Cap. 2: Teoría de conjuntos

Rommel Andrés Bustinza Pariona
e-mail: rbustinza at udec.cl

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

13 de marzo de 2024

Un conjunto es una colección de elementos.

Los conjuntos pueden describirse:

- por extensión: se listan todos los elementos del conjunto, sin repetición,
- por comprensión: se escriben las propiedades que cumplen los elementos del conjunto.

Al conjunto formado por todos los elementos en una situación dada lo denotaremos por $\mathcal{U}$ y se denomina conjunto universo.
El conjunto que no tiene elementos es el conjunto vacío y se denota $\emptyset$. También puede denotarse por $\{\}$.

Relación de pertenencia y no pertenencia a un conjunto

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo de trabajo, y A un conjunto formado por elementos de $\mathcal{U}$. Sea x un elemento de $\mathcal{U}$.

- si x pertenece al conjunto A, se escribe $x \in A$,
- si x no pertenece al conjunto A, se escribe $x \notin A$.

Conjuntos numéricos conocidos / por conocer ...

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\} \quad \text{(Conjunto de números naturales)}$$

$$\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} \quad \text{(Conjunto de números enteros)}$$

$$\mathbb{Q} := \{x = \frac{m}{n} \,:\, m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\} \quad \text{(Conjunto de números racionales)}$$

$$\mathbb{I} := \{x \,:\, x \quad \text{tiene representación decimal infinita no periódica}\}$$
$$\text{(Conjunto de números irracionales)}$$

$$\mathbb{R} := \{x \,:\, x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\} \quad \text{(Conjunto de números reales)}$$

$$\mathbb{C} := \{x = a + b\,i \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \text{siendo } i = \sqrt{-1} \text{ la unidad imaginaria}$$
$$\text{(Conjunto de números complejos)}$$

$$\mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x > 0\} = \mathbb{N} \quad \text{(Conjunto de números enteros positivos)}$$

$$\mathbb{Z}^- := \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x < 0\} \quad \text{(Conjunto de números enteros negativos)}$$

$$\mathbb{Z}_0^+ := \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \geq 0\} = \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \text{(Conjunto de números enteros no negativos)}$$

$$\mathbb{Z}_0^- := \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \leq 0\} = \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \quad \text{(Conjunto de números enteros no positivos)}\,.$$

De forma análoga, se definen los subconjuntos también notables

$$\mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{R}_0^-\,.$$

A diferencia de los conjuntos previos, el conjunto $\mathbb{C}$ no es ordenado, por lo cual hay que tener más cuidado para definir subconjuntos de él. Se verá en otra asignatura.

Subconjuntos notables de $\mathbb{R}$: intervalos.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, distintos.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{(intervalo cerrado)}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{(intervalo semi-abierto)}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{(intervalo semi-abierto)}\\
(a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\\
[a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}\\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\\
\mathbb{R} &:= (-\infty,+\infty)\\
[a,a] &= \{a\}\,.
\end{aligned}
$$

Otros ejemplos

EJEMPLO 1: El conjunto A de los números naturales entre 1 y 5 inclusives, puede describirse

- por extensión:
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$
- por comprensión:
$$A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, (x \geq 1) \wedge (x \leq 5)\}.$$

EJEMPLO 2:

- Con $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se cumple que $1 \in A$ y $10 \notin A$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + 5x + 6 = 0\right\}$ se cumple $-2 \in B$ y $0 \notin B$.
- Con $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $C = \mathbb{Q}$ se cumple $\frac{1}{2} \in C$ y $\sqrt{2} \notin C$.

Función proposicional

Se llama función proposicional (o enunciado abierto) a una expresión que contiene una o más variables y que se convierte en una proposición lógica cuando se le asignan valores específicos a dichas variables.
Las funciones proposicionales las denotaremos con letras minúsculas seguidas de los nombres de las variables de las cuales dependen separados por comas y encerrados entre paréntesis.
Por ejemplo,

- $3x > 5x$ es una función proposicional que depende sólo del real x. Puede denotarse por $p(x)\,:\,3x > 5x$.
- $a^2 + b^2 = 1$ es una función proposicional que depende del real a y del real b. Puede denotarse por $q(a, b)\,:\,a^2 + b^2 = 1$.

El conjunto de validez de una función proposicional es el conjunto de valores (o n-uplas de valores) de las variables para los cuales dicha función se convierte en una proposición verdadera. El conjunto de validez de la función proposicional $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lo denotaremos $\mathcal{V}_p$.

Así, para $p(x)\,:\,3x > 5x$, se deduce que $\mathcal{V}_p = (-\infty, 0)$.

