UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521.218)

PRÁCTICA $N°2$ (EDO Lineal de Orden Superior, Parte I)

Problemas a resolver en práctica: Recuerde que si $y = y(x)$ entonces $Dy := \dfrac{dy}{dx}$.

PROBLEMA 1.

(a) Desarrolle la expresión $(D^3 - D^2 + D)(\mathrm{e}^{3x})$.

(b) Determine si $y(x) = \mathrm{e}^{3x}$ es solución de la EDO lineal $(D^3 - D^2 + D)y(x) = 0$.

Solución:

(a) Desarrollando, se obtiene:

$$(D^3 - D^2 + D)(\mathrm{e}^{3x}) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(\mathrm{e}^{3x}) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\mathrm{e}^{3x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{3x}) = 27\mathrm{e}^{3x} - 9\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x} = 21\mathrm{e}^{3x}.$$

(b) Dada la función $y(x) = \mathrm{e}^{3x}$, del Problema 1 sabemos que

$$(D^3 - D^2 + D)y(x) = 21y(x).$$

Dado que $y(x) = \mathrm{e}^{3x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que esta función **NO** es solución de la EDO lineal dada.

PROBLEMA 2.

(a) Desarrolle la expresión: $(D + 1)(xD - x)(3\mathrm{e}^{2x})$.

(b) Determine si $(D + 1)(xD - x)(3\mathrm{e}^{2x}) = (xD - x)(D + 1)(3\mathrm{e}^{2x})$.

Solución:
(a) Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned}(D+1)(xD-x)(3\mathrm{e}^{2x}) &= 3(D+1)(xD-x)(\mathrm{e}^{2x}) = 3(D+1)(2x\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x}) \\ &= 3(D+1)(x\mathrm{e}^{2x}) = 3(\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}) = 3(1+3x)\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

(b) Se tiene que $(xD - x)(D + 1)(3\mathrm{e}^{2x}) = 9x\mathrm{e}^{2x}$. Considerando el item anterior, la igualdad propuesta no es verdadera.
Observación: Si se define los operadores diferenciales lineales L_1 y L_2, como $L_1 = (D + 1)$ y $L_2 = (xD - 1)$, el item anterior nos dice que esos operadores no conmutan, esto es, $L_1\, L_2 \neq L_2\, L_1$.

PROBLEMA 3.
Sea L el operador diferencial lineal definido por $L = (D - x)(xD - 2)$.
Muestre que la EDO dada por $Ly = \ln(x^2 + 1)$, corresponde a la EDO lineal de segundo orden y de coeficientes variables $x\,y''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2x\,y(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Observe que el Dominio del Operador L, $\mathrm{Dom}(L)$, es el espacio vectorial $C^2(]-\infty, 0[, \mathbb{R})$ o bien $C^2(]0, \infty[, \mathbb{R})$.

Solución: Para $y = y(x)$ desarrollemos el valor del operador diferencial lineal L evaluado en y, esto es,

$$\begin{aligned} Ly(x) &= (D - x)(xD - 2)y(x) = (D - x)(xy'(x) - 2y(x)) \\ &= y'(x) + xy''(x) - 2y'(x) - x^2y'(x) + 2xy(x) \\ &= xy''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la EDO dada por $Ly = \ln(x^2 + 1)$ equivale a la EDO

$$xy''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Observe que al normalizar la EDO, vemos que se trata de una EDO lineal, de orden dos y a coeficientes variables en $C^2(]-\infty, 0[, \mathbb{R})$ o en $C^2(]0, \infty[, \mathbb{R})$.

PROBLEMA 4.
Determine el intervalo J ($J \subset \mathbb{R}$) mas grande (en el sentido de la inclusión), de modo que el conjunto $\{\ln(x), x\ln(x)\}$ resulte linealmente independiente, l.i., en el espacio vectorial $C^2(J, \mathbb{R})$.
Solución: La combinación lineal nula de las funciones consideras proporciona, para constantes c_1 y c_2, la igualdad

$$c_1 \ln(x) \; + \; c_2 x \ln(x) = 0(x) = 0.$$

de la cual sigue que $c_1 + c_2\,x = 0$, para $x \neq 1$. Por tanto $c_1 = c_2 = 0$. Esto es, el conjunto $\{\ln(x), x\ln(x)\}$ es l.i en $C^2(]0, \infty[, \mathbb{R})$.
Observe que en este caso el Wronskiano de las funciones $\{\ln(x), x\ln(x)\}$ denotado por $W(x)$, es

$$W(x) = \begin{vmatrix} \ln(x) & x\ln(x) \\ 1/x & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = \ln^2(x) + \ln(x) - \ln(x) = \ln^2(x),$$

que resulta ser cero en $x = 1$.
Vea el Problema 3 de los Ejercicios Propuestos a los Estudiantes.

