525401 Análisis Funcional I
Capítulo 4: Problemas variacionales[1]

Leonardo E. Figueroa

CI^{2}MA y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Semestre 2022-1

[1]Casi todos los contenidos tomados del libro **Gabriel N. Gatica:** Introducción al Análisis: Teoría y Aplicaciones, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

4.1 El lema de Lax–Milgram

Necesitamos algunos conceptos preliminares.

Definición 4.1

Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert reales. Se dice que una forma $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ es *bilineal* si ella es lineal en cada una de sus componentes, es decir:

1. $(\forall\, x, y \in H_1)\, (\forall\, z \in H_2)\, (\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad B(\alpha\, x + \beta\, y, z) = \alpha\, B(x, z) + \beta\, B(y, z)$.
2. $(\forall\, x \in H_1)\, (\forall\, y, z \in H_2)\, (\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad B(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, B(x, y) + \beta\, B(x, z)$.

Definición 4.2

Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert reales. Se dice que una forma bilineal $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ es *acotada* si existe una constante $M > 0$ tal que:

$$(\forall\, (x, y) \in H_1 \times H_2) \quad |B(x, y)| \leq M \, \|x\|_1 \, \|y\|_2 \,.$$

Definición 4.3

Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que B es *fuertemente coerciva* o *H-elíptica* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in H) \quad B(x, x) \geq \alpha \, \|x\|^2 \,.$$

Ahora, dados $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert reales y $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, nos interesa definir un operador $\mathbb{B}\colon H_1 \to H_2$ *inducido* por B y viceversa. Para ello, partimos considerando un elemento $v \in H_1$ y definimos al funcional $F_v\colon H_2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$(\forall\, w \in H_2) \quad F_v(w) := B(v, w).$$

Puesto que B es lineal en su segunda componente (porque B es bilineal), se tiene claramente que F_v es lineal. Además, dado que B es acotada y denotando por M a una constante de cota apropiada, se tiene que

$$(\forall\, w \in H_2) \quad |F_v(w)| \leq M \left\| v \right\|_1 \left\| w \right\|_2 ,$$

con lo cual se concluye que $F_v \in H_2'$ y

$$(\forall\, v \in H_1) \quad \left\| F_v \right\| \leq M \left\| v \right\|_1 . \tag{4.1}$$

Lo anterior induce la definición de un operador $\mathcal{B}\colon H_1 \to H_2'$ mediante

$$(\forall\, v \in H_1) \quad \mathcal{B}(v) := F_v,$$

el cual, gracias a la linealidad también de B en su primera componente y a la desigualdad (4.1), es un operador lineal y acotado con

$$\left\| \mathcal{B} \right\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2')} \leq M.$$

Finalmente, si $\mathcal{R}_2\colon H_2' \to H_2$ denota a la aplicación de Riesz correspondiente al Hilbert H_2, se define al operador $\mathbb{B}\colon H_1 \to H_2$ por

$$\mathbb{B} := \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Gráficamente,

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, "\mathcal{B}"] \arrow[dr, "\mathbb{B}"'] & H_2' \arrow[d, "\mathcal{R}_2"] \\
& H_2
\end{tikzcd}
$$

Notar que $\mathbb{B}$ es lineal y acotado (ya que $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{B}$ lo son) y, además:

$$(\forall\,(v,w) \in H_1 \times H_2) \quad \langle \mathbb{B}(v), w\rangle_2 = \langle \mathcal{R}_2(\mathcal{B}(v)), w\rangle_2 = \mathcal{B}(v)(w) = B(v,w). \tag{4.3}$$

Recíprocamente, si $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces se puede definir a la forma bilineal $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ inducida por $\mathbb{B}$ como

$$(\forall\,(v,w) \in H_1 \times H_2) \quad B(v,w) := \langle \mathbb{B}(v), w\rangle_2 \tag{4.4}$$

y a partir de esta forma bilineal B podemos recuperar al operador $\mathbb{B}$ induciéndolo por medio de la construcción anterior.

Teorema 4.1 (Lema de Lax–Milgram)

Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, acotada con constante M y H-elíptica con constante α. Entonces, para cada $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u,v) = F(v) \tag{4.5}$$

y

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|F\|\,. \tag{4.6}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbb{B}\colon H \to H$ el operador lineal y acotado inducido por B; esto es,

$$(\forall\,(v,w) \in H \times H) \quad \langle \mathbb{B}(v), w \rangle = B(v,w).$$

Sea $\mathcal{R}\colon H' \to H$ la aplicación de Riesz del Hilbert H. Entonces, encontrar un único $u \in H$ tal que (4.5) ocurra es equivalente a pedir que

$$(\forall\, v \in H) \quad \langle \mathbb{B}(u), v \rangle = \langle \mathcal{R}(F), v \rangle,$$

o bien,

$$\mathbb{B}(u) = \mathcal{R}(F). \tag{4.7}$$

Más aún, como ello se requiere para *cada* $F \in H'$ y la aplicación de Riesz $\mathcal{R}$ es biyectiva, se observa que la presente demostración se reduce a probar que $\mathbb{B}\colon H \to H$ es biyectivo. Para este efecto, notemos primero, a partir de la H-elipticidad de B, que para cada $v \in H$:

$$\alpha \|v\|^2 \leq B(v,v) = \langle \mathbb{B}(v), v \rangle \leq \|\mathbb{B}(v)\| \, \|v\| \,,$$

de donde

$$(\forall\, v \in H) \quad \alpha \|v\| \leq \|\mathbb{B}(v)\| \,. \tag{4.8}$$

Se sigue que $\mathbb{B}$ es inyectivo y, según el resultado de caracterización de operadores inyectivos con rango cerrado (Teorema 3.15) que $R(\mathbb{B})$ es un subespacio cerrado de H. Luego, por el Teorema de Descomposición Ortogonal (Teorema 2.3), se tiene $H = R(\mathbb{B}) \oplus R(\mathbb{B})^{\perp}$, y por lo tanto solo resta mostrar que $R(\mathbb{R})^{\perp} = \{0\}$ para concluir que $\mathbb{B}$ es sobreyectivo.

