Clase 15: Sucesiones y Series numéricas

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Definición 15.1

Una **sucesión** de números reales es una función

$$A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto A(n) := a_n$$

Denotaremos a una sucesión por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, donde a_n denota el n-ésimo término.

Ejemplos.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} , \quad \{(-1)^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} , \quad \{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\}_{n\in\mathbb{N}} , \quad \left\{\frac{1}{n-1}\right\}_{n=2}^{+\infty}$$

Convergencia de una sucesión

Idea intuitiva

Nos interesa estudiar el comportamiento de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuando n es inmensamente grande.

Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede expandir como:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{20000}, \ldots, \frac{1}{1000^{10000000000}}, \ldots.$$

En este caso, podemos ver que, a medida que n crece, $\dfrac{1}{n}$ es cada vez mas cercano a 0. Lo anterior, nos conduce a decir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

es decir, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a 0.

Es posible precisar la idea de convergencia de una sucesión mediante una definición formal.

Definición 15.2

Diremos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $L \in \mathbb{R}$ si se cumple que:

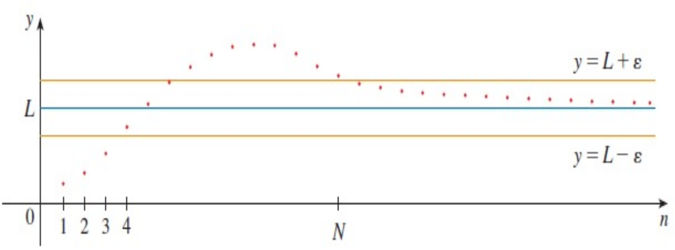
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N, \text{ entonces } |a_n - L| < \epsilon$$

y se escribe en este caso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ .$$

Observación. Si el límite de una sucesión existe, entonces es único.

La definición de convergencia dada anteriormente se visualiza como sigue:



Ejercicio (Opcional). Utilizar la definición de límite para mostrar que:

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{3+\frac{1}{n}} = \sqrt{3}$

Soluciones

1. Sea $\epsilon > 0$, debemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > N \Longrightarrow \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \epsilon$$
¿Cómo encontrar el N?

   Notamos que
$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

   Ahora, si $\frac{1}{n} < \epsilon$, se tiene que $n > \frac{1}{\epsilon}$. Luego, es suficiente escoger $N > \frac{1}{\epsilon}$, en efecto:
$$n > N \Longrightarrow \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

Soluciones

2. Dado $\epsilon > 0$, basta escoger $N > \dfrac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$.
3. Dado $\epsilon > 0$, basta escoger $N > \dfrac{1}{\epsilon}$

Se deja al estudiante interesado demostrar que efectivamente esto es correcto.

Teorema 15.3

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = cL$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 3n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{9n - 1}}$

Teorema del sandwich

Enunciado

Teorema 15.4

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ sucesiones tales que $\forall n \geq N$, $a_n \leq b_n \leq c_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L \, .$$

Teorema 15.5

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo: Calcule los siguientes límites.

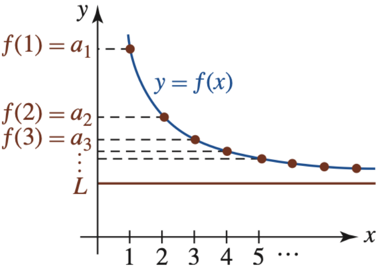
1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}$
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n}$

Uso de la regla de L'hopital

Teorema 15.6

Suponga que $f(x)$ es una función definida para todo $x \geq N$ y que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq N$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = L$$



Demostración

Teorema 15.6

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Sea $\bar{M}$ un entero mayor que M y mayor o igual que N, entonces

$$n > \bar{M} \Longrightarrow |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon$$

Uso de la regla de L'hopital

En virtud del Teorema previo, podemos hacer uso de la regla de L'hopital para estudiar el comportamiento de una sucesión. Por ejemplo, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\frac{1}{n}}$$

Solución: Si definimos para $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}}$ sigue que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} =^{\text{L'H}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Así, por Teorema 15.6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Límites importantes

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} = 1.$
- Si $p > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (mas general, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$).
- Dado $r \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si} \quad r = 1 \\ \text{diverge} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 15.7

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Llamaremos **subsucesión** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cualquier otra sucesión de la forma $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente.

