CORRECCIÓN DE DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6.5 DE [Tar07]

LEONARDO FIGUEROA

Resultados que citaremos

Lema 2.3 de [Tar07]**.**

I. *Si la convolución entre f y g está definida (esto es, si $f, g \in L^1_{\text{loc}}(R^N)$ y la ecuación (2.4) de* [Tar07]*de satisface), entonces*

$$\tau_a(f \star g) = (\tau_a f) \star g = f \star (\tau_a g) \quad \textit{para todo } a \in R^N. \tag{2.6}$$

II. *Si $k \geq 0$, $f \in C^k_c(R^N)$ (el espacio de funciones de clase C^k con soporte compacto) y $g \in L^1_{\text{loc}}(R^N)$, entonces $f \star g \in C^k(R^N)$ y si $|\alpha| \leq k$ se tiene*

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g \quad \textit{casi en todas partes.} \tag{2.7}$$

Lema 3.2 de [Tar07]**.**

I. *Si $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(R^N)$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión suavizante, entonces $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$.*

II. *Si $f \in L^\infty(R^N)$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión suavizante, entonces $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ y en $L^q_{\text{loc}}(R^N)$ para $q \in [1, \infty)$.*

Lema 3.3 de [Tar07]**.**

I. *Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $C^\infty_c(R^N)$ es denso en $L^p(R^N)$.*

II. *$C^\infty_c(R^N)$ es secuencialmente denso en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$.*

Examinando la demostración de la parte I de este lema se puede obtener el siguiente refinamiento:

Refinamiento de parte I del lema 3.3 de [Tar07]**.** *Sean $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(R^N)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [C_c(R^N)]^{\mathbb{N}}$ con $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante. Entonces existe una subsucesión $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una subsucesión $(\rho_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$f_{\phi(n)} \star \rho_{\psi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f \quad \textit{en } L^p(R^N).$$

Demostración corregida para el lema 6.5 de [Tar07]

La demostración que di en clase está mala. A continuación reproduzco el lema, pongo una demostración corregida y explico por qué la demostración dada en clase falla. El origen del problema es que usé (el refinamiento de) el lema 3.3 de [Tar07] cuando debí haber usado el 3.2.

Lema 6.5 de [Tar07]**.** *Si $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}_0$, entonces $C^\infty_c(R^N)$ es denso en $W^{m,p}(R^N)$.*

Demostración. $\boxed{\text{Primera parte que no cambia}}$ Como aparece en el libro y vimos en clase, dada una función $u \in W^{m,p}(R^N)$ que se quiere aproximar se define la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad u_n := \theta_n\, u,$$

donde $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión truncante especial de acuerdo a la definición 4.1 de [Tar07] y se demuestra que

$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \quad \text{en } W^{m,p}(R^N).$$

Además, se demuestró que para todo $v \in W^{m,p}(R^N)$, $\rho \in C_c^\infty(R^N)$ y todo multi-índice α con $|\alpha| \le m$,

$$D^\alpha(v \star \rho) = D^\alpha v \star \rho \tag{*}$$

(notar que esto es distinto a la parte II del lema 2.3 de [Tar07] porque la derivada del lado derecho es distribucional, aunque está relacionado porque dicha parte II se usa en su demostración).

$\boxed{\text{Nueva segunda parte}}$ Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante. Como cada u_n pertenece a $W^{m,p}(R^N)$ podemos usar (*) y el lema 3.2 de [Tar07] para afirmar, sin necesidad de tomar subsucesiones todavía, que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo multi-índice α con $|\alpha| \le m$,

$$D^\alpha(u_n \star \rho_k) = D^\alpha u_n \star \rho_k \xrightarrow{k\to\infty} D^\alpha u_n \quad \text{en } L^p(R^N). \tag{†}$$

