UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525214, 525523)
Listado Nº 1 (Ecuación del calor, EDP y separación de variables)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. **(Propagación del calor).**

   (a) Escriba el problema con valores inicial y de frontera (PVIF) describiendo la propagación del calor en una barra metálica de longitud L, sabiendo que su superficie lateral como sus extremidades estan aisladas térmicamente y el problema es uni-dimensional.

   (b) Misma pregunta para una barra metálica aislada térmicamente en su superficie lateral, sabiendo que se mantienen flujos térmicos en sus extremidades. Se supone que la densidad de corriente térmica j_Q^{iz} en la extremidad izquierda de la barra ($x = 0$) al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura $T_{\mathrm{aere}}(t)$ del aere y la temperatura $T(0,t)$ de la barra en esa extremidad. Analogamente, la densidad de corriente térmica j_Q^{der} en la extremidad derecha ($x = L$) al tiempo t es proporcional a $T_{\mathrm{aere}}(t) - T(L,t)$.

2. **(Separación de variables).** Usando el método de separación de variables, halle una solución del siguiente PVIF para la función incógnita $u(x,t)$

$$\begin{cases} 2x(1+t)\partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) = 0 \quad , \quad x > 0 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 1 + t \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{x^2} \quad , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

3. **(Ecuación de ondas).** Considere el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{1}$$

   donde la primera ecuación es la ecuación de ondas.

   (a) Usando el método de separación de variables, halle las soluciones no triviales de (1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ donde $X : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ y $T : [0,\infty[\to \mathbb{R}$.

   (b) Muestre que el principio de superposición se aplica al PVIF, estos es, una superposición lineal de soluciones de (1) también es solución de (1).
   Deduzca una familia de soluciones de (1) dependiendo de N constantes arbitarias, para cualquier entero $N > 0$.

4. **(Propogación del calor en una barra con extremidades aísladas).**
(Problema 1 de la Evaluación 1, 2024-2)
El PVIF que modeliza la propagación del calor en una barra metálica cuasi unidimensional de longitud L, de superficie lateral aíslada térmicamente y cuyas extremidades en $x = 0$ y $x = L$ estan también aísladas térmicamente, está dado por (Problema 1(a))

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L\ ,\ t > 0 \\ \partial_x T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad , \end{cases}$$

donde $T(x,t)$ es la temperatura en la sección de la barra de posición x al tiempo t, $k > 0$ es una constante y $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es el perfil inicial de temperatura de la barra.

(a) Usando el método de separación de variables, determine soluciones de la forma $T(x,t) = u(x)v(t)$ del problema con valores de frontera

$$\text{(PVF)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) \quad , \quad 0 < x < L\,,\, t > 0 \\ \partial_x T(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0\ . \end{cases}$$

Muestre que los valores propios λ_n del problema de Sturm-Liouville asociado satisfacen $\lambda_n > 0$ y estan dados por

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

esto es, el problema de Sturm-Liouville solamente tiene soluciones constantes si $\lambda \neq \lambda_n$.

(b) Justifique que el problema con valores de frontera (PVF) satisface el principio de superposición. Deduzca que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ y cualquieras constantes $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$,

$$T_N(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{-k\lambda_n t} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\ , \tag{2}$$

es solución de (PVF).

5. **(EDP lineales de 2ndo orden).** Considere la EDP de segundo orden

$$a\,\partial_x^2 u + b\,\partial_x\partial_t u + c\,\partial_t^2 u + d\,\partial_x u + e\,\partial_t u + f\,u = 0\ , \tag{3}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes reales.

(a) Muestre que esta EDP es lineal. ¿ Existen otras EDP lineales de segundo orden con dos variables independientes x y t?

