

Teoría de conjuntos

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

26 de marzo de 2021



Revisión de Teoría de Conjuntos. Conjuntos universo y vacío.

Un **conjunto** es una colección de elementos.

Los conjuntos pueden describirse:

- **por extensión**: se listan todos los elementos del conjunto,
- **por comprensión**: se escriben las propiedades que cumplen los elementos del conjunto.

El conjunto A de los números naturales entre 1 y 5 puede describirse

- **por extensión**:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- **por comprensión**:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : (x \geq 1) \wedge (x \leq 5)\}.$$

Al conjunto formado por todos los elementos en una situación dada lo denotaremos por \mathcal{U} y se denomina **conjunto universo**.

El conjunto que no tiene elementos es el **conjunto vacío** y se denota \emptyset .



Pertenencia y no pertenencia a un conjunto

Sea $x \in \mathcal{U}$

- si x pertenece a un cierto conjunto A , se escribe $x \in A$,
- si x no pertenece al conjunto A , se escribe $x \notin A$.

Ejemplos

- Con $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se cumple que $1 \in A$ y $10 \notin A$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 = 0\}$ se cumple $-2 \in B$ y $0 \notin B$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $C = \mathbb{Q}$ se cumple $\frac{1}{2} \in C$ y $\sqrt{2} \notin C$.



Relaciones entre conjuntos: Inclusión

Dados dos conjuntos A y B se dice que A es subconjunto de B , o que A está contenido en B , o bien B contiene a A , lo cual se denota por $A \subseteq B$ si y sólo si para cualquier $x \in \mathcal{U}$ se cumple: si $x \in A$, entonces $x \in B$, es decir,

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} : x \in A \rightarrow x \in B.$$

Ejemplos

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,
- $\{-2, -3\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

Observe que

- para cualquier conjunto A se cumple que $A \subseteq \mathcal{U}$,
- para cualquier conjunto A se cumple que $\emptyset \subseteq A$,

Los conjuntos A y B son iguales ($A = B$) si y sólo si uno es subconjunto del otro, y viceversa. En otras palabras, ambos contienen los mismos elementos, es decir,

$$\begin{aligned} A = B & \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A, \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} : (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A), \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} : x \in A \leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

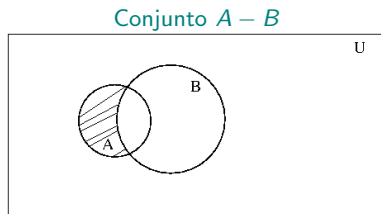
Por ejemplo, $\{-2, -3\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 = 0\}$.



Diferencia entre conjuntos

Se denota $A - B$ al conjunto formado por los elementos de \mathcal{U} que pertenecen a A , pero no a B ,

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$



El conjunto $\mathcal{U} - A$ se denomina **complemento de A** y se denota A^c . Note que $\forall x \in \mathcal{U} : (x \in A) \vee (x \in A^c)$. Esto implica que $A \cup A^c = \mathcal{U}$.

Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} : x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es par}\}$,

$$A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B^c = \mathbb{N} - B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es impar}\}.$$

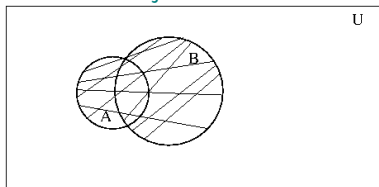


Unión entre conjuntos

Se denota $A \cup B$ al conjunto formado por los elementos de \mathcal{U} que pertenecen a A o a B ,

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Conjunto $A \cup B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} : x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es par}\}$,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \dots\}.$$

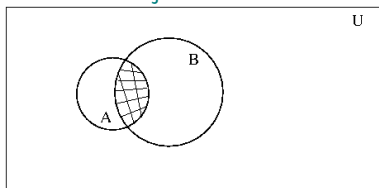


Intersección entre conjuntos

Se denota $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos de \mathcal{U} que pertenecen a A y a B a la vez,

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Conjunto $A \cap B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} : x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ es par}\}$,

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Dos conjuntos son **disjuntos** si y sólo si no tienen elementos en común, es decir, si y sólo si su intersección es igual al conjunto vacío.



Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Sean A , B y C conjuntos cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $\mathcal{U}^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \mathcal{U}$,
- $(A^c)^c = A$,
- $A \cap A^c = \emptyset$,
- $A \cup A^c = \mathcal{U}$.
- $A \cup A = A$,
- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap \mathcal{U} = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.



Conjunto partes de un conjunto

Dado un conjunto A , el **conjunto partes de A** , se denota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A .

Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{1\}$ y $B = \{2, 3\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, A\},$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, B\},$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Observe que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B), \quad \text{pero } \mathcal{P}(A \cup B) \not\subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ésta es una propiedad general del conjunto partes de un conjunto.

También se cumple que para cualquier par de conjuntos A y B

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$



Producto cartesiano entre dos conjuntos

Dados dos conjuntos A y B el **producto cartesiano de A y B** , que se denota $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\},$$

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2)\},$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$

$$B \times B = \{(3, 3)\}.$$

Para conjuntos cualesquiera A, B y C se cumplen las siguientes igualdades:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D),$
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C),$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$



Producto cartesiano entre conjuntos

Dados n conjuntos no vacíos A_1, A_2, \dots, A_n , se define el **producto cartesiano** entre ellos, el cual se denota $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, como el conjunto de las n -uplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) tales que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \in A_i$, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \in A_i \}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \}.$



Dado un conjunto A con una cantidad finita de elementos, al número de elementos de A se le denomina **cardinalidad de A** y se denota $|A|$.