En efecto, dado $w \in R(\mathbb{B})^{\perp}$ se tiene que, para todo $z \in R(\mathbb{B})$, $\langle z, w \rangle = 0$; equivalentemente, para todo $v \in H$, $\langle \mathbb{B}(v), w \rangle = 0$. En particular, para $v = w$ se tiene, a causa de la H-elipticidad de B,

$$0 = \langle \mathbb{B}(w), w \rangle = B(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 ,$$

de donde $w = 0$, completando así la demostración de la biyectividad de $\mathbb{B}$. En consecuencia, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $\mathbb{B}(u) = \mathcal{R}(F)$; esto es,

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u, v) = F(v).$$

Luego, tomando $v = u$ en (4.8), se obtiene

$$\alpha \|u\| \leq \|\mathbb{B}(u)\| = \|\mathcal{R}(F)\| = \|F\| .$$

Dividiendo por α obtenemos la desigualdad (4.6) que faltaba. □

El Lema de Lax–Milgram y su demostración motivan varias observaciones. En primer lugar, notamos que la desigualdad (4.6) codifica un resultado de dependencia continua para el problema (4.5). En efecto, dados $F_1, F_2 \in H'$, denotamos por $u_1, u_2 \in H$ a los únicos elementos, garantizados por el Lema de Lax–Milgram, que satisfacen

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u_1, v) = F_1(v)$$

y

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u_2, v) = F_2(v).$$

Se sigue que $u := u_1 - u_2 \in H$ es la única solución del problema

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u, v) = (F_1 - F_2)(v),$$

y, por lo tanto, la desigualdad (4.6) implica que

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F_1 - F_2\|.$$

Lo anterior manifiesta que la estabilidad de la solución del problema (4.5) se beneficia de valores grandes de la constante de elipticidad α.

Otra observación es que, dado $F \in H'$, probar la existencia de un único $u \in H$ tal que $\mathbb{B}(u) = \mathcal{R}(F)$ (equivalente a (4.5)) se puede efectuar mediante una construcción que emplea el Teorema de Punto Fijo de Banach (Teorema 1.1). OMITIMOS SU DISCUSIÓN.

Otro aspecto interesante del problema (4.5) lo constituye el análisis resultante en el caso en el que la forma bilineal B es **simétrica**. En efecto, bajo esta hipótesis adicional, B se convierte en otro producto escalar para H cuya norma inducida, denotada por $\|\cdot\|_B$, está dada por

$$(\forall\, v \in H) \quad \|v\|_B := B(v,v)^{1/2}.$$

Más aún, gracias a la H-elipticidad y acotamiento de B, se obtiene que

$$(\forall\, v \in H) \quad \alpha\|v\|^2 \leq B(v,v) = \|v\|_B^2 \leq M\|v\|^2,$$

lo cual prueba que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_B$ son normas equivalentes para H y, por lo tanto, $(H, B(\cdot,\cdot))$ también es un espacio de Hilbert. En consecuencia, dado $F \in H'$ con respecto a cualquiera de las dos normas, el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 2.4) aplicado a $(H, B(\cdot,\cdot))$ implica la existencia de un único $u \in H$ tal que

$$(\forall\, v \in H) \quad F(v) = B(u,v).$$

De este modo, la demostración del Lema de Lax–Milgram en el caso de una forma bilineal B simétrica se reduce a una simple aplicación del Teorema de Representación de Riesz. Otra forma de ver esto es que el Lema de Lax–Milgram no es más que la extensión del Teorema de Representación de Riesz al caso de una forma bilineal acotada y H-elíptica, pero no necesariamente simétrica.

A continuación ilustramos la aplicabilidad del Lema de Lax–Milgram con un ejemplo unidimensional. Para tal efecto, necesitamos demostrar primero el siguiente resultado.

Lema 4.1 (Desigualdad de Friedrichs–Poincaré)

Sea $\Omega := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y consideremos el espacio de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : v(a) = v(b) = 0 \right\}.$$

Entonces, se tiene

$$(\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \|v\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}\, |v|_{1,\Omega}^2 \,, \tag{4.9}$$

y por lo tanto,

$$(\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq \left[1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right] |v|_{1,\Omega}^2 \,, \tag{4.10}$$

Demostración: Es claro que (4.10) es una consecuencia directa de (4.9). Para probar (4.9), partimos probándolo en el subespacio $C_0^\infty(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$.

Sea entonces $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces, para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\varphi(x) = \int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

lo cual, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, implica que

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 \leq \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \int_a^x (\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t &= (x-a)\int_a^x (\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t \\ &\leq (x-a)\int_a^b (\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t = (x-a)\,|\varphi|_{1,\Omega}^2 \,. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a $x \in \Omega$, se obtiene de la estimación anterior que

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \leq |\varphi|_{1,\Omega}^2 \int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}\,|\varphi|_{1,\Omega}^2 \,. \tag{4.11}$$

Sea ahora $v \in H_0^1(\Omega)$. Como este subespacio es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, existe una sucesión $\{\varphi\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi_n\|_{1,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4.12}$$

Se sigue de (4.11) que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \|\varphi_n\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}\,|\varphi_n|_{1,\Omega}^2 \,.$$

Tomando el límite $n \to \infty$ y usando (4.12), se obtiene (4.9). $\square$

Ejemplo 4.1

Dados $\Omega = (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, consideremos el problema de valores de contorno:

$$-u'' = f \text{ en } \Omega, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Desde el Capítulo 1 sabemos que una formulación variacional de este problema está dada por: Hallar $u \in H := H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u,v) := \int_0^1 u'v' = F(v) =: \int_0^1 f\, v. \tag{4.13}$$

Es claro que F es lineal y además acotado sobre H, ya que, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$(\forall\, v \in H) \quad |F(v)| \leq \left| \int_0^1 f\, v \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}\,,$$

lo cual dice que $\|F\| \leq \|f\|_{0,\Omega}$. A su vez, $B\colon\, H \times H \to \mathbb{R}$ es bilineal y también acotada ya que, usando de nuevo la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$(\forall\, w, v \in H) \quad |B(w,v)| = \left| \int_0^1 w'v' \right| \leq |w|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}\,.$$

Ejemplo 4.1 (cont.)

Por último, de acuerdo al Lema 4.1 con $a = 0$ y $b = 1$, podemos escribir

$$(\forall\, v \in H) \quad B(v,v) = \int_0^1 (v')^2 = |v|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{2}{3}\, \|v\|_{1,\Omega}^2\,,$$

lo cual demuestra que B es H-elíptica con constante $\alpha = 2/3$. Así, una aplicación directa del Lema de Lax–Milgram nos permite concluir que (4.13) posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$, la cual satisface

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{3}{2}\, \|F\| \leq \frac{3}{2}\, \|f\|_{0,\Omega}\,.$$

Nuestro objetivo siguiente es introducir una variante más general del Lema de Lax–Milgram. Para ello, consideramos ahora espacios de Hilbert reales $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, un funcional $F \in H_2'$, una forma bilineal acotada $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$, y buscamos $u \in H_1$ tal que

$$(\forall\, v \in H_2) \quad B(u,v) = F(v). \tag{4.14}$$

En otras palabras, si $\mathbb{B}\colon H_1 \to H_2$ es el operador lineal y acotado inducido por B, y $\mathcal{R}_2\colon H_2' \to H_2$ es la aplicación de Riesz correspondiente al Hilbert H_2, nos interesa hallar $u \in H_1$ tal que

$$\mathbb{B}(u) = \mathcal{R}_2(F).$$

Así, una condición necesaria y suficiente para que (4.14) posea solución única para cada $F \in H_2'$ es que $\mathbb{B}$ sea biyectivo. A su vez, la biyectividad de $\mathbb{B}$ puede reformularse de acuerdo a las equivalencias proporcionadas por el siguiente lema.

