Optimización III (525551)

Módulo V: Problema del Flujo de Costo Mínimo (PFCM)

Pr. Julio Aracena.

Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Primer semestre, 2023

Problema del Flujo de Costo Mínimo

Sea $G = (V, E)$ una red con función capacidad c y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente. Sea además $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función de costos o pesos en los arcos de G. Dado un s-t flujo f en (G, c) el costo o peso de f se define por:

$$w(f) := \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) = \sum_{u}\sum_{v} f(u,v)w(u,v).$$

Problema del Flujo de Costo Mínimo

Sea $G = (V, E)$ una red con función capacidad c y $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente. Sea además $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función de costos o pesos en los arcos de G. Dado un s-t flujo f en (G, c) el costo o peso de f se define por:

$$w(f) := \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) = \sum_{u}\sum_{v} f(u,v)w(u,v).$$

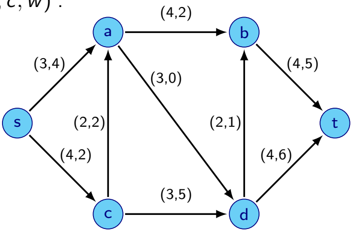
Definición (PFCM): : El problema del **Flujo de Costo Mínimo (PFCM)** se define por:
Dado (G, c, s, t, w, f_0) como antes y donde $f_0 \in \mathbb{R}_0^+$ es una constante, se desea encontrar un s-t flujo f^* en (G, c) con $Val(f^*) = f_0$ y de costo mínimo, i.e.

$$w(f^*) = \text{mín}\{w(f) : \ f \text{ es un } s\text{-}t \text{ flujo en } (G, c),\ Val(f) = f_0\}.$$

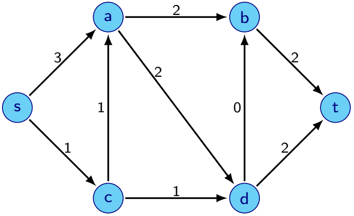
Flujo en redes

Ejemplo: Sea la siguiente red (G, c, w), donde la etiqueta de cada arco (u, v) de G corresponde a $(c(u, v), w(u, v))$. Sea además $f_0 = 4$.

(G, c, w) :



(G, f) :

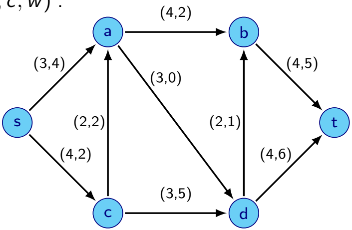


$w(f) = 47$

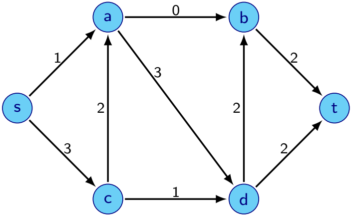
Flujo en redes

Ejemplo: Sea la siguiente red (G, c, w), donde la etiqueta de cada arco (u, v) de G corresponde a $(c(u, v), w(u, v))$. Sea además $f_0 = 4$.

(G, c, w) :



(G, f) :



$w(f) = 43$ ¿Es el mínimo?

Red residual con costos residuales

Sea $(G = (V, E), c, s, t, w, f_0)$ una instancia del PFCM, donde suponemos que $G = (V, E)$ no tiene ciclos de largo 2. Dado f un s-t-flujo en (G, c) con $Val(f) = f_0$ (no necesariamente de valor máximo) y G_f la red residual asociada, se define la función costo (o peso) residual en $G_f = (V, E_f)$ por la función: $w_f : E_f \to \mathbb{R}$ donde $\forall (u, v) \in E_f$:

$$w_f(u,v) = \begin{cases} w(u,v) & \text{si } (u,v) \in E, \\ -w(v,u) & \text{si } (v,u) \in E. \end{cases}$$

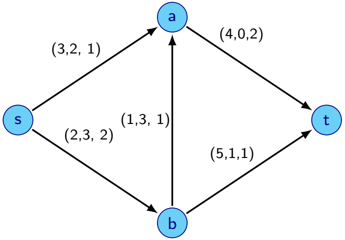
Observación: La función costo residual puede tomar valores negativos. De esta forma, un ciclo $C : u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1} \equiv u_1$ en G_f es de costo o peso negativo si

$$w_f(C) := \sum_{i=1}^{k} w_f(u_i, u_{i+1}) < 0.$$

Red residual con costos residuales

Ejemplo:

(G, c, w, f) :

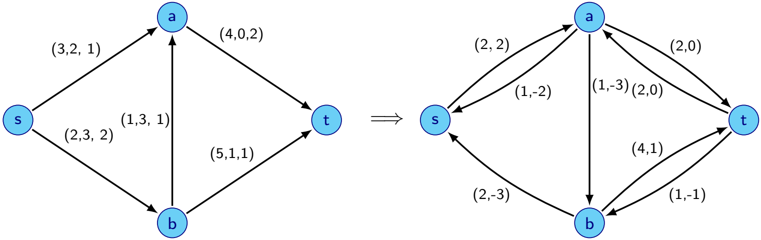


$\Longrightarrow$

Red residual con costos residuales

Ejemplo:

(G, c, w, f) : $\qquad$ (G_f, c_f, w_f) :



Notar que $C : s, a, b, s$ es un ciclo en G_f con peso $w_f(C) = -4 < 0$.

