

Métodos de integración

ones D.

pción

22

Sustituciones trigonométricas

Objetivo

El objetivo de esta clase, es calcular integrales que requieren el uso de **sustituciones trigonométricas**.

Antes, comenzamos recordando 2 identidades trigonométricas que jugarán un papel relevante

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \sec^2(x) = \tan^2(x) + 1.$$

Sustituciones trigonométricas

Fórmulas de sustitución

Dado $a > 0$, para resolver integrales que contienen las expresiones

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}, \sqrt{x^2 + a^2},$$

es útil hacer uso de las siguientes sustituciones.

1. **Caso 1:** Integrales del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$

► Se sugiere hacer la sustitución $x = a \cdot \sin(\theta)$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

2. **Caso 2:** Integrales del tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$

► Se sugiere hacer la sustitución $x = a \cdot \sec(\theta)$, con $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

3. **Caso 3:** Integrales del tipo $\sqrt{x^2 + a^2}$

► Se sugiere hacer la sustitución $x = a \cdot \tan(\theta)$, con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 1

Calcular

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Solución.

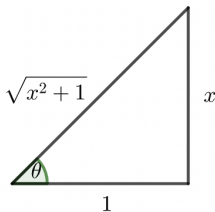
Haciendo $x = \tan(\theta)$ (con $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$), sigue que $dx = \sec^2(\theta)d\theta$.
Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta) \sqrt{\tan^2(\theta) + 1}} d\theta \\ &= \int \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta = -\frac{1}{\sin(\theta)} + C. \end{aligned}$$

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 1

Utilizando el siguiente triángulo rectángulo,



podemos ver que $\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Finalmente,

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C.$$

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 2

Calcular

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

Solución. Sea $x = 3 \operatorname{sen}(\theta)$, con $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

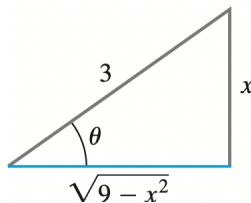
Luego, $dx = 3 \cos(\theta) d\theta$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx &= 9 \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \\ &= 9 \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \theta - \frac{9}{4} \operatorname{sen}(2\theta) + C \\ &= \frac{9}{2} \theta - \frac{9}{2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + C . \end{aligned}$$

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 2

Finalmente, haciendo uso del triángulo



podemos concluir que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \arcsin(x/3) - \frac{1}{2} x \sqrt{9-x^2} + C$$

Sustituciones trigonométricas

Observación

En el ejemplo previo, fue útil hacer uso de la identidad

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Sin embargo, también puede ser útil conocer la identidad

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

De hecho, haciendo uso de ella, se puede probar que

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C .$$

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 3

Calcular

$$\int \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x} dx$$

Solución. Notar que

$$\int \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{3} \int \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}}}{x} dx$$

Luego, haciendo $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sec(\theta) \implies dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$. Así,

$$\int \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x} dx = \int \tan^2(\theta) d\theta = \int \sec^2(\theta) - 1 d\theta = \tan(\theta) - \theta + C$$

Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 3

Finalmente, volviendo a la variable original se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{3x^2 - 1} - \operatorname{arcsec}(\sqrt{3}x) + C$$

Sustituciones trigonométricas

Caso $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Si nos encontramos con expresiones de la forma

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

es posible transformar la expresión anterior a una de las siguientes formas

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2}$$

mediante completación de cuadrados, y luego hacer uso de las sustituciones trigonométricas.

Por ejemplo, compruebe que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1 \right| + C$$

Fórmulas de recurrencia $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Para finalizar, entregamos fórmulas de recurrencia, que pueden ser de ayuda, a la hora de enfrentar las integrales que aparecen luego de hacer una sustitución trigonométrica.

$$1. \int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx$$

$$2. \int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx$$

$$3. \int \tan^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x) dx$$

$$4. \int \sec^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(x) \tan(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx$$