UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Análisis I

Pedro Gajardo Adaro

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso - Chile

http://pgajardo.mat.utfsm.cl/

Versión Marzo 2021

Para la confección de este texto, se ha utilizado como base el template LaTeX desarrollado por Mathias Legrand, disponible en http://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book. Las imágenes utilizadas en la portada y que acompañan los encabezados de los capítulos (texturas), están libre de copyright y han sido descargadas desde https://www.freepik.es.

Prefacio

El presente texto, ha sido elaborado a partir de los apuntes desarrollados y utilizados mientas dicté la asignatura *Análisis I*, correspondiente a la carrera de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María (UTFSM), en Valparaíso, Chile, durante los últimos años. Esta asignatura tiene entre 28 y 30 sesiones de cátedra, de 90 minutos cada una. Adicionalmente, hay entre 12 a 14 sesiones de trabajo dirigido (ayudantía), a cargo de un profesor ayudante, que durante el 2019 y 2020 fue Simón Masnú, a quien agradezco su dedicación y valiosas sugerencias, tanto durante la realización del curso como en la revisión de este texto.

Este documento representa en buena medida lo que he realizado durante las clases de cátedra. Como se podrá apreciar, a medida que se van introduciendo definiciones y demostrando los resultados que las utilizan, se dejan algunos ejercicios propuestos, para que los estudiantes vayan asimilando los contenidos de mejor manera. El objetivo de esto es que los estudiantes que no hayan podido realizar alguno de estos ejercicios, entre una sesión y otra, los consulten en clases y en esta sus desarrollados sean explicados.

El texto está dividido en tres partes que son las que constituyen el programa de la asignatura: Espacios métricos, espacios vectoriales normados y espacios topológicos, las cuales son presentadas a través de once capítulos. Al final de cada parte, se ha incluido un listado de ejercicios resueltos. El orden de los contenidos y la profundidad a la que se llega en cada uno de ellos, ha sido producto de reflexiones y de la experiencia, luego de haber realizado la asignatura los años 2007, 2008, 2011, 2018, 2019 y 2020, además de muchas conversaciones con diferentes colegas. Es necesario señalar, que en diversos tópicos el texto no profundiza mayormente, con tal de circunscribirse al programa del curso. Por otro lado, posterior a este, los estudiantes de mi institución inscriben las asignaturas de *Análisis II* (teoría de la medida) y *Análisis III* (análisis funcional), en los cuales se abordan con mayor detalle, algunos de los contenidos iniciados en este texto. Para realizar la asignatura los años mencionados, me he basado en variadas referencias, las que corresponden, entre otras, a la bibliografía del curso. Estas son indicadas al final del documento.

En general, el texto intenta ser auto-contenido dentro de lo posible. Sin embargo, este está dirigido a estudiantes de ingeniería civil matemática que cursan el tercer año de carrera, por lo tanto, para un total entendimiento, es necesario que los lectores hayan realizado un curso de cálculo real y álgebra elemental, teniendo conocimientos de algebra proposicional, análisis real (saber que el conjunto de los números reales es completo, axioma del supremo), algebra lineal (operatoria de matrices y vectores, para el capítulo de diferenciación) y axiomática de conjuntos (para utilizar el lema de Zorn, necesario para demostrar los teoremas de Hahn-Banach y Tychonoff).

El 2020, año en que nos vimos afectados por el COVID-19, me correspondió dictar la asignatura en forma remota. Fue aquella experiencia la que concretó la creación de este texto, el que espero sea dinámico, pudiéndolo actualizar en el futuro, por ejemplo agregando figuras para visualizar algunos conceptos e incluyendo más ejercicios resueltos.

Deseo culminar este prefacio, agradeciendo a Isabel Flores (UTFSM), con quien dicté la asignatura de manera coordinada los años 2018 y 2019, a Rafael Correa (Universidad de Chile), quien el 2005 me invitó a realizar el curso de cálculo en varias variables en su institución, en el cual me basé para un par de capítulos, y finalmente agradecer a todos los estudiantes que he tenido en estos años, quienes han sido la inspiración para generar un material que espero les sea de utilidad, tanto mientras cursan la asignatura, como también para referencias futuras.

