# Propiedades de la convergencia uniforme.

- **Convergencia uniforme y continuidad.**
- **Convergencia en $\mathscr{C}(E)$.**
- **Convergencia uniforme e integración Riemann.**
- **Convergencia uniforme y derivación.**

# Convergencia uniforme y continuidad.

A lo largo de esta clase, $X$ e $Y$ son espacios métricos con distancias $d_X$ y $d_Y$, respectivamente, y $E \subset X$.

**Teor.:** Sean $f_n : X \to Y,\, n \in \mathbb{N},\;\; f : E \to Y$ y $x \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $E$ y $f_n$ son continuas en $x$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
entonces $f$ es continua en $x$.

**Dem.:** Sea $\varepsilon > 0$.

$f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $E \implies$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\, \forall t \in E,\; d_Y(f_n(t), f(t)) < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

$f_N$ continua en $x \implies$

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in E : \; d_X(t,x) < \delta,\;\; d_Y(f_N(t), f_N(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, $\forall t \in E : \; d_X(t,x) < \delta,$

$$d_Y(f(t), f(x)) \leq \underbrace{d_Y(f(t), f_N(t))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_N(t), f_N(x))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_N(x), f(x))}_{<\varepsilon/3}$$

$$\implies d_Y(f(t), f(x)) < \varepsilon.$$

Entonces, $f$ es continua en $x$. $\square$

# Convergencia en $\mathscr{C}(E)$.

**Def.:** Sea $\mathscr{C}(E)$ el espacio de funciones $f: E \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas:

$$\boxed{\mathscr{C}(E) := \{f \in \mathscr{B}(E) : \ f \text{ continua}\}.}$$

Como la suma de funciones continuas es una función continua y el producto de una función continua por un escalar también es una función continua, entonces $\mathscr{C}(E)$ es un **subespacio vectorial** de $\mathscr{B}(E) \implies (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty)$ es un E.V.N.

En $\mathscr{C}(E)$, igual que en $\mathscr{B}(E)$, la convergencia en $\|\cdot\|_\infty$ es la convergencia uniforme.

**Corol.:** $\mathscr{C}(E)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(E)$.

**Dem.:** Sea $f \in \overline{\mathscr{C}(E)} \implies \exists \{f_n\} \subset \mathscr{C}(E) : \ \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$

$\implies f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $E \implies f$ es continua en $E$

$\implies f \in \mathscr{C}(E)$. Entonces $\mathscr{C}(E)$ es cerrado. $\square$

**Lema.:** Sea $X$ un espacio métrico completo y $E \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces, $E$ es completo.

**Dem.:** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $E$

$\Longrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall m, n \geq N, \ d_X(x_m, x_n) < \varepsilon$

$\Longrightarrow \ \{x_n\}$ es de Cauchy en $X$.

$X$ es completo $\Longrightarrow \ \exists x \in X : \ x_n \xrightarrow{n} x$.

Como $\{x_n\} \subset E$ y $E$ es cerrado $\Longrightarrow \ x \in E$.

Entonces, $\{x_n\}$ converge en $E \Longrightarrow E$ es completo. $\square$

**Teor.:** $\mathscr{C}(E)$ es un espacio de Banach.

**Dem.:** Por el corolario anterior, $\mathscr{C}(E)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(E)$.

La clase pasada vimos que $\mathscr{B}(E)$ es completo

Entonces, el lema anterior implica que $\mathscr{C}(E)$ es completo.