Lema 4.2

Sean $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert y sea $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Entonces,

- a $\mathbb{B}$ es sobreyectivo si y solo si $\mathbb{B}^*$ es inyectivo y de rango cerrado; esto es, existe $\alpha > 0$ tal que
$$(\forall\, v \in H_2) \quad \|\mathbb{B}^*(v)\|_1 \geq \alpha \, \|v\|_2 \,. \tag{4.15}$$
- b $\mathbb{B}$ es inyectivo si y solo si
$$(\forall\, u \in H_1 \setminus \{0\}) \quad \sup_{v \in H_2} \langle \mathbb{B}(u), v \rangle_2 > 0.$$
- c $\mathbb{B}^*$ es sobreyectivo si y solo si $\mathbb{B}$ es inyectivo y de rango cerrado; esto es, existe $\alpha > 0$ tal que
$$(\forall\, u \in H_1) \quad \|\mathbb{B}(u)\|_2 \geq \alpha \, \|u\|_1 \,. \tag{4.16}$$
- d $\mathbb{B}^*$ es inyectivo si y solo si
$$(\forall\, v \in H_2 \setminus \{0\}) \quad \sup_{u \in H_1} \langle \mathbb{B}(u), v \rangle_2 > 0.$$
- e $\mathbb{B}$ es biyectivo si y solo si $\mathbb{B}^*$ es biyectivo.

Demostración: $\boxed{\text{a}}$ Supongamos que $R(\mathbb{B}) = H_2$. Se sigue que $R(\mathbb{B}^*)$ también es cerrado (Teorema 3.19) y además $N(\mathbb{B}^*) = R(\mathbb{B})^\perp = H_2^\perp = \{0\}$ (Teorema 3.3(i)). Recíprocamente, si $\mathbb{B}^*$ es inyectivo y de rango cerrado, el rango de $\mathbb{B}$ también es cerrado (Teorema 3.19) y luego, $R(\mathbb{B}) = N(\mathbb{B}^*)^\perp = \{0\}^\perp = H_2$ (Teorema 3.3(iii)). La equivalencia entre que $\mathbb{B}^*$ sea inyectivo y de rango cerrado, por un lado y (4.15), por el otro, viene del Teorema 3.15.

$\boxed{\text{b}}$ Basta ver que $\mathbb{B}$ es inyectivo si y solo si, para todo $u \in H_1 \setminus \{0\}$, $\mathbb{B}(u) \neq 0$.

$\boxed{\text{c y d}}$ Estas equivalencias resultan directamente de las equivalencias a y b al sustituir en éstas $\mathbb{B} \leftarrow \mathbb{B}^*$.

$\boxed{\text{e}}$ Supongamos que $\mathbb{B}$ es biyectivo. Se sigue de la parte a que $\mathbb{B}^*$ es inyectivo y de rango cerrado, lo cual implica (Teorema 3.3(iii)) que $R(\mathbb{B}^*) = N(\mathbb{B})^\perp = \{0\}^\perp = H_1$ y así, $\mathbb{B}^*$ es biyectivo. Para el recíproco basta aplicar la implicación ya obtenida sustituyendo $\mathbb{B} \leftarrow \mathbb{B}^*$. $\square$

Es importante observar aquí, según lo dado en la parte e, que la conjunción de condiciones a $\wedge$ b es equivalente a la conjunción c $\wedge$ d. Al respecto, notemos también que (4.15) y (4.16) pueden reescribirse como

$$(\forall\, v \in H_2) \quad \left\|\mathbb{B}^*(v)\right\|_1 := \sup_{\substack{u \in H_1 \\ u \neq 0}} \frac{\langle \mathbb{B}(u), v \rangle_2}{\left\|u\right\|_1} = \sup_{\substack{u \in H_1 \\ u \neq 0}} \frac{B(u,v)}{\left\|u\right\|_1} \geq \alpha \left\|v\right\|_2 \tag{4.17}$$

y

$$(\forall\, u \in H_1) \quad \left\|\mathbb{B}(u)\right\|_2 := \sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mathbb{B}(u), v \rangle_2}{\left\|v\right\|_2} = \sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{B(u,v)}{\left\|v\right\|_2} \geq \alpha \left\|u\right\|_1 , \tag{4.18}$$

o bien, respectivamente,

$$\inf_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{u \in H_1 \\ u \neq 0}} \frac{B(u,v)}{\left\|u\right\|_1 \left\|v\right\|_2} \geq \alpha \tag{4.19}$$

y

$$\inf_{\substack{u \in H_1 \\ u \neq 0}} \sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq 0}} \frac{B(u,v)}{\left\|u\right\|_1 \left\|v\right\|_2} \geq \alpha, \tag{4.20}$$

razón por la cual ellas reciben el nombre de *condiciones inf-sup*.

De acuerdo al análisis anterior, podemos establecer a continuación una variante más general del Lema de Lax–Milgram.

Teorema 4.2 (Lema de Lax–Milgram generalizado)

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert reales y sea $B\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Suponga que:

- I Existe $\alpha > 0$ tal que $(\forall\, u \in H_1) \quad \sup_{v \in H_2 \setminus \{0\}} \dfrac{B(u,v)}{\|v\|_2} \geq \alpha \|u\|_1$.
- II $(\forall\, v \in H_2 \setminus \{0\}) \quad \sup_{u \in H_1} B(u,v) > 0$.

Entonces, para cada $F \in H_2'$ existe un único $u \in H_1$ tal que

$$(\forall\, v \in H_2) \quad B(u,v) = F(v)$$

y

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H_2'} . \tag{4.21}$$

Además, las condiciones I y II son también necesarias.

Demostración: Basta observar que I y II corresponden a las condiciones c y d del Lema 4.2, las cuales (juntas) son equivalentes a la biyectividad de $\mathbb{B}^*$ y por ende, por la parte e del Lema 4.2, a la de $\mathbb{B}$. La estimación (4.21) se sigue de (4.16) notando que $\mathbb{B}(u) = \mathcal{R}_2(F)$. □

Ciertamente, el teorema anterior puede enunciarse en forma equivalente con las condiciones a y b del Lema 4.2 en lugar de las condiciones c y d. En tal caso, puede asumirse que la constante α de (4.15) y la de (4.16) son la misma, ya que $\left\|(\mathbb{B}^*)^{-1}\right\|$ (acotada por $1/\alpha$ en (4.15)) es igual a $\left\|\mathbb{B}^{-1}\right\|$ (acotada también por $1/\alpha$ en (4.16)), y por lo tanto la estimación (4.21) se obtiene también a partir de a y b, pero haciendo uso de esta identidad.