Pedro Gajardo Adaro
Marzo 2021, Valparaíso - Chile

Índice general

Parte 1: Espacios métricos

1. Definiciones y propiedades iniciales

En esta parte inicial del texto, nuestro objeto de estudio son los espacios métricos, primera estructura que analizaremos en profundidad, la que se define a partir de un conjunto y una función (métrica o distancia) que satisface algunas propiedades. En un conjunto dado, el poder contar con una métrica nos proveerá la noción de distancia entre dos elementos del conjunto, la que puede por cierto cambiar si se utiliza una métrica diferente. Al tener a disposición una métrica, podremos introducir los primeros conceptos topológicos (e.g., conjuntos abiertos y cerrados, interior, adherencia, continuidad de funciones, convergencia de sucesiones, etc.), de manera muy similar a como se hace en el conjunto de los números reales. De hecho, hay muchas analogías con ese conjunto que se pueden hacer en el contexto de espacios métricos. También estudiaremos las nociones de completitud y compacidad de espacios métricos, para analizar a continuación diferentes propiedades de funciones definidas en estos espacios.

1.1 Espacios métricos: definiciones y ejemplos

Comencemos entonces definiendo la estructura de espacio métrico.

Definición 1.1.1 Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ y una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que (X,d) es un **espacio métrico** si:

(a) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x,\ y \in X$;

(b) $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$;

(c) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,\ y \in X$ (simetría);

(d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x,\ y,\ z \in X$ (desigualdad triangular).

Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las anteriores propiedades, se denomina **métrica** o **distancia** sobre el conjunto o espacio X.

A continuación exponemos algunos ejemplos de espacios métricos, propiedad que se deja como ejercicio demostrar en algunos de los casos.

Ejercicio 1.1 Considere un conjunto $X \neq \emptyset$ y la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Pruebe que (X,d) es un espacio métrico.

Ejercicio 1.2 Para $X = \mathbb{R}^n$ y $p \geq 1$, considere la función $d_p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p},$$

donde para $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ estamos escribiendo $x = (x_1,\dots,x_n)$ e $y = (y_1,\dots,y_n)$. Demuestre que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es un espacio métrico. Para ello, ver el Apéndice 1.A al final de este capítulo, donde se prueban diferentes desigualdades que serán de utilidad.

■ **Ejemplo 1.1.1** Para $X = \mathbb{R}^n$ consideremos la función $d_\infty : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\infty(x,y) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|.$$

Probemos que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico. De hecho, directamente observamos que para todo $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, se tiene $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado, si $d_\infty(x,y) = 0$, entonces $|x_j - y_j| = 0$ para todo $j = 1,\dots,n$, por lo tanto, $x_j = y_j$ para todo j concluyendo $x = y$.

También directamente se tendrá $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$ para todo $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, pues $|x_j - y_j| = |y_j - x_j|$. Finalmente, como en $\mathbb{R}$ es válida la desigualdad triangular

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R},$$

se tendrá entonces

$$|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y),$$

de donde se deduce (tomando el máximo al lado izquierdo)

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \qquad \forall\, x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n,$$

probando así que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico.

■ **Ejemplo 1.1.2** Para un conjunto $A \neq \emptyset$ consideremos el espacio

$$X := \mathscr{B}(A,\mathbb{R}) = \{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists\, L_f \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq L_f \quad \forall\, x \in A \},$$

que es el conjunto de las funciones acotadas definidas sobre A a valores en $\mathbb{R}$. Definiendo la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \qquad f,g \in X,$$

demostremos que la función d está bien definida y que (X,d) es un espacio métrico.

La función d estará bien definida pues para $f,g\in X$ se tienen las siguientes inclusiones

$$\{|f(x)-g(x)|\ :\ x\in A\}\subseteq\bigcup_{x\in A}[0,|f(x)|+|g(x)|]\subseteq[0,L_f+L_g],$$

es decir, el conjunto $\{|f(x)-g(x)|\ :\ x\in A\}$ es acotado y, por lo tanto, su supremo está en $\mathbb{R}$ (más específicamente en $\mathbb{R}_+$).

Si $d(f,g)=0$, entonces $f(x)=g(x)$ para todo $x\in A$, es decir, $f=g$. Como $|f(x)-g(x)|=|g(x)-f(x)|$ para todo $x\in A$, se deduce

$$d(f,g)=d(g,f)\qquad\forall\ f,\ g\in\mathscr{B}(A,\mathbb{R}).$$

Dado que

$$|f(x)-g(x)|\leq|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\leq d(f,h)+d(h,g)$$

para todo $f,\ h,\ g\in X$, y todo $x\in A$, concluimos

$$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)\qquad\forall\ f,\ h,\ g\in X,$$

con lo que se termina de probar que (X,d) es un espacio métrico.

Ejercicio 1.3 Considere el siguiente conjunto

$$X:=\mathscr{C}([0,1])=\{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\mid f\ \text{ es continua }\}$$

(conjunto de las funciones continuas definidas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$) y la función $d:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\qquad\text{para } f,g\in X.$$

Pruebe que la función d está bien definida en X y que (X,d) es un espacio métrico.