Vale decir, $\mathscr{C}(E)$ es un espacio de Banach. $\square$

# Convergencia uniforme e integración Riemann.

**Teor.:** Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, integrables Riemann en $[a,b]$.

Si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$,

entonces $f$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\boxed{\int_a^b f_n \xrightarrow{n} \int_a^b f.}$

**Dem.:** $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$ y $f_n$ acotadas $\Longrightarrow$ $f$ es acotada.

Sean $\varepsilon_n := \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n} 0.$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon_n$$

$$\Longrightarrow \; f_n(x) - \varepsilon_n \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon_n \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = \underline{\int_a^b}(f_n - \varepsilon_n) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b}(f_n + \varepsilon_n) = \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)$$

$$\Longrightarrow \; 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \underbrace{\int_a^b (f_n + \varepsilon_n) - \int_a^b (f_n - \varepsilon_n)}_{= 2\int_a^b \varepsilon_n} = 2\varepsilon_n (b-a) \xrightarrow{n} 0.$$

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \implies \begin{cases} f \text{ es integrable Riemann en } [a,b] \text{ y} \\ \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \end{cases}$$

Recién demostramos que $\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n).$

Reemplazando en esta desigualdad las integrales inferior y superior por la integral de Riemann, se tiene que

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)$$

$$\implies \int_a^b f_n - \varepsilon_n(b-a) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_n + \varepsilon_n(b-a)$$

$$\implies -\varepsilon_n(b-a) \leq \int_a^b f - \int_a^b f_n \leq \varepsilon_n(b-a)$$

$$\implies \left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \varepsilon_n(b-a) \xrightarrow{n} 0 \implies \int_a^b f_n \xrightarrow{n} \int_a^b f. \quad \square$$

**Corol.:** Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, integrables Riemann en $[a,b]$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.}$

# Convergencia uniforme y derivación.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones derivables.

A diferencia de lo que ocurre con la continuidad y con la integración Riemann, no es verdad que si $f_n \stackrel{n}{\to} f$ uniformemente, $f$ es derivable y $f_n' \stackrel{n}{\to} f'$.

En cambio, lo que vale es lo siguiente:

**Teor.:** Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables $\forall n \in \mathbb{N}$. Si:

i) $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge y

ii) la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a,b]$,

entonces:

a) $\exists f : [a,b] \to \mathbb{R} : f_n \stackrel{n}{\to} f$ uniformemente en $[a,b]$ y

b) $f$ es derivable y $f_n'(x) \stackrel{n}{\to} f'(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

**Dem.:** Lo veremos en el caso particular en que $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas.

La demostración en el caso general puede verse en el Teor. 7.17 del libro de Rudin.

Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables $\forall n \in \mathbb{N}$.

Regla de Barrow $\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} f_n' = f_n(x) - f_n(x_0)$

$$\Longrightarrow f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n' \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) $\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f_n(x_0) \xrightarrow{n} c.$

(ii) $\Longrightarrow \exists g : [a,b] \to \mathbb{R} : f_n' \xrightarrow{n} g$ uniformemente en $[a,b]$.

Como estamos suponiendo que $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$g$ resulta continua y $\int_{x_0}^{x} f_n' \xrightarrow{n} \int_{x_0}^{x} g \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces, $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'n \xrightarrow{n} c + \int_{x_0}^{x} g \quad \forall x \in [a,b]$.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g, \quad x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| &= \left|\left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'\right) - \left(c + \int_{x_0}^{x} g\right)\right| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^{x} |f_n' - g| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \|f_n' - g\|_\infty |x - x_0| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \|f_n' - g\|_\infty (b - a) \quad \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

a) Sea $\varepsilon > 0$. $\begin{cases} \text{(i)} \implies \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_1, \ |f_n(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{(ii)} \implies \exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_2, \ \|f_n' - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{cases}$

$\implies \exists N := \max\{N_1.N_2\} \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \quad \forall x \in [a,b],$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - c|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|f_n' - g\|_\infty}_{<\varepsilon/(2(b-a))} (b-a) < \varepsilon$$

$\implies f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$.

b) Recordemos que $f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g$ y que $g$ es continua. Entonces,

**T.F.C.** $\implies f$ es derivable en $[a,b]$ y $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces, (ii) $\implies f_n' \xrightarrow{n} f'$ uniformemente en $[a,b]$. $\square$

**Corol.:** Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables $\forall n \in \mathbb{N}$. Si:

i) $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge y

ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$,

entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ y

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es derivable y $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ en $[a,b]$.