UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 2 TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO I (525041-1)

ATENCIÓN: Considere que los conjuntos involucrados en cada ejercicio, son subconjuntos de cierto conjunto universo $\mathcal{U}$. Además tener en cuenta la notación $X \setminus Y := X \cap Y^c$.

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Validar las siguientes proposiciones. Luego, niéguelas.

$$(a)\, \boldsymbol{p}_1 : \forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, z \in \mathbb{Z}_0^+ : x > z\,. \quad (b)\, \boldsymbol{p}_2 : \exists\, x \in \mathbb{R} : \forall\, z \in \mathbb{Z}_0^+ : x > z\,.$$

2. Expresar usando cuantificadores: "Para todo entero r, existe un entero a, tal que si ar es par, entonces $(a+1)r$ es par". Luego, negar la proposición, y determine su valor de verdad.

3. Demostrar $\forall\, a \in \mathbb{Z} : \forall\, b \in \mathbb{Z}$: Si ab es impar, entonces a y b son impares. ¿Será cierto el recíproco?

4. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

   (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$
   (b) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
   (c) $(\mathbb{Z}^+)^c = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\,, \mathcal{U} := \mathbb{Z}$
   (d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$
   (e) $\exists A \subseteq \mathcal{U},\ \forall B \subseteq \mathcal{U},\ A \cap B = A$
   (f) $\forall A \subseteq \mathcal{U},\ \exists B \subseteq \mathcal{U},\ A \cup B = \emptyset$
   (g) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$
   (h) $\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) : \forall\, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) : \{A \backslash B, B\}$ es una partición de $A \cup B$.

5. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos, sobre un conjunto universo $\mathcal{U}$:

   $(a)\, (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
   $(b)\, A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A\,.$
   $(c)\, \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   $(d)\, A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset\,.$
   $(e)\, A^c \cap B = A \cap B \Rightarrow B = \emptyset$
   $(f)\, A \subseteq B^c \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A^c\,.$

6. Demuestre las siguientes propiedades de producto cartesiano de conjuntos:

   (a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,.$

   (b) $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)\,.$ Considerar I un conjunto de índices arbitrario.

7. Una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ se dice *creciente*, si $\forall\, j \in \mathbb{N} : A_j \subseteq A_{j+1}$.

   (a) Dada $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, distintos y creciente, se define la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por: $B_1 := A_1 \quad \wedge \quad B_k := A_k \setminus A_{k-1} \quad \forall\, k \geq 2$. Demuestre que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

   (b) Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{j \in \mathbb{N}}$ creciente, y todos distintos, tal que:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{1\}\,.$$

8. Para la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dada, determine $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ en cada caso. Justifique su respuesta:

$$(a)\ A_j := \left(-\frac{1}{j}\,,\, \frac{1}{j}\right)\,, \forall\, j \in \mathbb{N}\,. \qquad (b)\ A_j := \mathbb{R} \setminus [0, j]\,, \forall\, j \in \mathbb{N}\,.$$

9. Defina una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, todos distintos, tal que verifique las condiciones en cada caso:

$$(a)\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = (-\infty, 0]\,, \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = [-1, 0]\,. \qquad (b)\ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \mathbb{Q}\,, \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset\,.$$

Ejercicios propuestos:

1. Validar las siguientes proposiciones. Luego, niéguelas.

$$(a)\,\boldsymbol{p}_3\,:\,\forall\,z\in\mathbb{Z}_0^+\,:\,\exists\,x\in\mathbb{R}\,:\,x>z\,.\quad (b)\,\boldsymbol{p}_4\,:\,\exists\,z\in\mathbb{Z}_0^+\,:\,\forall\,x\in\mathbb{R}\,:\,x>z\,.$$

2. Expresar usando cuantificadores: "Para todo número racional r, existe un número entero m, tal que $m\le r<m+1$". Luego expresar su negación.

3. Demostrar: $\forall\,a\in\mathbb{Z}\,:\,a$ es par si y sólo si a^2+2a+9 es impar.

4. Demostrar: $\forall\,a\in\mathbb{Z}\,:\,\forall\,b\in\mathbb{Z}\,:$ Si $a^2(b^2-2b)$ es impar, entonces a y b son impares.

5. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos, sobre un conjunto universo $\mathcal{U}$:

$(a)\,(A\,\cap\,B)^c\,=\,A^c\,\cup\,B^c$ $\quad(b)\,A\cup B\,=\,A\cap C\,\Rightarrow\,B\subseteq A\quad\wedge\quad A\subseteq C\,,$

$(c)\,A\cap B\,=\,\emptyset\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\,=\,\{\emptyset\}$ $\quad(d)\,A\,\subseteq\,B\,\Rightarrow\,\mathcal{P}(A)\,\subseteq\,\mathcal{P}(B)\,.$ ¿Será cierto el recíproco?

