Aplicaciones de la derivada (parte 3)

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Teorema (Rolle)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, b]$, derivable en todo punto del intervalo $]a, b[$ y además $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem. Si f es constante, no hay nada que demostrar.
Supongamos f no constante. Por Teorema de Valores Extremos f tiene un extremo absoluto en $c \in]a, b[$, en particular, c es un extremo relativo. Como f es derivable en c, luego $f'(c) = 0$. ■

El teorema de Rolle nos permite demostrar el Teorema del Valor Medio, uno de los esenciales del Cálculo Diferencial.

Teorema (T.V.M.)

Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dem. Basta aplicar el teorema de Rolle a la función h definida por

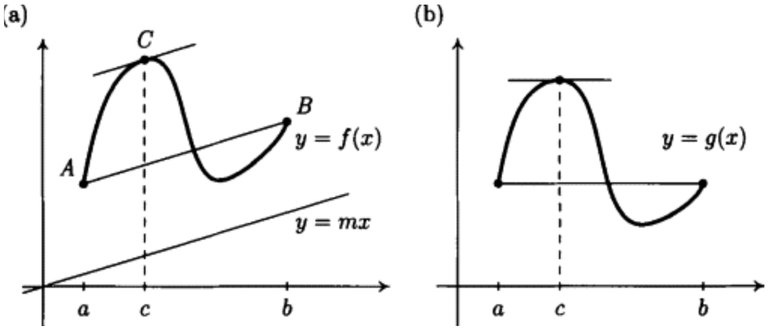
$$h(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

y notando que $h(a) = 0 = h(b)$.

$\blacksquare$

Teorema del Valor Medio

Gráfica teoremas



Teorema

Sea f definida en un intervalo I. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces $f(x) = C \in \mathbb{R}$ para todo $x \in I$.

Dem. Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Si aplicamos TVM a f en $[a, b]$, tenemos que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $f'(c) = 0$ luego $f(a) = f(b)$, y dado que a, b son puntos arbitrarios de I, se concluye que f es constante.

$\blacksquare$

Corolario

Sean f y g dos funciones definidas sobre un intervalo I. Si $f'(x) = g'(x)$ para todo I, entonces $f(x) = g(x) + C$ con C una constante.

Definición

Sea f una función sobre un intervalo I, se dice que F es una **antiderivada** de f si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Ejemplo. Una antiderivada de $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ es $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$.

Observaciones:

- ♢ El teorema anterior dice que todas las antiderivadas de la función nula sobre un intervalo I son funciones constantes.
- ♢ El corolario establece que conocida una antiderivada F de una función f dada, sobre un intervalo I, todas las antiderivadas de f son de la forma $F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$.
- ♢ El conjunto de todas las antiderivadas de f se llama *integral indefinida* de f y se denota $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Monotonía

Definición

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto I. Se dice que:

1) f es **monótona creciente** sobre I si
$$\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

2) f es **monótona decreciente** sobre I si
$$\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

Si en vez de $\leq$ y $\geq$ escribimos $<$ y $>$, las funciones se llaman **estrictamente creciente** y **estrictamente decreciente**, respectivamente.

Ejemplo: La función identidad $f(x) = x$ es estrictamente creciente. La función

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es decreciente (no estrictamente).

Teorema

Sea f definida sobre un intervalo abierto I.

1) $\forall x \in I : f'(x) > 0 \implies f$ es estrictamente creciente en I.
2) $\forall x \in I : f'(x) < 0 \implies f$ es estrictamente decreciente en I.

Dem. 1) Supongamos que $f'(x) > 0$ en todo el intervalo I y elijamos $a, b \in I$ con $a < b$. Al aplicar TVM a f sobre $[a, b]$, tenemos que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0.$$

Luego, $f(b) - f(a) > 0$ y así $f(a) < f(b)$. ■

Observación 1. La implicancias contrarias no son verdaderas. Por ejemplo $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $]-1, 1[$ pero $f'(0) = 0$.

Observación 2. Si se sustituye $>$ por $\geq$ o $<$ por $\leq$, las implicancias se cambian por **creciente** y **decreciente**.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Determine

$a)$ Puntos críticos.

$b)$ Intervalos de crecimiento de f. Deduzca de esto la naturaleza de los puntos críticos.

Solución a) Como f es una función polinómica, f es derivable en $\mathbb{R}$, luego $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$.
Resolvemos $f'(x) = 0$. De aquí, obtenemos que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos los únicos puntos críticos de f.
Solución b) Analizamos los signos de $f'(x)$ mediante una tabla

		0		1	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Luego, f decrece estrictamente en $]-\infty,0[$ y $]0,1[$. Además, como f es continua en $\mathbb{R}$, se concluye que f es decreciente (estrictamente) $]-\infty,1[$. También, f es estrictamente creciente en el intervalo $[1,+\infty[$.

Así, como f decrece en $]-\infty,1[$, $x=0$ no es extremo relativo, mientras que en $x=1$ la monotonía de f cambia, por lo que $x=1$ es un **mínimo relativo**. Más aún, si notamos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = +\infty$, podemos afirmar que $x=1$ es un punto de **mínimo absoluto** de f.