Cuantificador universal

Para indicar que una función proposicional es **verdadera para cualquier elemento de un determinado conjunto** U se usa el símbolo $\forall$, el cual se llama cuantificador universal.

$\boldsymbol{\forall\, x \in U \;:\; p(x)}$ se lee **para todo elemento** x **de** U **se cumple** $p(x)$.

Por ejemplo, si $p(x)$ es la función proposicional $3x > 5x$ cada una de las proposiciones

$$\forall\, x \in (-1, 0) \;:\; p(x) \qquad \text{y} \qquad \forall\, x \in (-3, -2] \;:\; p(x)$$

es V (¿Por qué?).

Por otro lado, las proposiciones

$$\forall\, x \in (-1, 2] \;:\; p(x) \qquad \text{y} \qquad \forall\, x \in (7, 9) \;:\; p(x)$$

son ambas F (¿Por qué?).

Cuantificador existencial

Para indicar que una función proposicional es **verdadera para algunos elementos de un determinado conjunto** U se usa el símbolo $\exists$, el cual se llama cuantificador existencial.

$\boldsymbol{\exists\, x \in U \ : \ p(x)}$ se lee **existe al menos un elemento** x **de** U **para el cual se cumple** $p(x)$.
Por ejemplo, si $p(x)$ es la función proposicional $3x \geq 5x$ las proposiciones

$$\exists\, x \in (-5,\, -2) \ : \ p(x) \qquad \text{y} \qquad \exists\, x \in [0, 1] \ : \ p(x)$$

son verdaderas.

Las proposiciones

$$\exists\, x \in (0, 1] \ : \ p(x) \qquad \text{y} \qquad \exists\, x \in (0,\, +\infty) \ : \ p(x)$$

son falsas.

Unicidad

La existencia de un único elemento x en un conjunto U que satisface una cierta función proposicional $p(x)$ puede expresarse con ayuda de los cuantificadores universal y existencial de la siguiente manera:

- existe al menos un elemento x en U que satisface $p(x)$ $(\exists\, x \in U \;:\; p(x))$ y
- para cualquier par de elementos x, y en U se cumple que si $p(x)$ y $p(y)$ son V, entonces y es igual a x $(\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)$,

lo que puede escribirse simbólicamente como

$$(\exists\, x \in U \;:\; p(x)) \quad \wedge \quad (\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)$$

Introduciendo el cuantificador $\exists\,!$ la proposición anterior se escribe, de manera equivalente, como

$$\exists\,!\, x \in U \;:\; p(x).$$

Es decir, $\exists\,!\,\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \;:\; \boldsymbol{p(x)}$ se lee **existe un único elemento** x **de** U **para el cual se cumple** $p(x)$.

Negación de proposiciones con cuantificador universal

La negación de

$$\textbf{para todo } x \textbf{ en } U \textbf{ se cumple } p(x)$$

es

$$\textbf{existe al menos un elemento } x \textbf{ de } U \textbf{ para el cual no se cumple } p(x).$$

Es decir,

$$\sim (\forall\, x \in U \ :\ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in U \ : \sim p(x).$$

Negación de proposiciones con cuantificador existencial

La negación de

existe x **en** U **para el cual se cumple** $p(x)$

es

para todo x **de** U **no se cumple** $p(x)$.

Es decir,

$$\sim (\exists\, x \in U \ : \ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U \ : \sim p(x).$$

Negación de la unicidad

Teniendo en cuenta que $\exists\,!\, x \in U \;:\; p(x)$ es equivalente a

$$\mathbf{s}: \quad (\exists\, x \in U \;:\; p(x)) \quad \wedge \quad (\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \to y = x)\,,$$

se cumple que

$$\sim (\exists\,!\, x \in U \;:\; p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \sim (\mathbf{s})\,.$$

$\mathbf{s}$ es una conjunción y, según la ley de Morgan para $\wedge$,

$$\sim \mathbf{s} \;\Leftrightarrow [\sim (\exists\, x \in U \;:\; p(x))] \;\vee\; [\sim (\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \to y = x)]\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sim \mathbf{s} \;&\Leftrightarrow [\forall\, x \in U \;: \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \;: \sim (\forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \to y = x)]\,, \\ &\Leftrightarrow [\forall\, x \in U \;: \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \;:\; \exists\, y \in U \;: \sim (p(x) \wedge p(y) \to y = x)]\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sim (p \to q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$,

$$\sim \mathbf{s} \;\Leftrightarrow [\forall\, x \in U \;: \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \;:\; \exists\, y \in U \;:\; (p(x) \wedge p(y) \wedge y \neq x)]\,.$$

Ejercicio 7

Considere las siguientes proposiciones lógicas:

p_1 : Existe un único número entero x que satisface $x^2 + 4x = 5$.

p_2 : Todo número natural x satisface que él es divisible por 9 si y sólo si es divisible por 45.

p_3 : Existe un número real $x \in [-1, 1]$ tal que para todo $y \in [-1, 1]$ se cumple que $x^2 + y^2 \leq 1$.

