Funciones integrables Lebesgue.

- **Integral de Lebesgue.**
- **Propiedades de las funciones integrables Lebesgue.**
- **Teorema de la Convergencia Dominada (T.C.D.).**

Integral de Lebesgue.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida.

- Recordemos que $\forall f : X \to \mathbb{R}$, se definen $f^+, f^- : X \to \mathbb{R}^+$ por

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}, \quad x \in X,$$

de manera que

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{y} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Def.: • Sea $f : X \to \mathbb{R}$ medible.

f es **integrable Lebesgue** si $\boxed{\int f^+ \, d\mu < +\infty}$ y $\boxed{\int f^- \, d\mu < +\infty.}$

- En tal caso, la **integral de Lebesgue** de f se define como

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

- Si $E \in \mathscr{X}$, entonces $\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$.

- Al espacio de las funciones integrables Lebesgue se lo denota

$$L(X, \mathscr{X}, \mu) := \{\, f : X \to \mathbb{R} \text{ integrable Lebesgue}\}.$$

Propiedades de las funciones integrables Lebesgue.

Lema: Si $f = f_1 - f_2$ con $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}^+$ medibles de integral finita, entonces $\int f\, d\mu := \int f_1\, d\mu - \int f_2\, d\mu$.

Dem.: $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2 \implies f^+ + f_2 = f_1 + f^-$
con las cuatro funciones, $f^+,\ f^-,\ f_1$ y f_2, positivas

$$\implies \int f^+\, d\mu + \int f_2\, d\mu = \int f_1\, d\mu + \int f^-\, d\mu$$

$$\implies \int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \int f_1\, d\mu - \int f_2\, d\mu. \quad \blacksquare$$

Lema: Sean $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $\lambda : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ definida $\forall E \in \mathscr{X}$ por $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu$. Entonces, λ es una medida con signo.

Dem.: Como f^+ y f^- son medibles positivas, entonces $\lambda^+(E) := \int_E f^+\, d\mu$ y $\lambda^-(E) := \int_E f^-\, d\mu,\ E \in \mathscr{X}$, definen dos medidas, λ^+ y λ^-.
Las dos medidas son finitas, pues $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$.
Como las combinaciones lineales de medidas finitas son medidas con signo **Ej.**
y $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, entonces λ **es una medida con signo.** $\blacksquare$

Una función es integrable Lebesgue si y sólo si es **absolutamente integrable** en el sentido del siguiente teorema.

Teor.: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ medible. Entonces, $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ si y sólo si $|f| \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$, en cuyo caso $\left|\int f \, d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$.

Dem.: Notemos que como $|f| \geq 0$, entonces $|f|^+ = |f|$ y $|f|^- = 0$. Por lo tanto $|f| \in L(X, \mathscr{X}, \mu) \iff \int |f| \, d\mu < +\infty$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu) \implies \int f^+ \, d\mu < +\infty$ y $\int f^- \, d\mu < +\infty$.
Entonces, $\int |f| \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < +\infty \implies |f| \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ $|f| \in L(X, \mathscr{X}, \mu) \implies \int |f| \, d\mu < +\infty$ y, como $f^+, f^- \leq |f|$, entonces $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ y $\int f^- \, d\mu < +\infty \implies f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$.

Finalmente, si $f, |f| \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$, entonces
$\left|\int f \, d\mu\right| = \left|\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu\right| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu$. ■

Corol.: Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ con f medible, g integrable y $|f| \leq |g|$. Entonces, f es integrable y $\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$.

Dem.: $|f| \leq |g| \implies \int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu < +\infty \implies f$ **integrable.** ■

El siguiente teorema muestra que $L(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio vectorial y que la integral es un funcional lineal en ese espacio.

