UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Pauta Tarea 1

1. **[20 puntos]** Demostrar que los espacios $H^k(\Omega)$ definidos en cátedra son espacios de Hilbert.

   Demostración:
   Para $H^k(\Omega) := W_2^k(\Omega)$ se define el siguiente producto interno:
   Sea $f, g \in H^k(\Omega)$

   $$(f,g)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x)\,dx$$

   Mostremos ahora que este producto interno esta bien definido en efecto
   (i) **Positividad.**

   $$(f,f)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} ||\partial^\alpha f||_{L^2(\Omega)} \ge 0, \quad \forall f \in H^k(\Omega)$$

   además si $(f,f)_{k,\Omega} = 0$ entonces $||f||_{L^2(\Omega)} = 0$ lo que implica que $f = 0$ por otra parte si $f = 0$ es directo $\displaystyle\sum_{|\alpha|\le k} ||\partial^\alpha f||_{L^2(\Omega)} = 0$.
   (ii) **Simetría.**

   $$(f,g)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x)\,dx = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha g(x) \partial^\alpha f(x)\,dx = (g,f)_{k,\Omega}, \quad \forall g, f \in H^k(\Omega)$$

   (iii) **Linealidad.**
   Sea $f, g, h \in H^k(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned}
   (f+\beta g, h)_{k,\Omega} &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha (f(x)+\beta g(x)) \partial^\alpha h(x)\,dx \\
   &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (\partial^\alpha f(x)+\beta \partial^\alpha g(x)) \partial^\alpha h(x)\,dx \\
   &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha h(x) + \beta \partial^\alpha g(x) \partial^\alpha h(x)\,dx \\
   &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha h(x)\,dx + \beta \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha g(x) \partial^\alpha h(x)\,dx \\
   &= (f,h)_{k,\Omega} + \beta (g,h)_{k,\Omega}.
   \end{aligned}$$

Se define la norma inducida por $(\cdot,\cdot)_{k,\Omega}$ como:

$$\begin{aligned}
||f||_{k,2,\Omega} &= ((f,f)_{k,\Omega})^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Omega}(\partial^{\alpha}f)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leq k}||\partial^{\alpha}f||_{0,2}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f\in H^k(\Omega).
\end{aligned}$$

Para mostrar que $(H^k(\Omega),(\cdot,\cdot)_{k,\Omega})$ es un espacio de Hilbert basta mostrar que $(H^k(\Omega),||\cdot||_{k,\Omega})$ es un espacio de Banach.

Sea entonces $\{u_n\}_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en $H^k(\Omega)$ Entonces

$$||u_m-u_n||_{2,k,\Omega} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por definición de la norma, para todo multíndice $|\alpha|\leq m$, se cumple que

$$||\partial^{\alpha}u_m-\partial^{\alpha}u_n||_{2,0,\Omega}\leq ||u_m-u_n||_{2,k,\Omega} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

entonces, para cada multíndice $|\alpha|\leq m$ la sucesión $\{\partial^{\alpha}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ es completo, existe un límite $v^{(\alpha)}\in L^2(\Omega)$ y $u\in L^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha}u_n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v^{(\alpha)} \text{ en } \quad L^2(\Omega) \\
u_n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ en } \quad L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Probemos a continuación que $v^{(\alpha)}=\partial^{\alpha}u_n$ en el sentido distribucional y concluyamos así que $u\in H^k(\Omega)$ y que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $H^k(\Omega)$, en efecto notemos primero que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que el producto interno es continuo y por lo tanto si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces $\langle z,x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle z,x\rangle$, $\forall z\in H^k(\Omega)$. Luego para cada $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} u_n\, \partial^\alpha \varphi \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n\, \partial^\alpha \varphi \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial^\alpha u_n\, \varphi \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \partial^\alpha u_n\, \varphi \\
&= \left\langle v^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}
$$

luego

$$
\left\langle \partial^\alpha u - v^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)
$$

luego por el lema variacional se sigue $v^{(\alpha)} = \partial^\alpha u_n$. Finalmente se tiene

$$
\begin{aligned}
||u - u_n||_{2,k,\Omega} &= \left[\sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_n||^2_{2,k,\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{|\alpha|\leq k} ||u^{(\alpha)} - \partial^\alpha u_n||^2_{2,k,\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

lo que muestra que existe $u \in H^k(\Omega)$ tal que

$$
u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en } H^k(\Omega)
$$

es decir $(H^k(\Omega), (\cdot,\cdot)_{k,\Omega})$ es un espacio de Hilbert

2. [**20 puntos**] Sea H un espacio de Hilbert, $M \leq H$ y $v \notin M$, demostrar que existe $w_0 \in M$ tal que

   a) $\|v - w_0\|_H = \operatorname{ínf}_{w\in M} \|v - w\|_H$

   b) $v - w_0 \in M^\perp$.

