UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°4$ (EDO de Orden Superior: Parte III).

Problemas a resolver en práctica

1. Determine un aniquilador para:

   a) $f(x) = \text{sen}(3x)$
   b) $f(x) = x\,\text{sen}(3x)$
   c) $f(x) = x^2\,\text{sen}(3x)$
   d) $f(x) = x^2 + x\,\text{e}^{-4x}$
   e) $f(x) = x^2 + x^4\,\text{e}^{-4x}$.

   Solución:

   Sabemos que $D^2 - 2a\,D + (a^2 + b^2)$ aniquila (con el menor orden posible) a $\text{e}^{ax}\cos(bx)$ y a $\text{e}^{ax}\,\text{sen}(bx)$ y por tanto $[D^2 - 2a\,D + (a^2 + b^2)]^2$ aniquila a $x\,\text{e}^{ax}\cos(bx)$ y a $x\,\text{e}^{ax}\,\text{sen}(bx)$.
   Por tanto, un operador diferencial lineal L que aniquila a:

   a) $f(x) = \text{sen}(3x)$, es $L = D^2 + 9$.
   b) $g(x) = x\,\text{sen}(3x)$ es $L = (D^2 + 9)^2$.
   c) $h(x) = x^2\,\text{sen}(3x)$ es $L = (D^2 + 9)^3$.
   d) $u(x) = x^2 + x\,\text{e}^{-4x}$ es $L = D^3(D + 4)^2$.

   Observe que

$$\begin{aligned} D^3(D+4)^2\Big(x^2 + x\,\text{e}^{-4x}\Big) &= (D+4)^2 D^3\Big(x^2\Big) + D^3(D+4)^2\Big(x\,\text{e}^{-4x}\Big) \\ &= \theta + \theta \end{aligned}$$

   e) $v(x) = 1 + x^2 + x\,\text{e}^{-4x}$ es $L = D^3(D + 4)^2$.

   f) $u(x) = x^2 + x^4\,\text{e}^{-4x}$ es $L = D^3(D + 4)^5$.

2. Usando aniquiladores determine la solución general de las siguientes EDOs.

   a) $y'' - y' - 6y = \text{e}^{2x}$

b) $y'' - y' - 6y = x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$

Solución:

Sabemos que la solución general $z(x)$ de la EDO lineal $L(y) = f$ es del tipo

$$z(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

donde $y_p(x)$ es una solución cualquiera de $L(y) = f$
e $y_h(x)$ es una solución arbitraria del $\mathrm{Ker}(L)$.

a) Si $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ entonces para determinar la $y_p(x)$ de este caso, primero aniquilamos f por $D - 2$.
De otra parte, observando que el operador diferencial lineal asociado a la EDO es $L = (D+2)(D-3)$, y del hecho que $(D-2)\mathrm{e}^{2x} = 0$, se sigue que $(D-2)(D+2)(D-3) = 0$. Entonces el método de aniquiladores sugiere buscar soluciones particulares del tipo:

$$y_p(x) = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x} + c_3\,\mathrm{e}^{3x} \tag{1}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales¨- arbitrarias.
Sin embargo de la condición

$$(D+2)(D-3)y_p(x) = (D+2)(D-3)\Big[c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x} + c_3\,\mathrm{e}^{3x}\Big] = \mathrm{e}^{2x}$$

vemos que nuestra propuesta y_p se reduce a $y_p(x) = c\,\mathrm{e}^{2x}$; y entonces el problema se reduce a determinar el valor de la constante c. Para ello, puesto que $y_p(x) = c\,\mathrm{e}^{2x}$ debe ser solución de

$$(D+2)(D-3)[c\,\mathrm{e}^{2x}] = \mathrm{e}^{2x}$$

debe tenerse

$$\mathrm{e}^{2x}\Big[4c - 2c - 6c\Big] \;=\; \mathrm{e}^{2x},$$

de donde $c = -(1/4)$.
Así, la solución particular buscada es $y_p(x) = -(1/4)\,\mathrm{e}^{2x}$.
De otra parte, como $L = (D+2)(D-3)$, vemos que todo elemento y_h del $\mathrm{Ker}(L)$ es del tipo $y_h(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x}$ donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.
Finalmente, la solución general a la EDO propuesta es:

$$y(x) = -(1/4)\,\mathrm{e}^{2x} + c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{3x}$$

con c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

b) Para determinar la solución general de

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}, \tag{2}$$

observamos que el operador diferencial lineal L asociado a la EDO lineal, es el mismo del problema anterior. Por tanto, solamente debemos buscar una solución particular, y_p, del problema. Para ello, usamos el **Principio de Superposición de Soluciones**, esto es, buscamos solución particular y_{p_1} de

