Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº1: Lógica y Conjuntos
Clase N°2 - 07/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Conectivos Lógicos

Operador Disyunción Exclusiva

Se llama disyunción exclusiva o excluyente de las proposiciones p y q a la nueva proposición "o p o q" o "p o bien q". Denotaremos la disyunción exclusiva entre p y q como $p \veebar q$.

Conectivos Lógicos

Operador Condicional

Se llama condicional de las proposiciones p y q a la nueva proposición "si p, entonces q". Denotaremos la condicional entre p y q como $p \to q$.

Conectivos Lógicos

Dado lo anterior, podemos concluir la siguiente tabla de verdad del operador condicional es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos Lógicos

Operador Bicondicional

Se llama bicondicional de las proposiciones p y q a la nueva proposición " p si y sólo si q". Denotaremos la bicondicional entre p y q como $p \leftrightarrow q$.

Ejemplos:

1. Considere las siguientes proposiciones:

p: 2 es un número par	q : 3 es un número impar
$r : 5 < 7$	$s : 5 > 7$
$t : 5 = 7$	u : 2 es un número impar

   Exprese con lenguaje matemático las siguientes proposiciones:

   (a) Si dos es par, entonces tres es impar.
   (b) No es verdad que dos es par o impar.
   (c) Si no es verdad que cinco es menor que siete, entonces cinco es mayor que siete o cinco es igual que siete

2. Determine la tabla de verdad de la proposición y responda:

$$\sim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

   (a) ¿En qué caso la proposición es verdadera?
   (b) ¿Qué relación existe entre $(\sim p \vee q)$ y $(p \wedge \sim q)$?

Ejercicios

Considere verdaderas cada una de las siguientes afirmaciones:

- Pedro va al cine, o bien Lucia va al parque.
- Si Andrés está cursando A1, entonces está en primer año.
- Pedro no va a ir al cine.
- O Lucia va al parque o va al cine.
- Lucia va al cine si y sólo si Andrés no está cursando A1.

¿Andrés está en primer año?

Expresiones Lógicas

Definición

Llamaremos **expresión lógica (o fórmula proposicional)** a una expresión formada por proposiciones arbitrarias (variables) y relacionadas mediante conectivos lógicos.

Expresiones Lógicas

Definición

Una expresión lógica se dice:

Expresiones Lógicas

Definición

Una expresión lógica se dice:

1. **tautología** si resulta verdadera cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.

Expresiones Lógicas

Definición

Una expresión lógica se dice:

1. **tautología** si resulta verdadera cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.
2. **contradicción** si resulta falsa cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.

Expresiones Lógicas

Definición

Una expresión lógica se dice:

1. **tautología** si resulta verdadera cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.
2. **contradicción** si resulta falsa cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.
3. **contingencia** si no es tautología ni contradicción.

Propiedades

1. Doble negación: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2. Conmutatividad de la conjunción: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. Conmutatividad de la disyunción: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
4. Asociatividad de la conjunción: $(p \wedge q) \wedge t \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge t)$
5. Asociatividad de la disyunción: $(p \vee q) \vee t \Leftrightarrow p \vee (q \vee t)$
6. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. Leyes de De Morgan: $\begin{cases} 8.1. & \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ 8.2. & \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \end{cases}$
9. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Ejercicios

1. Demuestre sin usar tabla de verdad las siguientes propiedades.

   (a) $\sim (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

   (b) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

2. Si p y q son proposiciones cualesquiera y $\overline{\wedge}$ es un conectivo lógico definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \,\overline{\wedge}\, q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

   (a) Decida si la proposición $p \to [\sim p \,\overline{\wedge}\, (\sim p \wedge q)]$ es tautología.

   (b) ¿El conectivo $\overline{\wedge}$ cumple con las leyes de conmutatividad y asociatividad?