

OPTIMIZACIÓN III (525151)  
Ejercicios de tiempo de ejecución de algoritmos

P1) Sean  $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones. Pruebe que:

- a)  $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n)).$
- b)  $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n)).$
- c)  $f(n) = O(g(n)) \wedge \alpha \geq 0 \implies \alpha f(n) = O(g(n)).$   
 (Obs: El mismo resultado se tiene en el caso de  $o, \omega, \Omega, \Theta$ ).
- d)  $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\}).$

P2) Muestre que  $f(n) = (n! + 3^{n+2} + 3n^{100})(n^n + n2^n) = O(n^{2n}).$

P3) Sea  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones.

- a) Muestre que:  $O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)).$
- b) Ordene los siguientes conjuntos en forma creciente en cada caso. Justifique su respuesta.

$$O\left(\frac{3}{2}n\right), O(n^2 \log(n)), O(1), O(n!), O(\sqrt{n}), O(2^n), O(\log(n)).$$

P4) Sea  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones.

- a) Pruebe que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ , entonces  $f(n) \notin O(g(n))$  y  $f(n) \in \Omega(g(n)).$
- b) Sea  $f(n) = 3n^2 + 2n + 2$ . Use lo anterior para probar que  $n^2 \log(n) \notin O(f(n))$ ,  $f(n) \in O(n^2)$  y  $f(n) = \Omega(n \log(n))$

P5) Sea  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones.

- a) Pruebe que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$  con  $k > 0$ , entonces  $f(n) = \Theta(g(n)).$
- b) Use lo anterior para probar que  $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}, (n+a)^b = \Theta(n^b).$

P6) Sea  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ : f \text{ es función}\}$ . Se define  $R_\Theta$ , la relación en  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$  inducida por  $\Theta$ , como sigue:

$$\forall f(n), g(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+), f(n) R_\Theta g(n) \iff f(n) = \Theta(g(n)).$$

- a) Pruebe que  $R_\Theta$  es relación de equivalencia.
- b) Explique por qué las relaciones en  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$  inducidas por  $o, O, \omega$  y  $\Omega$  no son relaciones de equivalencia.