En el caso especial en el que $H_1 = H_2 = H$, el Lema de Lax–Milgram (Teorema 4.1) se sigue del Lema de Lax–Milgram generalizado (Teorema 4.2). En efecto, si $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, acotada con constante M y H-elíptica con constante α, se obtiene claramente

$$(\forall\, u \in H \setminus \{0\}) \qquad \sup_{v \in H\setminus\{0\}} \frac{B(u,v)}{\|v\|} \geq \frac{B(u,u)}{\|u\|} \geq \alpha \|u\|$$

y

$$(\forall\, v \in H \setminus \{0\}) \qquad \sup_{u \in H} B(u,v) \geq B(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 > 0,$$

lo cual prueba las hipótesis I y II del Teorema 4.2. A su vez, si en lugar de H-elipticidad, se supone que $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ es simétrica, entonces el operador $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(H)$ inducido por B resulta autoadjunto, y en tal caso la hipótesis I del Teorema 4.2 es redundante. Lo anterior sugiere una versión simétrica del Lema de Lax–Milgram generalizado.

Teorema 4.3

Sea H un espacio de Hilbert real y sea $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Suponga que:

I. $(\forall\, w, v \in H) \quad B(w,v) = B(v,w)$.

II. Existe $\alpha > 0$ tal que $(\forall\, u \in H) \quad \sup\limits_{v \in H\setminus\{0\}} \dfrac{B(u,v)}{\|v\|} \geq \alpha \|u\|$.

Entonces, para cada $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u,v) = F(v)$$

y

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'} .$$

Demostración: Es un corolario directo del Teorema 4.2. □

4.2 El método de Galerkin

4.2.1. El caso H-elíptico

En lo que sigue H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica y F un funcional en H'. Entonces, de acuerdo a la versión más simple del Lema de Lax–Milgram (Teorema 4.1), se deduce que existe un único $u \in H$ tal que

$$(\forall\, v \in H) \quad B(u, v) = F(v). \tag{4.22}$$

El objetivo siguiente es presentar un procedimiento que nos permita aproximar la solución de (4.22). para este efecto, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y consideremos los siguientes problemas: Hallar $u_n \in H_n$ tal que

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad B(u_n, v_n) = F(v_n). \tag{4.23}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la dimensión de cada H_n es n. Esta simple idea de reducir el problema original formulado en el espacio de dimensión infinita H a una sucesión de problemas análogos en subespacios de dimensión finita H_n es lo que se conoce como el *Método de Galerkin*. Un objetivo es elegir a los H_n de manera que al menos se cumpla la propiedad

$$\|u - u_n\|_H \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4.24}$$

A continuación mostramos que (4.23) se reduce a un sistema lineal de ecuaciones. En efecto, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de H_n. Entonces, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, e_j.$$

Luego, (4.23) se convierte en: Hallar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, B(e_j, v_n) = F(v_n),$$

lo cual es equivalente a: Hallar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, B(e_j, e_i) = F(e_i). \tag{4.25}$$

Así, definiendo a la matriz $\boldsymbol{B} := (b_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ y a los vectores $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_j)_{j=1}^{n}$ y $\boldsymbol{F} := (f_i)_{i=1}^{n}$, donde

$$b_{i,j} := B(e_j, e_i) \qquad \text{y} \qquad f_i := F(e_i),$$

la formulación (4.25) se reescribe como: Hallar $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{F}. \tag{4.26}$$

Notemos aquí que la H-elipticidad de B garantiza también que (4.26) siempre posee una única solución. En la literatura, usualmente $\boldsymbol{B}$ se denomina *matriz de rigidez* y $\boldsymbol{F}$ se denomina *vector de carga*. Estas denominaciones fueron acuñadas por ingenieros, quienes crearon un caso particular del método de Galerkin para aproximar soluciones del problema de elasticidad lineal, conocido como el *Método de Elementos Finitos*.

Ahora, es preciso señalar que el diseño de algoritmos eficientes para resolver el sistema lineal (4.26) adquiere enorme importancia cuando la dimensión del subespacio H_n tiende a ∞. Al respecto, debemos observar que para matrices de gran tamaño, una estructura rala (*sparse*) o de banda (*banded*) es muy deseable.

También, si la matriz $\boldsymbol{B}$ es simétrica y definida positiva, entonces la resolución de (4.26) se facilita aún más. Este es precisamente el caso cuando la forma bilineal B, además de ser acotada y H-elíptica, resulta ser simétrica. En efecto, dado cualquier $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, definiendo $v := \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \in H_n \subseteq H$, obtenemos en virtud de la H-elipticidad de B que

$$\alpha \|v\|_H^2 \leq B(v,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} \beta_i \beta_j = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\beta},$$

de donde $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\beta} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\beta} = 0 \iff \boldsymbol{\beta} = 0$.

Ejemplo 4.2

Aquí mostramos un ejemplo específico de un esquema de Galerkin asociado al problema de valores de contorno del Ejemplo 4.1. Para ello consideramos una partición $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ del dominio $\Omega = (0,1)$, e introducimos al espacio

$$\begin{aligned} H_n := \Big\{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(1) = 0 \\ \wedge \quad (\forall\, j \in \{1, \ldots, n+1\}) \;\; v|_{[x_{j-1}, x_j]} \in P_1([x_{j-1}, x_j]) \Big\}, \end{aligned}$$

donde $P_1(S)$ denota al espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre cualquier subconjunto S de Ω. Es fácil probar que las funciones en H_n quedan unívocamente determinadas por los valores que toman en los nodos x_j de la partición de Ω.

Ejemplo 4.2 (cont.)

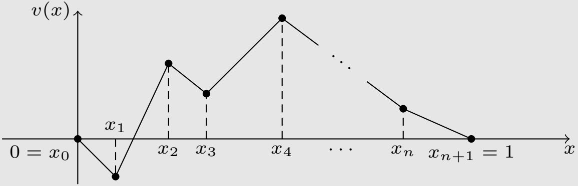

Figura: Ejemplo gráfico de un $v \in H_n$.

En particular, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ constituye una base de H_n, donde cada $e_i \in H_n$ está caracterizado por la propiedad

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\})\, (\forall\, j \in \{0, \ldots, n+1\}) \quad e_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Tales funciones base de H_n se llaman *funciones techo*. En cuanto al cálculo de la matriz de rigidez $\boldsymbol{B}$, se obtiene

$$b_{i,j} = B(e_i, e_j) = \int_0^1 e_i' e_j' = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \\ -1/h_{j+1} & \text{si } j = i-1, \\ -1/h_j & \text{si } j = i+1, \\ 1/h_j + 1/h_{j+1} & \text{si } j = i, \end{cases}$$

donde $h_j := x_j - x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n+1$, y por lo tanto $\boldsymbol{B}$ resulta tridiagonal.

Ejemplo 4.2 (cont.)

