UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 2 ALGEBRA III 525201-1

ATENCIÓN: Considere que los conjuntos involucrados en cada ejercicio, son subconjuntos de cierto conjunto universo $\mathcal{U}$. Además tener en cuenta la notación $X \setminus Y := X - Y$.

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Determine si las siguientes proposiciones son o no son tautologías. Justifique.

(a) $(\forall A \subseteq \mathcal{U} : A \cap B = \emptyset) \rightarrow B = \emptyset$.
(b) $X = Y \leftrightarrow (\forall A \subseteq \mathcal{U} : X \cup A = Y \cap A)$.
(c) Sabiendo que $|\mathcal{U}|$ es finito: $\forall A \in \mathcal{U} : \mathcal{P}(A^c) = [\mathcal{P}(A)]^c$
(d) $\{A \setminus (B \cup C), B, C \setminus B\}$ es una partición de $A \cup B \cup C$.

2. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos:

(a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
(b) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$.
(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(d) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.
(e) $A^c \cap B = A \cap B \Rightarrow B = \emptyset$.

3. Demuestre las siguientes propiedades de producto cartesiano de conjuntos:

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(b) $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$. Considerar I un conjunto de índices arbitrario.

4. Una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ se dice *creciente*, si $\forall j \in \mathbb{N} : A_j \subseteq A_{j+1}$.

   (a) Dada $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, distintos y creciente, se define la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por:

$$B_1 := A_1 \quad \wedge \quad B_k := A_k \setminus A_{k-1} \quad \forall k \geq 2.$$

   Demuestre que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

   (b) Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{j \in \mathbb{N}}$ creciente, y todos distintos, tal que:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{1\}.$$

5. Para la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dada, determine $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ en cada caso. Justifique su respuesta:

(a) $A_j := \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right), \forall j \in \mathbb{N}$. $\qquad$ (b) $A_j := \mathbb{R} \setminus [0, j], \forall j \in \mathbb{N}$.

6. Defina una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, todos distintos, tal que verifique las condiciones en cada caso:

(a) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = (-\infty, 0]$, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = [-1, 0]$. $\qquad$ (b) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \mathbb{Q}$, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset$.

Ejercicios propuestos:

1. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos:

$$
\begin{aligned}
&(a)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\,.\\
&(b)\ A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subseteq A \quad \wedge \quad A \subseteq C\,.\\
&(c)\ A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}\,.\\
&(d)\ A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)\,.\\
&(e)\ [A \backslash (B \backslash A)] \cup [(B \backslash A) \backslash A] = A \cup B\,.\\
&(f)\ A \cap C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)\,.\\
&(g)\ (A \backslash C) \setminus (B \backslash C) = (A \backslash B) \setminus C\,.
\end{aligned}
$$

2. Demuestre las siguientes propiedades de producto cartesiano de conjuntos:

   $(a)\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,.$

   $(b)\ B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)\,.$ Considerar I un conjunto de índices.

3. Sea $\{A_j\}_{j \in I}$ una familia de conjuntos, y sea X un conjunto cualquiera. Demuestre que

$$
(a)\ \left(\bigcup_{j \in I} A_j \right) \cap X = \bigcup_{j \in I} \Big(A_j \cap X \Big)\,, \qquad (b)\ \left(\bigcap_{j \in I} A_j \right) \cup X = \bigcap_{j \in I} \Big(A_j \cup X \Big)\,.
$$

4. Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, y X un conjunto no vacío tal que $\forall\, j \in \mathbb{N} : A_j \cap X \neq \emptyset$. A continuación se construye la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por

$$
B_1 := X \cap A_1 \quad \wedge \quad \forall\, k \geq 2 : B_k := X \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)\,.
$$

   Demuestre que:

$$
(a)\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = X \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\,. \qquad (b)\ \forall\, i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset\,.
$$

   ¿Es $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una partición? Justifique su respuesta.

5. Para la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dada, determine $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ en cada caso. Justifique su respuesta:

$$
(a)\ A_j := \left(-3 - \frac{1}{j}\,, 5 + \frac{1}{j} \right)\,, \forall\, j \in \mathbb{N}\,. \qquad (b)\ A_j := \{1, 2, ..., 2j+1\}\,, \forall\, j \in \mathbb{N}\,.
$$

6. Defina una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, todos distintos, tal que verifique las condiciones en cada caso:

$$
(a)\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = (0, +\infty)\,, \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset\,. \qquad (b)\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \mathbb{R}\,, \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{2\}\,.
$$

RBP/rbp 30.03.2021