UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación Especial (521218-525221)

Problema 1.
Considere el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'(t) &= 2\,y(t) - e^{4t}\,y^2(t)\,, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

(i) **[05 Pts.]** El PVI anterior tiene única solución. Justifique la afirmación anterior.

(ii) **[15 Pts.]** Haciendo el cambio de variable $u(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, determina la solución del PVI dado.

Solución:

(i) Aquí se tiene la EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ donde $f(t,y) = 2y - e^{4t}y^2$. En este caso resulta que las funciones $\mathbf{f}$ y $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{2 - 2e^{4t}y}$ son funciones continuas sin ninguna restricción. El Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones nos afirma que el PVI dado tiene única solución.

(ii) Puesto que la solución es única, **en un entorno del punto** $(0,2)$ **la solución no puede ser cero (ya que la función** $u(t) \equiv 0$ **es solución de la EDO asociada al PVI)**. Entonces podemos dividir la EDO dada por $y^2(t)$, obteniendo

$$y'(t)y^{-2}(t) = 2y^{-1}(t) - e^{4t}. \qquad [\mathbf{04Pts}.]$$

Ahora el cambio de variable

$$u(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{conduce a} \quad u'(t) = -y^{-2}(t)\,y'(t)$$

y a la EDO lineal

$$u'(t) + 2u(t) = e^{4t}.$$

Para resolver esta última EDO, determinamos su factor de integración que resulta ser $\mu(t) = e^{2t}$.

Ahora multiplicando la EDO por e^{2t}, se obtiene

$$u'(t)e^{2t} + 2e^{2t}u(t) = e^{6t},$$

es decir, $\dfrac{d}{dt}\Big[u(t)\, e^{2t}\Big] = e^{6t}$. Se sigue que

$$u(t)\ e^{2t} = \int e^{6t} dt\ +\ C$$

$$= (1/6)e^{6t} dt\ +\ C.$$

donde C por ahora es una constante real arbitraria.

Así, se obtiene

$$u(t) = (1/6)e^{4t} + Ce^{-2t}.$$

Como $y(0) = 2$ sigue que $u(0) = (1/2)$ y entonces $(1/6) + C = (1/2)$, de donde $C = (1/3)$.

Finalmente,

$$u(t) = (1/6)e^{4t} + (1/3)e^{-2t}. \qquad \textbf{[08Pts.]}$$

de donde

$$y(t) = \Big((1/6)e^{4t} + (1/3)e^{-2t}\Big)^{-1},$$

lo cual dice que

$$y(t) = \frac{6e^{2t}}{e^{6t} + 2}. \qquad \textbf{[03Pts.]}$$

Pregunta 2. [20 puntos] Considere el sistema de EDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + e^{3t} \\ y'(t) = 3x(t) - 2y(t) + 1 \end{cases} \tag{1}$$

(i) **(3 puntos)** Escriba el sistema (1) en forma matricial.

(ii) **(10 puntos)** Sabemos que la matriz fundamental del sistema homogéneo asociado a (1) viene dado por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{\lambda t} \\ 3e^{-t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Halle el valor de λ, y calcule la solución general del sistema homogéneo asociado a (1).

(iii) **(7 puntos)** Resuelva el sistema no-homogéneo usando el método de variación de parámetros.

Solución.

(a) Podemos escribir el sistema (1) en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(t)}.$$

Luego, el sistema homogéneo asociado a (1) queda como

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

(b) Nos dicen que la matriz fundamental del sistema (2) está dada por $\Phi(t)$, es decir, la matriz A tiene valores propios -1 y λ, con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Para hallar λ calculamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_{2\times 2}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)(2-\lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Ya sabemos que -1 es raíz de p, y es fácil ver que la segunda raíz es 1, es decir,

$$\lambda = 1.$$

Lo anterior nos da la solución general de (2)

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

(c) Finalmente, para calcular la solución del sistema original (1) proponemos la solución particular:

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix},$$

con el vector $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ satisfaciendo el siguiente sistema

$$\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = F(t).$$

Calculando la matriz inversa de $\Phi(t)$, tenemos

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Así que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} &= \Phi^{-1}(t)F(t) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} - e^{4t} \\ 3e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Integrando ambos lados nos queda

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int(e^t - e^{4t})dt \\ \int(3e^{2t} - e^{-t})dt \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \\ \frac{3}{2}e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Volviendo a la forma de la solución particular propuesta y sustituyendo las funciones c_1, c_2:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \\ \frac{3}{2}e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 5e^{3t}/8 \\ 2 + 3e^{3t}/8 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Concluimos que la solución general del sistema no homogéneo (1) está dada por:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 5e^{3t}/8 \\ 2 + 3e^{3t}/8 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Problema 3. (Este Problema consta de dos partes independientes entre si).

