UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EDO (521218-525221)
PRACTICA 8
Transformada de Laplace (Primera parte)

Problemas a resolver en práctica

Problema 1
Usando la definición muestre que para $s > 1$, $\mathcal{L}[t\, e^t] = \dfrac{1}{(s-1)^2}$.

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[te^t](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, te^t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t\, \mathrm{e}^{t(1-s)} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{(1-s)} \left(\frac{t}{\mathrm{e}^{t(s-1)}} \right)\Bigg|_0^b - \frac{1}{(1-s)} \int_0^b \mathrm{e}^{(1-s)t} dt \right] \\
&= \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\left(\frac{b}{\mathrm{e}^{b(s-1)}} - 0 \right) - \int_0^b \mathrm{e}^{(1-s)t} dt \right] \quad \text{puesto que } s > 1 \\
&= 0 - \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\int_0^b \mathrm{e}^{(1-s)t} dt \right] \\
&= \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{(1-s)} \mathrm{e}^{(1-s)t} \Big|_0^b \right] \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}
\end{aligned}$$

Problema 2
Sabiendo que para $s > 0$, $\mathcal{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}$ y usando la propiedad de la derivada, esto es:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\,\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+), \quad \text{muestre que}$$

(i) $\mathcal{L}[t^2](s) = \dfrac{2}{s^3}$,

(ii) Determine el valor de $\mathcal{L}[(t+a)^2](s)$ para a constante real.

(iii) Determine el valor de $\mathcal{L}[cos(t+\alpha)](s)$ (α es una constante real).

Desarrollo:

(*i*) Aplicamos la propiedad de la derivada a la función $f(t) = t$, $t > 0$. Entonces, puesto que $f'(t) = 1$ y $f'(0^+) = 0$, sigue para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[1](s) + 0 = s\mathcal{L}[t](s) \text{ de donde}$$

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Ahora aplicamos a propiedad anterior a la función $f(t) = t^2$.

$$\mathcal{L}[2t](s) + 0 = s\mathcal{L}[t^2](s) \text{ de donde}$$

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s}\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}.$$

(*ii*) Ahora basta desarrollar el cuadrado del binomio.

(*iii*) Use la lineralidad, sabiendo que $cos(t + \alpha) = cos(t)\,cos(\alpha) - sen(t)\,sen(\alpha)$.

Problema 3
Use la linealidad de la Transformada de Laplace, para determinar $\mathcal{L}[f(t)](s)$, cuando

(*i*) $f(t) = t^2 + \operatorname{sen}(3t)$ (*ii*) $f(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-3t}$

¿Para qué valores de s está definida la transformada de Laplace en (*i*) y (*ii*)?

Desarrollo:

(*ii*) Recordemos que $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ para $s > a$. Por la linealidad del operador $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-3t}](s) = 2\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}](s) - \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-3t}](s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}$$

para $s > \max\{2, -3\}$, es decir para $s > 2$.

Problema 4
Determine $\mathcal{L}[f(t)]$, cuando

(*i*) $f(t) = (1 + \mathrm{e}^{2t})^2$. (*iii*) $f(t) = \mathrm{e}^{2t}\operatorname{senh}(3t)$,

(*ii*) $f(t) = (t + 2)^2$,

Desarrollo:

(*i*) − (*ii*) Desarrollar el binomio y aplicar linealidad de la Transformada de Laplace.

(*iii*) Sabemos que $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$. Por tanto $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}\operatorname{senh}(3t)](s) = F(s-2)$ donde $F(s) = \mathcal{L}[\operatorname{senh}(3t)](s) = \dfrac{3}{s^2-9}$, $s > 3$. De este modo,

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}\operatorname{senh}(3t)](s) = \frac{3}{(s-2)^2 - 9} = \frac{3}{s^2 - 4s - 5}, \ (s-2) > 3.$$

Problema 5 Sabiendo que para f de orden exponencial α, resulta

$$\mathcal{L}[t\, f(t)] = (-1)\frac{d}{ds}[F(s)] \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s),$$

determine el valor de $\mathcal{L}[t\, sen(bt)]$ Para b constante en $\mathbf{R}$.
Desarrollo: De la hipótesis sigue directamente que

$$\mathcal{L}[t\,\text{sen}(bt)](s) = (-1)\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[\text{sen}(bt)](s)] = \frac{2bs}{(s^2+1)^2}.$$

Observación: Note que del ejercicio sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right] = t\,\text{sen}(t),\ t > 0.$$

Problema 6
Decida justificadamente si existe $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ cuando

(i) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^s}{s^2}$, $\quad$ (ii) $F(s) = \dfrac{3s-5}{s^2+9}$, $\quad$ (iii) $F(s) = \dfrac{s^2}{s+1}$.

Desarrollo: Sabemos que si $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$ entonces no existe la Transformada Inversa de la función F

(i) En este caso

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{e}^s}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{e}^s}{2} \neq 0,$$

por tanto no existe la transformada inversa de $\dfrac{\mathrm{e}^s}{s^2}$.

(ii) Aquí $\lim_{s\to\infty} \dfrac{3s-5}{s^2+9} = 0$. En consecuencia, F puede admitir transformada inversa de Laplace. Por cálculo directo, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-5}{s^2+9}\right](t) &= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right](t) - \frac{5}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right](t) \\
&= 3\cos(3t) - \frac{5}{3}\,\text{sen}(3t),\ t > 0.
\end{aligned}$$

(iii) Como en (i) F no admite transformada inversa de Laplace.

