Elementos Finitos

Pauta Evaluación 2

Prof. Manuel E. Solano P.

18 de junio de 2024

Ejercicio 1. [1.5 ptos.] Sea $K \in \mathbb{R}^2$ un triángulo cuyos vértices son $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$. Para $j \in \{1,2,3\}$, denotamos por $\boldsymbol{m}_j$ al punto medio del lado opuesto al vértice $\boldsymbol{v}_j$. Considere el elemento $(K, \mathbb{P}_2(K), \mathcal{N})$ con $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^6$ dado por

- $N_i(p) = p(\boldsymbol{v}_i)$ para $i = 1,2,3$,
- $N_4(p) = p(\boldsymbol{m}_1)$, $N_5(p) = p(\boldsymbol{m}_2)$ y $N_6(p) = p(\boldsymbol{m}_3)$.

donde $p \in \mathbb{P}_2(K)$. Demostrar que $(K, \mathbb{P}_2(K), \mathcal{N})$ es un elemento finito.

Solución: En primer lugar vemos que K es cerrado, acotado, con interior no vacío y frontera suave a trozos. Además, $\dim(\mathbb{P}_2(K)) = 6$.

Por otro lado, supongamos $N_i(p) = 0$ para todo $i \in 1, ..., 6$. Demostraremos que p es el nulo.

Denotamos por e_1, e_2 y e_3 los lados de K. Sea L_j el hiperplano que pasar por el lado e_j, con $j \in \{1,2,3\}$. Sea $\boldsymbol{x} = (x,y) \in e_1$. Entonces podemos escribir $\boldsymbol{x}(s) = (\boldsymbol{v_3} - \boldsymbol{v_2})s + \boldsymbol{v_2}$, con $s \in [0,1]$. Definimos $\widetilde{p}(s) = p(\boldsymbol{x}(s))$, de donde $\widetilde{p}(0) = p(\boldsymbol{v}_2) = N_2(p) = 0$, $\widetilde{p}(1/2) = p(\boldsymbol{m}_1) = N_4(p) = 0$ y $\widetilde{p}(1) = p(\boldsymbol{v}_3) = N_3(p) = 0$. Es decir, como $\widetilde{p}$ es un polinomio de grado 2 que se anula en 3 puntos, entonces $\widetilde{p}$ es el nulo. Así, existe $q_1 \in \mathbb{P}_1(K)$ tal que $p(\boldsymbol{x}) = L_1(\boldsymbol{x})q_1(\boldsymbol{x})$.

Por otro lado, notemos que $0 = p(\boldsymbol{v}_1) = L_1(\boldsymbol{v}_1)q_1(\boldsymbol{v}_1)$ y $0 = p(\boldsymbol{m}_3) = L_1(\boldsymbol{m}_3)q_1(\boldsymbol{m}_3)$. Como $L_1(\boldsymbol{v}_1) \neq 0$ y $L_1(\boldsymbol{m}_3) \neq 0$, tenemos que $q_1(\boldsymbol{v}_1) = 0$ y $q_1(\boldsymbol{m}_3) = 0$. Es decir, q_1 es un polinomio de grado 1 que se anula en dos puntos del hiperplano L_3, por lo tanto $q_1|_{L_3} = 0$ y así existe $c \in \mathbb{P}_0(K)$ tal que $q_1 = L_3 c$, por lo cual $p = L_1 L_3 c$.

Finalmente, como $0 = p(\boldsymbol{m}_2) = L_1(\boldsymbol{m}_2)L_3(\boldsymbol{m}_2)c$ y $L_1(\boldsymbol{m}_2) \neq 0 \neq L_3(\boldsymbol{m}_2)$, tenemos que $c = 0$ y por tanto $p \equiv 0$. Así $(K, \mathbb{P}_3(K), \mathcal{N})$ es un elemento finito.

