Elementos Finitos

Tarea 1

Prof. Manuel Solano

21 de marzo de 2024

Fecha de entrega: 4 de abril de 2024.

1. Considere el espacio $V_h := \{v \in \mathcal{C}(a,b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i])\,, \text{para}\, i = 1, ..., d+1\,, v(a) = 0,\ v(b)) = 0\}$ y la familia de funciones techo $B := \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_d\}$ definidas en clase. Demuestre que B es una base de V_h.

2. Considere la forma bilineal $a(u_h, v_h) = \displaystyle\int_a^b u_h'(x)v_h'(x)dx$, su matriz $\mathbf{A}$ asociada (calculada en clases) y el espacio V_h definido en el Ejercicio 1.

   a) Sea $v_h \in V_h$. Sabemos que existen escalares β_1, β_2,..., β_d tales que $v_h(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \beta_j \varphi_j(x)$. Probar que $\boldsymbol{\beta}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \|v_h'\|^2_{L^2(a,b)}$, donde $\boldsymbol{\beta}$ es el vector cuyos elementos son los coeficientes β_j.

   b) Demostrar que $\mathbf{A}$ es simétrica y definida positiva.

3. Considere la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -((\kappa(x)u'(x))' + \omega u(x) & = & f(x), & x \in]a,b[\\ u(a) & = & 0, & \\ u(b) & = & 0, & \end{array} \right. \tag{1}$$

   con $f \in L^2(a,b)$, ω y κ dados. Asuma que la función κ es continua y positiva en $[a,b]$, y ω es un número positivo.

   a) Deduzca una formulación variacional apropiada.

   b) Demuestre que dicha formulación variacional posee solución única.

   c) Escriba la formulación variacional discreta asociada considerando una patición uniforme $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$, de tamaño h, del intervalo $[0,1]$ y el espacio

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}(a,b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i])\,, \text{para}\, i = 1, ..., d+1\,, v(0) = v(1) = 0\}.$$

   d) Escriba el sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado. **Indicación**: Para calcular las integrales del tipo $\displaystyle\int_c^d \kappa(x)dx$ utilice la regla del punto medio elemental.