Tema Nº5: Valores Propios, Vectores Propios y Transformaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Núcleo o Kernel

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define el núcleo de A y denota por $\mathrm{Ker}(A)$ al s.e.v. del espacio $\mathbb{K}^n$ definido por

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \ : Ax = \theta_{\mathbb{K}^m}\}$$

Imagen de una Matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define la imagen de A y denota por $\mathrm{Im}(A)$ al s.e.v. del espacio $\mathbb{K}^m$ definido por

$$\mathrm{Im}(A) = \{Ax \ : x \in \mathbb{K}^n\} = \langle\{A(:,1), A(:,2), \cdots, A(:,n)\}\rangle$$

Nulidad y Rango

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define la nulidad $\eta(A)$ y el rango $r(A)$ de la matriz A

$$\eta(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) \quad \text{y} \quad r(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

Teorema Rango-Nulidad

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces se cumple

$$\eta(A) + r(A) = n$$

Introducción

Una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede escribir como $f(x) = mx$, siendo m su pendiente. Esta pendiente nos dice si la función es "rápida" o "lenta", cuánto "estira" o "estrecha" a sus preimágenes, etc. El concepto de valor propio generaliza la idea de pendiente a una transformación lineal $T : V \to V$ o a una matriz cuadrada, a través de una ecuación similar.

Motivación

Consideremos la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Que sucede si multiplicamos A por las matrices

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. ¿Los vectores u y v forman una base para $\mathbb{R}^2$?
2. Realice el siguiente producto AP, siendo P la matriz formada por los vectores u y v como columnas.
3. Determine una matriz D, de modo que $AP = PD$. ¿Qué tipo de matriz es D?
4. ¿Como podemos calcular potencias de A?

Matriz Diagonalizable

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es diagonalizable si y solo si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si y solo si existen dos matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con las propiedades:

1. P es invertible.
2. D es diagonal.
3. $AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$.

Esto, a su vez, ocurre si y solo si existe una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ que satisface que A transforma a cualquier vector de ella en un vector paralelo a sí mismo, es decir, A es diagonalizable si y solo si existen vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{K}^n$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ de modo que:

1. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es li y
2. $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, ..., Av_n = \lambda_n v_n$.

Valores y Vectores Propios

Definición

Un vector $v \in \mathbb{K}^n$ es **vector propio** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si y solo si $v \neq \theta$ y A transforma a v en un vector paralelo a v, es decir, v es vector propio de A si y solo $v \neq \theta$ y existe $\lambda \in \mathbb{K}$ de modo que $Av = \lambda v$. El escalar λ se denomina **valor propio** de A asociado al vector propio v.

Ejemplos

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Decida si $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A, además, determine los valores propios, si es que existen.

2. Muestre que 7 es valor propio de la matriz A definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A si y solo si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\det(A - \lambda I) = 0$.

Demostración: Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A ssi

$$\begin{aligned} & \exists w \in \mathbb{K}^n, w \neq \theta : Aw = \lambda w \\ \Leftrightarrow & \exists w \in \mathbb{K}^n, w \neq \theta : Aw - \lambda w = \theta \\ \Leftrightarrow & \exists w \in \mathbb{K}^n, w \neq \theta : (A - \lambda I)w = \theta \\ \Leftrightarrow & \exists w \in \mathbb{K}^n, w \neq \theta : w \in \operatorname{Ker}(A - I\lambda) \end{aligned}$$

Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A ssi el conjunto $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ contiene vectores distintos del vector nulo de $\mathbb{K}^n$ y esto se cumple ssi $\lambda \in \mathbb{K}$ es tal que la matriz $A - \lambda I$ no es invertible y esto, a su vez, solo ocurre si $\det(A - \lambda I) = 0$

Valores y Vectores Propios

Definición

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La expresión $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{K}$, se denomina polinomio característico de A y se denota $p_A(\lambda)$

Las raices en $\mathbb{K}$ de este polinomio, es decir, los $\lambda \in \mathbb{K}$ para los que se cumpla que $\det(A - \lambda I) = 0$ son los valores propios de A.

Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ (p_A puede tener raíces complejas) son las raíces distintas de p_A, entonces p_A se puede factorizar de la siguiente manera:

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{r_m}$$

con $r_1 + r_2 + ... + r_m = n$. El número r_1 es la multiplicidad de λ_1 como raíz de p_A, r_2 es la multiplicidad de λ_2, ..., r_m es la multiplicidad de λ_m.

Por cada valor propio de A llamaremos multiplicidad algebraica del valor propio a su multiplicidad como raíz de p_A.

Valores y Vectores Propios

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El **espectro** de A, que se denota por $\sigma(A)$, es el conjunto de los valores propIos de A, es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

Además, la cardinalidad de $\sigma(A)$ es menor o igual a n.

Ejercicios

Determine el polinomio caractetístico, los valores propios, las multiplicidades algebraicas de los valores propios y el espectro de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ¿qué sucederá si $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

(d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Valores y Vectores Propios

Definición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, un valor propio de A. Al conjunto

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)x = \theta\}$$

que es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, se le da el nombre de subespacio propio de A asociado al valor propio λ y se denota por $S_\lambda(A)$. Los vectores en $S_\lambda(A) - \{\theta\}$ son los vectores propios de A asociados al valor propio λ.

Observación: por cada $\lambda \in \sigma(A)$, la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión de $S_\lambda(A)$.

Ejemplos

Determinemos los subespacios propios de las matrices A y B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determine las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

(b) ¿Cuáles son los vectores propios asociados a los valores propios encontrados?

(c) ¿Existen vectores de $\mathbb{R}^2$ que no sean vectores propios de A o B? ¿Qué sucede con ellos?

Valores y Vectores Propios

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ y $|\sigma(A)| = m$. Supongamos además que $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{K}^n$ son vectores propios de A tales que:

$$v_1 \in S_{\lambda_1}(A), v_2 \in S_{\lambda_2}(A), ..., v_m \in S_{\lambda_m}(A)$$

entonces $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es linealmente independiente.

Resultados Importantes

1. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si, existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.

   Observación: Cuando $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable, la matriz que la diagonaliza $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que sus columnas son vectores propios de A que constituyen la base de $\mathbb{K}^n$ y $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

2. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A. Entonces la multiplicidad geométrica de λ es menor o igual que su multiplicidad algebraica y mayor o igual que 1.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y λ_1, λ_2 valores propios distintos, entonces $S_{\lambda_1}(A) \cap S_{\lambda_2}(A) = \{\theta\}$.

   Demostración: Sea $v \in S_{\lambda_1}(A) \cap S_{\lambda_2}(A)$. Notemos lo siguiente:

$$\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = \theta \Rightarrow v = \theta$$

   con esto se concluye el resultado.

Valores y Vectores Propios

Teorema

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y solo si la suma de las multiplicidades algebraicas de sus valores propios es n y la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica.

Ejercicios

Determine si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

es diagonalizable.

Valores y Vectores Propios

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable, con $A = PDP^{-1}$, siendo D la matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular. Entonces se cumple:

1. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n$.
2. Si A es invertible, entonces
$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$
y A^{-1} es diagonalizable.
3. Para todo $m \in \mathbb{N}$, se verifica
$$A^m = PD^mP^{-1},$$
siendo $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, ..., \lambda_n^m) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Valores y Vectores Propios

Observación: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible si y solo si $\eta(A) = 0$, es decir, si y solo si, $\eta(A - 0I) = 0$ lo que es equivalente a que el número 0 no es valor propio de A.