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = x\mathrm{e}^{2x} \tag{3}$$

y luego solución particular y_{p_2} de

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = \mathrm{e}^{3x}. \tag{4}$$

La solución particular y_p buscada para la EDO (2) - será

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) \; + \; y_{p_2}(x)$$

Para buscar la y_{p_1}, siguiendo el algorítmo implementado en el problema anterior, se puede concluir que una solución particular debe ser del tipio

$$y_{p_1}(x) = (c_1 + c_2\, x)\, \mathrm{e}^{2x} \tag{5}$$

con c_1 y c_2 constantes reales por determinar sustituyendo en la EDO original De otra parte, siguiendo el mismo algorítmo, se puede concluir que una solución particular $y_{p_2}(x)$, debe ser del tipo

$$y_{p_1}(x) = c\, x\, \mathrm{e}^{3x} \tag{6}$$

con c constante real por determinar sustituyendo en la EDO original.

3. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y''(x) - 2\, y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} + \mathrm{e}^{2\,x}\, \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Observe que el término fuente no admite anulador, sin embargo, una parte de él sí. El objetivo de este ejercicio es explotar esta idea. Para ello, siga los siguientes pasos:

a) Determine la solución general de la EDO homogénea asociada a la EDO (7)

b) Determine una solución particular de la EDO

$$y''(x) - 2\, y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

utilizando el **Método de Variación de Parámetros**.

c) Determine una solución particular de la EDO

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\,\cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

utilizando el **Método de los Anuladores** o el **Método de Coeficientes Indeterminados**.

d) Aplicando el **Principio de Superposición** construya una solución particular de (7) y concluya así su solución general. Deduzca el método expuesto para resolver (7)

Solución (Mezcla de métodos)

a) Polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

$\Longrightarrow$ Soluciones fundamentales:

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2 = xe^x$$

$\Longrightarrow$ **Solución general del problema homogéneo:**

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \qquad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes reales arbitrarias.}$$

b) Determine una solución particular de la EDO

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

utilizando el **Método de Variación de Parámetros** (Note que estamos obligados a usar Variación de Parámetros para determinar una solución particular pues no podemos aniquilar el termino $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$).

Así, nuestra solución particular a determinar es del tipo

$$u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$$

donde los coeficientes $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son las incógnitas a determinar. Puesto que **la EDO a resolver está normalizada**, de la teoría vista en clases, sabemos que $u_1(x)$ y $u_2(x)$ satisfacen el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_1'(x)e^x & + u_2'(x)\,xe^x & = 0 \\[2mm] u_1'(x)e^x & + u_2'(x)\,(x+1)e^x & = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \end{array} \right. \tag{8}$$

El sistema anterior tiene solución única puesto que

$$W[e^x; xe^x] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \text{ que nunca es cero.}$$

Para resolver, a la segunda ecuación de (8) le restamos la primera, obteniendo

$$u_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x).$$

Ahora, reemplazando en la primera ecuación de (8), se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2} \Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

(Alternativamente **usando Regla de Cramer**, sigue:

$$u_1'(x) = \frac{1}{W[e^x; xe^x]} \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{1+x^2} & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{-2x} \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{1+x^2} & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow u_1(x) = -\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

y con

$$u_2'(x) = \frac{1}{W[e^x; xe^x]} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix} = e^{-2x} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow u_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x).$$

Asi, **la solución particular determinada es**

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^x + \arctan(x)xe^x$$

c) Determine una solución particular de la EDO

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\,\cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

utilizando el **Método de los Anuladores** o el **Método de Coeficientes Indeterminados**.

El problema es equivalente a

$$Ly := (D^2 - 2D + 1)y = (D-1)^2 y = \mathrm{e}^{2\,x}\,\cos(x)$$

Aplicando el anulador $L^1 = ((D-2)^2+1) = (D^2-4D+5)$, se tiene $L_1 L y_p = 0$, cuya solución general es de la forma

$$y_p = Ae^x + Bxe^x + C\mathrm{e}^{2\,x}\cos(x) + E\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)$$

Podemos considerar $A = B = 0$ puesto que estas constantes son "absorbidas"por las constantes C_1 y C_2 de la solución y_h, de modo que

$$\begin{aligned}
&y_p = C\mathrm{e}^{2\,x}\cos(x) + E\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)\\
&y_p' = (E+2C)\mathrm{e}^{2\,x}\cos(x) + (2E-C)\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)\\
&y_p'' = (4E+3C)\mathrm{e}^{2\,x}\cos(x) + (3E-4C)\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)\\
&\Longrightarrow y_p'' - 2\,y_p' + y_p = 2E\mathrm{e}^{2\,x}\cos(x) + 2C\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)\\
&\Longrightarrow E = \frac{1}{2},\ C = 0 \Longrightarrow y_p = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)
\end{aligned}$$

d) Aplicando el **Principio de Superposición** construya una solución particular de (7) y concluya así su solución general:

$$\begin{aligned}
&y_p = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^x + \arctan(x)xe^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)\\
&\Longrightarrow y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^x + \arctan(x)xe^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{sen}(x)
\end{aligned}$$

