Ecuaciones Diferenciales ordinarias (521218-525221)
Aplicaciones a la Mecánica.

Problema Una masa de $0.5\,[Kg]$ está unida a un resorte que cuelga verticalmente, la constante de rigidez (del resorte) es $8\,[N/m]$ y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantanea.

(i) Formule el P.V.I. que modela la posición de la masa para todo instante de tiempo si ésta se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad de $12\,[m/s]$ hacia arriba y no actúan fuerzas externas. ¿Qué tipo de movimiento tendrá la masa? Justifique su respuesta.

(ii) Resuelva el P.V.I formulado en el item anterior.

(iii) Si ahora el sistema es sacado del fluido y el roce es despreciable, formule el P.V.I que modela la posición de la masa si ésta se suelta desde el reposo $1\,[m]$ bajo la posición de equilibrio y actúa una fuerza externa igual a $f(t) = F_0\cos(2t)$, ¿Está el sistema en resonancia? Justifique su respuesta.

Desarollo

(i) Considerando $m = 0.5[kg]$, $b = 5[kg/s]$, $k = 8[N/m]$, $x_0 = 0[m]$, $v_0 = -12[m/s]$ y $f(t) = 0[N]$, el PVI que modela el sistema masa resorte viene dado por

$$(PVI_1)\begin{cases} 0.5y''(t) + 5y'(t) + 8y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -12 \end{cases}$$

El tipo de movimiento depende del signo del discriminante de la ecuación característica de la EDO asociada:

$$\Delta = b^2 - 4mk = 5^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 8 = 9 > 0.$$

Como $\Delta > 0$ el movimiento de la masa será sobreamortiguado.

(ii) La ecuación característica asociada a la EDO es

$$0.5r^2 + 5r + 8 = 0 \Longleftrightarrow r^2 + 10r + 16 = 0 \Longleftrightarrow (r+8)(r+2) = 0.$$

Así, las raíces de la ecuación característica son $r_1 = -2$ y $r_2 = -8$, por lo que la solución general de la EDO es

$$y(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-8t}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones iniciales se tiene

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_1 - 8C_2 = -12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2[m] \\ C_2 = 2[m] \end{cases}.$$

Así la solución del P.V.I es

$$y(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-8t}.$$

(*iii*) Como ahora los efectos de roce son despreciables, el P.V.I. que modela la posición de la masa para cualquier instante de tiempo es

$$(PVI_2)\begin{cases} y''(t) + 16y(t) \; = \; 2F_0\cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Al no existir fuerzas de roce, el movimiento de la masa será descrito por un movimiento sinusoidal con velocidad angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{16} = 4[1/s].$$

Para que ocurra resonancia, la fuerza externa debe tener la misma velocidad angular pero en nuestro caso la velocidad angular de la fuerza externa es igual a 2, por lo tanto es posible garantizar que el sistema no está en resonancia.