Notar además que si A es invertible y $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ es valor propio de A, entonces existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \theta$ tal que:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Leftrightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

es decir, A es invertible y λ es valor propio de A, tiene que ocurrir $\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}. Además, si v es vector propio de A asociado al valor propio λ, v es vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $\frac{1}{\lambda}$. Entonces podemos asegurar que:

$$S_\lambda(A) = S_{\frac{1}{\lambda}}(A^{-1})$$

Ejercicios

Determine una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de modo que:

1. $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$,
2. Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A asociados a un mismo valor propio.
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A.

Resultados Importantes

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A es simétrica (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o hermitiana (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces se cumple:

(a) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) los vectores propios asociados a valores propios distintos, son ortogonales (con respecto al producto interior usual de $\mathbb{K}^n$).

(c) A tiene n valores propios, contando multiplicidades.

(d) A es diagonalizable. Si A es simétrica (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), entonces existe una matriz Q ortogonal, tal que $D = Q^{-1}AQ$ y si A hermitiana (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces existe una matriz Q unitaria, tal que $D = Q^{-1}AQ$, donde D es la matriz diagonal. En estos casos, se dice que A es **ortogonalmente diagonalizable.**

Transformaciones

Sean $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ e.v. sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea además $T : U \to V$ una función (transformación) entre U y V, es decir, T es una función que transforma **cada** vector de U en un vector de V.

Ejemplos:

1.

2.

Observación: en los espacios vectoriales involucrados no necesariamente las operaciones de suma y producto por escalar deben ser las mismas.

Transformaciones Lineales

Definición:

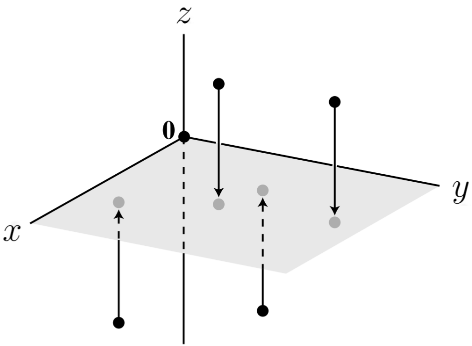
Sean $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : U \to V$ una función. T es una **transformación o aplicación lineal** si se verifica:

1. para todo par de vectores $u, w \in U$ se cumple que
$$T(u + w) = T(u) + T(w)$$
2. para cada escalar α y cada vector u se cumple que
$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Ejemplos

1. Consideremos la siguiente transformación:

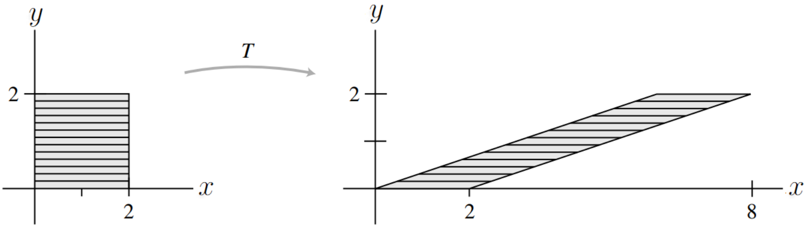
$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Ejemplos

2. Consideremos la siguiente transformación:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Ejemplos

3. La transformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $r \in \mathbb{R}^+$, es lineal.
4. La transformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es lineal.
5. La transformación $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es lineal ssi $b = 0$.
6. La transformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3 \\ 4x \end{pmatrix}$ no es lineal.
7. La transformación
$$T:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ a+c & c \end{pmatrix}$$
es lineal.

Transformaciones Lineales

Observaciones:

1. La definición de transformación lineal se puede ser presentada de la siguiente manera:

$$\forall x, y \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la transformación $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que a cada $x \in \mathbb{K}^n$ le hace corresponder el vector $Ax \in \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal.