4. Determine la solución del PVI

$$\left\{\begin{aligned}
(1+x)y''(x) + xy'(x) - y(x) &= (1+x)^2,\\
y(0) &= 2,\\
y'(0) &= -1
\end{aligned}\right.$$

sabiendo que la EDO lineal homogénea $(1+x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ tiene por soluciones a $y_1(x) = e^{-x}$ y a $y_2(x) = x$.

Desarrollo:
Notemos que las soluciones de la EDO homogénea son l.i. pues $W(y_1, y_2; 0) = 1$.
Para buscar una solución particular, primero normalizamos la EDO, esto es, buscamos solución particular de la EDO

$$y''(x) + \frac{x}{1+x}y'(x) - \frac{x}{1+x}y(x) = 1 + x.$$

Dado que se trata de una EDO a coefiecientes variables, para determinar una solución particular, estamos obligados a usar variación de parámetros.
Entonces buscamos solución particular, y_p, del tipo

$$y_p(x) = k_1(x)\,e^{-x} + k_2(x)\,x$$

donde las funciones k_1 y k_2 satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} k_1'(x)\, e^{-x} + k_2'(x)\, x & = 0 \quad \dots \ (1) \\ -k_1'(x)\, e^{-x} + k_2'(x) & = 1 + x \quad \dots \ (2) \end{cases}$$

[6 Pts.]

Sumando ambas ecuaciones queda:

$$k_2'(x)(x+1) = x + 1 \ \Rightarrow \ k_2(x) = x$$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$k_1'(x) = -x\, e^{x} \ \Rightarrow \ k_1(x) = (1-x)\, e^{x}$$

Así, la solución particular buscada es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (1-x)\, e^{x}\, e^{-x} + x\, x \\ &= 1 - x + x^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general de la EDO dada es:

$$y(x) = A\, e^{-x} + B\, x + 1 - x + x^2,$$

donde por ahora A y B son constantes reales arbitrarias.
Derivando la solución general, sigue

$$y'(x) = -A\, e^{-x} + B - 1 + 2x,$$

Por tanto, de

$$\begin{cases} y(0) = & A + 1 & = 2 \\ y'(0) = & -A + B - 1 & = -1 \end{cases}$$

obtenemos $A = B = 1$. Finalmente, la única solución al PVI dado, es

$$y(x) = \ e^{-x} + \ x + 1 - x + x^2,$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Resolver usando método de los aniquiladores. Cuando corresponda use el principio de superposición.

   a) $y'' - 5y' + 4y = \mathrm{e}^{x} \cos(3x)$
   b) $y'' + 9y = x^3 + 6, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
   c) $y'' - 2y' + 5y = 4e^{x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
   d) $y'' - 2y' + 5y = e^{-3x},$

e) $y'' - 7y' + 12y = (x+5)e^{4x}$,

f) $y'' - y = x\,\mathrm{e}^{x} + \cos(2x)$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2\,\mathrm{e}^{x}$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$;

2. Usando Coeficientes Indeterminados o Anuladores, encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes no homogéneas, o problemas de valores iniciales:

   a) $y''(x) + 4\,y'(x) + 3\,y(x) = x\,\mathrm{e}^{-2\,x}$

   b) $\left\{ \begin{array}{rcl} y''(x) - 16\,y(x) & = & \mathrm{e}^{x} \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 20 \end{array} \right.$

   c) $y''(x) + 9\,y(x) = 7\,x\,(\mathrm{e}^{x} - x)$

   d) $\left\{ \begin{array}{rcl} y''(x) - 2\,y'(x) + 2\,y(x) & = & \mathrm{e}^{x} \\ y(0) = y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$

   e) $\dfrac{d^4y}{dx^4}(x) - y(x) = \mathrm{sen}(2\,x)$

   f) $y''(x) + 10\,y'(x) + 25\,y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-5\,x}$

   g) $y'''(x) - 2\,y''(x) + y'(x) = \mathrm{e}^{x/2}\ \mathrm{sen}(\sqrt{3}\,x)$

   h) $\left\{ \begin{array}{rcl} y''(\theta) + y(\theta) & = & \mathrm{sen}(\theta) \\ y(\pi) & = & 0 \\ y'(\pi) & = & 0 \end{array} \right.$

Abril de 2025
KMR/ JMS/CMG//jms/cmg