Teor.: Sean $f,\ g \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

a) $\alpha f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu;$

b) $f + g \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$

Dem.: (a) $\int |\alpha f|\, d\mu = |\alpha| \int |f|\, d\mu < +\infty \implies \alpha f \in L(X, \mathscr{X}, \mu).$

∘ Si $\alpha = 0,\ \alpha f = 0$ y $\int (\alpha f)\, d\mu = 0 = \alpha \int f\, d\mu.$

∘ Si $\alpha > 0,$ entonces $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$

$$\implies \int (\alpha f)\, d\mu = \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu$$
$$= \alpha \left(\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \right) = \alpha \int f\, d\mu.$$

∘ Si $\alpha < 0,$ entonces $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ y $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$ $\boxed{\textbf{Ej.}}$

$$\implies \int (\alpha f)\, d\mu = \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu$$
$$= -\alpha \left(\int f^-\, d\mu - \int f^+\, d\mu \right) = \alpha \int f\, d\mu.$$

Entonces, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad \int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$

(b) Sean $f,\, g \in L(X, \mathscr{X}, \mu) \implies |f|,\, |g| \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$

$\implies \int |f+g|\, d\mu \leq \int (|f| + |g|)\, d\mu = \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu < +\infty$

$\implies (f+g) \in L(X, \mathscr{X}, \mu).$

Finalmente, $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$

con $(f^+ + g^+) \geq 0,\ (f^- + g^-) \geq 0$ y ambas de integral finita.

Entonces, usando el primer lema de la clase de hoy,

$$\begin{aligned} \int (f+g)\, d\mu &= \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu \\ &= \int (f^+ - f^-)\, d\mu + \int (g^+ - g^-)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema de la Convergencia Dominada (T.C.D.).

Teor. [de la Convergencia Dominada (T.C.D.)]:

Sean $f_n \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : X \to \mathbb{R}$ medible, tales que:

(i) $f_n \to f$ c.t.p.; **(convergencia)**

(ii) $\exists\, g \in L(X, \mathscr{X}, \mu) : \ |f_n| \le g \quad \forall n \in \mathbb{N}$. **(dominada)**

Entonces, $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ y $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n} \int f \, d\mu$.

Dem.: Lo demostraremos en varios pasos.

- (i) $\Longrightarrow \exists\, N \in \mathscr{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ en $X \setminus N$.
  Redefinimos las funciones f_n, $n \in \mathbb{N}$, y f a cero en N, de manera que las funciones redefinidas (a las que le conservamos sus nombres) satisfagan $f_n \xrightarrow{n} f$ en todo punto.
  Esa redefinición, no cambia las integrales de las funciones involucradas. **Ej.**
- (ii) y $f_n \to f \Longrightarrow |f| \le g \in L(X, \mathscr{X}, \mu) \overset{\text{Corol.}}{\Longrightarrow} f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$.

$$\circ \quad |f_n| \leq g \implies -g \leq f_n \leq g \implies \begin{cases} g + f_n \geq 0, \\ g - f_n \geq 0, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned}
\circ \quad \int g\, d\mu + \int f\, d\mu &= \int (g + \lim_n f_n)\, d\mu = \int \lim_n \underbrace{(g + f_n)}_{\geq 0} d\mu \\
&\overset{\text{Fatou.}}{\leq} \liminf_n \int (g + f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_n \left(\int g\, d\mu + \int f_n\, d\mu\right) \\
&= \int g\, d\mu + \liminf_n \int f_n\, d\mu
\end{aligned}$$

$$\implies \int f\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu.$$

$$\begin{aligned}
\circ \quad \int g\, d\mu - \int f\, d\mu &= \int (g - \lim_n f_n)\, d\mu = \int \lim_n \underbrace{(g - f_n)}_{\geq 0} d\mu \\
&\overset{\text{Fatou.}}{\leq} \liminf_n \int (g - f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_n \left[\int g\, d\mu + \int (-f_n)\, d\mu\right] \\
&= \int g\, d\mu + \liminf_n \int (-f_n)\, d\mu \\
&= \int g\, d\mu - \limsup_n \int f_n\, d\mu
\end{aligned}$$

$$\implies \limsup_n \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

$$\circ \quad \int f\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu \leq \limsup_n \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$

$$\implies \liminf_n \int f_n\, d\mu = \limsup_n \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

$$\implies \exists \lim_n \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu. \quad \blacksquare$$