UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 7 - CÁLCULO IV (MAT 225212)

Tema: ***Formulas Integrales de Cauchy y Aplicaciones.***

1. Si $\gamma \in \Big([0, 2\pi], \mathbb{R}\Big)$ es definida para dos números reales positivos a, b por $\gamma(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Evalué de dos maneras la integral de contorno $\oint \frac{dz}{z}$ para inferir el resultado de

$$\int_0^{k\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Indicación. El integrando trigonométrico es un función π periódica.

(P) Aplicando el teorema de la Formula Integral de Cauchy para $f(z) = e^z$ e integrando sobre una trayectoria circular positivamente orientada. Establecer

$$\forall\, r > 0 : \qquad \int_0^{2\pi} e^{r\cos(t)} \cos(r\sin(t) + t)dt = 0$$

Establecer

3. Para el contorno

$$\gamma : z(\theta) = e^{i\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi.$$

Pruebe que

(a) $\forall a \in \mathbb{R} : \quad \oint_\gamma \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$ **(b)** $\forall a \in \mathbb{R} : \quad \int_0^{\pi} e^{a\cos(\theta)} \cos(a\sin(\theta) d\theta = \pi$

Indicación: El integrando trigonométrico es una función con simetría par y 2π periódico.

4. Demuestre que la Fórmula integral de Cauchy implica el teorema de Cauchy-Goursat, directamente.

(P) Si f es una función holomorfa en un dominio simplemente conexo S y $z_0 \in S$ es fijo. para γ un camino simple que conecta a z_0 con $z \in S$ arbitrario. Entonces, la función

$$F(z) = \int_\gamma f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

es una primitiva de f.
Indicación. Como S es simplemente conexo, $z + \triangle z \in S$ si el incremento $|\triangle z|$ suficientemente pequeño. Enseguida representar como una integral la diferencia $\frac{\triangle F}{\triangle z} - f(z)$ mayorar y concluir que dicha diferencia es despreciable cuando el incremento lo es.

6. Sea f una función holomorfa dentro y sobre un contorno positivamente orientado cerrado y continuo por tramos. Si el punto z_0 no esta en γ establecer

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz.$$

7. Sea γ un contorno simple, cerrado, positivamente orientado y regular por tramos. Si

$$g(z) = \oint_\gamma \frac{\xi^2 + 7\xi}{(\xi - z)^3} d\xi$$

establecer que si γ encierra a z entonces $g(z) = i(6\pi z)$ y cero si z está afuera del contorno γ.

8. Sea γ una curva simple cerrad positivamente orientad y continua por tramos que encierra $0 \in \mathbb{C}$. Si f es de la forma

$$f(z) = \frac{A_m}{z^m} + \frac{A_{m-1}}{z^{m-1}} + \cdots + \frac{A_2}{z^2} + \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{z}} + g(z)$$

donde g es una función holomorfa dentro del dominio encerrado por γ y sobre ella misma. Establecer

$$\oint_\gamma f(z)dz = (2\pi i)\mathbf{A_1}$$

Nota: Se dice que m es el orden del polo de f en $z = 0$ y A_1 es el residuo de f en ese polo: $\mathrm{Res}_{\mathbf{m}}(\mathbf{f}, \mathbf{0}) = \mathbf{A_1}$.

(P) Establecer las siguiente fórmulas de Wallis:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2k}(t)dt = 2\pi \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}(t)dt = 0$

Indicación: $|z = 1$ si y solamente $z = e^{it}$, para algún $t \in [0, 2\pi]$. Para esos $z = z(t)$ se tiene $\cos(t) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Utilizar el Teorema del Binomio de Newton y el ejercicio anterior. Ver el concepto de *doble factorial* ($10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$) y sus propiedades.

10 Establecer las siguiente fórmulas de Wallis:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2k}(t)dt = 2\pi \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{2k+1}(t)dt = 0$

11 Evaluar las siguientes integrales si los contornos se recorren 2 veces en la dirección anti horaria.

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \mathrm{Ln}(z + 2)dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{Ln}(iz + 2)}{3z^2 + 1} dz$

(P) Si γ es la frontera de la región entre el circulo $|z| = 4$ y el cuadrado con lados en las rectas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Dichas fronteras, $\gamma_1(|z| = 4)$ es positivamente orientada y los lados del cuadrado (γ_2) son recorridos en el sentido horario. Estudiar el teorema de Cauchy-Goursat si el integrando de la integral de contorno sobre $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ son:

(a) $f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2}$ (b) $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$.

13 Sea γ la frontera del anillo formado por los círculos $|z| = 1$ y $|z| = 2$. la frontera es orientada tal que los afijos en la región anular están a la izquierda cuando se recorre $\gamma_1(|z| = 2)$ y $\gamma_2(|z| = 1)$, respectivamente. Establecer que $\oint_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)dz$ si

(a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+9}$ (b) $f(z) = \cot(z)$.

14 Problemas seleccionados del capítulo 4 del texto

Y.K. Kwok. **Applied Complex for Scientists and Engineers**
Cambridge University Press. Second Edition (2010).

14.1 (P4.6)	**14.4** (P4.11(f))	**14.7** (P4.13)	**14.10** (P4.19)
14.2 (P4.7)	**14.5** (P4.11(j))	**14.8** (P4.16)	**14.11** (P4.22(a))
14.3 (P4.11(d))	**14.6** (P4.12)	**14.9** (P4.18)	**14.12** (P4.22(b))

15 Fundamentar que

$$\oint_{|z=1} f(z)dz = 0$$

en los siguientes casos

(a) $f(z) = \frac{z^3}{z^2+5z+6}$ (b) $f(z) = e^{\tan(z)}$ (c) $\text{Ln}(z+3i)$

15 Dados los siguientes contornos

$$C_1 : |z| = 4 \quad \wedge \quad C_2 : |x| + |y| = 2$$

Fundamentar que

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

para los siguientes funciones

(a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ (b) $f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)}$ (c) $f(z) = \frac{\text{Ln}(z-5i)}{z^2+6z+3}$

16 Dada una función entera y dos números complejos distintos a, b (arbitrarios). Probar que

$$\forall R > \max\{|a|, |b|\} : \qquad \text{I}(R) := \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = (2\pi i)\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$

Inferir, que toda función entera y acotada necesariamente debe ser constante.
`Indicación`. Para realizar la inferencia establecer primero que $\lim_{R\to\infty} \text{I}(R) = 0$.