PROBLEMA 5.
Sean y_1 la solución sobre $(0, \infty)$ de $x^2y'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, e y_2 la solución sobre $(0, \infty)$ de $x^2y'' + y' + xy = 0$, $\quad y(1) = 0$, $\quad y'(1) = -1$,
a) Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es conjunto fundamental de soluciones de $x^2y'' + y' + xy = 0$ en $]0, \infty[$.
b) Sea y_3 la solución de

$$x^2y'' + y' + xy = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

Determine las constantes reales c_1 y c_2 de modo que $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$.

Solución a): Por definición, el conjunto $\{y_1, y_2\}$ satisface la EDO $x^2y'' + y' + xy = 0$. El wronskiano viene dado por $W(x) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)$. Evaluando en $x = 1$, se obtiene $W(1) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -1$, es decir, el wronskiano es distinto de cero en un punto del intervalo

$(0, \infty)$, por lo tanto las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes en el intervalo $]0, \infty[$ y así $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental (en $]0, \infty[$) de la EDO indicada.

Solución b): Es evidente que la solución $y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la EDO. Para satisfacer las condiciones iniciales, se requiere que $y_3(1) = 2$ y $y_3'(1) = 0$, es decir

$$\begin{array}{r} c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = 2 \\ c_1 y_1'(1) + c_2 y_2'(1) = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} c_1 = 2 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 2,$$

Así obtenemos que $y_3(x) = 2y_1(x) + 2y_2(x)$.

PROBLEMA 6.

Sea $L = (D - a)$ donde a es una constante real. Muestre que y definida por $y(x) = \mathrm{e}^{ax} \in \mathrm{Ker}(L)$; además muestre que $\{\mathrm{e}^{ax}, x\,\mathrm{e}^{ax}\}$ forma una base para el $\mathrm{Ker}(L^2)$.
En general se puede demostrar que para $m \in I\!N$, $x^{m-1}\mathrm{e}^{ax} \in \mathrm{Ker}(L^m)$.
Observación: Lo anterior no es valido si L tiene coeficientes variables.

Solución: Aplicando el operador L a la función y:

$$Ly(x) = (D - a)(\mathrm{e}^{ax}) = D\mathrm{e}^{ax} - a\mathrm{e}^{ax} = a\mathrm{e}^{ax} - a\mathrm{e}^{ax} = 0,$$

lo que prueba que $y(x) \in \mathrm{Ker}(L)$. Veamos ahora que el conjunto $\{\mathrm{e}^{ax}, x\,\mathrm{e}^{ax}\}$ pertenece al $\mathrm{Ker}(L^2) = \mathrm{Ker}((D - a)^2)$:

$$\begin{aligned} L^2(\mathrm{e}^{ax}) &= (D - a)(D - a)(\mathrm{e}^{ax}) = (D - a)(0) = 0, \\ L^2(x\mathrm{e}^{ax}) &= (D - a)(D - a)(x\mathrm{e}^{ax}) = (D - a)(\mathrm{e}^{ax} + ax\mathrm{e}^{ax} - ax\mathrm{e}^{ax}) = (D - a)(\mathrm{e}^{ax}) = 0. \end{aligned}$$

Para ver que este conjunto forma una base de $\mathrm{Ker}(L^2)$, calculamos el wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{ax} & x\mathrm{e}^{ax} \\ a\mathrm{e}^{ax} & (1 + ax)\mathrm{e}^{ax} \end{vmatrix} = (1 + ax)\mathrm{e}^{2ax} - ax\mathrm{e}^{2ax} = \mathrm{e}^{2ax},$$

el cual es estrictamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el conjunto $\{\mathrm{e}^{ax}, x\,\mathrm{e}^{ax}\}$ es efectivamente una base para el $\mathrm{Ker}(L^2)$.

PROBLEMA 7.

Resolver los PVI:

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
2. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 5$.

Solución a): Usando el operador diferencial D, reescribimos la EDO como

$$(D^2 + 5D + 6)[y(x)] = 0,$$

donde el polinomio característico es

$$p(t) = (t^2 + 5t + 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = (t + 3)(t + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -3, \; t_2 = -2.$$

Entonces la solución es

$$y(x) = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

y su derivada es

$$y'(x) = -3c_1\, e^{-3x} - 2c_2\, e^{-2x} \tag{2}$$

Observe que para $x = 0$, de (1) sigue $y(0) = c_1 + c_2$ y de (2) $y'(0) = -3c_1 - 2c_2$; ahora evaluando en las condiciones iniciales del PVI dado, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ -3c_1 - 2c_2 &= 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = -4$ y $c_2 = 5$. Entonces la solución del PVI es

$$y(x) = -4e^{-3x} + 5e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solución b): Usando el operador diferencial D, reescribimos la EDO como

$$(D^3 + 3D^2 - D - 3)[y(x)] = 0,$$

donde el polinomio característico es

$$p(t) = t^3 + 3t^2 - t - 3 = 0, \qquad \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Usando Ruffini, las posibles soluciones son:

	1	3	-1	-3	
1	1	4	3	0	$(t-1)$ solución
	1	4	3		
-1	1	3	0		$(t+1)$ solución
	1	3			
-3	1	0			$(t+3)$ solución

