

525476 MÉTODOS ESPECTRALES (2022-2): TAREA ACERCA DE LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV DEL TERCER TIPO

LEONARDO FIGUEROA

RESUMEN. Esta tarea consiste en 9 preguntas, que suman 48 puntos en total.

1. PRIMERA TANDA DE DEFINICIONES

Los **polinomios de Chebyshev del tercer tipo** están definidos en $[-1, 1]$ por

$$V_n(x) := \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos(x)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2} \arccos(x)\right)}. \quad (1)$$

En $x = -1$ esta fórmula debe entenderse como el correspondiente límite. En la Figura 1 graficamos algunos de los V_n .

Definimos al **peso de Chebyshev del tercer tipo** $V: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(x) := (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Note que este peso no es simétrico respecto a la reflexión $x \mapsto -x$ y no pertenece a la familia Gegenbauer. Definimos también al espacio de Lebesgue ponderado asociado $L_V^2 :=$

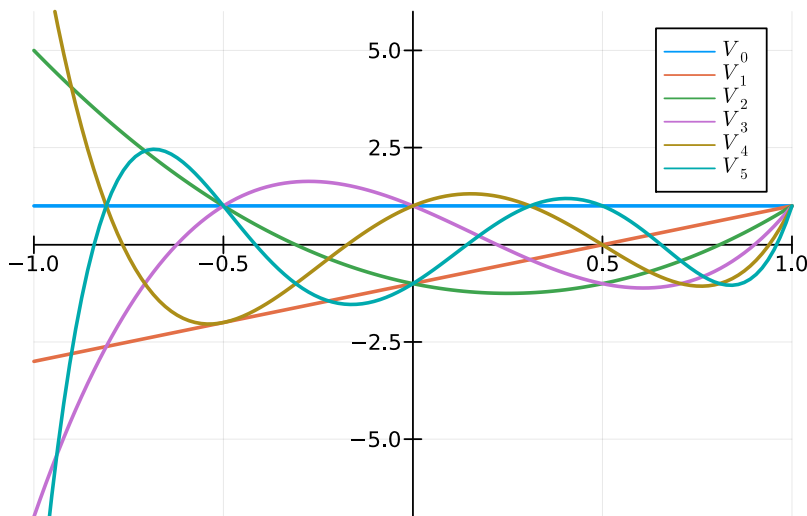


FIGURA 1. Gráfico de algunos polinomios de Chebyshev del tercer tipo.

$V^{-1/2} L^2(-1, 1)$ y al **producto interior de Chebysev del tercer tipo** $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : L_V^2 \times L_V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle u, v \rangle_V := \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} V(x) dx. \quad (3)$$

Definimos también al peso promovido $V^+ : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V^+(x) := (1 - x^2) V(x) = (1 - x)^{\frac{1}{2}} (1 + x)^{\frac{3}{2}}, \quad (4)$$

al correspondiente espacio de Lebesgue ponderado $L_{V^+}^2 := (V^+)^{-1/2} L^2(-1, 1)$ y al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^+} : L_{V^+}^2 \times L_{V^+}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle u, v \rangle_{V^+} := \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} V^+(x) dx. \quad (5)$$

Definimos al operador $d^{(V, \star)} : C^1([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$ por

$$d^{(V, \star)} u(x) := -V(x)^{-1} \frac{d}{dx} [V^+(x) u(x)] = -(1 - x^2) u'(x) + (2x - 1) u(x). \quad (6)$$

Definimos también el operador $\mathcal{L}^{(V)} : C^2([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$ por

$$\mathcal{L}^{(V)} u(x) := d^{(V, \star)} u'(x) = -V(x)^{-1} \frac{d}{dx} [V^+(x) u'(x)] = -(1 - x^2) u''(x) + (2x - 1) u'(x). \quad (7)$$

Note que si se aplica el operador $\mathcal{L}^{(V)}$ a un polinomio de grado n , se obtiene un polinomio del mismo grado n .

2. PRIMERA TANDA DE PREGUNTAS

- P1. (2 puntos) Obtenga expresiones explícitas para V_0 y V_1 .
P2. (7 puntos) Pruebe que los V_n satisfacen una recurrencia de tres términos de la forma

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x V_n(x) = A_n V_{n+1} + B_n V_n + C_n V_{n-1}$$

proveyendo fórmulas explícitas para los coeficientes A_n , B_n y C_n . INDICACIÓN: Con la ayuda de algunos casos particulares, conjeture primero cuánto valen las constantes A_n , B_n y C_n . Tendrá entonces automáticamente una conjetura para la recurrencia de tres términos sin valores indeterminados, la que es más fácil de probar mediante identidades trigonométricas.

- P3. (2 puntos) Concluya desde las partes **P1** y **P2** que cada V_n es un polinomio de grado exactamente n .
P4. (2 puntos) Calcule desde las partes **P1** y **P2**, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, el valor del coeficiente principal $\ell_n^{(V)} \in \mathbb{R}$ en la expansión de V_n respecto a la base de monomios; esto es, aquel número que hace que $V_n(x) - \ell_n^{(V)} x^n$ sea un polinomio de grado $n - 1$ respecto a x .
P5. (5 puntos) Pruebe que los V_n son polinomios ortogonales respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ de definido en (3); esto es, satisfacen

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}_0) \quad \langle V_m, V_n \rangle_V = h_n^{(V)} \delta_{m,n},$$

donde los $h_n^{(V)} > 0$, cuya fórmula usted **también debe proveer**, son las correspondientes normas al cuadrado de cada V_n .

