UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525222)
Listado Nº 5 (Problemas de Sturm-Liouville)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. **(PSL periódico).**
Halle los valores propios λ_n y funciones propias de

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \ . \end{cases}$$

Muestre que si $\lambda_n > 0$, existen funciones propias asociadas al mismo valor propio λ_n que no son proporcionales entre sí.

2. **(PSL con condiciones de frontera de Dirichlet).**
Halle los valores propios y una base ortonormal de funciones propias del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \big(\mathrm{e}^{2x} u'(x)\big)' + (\lambda + 1)\mathrm{e}^{2x} u(x) = 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \ . \end{cases}$$

3. **(Resolución de un PVIF homogéneo).**
Usando el resultado del Problema 2, resolver el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = \mathrm{e}^{-2x}\, \partial_x\big(\mathrm{e}^{2x} \partial_x T(x,t)\big) \quad , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = \sin x \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

4. **(Convergencia de la solución transciente del PVIF asociado a la ecuación del calor en una barra no homogénea).**
Sean $\kappa : [0,L] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $w : [0,L] \to \mathbb{R}$ continua tales que $\kappa(x) > 0$ y $w(x) > 0 \ \forall\, x \in [0,L]$. Sean $a_1, b_1, a_2, b_2 \geq 0$ con $a_1 b_1 \neq 0$, $a_2 b_2 \neq 0$. Suponga que el perfil inicial de temperatura está dado por una función $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,L]$, derivable salvo quizá en un número finito de puntos, de derivada f' CPT en $[0,L]$, y que f satisface las condiciones de frontera $a_1 f(0) - b_1 f'(0) = a_2 f(L) + b_2 f'(L) = 0$. Se ha demostrado en clase que la solución de

$$\text{(PVIFH)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = \frac{1}{w(x)}\, \partial_x\big(\kappa(x) \partial_x T(x,t)\big) \quad , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ a_1 T(0,t) - b_1 \partial_x T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ a_2 T(L,t) + b_2 \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \ . \end{cases}$$

está dada por la serie uniformemente convergente

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\, \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \quad , \quad (x,t) \in \overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}\,;\, 0 \le x \le L, t \ge 0\} \ ,$$

donde $0 \le \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ son los valores propios del PSL regular asociado a (PVIFH), $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia ortonormal de funciones propias y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ son los coeficientes de Fourier generalizados de f con respeto a $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.
El propósito de este ejercicio es estudiar el límite de $T(x,t)$ cuando $t \to \infty$.

(a) Suponga que $\lambda_1 > 0$. Muestre que $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ y que existe $M > 0$ tal que

$$|T(x,t)| \le M \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}} \quad , \quad (x,t) \in \overline{D} \ .$$

Deduzca que

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in [0,L] \ .$$

(b) Suponga que $\lambda_1 = 0$. Muestre que $|T(x,t) - c_1\varphi_1(x)| \to 0$ cuando $t \to \infty$.
Muestre que $a_1 = a_2 = 0$ y que $\varphi_1(x)$ es una función constante.
Deduzca que

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = \frac{\int_0^L f(x) w(x)\, \mathrm{d}x}{\int_0^L w(x)\, \mathrm{d}x} \quad \forall\, x \in [0,L] \ .$$

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

5. Muestre que el PSL

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ 3u(\ln(1/2)) + 5u'(\ln(1/2)) = 0 \end{cases}$$

tiene un valor propio $\lambda = -1$.
Explique porque este resultado no contradice el teorema visto en clase sobre la no negtividad de los valores propios de problemas de Sturm-Liouville.

6. (**Evaluación 2, 2024-2**).

(a) Muestre que los valores propios λ_n del problema de Sturm-Liouville

$$\text{(PSL)} \quad \begin{cases} \left(\mathrm{e}^{-2x} u'(x)\right)' + \lambda \mathrm{e}^{-2x} u(x) = 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ u(0) - u'(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

satisfacen $\lambda_n > 1$ y son soluciones de la ecuación

$$\tan(\pi\sqrt{\lambda - 1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}} \ .$$

Proponga un método geométrico para determinar los λ_n aproximamente.

(b) Determine una familia ortonormal $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones propias de (PSL).

7. (**Evaluación 2, 2024-2**).
Suponga que $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,\pi]$, derivable en $]0,\pi[$ salvo quizá en un número finito de puntos, de derivada continua por trozos en $[0,\pi]$ y tal que $f(0) - f'(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$.
Usando el resultado del ejercicio 6, determine la solución del PVIF

$$\begin{cases} \partial_t y(x,t) = \mathrm{e}^{2x}\partial_x\big(\mathrm{e}^{-2x}\partial_x y(x,t)\big) & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ y(0,t) - \partial_x y(0,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ \partial_x y(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ y(x,0) = f(x) & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

en la forma de una serie uniformemente convergente. Justifique a partir de resultados vistos en clase que la suma de esta serie es continua en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$, de clase C^2 en $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < \pi, t > 0\}$ y es solución del PVIF.

8. **(Problema dependiendo del tiempo).**
Sea $b > 1$. Considere el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = \partial_x\big(x^2\partial_x T(x,t)\big) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{x}} \quad , \quad 1 < x < b, t > 0 \\ T(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(b,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \ . \end{cases}$$

Se busca una solcuión de este PVIF de la forma

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x) \ , \tag{1}$$

donde $c_n(t)$ es una función por determinar y $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia ortonormal del PSL regular

$$\begin{cases} \big(x^2u'(x)\big)' + \lambda u(x) = 0 \, , \ 1 < x < b \\ u(1) = 0 \\ u(b) = 0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

(a) Asumiendo que la serie (1) converge y puede ser derivada término a término dos veces con respeto a x y una vez con respeto a t, muestre que $c_n(t)$ satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(c_n'(t) + \lambda_n c_n(t)\big)\varphi_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{x}} \quad , \quad 1 < x < b, t > 0 \ , \tag{3}$$

donde λ_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, son los valores propios del PSL del Problema **??**.

(b) Muestre que si $c_n(t)$ satisface la EDO no homogénea de primer orden

$$c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_1^b \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad , \quad t > 0 \tag{4}$$

luego la identidad (3) se cumple para to $x \in]1,b[$ y $t > 0$ y la serie en el miembro izquierdo converge puntualmente.

(c) Calcule la integral del mienbro derecho de (4) y determine $c_n(t)$ en función de $c_n(0)$, λ_n y b (*Indicación:* usar los resultados vistos en cátedra sobre los valores y funciones propios de (2)).
¿ Como se tienen que escoger las constantes de integración $c_n(0)$ para que $T(x,t)$ satisfaga la condición inicial del PVIF?

Noviembre 6, 2025.
DS/ds