1. Escríbalas simbólicamente y determine su valor de verdad, justificando su respuesta en cada caso.
2. Niegue las proposiciones, escribiendo las negaciones tanto en forma simbólica como en lenguaje usual.

Misceláneos

1. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición. En caso sea falsa, exhiba un contra-ejemplo.
$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\,(\exists\, m \in \mathbb{N})\,(x + 3 \,>\, m)$$
Se recuerda que a lo largo del curso, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+}$.

Ejercicio 8

Aplicación de la lógica para hacer demostraciones (Directo)

Demostrar que: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$: Si m es múltiplo de 5, entonces m^2 es también múltiplo de 5.

Ejercicio 9

Aplicación de la lógica para hacer demostraciones (Contrarrecíproca)

Demostrar que:

a) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$: Si m^2 es múltiplo de 2, entonces m es también múltiplo de 2.

b) $\forall\, m \in \mathbb{Z}$: Si m^2 es múltiplo de 3, entonces m es también múltiplo de 3.

Ejercicio 10

Aplicación de la lógica para hacer demostraciones (Reducción al absurdo)

Demostrar que:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Relaciones entre conjuntos: Inclusión

Dados dos conjuntos A y B se dice que A es subconjunto de B, o que A está contenido en B, lo cual se denota por $A \subseteq B$ si y sólo si para cualquier $x \in \mathcal{U}$ se cumple: si $x \in A$, entonces $x \in B$, es decir,

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} \; : \; x \in A \to x \in B.$$

Observación: Equivalentemente, otra forma de expresar que A es subconjunto de B, es diciendo que B contiene a A. Se denota por $B \supseteq A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$.

Ejemplos

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,
- $\{-2, -3\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

Observe que

- para cualquier conjunto A se cumple que $A \subseteq \mathcal{U}$,
- para cualquier conjunto A se cumple que $\emptyset \subseteq A$,

Los conjuntos A y B son iguales ($A = B$) si y sólo si uno es subconjunto del otro, y viceversa. En otras palabras, ambos contienen los mismos elementos, es decir,

$$\begin{aligned} A = B \quad & \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \;\; \wedge \;\; B \subseteq A, \quad \text{(doble inclusión)} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} \; : \; (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A), \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{U} \; : \; x \in A \leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

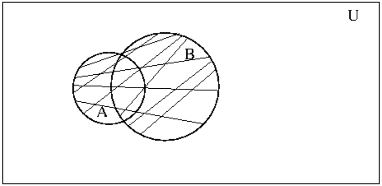
Por ejemplo, $\{-2, -3\} = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

Unión entre conjuntos

Se denota $A \cup B$ al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que pertenecen a A o a B,

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Conjunto $A \cup B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

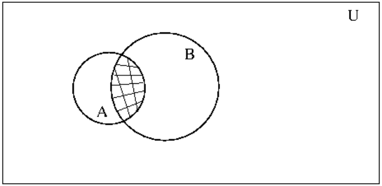
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots\}.$$

Intersección entre conjuntos

Se denota $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que pertenecen a A y a B a la vez,

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \wedge (x \in B)\} .$$

Conjunto $A \cap B$



Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\} .$$

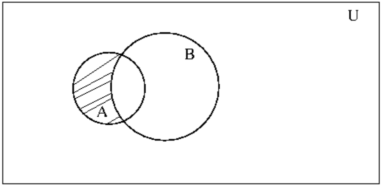
Dos conjuntos son disjuntos si y sólo si no tienen elementos en común, es decir, si y sólo si su intersección es igual al conjunto vacío.

Diferencia entre conjuntos

Se denota $A \setminus B$ (también por $A - B$) al conjunto formado por los elementos de $\mathcal{U}$ que pertenecen a A, pero no a B,

$$A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Conjunto $A \setminus B$



El conjunto $\mathcal{U} \setminus A$ se denomina complemento de A y se denota A^c. Note que $\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in A) \vee (x \in A^c)$. Esto implica que $A \cup A^c = \mathcal{U}$.