Modificación de flujo por ciclos

Definición: Sea f un s-t flujo en (G, c) y C un ciclo en G_f. Si denotamos $\tilde{c} = \text{mín}\{c_f(u, v) : \ (u, v) \in E(C)\}$ la capacidad mínima residual de C, donde $E(C)$ es el conjunto de arcos de C, entonces podemos definir un nuevo s-t flujo $\tilde{f}$ de (G, c) por: $\forall (u, v) \in E$,

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \cap E(C), \\ f(u, v) - \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \wedge (v, u) \in E(C), \\ f(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

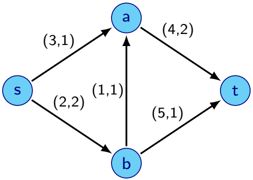
Modificación de flujo por ciclos

Definición: Sea f un s-t flujo en (G, c) y C un ciclo en G_f. Si denotamos $\tilde{c} = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in E(C)\}$ la capacidad mínima residual de C, donde $E(C)$ es el conjunto de arcos de C, entonces podemos definir un nuevo s-t flujo $\tilde{f}$ de (G, c) por: $\forall (u, v) \in E$,

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \cap E(C), \\ f(u, v) - \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \wedge (v, u) \in E(C), \\ f(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo: Para la red del ejemplo anterior se tiene que $C : s, a, b, s$ es un ciclo en G_f y $\tilde{c} = 1$. Luego, se tiene lo siguiente:

(G, c, f) :



$Val(f) = 3, \; w(f) = 12$

$\Longrightarrow$

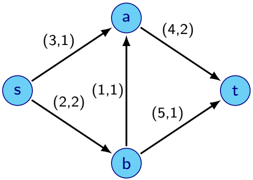
Modificación de flujo por ciclos

Definición: Sea f un s-t flujo en (G, c) y C un ciclo en G_f. Si denotamos $\tilde{c} = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in E(C)\}$ la capacidad mínima residual de C, donde $E(C)$ es el conjunto de arcos de C, entonces podemos definir un nuevo s-t flujo $\tilde{f}$ de (G, c) por: $\forall (u, v) \in E$,

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \cap E(C), \\ f(u, v) - \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \wedge (v, u) \in E(C), \\ f(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo: Para la red del ejemplo anterior se tiene que $C : s, a, b, s$ es un ciclo en G_f y $\tilde{c} = 1$. Luego, se tiene lo siguiente:

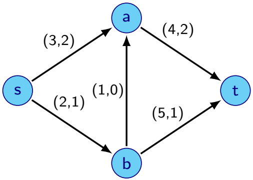
(G, c, f) :



$Val(f) = 3,\ w(f) = 12$

$\Longrightarrow$

$(G, c, \tilde{f})$:



$Val(\tilde{f}) = 3,\ w(\tilde{f}) = 8$

Modificación de flujo por ciclos

Lema: *La función* $\tilde{f}$ *definida previamente es un s-t flujo de* (G, c) *que verifica que:* $Val(\tilde{f}) = Val(f)$ *y* $w(\tilde{f}) = w(f) + \tilde{c} \cdot w_f(C)$.

Modificación de flujo por ciclos

Lema: *La función $\tilde{f}$ definida previamente es un s-t flujo de (G, c) que verifica que: $Val(\tilde{f}) = Val(f)$ y $w(\tilde{f}) = w(f) + \tilde{c} \cdot w_f(C)$.*

Demo En forma similar a lo realizado con el s-t flujo $\bar{f}$, definido a partir de f y un camino de aumento de flujo en G_f, se puede probar que $\tilde{f}$ es efectivamente un s-t flujo en (G, c)

Modificación de flujo por ciclos

Lema: *La función $\tilde{f}$ definida previamente es un s-t flujo de (G, c) que verifica que: $Val(\tilde{f}) = Val(f)$ y $w(\tilde{f}) = w(f) + \tilde{c} \cdot w_f(C)$.*

Demo En forma similar a lo realizado con el s-t flujo $\bar{f}$, definido a partir de f y un camino de aumento de flujo en G_f, se puede probar que $\tilde{f}$ es efectivamente un s-t flujo en (G, c) . Por otro lado, se tiene que:

i) Si C no contiene a s, entonces

$$Val(\tilde{f}) = \sum_u \tilde{f}(s, u) = \sum_u f(s, u) = Val(f).$$

Modificación de flujo por ciclos

Lema: *La función $\tilde{f}$ definida previamente es un s-t flujo de (G, c) que verifica que: $Val(\tilde{f}) = Val(f)$ y $w(\tilde{f}) = w(f) + \tilde{c} \cdot w_f(C)$.*

Demo En forma similar a lo realizado con el s-t flujo $\bar{f}$, definido a partir de f y un camino de aumento de flujo en G_f, se puede probar que $\tilde{f}$ es efectivamente un s-t flujo en (G, c) . Por otro lado, se tiene que:

i) Si C no contiene a s, entonces

$$Val(\tilde{f}) = \sum_u \tilde{f}(s,u) = \sum_u f(s,u) = Val(f).$$

ii) Si C contiene a s, entonces $\exists v, w \in V,\ (v,s),(s,w) \in E(C)$. Como s es nodo fuente de G entonces $(s,v) \in E$. Luego,

$$\begin{aligned}
Val(\tilde{f}) = \sum_u \tilde{f}(s,u) &= \sum_{u:\, u \notin \{v,w\}} \tilde{f}(s,u) + \tilde{f}(s,v) + \tilde{f}(s,w) \\
&= \sum_{u:\, u \notin \{v,w\}} f(s,u) + f(s,v) - \tilde{c} + f(s,w) + \tilde{c} \\
&= Val(f).
\end{aligned}$$

