UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 4 ALGEBRA III 525201-1 (repaso de Espacios Vectoriales)

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Justifique adecuadamente si el conjunto V, con las operaciones adición $\oplus$ y multiplicación por escalar en $\mathbb{K}$, $\odot$, definidas en cada caso, es espacio vectorial

$$(a)\, V := \mathbb{R}^+ , \mathbb{K} := \mathbb{R}, \quad \forall\, x\,, y \in V \,:\, x \oplus y := x\, y\,, \quad \forall\, x \in V \,:\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \odot x := x^{\alpha}\,.$$

2. Determine si los subconjuntos indicados, son subespacios vectoriales del espacio vectorial V dado, con las operaciones usuales de adición y multiplicación por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Justifique sus respuestas.

   (a) $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,, \mathbb{K} := \mathbb{C}\,.$ $\quad (a.1)\, U := \{A \in V \,:\, A = \Theta \vee A$ es no singular $\}$ $\quad (a.2)\, S := \{A \in V \,:\, A^2 = \Theta\}\,.$

   (b) $V := \mathcal{P}(\mathbb{R})\,, \mathbb{K} := \mathbb{R}\,.$ $\quad S := \{p \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{K} \,:\, \forall \mathbb{R} \,:\, p(x) = (a+1)\, x^2 + b\,(x+1)\}\,.$

3. Considere los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y+z+t = 0\}\,, \quad W := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 0 \wedge t = 0\}\,.$$

   a) Determine $U \cap W$ y $U + W$. Diga además si el espacio suma es o no suma directa.

   b) Escriba de dos formas distintas, si es posible, los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ como adición de un vector en U y otro en W: $u := (0,1,-1,1)$, $v := (0,1,0,-1)$.

4. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $p_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, p_k(t) := t^k$. Además, introducimos $p_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, p_0(t) := 1$. A continuación, definimos para cada $k \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, \widetilde{\mathcal{P}}_k(\mathbb{R}) := \langle \{p_k\} \rangle$. Considerando $m \in \mathbb{Z}_0^+$ fijo, ¿a qué es igual $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \widetilde{\mathcal{P}}_k(\mathbb{R})$? ¿Será ésta una suma directa? Justifique / demuestre apropiadamente.

5. Se introduce $A := \{q_j\}_{j=1}^{6} \subseteq \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ donde $\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, q_1(t) := 1+t$, $q_2(t) := t^2$, $q_3(t) := 1+t^3$, $q_4(t) := 1+t^2+t^3$, $q_5(t) := t^2+t^4$ y $q_6(t) := 1+t^3+t^4$.

   (a) ¿Es A l.i.? Justifique apropiadamente. En caso de no serlo, extraiga vectores de A hasta obtener un conjunto l.i.

   (b) Determine una base de $\langle A \rangle$.

6. Considere el siguiente subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$U := \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, p(0) + p'(0) = 0 \wedge p'(0) + p''(0) = 0\}\,.$$

   (a) Determine una base y dimensión de U.

   (b) ¿Es $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ complemento / suplemento de U con respecto a $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?

7. Sea $A := \{p_0\,, p_1\,, \ldots\,, p_m\}$ un conjunto de vectores en el e.v. real $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, tal que cada vector de A se anula en $x = 1$. Demuestre que A es un conjunto l.d.

8. Sean U y W subespacios vectoriales de **dimensión 4** del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^6$. ¿Es posible que existan $z\,, w \in U \cap W$ tales que z no es múltiplo escalar de w?

9. Dados los conjuntos

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Muestre que $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$. (b) ¿Es S_2 una base de $S := \langle S_1 \rangle$? (c) Reduzca S_2 a una base de S.

10. Demuestre que si $\{U_j\}_{j \in J}$ es una familia de subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces $\displaystyle\bigcap_{j \in J} U_j$ es subespacio vectorial de V.

11. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Se define el Kernel o Núcleo de $\boldsymbol{A}$ por $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1} \,:\, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}\}$. De igual forma, se define la Imagen de $\boldsymbol{A}$ por $\operatorname{Imag}(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \,:\, \exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1} \,:\, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}\}$. Pruebe que $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A})$ es un s.e.v. de $\mathbb{C}^{n \times 1}$, y que $\operatorname{Imag}(\boldsymbol{A})$ es un s.e.v. de $\mathbb{C}^{m \times 1}$.

