UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

OPTIMIZACIÓN III (525551)
Evaluación Recuperativa

P1) Sea $G = (V, A)$ un digrafo, $w : A \to \mathbb{R}$ una función de peso y $s \in V$. Se dice que G es consistente con w y s si $\forall i \in V, i \neq s, \forall p_{si}$ camino de s a i en G, se tiene que:

$$p_{si} \text{ tiene largo mínimo} \Longrightarrow p_{si} \text{ tiene peso mínimo.}$$

a) Muestre que una condición necesaria pero no suficiente para que G sea consistente con w y s es que G no tenga ciclos de peso negativo alcanzables desde s.

b) Modifique el algoritmo de Bellman-Ford de manera que con entrada (G, w, s) y en tiempo $O(|V| \cdot |A|)$ determine si G es consistente con w y s. (Ind: considere el número de veces que se actualiza $d[v]$, $\forall v \in V$). Justifique su respuesta.

c) Suponga que G es consistente con w y s. Muestre que es posible encontrar una solución (si existe) al problema del Camino Más Corto (PCC) con instancia (G, w, s) en tiempo $O(|A| + |V|)$, usando alguno de los algoritmos visto en clase.

P2) Una empresa de transporte posee un barco de carga que realiza viajes llevando una cierta cantidad de un mismo producto a lo largo de Chile, saliendo desde el puerto de Arica (P_1) y llegando al puerto de Punta Arenas (P_n), pasando también necesariamente por otros $n-2$ puertos. En cada puerto P_i existe la posibilidad de cargar a lo más α_i unidades del producto a un costo de θ_i por unidad o descargar el producto sin costo alguno. Además, en cada puerto P_i se desea dejar al menos una cantidad β_i de unidades del producto después de que pase el barco por ese puerto. El costo de llevar una unidad del producto de un puerto P_i al puerto P_{i+1} es de ϕ_i. Se desea entonces determinar una política de carga y descarga del barco en cada puerto durante un viaje desde Arica a Punta Arenas, que minimice los costos de la empresa dueña del barco y que satisfaga las restricciones dadas, sabiendo que el barco tiene una capacidad máxima de transporte de r unidades de la mercadería en forma simultánea y que actualmente en cada puerto P_i hay una cantidad μ_i de unidades del producto. Modele este problema como un problema de flujo para encontrar una solución óptima, usando los resultados vistos en clases.

Solución:

P1) *a*) Supongamos que G es consistente con w y s y por contradicción suponemos que hay un ciclo C en G con $w(C) < 0$ alcanzable desde s, entonces para tod vértice v de C hay un camino p_{sv} de s a v en G y por consiguiente hay un camino p'_{sv}de largo mínimo de s a v en G. Sin embargo como C es de peso negativo, por resultado visto en clase, no existe camino de peso negativo de s a v en G, lo cual es una contradicción con G consistente. Por lo tanto, se tiene que una condici'on necesaria para que Gsea consistente con w y s es que no existan ciclos de peso negativo alcanzables desde s: Sin embargo, esto último no es condición suficiente, por ejemplo si $G = (V = \{s, u, v\}, A = \{(s, u), (s, v), (v, u)\})$ y $w(s, u) = 3$ y $w(s, u) = s(u, v) = 1$, entonces G no es consitente pues s, u es camino de largo mínimo pero no de peso mínimo.

b) Por resultado visto en clase se tiene que para todo vértice $v \neq s$ la primera vez que cambia de valor $d[v]$ en el algoritmo de Bellmand-Ford se logra mediante un camino de largo mínimo si el valor $d[v]$ se vuelve a modificar después entonces significa que el camino de largo mínimo no es de peso mínimo pues se encontró otro camni de menor peso. Así para determinar si G es consistente con w y s es necesario y suficiente chequear que para cada vértice v el valor $d[v]$ cambia solo una vez y esto es fácil de implementar en el algoritmo de Bellmand-Ford contando cuántas veces cambia $d[v]$ para todo $vinV$.

c) Como por hipótesis G es consistente con w y s, entonces para encontrar un camino de peso mínimo de s a v (cuando existe) es suficiente encontrar un camino de s a v de largo mínimo. Notar que si hay un camino de peso mínimo de s a v, entonces hay un camino de s a v y por lo tanto hay un camino de largo mínimo de s a v. Estos caminos se pueden encontrar usando el algoritmo BFS que corre en tiempo $O(|A|+|V|)$.

P2) La idea es modelar el problema como un problema de Circulación de Costo Mínimo con capacidades inferiores y superiores en los arcos. Para ello tendremos un vértice P_i por cada puerto y un vértice B_i que corresponde al barco que sale desde el puerto B_i. Luego, de la mercancía que está en un puerto P_i (que corresponde a lo que llevaba el barco B_{i-1} más lo que habá inicialmente en el puerto que es μ_i se tenga que repartir en una parte que se quedará en el puerto saliendo por los arcos (P_i, t) y otro flujo que va ser cargado al barco B_i . Por otro lado, de la mercadería que está en el barco B_i va directo al puerto P_{i+1}. Para modelar esto, definamos el grafo dirigido $G=(V,A)$ por:

$$\begin{aligned} V =& \{P_1,\dots,P_n\}\cup\{B_i,\dots,B_n\}\cup\{s,t\}. \\ A =& \{(s,P_i): i=1,\dots,n\}\cup\{(P_i,B_i),(P_i,t): i=1,\dots,n\}\cup\{(B_i,P_{i+1}): i=1,\dots,n-1\}\cup\{(t,s)\}. \end{aligned}$$

Definamos además la funciones de capacidad inferior, superior y de costo $l,c,w: A\to\mathbb{R}_0^+$ respectivamente por $\forall(u,v)\in A$:

$$l(u,v)=\begin{cases} \mu_i & \text{si } (u,v)=(s,P_i),\\ \beta_i & \text{si } (u,v)=(P_i,t),\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

$$c(u,v)=\begin{cases} \mu_i & \text{si } (u,v)=(s,P_i),\\ M & \text{si } (u,v)=(P_i,t),\\ \alpha_i & \text{si } (u,v)=(P_i,B_i),\\ r & \text{si } (u,v)=(B_i,P_{i+1}),\\ \sum_i \mu_i & \text{si } (u,v)=(t,s).\end{cases}$$

$$w(u,v)=\begin{cases} \theta_i & \text{si } (u,v)=(P_i,B_i),\\ \phi_i & \text{si } (u,v)=(B_i,P_{i+1}),\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Donde M es un número grande positivo, por ejemplo, $M=\sum_i \mu_i$.

Por último, el costo de una circulación factible f está dado por:

$$w(f)=\sum w(u,v)f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i f(P_i,B_i)+\sum_{i=1}^{n-1}\phi_i f(B_i,P_{i+1}),$$

lo que corresponde al costo total de la empresa en un viaje del barco con cargas y descargas incluidas.

De esta forma, el problema planteado de asignación puede ser modelado como un problema de Circulación de Costo Mínimo (PCCM) con instancia $(G=(V,A),l,c,w)$. Por construcción es fácil ver que las las soluciones óptimas al problema planteado están en correspondencia uno a uno con las circulaciones de costo mínimo en la red anterior (ejercicio).