]\,, \quad (a, +\infty)\,, \quad [a, +\infty)\,, \quad \forall a,b \in \mathbb{R};$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)\,, \quad \emptyset.$

De modo que esos intervalos son los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Sucesiones en espacios métricos.

Sea X un espacio métrico con métrica d.

Def.: Una sucesión $\{p_n\}$ de elementos de X **converge** a $p \in X$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \ \forall n \geq N, \ \ d(p_n.p) < \varepsilon.}$$

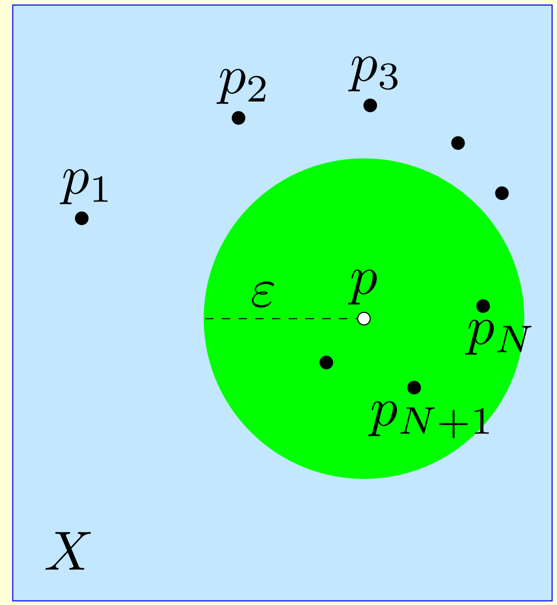
En tal caso, denotamos

$$p_n \to p \quad \text{o} \quad p_n \xrightarrow{n} p$$

o también

$$\lim_n p_n = p \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p$$

y decimos que $\{p_n\}$ es **convergente** en X.



Ej. Las siguientes son formas equivalentes de definir que $p_n \to p$:

- $d(p_n, p) \to 0$;
- toda bola centrada en p contiene todos los términos p_n salvo finitos.

Ejemplos:

- $\frac{1}{n} \to 0.$

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Prop. Arq. $\Longrightarrow \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{N} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \ \forall n \geq N, \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

- $\frac{(-1)^n}{n} \to 0.$

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Prop. Arq. $\Longrightarrow \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{N} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \ \forall n \geq N, \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

- $\frac{1}{2^n} \to 0.$

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Prop. Arq. $\Longrightarrow \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{N} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \ \forall n \geq N, \quad \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

- $\{(-1)^n\}$ no converge.

Dem.: Por el absurdo. Supongamos que $(-1)^n \to x \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ |(-1)^n - x| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left|(-1)^{N+1} - (-1)^N\right|}_{=|(-1)^N|\,|-1-1|=2} \leq \underbrace{\left|(-1)^{N+1} - x\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|(-1)^N - x\right|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ 2 < 2\varepsilon. \ \triangleright\!\!=\!\!\triangleleft \quad \square$$

- $\{n\}$ no converge.

Dem.: Por el absurdo. Supongamos que $n \to x \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon = 1$. $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \underbrace{|(n - x| < \varepsilon = 1}_{x-1<n<x+1}$

$$\Longrightarrow \{N, N+1, N+2, \ldots\} \subset (x-1, x+1)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{N} \text{ acotado. } \triangleright\!\!=\!\!\triangleleft \quad \square$$

- **Sucesión constante:** Sea $\{p_n\}$ con $p_n := p \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $p_n \to p$.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. $\exists N = 1: \ \forall n \geq N, \ d(p_n, p) = 0 < \varepsilon$. $\square$

Teor.: a) [unicidad] El límite de una sucesión, si existe, es único.

b) [acotación] Las sucesiones convergentes son acotadas.

Dem.: (a) Por el absurdo. Supongamos que $p_n \to p$ y $p_n \to p' \neq p$.

$\Longrightarrow \; d(p,p') > 0$. Sea $\varepsilon < \frac{d(p,p')}{2}$.

$p_n \to p \; \Longrightarrow \; \exists N_1 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N_1, \; d(p_n, p) < \varepsilon$.

$p_n \to p' \; \Longrightarrow \; \exists N_2 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N_2, \; d(p_n, p') < \varepsilon$.

Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$.

Entonces, $d(p,p') \leq \underbrace{d(p,p_N)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(p_N,p')}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = d(p,p')$

$\Longrightarrow \; d(p,p') < d(p,p')$ $\rhd\!\!=\!\!\lhd$

(b) Sea $\{p_n\}$ tal que $p_n \to p$. Sea $\varepsilon = 1$.