Por ejemplo,

$$|\{1, 2\}| = 2, \quad |\{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}| = 10, \quad |\emptyset| = 0.$$

Si A y B tienen una cantidad finita de elementos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Cardinalidad de la unión de tres conjuntos

Observe que

$$\begin{aligned}|(A \cup B) \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|, \\&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|, \\&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \left(|A \cap C| + |B \cap C| - \underbrace{|A \cap C \cap B \cap C|}_{=A \cap B \cap C} \right), \\&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$



Familia de conjuntos

Sea I un conjunto cualquiera no vacío, que llamaremos conjunto de índices. Entonces, a la colección de conjuntos $A_i \subseteq \mathcal{U}$, denotado por

$$\{A_i\}_{i \in I} := \{A_i : i \in I\},$$

se le llama **familia de conjuntos indexados por I** .

Observaciones

- Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ puede tener elementos iguales, con lo cual no necesariamente es un conjunto.
- Si I es un conjunto finito, con $|I| = m \in \mathbb{N}$, entonces se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **familia finita de conjuntos**. En estos casos, se suele denotar la familia por $\{A_i\}_{i=1}^m$.
- Si I no es conjunto finito, entonces se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **familia infinita de conjuntos**.
- Cuando I es conjunto numerable (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , por ejemplo), se dice que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **familia numerable de conjuntos**. Si $I := \mathbb{N}$, se suele denotar la familia como $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.



Ejemplo

Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall i \in \mathbb{N} : A_i := \left\{ m \in \mathbb{N} : m = \frac{i}{k}, \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Luego, los primeros elementos de esta familia son:

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{1, 2\}, \quad A_3 = \{1, 3\}, \quad A_4 = \{1, 2, 4\}, \dots$$

Interesa:

- Si acaso es posible caracterizar cualquier conjunto A_i de manera más clara (precisa).
- Saber si existen al menos dos elementos de esta familia, con indexación distinta, que sean iguales.
- Saber si tiene sentido definir la unión (intersección) de todos los conjuntos de esta familia.
- En tal caso, ¿a qué será igual la unión de todos los conjuntos de esta familia?
¿La intersección?



Otro ejemplo de interés

Hacer un análisis similar para la familia $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, infinita numerable de conjuntos, definida por: $B_1 := \{1\}$ y

$$\forall i \in \mathbb{N}, i \geq 2 : B_i := \{m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : m \text{ es el menor factor de } i\} .$$



Operaciones de familias de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$

Unión de una familia de conjuntos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in \mathcal{U} : (\exists i \in I)(x \in A_i)\} .$$

Intersección de una familia de conjuntos:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in \mathcal{U} : (\forall i \in I)(x \in A_i)\} .$$

Observaciones

- Si $I := \{1, \dots, m\}$, la unión y la intersección definidas arriba, se puede denotar por $\bigcup_{i=1}^m A_i$ y $\bigcap_{i=1}^m A_i$, respectivamente.
- Si $I := \mathbb{N}$, se suele denotar por $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, respectivamente.

Ejemplo

Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall i \in \mathbb{N} : A_i := \left\{ m \in \mathbb{N} : m = \frac{i}{k}, \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determine su unión y su intersección.



Propiedades de operaciones con familias de conjuntos

Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos en \mathcal{U} , y sea $B \subseteq \mathcal{U}$. Se verifica:

$$(1) B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

$$(2) B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

$$(3) \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

$$(4) \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Observaciones

- Tener presente que las propiedades que son válidas para una cantidad finita de elementos, no necesariamente son válidas para una cantidad infinita de ellos.
- Ejemplo: Es cierto que $(\forall m \in \mathbb{N}) \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \in \mathbb{R} \right)$, pero $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \notin \mathbb{R}$ pues diverge.

Producto cartesiano generalizado

$$\prod_{i \in I} A_i := \{(x_i)_{i \in I} : (\forall i \in I)(x_i \in A_i)\}.$$

Observaciones

- Cuando $I := \{1, \dots, m\}$ (conjunto finito), denotamos

$$\prod_{i=1}^m A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m := \{(x_1, \dots, x_m) : \forall i = 1, \dots, m : x_i \in A_i\}.$$

- Si además $(\forall i \in \{1, \dots, m\})(A_i = A)$, entonces

$$\prod_{i=1}^m A_i := \prod_{i=1}^m A := A^m := \{(x_1, \dots, x_m) : (\forall i \in \{1, \dots, m\})(x_i \in A)\}.$$

Es el caso de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{C}^m , por ejemplo.



Partición de conjuntos

Sea X un conjunto no vacío, y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos en X , es decir, $(\forall i \in I)(A_i \subseteq X)$. Diremos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una **partición** de X si se constata:

- (1) $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$,
- (2) $\forall i, j \in I, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$,
- (3) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Ejemplos

- $\{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$ es una partición de \mathbb{R} .
- $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, donde $(\forall m \in \mathbb{N})(A_m := \{m\})$, define una partición de \mathbb{N} .

Propiedad

- Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de X , entonces $(\forall x \in X)(\exists ! i \in I)(x \in A_i)$.

