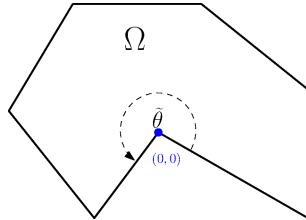


Elementos Finitos
Tarea 3
Prof. Manuel Solano
 2 de mayo de 2024

Fecha de entrega: 23 de mayo de 2024.

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal cuyo mayor ángulo interior es $\tilde{\theta}$, como muestra la figura. Asuma que el vértice asociado a $\tilde{\theta}$ es el origen $(0, 0)$. Considere la siguiente función en coordenadas polares: $u(\theta, r) = r^\gamma \alpha(\theta)$, donde $\gamma = \pi/\tilde{\theta}$ y $\alpha \in C^\infty(\Omega)$.



- Demostrar que $\|D^m u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ si $\gamma + 1 > m$. **Indicación:** Integrar utilizando coordenadas polares.
- De a) concluir que $u \in W_2^{\gamma+1-\epsilon}(\Omega) \quad \forall \epsilon \in]0, \gamma + 1[$.
- Si $\Omega =]-1, 1[^2 \setminus [0, 1]^2$, determine el espacio al cual pertenece u .
- Si $\Omega =]0, 1[^2$, determine el espacio al cual pertenece u .

- Considere un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera Lipschitz. Para $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, sea u_ψ la solución de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u_\psi + u_\psi = 0 & \text{en } \Omega \\ u_\psi = \psi & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

- Convierta (1) en un problema con condiciones de contorno homogéneas.
- Establecer una formulación variacional del problema obtenido en a) y demostrar que posee solución única.
- Mostrar que $\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ y concluir que $\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} = \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Recordar que

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{\{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \psi\}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Mostrar que el espacio $(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$ es completo. **Indicación:** Utilizar el resultado 1c).