Ejemplo 2. Sea $f(x)=4x^3-9x^2-12x+3$, $x\in\mathbb{R}$. Determine los puntos $a)$ y $b)$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 3. Sea $f(x)=x+\cos(x)$. Determine sus intervalos de crecimiento en $]-\pi,+\pi[$.

El **criterio de la primera derivada** nos entrega información de la naturaleza de los puntos críticos de f analizando los cambios de signo de f':

Corolario

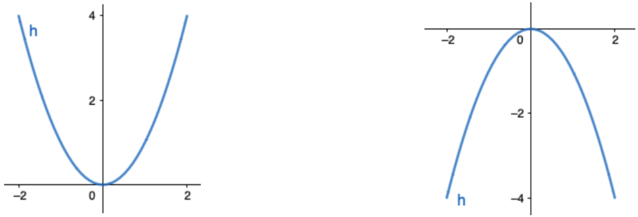
Sea f una función continua en el punto x_0

1) f' cambia de $-$ a $+$ en $x_0 \implies x_0$ es un mínimo relativo de f.
2) f' cambia de $+$ a $-$ en $x_0 \implies x_0$ es un máximo relativo de f.

Observación. Es importante que se cumpla la condición de continuidad de f en el punto x_0. Analizar, por ejemplo

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Nos interesa saber cómo se curva la gráfica de una función en la vecindad de cierto punto x_0, si es hacia arriba o hacia abajo. Si la gráfica es como en la primera figura, diremos que es *cóncava hacia arriba* y en la segunda, *cóncava hacia abajo*.



Si f es derivable, esta propiedad está determina por la posición de la gráfica de f en una vecindad de x_0 respecto a su recta tangente en dicho punto.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en x_0. Se dice que el gráfico de f es

1) **Cóncavo hacia arriba** en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para todo x próximo de x_0:
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2) **Cóncava hacia abajo** en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para todo x próximo de x_0:
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Además, si f cumple que es cóncava hacia arriba (o hacia abajo) en todos los puntos $(x_0, f(x_0))$ con $x_0 \in I$, se dice que el gráfico de f, denotado por $graf(f)$, es cóncavo hacia arriba en I (o abajo en I, respectivamente).

Concavidad

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo I.

1) $\forall x \in I : f''(x) \geq 0 \implies graf(f)$ es cóncavo hacia arriba en I.
2) $\forall x \in I : f''(x) \leq 0 \implies graf(f)$ es cóncavo hacia abajo en I.

Dem. 1) Como $f''(x) \geq 0$, se obtiene que f' es una función creciente en I. Por otro lado, según TVM, para $x_0 \in I$ fijo, dado x existe $t_x \in]x_0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(t_x).$$

Luego, para $x > x_0$ se tiene que $t_x > x_0$ y

$$f'(t_x) \geq f'(x_0) \implies f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En el caso de $x < x_0$ se obtiene la misma desigualdad. Por lo tanto, el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en todo el intervalo I.

■

Ejemplo 4. Analice los intervalos de concavidad de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ y haga un esbozo de la curva.

Solución. La segunda derivada de f es $f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$. Analizamos sus signos mediante la tabla siguiente

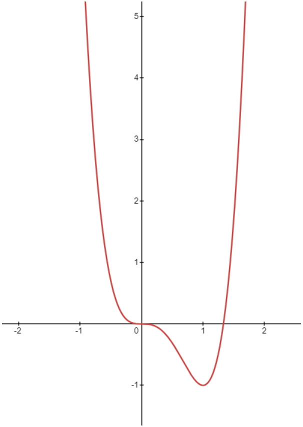
		0		$\frac{2}{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

de donde se obtiene que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en $]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$ y cóncavo hacia abajo en $]0, \frac{2}{3}[$.

Concavidad

Ejemplo

Para esbozar la gráfica debemos notar que los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ la concavidad de f cambia y además, del ejemplo 1, sabemos que $x = 1$ es mínimo absoluto de f.



Definición

Un punto del gráfico de f donde f es conitinua y cambia de concavidad la gráfica $y = f(x)$, se llama **punto de inflexión**.

En el ejemplo anterior, $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ son puntos de inflexión del gráfico de f.

Observación. No confundir con los puntos donde se anula f''. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ se anula en $x = 0$ pero $(0,0)$ no es punto de inflexión.

Teorema

Sea $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

1) $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ es un punto de máximo relativo de f.
2) $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ es un punto de mínimo relativo de f.

Dem. 1) Como f'' es la derivada de f', por definición

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

de donde se concluye que en una pequeña vecindad $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Así, si $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ entonces $f'(x) > 0$ y si $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ entonces $f'(x) < 0$. Luego, f' cambia de signo (de $+$ a -) en x_0 y, por tanto, x_0 es un punto de máximo relativo de f. ■

Observación. En el caso que $f''(x_0) = 0$ y $f'(x_0) = 0$, el criterio no entrega información. Por ejemplo, analizar las funciones

$$f_1(x) = x^4$$
$$f_2(x) = -x^4$$
$$f_3(x) = x^3$$

Ejercicio final: Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ definida en $\mathbb{R} - \{1\}$. Determine asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión. Esboce el gráfico de f.