Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 1 — lunes 6 de julio de 2020

Versión recuperación
Entrega: 16.00 horas

Fundamentar la respuesta a cualquier sub-problema puesto en forma de pregunta.

Problema 1. (10 puntos) Sea la altitud de una montaña descrita por

$$h(x,y) = 1 - 0{,}04(x-1)^2 - 0{,}03(y-2)^2$$

(por ejemplo, pensado en distancias expresadas en kilómetros).

a) Supongamos que una montañista se encuentra en el punto $(x^0, y^0) = (3,0)$. ¿En qué dirección debe caminar si desea acceder a la cima por camino directo?

b) ¿En qué dirección debe caminar si desea descender con la mayor rapidez posible? ¿Y en qué dirección si desea mantener su altitud?

Solución sugerida.

a) Dado que $h(x,y) \leq 1$ y $h(x,y) = 1$ sólo para $x = 1$ e $y = 2$, la cima está localizada en $c = (1,2)$. La montañista se debe dirigir en la dirección $\vec{d} = \frac{1}{\|\vec{d}_0\|}\vec{d}_0$ donde $\vec{d}_0 = c - (x^0, y^0) = (1-3, 2-0) = (-2,2)$, es decir

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1).$$

(*No* se preguntó por la dirección del ascenso más rápido.) $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

b) La dirección del descenso más rápido, denotada aquí por $\vec{r}$, es opuesta a la dirección del ascenso más rápido. Aquí es dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}(x^0,y^0) &= -\frac{1}{\|\nabla h(x^0,y^0)\|}\nabla h(x^0,y^0) \\ &= -\frac{1}{\|(-0{,}08(x^0-1), -0{,}06(y^0-2))\|}\big(-0{,}08(x^0-1), -0{,}06(y^0-2)\big).\end{aligned}$$

Para el punto bajo consideración obtenemos

$$\vec{r} = -\frac{1}{\|(-0{,}16, 0{,}12)\|}(-0{,}16, 0{,}12) = (0{,}8, -0{,}6). \quad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

Para mantener la altitud la montañista debe dirigirse en una dirección $\vec{q}$ con derivada direccional

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{q}}(x^0, y^0) = \vec{q} \cdot \nabla h(x^0, y^0) = 0.$$

Entonces $\vec{q}$ debe ser ortogonal a $\vec{r}$, es decir $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, luego

$$\vec{q} = \pm(0{,}6, 0{,}8). \qquad \boxed{\textbf{3 puntos}}$$

Problema 2. (10 puntos)

a) Se considera la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = (1 + 4x)(2 + 5y)(3 - 6z).$$

Demostrar que f es diferenciable en $(x^0, y^0, z^0) = (0, 0, 0)$ y determinar el hiperplano tangente en este punto.

b) Demostrar que f satisface la ecuación de Laplace, $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, sobre $\mathbb{R}^3$.

c) Se considera el operador de Laplace en n dimensiones para una función $g = g(x_1, \dots, x_n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \in C^2$, denotado por

$$\Delta_n\, g = \sum_{i=1}^{n} g_{x_i x_i}.$$

Sea la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x_1, \dots, x_n) := (a_1 + b_1 x_1)(a_2 + b_2 x_2) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n x_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i x_i),$$

con constantes $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Demostrar que $\Delta_n h = 0$.

Solución sugerida.

a) Aquí calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(2 + 5y)(3 - 6z),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 5(1 + 4x)(3 - 6z),\ \frac{\partial f}{\partial z} = -6(1 + 4x)(2 + 5y),$$

luego $\nabla f(0, 0, 0) = (24, 15, -12)$. Para concluir que f es diferenciable en $(0, 0, 0)$ podemos argumentar que las derivadas parciales existen y son continuas en $(0, 0, 0)$, luego f es diferenciable en $(0, 0, 0)$ (Teorema 2.8). Considerando que $f(0, 0, 0) = 6$, obtenemos el hiperplano tangente

$$P = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 6 + 24x + 15y - 12z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

b) En las expresiones para f_x, f_y y f_z no aparecen x, y, y z, respectivamente, por lo tanto $f_{xx} \equiv 0$, $f_{yy} \equiv 0$ y $f_{zz} \equiv 0$, y en particular $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

c) Sea $k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left((a_k + b_k x_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_i + b_i x_i)\right) = b_k \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_i + b_i x_i).$$