Ejemplos:

1. $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Las sucesiones constantes $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ y $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 15.8

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces toda subsucesión de ella es convergente y converge al mismo valor.

Corolario 15.9

Sean $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiones de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se tiene que:

1. Si una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a valores distintos, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Definición 15.10

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Al sumar los términos de la sucesión se obtiene una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... + ...$$

que llamaremos **serie infinita** o simplemente **serie** y que denotaremos por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \ , \sum_{n=1}^{\infty} n \ , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Suma de una serie
Problema

Estamos interesados en conocer cual es la **suma** de una serie (siempre y cuando exista). Observar que no es del todo sencillo sumar infinitas cantidades, ya que podrían suceder situaciones extrañas: Si sumamos

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + ... + ..$$

podría darse el caso que la suma sea 1 o 0, dependiendo de como sumemos. En efecto,

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + ... + ... = \color{red}{1}$$

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + ... + ... = \color{red}{0}$$

Con el fin de evitar ambigüedades como la anterior, precisaremos lo que entenderemos como **suma** de una serie.

Sucesión de sumas parciales

Definición

Notar que a partir de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ podemos formar una nueva sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

esta nueva sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales** de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definición 15.11

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si el límite de su suma parcial $n-$ésima existe, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$$

En tal caso, diremos que el número S es la **suma de la serie**.

Observación. Si el límite de la suma parcial n-ésima no existe, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

Ejemplo 1

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + .. + n + ...$

Algunas de sus sumas parciales, incluyendo la suma parcial $n-$ésima corresponden a las siguientes:

$$s_1 = 1 \ \ , \ s_2 = 1 + 2 \ \ , \ s_3 = 1 + 2 + 3 \ \ , \ \ldots \ , \ s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Luego, como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge.

Ejemplo 2

2. La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

es divergente. En efecto, las sumas parciales de la serie son $s_1 = -1$, $s_2 = -1+1 = 0$, $s_3 = -1+1-1 = -1$, $s_4 = -1+1-1+1 = 0$,....,.

Así, $s_{2n} = 0$ y $s_{2n-1} = -1$ y como $(s_{2n}), (s_{2n-1})$ son dos subsucesiones de (s_n) que convergen a valores diferentes, sigue que (s_n) es divergente por Corolario 15.9. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge.

Ejemplo 3

Serie telescópica

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Notar que $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Luego,

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;\;,\;\; s_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} \;,\; \ldots . \;\;,\;\; s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, entonces la serie converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ejemplo 4

Serie geométrica

4. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ...$

Notar que cada término de la serie se obtiene multiplicando el término anterior por número real r que llamaremos razón de la serie. Luego,

$$r = \frac{a_{i+1}}{a_i} \quad , \ \forall i = 1, .., n$$

Ejemplo 1: La serie $2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \frac{16}{125}. \frac{32}{625}, ...,$ es una serie geométrica con $r = \frac{2}{5}$ y $a = 2$. Luego, se puede escribir como $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Ejemplo 2: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{4^n} + ...+$

Teorema 15.12

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ...$$

i) Converge y su suma es $S = \dfrac{a}{1-r}$, si $|r| < 1$

ii) Diverge si $|r| \geq 1$

Caso general: Dado $a \in \mathbb{R}$ y k un entero no negativo, se tiene que

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r} \quad , \ |r| < 1$$

Reindexar una serie

Es posible **reindexar** una serie y esto NO altera su convergencia. Sin embargo, esto es posible siempre y cuando se preserve el orden de sus términos de la siguiente manera:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=k-h}^{\infty} a_{n+h}$$

Ejemplo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-3}{n-2}$$

Teorema 15.13

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración: Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe (como número real) y como $s_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n$ sigue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = 0 \ .$$

Corolario 15.14 (Criterio de divergencia)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ejemplo: La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n+1}$ diverge ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n+1} = 2 \neq 0$

Serie de una suma

Teorema

El recíproco del Teorema 15.13 en general no es cierto. Por ejemplo, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ diverge.

Teorema 15.15

Dada las series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ se tiene que

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$
2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = cA$, $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

Ejercicio: Determine la suma de las siguientes series.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1} e^{-x}dx$$