Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Tarea no. 4 — viernes 2 de junio de 2017

Plazo de entrega: miércoles 14 de junio de 2017, 10.15 horas

Problema 4 (Tarea 2)**.** Se considera el sistema lineal $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$, la matriz $\boldsymbol{E}$ y el vector $\boldsymbol{d}$ dados por

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Visualizar $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$ como dos rectas en el plano (x_1, x_2) y dibujar el conjunto de los puntos $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ que satisface

$$|\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{A}_0\tilde{\boldsymbol{x}}| \leq \alpha \boldsymbol{E}|\tilde{\boldsymbol{x}}| + \delta \boldsymbol{d}$$

para (a) $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.5$, (b) $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.1$ y (c) $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.05$. Comparar los resultados.

La solución correcta de este problema mejora la nota de la Tarea 2 en 1.2 (tope nota final: 7.0).

Problema 1. Se considera el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dado por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular tres pasos de los métodos Bloque-Gauss-Seidel y Bloque-SOR con $\omega = 1.1$ para obtener dos soluciones aproximadas, utilizando $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Se debe utilizar la partición

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Problema 2. Se considera el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ con

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

a) Preparar un dibujo que muestra las iso-curvas $f(\boldsymbol{x}) = c$, donde $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ y $c = 0, -10, -20, -30, -40, -50, -52$.

b) Partiendo desde $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, calcular la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{b}$ con el método cg de Hestenes y Stiefel, además calcular 4 pasos con cada uno de los métodos de Jacobi, de Gauß-Seidel y SOR con $\omega = \omega_{\mathrm{opt}}$. Agregar todos los vectores aproximados al dibujo, y evaluar f en todos los vectores.

Problema 3. Resolver el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ con

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

usando el método cg de Hestenes y Stiefel, $\boldsymbol{x}_0 = 0$, y calculando exactamente con fracciones.

Problema 4.

a) Aplicar el método cg de Hestenes y Stiefel para resolver el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 27 & -24 & 24 & -25 \\ -24 & 27 & -25 & 24 \\ 24 & -25 & 27 & -24 \\ -25 & 24 & -24 & 27 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -49 \\ 51 \\ -41 \\ 59 \end{pmatrix}.$$

Calcule hasta llegar a la solución exacta o a lo más 4 pasos.

b) Determinar el los espectro $\sigma(\boldsymbol{A})$. (Aviso: $\sigma(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{N}$.)

c) Comparar $E(\boldsymbol{x}_k)$, $k = 1, \dots, 4$, con la cota entregada por la última línea de (4.48).

Problema 5. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 26 & 8 & -7 & -9 \\ 8 & 26 & 9 & 7 \\ -7 & 9 & 26 & -8 \\ -9 & 7 & -8 & 26 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que los valores propios de $\boldsymbol{A}$ están dados por $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{36, 34, 32, 2\}$.

b) Aplicar el método cg de Hestenes y Stiefel, a partir de $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$, para resolver el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b} = (-27, 25, 8, 42)^{\mathrm{T}}$. Comparar el factor de reducción de error en cada paso con la cota dada por (4.48).

c) Resolver el mismo problema con el método SOR con $\omega = 1$ (método de Gauss-Seidel) y $\omega = 1.5$. Calcular o estimar en cada caso $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega))$ y comparar con el resultado de (c).