En el caso de una partición uniforme con $h_j = h := \frac{1}{n+1}$, el sistema lineal (4.26) queda dado por

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

donde $f_j := F(e_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f\, e_j$. Notemos finalmente que, debido a la base especial que estamos empleando, los componentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la solución del sistema lineal (4.27) coinciden con los valores que toma la solución de Galerkin u_n en cada uno de los nodos interiores de la partición; en efecto,

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad u_n(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{j,i} = \alpha_i.$$

Lo anterior constituye una de las situaciones más simples posibles que muestran el tipo de sistemas lineales que se obtienen al aplicar el Método de Galerkin al problema (4.22).

Sin embargo, el procedimiento ilustrado a través del Ejemplo 4.2 representa la misma idea que motivó a los ingenieros en la década del 60 a crear el Método de Elementos Finitos (MEF) para resolver la formulación débil del problema de elasticidad. Más precisamente, el MEF es un caso particular del método de Galerkin, en el cual se utilizan subespacios de dimensión finita H_n cuyos elementos son funciones seccionalmente polinomiales.

Nuestro propósito siguiente es obtener una cota superior para el **error** que se comete al usar el método de Galerkin. Este error es la diferencia en norma entre la solución exacta u de (4.22) y la solución aproximada u_n de (4.23). Para ello, vemos primero que de (4.22) y (4.23) se deduce que

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad B(u - u_n, v_n) = 0. \tag{4.28}$$

Esta relación se conoce como *ortogonalidad de Galerkin*. La razón de este nombre se debe a lo que acontece cuando B es simétrica, en cuyo caso B se convierte en un producto interior con norma asociada $\|v\|_E := B(v,v)^{1/2}$, $v \in H$ (llamada *norma de la energía*), equivalente a la norma original del espacio H. En ese caso, la ecuación (4.28) es la condición de ortogonalidad que caracteriza a la mejor aproximación de $u \in H$ por elementos del subespacio H_n con respecto a $\|\cdot\|_E$ (cf. (2.6) en el Teorema 2.1). En otras palabras, (4.28) muestra que, **en el caso simétrico**, la solución de Galerkin u_n es la mejor aproximación de la solución exacta u con respecto a la norma de la energía; esto es:

$$\|u - u_n\|_E = \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_E\,. \tag{4.29}$$

No obstante, es importante reiterar que la relación de orgonalidad (4.28) también se satisface para B no-simétrica.

Lema 4.3 (Lema de Céa)

Suponga que B es una forma bilineal sobre un espacio de Hilbert H acotada con constante M y H-elíptica con constante α. Sean $u \in H$ y $u_n \in H_n$ las soluciones de (4.22) y (4.23), respectivamente. Entonces,

$$\|u - u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_H . \tag{4.30}$$

Más aún, bajo la hipótesis adicional de que B es simétrica, la desigualdad anterior se mejora a

$$\|u - u_n\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_n \in H_n} \|u - v_n\|_H . \tag{4.31}$$

Demostración: Para todo $v_n \in H_n$,

$$\alpha \|u - u_n\|_H^2 \leq B(u-u_n, u-u_n) = B(u-u_n, u-v_n+v_n-u_n) \overset{(4.28)}{=} B(u-u_n, u-v_n).$$

Como B es acotada, la desigualdad anterior implica

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad \alpha \|u - u_n\|_H^2 \leq M \|u - u_n\|_H \|u - v_n\|_H ,$$

de donde, dividiendo por $\|u - u_n\|_H$ si esta norma no es nula, y gratis en otro caso, resulta

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad \|u - u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_n\|_H . \tag{4.32}$$

Tomando el ínfimo en (4.32) con respecto a $v_n \in H_n$ se obtiene (4.30).

A su vez, si suponemos que B es simétrica, entonces la H-elipticidad de B, la caracterización dada por (4.29) y el acotamiento de B implican que

$$(\forall\, v_n \in H_n) \quad \alpha \, \|u - u_n\|_H^2 \leq \|u - u_n\|_E^2 \leq \|u - v_n\|_E^2 \leq M \, \|u - v_n\|_H^2 \,,$$

de donde, dividiendo por $\alpha > 0$, tomando raíz cuadrada y luego ínfimo respecto a $v_n \in H_n$, se obtiene (4.31). $\square$

Las cotas de error dadas por (4.30) y (4.31) se conocen como *estimaciones de Céa* y ellas proveen el punto de partida para finalmente derivar las propiedades de convergencia de los Métodos de Elementos Finitos. Como se mencionó antes, un mínimo requerimiento es la convergencia (4.24), la cual garantiza que el error tiende a cero a medida que la dimensión del espacio H_n tiende a ∞.

4.2.2. El caso general

OMITIDO.

4.3 ~~El Teorema de Lions Stampacchia~~

OMITIDO.

4.4 Teoría de Babuška–Brezzi

4.4.1. La ecuación de operadores

Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sean $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ Y $b\colon H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas. Entonces, dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, nos interesa el siguiente problema: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} (\forall\, \tau \in H) \quad & a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) = F(\tau), \\ (\forall\, v \in Q) \quad & b(\sigma,v) = G(v). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ahora, sean $\boldsymbol{A}\colon H \to H$ y $\boldsymbol{B}\colon H \to Q$ los operadores lineales y acotados inducidos por las formas bilineales a y b, respectivamente. Equivalentemente, de acuerdo al análisis de la Sección 4.1 (cf. (4.2), (4.3), (4.4)), se tiene

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{R}_H \circ \mathcal{A} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} := \mathcal{R}_Q \circ \mathcal{B},$$

donde $\mathcal{R}_H : H' \to H$ y $\mathcal{R}_Q : Q' \to Q$ son las aplicaciones de Riesz respectivas y los operadores $\mathcal{A}\colon H \to H'$ y $\mathcal{B}\colon H \to Q'$ están definidos por:

$$\begin{aligned} (\forall\, \sigma \in H)\,(\forall\, \tau \in H) \quad & \mathcal{A}(\sigma)(\tau) := a(\sigma,\tau), \\ (\forall\, \tau \in H)\,(\forall\, v \in Q) \quad & \mathcal{B}(\tau)(v) := b(\tau,v). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$(\forall\, (\sigma,\tau) \in H \times H) \quad a(\sigma,\tau) = \langle \boldsymbol{A}(\sigma), \tau\rangle_H, \tag{4.52}$$

$$(\forall\, (\tau,v) \in H \times Q) \quad b(\tau,v) = \langle \boldsymbol{B}(\tau), v\rangle_Q = \langle \boldsymbol{B}^*(v), \tau\rangle_H, \tag{4.53}$$

donde $\boldsymbol{B}^* : Q \to H$ es el operador adjunto de $\boldsymbol{B}$.

