

Práctica 8

1. Calcular los límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})$

Notar que tenemos una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$. Luego, el desarrollo es:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}) \cdot \frac{(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})}{(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - (x^4 + 7x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2 + \sqrt{x^4(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2 + x^2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{-7 - 0}{1 + \sqrt{1+0+0}} = \frac{-7}{2} // \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3|x| + 1}{x|x| - 3x}$

Como $x \rightarrow 0^+$, entonces $x > 0$. Luego $|x| = x$, y el límite queda como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x(x - 3)}$$

Ahora, cerca del cero por la derecha, se cumple que $3x + 1 > 0$, $x > 0$, $x - 3 < 0$, por lo que $x(x - 3)$ tiende a 0 negativamente, y se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x(x - 3)} = -\infty //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x(x+2)} = +\infty \quad \text{porque si } x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^2 - 1 < 0, x(x+2) < 0 \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x(x+2)} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x(x-2)} = -\infty$$

Por lo tanto, $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ son asintotas verticales de f

• Asintotas horizontales: Hacemos tender x a $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

Luego, la única asintota horizontal es $y = 1$

Notar que no pueden haber asintotas oblicuas, pues para esto, el límite con x tendiendo a algún infinito, debería haber dado infinito, pero ambos dieron 1

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 1}{2x^3 + 2x}, & x < 0 \\ \frac{x^{3/2} + 1}{\sqrt{x+1}}, & x > 0 \end{cases}$$

• Asintotas verticales: Notar que $\frac{2x^2 + 1}{2x^3 + 2x}$ se indetermina sólo en $x = 0$ que **No está** en su dominio de definición ($x < 0$), pero si se puede hacer tender x a 0 por lo izquierdo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 1}{2x(x^2 + 1)} = -\infty$$

Por lo tanto, $x = 0$ sí es uno asintoto vertical de $g(x)$

luego, $\frac{x^{3/2} + 1}{\sqrt{x+1}}$ se indetermina en $x = -1$, pero esto no está en su dominio de definición, y tampoco se puede hacer tender x a -1 manteniendo esta definición de $f(x)$.

Por lo tanto, $x=0$ es el único asintoto vertical

• Asintotos horizontales: Hacemos tender x a $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x + \frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}{x^3(2 + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{x(2 + \frac{2}{x^2})} = 0$$

por lo tanto, $y=0$ es un asintoto horizontal

• Asintotos oblicuos: La única posibilidad es con $x \rightarrow +\infty$, pues $x \rightarrow -\infty$ da una asintoto horizontal.

La asintoto oblicuo es un recto de ecuación

$$y = mx + n, \text{ donde } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$$

Calculamos m primero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} (1 + \frac{1}{x^{3/2}})}{x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} (1 + \frac{1}{x^{3/2}})}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{3/2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1 \end{aligned}$$

Ahora calculamos n :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 1}{\sqrt{x+1}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 1 - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{3/2} + 1) - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{(x^{3/2} + 1) + x\sqrt{x+1}}{(x^{3/2} + 1) + x\sqrt{x+1}} \quad * \text{suma por su diferencia} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 2x^{3/2} + 1 - x^2 - x^2}{\sqrt{x+1}(x^{3/2} + 1 + x\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 1)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(1 + \frac{1}{x^{3/2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}(1 + \frac{1}{x^{3/2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \frac{-1}{1 \cdot (1+1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene la asíntota oblicua
 $y = x - \frac{1}{2}$

3. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de modo que la recta
 $y = 3x + 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica
de

$$f(x) = \frac{6x^2 - 1}{2x + a}$$

Queremos que se cumplan las igualdades

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 3x = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 1}{2x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(6 - \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{a}{x})} = 3$$

este límite no depende del valor de a

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 1 - 6x^2 - 3ax}{2x + a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 3ax}{2x + a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 3ax}{2x + a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-\frac{1}{x} - 3a)}{x(2 + \frac{a}{x})} = -\frac{3}{2}a$$

$$\text{queremos } -\frac{3}{2}a = 2 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$