Ejercicio 2 [1 pto]. Sean $K \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo y $\widehat{K} = \{\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/d_K : \boldsymbol{x} \in K \subset \mathbb{R}^n\}$, donde d_K es el diámetro de K. Los lados de $\widehat{K}$ se denotan por $\hat{e}_i$, $i = 1,2,3$. Considere el elemento finito $(\widehat{K}, \mathbb{P}_1(\widehat{K}), \widehat{\mathcal{N}})$, donde $\mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \langle\{\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \widehat{\phi}_3\}\rangle$ y $\widehat{\mathcal{N}} = \{\widehat{N}_1, \widehat{N}_2, \widehat{N}_3\}$. Los funcionales $\widehat{N}_i$ se define de la siguiente manera:

$$\widehat{N}_i(\widehat{v}) := \frac{1}{|\hat{e}_i|}\int_{\hat{e}_i} \widehat{v}\, ds.$$

Por otro lado, recordemos que interpolante local $I_{\widehat{K}} : H^2(\widehat{K}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ se define por $I_{\widehat{K}}\widehat{v} := \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \widehat{N}_i(\widehat{v})\widehat{\phi}_i$.

Demostrar lo siguiente:

(a) Para $i \in \{1,2,3\}$, existe una constante $C_1(\widehat{K}) > 0$ tal que $|\widehat{N}_i(\widehat{v})| \leq C_1(\widehat{K})\|\widehat{v}\|_{H^1(\widehat{K})}$ $\forall \widehat{v} \in H^1(\widehat{K})$.

(b) Sea $k \in \{0,1\}$. Existe una constante $C_2(\widehat{K}) > 0$ tal que $|I_{\widehat{K}}\widehat{v}|_{H^k(\widehat{K})} \leq C_2(\widehat{K})\|\widehat{v}\|_{H^1(\widehat{K})}$ $\forall \widehat{v} \in H^1(\widehat{K})$.

Solución:

(a) Sea $\widehat{v} \in H^1(\widehat{K})$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad del operador traza, tenemos que existen una constante $C > 0$ tal que

$$|\widehat{N}_i(\widehat{v})| \leq \frac{1}{|\hat{e}_i|}\|1\|_{L^2(\hat{e})}\|\widehat{v}\|_{L^2(\hat{e})} = |\hat{e}_i|^{-1/2}\|\widehat{v}\|_{L^2(\hat{e})} \leq |\hat{e}_i|^{-1/2}C\|\widehat{v}\|_{H^1(\widehat{K})}.$$

El resultado se obtiene definiendo $C_1(\widehat{K}) := C \max\limits_{i\in\{1,2,3\}} |\hat{e}_i|^{-1/2}$ y notando que esta es una constante.

(b) Sea $\widehat{v} \in H^1(\widehat{K})$. Entonces

$$|I_{\widehat{K}}\widehat{v}|_{H^k(\widehat{K})} \leq \sum_{i=1}^{3} |\widehat{N}_i(\widehat{v})|\,|\widehat{\phi}_i|_{H^k(\widehat{K})} \leq C_1(\widehat{K})\|\widehat{v}\|_{H^1(\widehat{K})}\sum_{i=1}^{3}|\widehat{\phi}_i|_{H^k(\widehat{K})}.$$

El resultado se obtiene definiendo $C_2(\widehat{K}) := C_1(\widehat{K})\displaystyle\sum_{i=1}^{3}|\widehat{\phi}_i|_{H^k(\widehat{K})}$.

Ejercicio 3 [2 ptos.] Considere las mismas definiciones del Ejercicio 2 y recuerde que, dada una función v, definimos $\widehat{v}(\widehat{\boldsymbol{x}}) := v(\boldsymbol{x})$. Sea d_K el diámetro de K. Demostrar que existe $C > 0$, independiente de d_K, tal que, para $u \in H^2(K)$,

$$|u - I_K u|_{H^k(K)} \leq C d_K^{2-k} |u|_{H^2(K)}, \qquad \text{para}\, k = 0, 1. \tag{1}$$

Ind.: Ir a $\widehat{K}$ y usar allí el Lema de Bramle-Hilbert. Luego utilice la cotas del Ejercicio 2 y vuelva a K.