Transformaciones Lineales

Propiedades

Sean T_1 y T_2 dos transformaciones lineal de U y V. Entonces:

1. $T_1(\theta_U) = \theta_V$.
2. $\forall x \in U : T_1(-x) = -T_1(x)$.
3. $T_1 + T_2$ es una transformación lineal y

$$\forall x, y \in U : (T_1 + T_2)(x + y) = (T_1 + T_2)(x) + (T_1 + T_2)(y)$$

4. λT_1 es una transformación lineal y

$$\forall x \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda T)(x) = \lambda T(x).$$

Transformaciones Lineales

Observaciones:

1. Las propiedades 1 y 2 son condiciones necesarias pero no suficientes para decir que $T : U \to V$ sea lineal.
2. Si $T : U \to V$ es tal que $T(\theta_U) \neq \theta_V$, entonces T no es lineal.
3. Al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$. Hay que notar que si $\mathcal{L}(V)$ hace referencia a $\mathcal{L}(V, V)$.

Kernel e Imagen

Definición

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Se define Kernel o Núcleo de T como el conjunto:

$$\text{Ker}(T) = \{u \in U : T(u) = \theta_V\} \subseteq U$$

Además, se define el conjunto imagen de T por:

$$\text{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\} = \{v \in V : \exists u \in U : T(u) = v\} \subseteq V$$

Kernel e Imagen

Proposición

Sean $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ dos $\mathbb{K}$-e.v y $T : U \to V$ una t.l. Entonces $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$ son s.e.v. de U y V, respectivamente.

Kernel e Imagen

Teorema

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Entonces

1. T es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_U\}$.
2. T es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = V$.

Ejercicios

Decida cual o cuales de las siguientes transformaciones lineal son inyectivas y/o sobreyectivas.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

(b) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ a + c & c \end{pmatrix}$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - 3z \end{pmatrix}.$

Transformaciones Lineales

Teeorema de Existencia y Unicidad de TL.

Sea $B = \{u_1, ..., u_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial U. Entonces para todo $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ (otro $\mathbb{K}$ espacio vectorial), existe una única transformación lineal $T : U \to V$ tal que:

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : T(u_i) = v_i$$

Corolario

Si $T : U \to V$ y $S : U \to V$ son dos transformaciones lineales que coinciden en una base de U, entonces $T = S$.

Ejercicios

Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $L : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dos aplicaciones lineales tales que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

y

$$L\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, L\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, L\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Defina, si es posible, las transformaciones lineales

Transformaciones Lineales

Definición

Una transformación lineal $T : U \to V$ es isomorfismo si es biyectiva. Un isomorfismo lineal $L : V \to V$ se llama automorfismo.

Proposición

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. T es un isomorfismo si y sólo si $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_U\}$ y $\mathrm{Im}(T) = W$.

Proposición

Si $T : U \to V$ es un isomorfirmo lineal, entonces existe la transformación $T^{-1} : V \to U$, la cual es también lineal y biyectiva, es decir, T^{-1} también es un isomorfismo lineal.

Transformaciones Lineales

Definición: Rango y Nulidad

Sean $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales de dimensión finita y $T : U \to V$ una transformación lineal. Se define

1. La nulidad de T por $\eta(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$.
2. El rango de T por $r(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$

Transformaciones Lineales

Proposición

Sean $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales de dimensión finita y $T : U \to V$ un isomorfismo lineal. Si $B_U = \{u_1, ..., u_m\}$ una base de V, entonces $T(B_U) = \{T(u_1), ..., T(u_m)\}$ es una base de V. Además, se tiene que $\dim(U) = \dim(V)$.

Teorema de la Dimensión

Teorema

Si $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales de dimensión finita, y $T : U \to V$ una transformación lineal, entonces

$$\eta(T) + r(T) = \dim(U)$$

Observación: Un consecuencia importante del teorema de la dimensión es la siguiente: Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre y cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : U \to V$ una transformación lineal. Si $\dim(U) = \dim(V)$, entonces

$$T \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow T \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow T \text{ es isomorfismo}$$

Matriz Asociada a una T.L.

Supongamos que U y V son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, que U es un espacio de dimensión n y que la dimensión de V es m. Sean $B_U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, una base de U, y $B_V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, una base de V. Además, se define una transformación lineal $T : U \to V$, luego:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Matriz Asociada a una T.L.

