

Tema : Probabilidades limitas
en CMC.

- 1 -

Reaso:

$P_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(X_t=j \mid X_0=i)$: función de probabilidad de transición.

$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$: probab límite.

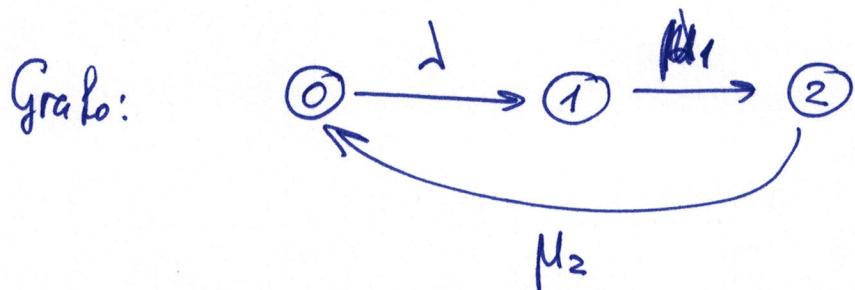
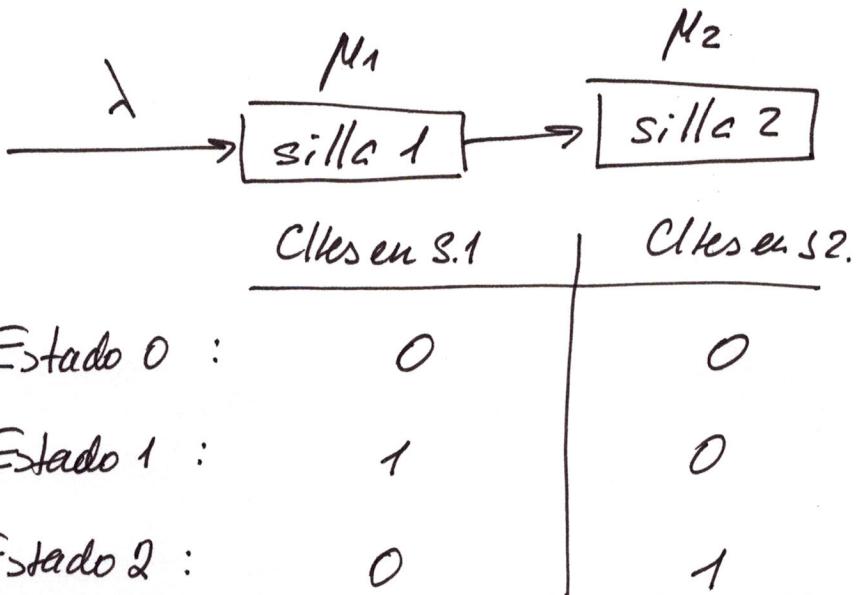
Forman solución al sistema de ec. :

$$\begin{cases} \nu_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k + \gamma_j & (*) \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

donde ν_j es la tasa con la cual el proceso deja el estado j , y $\gamma_j = \nu_j - \sum_{k \neq j} q_{kj}$,
 q_{ij} es la tasa instantánea de transición (=tasa de salto de i a j).

Solución del ej. Listado 5.

1) X_t : númer. de clientes (teniendo en cuenta en cuál silla esté el cte.).



$$P_{01} = P_{12} = P_{20} = 1$$

Las tasas de saltos: $v_0 = \lambda = q_{01}$

$$v_1 = \mu_1 = q_{12}$$

$$v_2 = \mu_2 = q_{20}$$

El "resto" son 0.

2) No es un proceso de nacimiento y muerte, ya que el proceso puede dejar el estado 2 para ir al estado 0 directamente.

Por lo tanto, no podemos ocupar las fórmulas obtenidas para los procesos de nacimiento y muerte y debemos calcular las probab. límites ocupando su definición.

De (*) tenemos que :

$$\text{Estado } 0 : \quad \nu_0 \mathcal{S}_0 = q_{20} \mathcal{S}_2$$

$$\text{Estado } 1 : \quad \nu_1 \mathcal{S}_1 = q_{01} \mathcal{S}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{Estado } 2 : \quad \nu_2 \mathcal{S}_2 = q_{12} \mathcal{S}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \mathcal{S}_0 = \mu_2 \mathcal{S}_2 \\ \mu_1 \mathcal{S}_1 = \lambda \mathcal{S}_0 \\ \nu_2 \mathcal{S}_2 = \mu_1 \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = 1 \end{array} \right.$$

Debemos resolver este sistema con respecto a las incógnitas \mathcal{S}_0 , \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 .

$$(\star\star) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \mathcal{I}_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \mathcal{I}_0 = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

\Rightarrow La respuesta a la pregunta 3 será :

La proporción de clientes potenciales que entran al establecimiento a largo plazo es igual a $\mathcal{I}_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$.

- 4) La tasa promedio de entrada o
la tasa efectiva de entrada será

$$\lambda \cdot \mathbb{E}I_0 = \lambda \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}.$$

- 5) El numero promedio de clientes dentro
del negocio, a largo plazo.

↳ sea en la silla 1 sea en la silla 2

$$\Rightarrow \mathbb{E} [\text{num. de personas en el sistema}] =$$

$$= 1 \cdot \mathbb{E}I_1 + 1 \cdot \mathbb{E}I_2 = \mathbb{E}I_1 + \mathbb{E}I_2 = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}.$$