Ejercicio 1.4 Considere el siguiente conjunto

$$X:=\ell_2(\mathbb{R})=\left\{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}\ \middle|\ \sum_{k\geq 0}x_k^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}x_k^2<+\infty\right\}$$

(conjunto de las sucesiones en $\mathbb{R}$ que son cuadrado sumables) y la función $d:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$d\left(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)=\left(\sum_{k\geq 0}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}\qquad\text{para } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \ \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in X.$$

Pruebe que la función d está bien definida en X y que (X,d) es un espacio métrico.

Un ejemplo muy importante de espacio métrico, son los espacios vectoriales normados, objeto de estudio de la Parte II de este texto, estructura que definimos a continuación. Primero recordemos la definición de un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que a lo largo del texto será principalmente $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.2 Un conjunto E, dotado de dos operaciones $+ : E \times E \longrightarrow E$ (suma) y $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ (multiplicación por escalar), se dice que es un **espacio vectorial**, si:

(a) La operación suma es conmutativa, asociativa, existe un único neutro en E (denotado por 0_E o simplemente 0) y para todo elemento x en E, existe un único inverso para esta operación (denotado por $-x$);

(b) La operación multiplicación por un escalar es asociativa y distribuye con respecto a la operación suma, es decir

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x,\ y \in E.$$

Definición 1.1.3 En un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una función $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **norma** sobre E, si:

(a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$;

(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$;

(d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x,\ y \in E$ (desigualdad triangular).

Si la función $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma, diremos que $(E, \|\cdot\|)$ es un **espacio vectorial normado**.

Proposición 1.1.3 Dado un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$, si se define la función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad x,\ y \in E,$$

entonces (E,d) es un espacio métrico.

Demostración. Para todo $x,y,z \in E$ se tendrá:

- $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$;
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x,y) = \|x-y\| = |-1|\, \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$;
- $d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$;

de donde se concluye que (E,d) es un espacio métrico. ■

Ejercicio 1.5 Considere los siguientes ejemplos de conjuntos y funciones, demostrando que son espacios vectoriales normados:

(1) $X = \mathbb{R}^n$ y para $p \geq 1$ la función

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

donde para $x \in \mathbb{R}^n$ estamos escribiendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

(2) $X = \mathbb{R}^n$ y la función $\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|.$$

(3) $X = \ell_2(\mathbb{R})$ (definido en el Ejercicio 1.4) y

$$\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum_{k\geq 0} (x_k)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X.$$

(4) $X = \mathscr{C}([0,1])$ (definido en el Ejercicio 1.3) y

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt \qquad \text{para } f \in X.$$

Dados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, definiremos el conjunto

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{\ell : X \longrightarrow Y \mid \ell \text{ es lineal y continua}\},$$

que es el espacio vectorial (a probar) de las funciones lineales continuas (conceptos aun por definir) definidas sobre X a valores en Y. Más adelante en el texto, probaremos que $\mathscr{L}(X,Y)$, dotado de la función

$$\|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_Y}{\|x\|_X},$$

es un espacio vectorial normado.

1.2 Primeros conceptos topológicos

Para definir los primeros conceptos topológicos en espacios métricos, es necesario introducir los siguientes conjuntos que se definen a partir de una métrica o distancia.

Definición 1.2.1 Dado un espacio métrico (X,d), un elemento $\bar{x} \in X$ y un número real positivo $r > 0$, se definen los siguientes conjuntos en X:

- **Bola abierta** de centro $\bar{x} \in X$ y radio $r > 0$:

$$B(\bar{x}, r) = \{x \in X \mid d(\bar{x}, x) < r\}.$$

- **Bola cerrada** de centro $\bar{x} \in X$ y radio $r > 0$:

$$B[\bar{x}, r] = \{x \in X \mid d(\bar{x}, x) \leq r\}.$$

- **Esfera** de centro $\bar{x} \in X$ y radio $r > 0$:

$$S[\bar{x}, r] = \{x \in X \mid d(\bar{x}, x) = r\}.$$

De las definiciones anteriores, se puede observar que una métrica define una geometría particular en un espacio. En otras palabras, si en un espacio tenemos dos métricas diferentes, las bolas con una métrica serán distintas que con la otra.

