

Cálculo III (521227)
Listado 2

Límites de funciones de varias variables

1. Demuestre que los siguientes límites no existen utilizando el método de trayectorias:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$
$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2-(x-y)^2}.$$
$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1-xy}{x^2-y^2}.$$

Sugerencia: Realice el cambio de variables $h = x - 1$, $k = y - 1$.

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$$
$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x+y+z}{x+y-z}$$
$$(f) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2}.$$
$$(g) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}.$$

2. Use el Teorema del Acotamiento para demostrar la existencia de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{y}\right).$$
$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(\sqrt{|x|}) - y^4}{\sqrt{|x|} + |y|^3}.$$
$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{|x-1| |y+1|}{|x-1| + |y+1|}.$$
$$(d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^6 + |y| + z^4}.$$
$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\cos(xyz) - 1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$
$$(f) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Calcule, de ser posible, los siguientes límites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - e^x - e^{2y} + 1}{xy}.$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arcsin(2x) \arctan(3y)}{xy}.$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^4 + (x-y)^2}.$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{x^3(y+1)}{x^6 + (y+1)^2}.$$

$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,0)} \frac{x^2 - 2x + y^2 - z^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}.$$

$$(f) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$