Así, (4.51) se reescribe, equivalentemente, como: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} (\forall\, \tau \in H) \quad & \langle \boldsymbol{A}(\sigma), \tau \rangle_H + \langle \boldsymbol{B}^*(u), \tau \rangle_H = \langle \mathcal{R}_H(F), \tau \rangle_H, \\ (\forall\, v \in Q) \quad & \langle \boldsymbol{B}(\sigma), v \rangle_Q \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = \langle \mathcal{R}_Q(G), v \rangle_Q, \end{aligned}$$

o bien: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\sigma) + \boldsymbol{B}^*(u) &= \mathcal{R}_H(F), \\ \boldsymbol{B}(\sigma) \qquad\qquad &= \mathcal{R}_Q(G), \end{aligned} \tag{4.54}$$

lo cual, denotando al operador nulo por $\mathbf{0}$, se escribe compactamente como la siguiente ecuación matricial de operadores: Hallar $(\sigma, u) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_H(F) \\ \mathcal{R}_Q(G) \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

El siguiente objetivo es proporcionar condiciones necesarias y suficientes para que el problema (4.51) (equivalentemente, (4.54) o (4.55)) esté bien puesto.

4.4.2. La condición inf-sup

Recordemos primero que este concepto ya se introdujo en la Sección 4.1 (cf. (4.17), (4.18), (4.19) y (4.20)). En efecto, se dice que la forma bilineal acotada $b\colon H \times Q \to \mathbb{R}$ satisface la condición inf-sup continua si existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$(\forall\, v \in Q) \qquad \sup_{\tau \in H \setminus \{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_H} \geq \beta \, \|v\|_Q \,. \tag{4.56}$$

Notar, al igual como se estableció para los pares (4.17)-(4.18) y (4.19)-(4.20), que (4.56) es equivalente a

$$\operatorname*{ínf}_{v \in Q \setminus \{0\}} \sup_{\tau \in H \setminus \{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_H \, \|v\|_Q} \geq \beta,$$

lo cual explica nuevamente el apelativo de *inf-sup*. Esta hipótesis también recibe el nombre de *Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi* o, sencillamente, condición de *Babuška–Brezzi*. Además, ultilizando el operador adjunto $\boldsymbol{B}^*$, se tiene que, para todo $v \in Q$,

$$\sup_{\tau \in H \setminus \{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_H} = \sup_{\tau \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle \boldsymbol{B}^*(v), \tau \rangle_H}{\|\tau\|_H} = \|\boldsymbol{B}^*(v)\|_H \,,$$

y por lo tanto, la condición (4.56) se escribe también como

$$(\forall\, v \in Q) \quad \|\boldsymbol{B}^*(v)\|_H \geq \beta \, \|v\|_Q \,. \tag{4.57}$$

Más aún, el siguiente lema establece más condiciones equivalentes para (4.56) y (4.57).

Lema 4.6

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

I. Existe $\beta > 0$ tal que

$$(\forall\, v \in Q) \qquad \sup_{\tau \in H\setminus\{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_H} \geq \beta\, \|v\|_Q\, .$$

II. $\boldsymbol{B}^*$ es un isomorfismo (biyección lineal) de Q en $N(\boldsymbol{B})^\perp$ y

$$(\forall\, v \in Q) \quad \|\boldsymbol{B}^*(v)\|_H \geq \beta\, \|v\|_Q\, .$$

III. $\boldsymbol{B}$ es un isomorfismo (biyección lineal) de $N(\boldsymbol{B})^\perp$ en Q y

$$(\forall\, \tau \in N(\boldsymbol{B})^\perp) \quad \|\boldsymbol{B}(\tau)\|_Q \geq \beta\, \|\tau\|_H\, . \tag{4.58}$$

IV. $\boldsymbol{B}\colon H \to Q$ es sobreyectivo.

Demostración: $\boxed{\text{I} \Rightarrow \text{II}}$ Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que (4.56) (equivalentemente, (4.57)) se satisface. Se sigue precisamente de (4.57) que $N(\boldsymbol{B}^*) = \{0\}$ y que $R(\boldsymbol{B}^*)$ es cerrado (Teorema 3.15). Por lo tanto, $\boldsymbol{B}^*$ es inyectivo y $R(\boldsymbol{B}^*) \overset{\text{T. 3.3(III)}}{=} N((\boldsymbol{B}^*)^*)^\perp = N(\boldsymbol{B})^\perp$. Así, $\boldsymbol{B}^*$ es una biyección lineal de Q en $N(\boldsymbol{B})^\perp$.

$\boxed{\text{II} \Rightarrow \text{III}}$ Supongamos que $\boldsymbol{B}^*$ es una biyección lineal de Q en $N(\boldsymbol{B})^\perp$ y que se satisface (4.57). Se sigue nuevamente de (4.57) que $N(\boldsymbol{B}^*) = \{0\}$ y que $R(\boldsymbol{B}^*)$ es cerrado. Esto último implica, en virtud del Teorema 3.19, que $R(\boldsymbol{B})$ también es cerrado, y por lo tanto $R(\boldsymbol{B}) \overset{\text{T. 3.3(III)}}{=} N(\boldsymbol{B}^*)^\perp = \{0\}^\perp = Q$. De este modo, $\boldsymbol{B}$ es una biyección lineal de $N(\boldsymbol{B})^\perp$ en Q.

Sea $\boldsymbol{T}\colon Q \to N(\boldsymbol{B})^\perp$ el operador definido por $\boldsymbol{T}(v) := \boldsymbol{B}^*(v)$ para todo $v \in Q$. Esto es, $\boldsymbol{T}$ es el mismo operador inyectivo $\boldsymbol{B}^*$, pero con el codominio restringido al rango para que quede un operador invertible. Para todo $\tau \in N(\boldsymbol{B})^\perp$,

$$\left\|\boldsymbol{T}^{-1}(\tau)\right\|_Q \overset{\text{II}}{\leq} \frac{1}{\beta}\left\|\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{T}^{-1}(\tau))\right\|_H = \frac{1}{\beta}\left\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^{-1}(\tau))\right\|_H = \frac{1}{\beta}\|\tau\|_H$$

Por otro lado, sea $\boldsymbol{S}\colon N(\boldsymbol{B})^\perp \to Q$ la restricción $\boldsymbol{S} := \boldsymbol{B}|_{N(\boldsymbol{B})^\perp}$. Ya sabemos que $\boldsymbol{S}$ es biyectivo. Ahora, $(\boldsymbol{S}^{-1})^* = \boldsymbol{T}^{-1}$, ya que para todo $\tau \in N(\boldsymbol{B})^\perp$ y todo $v \in Q$,

$$\begin{aligned}
\langle(\boldsymbol{S}^{-1})^*(\tau), v\rangle_Q = \langle\tau, \boldsymbol{S}^{-1}(v)\rangle_H &= \langle\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^{-1}(\tau)), \boldsymbol{S}^{-1}(v)\rangle_H \\
&= \langle\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{T}^{-1}(\tau)), \boldsymbol{S}^{-1}(v)\rangle_H = \langle\boldsymbol{T}^{-1}(\tau), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}^{-1}(v))\rangle_Q \\
&= \langle\boldsymbol{T}^{-1}(\tau), \boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}^{-1}(v))\rangle_Q = \langle\boldsymbol{T}^{-1}(\tau), v\rangle_Q.
\end{aligned}$$

