Métodos de Galerkin discontinuo

Evaluación 1

Prof. Manuel E. Solano P.

16 de julio de 2022

Problema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d = 2, 3$, abierto, acotado y poliédrico/poligonal, con normal unitaria exterior $\boldsymbol{n}$ y frontera Γ. Considere el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mu u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u & = & f & \text{en} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma^-, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde μ es una constante positiva, $f \in L^2(\Omega)$ es un término fuente dado, $\boldsymbol{\beta} \in [C^0(\Omega)]^d$, dado, tiene divergencia nula. Además, la frontera Γ ha sido dividida en dos partes disjuntas Γ^+ y Γ^- dadas por

$$\Gamma^+ := \{\boldsymbol{x} \in \Gamma : (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}) \geq 0\} \quad \text{y} \quad \Gamma^- := \{\boldsymbol{x} \in \Gamma : (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}) < 0\},$$

Considere la formulación variacional asociada a (1): hallar $u \in V := \{v \in L^2(\Omega) : \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v \in L^2(\Omega)\}$ tal que

$$(\mu u, v)_\Omega + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u, v)_\Omega - \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} u, v \rangle_{\Gamma^-} = (f, v)_\Omega \qquad \forall v \in V. \tag{2}$$

Discretización del dominio. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h<0}$ una familia simplicial (triángulos/tetraedros) de particiones de Ω asumida *shape-regular*. Sean $\mathcal{E}_h^i$, $\mathcal{E}_h^\partial$ y $\mathcal{E}_h$ el conjunto de lados/caras interiores, de frontera y totales, respectivamente. Dado $e \in \mathcal{E}_h^i$ compartido por dos elementos T^+ y T^-, definimos $[\![w]\!] = w^+\boldsymbol{n}^+ + w^-\boldsymbol{n}^-$ y $\{\!\{w\}\!\} = \frac{1}{2}(w^+ + w^-)$, donde $\boldsymbol{n}^\pm$ es la normal unitaria exterior a $T^\pm$.

Discretización de (2)**.** Considere el espacio $V_h = \{w_h \in L^2(\mathcal{T}_h) : w|_T \in \mathbb{P}_k(T),\ \forall\ T \in \mathcal{T}_h\}$ y la siguiente formulación variacional discreta asociada a (2): hallar $u_h \in V_h$ tal que $a_h(u_h, v_h) = F(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$, donde

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) :=& (\mu u_h, v_h)_\Omega + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_h u_h, v_h)_\Omega - \langle [\![u_h]\!], \{\!\{\boldsymbol{\beta} v_h\}\!\} \rangle_{\mathcal{E}_h^i} - \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} u_h, v_h \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma^-}, \\ F(v_h) :=& (f, v_h)_\Omega \qquad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Mostrar las siguientes identidades

1. Sea D un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera ∂D y vector normal unitario exterior $\boldsymbol{\nu}$. Se tiene que: $(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla w, w)_D = \dfrac{1}{2} \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} w, w \rangle_{\partial D}$ para $w \in \{v \in L^2(D) : \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v \in L^2(D)\}$. **Ind.:** Usar integración por partes.
2. $[\![v]\!] \cdot \{\!\{\boldsymbol{\beta} v\}\!\} = \dfrac{1}{2} \left((\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} v^2)^+ + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} v^2)^- \right)$.
3. $\dfrac{1}{2} \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} v, v \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \langle [\![v]\!], \{\!\{\boldsymbol{\beta} v\}\!\} \rangle_{\mathcal{E}_h^i} + \dfrac{1}{2} \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} v, v \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}$ para $v \in V$.

Ejercicio 2. Considere la normas

$$\begin{aligned} |\!|\!| w |\!|\!| &:= \left(\|\mu^{1/2} w\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \| |\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}|^{1/2} w \|_{\mathcal{E}_h^\partial}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para} \quad w \in V_h \\ |\!|\!| w |\!|\!|_* &:= \left(|\!|\!| w |\!|\!|^2 + \|\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_h w\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|h^{-1/2} [\![w]\!]\|_{\mathcal{E}_h^i}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para} \quad w \in V_h^* := V_h \cap H^1(\mathcal{T}_h). \end{aligned}$$

Mostrar lo siguiente.

1. $a_h(v_h, v_h) = |\!|\!| v_h |\!|\!|^2 \quad \forall v_h \in V_h$.
2. Existe $M > 0$, independiente de h, tal que
$$a_h(w_h, v_h) \leq M |\!|\!| w_h |\!|\!|_* |\!|\!| v_h |\!|\!| \quad \forall (w_h, v_h) \in V_h^* \times V_h.$$

Ejercicio 3. Probar lo siguiente.

1. Suponga que $u \in H^1(\Omega)$. Entonces existe $C_{cea} > 0$, independiente de h, tal que
$$|\!|\!| u - u_h |\!|\!| \leq C_{cea} \inf_{v_h \in V_h} |\!|\!| u - v_h |\!|\!|_*.$$
2. Si $u \in H^{k+1}(\Omega)$, entonces $C > 0$, independiente de h, tal que
$$|\!|\!| u - u_h |\!|\!| \leq C h^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Apéndice: (Proyección L^2 y sus propiedades).

$$\begin{aligned} \Pi : L^2(\mathcal{T}_h) &\longrightarrow W_h \\ u &\mapsto \Pi u : \quad (\Pi u, w)_T = (u, w)_T \quad \forall w \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \end{aligned} \tag{3a}$$

Además, para cada $T \in \mathcal{T}$ y $u \in H^s(T)^d$, con $s \in \{1, ..., k+1\}$, se satisface que

$$|u - \Pi u|_{H^m(T)} \leq C h_T^{s-m} |u|_{s,T} \quad \forall m \in \{0, ..., s\}, \tag{3b}$$

$$\|u - \Pi u\|_{L^2(e)} \leq C h_T^{s-1/2} |u|_{s,T} \quad \forall s \geq 1, \text{ donde } e \text{ es una cara/lado de } T. \tag{3c}$$