Como x_k no aparece en esta expresión, $\partial^2 h/\partial x_k^2 = 0$ Como k ha sido elegido arbitrario, concuimos que $\partial^2 h/\partial x_k^2 = 0$ para todo k y en particular $\Delta_n h = 0$. **3 puntos**

Problema 3. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin y & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0, 0)$?

Solución sugerida.

a) Se analizan diversos casos para un punto $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$.

1.) Sea $x^0 < 0$ y $y^0 \in \mathbb{R}$, sea $r = \frac{1}{2}|x^0| > 0$. Entonces $f = 0$ sobre $U_r(x^0, y^0)$. Esto implica que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in U_r(x^0, y^0)$. En particular, ambas derivadas parciales existen y son acotadas en la vecindad $U_r(x^0, y^0)$. De acuerdo al Teorema 2.3 concluimos que f es continua en (x^0, y^0). **2 puntos**

2.) Sea $x^0 > 0$, $y \in \mathbb{R}$, y $r = \frac{1}{2}|x^0| > 0$. Entonces $f(x, y) = \sin y$ sobre $U_r(x^0, y^0)$. Esto implica que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = \cos y$ para todo $(x, y) \in U_r(x^0, y^0)$. Ambas derivadas parciales existen en $U_r(x^0, y^0)$, y se tiene para todo $(x, y) \in U_r(x^0, y^0)$

$$f_x(x, y) = 0, \quad \big|f_y(x, y)\big| = |\cos y| \leq 1.$$

Como ambas derivadas parciales son acotadas en la vecindad $U_r(x^0, y^0)$, podemos concluir que de acuerdo al Teorema 2.3, f es continua en (x^0, y^0). **2 puntos**

3.) Sea $x^0 = 0$, $y^0 \in \mathbb{R}\backslash\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Para estos puntos se tiene

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x^0 + h, y^0) - f(x^0, y^0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin y^0 - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin y^0}{h} \overset{h\to 0, h>0}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

es decir este límite no existe y por lo tanto $f_x(x^0, y^0)$ no existe. Esto significa que no podemos aplicar el Teorema 2.3. Efectivamente, f es discontinua en estos puntos. Sea la sucesión $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $x_k = 1/k$ y $y_k = y^0$. Entonces $f(x_k, y_k) = \sin y^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $(x_k, y_k) \to (0, y^0)$ cuando $k \to \infty$, pero

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \sin y^0 \neq f(0, y^0) = 0.$$

Esto significa que f no es continua en puntos $(x^0, y^0) = (0, y^0)$ cuando $y^0 \neq n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. **3 puntos**

4.) Queda por analizar $(x^0, y^0) = (0, n\pi)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. En este caso, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x^0, y^0 + h) - f(x^0, y^0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(n\pi + h) - 0}{h}$$

$$= \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x^0+h,y^0)-f(x^0,y^0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Ambas derivadas parciales existen en (x^0, y^0) y son evidentemente acotadas. Pero para cualquier $\tilde{y} \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ se tiene