Modificación de flujo por ciclos

Demo (continuación):

Por otro lado, se tiene que:

$$w(\tilde{f}) = \sum_{(u,v)\in E} \tilde{f}(u,v)w(u,v) = \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (u,v),(v,u)\notin E(C)}} \tilde{f}(u,v)w(u,v) + \sum_{(u,v)\in E\cap E(C)} \tilde{f}(u,v)w(u,v)$$

$$+ \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (v,u)\in E(C)}} \tilde{f}(u,v)w(u,v) = \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (u,v),(v,u)\notin E(C)}} f(u,v)w(u,v) + \sum_{(u,v)\in E\cap E(C)} (f(u,v)+\tilde{c})w(u,v)$$

$$+ \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (v,u)\in E(C)}} (f(u,v)-\tilde{c})w(u,v) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) + \sum_{(u,v)\in E\cap E(C)} \tilde{c}w(u,v)$$

$$+ \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (v,u)\in E(C)}} -\tilde{c}w(u,v) = w(f) + \tilde{c}\Big(\sum_{(u,v)\in E\cap E(C)} w(u,v) + \sum_{\substack{(u,v)\in E:\\ (v,u)\in E(C)}} -w(u,v)\Big) = w(f) + \tilde{c}w_f(C).$$

Teorema de Flujo de Costo Mínimo

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2; $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente; $c, w : E \to \mathbb{R}_0^+$ función de capacidad y de costo respectivamente. Luego, se tiene que:*

i) *Si f es un s-t flujo, entonces f es de costo mínimo si y sólo si G_f no tiene ciclo de peso residual negativo.*

Teorema de Flujo de Costo Mínimo

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2; $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente; $c, w : E \to \mathbb{R}_0^+$ función de capacidad y de costo respectivamente. Luego, se tiene que:*

i) *Si f es un s-t flujo, entonces f es de costo mínimo si y sólo si G_f no tiene ciclo de peso residual negativo.*

ii) *Sea f un flujo de costo mínimo y p un camino de aumento de flujo en G_f de peso residual mínimo, entonces $\bar{f}$ es un flujo de costo mínimo.*

Algoritmo de Klein

A partir del resultado del teorema anterior se pueden construir dos diferentes métodos que dan una solución al PFCM cuando existe. Estos son: Algoritmo de Klein (o algoritmo de cancelación de ciclos,1967) y algoritmo de acumulación (o algoritmo de caminos más cortos sucesivos, 1958).

Algorithm Klein (G, c, w, s, t, f_0)

Input: $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2; c, w función capacidad y de peso respectivamente; $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente y $f_0 \in \mathbb{R}_0^+$

Encontrar un s-t flujo f con $Val(f) = f_0$. (puede ser usando por ejemplo Ford-Fulkerson)
if $\nexists f$ s-t flujo de valor f_0 **then**
    return No existe s-t flujo de valor f_0
end if
while $\exists C$ ciclo en G_f con $w_f(C) < 0$ **do**
    $\tilde{c} \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in E(C)\}$
    $f \leftarrow \tilde{f}$ (donde $\tilde{f}$ es definido con respecto a $\tilde{c}$)
end while
return f

Algoritmo de Klein

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de Klein termina en un número finito de operaciones elementales.

Algoritmo de Klein

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de Klein termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de Klein entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.

Algoritmo de Klein

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de Klein termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de Klein entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.
- El algoritmo de Klein no define un orden o criterio para escoger el ciclo negativo a usar en cada iteración. Por lo tanto, no es un algoritmo polinomial en el caso general, incluso con instancia de valores enteros.

Algoritmo de Klein

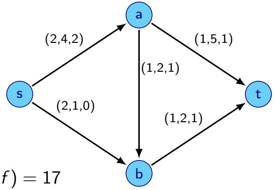
Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de Klein termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de Klein entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.
- El algoritmo de Klein no define un orden o criterio para escoger el ciclo negativo a usar en cada iteración. Por lo tanto, no es un algoritmo polinomial en el caso general, incluso con instancia de valores enteros.
- Si el algoritmo usa en cada iteración un ciclo negativo cuyo peso promedio por arcos sea mínimo, el que puede ser encontrado por un algoritmo en tiempo $O(|V||E|)$ (Goldeberg y Tarjan, 1988), entonces el algoritmo de Klein corre en tiempo $O(|V||E|\log(|V|)$, es decir es polinomial.

