UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Elementos Finitos 521237

Listado N°5

1. Sea $K = [0,1]$. Recordemos que $\mathbb{P}_k(K)$ denota el espacio de polinomios de grado a lo más k definidos sobre K. Mostrar que, para cada uno de los siguientes casos, $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

   a) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^2$, donde, para $p \in \mathcal{P}$, $N_1(p) = p(0)$ y $N_2(p) = p(1)$.

   b) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_2(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^3$, donde, para $p \in \mathcal{P}$, $N_1(p) = p(0)$, $N_2(p) = p(1/2)$ y $N_3(p) = p(1)$.

   c) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_k(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^{k+1}$, donde, para $p \in \mathcal{P}$, $N_i(p) = p((i-1)/k)$.

   d) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_3(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^4$, donde, para $p \in \mathcal{P}$, $N_1(p) = p(0)$, $N_2(p) = p(1)$, $N_3(p) = p'(0)$ y $N_4(p) = p'(1)$.

   Observación: Los elementos finitos de los problemas 1*a*) a 1*c*) se conocen como Elementos Finitos de Lagrange en una dimensión.

2. Para los casos *a*), *b*) y *d*) del Problema 1, construya una base nodal $\{\varphi\}_j$ de $\mathcal{P}$, es decir, $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$.

3. Sean $K \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo de vértices $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3}$. Además, denotemos por $\mathbf{v_4}$, $\mathbf{v_5}$ y $\mathbf{v_6}$ los puntos medios de cada lado Mostrar que, para cada uno de los siguientes casos, $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

   a) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^3$, donde $N_i(p) = p(\mathbf{v_i})$ para $p \in \mathcal{P}$.

   b) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_2(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^6$, donde $N_i(p) = p(\mathbf{v_i})$ para $p \in \mathcal{P}$.

   c) $\mathcal{P} = \mathbb{P}_3(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^{10}$, donde $N_i(p) = p(\mathbf{v_i})$ para $p \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{v_{10}}$ es el baricentro del triángulo K.

4. Sean $K \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo cuyos lados tienen puntos medios $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3}$. Considere $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1(K)$, $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i=1}^3$, donde $N_i(p) = p(\mathbf{v_i})$ para $p \in \mathcal{P}$. Mostrar que $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

5. *Elemento de Hermite cúbico 2D.*

   Considere el *elemento de Hemite cúbico* mostrado en la figura. Aquí $\mathcal{P} = \mathbb{P}_3$, $\mathcal{N} = \{N_j\}_{j=1}^{10}$ y los N_i's están dados por Figura 1. Mostrar que $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

6. Considere el *Elemento de Argyris* mostrado en la Figura 2. Aquí $\mathcal{P} = \mathbb{P}_5$, $\mathcal{N} = \{N_1, ..., N_{21}\}$ y los N_i's están dados por la figura. Mostrar que $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

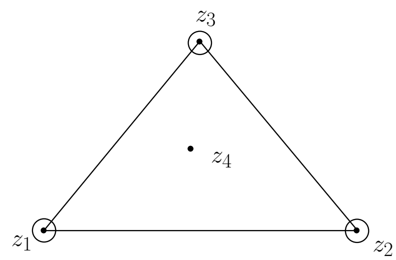

Figura 1: $\bullet$ denota la evaluación de la función en z_1, z_2, z_3 y z_4; $\bigcirc$ denota la evaluación del gradiente en z_1, z_2 y z_3.

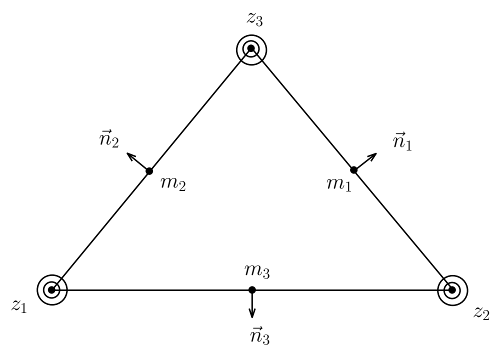

Figura 2: $\bullet$ denota la evaluación de la función en el vértice; $\circ$ denota la evaluación del gradiente, $\bigcirc$ denota la evaluación de las tres segundas derivadas y la flecha denota la evaluación de la derivada normal en los puntos medios.

MSP/msp Concepción 9 de mayo de 2024.