UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 3 TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO I (525041-1)
(Principio de Inducción Matemática. Sumatorias. Sucesiones.)

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Demuestre aplicando Principio de Inducción Matemática:

   $(a)\, \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, n^3 + 2\,n$ es divisible por $3\,.$ $\quad (b)\, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, 3^n > 1 + 2n\,.$ $\quad (c)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \displaystyle\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2}\,.$

2. Considere la sucesión de números reales $\{a_m \,|\, m \in \mathbb{N}\}$, tales que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, y $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\} \,:\, a_m = \dfrac{a_{m-1} + a_{m-2}}{2}$. Demostrar $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_m = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{(-1)^m}{2^{m-1}}$.

3. Considere la sucesión de números reales $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tales que $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, x_m := \begin{cases} 2 & \text{si } m = 1 \\ \sqrt{2x_{m-1}} & \text{si } m \geq 2\,. \end{cases}$

   Demuestre que $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, 0 \,<\, x_m \,\leq\, 2$.

4. Demostrar $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+ \,:\, m(m+1)(m+2)(m+3) + 1$ es un número cuadrado perfecto.

5. Considere $\mathcal{U}$ un conjunto universo cualquiera de cardinalidad no finita.
   Demostrar $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, B \subseteq \mathcal{U} \,:\, |B| = m \,\rightarrow\, |\mathcal{P}(B)| = 2^m$.

6. Demostrar $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$:

   (a) aplicando el Principio de Inducción Matemática.

   (b) aplicando la Propiedad Telescópica. Luego, aplique esta propiedad para deducir el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

7. Determinar el valor de las siguientes sumatorias, en términos de $m \in \mathbb{N}$: $(a)\, \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}\,,$ $\quad (b)\, \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\, 2^{k-1}$.

8. Demuestre que $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (4k-2) = \frac{(2m)!}{m!}$.

9. Demostrar: $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, \forall\, \{x_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^+ \,:$ Si $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} x_j = 1\,,$ entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_j \geq m$.

   Luego, aplique apropiadamente este resultado para establecer (de forma elegante), las relaciones entre las medias aritmética, geométrica y armónica de una cantidad finita de números positivos. Es decir, $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, \forall\, \{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^+ \,:\, \dfrac{m}{a_1^{-1} + \cdots + a_m^{-1}} \,\leq\, \sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \,\leq\, \dfrac{a_1 + \cdots + a_m}{m}$.

   Hint: Primero establecer la segunda desigualdad.

10. Demostrar, aplicando propiedades de números reales solamente:
    $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ \,:\, a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejercicios propuestos:

1. Aplicar el Principio de Inducción Matemática para demostrar

$$(a)\ \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, 15 + 3 \cdot 4^m = \overset{\circ}{9}\ . \quad (b)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \cap (10, \infty) \,:\, m - 2 < \frac{m^2 - m}{12}\,.$$
$$(c)\ \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, 3^{2m+2} + 2^{6m+1} = \overset{\circ}{11}\ . \quad (d)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \cap (3, \infty) \,:\, 3^m > m^3\,.$$
$$(e)\ \forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{m}. \quad (f)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{m-1} \frac{m(m+1)}{2}\,.$$
$$(g)\ \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{m}\,. \quad (h)\, \forall\, x \in (-1, +\infty) \,:\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, (1+x)^m \ge 1 + mx\,.$$

2. Demostrar: $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ : \forall\, m \in \mathbb{N} : \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\cdots + \sqrt{a + \sqrt{a}}}}}}}_{m \text{ radicales}} < \dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$

3. Sea la sucesión de *Fibonacci* (1170-1250), $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, tal que $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_m := \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \{1, 2\} \\ a_{m-1} + a_{m-2} & \text{si } m \ge 3 \end{cases}.$

   Demostrar que

   $(a)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_{3m}$ es par. $\quad (b)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_{4m}$ es múltiplo de 3. $\quad (c)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_{5m}$ es múltiplo de 5.

$$(d)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, a_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right)\,. \quad (e)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \sum_{k=1}^{m} a_k = a_{m+2} - 1\,.$$
$$(f)\, \forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, a_{m-1} a_{m+1} = a_m^2 + (-1)^m\,. \quad (g)\, \forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, a_{2m} = a_m (a_{m-1} + a_{m+1})\,.$$

4. Considere la sucesión de *números de Fermat*, $\{F_m\}_{m \in \mathbb{Z}_0^+}$, tales que $\forall\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, F_m := 2^{2^m} + 1$.

   Demostrar: $(a)\, \forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \displaystyle\prod_{k=0}^{m-1} F_k = F_m - 2\,.$ $\quad (b)\, \forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, F_m$ termina en 7.

5. Demostrar: $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, x \in [m, 2m] \,:\, x$ es una potencia de exponente no negativo de 2.

6. Demostrar $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall\, m \in \mathbb{N} : \forall\, \{a_k\}_{k=1}^m, \{b_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{R} \,:\, 2\alpha\,\beta \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \le \beta^2 \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + \alpha^2 \sum_{k=1}^{m} b_k^2.$

   Luego, aplique esta propiedad para establecer la conocida DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, \{x_k\}_{k=1}^m, \{y_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{R} \,:\, \left(\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2 \right)\,.$$

RBP/rbp 07.05.2024