

## Elementos Finitos 521537

### Tarea 3

Sea  $\Omega = ]a, b[ \subset \mathbb{R}^n$  acotado, considere los datos  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  tal que existe  $\sigma_0 > 0$  que satisface  $\sigma \geq \sigma_0$  (c.t.p.), y  $f \in L^2(\Omega)$ . Entonces, definimos la siguiente EDO: Encontrar  $u \in H^2(\Omega)$  tal que:

$$\begin{cases} -\epsilon \psi'' + \alpha \psi' + \sigma \psi &= f, \text{ en } \Omega \\ \psi(0) &= 0 \\ -\epsilon \psi'(1) + \frac{\alpha}{2} \psi(1) &= 1. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide lo siguiente:

1. **[5 puntos]** Defina una formulación variacional para (1);
2. **[10 puntos]** Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional de (1). (Indicación: mantenga explícitamente la dependencia de las constantes respecto a los datos);
3. **[5 puntos]** Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio  $V_h^1$ ;
4. **[5 puntos]** Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional de (1);
5. **[15 puntos]** Estudie bajo que condiciones de  $\epsilon$ ,  $\alpha$  y  $\sigma$  la solución discreta es la *mejor aproximación* de la solución continua;
6. **[10 puntos]** Construya la tasas de convergencia para el error entre solución discreta y continua en la norma de  $L^2(\Omega)$  y la semi-norma de  $H^1(\Omega)$ ;
7. **[10 puntos]** Considere  $\epsilon = 1$ ,  $\alpha = 6$ ,  $\sigma = 9$  y  $f = 1$ . Defina una malla sobre  $\Omega$  tal que  $h = \frac{1}{3}$ . Construya el sistema lineal que determina la solución discreta, resuelvalo y grafique los resultados. (Indicación: al aplicar la condición de Dirichlet sobre el espacio discreto el sistema resultante debe estar definido por una matriz de  $3 \times 3$ .)