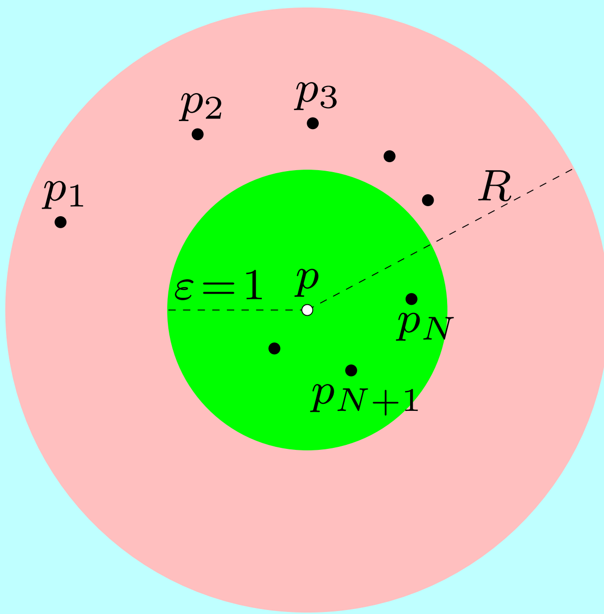
$\Longrightarrow \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N, \; d(p_n, p) < \varepsilon = 1$.

$\Longrightarrow \; \forall n \geq N, \; p_n \in B_1(p)$.

Sea $R > \max\{d(p_1,p), \ldots, d(p_{N-1},p), 1\}$.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}, \; p_n \in B_R(p)$

$\Longrightarrow \; \{p_n\}$ acotada. $\square$



Ej. • **"Prop. del sandwich":** Sean $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}: \; x_n \leq y_n \leq z_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \to s$ y $z_n \to s$, entonces $y_n \to s$.

• Sean $p \in X$, $\{p_n\} \subset X$ y $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$.
Si $d(p_n, p) \leq x_n$ y $x_n \to 0$, entonces $p_n \to p$.

Teor.: a) $p \in E' \implies \exists \{p_n\} \subset E$ con $p_n \neq p \; \forall n \in \mathbb{N}: \; p_n \to p$.
b) $p \in \overline{E} \iff \exists \{p_n\} \subset E: \; p_n \to p$.

Dem.: (a) $p \in E' \implies \forall n \in \mathbb{N}, \exists p_n \in E$ con $p_n \neq p: \; d(p_n, p) < \frac{1}{n}$.
Como $\frac{1}{n} \to 0$, por la prop. del sandwich, $p_n \to p$.

(b) $\boxed{\implies}$ Sea $p \in \overline{E}$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}, \; B_{\frac{1}{n}}(p) \cap E \neq \emptyset$

$\implies \forall n \in \mathbb{N}, \exists p_n \in E: \; d(p_n, p) < \frac{1}{n} \implies p_n \to p$ (prop. del sandwich)

$\implies \exists \{p_n\} \subset E: \; p_n \to p$.

$\boxed{\impliedby}$ Sea $\{p_n\} \subset E: \; p_n \to p$.

$\implies \forall r > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N, \; p_n \in B_r(p)$.

$\implies \forall r > 0, \; B_r(p) \cap E \neq \emptyset \implies p \in \overline{E}$. $\square$

Propiedades algebraicas de sucesiones numéricas.

Teor.: Sean $\{s_n\}, \{t_n\} \subset \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tales que $s_n \to s$ y $t_n \to t$. Entonces,

a) $s_n + t_n \to s + t$;

b) $\forall c \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $cs_n \to cs$;

c) $s_n t_n \to st$;

d) Si $s_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $s \neq 0$, entonces $\frac{1}{s_n} \to \frac{1}{s}$.

Dem.: **Ej.** (Las demostraciones son como en Cálculo y pueden verse en el libro de Rudin).

Teor.: Sean $\{\boldsymbol{x}_n\}, \{\boldsymbol{y}_n\} \subset \mathbb{R}^k$ y $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$.

a) Sean $\boldsymbol{x}_n := (x_{n1}, \ldots, x_{nk})$, $n \in \mathbb{N}$, y $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Entonces, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \iff x_{ni} \to x_i$, $i = 1, \ldots, k$.

b) Si $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ y $\alpha_n \to \alpha$, entonces

(i) $\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, (ii) $\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ y (iii) $\alpha_n \boldsymbol{x}_n \to \alpha \boldsymbol{x}$.

Dem.: **Ej.** (Idem teorema anterior.)