UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 8
Análisis Real II (525302)
Descomposición de Medidas

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida, $(X, \mathcal{X}, \lambda)$ es un espacio de medida signada y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, restringido a la $\sigma-$Álgebra de Borel.

Problema 1 Sea P un conjunto positivo respecto a la medida signada λ y $E \subseteq P$ tal que $E \in \mathcal{X}$. Demuestre que E es positivo.

Problema 2 Sean P_1 y P_2 dos conjuntos positivos respecto a la medida siganda λ. Demuestre que $P_1 \cup P_2$ es positivo.

Problema 3 Sea $M \in \mathcal{X}$. Demuestre que M es nulo en λ si y sólo si M es nulo en $|\lambda|$.

Problema 4 Demuestre que toda medida signada λ finita es acotada. Luego, sea $E \in \mathcal{X}$. Demuestre que

$$\lambda^+(E) = \sup_{A \in \mathcal{X}} \lambda(A \cap E)$$
$$\lambda^-(E) = -\inf_{A \in \mathcal{X}} \lambda(A \cap E)$$

Problema 5 Demuestre que la relación $\ll$ inducida por la definición de medida absolutamente continua es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica[1].

Problema 6 Sean μ y ν dos medidas en $\mathcal{X}$ absolutamente continuas y mutuamente singulares (o sea, $\mu \ll \nu$ y $\mu \perp \nu$). Demuestre que $\mu \equiv 0$.

Problema 7 Sean λ y ν dos medidas signadas en $\mathcal{X}$. Demuestre que son equivalentes

a) λ es absolutamente continua respecto a ν.

b) λ^+ y λ^- son absolutamente continuas respecto a ν.

c) $|\lambda|$ es absolutamente continua respecto a $|\nu|$.

Problema 8 Sean μ y ν medidas $\sigma-$finitas, con $\nu \ll \mu$, y $\lambda = \mu + \nu$. Demuestre que

a) $\nu \ll \lambda$.

b) Si $f = \dfrac{d\nu}{d\lambda}$, entonces $0 \leq f < 1$ casi seguramente respecto a μ y $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{f}{1-f}$.

Problema 9 Sean μ, ν y λ medidas $\sigma-$finitas. Demuestre que

---

[1] De esta forma, $\ll$ no constituye una relación de orden.

a) $\mu \ll \mu$ y $\dfrac{d\mu}{d\mu} = 1$ casi seguramente.

b) Si μ y ν son absolutamente continuas respecto a λ, entonces $\dfrac{d(\mu+\nu)}{d\lambda} = \dfrac{d\mu}{d\lambda} + \dfrac{d\nu}{d\lambda}$.

c) Si $\alpha > 0$ y $\mu \ll \lambda$, entonces $\dfrac{d(\alpha\mu)}{d\lambda} = \alpha\dfrac{d\mu}{d\lambda}$.

d) Si $\lambda \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \dfrac{d\lambda}{d\nu}\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

e) Si $\nu \ll \mu$, $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \nu)$ y $f \geq 0$ casi seguramente, entonces

$$\int f \, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu$$

Problema 10 Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Demuestre que f es integrable respecto a λ si y sólo si f es integrable respecto a $|\lambda|$. Luego, demuestre que, si f es integrable respecto a λ, entonces

$$\left| \int f \, d\lambda \right| \leq \int |f| \, d|\lambda|$$

Problema 11 Demuestre que, si $|\lambda| \perp \mu$, entonces $\lambda^+ \perp \mu$ y $\lambda^- \perp \mu$.

Problema 12 Sea $\mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}([0,1])$. Sean $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ y $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ dos espacios de medida, donde m es la medida de Lebesgue restringida en $\mathcal{B}([0,1])$ y μ es una medida de conteo, o sea, $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$. Demuestre que $m \ll \mu$, pero que no es posible aplicar el teorema de Radon-Nikodým.

---

27 de Octubre de 2014