Problema 7
Usando las propiedades vistas en clase, calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, para :

(i) $F(s) = \dfrac{17-3s}{s^2+2s+26}$, $\quad (iii)$ $F(s) = \dfrac{s+5}{(s+3)(s^2+2s+26)}$,

(ii) $F(s) = \dfrac{s-5}{s^2-10s+34}$, $\quad (iv)$ $F(s) = \dfrac{s-25}{(s-5)(s+5)}$,

Desarrollo:

(i) Aquí el $\lim_{s\to\infty} \dfrac{17-3s}{s^2+2s+26} = 0$. Por cálculo directo, sigue:

$$\begin{aligned} \frac{17-3s}{s^2+2s+26} &= \frac{-3(s+1)+20}{(s+1)^2+25} \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{17-3s}{s^2+2s+26}\right](t) &= -3\mathrm{e}^{-t}\cos(5t) + \frac{20}{5}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}(5t)\,, \quad t \geq 0\,. \end{aligned}$$

(ii) Aquí nuevamente tenemos $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s-5}{s^2-10s+34} = 0$. Haciendo el cálculo, sigue

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-5}{(s-5)^2+9}\right](t) = \mathrm{e}^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t) = \mathrm{e}^{5t}\cos(3t).$$

Problema 8
Considere el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y''(t) - 6y' + 13y(t) &=& g(t) \text{ para } t \geq 0 \text{ y } g \text{ continua de orden exponencial,} \\ y(0) = 1,\ y'(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

Muestre que:

(i) $\mathcal{L}[y(t)](s) = \dfrac{G(s)}{s^2-6s+13} + \dfrac{s-6}{s^2-6s+13}$ donde $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

(ii) Si $g(t) = \mathrm{e}^{2t}$ muestre que

$$5\,\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s-2} + \frac{4s-26}{s^2-6s+13}$$

(iii) Finalmente, en el caso $g(t) = \mathrm{e}^{2t}$, muestre que

$$y(t) = (1/5)\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}\Big((4/5)\cos(2t) - (14/10)\mathrm{sen}(2t)\Big)$$

Solución:

(i) Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\left[y\left(t\right)\right](s)$ se obtiene

$$(s^2 - 6s + 13)Y(s) - s + 6 \;=\; G(s)$$

de donde se obtiene (i).

(ii) Si $g(t) = \mathrm{e}^{2t}$, de la parte anterior sigue

$$\begin{aligned} 5\,\mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{5}{(s-2)(s^2-6s+13)} + \frac{5(s-6)}{s^2-6s+13} \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{4-s}{s^2-6s+13} + \frac{5s-30}{s^2-6s+13} \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{4s-26}{s^2-6s+13} \quad (*) \end{aligned}$$

(iii) Observe que

$$\frac{4s-26}{s^2-6s+13} = \frac{4(s-3)-14}{(s-3)^2+4},$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s-26}{s^2-6s+13}\right] \;=\; 4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right] - 14\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2+4}\right].$$

Aplicando transformada inversa de Laplace en $(*)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 5\,y(t) &= \mathrm{e}^{2t} + 4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right] - 14\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2+4}\right] \\ &= \mathrm{e}^{2t} \;+\; \mathrm{e}^{3t}\Big(4\cos(2t) - (14/2)\mathrm{sen}(2t)\Big). \end{aligned}$$

Problemas a trabajar por el(la) estudiante

1. Usando la definición muestre que parea $b \in \mathbf{R}$, $\mathcal{L}[cos(bt)] = \dfrac{s}{s^2+b^2}$.

2. Determine la regla de correspondencia de $f(t)$, si se sabe que $f(t-2) = \mathrm{e}^{3t-4}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Determine el valor de $\mathcal{L}[H(t-2)\mathrm{e}^{3t-4}](s)$.

4. Calcule la Transformada de Laplace de la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que se indica:

   (i) $f(t) = 3\mathrm{e}^{4t} + 2\mathrm{sen}(7t)$.

   (ii) $f(t) = (\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})^2$.

   (iii) $f(t) = t\cos(5t)$.

   (iv) $f(t) = t^3\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{\sqrt{5}\,t}\mathrm{sen}(t)$.

   (v) $f(t) = \mathrm{e}^{3t}t\,\mathrm{sen}(2t)$.

   (v) $f(t) = \cos^2(t)$.

5. Usando la definición, calcule $\mathcal{L}[f(t)](s)$ si $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3-t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

6. Calcule $\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$ cuando $f(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$, $t \geq 0$ y $f(t) = \mathrm{e}^{-5t}(t^6 + 6t^2 - 3)$, $t \geq 0$.

7. Usando las propiedades vistas en clase, calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, para :

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s-3} + \dfrac{4}{s+3}$

(b) $F(s) = \dfrac{7s+1}{s^2+4}$

(c) $F(s) = \dfrac{5s}{(s^2+9)^2}$,

(d) $F(s) = \dfrac{3s-5}{(s^2+4)^2}$

8. Resuelva los siguientes PVI usando la Transformada de Laplace,

(i) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 9t\,, & t > 0\,, \\ y(0) = 0\,, y'(0) = 7 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} y''(t) + 16y(t) = \operatorname{sen}(4t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} y'(t) + 3y(t) + 2\displaystyle\int_0^t y(u)\,du = \mathrm{e}^{-t}\,, & t > 0\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} y''(t) - y(t) = -t\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

Mayo, 28 de 2025.
KMR/JMS/CMG//jms/cmg