Algoritmo de Klein

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Klein con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 0.$ (G, c, w, f) :



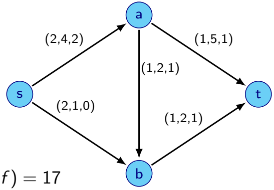
$w(f) = 17$

Algoritmo de Klein

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Klein con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 0.$

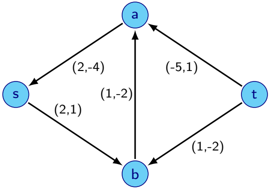
(G, c, w, f) :



$w(f) = 17$

$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$C : s, b, a, s$

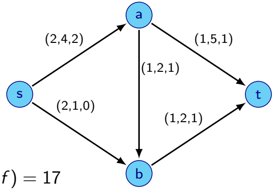
$\tilde{c} = 1,$

$w_f(C) = -5$

Algoritmo de Klein

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Klein con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

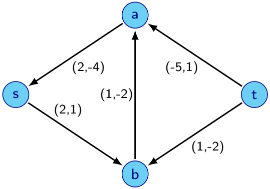
$t = 0.$ $(G, c, w, f):$



$w(f) = 17$

$\Longrightarrow$

$(G_f, c_f, w_f):$

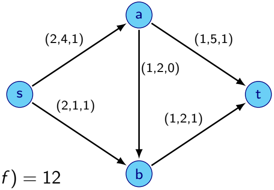


$C: s, b, a, s$

$\tilde{c} = 1,$

$w_f(C) = -5$

$t = 1.$ $(G, c, w, f):$

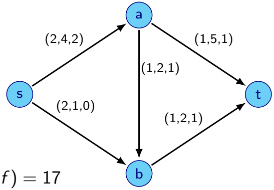


$w(f) = 12$

Algoritmo de Klein

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Klein con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

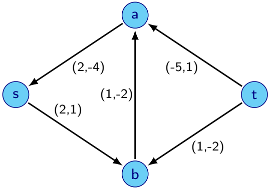
$t = 0$. (G, c, w, f) :



$w(f) = 17$

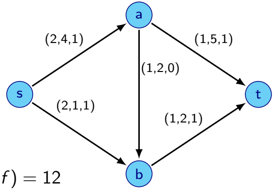
$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$C : s, b, a, s$
$\tilde{c} = 1,$
$w_f(C) = -5$

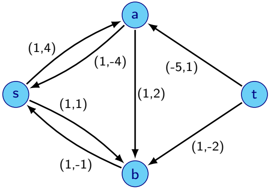
$t = 1$. (G, c, w, f) :



$w(f) = 12$

$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :

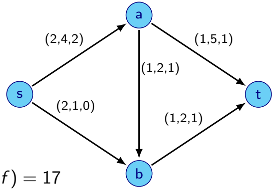


$\nexists C,\ w_f(C) < 0$

Algoritmo de Klein

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Klein con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

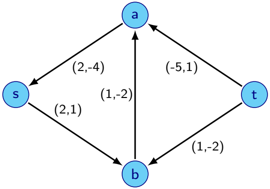
$t = 0.$ (G, c, w, f) :



$w(f) = 17$

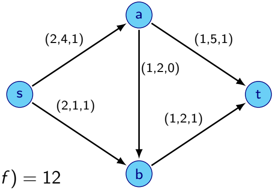
$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$C : s, b, a, s$
$\tilde{c} = 1,$
$w_f(C) = -5$

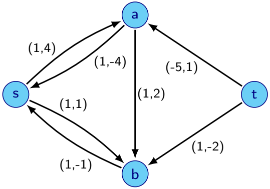
$t = 1.$ (G, c, w, f) :



$w(f) = 12$

$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$\nexists C,\ w_f(C) < 0$

Luego, $f^*(s, a) = f^*(a, t) = f^*(s, b) = f^*(b, t) = 1$ y $f^*(a, b) = 0$ es un $s - t$ flujo con $Val(f^*) = 2$ y con peso mínimo $w(f^*) = 12$.

Algoritmo de acumulación

Algorithm Acumulación (G, c, w, s, t, f_0)

Input: $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2; c, w función capacidad y de peso respectivamente; $s, t \in V$ nodo fuente y nodo sumidero respectivamente y $f_0 \in \mathbb{R}_0^+$

```
f ← 0
while Val(f) < f_0 do
    if ∃p camino de aumento de flujo en G_f then
        c̄ ← mín{c_f(u, v) : (u, v) ∈ E(p), p es camino de de peso mínimo}
        c̄ ← mín{c̄, f_0 − Val(f)}
        f ← f̄
    else
        return No hay solución
    end if
end while
return f
```

Algoritmo de acumulación

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de acumulación termina en un número finito de operaciones elementales.

Algoritmo de acumulación

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de acumulación termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de acumulación entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.

Algoritmo de acumulación

Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de acumulación termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de acumulación entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.
- En cada iteración del algoritmo de acumulación la red residual G_f no tiene ciclos de peso negativo. Luego puede usarse el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar un camino de aumento de flujo de peso mínimo.

Algoritmo de acumulación

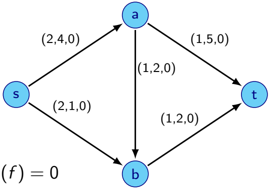
Observaciones:

- Si las capacidades y el valor f_0 son enteros no negativos, entonces el algoritmo de acumulación termina en un número finito de operaciones elementales.
- Si todas las capacidades de la red y el valor f_0 son enteros no negativos entonces el algoritmo de acumulación entrega un flujo óptimo (cuando existe) al PFCM con valores enteros.
- En cada iteración del algoritmo de acumulación la red residual G_f no tiene ciclos de peso negativo. Luego puede usarse el algoritmo de Bellman-Ford para encontrar un camino de aumento de flujo de peso mínimo.
- Si las capacidades y el valor de f_0 son enteros y se usa Bellmand-Ford para encontrar los caminos de aumento de flujo de peso mínimo, entonces el algoritmo de acumulación corre en tiempo $O(|V|^2|E|^2)$, es decir es polinomial.