En $X = \mathbb{R}^2$, podemos considerar las métricas d_1, d_2 y d_∞ definidas en el Ejercicio 1.2. Para $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$, y $x = (x_1, x_2)$, dado un radio $r > 0$ observe que

$$\begin{aligned} d_1(\bar{x}, x) = r \quad &\Leftrightarrow \quad |x_1| + |x_2| = r; \\ d_2(\bar{x}, x) = r \quad &\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = r^2; \\ d_\infty(\bar{x}, x) = r \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1 = \pm r \wedge -r \leq x_2 \leq r) \vee (x_2 = \pm r \wedge -r \leq x_1 \leq r). \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6 En $\mathbb{R}^2$ considere $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$ y grafique $B(\bar{x}, 1)$, $B[\bar{x}, 1]$ y $S[\bar{x}, 1]$, para cada métrica d_1, d_2 y d_∞.

Definición 1.2.2 Dado un espacio métrico (X, d) y un conjunto $A \subseteq X$, se define el interior, la adherencia y la frontera de A mediante las siguientes expresiones:

- **Interior** de A:

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

- **Adherencia** de A:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall\, \varepsilon > 0 \text{ se tiene } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

- **Frontera** de A:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c},$$

donde A^c indica el complemento de A (i.e., $A^c = X \setminus A$).

En las definiciones de interior y adherencia, en lugar de utilizar bolas abiertas se pueden utilizar bolas cerradas, es decir, las definiciones no cambian, propiedad que se deja como ejercicio demostrar.

Ejercicio 1.7 En un espacio métrico (X,d), pruebe que para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

Ejercicio 1.8 Dado un espacio métrico (X,d) y un conjunto $A \subseteq X$, demuestre que la frontera de A se puede escribir de manera equivalente como

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A).$$

■ **Ejemplo 1.2.1** En $\mathbb{R}$ utilizando la métrica $d(x,y) = |x-y|$, consideremos los siguientes conjuntos: (a,b), $(a,b]$, $\{a,b\}$, $\{1/k \mid k \in \mathbb{N};\ k \ \geq 1\}$. Determinemos el interior, la adherencia y la frontera de algunos de estos conjuntos.

Para $A = (a,b]$ veamos que $\operatorname{int}(A) = (a,b)$. Dado $x \in (a,b)$ consideremos

$$\varepsilon = \text{mín}\{(x-a),(b-x)\} > 0.$$

Directamente se prueba que

$$B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A = (a,b].$$

Por lo tanto, $(a,b) \subseteq \operatorname{int}(A)$. Sea ahora $x \in \operatorname{int}(A)$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A \ \Rightarrow \ (a < x-\varepsilon/2) \wedge (x+\varepsilon/2 \leq b),$$

es decir, $x \in (a,b)$, concluyendo la igualdad

$$\operatorname{int}(A) = (a,b).$$

Veamos ahora que $\overline{A} = [a,b]$. Si $x \in [a,b]$, para todo $\varepsilon > 0$ claramente se tendrá

$$B(x,\varepsilon) \cap (a,b] = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (a,b] \neq \emptyset.$$

De hecho,

$$\emptyset \neq (\text{máx}\{a, x-\varepsilon\}, \text{mín}\{b, x+\varepsilon\}) \subseteq B(x,\varepsilon) \cap (a,b].$$

Por lo tanto $[a,b] \subseteq \overline{A}$. Tomemos ahora $x \in \overline{A}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos $\varepsilon = 1/k$. Como

$$B(x,1/k) \cap (a,b] = (x-1/k, x+1/k) \cap (a,b] \neq \emptyset,$$

existe $x_k \in (x-1/k, x+1/k) \cap (a,b]$, que implica

$$x - \frac{1}{k} < x_k < x + \frac{1}{k}$$

y, en consecuencia, $x_k \to x$ (convergencia de números reales). Como además $x_k \in (a,b]$, es decir,

$$a < x_k \leq b,$$

tomando límite obtenemos $a \leq x \leq b$, concluyendo $x \in [a,b]$.

Consideremos ahora $A = \{1/k \mid k \in \mathbb{N};\ k\ \geq 1\}$ y probemos que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Si existiera $x \in \operatorname{int}(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A.$$

La anterior inclusión no puede ser cierta, pues el intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene números irracionales y A solo está compuesto por números de la forma $1/k$.

Probemos que $\overline{A} = A \cup \{0\}$. Claramente $A \subseteq \overline{A}$ asi que veamos $x = 0$ está en $\overline{A}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ te tendrá

$$B(0,\varepsilon) \cap A = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

de hecho, tomando $k_0 > 1/\varepsilon$ sabemos que $1/k \in (0,\varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto $A \cup \{0\} \subseteq \overline{A}$.

Sea ahora $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\varepsilon = 1/n$. Como

$$B(x,1/n) \cap A \neq \emptyset,$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existirá $x_n \in B(x,1/n)$ y $x_n \in A$. Es decir, existirá $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 1/k_n$. Claramente $x_n \to x$. Por la forma que tienen los x_n o bien converge a cero o a partir de un instante es un mismo elemento de A.