P6. (3 puntos) Con $d^{(V,*)}$ como está definido en (6), pruebe que, para todo $u, v \in C^1([1, 1])$,

$$\langle u', v \rangle_{V+} = \langle u, d^{(V,*)} v \rangle_V,$$

P7. (6 puntos) Con $\mathcal{L}^{(V)}$ como está definido en (7), pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{L}^{(V)} V_n = \lambda_n^{(V)} V_n,$$

donde $\lambda_n^{(V)}$ es una constante que usted **también debe proveer**. INDICACIÓN: Si usted es razonable, explote las partes P4, P5 y P6. Alternativamente, cometa la temeridad de aplicar directamente el operador $\mathcal{L}^{(V)}$ a la fórmula (1) que define a V_n y desperdicie su juventud simplificando el embrollo trigonométrico resultante.

3. SEGUNDA TANDA DE DEFINICIONES

Dado $N \in \mathbb{N}_0$, definimos a los nodos $(x_j)_{j=0}^N$ y a los pesos $(w_j)_{j=0}^N$ de la **cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo** de $N + 1$ nodos como las raíces de V_{N+1} y la solución del sistema lineal de ecuaciones

$$(\forall k \in \{0, \dots, N\}) \quad \sum_{j=0}^N V_k(x_j) w_j = \int_{-1}^1 V_k(x) V(x) dx, \quad (8)$$

respectivamente (podríamos usar la base de monomios x^k en lugar de los V_k y los pesos no cambian, pero los V_k nos convienen más). Note que esta cuadratura es para aproximar la integral **ponderada** por la función peso V y que, por definición, su versión de $N + 1$ nodos es exacta para polinomios de grado menor o igual a N .

4. SEGUNDA TANDA DE PREGUNTAS

P8. (3 puntos) Pruebe que los nodos de la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de $N + 1$ nodos son (ordenados de derecha a izquierda):

$$(\forall j \in \{0, \dots, N\}) \quad x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2N+3} \pi\right).$$

P9. (18 puntos) Pruebe que los pesos de la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de $N + 1$ nodos, respetando el orden que asumimos para los correspondientes nodos en la parte P8, son

$$(\forall j \in \{0, \dots, N\}) \quad w_j = \frac{4\pi}{2N+3} \cos\left(\frac{2j+1}{2N+3} \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (9)$$

y también que la cuadratura resulta coincidir exactamente con la integral ponderada por V para polinomios de grado menor o igual a $2N+1$. INDICACIÓN: Siga las subpartes P9.1–P9.5 que aparecen a continuación; **alternativamente**, quizás a usted se le ocurra un procedimiento más corto (a mí no).

- P9.1. (4 puntos) Dado $N \in \mathbb{N}$, N **impar**, considere el polinomio $\rho := \frac{1}{2}T_0 - \frac{1}{2}T_N$. Como ocurre con todo miembro de \mathbb{P}_N , los coeficientes de Fourier–Chebyshev exactos $\hat{\rho}_k$ de ρ coinciden con los coeficientes de Fourier–Chebyshev discretos $\tilde{\rho}_k$ de ρ respecto a la cuadratura de Gauss–Lobatto–Chebyshev de $N + 1$ nodos, $0 \leq k \leq N$ (Lema 41 del Capítulo 2). Explotando este hecho y de que se dispone de la segunda fórmula en la diapositiva 102 del Capítulo 2 (que después llamamos DCT) para expresar a los $\tilde{\rho}_k$, pruebe que

$$(\forall k \in \{0, \dots, N\}) \quad \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} \left(\frac{1 - (-1)^j}{2} \right) \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq N-1, \\ -1 & \text{si } k = N, \end{cases}$$

donde $\bar{c}_j = 1$ si $1 \leq j \leq N-1$ y 2 si $j = 0$ o $j = N$.

- P9.2. (2 puntos) A partir de la subparte P9.1, pruebe que, para $N \in \mathbb{N}$, N impar,

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \left(\frac{1 - (-1)^j}{2} \right) \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) = \begin{cases} (N+1)/N & \text{si } k = 0, \\ (-1)^k/N & \text{si } 1 \leq k \leq N-1, \\ -(N+1)/N & \text{si } k = N. \end{cases}$$

- P9.3. (5 puntos) Volviendo a la cuadratura de Gauss–Chebyshev del tercer tipo de $N + 1$ nodos, pruebe que la validez de la fórmula (9) para sus pesos **junto** a la afirmación de que esta cuadratura es exacta para polinomios de grado menor o igual a $2N + 1$ equivalen a la afirmación:

$$(\forall k \in \{0, \dots, 2N+1\})$$

$$\frac{4\pi}{2N+3} \sum_{j=0}^N \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) = \pi \delta_{k,0}. \quad (10)$$

- P9.4. (2 puntos) Con la ayuda de una identidad trigonométrica pruebe que la igualdad deseada (10) es equivalente a la afirmación:

$$(\forall k \in \{0, \dots, 2N+1\})$$

$$\frac{2}{2N+3} \sum_{j=0}^N \left[\cos\left((k+1) \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) + \cos\left(k \frac{2j+1}{2N+3} \pi\right) \right] = \delta_{k,0}. \quad (11)$$

- P9.5. (5 puntos) Cualquiera sea la función a valores escalares f , es obvio que:

$$\sum_{j=0}^N f(2j+1) = \sum_{j=0}^{2N+3} \left(\frac{1 - (-1)^j}{2} \right) f(j) - f(2N+3).$$

Aplice esta obviedad al lado izquierdo de la igualdad (11) que ahora deseamos y explote la variante de la subparte P9.2 en la que se substituyó $N \leftarrow 2N+3$ para obtener el lado derecho de (11) y, por lo tanto, terminar con toda esta gran parte P9 y con esta tarea por fin.