UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de Evaluación 2. Análisis Real II (525302)

1. Suponga que μ es una medida positiva sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y $m \in \mathbb{N}$. Asuma que $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ son funciones medibles no negativas. Demuestre que
$$\left(\int_\Omega f\, g\, d\mu\right)^m \leq \left(\int_\Omega f\, d\mu\right)^{m-1} \int_\Omega f\, g^m d\mu.$$

Sugerencia: Utilice la desigualdad de Hölder.

Solución:

La desigualdad que deseamos demostrar es equivalente a
$$\int_\Omega f\, g\, d\mu \leq \left(\int_\Omega f\, d\mu\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega f\, g^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Lo que nos motiva a elegir $\frac{1}{p} = \frac{m-1}{m}$. Por lo tanto, $1/p + 1/m = 1$, $p = \frac{m}{m-1}$. Note que
$$\left(\int_\Omega f\, d\mu\right)^{\frac{m-1}{m}} = \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{m-1}{m}}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
y
$$\left(\int_\Omega f\, g^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{1}{m}}\, g\right)^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos
$$\int_\Omega f^{\frac{m-1}{m}} \left(f^{\frac{1}{m}}\, g\right) d\mu \leq \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{m-1}{m}}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{1}{m}}\, g\right)^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Ya que
$$\int_\Omega f^{\frac{m-1}{m}} \left(f^{\frac{1}{m}}\, g\right) d\mu = \int_\Omega f\, g\, d\mu,$$

sustituyendo $p=\frac{m}{m-1}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,g\,d\mu &\leq \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{m-1}{m}}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(f^{\frac{1}{m}}\,g\right)^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \left(\int_\Omega f\,d\mu\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega f\,g^m d\mu\right)^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\int_\Omega f\,g\,d\mu\right)^m \leq \left(\int_\Omega f\,d\mu\right)^{m-1} \int_\Omega f\,g^m d\mu.$$

2. Sea μ es una medida positiva sobre el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$ tal que $\mu(\Omega)<+\infty$. Demuestre que
$$\left\{[f]\in\mathcal{L}^4(\mu):\int_\Omega f\,d\mu=1\right\}$$
es un conjunto cerrado de $\mathcal{L}^4(\mu)$.

Solución: Sea $[f]$ un punto de acumulación del conjunto

$$\mathcal{S}=\left\{[f]\in\mathcal{L}^4(\mu):\int_\Omega f\,d\mu=1\right\}$$

en $\mathcal{L}^4(\mu)$. Entonces, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n-f)^4\,d\mu=0.$$

De acuerdo a la desigualdad de Hölder tenemos

$$\int_\Omega |f_n-f|\cdot 1\,d\mu \leq \left(\int_\Omega |f_n-f|^4\,d\mu\right)^{1/4}\left(\int_\Omega 1^q d\mu\right)^{1/q},$$

donde $1/4+1/q=1$ (o sea, $q=4/3$). Por lo tanto,

$$\left|\int_\Omega (f_n-f)\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f_n-f|\,d\mu \leq \left(\int_\Omega |f_n-f|^4\,d\mu\right)^{1/4}(\mu(\Omega))^{1/q}.$$

Usando que $\mu(\Omega) < +\infty$ deducimos $\int_\Omega (f_n - f)\, d\mu \to_n 0$. Como $f_n \in \mathcal{S}$,

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = 1.$$

Por lo tanto, $[f] \in \mathcal{S}$.

3. Considere una medida positiva μ sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mu(\Omega) \in]0, +\infty[$. Suponga que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función medible que satisface

$$\int_{\Omega\times\Omega} |f(x) - f(y)|\, d(\mu\otimes\mu)(x,y) < +\infty.$$

Demuestre que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y calcule el valor de

$$\int_{\Omega\times\Omega} (f(x) - f(y))\, d(\mu\otimes\mu)(x,y).$$

Solución:

Para todo $x, y \in \Omega$ definimos

$$g(x,y) = f(x) - f(y).$$

Como $g \in L^1(\mu\otimes\mu)$, de acuerdo al teorema de Fubini $y \mapsto g(x,y)$ pertenece a $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ μ-*c.d.* (en el espacio donde se encuentra x). Ya que $\mu(\Omega) > 0$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\int_\Omega |f(x_0) - f(y)|\, d\mu(y) < +\infty.$$

Aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(y)|\, d\mu(y) &\leq \int_\Omega |f(x_0) - f(y)|\, d\mu(y) + \int_\Omega |f(x_0)|\, d\mu(y)\\ &= \int_\Omega |f(x_0) - f(y)|\, d\mu(y) + |f(x_0)|\, \mu(\Omega) < +\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

10 **puntos**

Ya que $g \in L^1(\mu \otimes \mu)$, aplicando el teorema de Fubini obtenemos

$$\int_{\Omega\times\Omega} (f(x) - f(y))\ d(\mu\otimes\mu)(x,y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} (f(x) - f(y))\, d\mu(x) \right) d\mu(y)\,.$$

Como $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} (f(x) - f(y))\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x)\, d\mu(x) - \int_{\Omega} f(y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x)\, d\mu(x) - f(y)\,\mu(\Omega) \right) d\mu(y) \\
&= \int_{\Omega} f(x)\, d\mu(x)\,\mu(\Omega) - \int_{\Omega} f(y)\, d\mu(y)\,\mu(\Omega) = 0.
\end{aligned}$$

Lo que implica

$$\int_{\Omega\times\Omega} (f(x) - f(y))\ d(\mu\otimes\mu)(x,y) = 0.$$

10 **puntos**