**Universidad de Concepción**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

**Listado 03: sucesiones, series y series de Taylor**
**Cálculo II (527150)**

1. La sucesión de *números de Lucas* se define de la forma siguiente:

$$L_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

   Determinar $L_{15}$.

2. Determinar, si existen, los límites de las siguientes sucesiones.

   (a) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

   (b) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{1+n}$

   (c) $a_n = n^3 e^{-n}$

   (d) $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$

   (e) $a_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$

   (f) $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$

   (g) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{3}(a_{n-1} + 4) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

   (h) $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 2a_{n-1} - 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

3. Considerar la función $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi x)$ y la sucesión $a_n = n \operatorname{sen}(\pi n)$. Calcular y comparar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Considerar la sucesión

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

   (a) *(Desafío)* Mostrar que $a_n > \sqrt{2}$ para todo $n$.

   (b) Usando el item anterior, justificar para cada $n$ la desigualdad

$$\frac{2}{a_n} < a_{n+1} < a_n$$

   (c) Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

   (d) Determinar los primeros cuatro valores de la sucesión.

   *(Nota histórica: hay registros de que esta sucesión se utilizaba hace 3700 años, en Babilonia, para estimar la raíz cuadrada de dos.)*

5. Considerar las dos series siguientes.

$$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\dots$$

$$\big(1+(-1)\big)+\big(1+(-1)\big)+\big(1+(-1)\big)+\big(1+(-1)\big)+\big(1+(-1)\big)+\dots$$

   (a) Determinar, si existe, el valor de cada serie.

   (b) ¿Por qué son estos valores diferentes? ¿Cuál propiedad de la suma no aplica en el estudio de las series?

6. A partir de la sucesión de potencias de 2 se construye la serie

$$S = 1+2+4+8+16+32+\dots$$

   Multiplicando esta serie por 2, se puede observar que

$$2S = 2+4+8+16+32+64+\dots = S-1$$

   de donde se puede despejar $S=-1$. ¿Cuál es el problema con este razonamiento?

7. Determinar el valor de cada una de las siguientes series.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{5^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n+1}}{3^{2n+3}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n-2^{2n-1}+2^{3n+2}}{9^n}$

8. Una persona deposita \$1.000.000 en una cuenta de ahorro que cada año aumenta el dinero ahorrado en un 5 %. Al final de cada año, esta persona retira el 10 % del dinero que haya en la cuenta. Determinar:

   (a) la ganancia después de dos años;

   (b) la ganancia después de $N \in \mathbb{N}$ años; y

   (c) la ganancia máxima que entregará esta cuenta.

9. Una pelota cae desde una altura de 15 metros sobre una superficie plana y rebota. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de su altura precedente. Determinar la distancia total recorrida por la pelota antes de quedar en reposo.

10. Determinar para cuáles valores de $t$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t+2)^n}{3^{n+1}}$$

   Para aquellos donde converja, determinar el valor de la serie.

11. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) La suma de una serie convergente con una divergente es divergente.
   (b) La suma de dos series divergentes es divergente.
   (c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = K$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = LK$.
   (d) Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.
   (e) *(Desafío)* Si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge.

12. Determinar si cada una de las siguientes series es convergente o divergente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5n^2-1}{2n^2-1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{5n^5+n^2+1}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-7n^2+1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}-2}{n\left(\sqrt{n}+1\right)}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\operatorname{sen}(n)}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi n)$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n\ln^3(n)}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 e^{-3n}}{n^3+3}$

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

   (ñ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

   (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

   (p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^3}$

   (q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

   (r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{4^{n+2}}$

   (s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

   (u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

   (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   (w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

   (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5}-1\right)^n$

   (y) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{5^n+3^n}$

   (z) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n)}{1+2^n}$

13. Considerar la función

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + 2x^7 + \dots$$

donde los coeficientes son, alternadamente, 1 y 2.

(a) Determinar para cuáles valores de $x$ esta serie es convergente.

(b) Construir una expresión explícita para $f(x)$.

