

Listado 4

1. Demuestre que 3-cubo es planar. Determine si el 4-cubo es planar. ¿Es el 5-cubo planar?.
2. Demuestre que el complemento del ciclo de largo 6 es planar.
3. Demuestre o encuentre un contraejemplo para la siguiente afirmación: todo subgrafo de un grafo planar es planar.
4. Demuestre o encuentre un contraejemplo para la siguiente afirmación: todo subgrafo de un grafo que no es planar no es planar.
5. Determine todos los valores de r y s tal que $K_{r,s}$ sea planar.
6. Demuestre que los grafos que se obtienen al borrar una arista de $K_{3,3}$ y de K_5 son planares (no importa qué arista).
7. Demuestre que todo grafo planar tiene un vértice de grado menor o igual a 5.
8. Use los teoremas vistos en clases para demostrar que todo grafo planar con menos de 12 vértices tiene un vértice con grado menor o igual a 4.
9. Demuestre o encuentre un contraejemplo para la siguiente afirmación: no existe un grafo planar bipartito con grado mínimo mayor o igual a 4.
10. **Definición:** Sea G un grafo planar y $D(G)$ un dibujo plano de G . El grafo *dual* de G , denotado G^* , es el grafo que se obtiene a partir de $D(G)$ poniendo un vértice en cada cara de G y uniéndolo a los vértices que representan las caras a las que tienen una arista en común en su borde. Notar que G^* puede tener bucles y aristas paralelas, por lo que no es un grafo simple necesariamente. Ver el ejemplo de la Figura 1 para tener una mejor idea.

Demuestre o encuentre un contraejemplo para la siguiente afirmación: Un grafo conexo G tiene un vértice v tal que $G - v$ tiene más de una componente conexa si y solo si G^* tiene un vértice v^* tal que $G^* - v^*$ tiene estrictamente más componentes conexas que G^* .

11. Sea G un grafo planar tal que si le agregamos una arista cualquiera deja de ser planar. Demuestre que el dual de G es 3-regular.
12. Demuestre que el octaedro es el dual del cubo y que el icosaedro es el dual de dodecaedro.
13. Demuestre que si G es bipartito su dual G^* es Euleriano.
14. **Definición:** Un grafo planar G se dice *outerplanar* si tiene un dibujo plano donde todo vértice está en el borde de la cara no acotada (cara exterior). Por ejemplo, K_4 y $K_{2,3}$ son planares pero no son outerplanar.

Para $n \leq 2$, determine el máximo número de aristas de un grafo outerplanar con n vértices usando alguna de estas tres técnicas distintas:

- Inducción en n ,

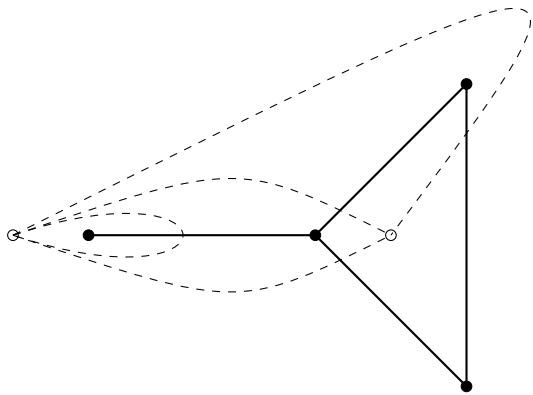


Figura 1: En vértices negros y líneas continuas se muestra el dibujo de un grafo G . Con líneas discontinuas y vértices blancos se muestra el dibujo de su grafo dual G^* .

- La fórmula de Euler,
 - Los teoremas vistos en clases sobre grafos planares.
15. El *grafo dual débil* de un grafo G es su grafo dual G^* sin el vértice correspondiente a la cara no acotada (cara exterior). Demuestre que el grafo dual débil de un grafo outerplanar es un bosque.
 16. Demuestre la fórmula de Euler usando inducción en el número de ciclos de un grafo. Parta de la base de que un dibujo plano de un árbol tiene una única cara.