Universidad de Concepción

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre 1 - 2024

Tema Nº3: Números Complejos
Clase N°24 - 04/06/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Ejercicios

1. Calcule la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:
   (a) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}+5i$

   (b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

   (c) $7i-\left[\frac{(i-1)^6(i+1)^7}{i}\right]^2$
2. Dado un complejo $z=a+ib$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Considere la siguiente igualdad

$$2z=i(a-5)+\mathrm{Re}^2(z)+i\mathrm{Im}(z)$$

Determine el o los z que cumplen la igualdad.

Números Complejos

Definición

Dado un número complejo z, de la forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se define el **conjugado** de z y se denota por $\bar{z}$ al número:

$$\bar{z} = a - ib$$

Números Complejos

Si consideramos un número complejo y su conjugado, podemos enunciar las siguientes propiedades.

1. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$ y $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$.
2. $z = \bar{z} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$.
3. $\bar{z} = -z \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.
4. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$. En particular $-\bar{z} = \overline{-z}$.
5. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Además $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$ y si $w \neq 0$, se tiene $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
6. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$.
7. $\bar{\bar{z}} = z$.
8. $z \cdot \bar{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$.

Números Complejos

Definición

Dado un número complejo z, de la forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se define como módulo de z al número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Números Complejos

El módulo de un número complejo cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 0.$
2. $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
3. $\forall z \in \mathbb{C} : |\bar{z}| = |z|.$
4. $\forall z, w \in \mathbb{C} : |zw| = |z||w|$
5. $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z + w| \leq |z| + |w|.$

Ejercicios

1. De cada uno de los siguientes números determine la parte real e imaginaria, inversos aditivos y mutiplicativos, si existen, conjugado y módulo.

   (a) $\overline{\dfrac{2+2i+\overline{3+2i}}{2}}$ (b) $1+i+\dfrac{i-1}{|1-i|^2+i}$

2. Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se cumple:

$$\frac{\overline{z^2+1}}{z} - \frac{\overline{1+z}}{z} = \bar{z} - 1$$

3. Demuestre que si $z, w \in \mathbb{C}$ son tales que $1 + zw \neq 0$, $|z| = 1$, $|w| = 1$, entonces $\dfrac{z+w}{1+zw} \in \mathbb{R}$.

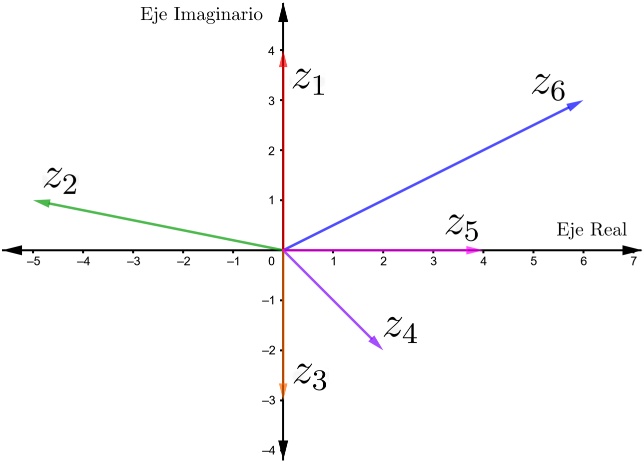
Representación de un Número Complejo

Un número complejo puede ser representado de cuatro formas y estas se utilizarán de acuerdo a su utilidad y al contexto donde esten inmersos. Sea $z \in \mathbb{C}$, las cuatro formas de representar a z que veremos son:

- Binomial: z se escribe como $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$.
- Par ordenado: z se escribe como $(\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ y se asocia a z un punto o un vector en el plano cartesiano que, cuando lo utilizamos para representar números complejos, lo llamamos **plano de Argand** o **plano complejo**.
- Polar y exponencial (las trabajaremos más adelante)

Números Complejos

También podemos representar un número complejo como un vector dirigido desde el origen hasta un punto en el plano, por ejemplo:



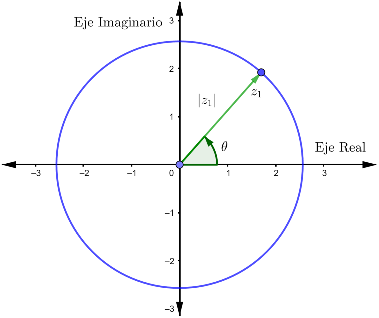
Ejercicios

Determine los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes relaciones y represente gráficamente.

1. $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right| = 1$
2. $|z-1| \geq 2$
3. $|z+1-2i| = 3$
4. $\operatorname{Im}(z^2) > \operatorname{Im}(z)$
5. $1 < |z+2i| \leq 4$

Forma Polar de un Número Complejo

Además, si consideramos $z = (a, b)$ sabemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ representa la distancia del origen del sistema al punto (a, b). Dado lo anterior, podemos representar la situación como se muestra a continuación:



y si consideramos el ángulo θ podemos obtener la forma polar de un número complejo.

Forma Polar de un Número Complejo

Al ángulo θ, en posición normal, que forma el vector con el eje X, en este caso se dice que este ángulo es el argumento de z y lo denotamos por

$$\theta = \arg(z)$$

y como ya mencionamos las funciones son periódicas es por esto que:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ahora bien, para evitar que haya infinitas formas de representar a un número complejo en forma polar el valor de θ en la representación polar de z se restringe al intervalo $]-\pi, \pi]$

Ejercicio

Escriba los siguientes números complejos en forma polar, si están en forma binomial, y en forma binomial, si están en forma polar.

1. $z = 4$
2. $z = -3i$
3. $z = 1 + i$
4. $z = 2\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
5. $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6. $z = -2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
7. $z = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$