14. Determinar el radio y el intervalo de convergencia de cada una de las series de potencias siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^{2n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n-5}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-x)^n}{n!6^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{2^n n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}(x+3)^n$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-6)^n}{\sqrt{n}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n}}{4^n\,(n!)^2}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n}{\ln(n)}(x-1)^n$

15. Construir una serie de Taylor para $f(x) = \dfrac{16x-17}{6x^2-11x+3}$ alrededor de $x = 0$. Indicar el intervalo de convergencia de esta serie. *(Sugerencia: utilizar la serie geométrica.)*

16. A partir de la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$, determinar las series de Taylor alrededor de $x = 0$ de las siguientes funciones:

(a) $e^{x^2}$

(b) $\dfrac{e^x - 1}{x}$

(c) $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(d) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

17. A partir de la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alrededor de $x = 0$, determinar las series de Taylor alrededor de $x = 0$ (y sus radios de convergencia) de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1}{1+x}$

(b) $\arctan(x)$

(c) $\ln(1-x)$

(d) $\ln(1-x^2)$

18. Escribir la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

y utilizarla para aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^{0{,}01} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ utilizando cuatro sumandos.

19. Escribir la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de

$$\int_0^x t^3 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$$

y utilizarla para aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^{1/2} t^3 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ utilizando cuatro sumandos.

20. Considerar la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

(a) Determinar para cuáles valores de $x$ esta serie es convergente.

(b) Verificar que en el dominio de $f$ se satisface $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

21. Considerar la función

$$f(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{x^{12}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12} + \dots$$

(a) Determinar para cuáles valores de $x$ esta serie es convergente.

(b) Verificar que en el dominio de $f$ se satisface la igualdad $f''(x) = xf(x)$.

22. El objetivo de este problema es encontrar los primeros términos de la serie de Taylor de $\tan x$ alrededor de $x = 0$.

(a) A partir de la serie de $\operatorname{sen}(x)$, obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de $\operatorname{sen}^2(x)$.

(b) A partir del item anterior y la serie geométrica, obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2(x)}$.

(c) A partir del item anterior, obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

(d) A partir del item anterior, obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de $\tan(x)$.

(e) ¿Cuál es el radio de convergencia del método realizado?

23. Se sabe que la velocidad $v$ de una ola con longitud de onda $L$ está dada por

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

donde $g$ es la aceleración de gravedad, $d$ es la profundidad del agua y $\tanh(x)$ es la función $\frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}$. Los primeros términos de su serie de Taylor alrededor de $x = 0$ son

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

(a) Escribir los primeros cuatro términos nulos de la serie de $v^2$ alrededor de $d = 0$.

(b) En aguas muy poco profundas se utiliza la aproximación $v \approx \sqrt{gd}$. Justificarla a partir del item anterior.

24. En muchas situaciones físicas no se conocen directamente las funciones a estudiar, sino que sólo algunas de sus propiedades, y a partir de ellas se busca deducir la función. Por ejemplo: considerar el movimiento $P(t)$ de un objeto (con respecto al tiempo $t$) amarrado a un resorte especial que se va haciendo más fuerte con el tiempo. Una situación de este estilo podría estar modelada por la ecuación

$$P''(t) = -4tP(t)$$

donde vemos que la aceleración es proporcional al negativo de la posición (la fuerza del resorte) multiplicada por el tiempo (porque cuando el tiempo aumenta la fuerza y la aceleración). Supongamos además que en el tiempo $t = 0$ nuestro objeto está a una distancia 1 del resorte, y está inmóvil. Estas condiciones se escriben $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$.

Estas ecuaciones son difíciles de resolver. ¡Pero se pueden aproximar! El objetivo de este problema es el siguiente: construir los cuatro primeros términos no nulos de la serie de $P(t)$ alrededor de $t = 0$.

*(Sugerencia: ya sabemos $P$ y $P'$ en $t = 0$. Usar la ecuación para obtener $P''$, y luego ir derivándola para obtener potencias más altas.)*

25. Sea $U_0$ el conjunto de todas las series de potencias alrededor de $x = 0$ con radio de convergencia positivo o infinito.

(a) Verificar que $U_0$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(b) Sea $D : U_0 \to U_0$ la función $D(f(x)) = f'(x)$, que envía cada serie de potencias a su derivada. Verificar que es una transformación lineal. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

(c) Verificar que $f(x) = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ es un vector propio de $D$. ¿Cuál es su valor propio asociado?

(d) En base al item anterior, mostrar que todo número real $\lambda$ es valor propio de $D$.