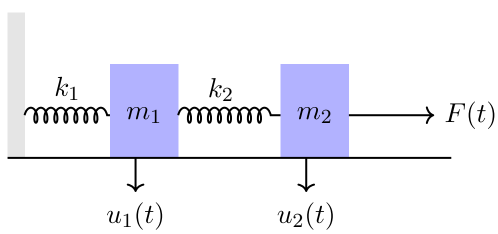
Contents

1 Introducción

En el capítulo anterior aprendimos a resolver algunas ecuaciones diferenciales lineales de alto orden y estudiamos aplicaciones en sistemas mecánicos. En general, las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen al estudiar **sistemas dinámicos**, describiendo las tasas de cambio de las variables de interés a medida que variamos el tiempo. En este sentido, es natural que en ciertas aplicaciones estemos interesados en la descripción en tiempo de varias componentes del sistema (y no una única variable dependiente) en función de la variable tiempo t.

Ejemplo 1.1. *Imaginemos que tenemos dos objetos, de masa m_1 y m_2, atados a dos resortes con constantes k_1 y k_2, respectivamente. Si el segundo resorte está atado al primer objeto y se ejerce una fuerza $F(t)$ sobre el segundo objeto, se espera que haya interacción entre ambos sistemas masa-resorte.*



Denotamos por $u_i(t)$ el desplazamiento (desde su posición de equilibrio estático) del objeto de masa m_i, con $i = 1, 2$. Luego, los dos resortes ni son estirados ni son comprimidos cuando $u_1 = u_2 = 0$. Entonces, si el primer objeto tiene un desplazamiento de $u_1(t)$ unidades, el segundo tendrá un desplazamiento de $u_2(t) - u_1(t)$ unidades. Además, sobre el primer resorte tenemos la fuerza de ambos resortes, mientras que sobre el segundo resorte actúa la fuerza asociada al primer resorte y F.

Aplicando entonces la segunda ley de Newton nos queda que

$$\begin{cases} m_1 u_1''(t) & = -k_1 u_1(t) + k_2(u_2(t) - u_1(t)) \\ m_2 u_2''(t) & = -k_2(u_2(t) - u_1(t)) + F(t) \end{cases}$$

lo que define un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias**.

Estamos entonces interesados en estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales. Acá hacemos nuevamente la distinción respecto al orden de las ecuaciones. Por un lado tenemos los sistemas de ecuaciones de primer orden, y por otro lado tenemos sistemas de ecuaciones de alto orden. En el ejemplo anterior, el sistema de ecuaciones es de segundo orden.

Ahora bien, cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden. En efecto, supongamos que tenemos un sistema simple de alto orden:

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1}$$

con F alguna función que relaciona las variables dependientes con la variable independiente.

Si definimos las variables

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad \ldots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t),$$

tenemos que

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_2'(t) = x_3(t), \quad \ldots, x_{n-1}'(t) = x_n(t), \quad x_n'(t) = x^{(n)}(t).$$

Así, utilizando la ecuación (1) tenemos que

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x_2(t) \\ x_2'(t) & = x_3(t) \\ & \vdots \\ x_{n-1}'(t) & = x_n(t) \\ x_n'(t) & = F(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

Entonces, bajamos el orden del sistema (desde n hasta 1), pero aumentamos la dimensión del sistema (de 1 a n).

Cuando F es lineal, por ejemplo:

$$F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_2(t) + \ldots a_n(t)x_n(t) + g(t)$$

el sistema anterior puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}_{n\times 1} \tag{2}$$

Resolver el sistema de primer orden (2) es equivalente a resolver el sistema de alto orden (1).

Ejemplo 1.2. *Consideramos la EDO de cuarto orden*

$$x^{(4)}(t) + 2x'(t) - 5x(t) = t\sin(t),$$

que es de la forma (1).

Sabemos entonces que podemos reescribir el sistema considerando

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad x_3(t) = x''(t), \quad x_4(t) = x^{(3)}(t),$$

lo que nos da el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x_2(t) \\ x_2'(t) & = x_3(t) \\ x_3'(t) & = x_4(t) \\ x_4'(t) & = t\sin(t) - 2x'(t) + 5x(t) = t\sin(t) - 2x_2(t) + 5x_1(t) \end{cases}$$

que en forma matricial puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.3. *Escribamos la ecuación*

$$x''(t) = x^3(t) + (x'(t))^3$$

como un sistema lineal de primer orden.

Para esto definimos las variables

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t),$$

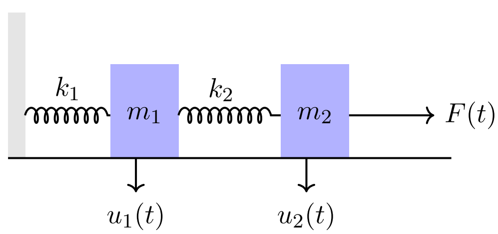
entonces

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1^3(t) + x_2^3(t) \end{cases}$$

que define un **sistema no lineal** *de primer orden.*

Ejemplo 1.4. *Considerando el ejemplo del sistema masa-resorte con dos objetos.*

$$\begin{cases} m_1 u_1''(t) &= -k_1 u_1(t) + k_2(u_2(t) - u_1(t)) \\ m_2 u_2''(t) &= -k_2(u_2(t) - u_1(t)) + F(t) \end{cases}$$



Denotamos el vector $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, *que sería nuestra variable, y escribimos el sistema de dos resortes como:*

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$$

Para $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$ *podemos entonces escribir el sistema como*

$$\mathbf{u}''(t) = \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t), \tag{3}$$

que es un sistema de segundo orden.

Luego, si definimos las variables (vectoriales)

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u}'(t),$$

tenemos el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1'(t) &= \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2'(t) &= \mathbf{K}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{F}(t), \end{cases}$$

que se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \end{pmatrix}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & I_{2\times 2} \\ \mathbf{K} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}_{4\times 1} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{F}(t) \end{pmatrix}_{4\times 1},$$

i.e. bajamos el orden del sistema de 2 a 1, pero aumentamos la dimensión.

Ejemplo 1.5. *El sistema de segundo orden*

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 2\sin(t) \end{aligned}$$

se puede transformar en un sistema de primer orden equivalente haciendo

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y'.$$

Así, el sistema se escribe como

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -3x_1 + y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = 2x_1 - 2y_1 + 2\sin(t) \end{cases}$$

de cuatro ecuaciones de primer orden en las variables dependientes x_1, x_2, y_1 *e* y_2.