Así,

$$\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\right\| \overset{\text{L. 3.6}}{=} \left\|(\boldsymbol{S}^{-1})^*\right\| = \left\|\boldsymbol{T}^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\beta}.$$

La desigualdad (4.58) se obtiene entonces por

$$(\forall\, \tau \in N(\boldsymbol{B})^\perp) \quad \|\tau\|_H = \left\|\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{S}(\tau))\right\|_H \leq \frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{S}(\tau)\|_Q = \frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{B}(\tau)\|_Q\,.$$

$\boxed{\text{III} \Rightarrow \text{IV}}$ La sobreyectividad de $\boldsymbol{B}$ se sigue inmediatamente de la sobreyectividad de $\boldsymbol{B}|_{N(\boldsymbol{B})^\perp}$.

$\boxed{\text{IV} \Rightarrow \text{I}}$ Supongamos que $\boldsymbol{B}\colon H \to Q$ es sobreyectivo. Como $R(\boldsymbol{B}) = Q$ es obviamente cerrado, se tiene que $R(\boldsymbol{B}^*)$ también lo es (Teorema 3.19). Además, como $Q = R(\boldsymbol{B}) \overset{\text{T. 3.3(III)}}{=} N(\boldsymbol{B}^*)^\perp$, se tiene que $\{0\} = Q^\perp = (N(\boldsymbol{B}^*)^\perp)^\perp = N(\boldsymbol{B}^*)$, por lo que $\boldsymbol{B}^*$ es inyectivo. De este modo, por la caracterización de los operadores lineales, acotados e inyectivos de rango cerrado otorgada por el Teorema 3.15, se tiene la desigualdad (4.57), que es lo mismo que I. $\square$

4.4.3. El resultado principal

La caracterización de la condición inf-sup dada por el Lema 4.6 es fundamental en la demostración del siguiente teorema, el cual establece condiciones suficientes para que (4.51) esté bien puesto. En su enunciado y en lo que sigue de esta sección persistimos con las notaciones y definiciones de las secciones anteriores.

Teorema 4.7 (Teorema de Babuška–Brezzi)

Sea $V := N(\boldsymbol{B})$ y sea $\Pi\colon H \to V$ el operador de proyección ortogonal. Suponga que

- I $\Pi\boldsymbol{A}\colon V \to V$ es una biyección.
- II La forma bilineal b satisface la condición inf-sup (4.56) (equivalentemente, (4.57)).

Entonces, para cada par $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(\sigma, u) \in H \times Q$ solución de (4.51) (equivalentemente, (4.54) o (4.55)). Además, existe una constante $C > 0$, la cual depende de $\|\boldsymbol{A}\|$, $\left\|(\Pi\boldsymbol{A})^{-1}\right\|$ y β, tal que

$$\|(\sigma, u)\|_{H\times Q} \leq C\left(\|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'}\right). \tag{4.59}$$

Demostración: De la hipótesis II de este teorema y la parte III del Lema 4.6, se deduce que existe un único $\sigma_g \in V^{\perp}$ tal que

$$\boldsymbol{B}(\sigma_g) = \mathcal{R}_Q(G), \tag{4.60}$$

y de acuerdo a (4.58), se tiene

$$\|\sigma_g\|_H \leq \frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{B}(\sigma_g)\|_Q = \frac{1}{\beta}\|G\|_{Q'}. \tag{4.61}$$

A su vez, dado que $\Pi\boldsymbol{A}\colon V \to V$ es una biyección y que $\Pi(\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_g))$ pertenece a V, existe un único $\sigma_0 \in V$ tal que $\Pi\boldsymbol{A}(\sigma_0) = \Pi(\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_g))$.

Además, el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4) garantiza la existencia de $\tilde{C} := \left\|(\Pi \boldsymbol{A})^{-1}\right\|$ tal que

$$\|\sigma_0\|_H \leq \tilde{C} \,\|\Pi(\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_g))\|_H \leq \tilde{C} \,\|\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_g)\|_H \,,$$

de donde, empleando la cota para $\|\sigma_g\|_H$ obtenida en (4.61), resulta

$$\|\sigma_0\| \leq \tilde{C} \left(\|F\|_{H'} + \frac{1}{\beta} \|\boldsymbol{A}\| \, \|G\|_{Q'} \right). \tag{4.62}$$

Ahora, de la condición de ortogonalidad del proyector Π, es fácil ver que la identidad $\Pi \boldsymbol{A}(\sigma_0) = \Pi(\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_g))$ es equivalente a decir que $\boldsymbol{A}(\sigma_0 + \sigma_g) - \mathcal{R}_H(F)$ pertenece a $V^{\perp}$. Se sigue de la parte II del Lema 4.6 que existe un único $u \in Q$ tal que

$$\boldsymbol{B}^*(u) = \mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_0 + \sigma_g) \tag{4.63}$$

y este u satisface

$$\|u\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \|\boldsymbol{B}^*(u)\|_H = \frac{1}{\beta} \|\mathcal{R}_H(F) - \boldsymbol{A}(\sigma_0 + \sigma_g)\|_H \,,$$

de donde

$$\|u\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \bigg(\|F\|_{H'} + \|\boldsymbol{A}\| \left(\|\sigma_0\|_H + \|\sigma_g\|_H \right) \bigg). \tag{4.64}$$

De este modo, definiendo $\sigma := \sigma_0 + \sigma_g \in H$ y notando que $\boldsymbol{B}(\sigma_0) = 0$, se deduce de (4.60), (4.63) y de las estimaciones (4.61), (4.62) y (4.64), que (σ, u) resuelve el problema (4.54) y satisface la estimación (4.59).

Para la unicidad, sea ahora $(\hat{\sigma}, \hat{u}) \in H \times Q$ una solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\hat{\sigma}) + \boldsymbol{B}^*(\hat{u}) &= 0, \\ \boldsymbol{B}(\hat{\sigma}) \qquad\quad &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene que $\hat{\sigma} \in V$ y al aplicar el proyector Π en la primera, recordando que $\boldsymbol{B}^*(\hat{u}) \in V^{\perp}$, se obtiene que $\Pi \boldsymbol{A}(\hat{\sigma}) = 0$. Como $\Pi \boldsymbol{A} \colon V \to V$ es una biyección lineal, se sigue que $\hat{\sigma} = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación, resulta que $\boldsymbol{B}^*(\hat{u}) = 0$. Finalmente, como $\boldsymbol{B}^* : Q \to V^{\perp}$ también es una biyección lineal, concluimos que $\hat{u} = 0$. □

A continuación mostramos que las condiciones I y II del Teorema 4.7 son también **necesarias**.

