UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**TAREA VOLUNTARIA ALGEBRA III 525201-1 (COMENTARIOS)**

**ATENCIÓN:** favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. El puntaje obtenido (MÁXIMO **2 puntos**), será acumulado a la nota del TEST 2 pasado con un tope de 7.0 en la suma total. Favor enviar su desarrollo en formato pdf, indicando su nombre, matrícula y firma en cada hoja de desarrollo.

**Problema 1.** Considere el conjunto $W := \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) \ \mid \ n(T) > 2\}$. Muestre por qué $W$ no puede ser un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$. **(1 punto)**

**Desarrollo:** Se puede verificar que la TRANSFORMACIÓN NULA es un elemento de $W$. Además, la MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR es cerrada en $W$. Mostraremos que la ADICIÓN EN $W$ NO ES CERRADA EN $W$. Para esto, consideremos la base canónica $B := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ de $\mathbb{R}^5$, y la base canónica $\tilde{B} := \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$. Ahora, sean $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$, tales que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(S) &= \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle\,,\ S(e_4) = \tilde{e}_1\,,\ S(e_5) = \tilde{e}_2\,, \\ \mathrm{Ker}(T) &= \langle\{e_3, e_4, e_5\}\rangle\,,\ T(e_1) = \tilde{e}_3\,,\ T(e_2) = \tilde{e}_4\,. \end{aligned}$$

Esto implica que $n(S) = 3 > 2$ y $n(T) = 3 > 2$, lo cual establece que $S, T \in W$. Por otro lado, $S + T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ es tal que

$$\begin{aligned} &(S+T)(e_1) = \tilde{e}_3\,,\ (S+T)(e_2) = \tilde{e}_4\,,\ (S+T)(e_3) = \theta \\ &(S+T)(e_4) = \tilde{e}_1\,,\ (S+T)(e_5) = \tilde{e}_2\,. \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite inferir que $\mathrm{Im}(S+T) = \langle\{\tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}\rangle = \mathbb{R}^4$ (¿POR QUÉ?), con lo cual se deduce que $n(S+T) = 1$ y entonces $S + T \notin W$. De esta manera, se deduce que $W$ no es subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

**Problema 2.** Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de DIMENSIÓN INFINITA. Denotamos por $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la TRANSFORMACIÓN IDENTIDAD. Considere $S \in \mathcal{L}(V)$ no nula, tal que $\exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, S^p = \Theta \in \mathcal{L}(V)$ (APLICACIÓN / TRANSFORMACIÓN NULA). En este caso se dice que $S$ es una APLICACIÓN NILPOTENTE. Ahora, sea $m$ es el menor natural tal que $S^m = \Theta$ (a $m$ se le llama el ORDEN DE NILPOTENCIA DE $S$). **Demuestre** que $\tilde{I} - S \in \mathcal{L}(V)$ es un automorfismo. Además, **determine explícitamente** $(\tilde{I} - S)^{-1}$. **(1 punto)**

**Desarrollo:** Como $\tilde{I}, S \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\tilde{I} - S \in \mathcal{L}(V)$. Además, como $S \neq \Theta$, se tiene que $m \geq 2$.

- $\tilde{I} - S$ ES MONOMORFISMO: Sea $z \in \mathrm{Ker}(\tilde{I} - S)$. Esto nos dice que $S(z) = \tilde{I}(z) = z$. Tenemos dos casos posibles: $z = \theta \vee z \neq \theta$.
  **Considerando el caso:** $z \neq \theta$, resulta que $(1, z)$ es un autopar de $S$. Por propiedad discutida en clases, se tiene que $\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, (1, z)$ es un autopar de $S^k$. En particular, para $k = m$ se tiene: $\theta = S^m(z) = z$, lo cual es contradictorio.
  **De esta forma, se deduce que** $z = \theta$, con lo cual se establece que $\mathrm{Ker}(\tilde{I} - S) \subseteq \{\theta\}$. Como $\{\theta\} \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{I} - S)$ SIEMPRE, se concluye que $\mathrm{Ker}(\tilde{I} - S) = \{\theta\}$, es decir $\tilde{I} - S$ es un MONOMORFISMO.

- $\tilde{I} - S$ ES EPIMORFISMO: Sea $w \in V$. fijo pero arbitrario. Mostraremos que $\exists\, z \in V$ tal que $(\tilde{I} - S)(z) = w$. Puede probarse (¡HACERLO!) que $\forall\, k \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, S^k(z) - S^{k+1}(z) = S^k(w)$. Luego, resulta

  $$\sum_{k=0}^{m-1} \left(S^k(z) - S^{k+1}(z)\right) = \sum_{k=0}^{m-1} S^k(w)\,,$$

  y una vez aplicada la PROPIEDAD TELESCÓPICA, se tiene $z - S^m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} S^k(w)$, de donde se deduce que $z = \sum_{k=0}^{m-1} S^k(w) \in V$ es tal que $(\tilde{I} - S)(z) = w$. De esta forma, se establece que

$V \subseteq \operatorname{Im}(\tilde{I} - S)$. En vista que SIEMPRE $\operatorname{Im}(\tilde{I} - S) \subseteq V$, se infiere que $\operatorname{Im}(\tilde{I} - S) = V$, lo cual significa que $\tilde{I} - S$ es un EPIMORFISMO.

- CONCLUSIÓN: $\tilde{I} - S$ es un AUTOMORFISMO. Esto implica que $\tilde{I} - S$ admite inversa, la cual es también una transformación lineal.

- Lo discutido en la prueba del EPIMORFISMO de $\tilde{I} - S$ , permite inducir que para

$$(\tilde{I} - S)^{-1}(w) = z \quad \Leftrightarrow \quad w = (\tilde{I} - S)(z)\,,$$

de donde se deduce que $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} S^k(w) \in V$. De esta forma, se deduce que

$\forall\, w \in V \,:\, (\tilde{I} - S)^{-1}(w) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} S^k(w)$, es decir $(\tilde{I} - S)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} S^k$.

---

**Fecha de entrega (al correo udec del profesor): 12.06.2021, 12:30 horas**

---

RBP/rbp 08.06.2021