UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N^{\circ}1$ (Estructuras medibles y medidas positivas).

Problemas a resolver en práctica

1. Sea μ una medida positiva completa sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, es decir, μ es una medida positiva sobre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ contiene a todos los conjuntos que están contenidos en algún conjunto de medida μ igual a 0. Considere las funciones $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Suponga que f es medible. Asuma que el conjunto $\{\omega \in \Omega : f(w) \neq g(w)\}$ está contenido en un conjunto de medida μ igual a 0. Demuestre que g es medible. ¿Si μ no fuera completa, podría ocurrir que g fuera no medible?

2. Considere el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y las funciones $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$. Suponga que $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ son funciones medibles. Demuestre que

$$f \cdot g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$$

   es medible.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demuestre que $f' : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función medible.

4. Asuma que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Sea

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \text{ existen } B, C \in \mathcal{F} \text{ tales que } B \subset A \subset C \text{ y } \mu(C \setminus B) = 0\}.$$

   Para todo $A \in \overline{\mathcal{F}}$ definimos

$$\overline{\mu}(A) = \mu(B)$$

   donde $B, C \in \mathcal{F}$ satisfacen $B \subset A \subset C$ y $\mu(C \setminus B) = 0$.

   a) Demuestre que $\overline{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra y que $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.

   b) Demuestre que $\overline{\mu}$ está bien definida, o sea, $\overline{\mu}(A)$ no depende de la elección de B y C.

   c) Demuestre que $\overline{\mu}$ es una medida completa sobre $\left(\Omega, \overline{\mathcal{F}}\right)$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Suponga que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Encuentre la menor σ-algebra de subconjuntos de Ω que contiene a todos los conjuntos A_n, con $n \in \mathbb{N}$.

2. Considere el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y $A \subset \Omega$. Demuestre que la función indicadora $I_A : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible si y solo si $A \in \mathcal{F}$. Aquí

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases}.$$

3. Considere dos medidas positivas μ, λ sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$. Demuestre que $\alpha\mu + \beta\lambda$ es una medida positiva sobre $\mathcal{F}$.

4. Sea ν la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Definimos $\mu(A) = \nu(A \cap [0,1])$ para todo $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Determine la función creciente y continua a la derecha F que se anula en 0 y sastisfaga

$$\left(\mu + \delta_{1/2}\right)(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

para todo par de números reales $a \leq b$.

5. Encuentre un ejemplo de función no medible f, pero tal que $|f|$ sea medible.

CMG/cmg.