Se define también el conjunto diferencia simétrica de A y B, notado por $A \,\Delta\, B$, como

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es par}\}$,

$$A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \qquad B^c = \mathbb{N} - B = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \text{ es impar}\}.$$

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $\mathcal{U}^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \mathcal{U}$,
- $(A^c)^c = A$,
- $A \cap A^c = \emptyset$,
- $A \cup A^c = \mathcal{U}$.

- $A \cup A = A$,
- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

- $A \cap A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap \mathcal{U} = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Conjunto partes de un conjunto

Dado un conjunto A, el conjunto partes de A, se denota $\mathcal{P}(A)$ (algunos autores también lo denotan por 2^A, refiriéndose como conjunto potencia de A), es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.
Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{1\}$ y $B = \{2, 3\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, A\}\,, \\ \mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, B\}\,, \\ \mathcal{P}(A \cup B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\,. \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B), \qquad \text{pero } \mathcal{P}(A \cup B) \nsubseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ésta es una propiedad general del conjunto partes de un conjunto.
También se cumple que para cualquier par de conjuntos A y B

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Producto cartesiano entre dos conjuntos

Dados dos conjuntos no vacíos A y B el producto cartesiano de A y B, que se denota $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(x, y) \ : \ x \in A \wedge y \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$, entonces

$$A \times B = \{(1,3),\ (2,3)\}, \qquad B \times A = \{(3,1),(3,2)\},$$
$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, \qquad B \times B = \{(3,3)\}.$$

Para conjuntos cualesquiera A, B y C se cumplen las siguientes igualdades:

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
- $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Dados n conjuntos no vacíos $A_1, A_2, ..., A_n$, se define el producto cartesiano entre ellos, el cual se denota $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, como el conjunto de las n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;:\; a_i \in A_i$, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, ..., a_n) : \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;:\; a_i \in A_i \}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \;:\; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$.

Dado un conjunto A con una cantidad finita de elementos, al número de elementos de A se le denomina cardinalidad de A y se denota $|A|$.

Por ejemplo,

$$|\{1,2\}| = 2, \quad |\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \leq 10\}| = 10, \quad |\emptyset| = 0.$$

Sean A, B conjuntos que tienen cada una cardinalidad finita.

- Si son disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- En general,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\,.$$

  En efecto, tenemos por un lado $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (unión disjunta de conjuntos finitos), con lo cual $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$.
  Por otro lado, notamos que $B \setminus A \cup (B \cap A) = B$ (otra unión disjunta de conjuntos finitos), lo que implica que $|B| = |B \setminus A| + |B \cap A|$. Finalmente, se concluye $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Cardinalidad de la unión de tres conjuntos

Observe que

$$\begin{aligned}
|(A \cup B) \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|, \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|, \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \left(|A \cap C| + |B \cap C| - |\underbrace{A \cap C \cap B \cap C}_{= A \cap B \cap C}| \right), \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Observación: Puede probarse que si A es de cardinalidad finita, entonces $\mathcal{P}(A)$ también lo es, con $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Familia de conjuntos

Sea I un conjunto cualquiera no vacío, que llamaremos conjunto de índices. Entonces, a la colección de conjuntos $A_i \subseteq \mathcal{U}$, denotado por

$$\{A_j\}_{j \in I} := \{A_j : \quad j \in I\},$$

se le llama familia de conjuntos indexados por I.

Observaciones

- Una familia $\{A_j\}_{j \in I}$ puede tener elementos iguales, con lo cual no necesariamente es un conjunto.
- Si I es un conjunto finito, con $|I| = m \in \mathbb{N}$, entonces se dice que $\{A_j\}_{j \in I}$ es una familia finita de conjuntos. En estos casos, se suele denotar la familia por $\{A_j\}_{j=1}^{m}$.
- Si I no es conjunto finito, entonces se dice que $\{A_j\}_{j \in I}$ es una familia infinita de conjuntos.
- Cuando I es conjunto numerable ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, por ejemplo), se dice que $\{A_j\}_{j \in I}$ es una familia numerable de conjuntos. Si $I := \mathbb{N}$, se suele denotar la familia como $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo

Sea $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, A_j \,:=\, \left\{ m \in \mathbb{N} \,:\quad m \,=\, \frac{j}{k}\,,\ \text{para algún}\quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Luego, los primeros elementos de esta familia son:

$$A_1 \,=\, \{1\}\,,\quad A_2 \,=\, \{1,2\}\,,\quad A_3 \,=\, \{1,3\}\,,\quad A_4 \,=\{1,2,4\}\,,\ldots$$

Interesa:

- Si acaso es posible caracterizar cualquier conjunto A_j de manera más clara (precisa).
- Saber si existen al menos dos elementos de esta familia, con indexación distinta, que sean iguales.
- Saber si tiene sentido definir la unión (intersección) de todos los conjuntos de esta familia.
- En tal caso, ¿a qué será igual la unión de todos los conjuntos de esta familia? ¿La intersección?