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\big|f(x^0+h,\tilde{y})-f(x^0,\tilde{y})\big| = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|\sin\tilde{y}|}{h} \overset{h\to 0, h>0}{\longrightarrow} \infty,$$

es decir la derivada parcial f_x no existe en ningún punto $(0,\tilde{y})$ con $\tilde{y} \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, no existe ninguna vecindad $U_r(x^0,y^0)$ tal que f_x existe y es acotada para todo $(x,y) \in U_r(x^0,y^0)$. Así, el Teorema 2.3 no puede ser aplicado. No obstante, f es continua en los puntos $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Para ver esto, notamos que

$$\big|f(x,y)-f(0,0)\big| \leq |\sin y - 0| = |\sin y| \leq |y|.$$

Es decir, para $\varepsilon > 0$ se tiene $|f(x,y)-f(0,0)| < \varepsilon$ si

$$|(x,y)-(0,0)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\varepsilon) := \varepsilon,$$

ya que si esto es válido,

$$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon,$$

luego $|y|^3 < \varepsilon$. Esto significa que f es continua en $(0,0)$. **3 puntos**

Concluimos que f es continua sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$.

b) La función f no es diferenciable en $(x^0,y^0) = (0,0)$. Para ver esto, notemos que de acuerdo a lo anterior, $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0, \cos 0) = (0,1)$. Ahora

$$f^0(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{f(x,y)-y}{\|(x,y)\|_2}.$$

Sin embargo, $f^0(x,y)$ no tiende a cero cuando $\|(x,y)\|_2 \to 0$. Para ver esto, basta considerar la sucesión $(x_m,y_m) = (-1/m, 1/m)$; ahora

$$f^0(x_m,y_m) = \frac{-1/m}{\sqrt{2}/m} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty.$$

Concluimos que de acuerdo a la definición 2.7, f no es diferenciable en $(0,0)$. **5 puntos**

Problema 4. (10 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) Demostrar que existen constantes $m < 0$ y $M > 0$ tales que $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $\alpha \in [m, M]$.

b) ¿Se puede elegir α en tal forma que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$?

c) Calcular la derivada direccional de f en la dirección $\vec{d} := (1/\sqrt{2})(1,-1)$ en el punto $(x^0, y^0) = (1,1)$.

Solución sugerida.

a) Si $xy = 0$, entonces $f(x,y) \in \{0, \alpha\}$, es decir $m \leq f(x,y) \leq M$. Supongamos que $xy \neq 0$. En tal caso,

$$x^2 + xy + 2y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 > 0,$$

y podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} \leq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{2}y^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{xy}{x^2+xy+2y^2} \leq \frac{xy}{x^2+xy+y^2} \leq \frac{1}{3} =: M,$$

además

$$\frac{xy}{x^2+xy+2y^2} \geq -1 \Leftrightarrow xy \geq -x^2 - xy - 2y^2 \Leftrightarrow 0 \geq -(x+y)^2 - y^2,$$

es decir podemos elegir $m = -1$ y así obtenemos $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\boxed{\textbf{4 puntos}}$

b) Consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{4} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{4}.$$

Por otro lado, para $(x_k, y_k) = (1/k, 0)$ se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Como f posee límites direccionales diferentes en $(0,0)$, la función no puede ser continua en este punto, independiente de cual sea el valor de α. Es decir, no es posible elegir α en tal forma que f sea continua en este punto. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

c) Utilizando que para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(2y^2 - x^2)}{(x^2+xy+2y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2+xy+2y^2)^2}$$

obtenemos $f_x(1,1) = \frac{1}{16}$, $f_y(1,1) = -\frac{1}{16}$, luego $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{16}, -\frac{1}{16})$ y

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{d}}(1,1) = \vec{d} \cdot \nabla f(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{16} = \frac{1}{8\sqrt{2}}. \quad \boxed{\textbf{3 puntos}}$$

Problema 5. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) ¿La función f es acotada sobre $\mathbb{R}^2$?
b) Demostrar que la función f es continua en $(0,0)$.
c) Calcular las derivadas parciales de f.
d) Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.
e) ¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz en $(x^0, y^0) = (0,0)$?