Podemos observar que:

$$[T(u_1)]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; [T(u_2)]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; ..., \; [T(u_n)]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Luego, si construimos una matriz con las coordenadas de $T(u_i)$, con $i \in \{1, ..., n\}$, con respecto a la base B_V, se obtiene lo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se conoce como matriz asociada a la transformación lineal $T : U \to V$ con respecto a las bases B_U y B_V y se denota por $[T]_{B_U}^{B_V} = A$.

Matriz Asociada de una T.L.

Proposición

Sean U, V dos $\mathbb{K}$-e.v., $B_U = \{u_1, ..., u_n\}$, $B_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente, y A una matriz de orden $m \times n$ con elementos en $\mathbb{K}$. Entonces existe una única transformación lineal $T : U \to V$ tal que $A = [T]_{B_U}^{B_V}$

Matriz Asociada a una T.L.

Ahora consideremos lo siguiente, como para todo $u \in U$, u puede escribirse como c.l. de los vectores en B_U se cumple que, si $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$, entonces:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + ... + \alpha_n T(u_n) \end{aligned}$$

y las coordenadas de $T(u)$ con respecto a la base de V satisfacen

$$[T(u)]_{B_V} = \alpha_1 [T(u_1)]_{B_V} + \alpha_2 [T(u_2)]_{B_V} + ... + \alpha_n [T(u_n)]_{B_V}$$

Matriz Asociada a una T.L.

que es c.l., con escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de las columnas de $[T]_{B_U}^{B_V}$, por lo tanto, son iguales al producto de la matriz $[T]_{B_U}^{B_V}$ por el vector que contiene las coordenadas de u con respecto a la base de U,

$$[T(u)]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} [u]_{B_U} = [T]_{B_U}^{B_V}[u]_{B_U}$$

donde $[T]_{B_U}^{B_V}$ es **matriz asociada** a T con respecto a las bases B_U de U y B_V de V.

Matriz Asociada a una T.L.

Proposición:

Sean U, V dos $\mathbb{K}$-e.v., $B_U = \{u_1, ..., u_n\}$, $B_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Si $T : U \to V$ es una transformación lineal, entonces

$$\forall u \in U : [T(u)]_{B_V} = [T]_{B_U}^{B_V} [u]_{B_U}$$

Ejemplos

Determinar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}$, con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3y \\ 4x-2y \end{pmatrix}$, con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Ejemplos

3. Sea $L : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $L(p) = (p(0), p'(0), p''(0))^T$. Determine $[L]_{B_1}^{B_2}$, siendo

$$B_1 = \{x^2, x+1, x-1\} \quad \text{y} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Determine cual es la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$ que satisface que la matriz asociada a ella respecto a las bases

$$B_1 = \{1, i\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbb{C}$ un espacio vectorial real.

Ejemplos

5. Determine cual es la transformación lineal $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cuya matriz con respecto a las bases:

$$B_1 = \{x+1, x-1\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$$

de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, respectivamente, es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

Solución 5): Notemos que la primera columna de la matriz anterior son las coordenadas respecto a B_2 de $T(x+1)$, es decir,

$$T(x+1) = 1 + x - x^3$$

mientras que:

$$T(x-1) = -1 - x^2 + x^3$$

Ahora, para determinar $T(ax+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, primero debemos encontrar las coordenadas de $ax+b$ con respecto a B_1, como sigue:

$$ax + b = \alpha(x+1) + \beta(x-1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{a+b}{2} \wedge \beta = \frac{a-b}{2}$$

es decir, $[ax+b]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$. Por ende:

$$[T(ax+b)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}[ax+b]_{B_1} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a+b}{2} \\ -\frac{a-b}{2} \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a+b}{2} \\ \frac{b-a}{2} \\ -b \end{pmatrix}$$

con lo anterior podemos concluir que:

$$T(ax+b) = b + \frac{a+b}{2}x + \frac{b-a}{2}x^2 - bx^3$$

Operaciones entre T.L.