Algoritmo de acumulación

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 0.$ (G, c, w, f) :



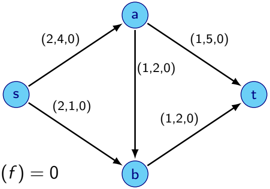
$Val(f) = 0$

Algoritmo de acumulación

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 0.$

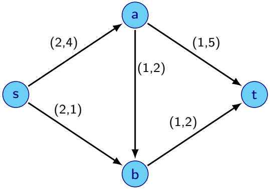
$(G, c, w, f):$



$Val(f) = 0$

$\Longrightarrow$

$(G_f, c_f, w_f):$



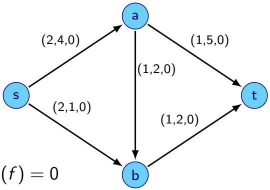
$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1,$

Algoritmo de acumulación

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

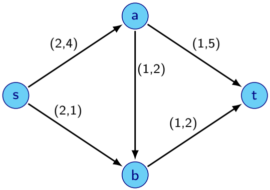
$t = 0.$ (G, c, w, f) :



$Val(f) = 0$

$\Longrightarrow$

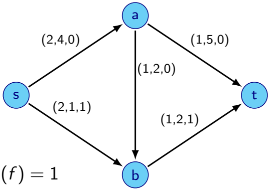
(G_f, c_f, w_f) :



$p : s, b, t$

$\bar{c} = 1,$

$t = 1.$ (G, c, w, f) :

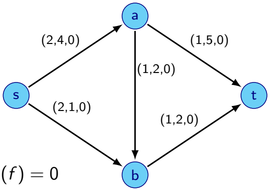


$Val(f) = 1$

Algoritmo de acumulación

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

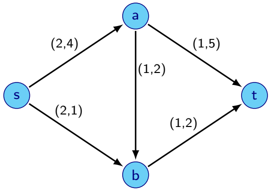
$t = 0.$ (G, c, w, f) :



$Val(f) = 0$

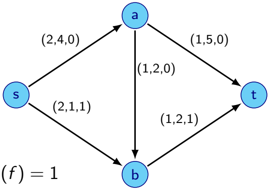
$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$p : s, b, t$
$\bar{c} = 1,$

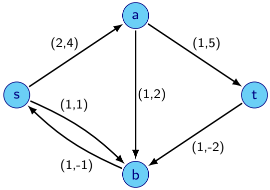
$t = 1.$ (G, c, w, f) :



$Val(f) = 1$

$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :

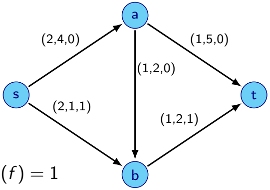


$p : s, a, t$
$\bar{c} = 1$

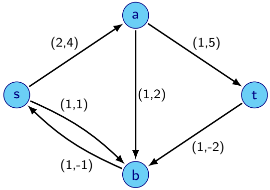
Algoritmo de acumulación

Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 1.$ (G, c, w, f) : $\Longrightarrow$ (G_f, c_f, w_f) :



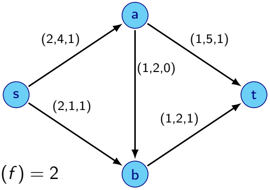
$Val(f) = 1$



$p : s, a, t$

$\bar{c} = 1$

$t = 2.$ (G, c, w, f) :

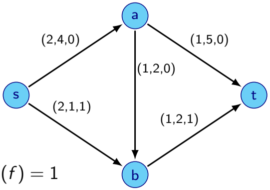


$Val(f) = 2$

Algoritmo de acumulación

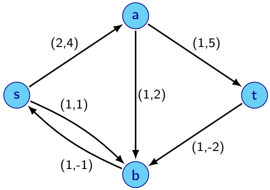
Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 1.$ (G, c, w, f) : (G_f, c_f, w_f) :



$Val(f) = 1$

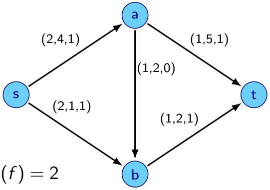
$\Longrightarrow$



$p : s, a, t$

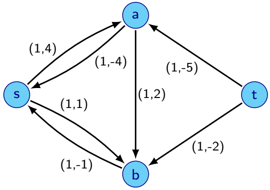
$\bar{c} = 1$

$t = 2.$ (G, c, w, f) : (G_f, c_f, w_f) :



$Val(f) = 2$

$\Longrightarrow$

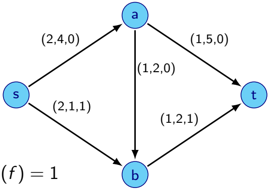


$\nexists p$

Algoritmo de acumulación

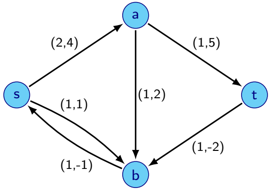
Ejemplo: Para cada iteración t del algoritmo de Acumulación con instancia $(G, c, w, s, t, f_0 = 2)$, se muestra en el lado izquierdo (G, c, w, f) con f un s-t flujo de $val(f) = 2$. La columna de la derecha contiene la red residual asociada con sus capacidades y pesos residuales.

