525043
Taller de Razonamiento Matemático II

Nicolás Sanhueza-Matamala
nsanhuezam@udec.cl
ICM, Universidad de Concepción, Chile

Objetivos de hoy

- Recordar nociones clase pasada (combinatoria)
- Ver más conceptos de combinatoria
- Problemas cortos

Recuerdo

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos? $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos? $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

Dados m y n naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos? $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

Dados m y n naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos? n^m

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos? $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

Dados m y n naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos? n^m

Dado $m \leq n$ naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, sin repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos? $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

Dados m y n naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos? n^m

Dado $m \leq n$ naturales, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, sin repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Problema 4

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden armar con los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, si es que la suma de las cifras es par?

Una *permutación* de n elementos es una secuencia ordenada de estos elementos, sin repetir.

Por ejemplo, $(4, 2, 3, 1)$ es una permutación de $\{1, 2, 3, 4\}$. También usaremos la notación 4231.

Hay $n!$ permutaciones de un conjunto de n elementos.

Problema

¿En cuántas permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ hay tal que los múltiplos de 3 aparezcan consecutivamente?

Supongamos que $m \leq n$ son naturales. Dados n objetos, una **combinación de m elementos** es cualquier elección no ordenada de m elementos de los n elementos disponibles.

Supongamos que $m \leq n$ son naturales. Dados n objetos, una **combinación de m elementos** es cualquier elección no ordenada de m elementos de los n elementos disponibles.

E.g. Si tenemos los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$, ¿cuántas combinaciones de 2 elementos hay?

Supongamos que $m \leq n$ son naturales. Dados n objetos, una **combinación de m elementos** es cualquier elección no ordenada de m elementos de los n elementos disponibles.

E.g. Si tenemos los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$, ¿cuántas combinaciones de 2 elementos hay?

Hay 6; dadas por 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Supongamos que $m \leq n$ son naturales. Dados n objetos, una **combinación de m elementos** es cualquier elección no ordenada de m elementos de los n elementos disponibles.

E.g. Si tenemos los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$, ¿cuántas combinaciones de 2 elementos hay?

Hay 6; dadas por 12, 13, 14, 23, 24, 34.

No distinguimos entre 13 y 31 (por ejemplo).

Teorema.

Sea V_k^n la cantidad de elecciones ordenadas de k elementos en un conjunto de n elementos.

Teorema.

Sea V_k^n la cantidad de elecciones ordenadas de k elementos en un conjunto de n elementos.

Sea C_k^n la cantidad de elecciones no ordenadas de k elementos en un conjunto de n elementos.

Teorema.

Sea V_k^n la cantidad de elecciones ordenadas de k elementos en un conjunto de n elementos.

Sea C_k^n la cantidad de elecciones no ordenadas de k elementos en un conjunto de n elementos.

Entonces

$$V_k^n = k!C_k^n.$$

Demostración. Vamos a contar la cantidad V_k^n de elecciones ordenadas de k elementos usando el principio de multiplicación.

Demostración. Vamos a contar la cantidad V_k^n de elecciones ordenadas de k elementos usando el principio de multiplicación.

Primero contamos la cantidad de formas de elegir k elementos no ordenados. Eso es C_k^n, por definición.

Demostración. Vamos a contar la cantidad V_k^n de elecciones ordenadas de k elementos usando el principio de multiplicación.

Primero contamos la cantidad de formas de elegir k elementos no ordenados. Eso es C_k^n, por definición.

Luego contamos la cantidad de formas de elegir un orden para esos k elementos. Eso es $k!$, como vimos la semana pasada.

Demostración. Vamos a contar la cantidad V_k^n de elecciones ordenadas de k elementos usando el principio de multiplicación.

Primero contamos la cantidad de formas de elegir k elementos no ordenados. Eso es C_k^n, por definición.

Luego contamos la cantidad de formas de elegir un orden para esos k elementos. Eso es $k!$, como vimos la semana pasada.

Entonces,

$$V_k^n = k!C_k^n.$$

□

Nosotros ya sabíamos que

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nosotros ya sabíamos que

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Entonces, usando que $V_k^n = k! C_k^n$, tenemos como corolario que

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nosotros ya sabíamos que

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Entonces, usando que $V_k^n = k! C_k^n$, tenemos como corolario que

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A este número le llamaremos el **coeficiente binomial** y lo denotaremos $\binom{n}{k}$.

Problema

Tenemos 10 puntos en el plano, y no hay tres de ellos que estén en una línea recta. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar, usando estos puntos como vértices de los triángulos?

Problema

Sean r, m y n números naturales tales que $r \leq \text{mín}\{m, n\}$.

Un grupo de n hombres y m mujeres deben formar seleccionar sus jugadores para un torneo de tenis mixto, y para ello deben elegir r parejas mixtas. ¿De cuántas formas se puede realizar esto?

Problema

Una brigada de 13 socorristas decide separarse en cuatro grupos: uno de 4 personas, y otros tres de 3 miembros cada uno. ¿De cuántas formas se puede hacer, si los dos coordinadores de la brigada deben estar en distintos grupos?