   Demostración (a) :
   Definimos

$$
\delta := \operatorname*{ínf}_{w\in M} ||v - w||_H > 0
$$

   luego existe $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ una sucesión tal que

$$
\lim_{n\to\infty} ||v - w_n||_H = \delta
$$

Ahora mostraremos que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Luego por la propiedad del paralelogramo,

$$\begin{aligned} ||(w_n - v) + (w_m - v)||_H^2 + ||(w_n - v) - (w_m - v)||_H^2 &= 2(||w_n - v||_H^2 + ||w_m - v||_H^2) \\ ||(w_n + w_m) - 2v||_H^2 + ||w_n - w_m||_H^2 &= 2(||w_n - v||_H^2 + ||w_m - v||_H^2) \end{aligned}$$

lo que implica

$$0 \leq ||w_n - w_m||_H^2 = 2(||w_n - v||_H^2 + ||w_m - v||_H^2) - 4\left|\left|\frac{1}{2}(w_m + w_n) - v\right|\right|_H^2$$

Ya que $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in M$ tenemos

$$\left|\left|\frac{1}{2}(w_n + w_m) - v\right|\right|_H \geq \delta.$$

Se sigue

$$0 \leq ||w_n - w_m||_H^2 \leq (||w_n - v||_H^2 + ||w_m - v||_H^2) - 4\delta^2$$

y hacemos tender a m y n hacia infinito, obtenemos

$$||w_n - w_m||_H^2 \leq 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0$$

Probando que $\{w_n\}_n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $w_0 \in M$ tal que $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0$ lo que implica que

$$||v - w_0||_H = \delta = \inf_{w\in M} ||v - w||_H$$

Demostración (b) :
Sea $z_0 = v - w_0$, luego$||z_0||_H = \delta$, y sea $w \in M$ arbitrario. Definimos la función diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ como

$$\varphi(t) = ||z_0 - tw||_H^2 = ||v - (w_0 + tw)||_H^2$$

luego, $0 = \varphi'(0) = -2(z_0, w)_H$ y como $w \in M$ es arbitrario tenemos que $z_0 \in M^\perp$.

3. **[20 puntos]** Si $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ es un espacio de Hilbert, $W = V$, $H \leq V$ y $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, continua y coerciva sobre H, demostrar que $(H, a(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert.
Demostración:
Para probar que $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno vasta verificar que $a(\cdot,\cdot)$ sea bilineal, simétrica y definido positivo. Notemos que por hipótesis $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y bilineal, por lo tanto únicamente faltaría mostrar positividad. En efecto se tiene por coercividad que existe $\gamma > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \gamma||v||_V^2 \geq 0, \quad \forall v \in V$$

ahora si dado $v \in V$ tal que $a(v,v) = 0$ se tiene que

$$0 = a(v,v) \geq \gamma ||v||_V^2 \geq 0$$

entonces $v = 0$, ahora bien si $v = 0$ se tiene que $a(0,0) = 0$ dado que $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal. Por lo tanto $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno en V . Luego definimos la norma inducida como:

$$||v||_a = \sqrt{a(v,v)}, \quad \forall v \in V.$$

Mostremos ahora que $(V, ||\cdot||_a)$ es un espacio completo. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ un sucesión de Cauchy con respecto a $||\cdot||_a$ luego por continuidad de la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ se tiene que Existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$||u_n - u_m||_a^2 = a(u_n - u_m, u_n - u_m) \leq C||u_n - u_m||_V^2$$

luego como $(V, ||\cdot||_V)$ es completo existe $u \in V$ tal que

$$||u_n - u||_a^2 \leq C||u_n - u||_V^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

lo que muestra que $(V, ||\cdot||_a)$ es completo y por ende $(V, a(\cdot,\cdot))$ un espacio de Hilbert

---

Concepción, martes 23 de marzo de 2021
DPC/CCB/ccb .