Operaciones de familias de conjuntos $\{A_j\}_{j\in I}$

Unión de una familia de conjuntos:

$$\bigcup_{j\in I} A_j := \{x \in \mathcal{U} : (\exists j \in I)(x \in A_j)\} .$$

Intersección de una familia de conjuntos:

$$\bigcap_{j\in I} A_j := \{x \in \mathcal{U} : (\forall j \in I)(x \in A_j)\} .$$

Observaciones

- Si $I := \{1, ..., m\}$, la unión y la intersección definidas arriba, se puede denotar por $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, respectivamente.
- SI $I := \mathbb{N}$, se suele denotar por $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, respectivamente.

Ejemplos

1. Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia infinita numerable de conjuntos, definida por:

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \,:\, A_i \,:=\, \left\{ m \in \mathbb{N} \,: \quad m \,=\, \frac{i}{k}\,, \text{ para algún } \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Determine su unión y su intersección.

2. Sea la familia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, infinita numerable de conjuntos, definida por $B_1 \,:=\, \{1\}$ y

$$\forall\, i \in \mathbb{N}\,, i \geq 2 \,:\, B_i \,:=\, \{ m \in \mathbb{N} \backslash \{1\} \,:\, m \text{ es el menor factor de } i \}\,.$$

   Determine su unión y su intersección.

Propiedades de operaciones con familias de conjuntos

Sea $\{A_j\}_{j\in I}$ una familia de conjuntos en $\mathcal{U}$, y sea $B \subseteq \mathcal{U}$. Se verifica:

$$(1)\; B \bigcap \left(\bigcup_{j\in I} A_i \right) = \bigcup_{j\in I} (B \cap A_j)\,. \quad (2)\; B \bigcup \left(\bigcap_{j\in I} A_j \right) = \bigcap_{j\in I} (B \cup A_j)\,.$$

$$(3)\; \left(\bigcup_{j\in I} A_j \right)^c = \bigcap_{j\in I} A_j^c\,. \quad (4)\; \left(\bigcap_{j\in I} A_j \right)^c = \bigcup_{j\in I} A_j^c\,.$$

Observaciones

- Tener presente que las propiedades que son válidas para una cantidad finita de elementos, no necesariamente son válidas para una cantidad infinita de ellos.
- Ejemplo 1: Sabemos que $(\forall\, m \in \mathbb{N})\ \left(\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2} \in \mathbb{R} \right)$, pero $\sum_{j=1}^{\infty} j \notin \mathbb{R}$.
- Ejemplo 2: Es cierto que $(\forall\, m \in \mathbb{N})\ \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \in \mathbb{R} \right)$, pero $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \notin \mathbb{R}$ pues diverge.

Operaciones de familias de conjuntos $\{A_j\}_{j\in I}$

Producto cartesiano generalizado

$$\prod_{j\in I} A_j := \{(x_j)_{j\in I} : (\forall j \in I)(x_j \in A_j)\} .$$

Observaciones

- Cuando $I := \{1, ..., m\}$ (conjunto finito), denotamos

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m := \{(x_1, ..., x_m) : \forall\, i = 1, ..., m : x_i \in A_i\} .$$

- Si además $(\forall\, i \in \{1, ..., m\})(A_i = A)$, entonces

$$\prod_{i=1}^{m} A_i := \prod_{i=1}^{m} A := A^m := \{(x_1, ..., x_m) : (\forall\, i \in \{1, ..., m\})(x_i \in A)\} .$$

Es el caso de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^m$, por ejemplo.

Partición de conjuntos

Sea X un conjunto no vacío, y $\{A_j\}_{j\in I}$ una familia de conjuntos en X, es decir, $(\forall\, j \in I)(A_j \subseteq X)$. Diremos que $\{A_j\}_{j\in I}$ es una partición de X si se verifica:

$$(1)\,\forall\, j \in I \;:\; A_j \neq \emptyset\,,$$
$$(2)\,\forall\, j, k \in I\,,\, j \neq k \;:\; A_j \cap A_k = \emptyset\,,$$
$$(3)\,\bigcup_{j\in I} A_j = X\,.$$

Ejemplos

- $\{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.
- $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, donde $(\forall\, m \in \mathbb{N})(A_m := \{m\})$, define una partición de $\mathbb{N}$.

Propiedad

- Si $\{A_j\}_{j\in I}$ es una partición de X, entonces $(\forall\, z \in X)(\exists\,!\, j \in I)(z \in A_j)$.