$(e)\,[A\backslash(B\backslash A)]\,\cup\,[(B\backslash A)\backslash A]\,=\,A\cup B$ $\quad(f)\,A\cap C\,=\,\emptyset\quad\Rightarrow\quad(A\backslash B)\backslash C\,=\,A\backslash(B\backslash C)$

$(g)\,(A\backslash C)\,\backslash\,(B\backslash C)\,=\,(A\backslash B)\,\backslash\,C$ $\quad(h)\,A\cap B=\emptyset\quad\Leftrightarrow\quad A\backslash B=\emptyset$

$(i)\,B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\Leftrightarrow A=\emptyset$ $\quad(j)\,(A\cap C\subseteq B\cap C)\wedge(A\cap C^c\subseteq B\cap C^c)\Rightarrow A\subseteq B\,.$

6. Sean $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío y $A\subset\mathcal{U}$, tal que $\forall\,X,Y\in\mathcal{P}(\mathcal{U})\;:\;A\cup X\,=\,A\cup Y\,\rightarrow\,X\,=\,Y$. Concluya que $A=\emptyset$.

7. Sean $\star$ y Δ las siguientes operaciones entre conjuntos $A\Delta B:=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$, $\qquad A\star B:=A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}}$. Sean $\mathcal{U}$ un conjunto universo y $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{U})$ no vacío, con la propiedad: $\forall\,A,B\in\mathcal{F}\;:\;A\star B\in\mathcal{F}$. Suponga que A y B son elementos de $\mathcal{F}$. Demuestre que:

$$(a)\,A^{\mathrm{c}}\in\mathcal{F},\quad(b)\,A\cap B\in\mathcal{F}\quad(c)\,A\cup B\in\mathcal{F}\quad(d)\,A\Delta B\in\mathcal{F}\quad(e)\,\emptyset\in\mathcal{F}\quad\wedge\quad\mathcal{U}\in\mathcal{F}\,.$$

8. Demuestre las siguientes propiedades de producto cartesiano de conjuntos: $(a)\,A\,\times\,(B\,\cup\,C)\,=\,(A\,\times\,B)\,\cup\,(A\,\times\,C)\,.$ $\quad(b)\,B\,\times\,\bigcap\limits_{i\in I}A_i\,=\,\bigcap\limits_{i\in I}(B\,\times\,A_i)$, siendo I un conjunto de índices.

9. Sea $\{A_j\}_{j\in I}$ una familia de conjuntos, y sea X un conjunto cualquiera. Demuestre que

$$(a)\;\left(\bigcup_{j\in I}A_j\right)\cap\,X\,=\,\bigcup_{j\in I}\Big(A_j\,\cap\,X\Big)\,,\qquad\qquad(b)\;\left(\bigcap_{j\in I}A_j\right)\cup\,X\,=\,\bigcap_{j\in I}\Big(A_j\,\cup\,X\Big)\,.$$

10. Sea $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, y X un conjunto no vacío tal que $\forall\,j\,\in\,\mathbb{N}\,:$ $A_j\,\cap\,X\,\neq\,\emptyset$. A continuación se construye la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por

$$B_1\,:=\,X\,\cap\,A_1\quad\wedge\quad\forall\,k\,\geq\,2\,:\,B_k\,:=\,X\,\cap\,\left(A_k\,\backslash\,\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)\,.$$

Demuestre que: $(a)\,\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}B_j\,=\,X\,\cap\,\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}A_j\,.$ $\qquad(b)\,\forall\,i,j\in\mathbb{N}\,,i\,\neq\,j\,:\,B_i\,\cap\,B_j\,=\,\emptyset.$

¿Es $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una partición? Justifique su respuesta.

11. Para la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dada, determine $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}A_j$ y $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}A_j$ en cada caso. Justifique su respuesta. $(a)\,A_j\,:=\,\left(-3-\dfrac{1}{j}\,,\,5+\dfrac{1}{j}\right)\,,\forall\,j\in\mathbb{N}\quad(b)\;A_j\,:=\,\{1,2,...,2j+1\}\,,\forall\,j\in\mathbb{N}\,.$

12. Defina una familia de conjuntos $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, todos distintos, tal que verifique las condiciones en cada caso:

$$(a)\;\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\,=\,(0,+\infty)\,,\quad\bigcap_{j\in\mathbb{N}}A_j\,=\,\emptyset\,.\qquad\qquad(b)\;\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\,=\,\mathbb{Z}\,,\quad\bigcap_{j\in\mathbb{N}}A_j\,=\,\{0\}\,.$$

RBP/rbp 25.03.2024