Sean $T : U \to V$, $L : U \to V$ y $S : V \to W$ tres transformaciones lineales entre los $\mathbb{K}-$ e.v. U, V, W. Entonces, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U$, las transformaciones

$$\begin{aligned}
&\alpha T : U \to V,\ (\alpha T)(u) = \alpha T(u)\\
&T + L : U \to V,\ (T + L)(u) = T(u) + L(u)\\
&S \circ T : U \to W,\ (S \circ T)(u) = S(T(u))
\end{aligned}$$

son lineales.

Matriz Asociada a una T.L.

Proposición

Sean U y V dos $\mathbb{K}$-e.v, de dimensión m y n, respectivamente, B_U y B_V bases de U y V, respectivamente. La matriz asociada a las transformaciones lineales

$$\alpha T : U \to V \ \text{ y } \ T + L : U \to V$$

están dadas por, $\alpha[T]_{B_U}^{B_V}$ y $\left([T]_{B_U}^{B_V} + [T]_{B_U}^{B_V}\right)$, y además, se cumple que para todo $u \in U$, se tiene:

$$(\alpha T(u))]_{B_V} = \alpha[T]_{B_U}^{B_V}[u]_{B_U} \ \text{ y } \ [(T+L)(u)]_{B_V} = \left([T]_{B_U}^{B_V} + [L]_{B_U}^{B_V}\right)[u]_{B_U}$$

Ejemplo:

Sean L y T las siguientes transformaciones lineales:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x \\ -y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

Determine

(a) las matrices asociadas de L y T c/r a las bases canónicas.

(b) la transformación $T \circ L$.

(c) la matriz asoaciada de $T \circ L$ c/r a las bases canónicas.

Matriz Asociada a la T.L.

Supongamos además que U, V y W tienen dimensiones n, m y k respectivamente. Por último, sean B_U, una base de U, B_V una base de V y B_W una base de W.

Proposición

Sean $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. La matriz asociada a la transformación lineal

$$S \circ T : U \to W,\ (S \circ T)(u) = S(T(u)) = w$$

está dada por, $[S \circ T]_{B_U}^{B_W} = [S]_{B_V}^{B_W} \cdot [T]_{B_U}^{B_V}$ y se cumple:

$$\forall u \in U : [(S \circ T)(u)]_{B_W} = [S \circ T]_{B_U}^{B_W} [u]_{B_U} = \left([S]_{B_V}^{B_W} \cdot [T]_{B_U}^{B_V} \right) [u]_{B_U}$$

Ejercicios

Sean V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión 4, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y la transformación lineal $T : V \to V$ es tal que

$$T(v_1) = v_2,\ T(v_2) = v_3,\ T(v_3) = v_4,\ T(v_4) = \theta_V.$$

Determine $[T \circ T]_B^B$ y muestre que $I - [T \circ T]_B^B$ es invertible.

Matriz Asociada a la T.L.

Corolario 1

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, y consideremos la transformación identidad $\hat{I} : V \to V$, $\hat{I}(v) = v$, entonces

$$[\hat{I}]_{B_V}^{B_V} = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Corolario 2

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Si $T : V \to V$ es un automorfismo, entonces se tiene que:

$$[T^{-1}]_{B_V}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_V}\right)^{-1}$$

Matriz de Paso o Cambio de Base

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita, $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, ..., w_n\}$ dos bases de V. Se define la transformación:

$$\hat{I} : (V, B_1) \to (V, B_2),\ \hat{I}(v) = v$$

Además, se define la matriz de paso o de cambio de base de B_1 a B_2, denotada por $P_{B_1}^{B_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dada por:

$$P_{B_1}^{B_2} = [\hat{I}]_{B_1}^{B_2} = \left([v_1]_{B_2} \ \middle|\ [v_2]_{B_2} \ \middle|\ ... \ \middle|\ [v_n]_{B_2} \right)$$

Observaciones: Dada la definición anterior, podemos presentar dos propiedades:

1. $\forall v \in V : P_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} = [v]_{B_2}$.
2. $P_{B_1}^{B_2}$ es invertible y $\left(P_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = P_{B_2}^{B_1}$.