(b) Suponga que $b \neq 0$. Introducimos las nuevas variables

$$z = x\cos\theta + t\sin\theta \quad , \quad w = -x\sin\theta + t\cos\theta$$

con $\theta \in [0,\pi]$ dado por

$$\text{cotan}(2\theta) = \frac{a-c}{b} \ .$$

Muestre que la EDP (3) se re-escribe como

$$\widetilde{a}\,\partial_z^2 u + \widetilde{c}\,\partial_w^2 u + \widetilde{d}\,\partial_z u + \widetilde{e}\,\partial_w u + f\,u = 0 \ ,$$

donde

$$\widetilde{a} = \frac{1}{2}\big(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + b^2 - 4ac}\big) \ , \ \widetilde{c} = \frac{1}{2}\big(a + c - \sqrt{(a+c)^2 + b^2 - 4ac}\big) \ .$$

(c) Si $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \widetilde{a}\,\widetilde{c} > 0$, uno dice que la EDP es *elíptica*, si $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow \widetilde{a}\,\widetilde{c} = 0$, la EDP es *parabólica*, y si $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow \widetilde{a}\,\widetilde{c} < 0$, la EDP es *hiperbólica*. Determine la naturaleza de las siguientes EDPs lineales de segundo orden:

(i) ecuación del calor $\partial_t u - k\partial_x^2 u = 0$ ($k > 0$);

(ii) ecuación de ondas $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$;

(iii) ecuación del potencial de Laplace $\partial_x^2 u + \partial_t^2 u = 0$.

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

6. Considere una barra metálica que satisface las hipótesis vistas en clase en la derivación de la ecuación del calor uni-dimensional, salvo que su superficie lateral no está aislada térmicamente. Sea $T(x,t)$ la temperatura al tiempo t en la sección transversal de la barra de posición x, con $0 \leq x \leq L$, y T_{aere} la temperatura del aere. Se supone que la perdida o ganancia de calor a través la superficie lateral tienen una densidad de corriente térmica proporcional a la diferencia $T(x,t) - T_{\text{aere}}$.

(a) Muestre que la ecuación de conservación de la energia en la región de la barra delimitada por las secciones x y $x + \delta x$ entre los tiempos t y $t + \delta t$, con $\delta x \to 0$ y $\delta t \to 0$, se escribe

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} - c\big(T(x,t) - T_{\text{aere}}\big) \ ,$$

donde $j_Q(x,t)$ es la densidad de corriente térmica a través de la sección x al tiempo t y c es una constante positiva.

(b) Usando también la ley de Fourier $j_Q(x,t) = -\kappa\,\frac{\partial T}{\partial x}$ y la relación $\frac{\partial Q}{\partial t} = C\rho\,\frac{\partial T}{\partial t}$, donde $\kappa > 0$, $C > 0$ y $\rho > 0$ son respectivamente la conductividad térmica, el calor específico y la densidad de la barra, muestre que $T(x,t)$ satisface la EDP

$$\partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) - r\big(T(x,t) - T_{\text{aere}}\big)$$

con $k = \kappa/(C\rho)$ y $r = \alpha/(C\rho)$.

(c) Muestre que si $T(x,t)$ es una solución de la EDP de la pregunta anterior y $T_1(x,t)$ es una función tal que

$$T(x,t) = T_{\text{aere}} + \mathrm{e}^{-rt} T_1(x,t) \ ,$$

luego $T_1(x,t)$ es solución de la ecuación del calor $\partial_t T_1(x,t) = k\,\partial_x^2 T_1(x,t)$.

7. Considere el siguiente PVI

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) + \partial_x^2 u(x,t) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ \partial_t u(x,0) = f_c(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

con $f_c(x) = c\sin(x/c)$.
Muestre que la CI es tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f_c(x) \to 0$ cuando el parámetro $c \to 0$ y que $u(x,t) = c^2 \sinh(t/c)\sin(x/c)$ es una solución del PVI que diverge cuando $c \to 0$ para todo $t > 0$ y $x \neq 0$.
¿ Que podemos concluir con respeto a la estabilidad del PVI ?

Agosto 20, 2025.
DS/ds