Luego,

$$p(t) = (t-1)(t+1)(t+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1,\ t_2 = -1,\ t_3 = -3,$$

y la solución es

$$y(x) = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + c_3\, e^{-3x}, \qquad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

La primera y segunda derivada de la solución son

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1\, e^{x} - c_2\, e^{-x} - 3c_3\, e^{-3x}, \\ y''(x) &= c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + 9c_3\, e^{-3x}. \end{aligned}$$

Al imponer las condiciones iniciales, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\ c_1 - c_2 - 3c_3 &= 2, \\ c_1 + c_2 + 9c_3 &= 5, \end{aligned}$$

el que resolvemos usando regla de Cramer. El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 12 + 2 = -16,$$

y las soluciones buscadas son

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & & -3 \\ 5 & 9L_1 = & (D+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{16}(-6 - 33 + 7) = \frac{32}{16} = 2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\left(\begin{vmatrix} L_1 \,=\, (D+1)2 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{16}(33 - 12 + 3) = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{16}(-7 - 3 + 2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Las soluciones del sistema lineal son entonces $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{2}$ y $c_3 = \frac{1}{2}$. Y la solución del PVI es

$$
y(x) = 2\,e^{x} - \frac{3}{2}\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{-3x}, \qquad x \in \mathbb{R}
$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Desarrolle la expresión $(D^2 - D)(\mathrm{e}^{3x} + 3x^3)$.

2. (a) Muestre que $(D - x)(xD - 2)y \neq (xD - 2)(D - x)y$
   (b) Muestre que $y_1(x) = ax^2$ con a constante real, es solución de $(x\,D - 2)y = 0$, pero no lo es de $(xD - 2)(D - x)y = 0$.
   (c) Muestre que $y_2(x) = b\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ con b constante real, es solución de $(D - x)y = 0$, pero no lo es de $(D - x)(xD - 2)y = 0$.
   (d) Muestre que $(D - x)(xD - 2)y_1 = 0$
   (e) ¿Qué puede concluir de todo lo anterior ?

3. Considere la EDO lineal de coeficientes variables y continuos

$$
y''(x) + \frac{x}{1-x}\,y'(x) - \frac{1}{1-x}\,y(x) = 0 \ \text{ para } x \neq 1. \tag{3}
$$

   (i) Muestre que el conjunto $B = \{y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = x\}$ es un **SISTEMA FUNDAMENTAL** para la EDO dada, esto es, B es base del espacio solución de la EDO (3).
   (ii) Muestre que el Wronskiano asociado a las funciones y_1 e y_2, es $W[\mathrm{e}^x, x](x) = \mathrm{e}^x(1-x)$.
   (iii) Cómo explica que $W[\mathrm{e}^x, x](1) = 0$, sabiendo el hecho que $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ e $y_2(x) = x$ son soluciones de la EDO dada. **Respuesta:** y_1 e y_2 son soluciones de la EDO lineal homogénea considerada en el intervalo $]-\infty, 1[$ o en $]1, +\infty[$.

4. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias escritas usando el operador diferencial.

   (a) $(D - 1)(D + 1)y = 0$.
   (b) $(D - 1)^2(D + 1)y = 0$.
   (c) $(D - 1)^2(D + 1)^2(D + 2)^2y = 0$.
   (d) $(D^4 - 2\,D^3 - 5\,D^2 + 6\,D)\,y = 0$

5. Resuelva la EDO lineal homogénea $Ly = 0$, cuando:

   (*i*) $L = (D+6)(D-2)(D+3)(D-2)$

   (*ii*) $L = D^3 - 3D^2 + 4$, sabiendo que $y = \mathrm{e}^{-x}$ pertenece al Kernel de L.

   (*iii*) $L = (D+2)(D^2 - 6D + 10)^2(D^2 - 25)^3$.

6. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = (D-1)^2(D+1)^2$. Sabiendo que la función z definida por $z(x) = 2x^3 - 14x$ es una solución particular de $L(y) = 2\,x^3 - 26\,x$, determine la solución general de la EDO lineal no homogénea $y^{(iv)} - 2y'' + y = 2x^3 - 26\,x$.

7. Determine una EDO lineal a coeficientes constantes reales:

   a) que tenga a $y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple este requisito?

   b) de orden 4 que tenga entre sus soluciones a $y_1 = \mathrm{e}^{-3x}$ e $y_2 = x^2\,\mathrm{e}^{5x}$,

   c) de menor orden posible, tal que las funciones $y_1(x) = x^4\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x),\; y_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{4x}$ pertenezcan al Kernel del operador diferencial L inducido por la EDO.

8. Buscando soluciones del tipo $y(x) = \mathrm{e}^{\beta x}$, determine la solución general de $L(y) = 0$, cuando: (a) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)$, (b) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)(D-3)$.

9. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = D^4 + 2\,D^3 - 3\,D^2 - 4\,D + 4$. Resuelva la EDO lineal $Ly = 0$, sabiendo que $(D+2)$ y $(D-1)$ son factores de L.

10. Determine la solución general de

$$y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 0.$$