Ejercicios propuestos:

1. Muestre que el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{C}^2$ no es un s.e.v. de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, pero sí lo es si se considera $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial real: $W := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + z_2 \in \mathbb{R}\}$.

2. Sea J un conjunto de índices, y $\{V_j\}_{j\in J}$ una familia de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Consideremos el producto cartesiano $V := \prod_{j\in J} V_j$ de la familia $\{V_j\}_{j\in J}$, cuyos elementos están representados por las familias de uplas $(v_j)_{j\in J}$. Pruebe que, dotando a este conjunto V de las operaciones adición y multiplicación por escalar como sigue:
$$\forall\, (u_j)_{j\in J}\,,(v_j)_{j\in J} \in V \,:\, (u_j)_{j\in J} + (v_j)_{j\in J} := (u_j + v_j)_{j\in J}\,,$$
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, (v_j)_{j\in J} \in V := \lambda \cdot (v_j)_{j\in J} := (\lambda \cdot v_j)_{j\in J}\,,$$
éste tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, el cual se llama *Espacio vectorial producto* de la familia $\{V_j\}_{j\in J}$.

3. Sea V el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considere los siguientes subespacios vectoriales de V.
$$W := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right\}, \qquad U_1 := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$U_2 := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$$
   a) Compruebe que $W + U_1 = W + U_2$, pero $U_1 \neq U_2$. ¿Son los espacios suma anteriores, sumas directas?
   b) Determine S, un subespacio vectorial de V distinto de W, de modo que $W \cup S$ también sea un subespacio vectorial de V.

4. Considere $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Sean V y W subconjuntos del espacio vectorial real $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
$$V := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \,:\, p(1) = 0\}\,, \quad W := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \,:\, p(0) + p'(0) = 0\}\,.$$
   a) Demuestre que V y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
   b) Determine las dimensiones de V y W. Justifique sus respuestas.
   c) ¿Existen valores de $n \in \mathbb{Z}_0^+$ de modo que el espacio suma $V + W$ sea suma directa? Justifique su respuesta.

5. En cada caso, determine si el vector u dado pertenece a $\langle S\rangle$
   a) $V := \mathbb{C}^2\,, \mathbb{K}\,, S := \{(1,1), (-1,1), (0,1)\}\,, u := (1, i)$, considerando $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

6. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y U un subespacio vectorial de V. Se define la relación $\sim$ en V por
$$\forall\, u\,, w \in V \,:\, u \sim w \Leftrightarrow u - w \in U\,.$$
   (a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia en V.
   (b) Caracterice la clase de equivalencia de $w \in V$, respecto de $\sim$: $[w]_\sim$ (se le llama *clase de w módulo U*).
   (c) Pruebe que $V/U := V/\sim$, provista de las operaciones de adición y multiplicación por escalar:
$$\forall\, [u]_\sim\,, [v]_\sim \in V/U \,:\, [u]_\sim + [v]_\sim := [u+v]_\sim\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, [u]_\sim \in V/U \,:\, \lambda\, [u]_\sim := [\lambda \cdot u]_\sim$$
   tiene también la estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, llamado *espacio vectorial cuociente de V por U*. Identifique el vector nulo en este espacio vectorial cuociente.

7. Sea E el espacio vectorial real de las funciones definidas sobre $\mathbb{Z}$ a valores reales: $E := \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Sean $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ con $a_0 \neq 0$, y S el conjunto de las funciones $f \in E$ que verifican la condición $\forall\, n \in \mathbb{Z} \,:\, f(n+2) + a_1\, f(n+1) + a_0\, f(n) = 0$. Esto último se conoce como Ecuación de diferencias.
   a) Pruebe que S es un s.e.v. de E.
   b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deduzca que siempre existe un único elemento $f \in E$ tal que $f(1) = \alpha$ y $f(0) = \beta$. Para ello, considere que $f(n) = r^n$, con r un escalar a determinar. Recuerde que se desea obtener funciones de variable en $\mathbb{Z}$, de valores reales. El razonamiento en cierta forma es muy similar a cuando uno resuelve una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
   c) ¿Cuál es la dimensión de S?
   d) Aplicación: resolver la ecuación de diferencias (que da lugar a la conocida *sucesión de Fibonacci*):
$$g_{n+2} = g_{n+1} + g_n \quad n \in \mathbb{Z}_0^+\,,$$
$$g_0 = 0\,, g_1 = 1\,.$$