$t = 1$. (G, c, w, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :

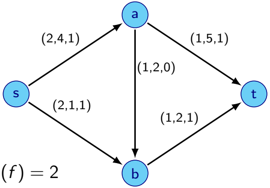


$p : s, a, t$

$\bar{c} = 1$

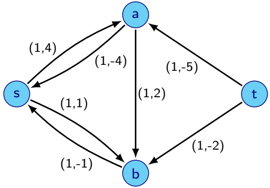
$Val(f) = 1$

$t = 2$. (G, c, w, f) :



$\Longrightarrow$

(G_f, c_f, w_f) :



$\nexists p$

$Val(f) = 2$

Luego, $f^*(s, a) = f^*(a, t) = f^*(s, b) = f^*(b, t) = 1$ y $f^*(a, b) = 0$ es un $s - t$ flujo con $Val(f^*) = 2$ y con peso mínimo $w(f^*) = 12$.

Formulación lineal del PFCM

El problema del Flujo de Costo Mínimo con instancia $(G = (V, E), c, s, t, w, f_0)$ puede ser formulado como un problema de programación lineal de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i,j \in V} x_{ij} w(i,j)$$

$$\text{s.a.} \quad \forall i \in V, \quad \sum_{j \in V} x_{ij} - \sum_{j \in V} x_{ji} = \begin{cases} f_0 & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -f_0 & \text{si } i = t \end{cases}$$

$$\forall i, j \in V, \quad 0 \leq x_{ij} \leq c(i,j),$$

donde x_{ij} representa un s-t flujo f en el arco (i,j) (i.e. $x_{ij} = f(i,j)$).

Problema de Transporte o problema de Hitchcock (PH)

Sea $G = (V, E)$ una red donde V puede ser particionado en dos conjuntos: un conjunto de vértices fuente $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ y uno de vértices sumidero $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, i.e $V = S \sqcup T$. Además, el conjunto de arcos $E \subseteq S \times T$. Por otro lado, cada nodo $s_i \in S$ tiene asociado una oferta $a_i \in \mathbb{R}_0^+$ y cada vértice t_j una demanda $b_j \in \mathbb{R}_0^+$ de un mismo producto dado. Además, cada arco $(s_i, t_j) \in E$ tiene un costo o peso $w(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_0^+$ asociado.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock (PH)

Sea $G = (V, E)$ una red donde V puede ser particionado en dos conjuntos: un conjunto de vértices fuente $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ y uno de vértices sumidero $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, i.e $V = S \sqcup T$. Además, el conjunto de arcos $E \subseteq S \times T$. Por otro lado, cada nodo $s_i \in S$ tiene asociado una oferta $a_i \in \mathbb{R}_0^+$ y cada vértice t_j una demanda $b_j \in \mathbb{R}_0^+$ de un mismo producto dado. Además, cada arco $(s_i, t_j) \in E$ tiene un costo o peso $w(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_0^+$ asociado.

Definición: El problema de Hitchcock (PH) o de Transporte consiste en encontrar una función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ tal que verifica:

$$\forall i = 1, \dots, m, \qquad \sum_{j:\,(s_i,t_j)\in E} f(s_i, t_j) = \sum_j f(s_i, t_j) = a_i,$$

$$\forall j = 1, \dots, n, \qquad \sum_{i:\,(s_i,t_j)\in E} f(s_i, t_j) = \sum_i f(s_i, t_j) = b_j,$$

donde suponemos que $f(s_i, t_j) = 0,\ \forall (s_i, t_j) \notin E$. Además, f sea debe ser del menor costo posible, i.e. $w(f) = \sum_{i,j} f(s_i, t_j) w(s_i, t_j)$ debe ser mínimo.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

De esta forma el problema de Transporte con instancia $(G = (V, E), S, T, a, b, w)$ puede ser formulado como un problema de programación lineal de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{i,j} x_{ij} w(i,j) \\
\text{s.a.} \quad & \forall i = 1, \ldots, m, \qquad \sum_{j} x_{ij} = a_i, \\
& \forall j = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i} x_{ij} = b_j, \\
& \forall i, j, \quad 0 \leq x_{ij},
\end{aligned}
$$

donde x_{ij} representa un s-t flujo f en el arco (i, j) (i.e. $x_{ij} = f(i, j)$).

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Observaciones:

1. El grafo fundamental (i.e. sin orientaciones de los arcos) de la red G es bipartito con partición $\{S, T\}$ de V.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Observaciones:

1. El grafo fundamental (i.e. sin orientaciones de los arcos) de la red G es bipartito con partición $\{S, T\}$ de V.
2. Notar que el problema PH tiene solución si y sólo si:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

Esto último suponiendo que no existen vértices aislados en la red. Luego, podemos suponer siempre esta condición.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Observaciones:

1. El grafo fundamental (i.e. sin orientaciones de los arcos) de la red G es bipartito con partición $\{S, T\}$ de V.
2. Notar que el problema PH tiene solución si y sólo si:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

   Esto último suponiendo que no existen vértices aislados en la red. Luego, podemos suponer siempre esta condición.

