UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°3$ (Integrales y Teorema de Clases Monótonas).

Problemas a resolver en práctica

1. Sea ν la única medida sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que satisface $\nu(]a,b]) = b-a$ para todo $b > a$.

   a) Demuestre que
   $$\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\,\nu(dt) = \frac{\pi}{2}.$$

   b) Demuestre que
   $$\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,\nu(dt) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,dt,$$
   donde la integral de la derecha se entiende en el sentido de integral impropia de Riemann.

2. Considere la función g definida sobre $]0,+\infty[$ a través de
   $$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}dt,$$
   donde la integral se entiende en el sentido de integral impropia de Riemann. Demuestre que g es derivable y calcule $g'(x)$.

3. Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos del conjunto Ω que es cerrada por las operaciones de uniones finitas y el complemento. O sea, $A^c \in \mathcal{S}$ si $A \in \mathcal{S}$ y $A \bigcup B \in \mathcal{S}$ cuando $A, B \in \mathcal{S}$. Suponga que $\mathbb{P}$ y $\widetilde{\mathbb{P}}$ son dos medidas de probabilidad sobre $\sigma(\mathcal{S})$ que satisfacen
   $$\mathbb{P}(A) = \widetilde{\mathbb{P}}(A) \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$
   Demuestre que $\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

   a) Demuestre que la función $x \mapsto sen\,(x\,t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo.

   b) Para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos

   $$g(t) = \int sen\,(x\,t)\,\mathbb{P}(dx).$$

   Demuestre que g es derivable y calcule $g'(t)$.

2. Sea μ una medida positiva sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ con $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Considere la función

   $$h(t) = \int cos\left(y^2\,t\right)\mu(dy),$$

   donde $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que h es continua.

3. Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que dos σ-álgebras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ contenidas en $\mathcal{F}$ son independientes si y solo si

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

   para todo $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$. Suponga que para todo $j \in J$, donde J es un conjunto dado (puede ser no numerable), $X_j : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una variable aleatoria. Considere la σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Asuma que para cualquier subconjunto finito $\{j_1, \ldots, j_p\} \subset J$, $\mathcal{G}$ es independiente de $\sigma\left(X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}\right)$, que es la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual $X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}$ son medibles. Demuestre que $\mathcal{G}$ es independiente de la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual todos los X_j con $j \in J$ sean medibles.

CMG/cmg.