Teorema 4.8

Sea $V := N(\boldsymbol{B})$ y sea $\Pi \colon H \to V$ el operador de proyección ortogonal. Suponga que para cada $(F, G) \in H' \times Q'$ existe una única solución $(\sigma, u) \in H \times Q$ de (4.51) (equivalentemente, (4.54) o (4.55)), la cual satisface, además

$$\|(\sigma, u)\|_{H \times Q} \leq C \left(\|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right)$$

con una constante $C > 0$ independiente de F y G. Entonces,

- I $\Pi \boldsymbol{A} \colon V \to V$ es una biyección.
- II La forma bilineal b satisface la condición inf-sup (4.56).

Demostración:

Probamos primero II. Para ello, en virtud de la equivalencia entre las afirmaciones I y IV del Lema 4.6, basta demostrar que $\boldsymbol{B}$ es sobreyectivo. En efecto, dado $g \in Q$, sabemos por hipótesis que existe un único par $(\sigma_g, u_g) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\sigma_g) + \boldsymbol{B}^*(u_g) &= 0, \\ \boldsymbol{B}(\sigma_g) \qquad\qquad &= g \end{aligned}$$

y es claro que la segunda ecuación de este sistema confirma la sobreyectividad de $\boldsymbol{B}$. También podremos usar las afirmaciones II y III del Lema 4.6 en lo que sigue.

Probemos ahora I, la biyectividad de $\Pi\boldsymbol{A} \colon V \to V$. Dado $f \in V$, sabemos también por hipótesis que existe un único $(\sigma_f, u_f) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\sigma_f) + \boldsymbol{B}^*(u_f) &= f, \\ \boldsymbol{B}(\sigma_f) \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo a la segunda ecuación, $\sigma_f \in V = N(\boldsymbol{B})$ y por la afirmación II del Lema 4.6, $\boldsymbol{B}^*(u_f) \in V^\perp$. Luego, aplicando el proyector ortogonal a la primera ecuación, se obtiene que $\Pi\boldsymbol{A}(\sigma_f) = \Pi(f) = f$. Por lo tanto, $\Pi\boldsymbol{A} \colon V \to V$ es sobreyectivo.

A su vez, sea ahora $\sigma_0 \in V$ tal que $\Pi\boldsymbol{A}(\sigma_0) = 0$. Se sigue que $\boldsymbol{A}(\sigma_0) = V^\perp$. Como, por la afirmación II del Lema 4.6, $\boldsymbol{B}^*$ es una biyección lineal de Q en $V^\perp$, existe un único $u_0 \in Q$ tal que $\boldsymbol{B}^*(u_0) = -\boldsymbol{A}(\sigma_0)$. Así,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\sigma_0) + \boldsymbol{B}^*(u_0) &= 0, \\ \boldsymbol{B}(\sigma_0) \qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

y gracias nuevamente a la hipótesis, necesariamente $(\sigma_0, u_0) = (0, 0)$, lo cual prueba la inyectividad de $\Pi\boldsymbol{A} \colon V \to V$. □

Por otra parte, es fácil ver, de acuerdo a lo establecido por el Lema 4.2 y las desigualdades (4.17) y (4.18), y en virtud a la relación de ortogonalidad que caracteriza al proyector $\Pi\colon H \to V$ (cf. (2.6) del Teorema 2.1), que la condición I del Teorema 4.7 (= I del Teorema 4.8) es equivalente a cada uno de los siguientes pares de condiciones:

$$\begin{cases} \boxed{\text{I-1}} \ (\exists\,\alpha > 0)\,(\forall\,\sigma \in V) \quad \sup\limits_{\tau \in V\setminus\{0\}} \dfrac{a(\sigma,\tau)}{\|\tau\|_H} \geq \alpha\,\|\sigma\|_H\,, \\ \boxed{\text{I-2}} \ (\forall\,\tau \in V \setminus \{0\}) \quad \sup\limits_{\sigma \in V} a(\sigma,\tau) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\text{I-1}'} \ (\exists\,\alpha > 0)\,(\forall\,\sigma \in V) \quad \sup\limits_{\tau \in V\setminus\{0\}} \dfrac{a(\tau,\sigma)}{\|\tau\|_H} \geq \alpha\,\|\sigma\|_H\,, \\ \boxed{\text{I-2}'} \ (\forall\,\tau \in V \setminus \{0\}) \quad \sup\limits_{\sigma \in V} a(\tau,\sigma) > 0. \end{cases}$$

Más precisamente, la hipótesis I-1 (resp. I-1′) es una condición inf-sup para la forma bilineal a, la cual equivale a requerir que el operador $\Pi\boldsymbol{A}$ (resp. $(\Pi\boldsymbol{A})^*$) sea inyectivo y de rango cerrado, lo cual, además, es equivalente a que el operador $(\Pi\boldsymbol{A})^*$ (resp. $\Pi\boldsymbol{A}$) se sobreyectivo. A su vez I-2 (resp. I-2′) es equivalente a la inyectividad de $(\Pi\boldsymbol{A})^*$ (resp. $\Pi\boldsymbol{A}$).

Ciertamente, cuando a es una forma bilineal **simétrica** en $V \times V$, el operador $\Pi\boldsymbol{A}$ resulta autoadjunto, y en tal caso I-2 e I-2′ son redundantes y por lo tanto innecesarias.

Por otra parte, es importante destacar que una condición **suficiente** (pero no necesaria) para I que aparece con mucha frecuencia en las aplicaciones es la V-elipticidad de la forma bilineal a; esto es, de acuerdo a la Definición 4.3,

$$(\exists\, \alpha > 0)\ (\forall\, \tau \in V) \quad a(\tau, \tau) \geq \alpha\, \|\tau\|_H^2 \,. \tag{4.65}$$

En virtud de lo anterior, el teorema que usualmente se encuentra en la literatura, incluso con mayor frecuencia que el Teorema 4.7, es el que se enuncia a continuación:

Teorema 4.9

Sea $V := N(\boldsymbol{B})$ y suponga que

- I La forma bilineal a es V-elíptica (cf. (4.65)).
- II La forma bilineal b satisface la condición inf-sup (4.56) (equivalentemente, (4.57)).

Entonces, para cada par $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(\sigma, u) \in H \times Q$ solución de (4.51) (equivalentemente, (4.54) o (4.55)). Además, existe una constante $C > 0$, la cual depende de $\|\boldsymbol{A}\|$, α y β, tal que

$$\|(\sigma, u)\|_{H \times Q} \leq C \left(\|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right) .$$

Demostración: Basta ver, por ejemplo en virtud del Lema de Lax–Milgram (Teorema 4.1), que la V-elipticidad de a implica la hipótesis I del Teorema 4.7. □

4.4.4. El esquema de Galerkin OMITIDO.