Solución: Sean $u \in H^2(K)$ y $k \in \{0, 1\}$. Entonces, recordando que $H^k = W_0^k$, tenemos que

$$|u - I_K u|_{H^k(K)} = d_K^{-k+2/2} |\widehat{u} - \widehat{I}_{\widehat{K}} \widehat{u}|_{H^k(\widehat{K})} \leq d_K^{-k+1} \left(|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}|_{H^k(\widehat{K})} + |\widehat{I}_{\widehat{K}} \widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}|_{H^k(\widehat{K})} \right),$$

donde $\widehat{Q}^2 \widehat{u} \in \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ es el polinomio ponderado de Taylor de $\widehat{u}$. Luego, notando que $\widehat{Q}^2 = \widehat{I}_{\widehat{K}} \widehat{Q}^2$, utilizando la parte (b) del Ejercicios 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
|u - I_K u|_{H^k(K)} \leq& d_K^{-k+1} \left(|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}|_{H^k(\widehat{K})} + |\widehat{I}_{\widehat{K}} \left(\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u} \right) |_{H^k(\widehat{K})} \right) \\
\leq& d_K^{-k+1} \left(|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}|_{H^k(\widehat{K})} + C_2(\widehat{K}) \|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}\|_{H^1(\widehat{K})} \right) \\
\leq& d_K^{-k+1} (1 + C_2(\widehat{K})) \|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}\|_{H^1(\widehat{K})}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, gracias al lema de Bramble-HIlbert y notando que $d_{\widehat{K}} = 1$, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$\|\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}\|_{L^2(\widehat{K})} \leq c_1 |\widehat{u}|_{H^2(\widehat{K})} \quad \text{y} \quad |\widehat{u} - \widehat{Q}^2 \widehat{u}|_{H^1(\widehat{K})} \leq c_2 |\widehat{u}|_{H^2(\widehat{K})}.$$

Así, $C := (1 + C_2(\widehat{K})) \max\{c_1, c_2\}$, concluimos que

$$|u - I_K u|_{H^k(K)} \leq C d_K^{-k+1} |\widehat{u}|_{H^2(\widehat{K})} = C d_K^{2-k} |u|_{H^2(K)}.$$

Ejercicio 4. [1.5 ptos.] Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado de diámetro d_K. Demostrar lo siguiente

(a) Sea $v \in L^p(K)$. Su promedio en K se define por $\bar{v} = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. Entonces $\|\bar{v}\|_{L^p(K)} \leq \|v\|_{L^p(K)}$.

(b) Sea α una constante. Entonces $\|u - \bar{u}\|_{L^p(K)} \leq 2\|u - \alpha\|_{L^p(K)}$.

(c) Existe una constante $C > 0$ tal que $\|u - \bar{u}\|_{L^p(K)} \leq C d_K |u|_{W_p^1(K)}$ para $u \in W_p^1(K)$.

Solución:

(a) Sea $v \in L^p(K)$. Como $\overline{v}$ es contante y $\|1\|_{L^p(K)} = |K|^{1/p}$.

$$\|\overline{v}\|_{L^p(K)} = \overline{v} \|1\|_{L^p(K)} = |K|^{1/p-1} \int_K v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Gracias a la desigualdad de Hölder con q tal que $1/p + 1/q = 1$, tenemos que

$$\|\overline{v}\|_{L^p(K)} \leq |K|^{1/p-1} \|1\|_{L^q(K)} \|v\|_{L^p(K)} = |K|^{1/p-1+1/q} \|v\|_{L^p(K)} = \|v\|_{L^p(K)}.$$

(b) Como α es una constante, $\overline{\alpha} = \alpha$. Así

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(K)} \leq \|u - \alpha\|_{L^p(K)} + \|\alpha - \bar{u}\|_{L^p(K)} = \|u - \alpha\|_{L^p(K)} + \|\overline{\alpha - u}\|_{L^p(K)}.$$

Así, por (a), $\|u - \bar{u}\|_{L^p(K)} \leq 2\|u - \alpha\|_{L^p(K)}$.

(c) Tomando $\alpha := Q^1 u \in \mathbb{P}_0(K)$, gracias a (b) y el lema de Bramble-Hilbert, concluimos que existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(K)} \leq 2\|u - Q^1 u\|_{L^p(K)} \leq 2\widetilde{C} d_K^{1-0} |u|_{W_p^1(H)} \leq C d_K |u|_{W_p^1(H)}.$$