3. Si se tiene la condición $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, entonces podemos considerar una nueva red G' igual a la anterior con un nuevo vértice sumidero $t_{n+1} \notin T$, con una demanda igual a $b_{n+1} := \sum_i a_i - \sum_j b_j$ y con $w(s_i, t_{n+1}) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$. De esta forma el problema PH con esta nueva instancia y con la condición de oferta igual a la demanda es equivalente al anterior problema.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *El problema de Transporte con instancia* $(G = (V, E), S, T, a, b, w)$ *puede ser modelado matemáticamente como PFCM.*

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *El problema de Transporte con instancia* $(G = (V, E), S, T, a, b, w)$ *puede ser modelado matemáticamente como PFCM.*

Demo (idea): Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH y definamos (G', c', w', s, t, f_0) una instancia de PFCM como sigue:

$$G' = (V', E') : \; V' = S \cup T \cup \{s, t\}, \; \{s, t\} \cap (S \cup T) = \emptyset;$$

$$E' = E \cup \{(s, s_i) : \; i = 1, \ldots, m\} \; \cup \; \{(t_j, t) : \; j = 1, \ldots, n\}.$$

$$\forall i = 1, \ldots, m, \; c'(s, s_i) = a_i \; \wedge \; w'(s, s_i) = 0,$$

$$\forall j = 1, \ldots, n, \; c'(t_j, t) = b_j \; \wedge \; w'(t_j, t) = 0,$$

$$\forall (s_i, t_j) \in E, \; c'(s_i, t_j) = \sum_i a_i = \sum_j b_j \; \wedge \; w'(s_i, t_j) = w(s_i, t_j),$$

$$f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *El problema de Transporte con instancia* $(G = (V, E), S, T, a, b, w)$ *puede ser modelado matemáticamente como PFCM.*

Demo (idea): Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH y definamos (G', c', w', s, t, f_0) una instancia de PFCM como sigue:

$$
\begin{aligned}
&G' = (V', E') : \ V' = S \cup T \cup \{s, t\}, \ \{s, t\} \cap (S \cup T) = \emptyset; \\
&E' = E \cup \{(s, s_i) : \ i = 1, \ldots, m\} \ \cup \ \{(t_j, t) : \ j = 1, \ldots, n\}. \\
&\forall i = 1, \ldots, m, \ c'(s, s_i) = a_i \ \wedge \ w'(s, s_i) = 0, \\
&\forall j = 1, \ldots, n, \ c'(t_j, t) = b_j \ \wedge \ w'(t_j, t) = 0, \\
&\forall (s_i, t_j) \in E, \ c'(s_i, t_j) = \sum_i a_i = \sum_j b_j \ \wedge \ w'(s_i, t_j) = w(s_i, t_j), \\
&f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que si f es una solución a PH y f' es una solución de PFCM tal que $\forall (s_i, t_j) \in E, \ f(s_i, t_j) = f'(s_i, t_j)$, entonces $w(f) = w'(f')$. Luego, f es una solución óptima de PH si y sólo si f' es una solución óptima de PFCM. $\blacksquare$.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *El problema de Transporte con instancia* $(G = (V, E), S, T, a, b, w)$ *puede ser modelado matemáticamente como PFCM.*

Demo (idea): Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH y definamos (G', c', w', s, t, f_0) una instancia de PFCM como sigue:

$$G' = (V', E') : \; V' = S \cup T \cup \{s, t\}, \; \{s, t\} \cap (S \cup T) = \emptyset;$$

$$E' = E \cup \{(s, s_i) : \; i = 1, \ldots, m\} \; \cup \; \{(t_j, t) : \; j = 1, \ldots, n\}.$$

$$\forall i = 1, \ldots, m, \; c'(s, s_i) = a_i \; \wedge \; w'(s, s_i) = 0,$$

$$\forall j = 1, \ldots, n, \; c'(t_j, t) = b_j \; \wedge \; w'(t_j, t) = 0,$$

$$\forall (s_i, t_j) \in E, \; c'(s_i, t_j) = \sum_i a_i = \sum_j b_j \; \wedge \; w'(s_i, t_j) = w(s_i, t_j),$$

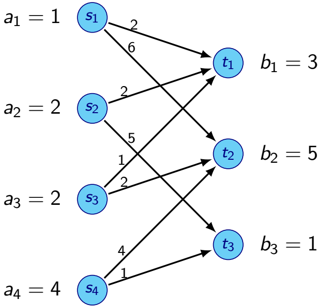
$$f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

Es fácil ver que si f es una solución a PH y f' es una solución de PFCM tal que $\forall (s_i, t_j) \in E, \; f(s_i, t_j) = f'(s_i, t_j)$, entonces $w(f) = w'(f')$. Luego, f es una solución óptima de PH si y sólo si f' es una solución óptima de PFCM. ■.

Observación: Es fácil ver que la construcción de la instancia (G', c', w', s, t, f_0) se puede hacer en tiempo polinomial.

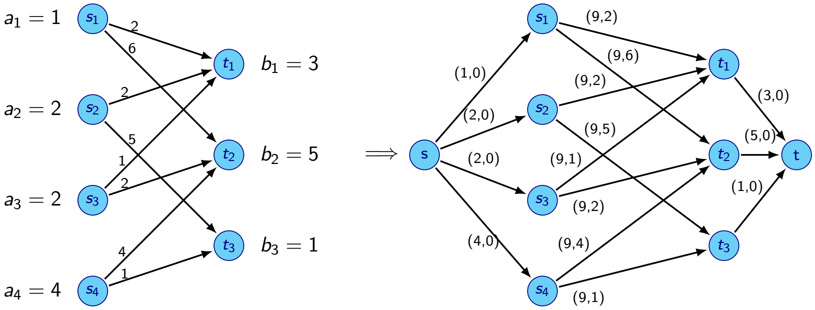
Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Ejemplo: Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH dada en la columna de la izquierda. En la columna de la derecha se exhibe la instancia (G', c', w', s, t, f_0) de PFCM asociada, donde $f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j = 9$.