Notemos que como cada $u_n \in W^{m,p}(R^N) \subset L^p(R^N) \subset L^1_{\text{loc}}(R^N)$ y cada $\rho_k \in C_c^\infty(R^N)$, la segunda parte del lema 2.3 de [Tar07] implica que $u_n \star \rho_k \in C^\infty(R^N)$. Además, $u_n \star \rho_k$ se anula fuera del compacto $\{x \in R^N |\, \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta_n)) \le r_k\}$, donde $r_k > 0$ es tal que $\operatorname{supp}(\rho_k) \subset B(0, r_k)$; en efecto, sea x un punto fuera de este compacto, entonces

$$(u_n \star \rho_k)(x) = \textstyle\int_{R^N} u_n(x-y)\rho_k(y)\,dy = \int_{B(0,r_k)} \theta_n(x-y)u(x-y)\rho_k(y)\,dy = 0,$$

porque $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta_n)) > r_k \wedge y \in B(0, r_k) \implies x - y \notin \operatorname{supp}(\theta_n)$. Así obtenemos que cada $u_n \star \rho_k \in C_c^\infty(R^N)$. Las convergencias en (†) se pueden combinar para obtener, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_n \star \rho_k\|^p_{W^{m,p}(R^N)} = \textstyle\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u_n - D^\alpha(u_n \star \rho_k)\|^p_{L^p(R^N)} \xrightarrow{k\to\infty} 0;$$

en otras palabras, $u_n \star \rho_k \xrightarrow{k\to\infty} u_n$ en $W^{m,p}(R^N)$.

Combinando la convergencia en $W^{m,p}(R^N)$ de los $u_n \star \rho_k$ a cada u_n y la de los u_n a u se obtiene el resultado deseado. Explícitamente, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_{n(\varepsilon)}\|_{W_{m,p}(R^N)} < \varepsilon/2$ y también que existe un $k(\varepsilon)$ tal que $\|u_{n(\varepsilon)} - u_{n(\varepsilon)} \star \rho_{k(\varepsilon)}\|_{W^{m,p}(R^N)} < \varepsilon/2$ y por la desigualdad triangular hemos hallado a un miembro de $C_c^\infty(R^N)$ a una distancia menor que ε de u en la norma de $W^{m,p}(R^N)$. Ya vimos una vez una variación de este argumento para obtener una subsucesiones de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que su convolución sea una sucesión que converge a u. La verdad es que estos argumentos, aunque relacionados, no son exactamente lo que uno llamaría un "argumento diagonal"; en particular, ni la sucesión diagonal $(u_n \star \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni alguna de sus subsucesiones juegan algún papel especial.

$\boxed{\text{Idea fallida para la segunda parte}}$ Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante. Como $u_1 \in L^p(R^N)$, se puede usar el refinamiento del lema 3.3 de [Tar07] para afirmar que existen una sucesión $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $C_c(R^N)$ que converge a u_1 en $L^p(R^N)$ y subsucesiones $(u_{\phi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\rho_{\psi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$u_{\phi_1(n)}^{(1)} \star \rho_{\psi_1(n)} \xrightarrow{n\to\infty} u_1 \quad \text{en } L^p(R^N).$$

Ahora, $(\rho_{\psi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo una sucesión suavizante. Sea $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in [\mathbb{N}_0]^N$. Entonces dije algo equivalente a que, usando (*),

$$D^{e_1} u_{\phi_1(n)}^{(1)} \star \rho_{\psi_1(n)} = D^{e_1}(u_{\phi_1(n)}^{(1)} \star \rho_{\psi_1(n)})$$

por lo que tomando subsucesiones uno va aproximando todas las derivadas de u_1 de orden menor o igual a m en $L^p(R^N)$ y por lo tanto a u_1 en $W^{m,p}(R^N)$ y por un argumento diagonal se obtenía el resultado deseado. **Este argumento falla por al menos las siguientes razones:**

- No podemos usar (*) porque los $u_{\phi_1(n)}^{(1)}$ viven en $C_c(R^N)$ y no hay garantía de que sus derivadas distribucionales sean inducidas por funciones en $L^p(R^N)$.
- Aún si pudiésemos subsanar el punto anterior, no hay razón para que $(D^{e_1} u_{\phi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ aproxime a $D^{e_1} u_1$ en $L^p(R^N)$, que es lo que nos gustaría usar para afirmar que una subsucesión de aquella subsucesión convolucionada con una subsucesión de una sucesión suavizante converge a $D^{e_1} u_1$ en $L^p(R^N)$.
- Para intentar salvar el argumento uno podría sucesiones en $C_c(R^N)$ totalmente independientes para cada $D^\alpha u_1$, $|\alpha| \le m$. Sin embargo, no habría cómo combinar las subsucesiones resultantes para obtener una aproximación en $W^{m,p}(R^N)$.

$\square$

Referencias

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)