Ejercicios

Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial real, $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Utilizar las matrices de cambio de base para determinar:

(a) $[v]_{B_1}$ sabiendo que $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $[u]_{B_2}$ sabiendo que $[u]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Resultado Importante

Sean V y W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales de dimensión finita, B_0, B_1 bases de V, y C_0, C_1 bases de W. Sea también $T : V \to W$ una transformación lineal. Se puede probar que

$$[T]_{B_1}^{C_1} = P_{C_0}^{C_1}[T]_{B_0}^{C_0}P_{B_1}^{B_0}$$

Observación: podemos notar que el resultado anterior está dado para dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales V y W, pero se puede enunciar para $V = W$, es tal caso se tiene: Consideremos B_0 y B_1 bases de V, luego:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = P_{B_0}^{B_1}[T]_{B_0}^{B_0}P_{B_1}^{B_0}$$

Ejercicio

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad C_0 = \{1, 2x, -x^2 + x\}$$

es $[T]_{B_0}^{C_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar $[T]_{B_1}^{C_1}$ donde:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad C_1 = \{2, 1 - x, 1 + x^2\}$$

Valores y Vectores Propios

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. y $T : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y solo si existe $v \in V$, $v \neq \theta$, tal que $T(v) = \lambda v$. En este caso, se dice que v es un vector propio de T asociado a λ.

Observación: notemos lo siguiente:

1. El conjunto de los valores propios de T se denomina espectro de T y está definido por:
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$
2. Se puede probar que $\sigma(T) = \sigma([T]_B^B)$, siendo B una base de V.
3. Dada la observación anterior se puede deducir que v es un vector propio de T asociado a λ, ssi $[v]_B$ es un vector propio de $[T]_B^B$ asociado a λ.
4. Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. y $T : V \to V$ una t.l. Se dice que T es diagonalizable si existe una base B de V constituida por vectores propios de T y la matriz que diagonaliza a T está dada por $D = [T]_B^B$.
5. Finalmente, todos los teoremas relacionados a la diagonalización de una matriz se pueden reescribir considerando una t.l. $T : V \to V$.

Ejercicios

1. Sea T la siguiente transformación lineal

$$T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), T(ax^2 + bx + c) = (b - 2a)x^2 - ax - c$$

   Determine el polinomio característico y espectro de T, y las multiplicidades de cada valor propio encontrado.

2. Sea T la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2z, y + z)$$

   (a) Calcule sus valores propios, junto con sus multiplicidades algebraicas y geométricas.
   (b) Muestre que T es diagonalizable y determine la matriz que diagonalice la transformación.

Resultado Importante

La definición de valores y vectores propios de transformaciones lineales, de la forma $T : V \to V$, también es válida si es que V tiene dimensión infinita. Para observar lo anterior consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$. Se puede probar que $(C^{\infty}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-e.v. con las operaciones usuales. Sea define la siguiente t.l:

$$T : V \to V,\ T(f)(x) = f'(x)$$

Así, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in V, f \neq \theta,$, entonces:

$$T(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = Ce^{\lambda x},\ \text{con } C \in \mathbb{R}_{\neq 0}$$

Tomando $C = 1$, y definiendo $v \in f, v \neq \theta$, tal que $\forall x \in \mathbb{R} : v(x) = e^{\lambda x}$, se concluye que v es un vector propio de T y λ un valor propio asociado a v. Dado lo anterior, se puede observar que existen infinitos $\lambda \in \mathbb{R}$ que cumplen la igualdad, por ende $\sigma(T) = \mathbb{R}$.