Solución sugerida.

a) La función no es acotada. Por ejemplo, eligiendo $x = y$ obtenemos

$$f(x,x) = \frac{x^5}{x^2+3x^2} = \frac{x^3}{4} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \quad \boxed{\textbf{3 puntos}}$$

b) Para demostrar que f es continua en $(0,0)$, consideremos $(0,0) \neq (x,y)$. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $f(x,y) = 0$. En caso contrario, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, podemos calcular

$$\big|f(x,y)\big| = \left|\frac{x^3y^2}{x^2+3y^2}\right| < \left|\frac{x^3y^2}{x^2}\right| = |xy^2| \leq (\text{máx}\{|x|,|y|\})^3,$$

es decir si $|(x,y) - (0,0)| < \delta(\varepsilon) := \varepsilon^{1/3}$, entonces $\text{máx}\{|x|,|y|\} < \varepsilon^{1/3}$ y por lo tanto $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$. Esto implica que f es continua en $(0,0)$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

c) Calculemos las derivadas parciales: Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2y^2}{x^2+3y^2} - \frac{2x^4y^2}{(x^2+3y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x^3y}{x^2+3y^2} - \frac{6x^3y^3}{(x^2+3y^2)^2} = \frac{2x^5y}{(x^2+3y^2)^2}; \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

d) Como ya se conocen las derivadas parciales, podemos tratar de demostrar la diferenciabilidad en $(0,0)$ demostrando que éstas son continuas (Teorema 2.8). Para tal efecto consideremos $(x,y) \neq (0,0)$. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$. Sea entonces $x \neq 0$ e $y \neq 0$. En este caso,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{3x^2y^2}{x^2+3y^2} + \frac{2x^4y^2}{(x^2+3y^2)^2} \leq \frac{3x^2y^2}{x^2} + \frac{2x^4y^2}{x^4} = 5y^2, \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &\leq \left|\frac{2x^5y}{(x^2+3y^2)^2}\right| \leq \left|\frac{2x^5y}{x^4}\right| = 2|xy|. \end{aligned} \tag{1}$$

Esto significa que si para $\varepsilon > 0$ dado se tiene $|(x,y)-(0,0)| < \delta(\varepsilon) := (\varepsilon/5)^{1/2}$, entonces $|x|, |y| < (\varepsilon/5)^{1/2}$ y de acuerdo a (1),

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < \varepsilon,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < \varepsilon,$$

es decir ambas derivadas parciales son continuas en $(0,0)$. **3 puntos**

e) Calculamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = 0.$$

Por otro lado, considerando $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2y^2}{x^2+3y^2} - \frac{2x^4y^2}{(x^2+3y^2)^2}\right)\\ &= \frac{6x^4y}{(x^2+3y^2)^2} - \frac{4x^4y(x^2-3y^2)}{(x^2+3y^2)^3},\end{aligned}$$

Supongamos que $x = 0$, $y \neq 0$ o $x \neq 0$, $y = 0$, entonces $f_{xy} = 0$. En caso contrario, podemos acotar

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right| &\leq \left|\frac{6x^4y}{(x^2+3y^2)^2}\right| + \left|\frac{4x^6y}{(x^2+3y^2)^3}\right| + \left|\frac{12x^4y^3}{(x^2+3y^2)^3}\right|\\ &\leq \left|\frac{6x^4y}{x^4}\right| + \left|\frac{4x^6y}{x^6}\right| + \left|\frac{12x^4y^3}{3x^4y^2}\right| = 6|y| + 4|y| + 4|y| = 14|y|.\end{aligned}$$

Es decir, si $\varepsilon > 0$ es dado y $|(x,y)-(0,0)| < \delta(\varepsilon) := \varepsilon/14$, entonces $|y| < \varepsilon/14$ y de acuerdo a lo anterior,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right| < \varepsilon,$$

lo que implica que f_{xy} es continua en $(0,0)$. Concluimos que la derivada parcial f_{xy} existe en una vecindad de $(0,0)$ y es continua en $(0,0)$, además, $f_y(x,0)$ existe para todo punto $(x,0)$ en esta vecindad (resultado de (c) y (d)). De acuerdo a lo anterior podemos aplicar el Teorema de Schwarz. **3 puntos**