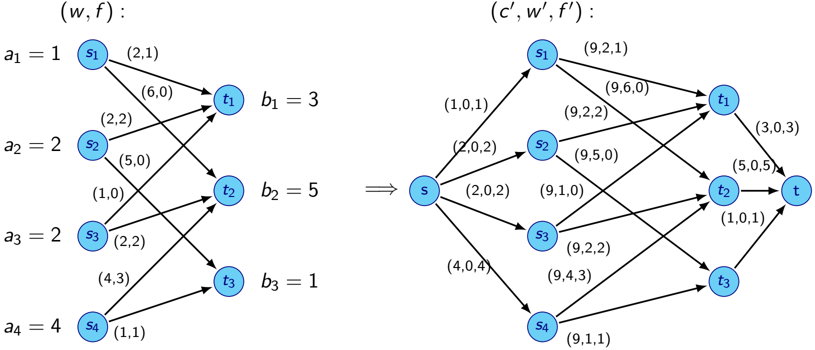
Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Ejemplo: Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH dada en la columna de la izquierda. En la columna de la derecha se exhibe la instancia (G', c', w', s, t, f_0) de PFCM asociada, donde $f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j = 9$.



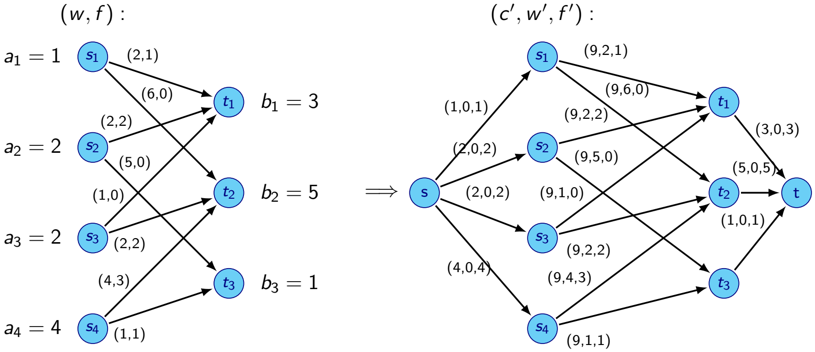
Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Ejemplo: Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH dada en la columna de la izquierda. En la columna de la derecha se exhibe la instancia (G', c', w', s, t, f_0) de PFCM asociada, donde $f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j = 9$.



Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Ejemplo: Sea (G, S, T, a, b, w) una instancia de PH dada en la columna de la izquierda. En la columna de la derecha se exhibe la instancia (G', c', w', s, t, f_0) de PFCM asociada, donde $f_0 = \sum_i a_i = \sum_j b_j = 9$.



f y f' son soluciones factibles de PH y PFCM respectivamente, con $w(f) = w'(f') = 23$. ¿Son f y f' óptimos, i.e. de costo mínimo? (ejercicio)

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *PFCM puede ser modelado matemáticamente como PH.*

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

Proposición: *PFCM puede ser modelado matemáticamente como PH.*

Demo (idea): Dada una instancia $(G = (V, E), c, w, s = 1, t = n, f_0)$ de PFCM con $V = \{1, \dots, n\}$, donde 1 y n son vértices fuente y sumidero, respectivamente. Se define la instancia $(G' = (V', E'), S, T, a, b, w')$ de PH por:

$$S = \{s_{ij} : \ (i,j) \in E\}, \ \ T = \{t_i : \ i \in V\}.$$

$$V' = S \cup T.$$

$$E' = \{(s_{ij}, t_i), (s_{ij}, t_j) : \ s_{ij}, t_i, t_j \in V'\}.$$

$$\forall (s_{ij}, t_k) \in E', \quad w'(s_{ij}, t_k) = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k = i. \end{cases}$$

$$\forall s_{ij} \in S, \quad a_{ij} = c(i,j).$$

$$\forall t_j \in T, \quad b_j = \begin{cases} c(\{1\}, V - \{1\}) - f_0 & \text{si } j = 1, \\ c(\{j\}, V - \{j\}) & \text{si } j \notin \{1, n\}, \\ f_0 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Donde $\forall j = 2, \dots, n-1, \ c(\{j\}, V - \{j\}) := \sum_i c(j,i)$. Se puede probar que f es una solución óptima de PFCM con la instancia dada si y sólo si f' es solución óptima de PH con la instancia dada, donde f' es definida por:

$$\forall (s_{ij}, t_k) \in E', \quad f'(s_{ij}, t_k) = \begin{cases} f(i,j) & \text{si } k = j, \\ c(i,j) - f(i,j) & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

La transformación de PH a PFCM puede ser hecha en tiempo polinomial. De igual forma la demostración de la proposición anterior se puede hacer usando una transformación polinomial. De esta forma, si consideramos los problemas asociados de PFCM y PH (donde se pregunta por una función factible f tal que $w(f) \leq k$), entonces tenemos el siguiente teorema.

Problema de Transporte o problema de Hitchcock

La transformación de PH a PFCM puede ser hecha en tiempo polinomial. De igual forma la demostración de la proposición anterior se puede hacer usando una transformación polinomial. De esta forma, si consideramos los problemas asociados de PFCM y PH (donde se pregunta por una función factible f tal que $w(f) \leq k$), entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema: *PH $\leq_p$ PFCM y PFCM $\leq_p$ PH.*