(a) [**10 puntos**] Encuentre la transformada de Laplace de la función $Y(x)$, donde

$$Y(x) = g(x) + \int_0^x cos(x-t)\, Y(t)\, dt \qquad \text{para todo } x \geq 0$$

con

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0, 3[\,, \\ x^2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Nota: En la tabla usamos la notación $U_a(t) = H_a(t) = H(t-a)$.

Solución:
Puesto que

$$Y(x) = g(x) + cos(x) * Y(x),$$

aplicando la transformada de Laplace se llega a que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y(x))(s) &= \mathcal{L}(g(x))(s) + \mathcal{L}(cos(x) * Y(x))(s) \\ &= \mathcal{L}(g(x))(s) + \mathcal{L}(cos(x))(s)\,\mathcal{L}(Y(x))(s).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left(Y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\mathcal{L}\left(g\left(x\right)\right)\left(s\right)+\frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}\left(Y\left(x\right)\right)\left(s\right).$$

De donde deducimos que

$$\mathcal{L}\left(Y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{s^2+1}{s^2-s+1}\mathcal{L}\left(g\left(x\right)\right)\left(s\right).$$

Ya que $g\left(x\right)=x^3\left(U_0\left(x\right)-U_3\left(x\right)\right)+x^2\,U_3\left(x\right)$,

$$g\left(x\right)=x^3+U_3\left(x\right)\left(x^2-x^3\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(g\left(x\right)\right)\left(s\right)&=\mathcal{L}\left(x^3\right)\left(s\right)+\mathcal{L}\left(U_3\left(x\right)\left(x^2-x^3\right)\right)\left(s\right)\\&=\frac{3!}{s^4}+\mathcal{L}\left(U_3\left(x\right)\left(x^2-x^3\right)\right)\left(s\right).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(U_3\left(x\right)\left(x^2-x^3\right)\right)\left(s\right)&=\mathcal{L}\left(U_3\left(x\right)\left(\left(x-3+3\right)^2-\left(x-3+3\right)^3\right)\right)\left(s\right)\\&=e^{-3s}\mathcal{L}\left(\left(\left(x+3\right)^2-\left(x+3\right)^3\right)\right)\left(s\right).\end{aligned}$$

Ya que

$$\left(x+3\right)^2-\left(x+3\right)^3=-x^3-8x^2-21x-18,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\left(\left(x+3\right)^2-\left(x+3\right)^3\right)\right)\left(s\right)&=\mathcal{L}\left(-x^3-8x^2-21x-18\right)\left(s\right)\\&=-\mathcal{L}\left(x^3\right)\left(s\right)-8\mathcal{L}\left(x^2\right)\left(s\right)-21\mathcal{L}\left(x\right)\left(s\right)-18\mathcal{L}\left(1\right)\left(s\right)\\&=-\frac{3!}{s^4}-8\frac{2!}{s^3}-21\frac{1!}{s^2}-18\frac{1}{s}\\&=-\frac{6}{s^4}-\frac{16}{s^3}-\frac{21}{s^2}-\frac{18}{s}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\left(U_3\left(x\right)\left(x^2-x^3\right)\right)\left(s\right)=-e^{-3s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{16}{s^3}+\frac{21}{s^2}+\frac{18}{s}\right).$$

Así que

$$\mathcal{L}\left(g\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{6}{s^4}-e^{-3s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{16}{s^3}+\frac{21}{s^2}+\frac{18}{s}\right).$$

Lo que implica que

$$\mathcal{L}\left(Y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{s^2+1}{s^2-s+1}\left(\frac{6}{s^4}-e^{-3s}\left(\frac{6}{s^4}+\frac{16}{s^3}+\frac{21}{s^2}+\frac{18}{s}\right)\right).$$

(b) [**10 puntos**] Encuentre la transformada de Laplace inversa de la función

$$g\left(s\right)=\frac{1}{s^2-4\,s+3}.$$

Solución:

Notemos que

$$\frac{1}{s^2-4\,s+3}=\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-3\right)},$$

Descomponiendo en fracciones simples obtenemos que

$$\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-3\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(g\left(s\right)\right)\left(t\right)=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)\left(t\right)-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(t\right).$$

Usando que $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\right)\left(s\right)=\frac{1}{s-\alpha}$ obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(g\left(s\right)\right)\left(t\right)=\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t}.$$

Julio, 28 de 2025.
KMR/JMS/CMG//kmr/jms/cmg