

Guía N°8: Problemas de Valores Iniciales

Parte II

Cálculo Numérico 521230

Los problemas a resolver con ayuda del computador han sido marcados con (C).

1. Considere las ecuaciones

- a) $y'(x) = 2x$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, cuya solución exacta es $y(x) = x^2$,
- b) $y'(x) = -\sin(x)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, \pi]$, cuya solución exacta es $y(x) = \cos(x)$,
- c) $y'(t) = 1 + \frac{y}{t}$, $y(1) = 1$, $t \in [1, 6]$, cuya solución exacta es $y(t) = t(1 + \ln(t))$.

Para cada una de ellas realice lo siguiente:

- Calcule, con calculadora, las aproximaciones que se obtengan de aplicar un paso del método de **Euler Implícito** con $n = 3$ subintervalos.
- Utilice el algoritmo de **Euler Implícito** implementado en MATLAB y considerar $n = 100$ subintervalos. Graficar la solución exacta y la aproximación obtenida.

2. (C) Considere el P.V.I

$$\begin{cases} y'(x) = 100(1 - y(x)), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = 1 - e^{-100x}.$$

- a) Aproxime la solución utilizando el método de **Euler Explícito** con tamaños de paso $\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}$. Dibuje, para cada tamaño de paso, la solución exacta y la aproximación obtenida en un mismo gráfico.
- b) Realice lo mismo que en el ítem anterior, pero utilice esta vez el método de **Euler implícito**.
- c) ¿Qué fenómeno observa?. ¿Cuál es la explicación?.

3. (C) Considere los siguientes problemas de valores iniciales:

a)

$$\begin{cases} y'(x) = -z(x) + 2x + e^x, & x \in [0, 1] \\ z'(x) = y(x) - x^2 + z(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1, \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2 \text{ y } z(x) = e^x.$$

b)

$$\begin{cases} y'(t) = (t+1)y(t) - w(t)e^t, & t \in [0, 2] \\ w'(t) = 1, & t \in [0, 2] \\ y(0) = 1, \\ w(0) = 0, \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(t) = e^t \text{ y } w(t) = t.$$

Para cada uno de ellos:

- Calcule, “a mano” o con calculadora, las aproximaciones que se obtengan de aplicar el método de Euler explícito con dos subintervalos.
- Baje el programa de MATLAB *euler_sistemas.m* y utilícelo para obtener las aproximaciones de considerando 100 subintervalos. Grafique la aproximación y la solución exacta para comparar.