UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EVALUACION n^{o}1 - Cálculo II
(527148)

1. (15 Ptos) Decida, con fundamentos adecuados, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o bien falsas.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^4+1}dx \geq 1.$

   Solución: Verdadero
   $\forall x \in [0,1]$, $1 \leq \sqrt{x^4+1} \implies 1 = \int_0^1 1dx \leq \int_0^1 \sqrt{x^4+1}dx$

   (5 puntos)

   (b) Si f es una función real continua y par en $[-a,\ a]$, entonces

   $$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

   Solución: Verdadero
   Haciendo el cambio de variable $u = -x$

   $$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= -\int_a^0 f(-u)\,du \\ &= -\int_a^0 f(u)\,du \quad , \quad f \quad \text{par} \\ &= \int_0^a f(u)\,du \end{aligned}$$

   (5 puntos)

   (c) La función F esta definida mediante $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x^2} e^{-t^2}dt$ es estrictamente creciente en $]0,\infty[$.

   Solución: Verdadero
   $\forall x > 0$, $F'(x) = e^{-x^2} + 4xe^{-4x^2} > 0$. Esto es, F es estrictamente creciente en $]0,\infty[$.

   (5 puntos)

2. (10 Ptos) Calcule el valor de de la integral $\int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ dx$

Solución: Integrando por partes con:

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \to du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv &= dx \qquad \to \quad v = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ dx &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^2 - \sqrt{1+x^2}\Big|_0^2 \\ &= 2\ln\left(\sqrt{5}+2\right) - \sqrt{5}+1 \end{aligned}$$

(10 ptos)

3. (20 Ptos) Considere la integral impropia $I = \int_1^\infty \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

(a) Aplique un criterio de convergencia para demostrar que esta integral es convergente.

Solución: Como $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in [1, \infty[$ y $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}dx$ es convergente (integral-p), entonces por comparación simple $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ también es convergente.

(05 ptos)

(b) Realice el proceso de integración para calcular I.

Solución: Con la sustitución $u = \sqrt{x^2+1}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{1}{u^2-1}du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right) + C
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)\Bigg|_1^b \qquad \text{(08 ptos)} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+1}-1}{\sqrt{b^2+1}+1}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)
\end{aligned}$$

(08 ptos)

y como

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+1}-1}{\sqrt{b^2+1}+1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sqrt{b^2+1}-1}{\sqrt{b^2+1}+1}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

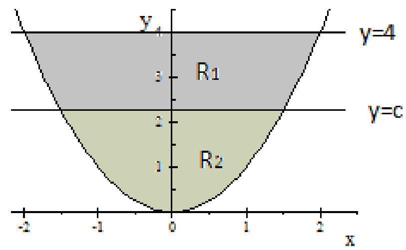
entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \approx 0.881\,37 \qquad \text{(07 ptos)}$$

4. (15 Ptos). Sea R la región del plano limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

(a) Si la recta $y = c$ divide a R en dos regiones de igual área, calcule el valor de c.
Solución:
Se tiene que

$$\text{Area } (\text{R}_1) = \text{Area } (\text{R}_2)$$



Integrando con respecto a y:

$$\begin{aligned} \text{Area } (\text{R}_1) &= 2\int_c^4 \sqrt{y}dy = \frac{32}{3} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{c}\right)^3 \\ \text{Area } (\text{R}_2) &= 2\int_0^c \sqrt{y}dy = \frac{4}{3}\left(\sqrt{c}\right)^3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Area } (\text{R}_1) = \text{Area } (\text{R}_2) \implies \frac{8}{3}\left(\sqrt{c}\right)^3 = \frac{32}{3}$$

Asi,

$$c = \sqrt[3]{16} \qquad \text{(08 ptos)}$$

b. Escriba la integral, o integrales, que permita calcular el volumen del sólido generado por rotación de R en torno a la recta $x = -2$.

Solución: Usando anillos concéntricos

$$V(S) = 2\pi \int_{-2}^{2} (x+2)\left(4 - x^2\right) dx$$

o bien, usando método del disco (integrando con respecto a y)

$$V(s) = \pi \int_0^4 \left((\sqrt{y}+2)^2 - (2-\sqrt{y})^2 \right) dy \qquad \text{(07 ptos)}$$

Tiempo: 100 min
17/04/2015