Definición 1.2.3 En un espacio métrico (X,d), un conjunto $A \subseteq X$ se dice que es **abierto** si $A = \operatorname{int}(A)$ y se dirá **cerrado** si $\overline{A} = A$. Es decir (dada las inclusiones enunciadas en el Ejercicio 1.7), A es abierto si

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } B(x,\varepsilon) \subseteq A,$$

y A es cerrado si

$$(\forall\, \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \ \Rightarrow\ x \in A.$$

Proposición 1.2.2 En un espacio métrico (X,d), dado $\bar{x} \in X$ y $r > 0$, se tiene que $B(\bar{x},r)$ es un conjunto abierto y $B[\bar{x},r]$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Veamos que $B(\bar{x},r)$ es un conjunto abierto. Sea $y \in B(\bar{x},r)$ y consideremos

$$\varepsilon = \frac{r - d(y,\bar{x})}{2} > 0.$$

Probemos que

$$B(y,\varepsilon) \subseteq B(\bar{x},r).$$

Dado $z \in B(y,\varepsilon)$ se tendrá

$$\overbrace{d(z,\bar{x}) \leq d(z,y) + d(y,\bar{x})}^{\text{desigualdad triangular}} < \varepsilon + d(y,\bar{x}) = \frac{r}{2} - \frac{d(\bar{x},y)}{2} + d(y,\bar{x}) = \frac{r}{2} + \frac{d(\bar{x},y)}{2} < r.$$

Por lo tanto $B(y,\varepsilon) \subseteq B(\bar{x},r)$, probando así que $B(\bar{x},r)$ es abierto.

Veamos ahora que $A = B[\bar{x},r]$ es un conjunto cerrado. Para ello, debido a la propiedad enunciada en el Ejercicio 1.7, debemos probar solamente $\overline{A} \subseteq A$. Sea $y \in \overline{A}$ y supongamos que $y \notin A = B[\bar{x},r]$, es decir,

$$d(\bar{x},y) > r. \tag{1.1}$$

Consideremos

$$\varepsilon = \frac{d(\bar{x},y) - r}{2} > 0.$$

Como $y \in \overline{A}$ debemos tener $B(y,\varepsilon) \cap B[\bar{x},r] \neq \emptyset$. Sea z en la intersección anterior, entonces

$$\overbrace{d(y,\bar{x}) \leq d(y,z) + d(z,\bar{x})}^{\text{desigualdad triangular}} < \varepsilon + r = \frac{d(\bar{x},y)}{2} - \frac{r}{2} + r = \frac{d(\bar{x},y)}{2} + \frac{r}{2}.$$

Lo anterior implica $d(y,\bar{x}) < r$, llegando así a una contradicción con (1.1). Por lo tanto $\overline{A} \subseteq A$, concluyendo que $A = B[\bar{x},r]$ es un conjunto cerrado. ■

Proposición 1.2.3 En un espacio métrico (X,d), dado un conjunto $A \subseteq X$ se tiene que $\operatorname{int}(A)$ es un conjunto abierto y $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Veamos que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$, que implicará $\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$ (ver Ejercicio 1.7). Dado $x \in \operatorname{int}(A)$, existirá $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $B(x,\bar{\varepsilon}) \subseteq A$. Si $x \notin \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá

$$B(x,\varepsilon) \not\subseteq \operatorname{int}(A).$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $y_\varepsilon \in B(x,\varepsilon)$ con $y_\varepsilon \notin \operatorname{int}(A)$. Por lo tanto,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, y_\varepsilon \in B(x,\varepsilon) \text{ tal que } \forall\, \delta > 0 \;\; B(y_\varepsilon,\delta) \not\subseteq A.$$

Si en la anterior proposición tomamos $\varepsilon = \delta = \bar{\varepsilon}/3$, deducimos que

$$y_{\bar{\varepsilon}/3} \in B(x,\bar{\varepsilon}/3) \;\text{ y }\; B(y_{\bar{\varepsilon}/3},\bar{\varepsilon}/3) \not\subseteq A,$$

pero (debido a la desigualdad triangular)

$$B(y_{\bar{\varepsilon}/3},\bar{\varepsilon}/3) \subseteq B(x,\bar{\varepsilon}) \subseteq A,$$

llegando así a una contradicción. Concluimos entonces $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$.

Veamos ahora que $\overline{(\overline{A})} \subseteq \overline{A}$ (que implicará $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$). Sea $x \in \overline{(\overline{A})}$ y supongamos que $x \notin \overline{A}$. En tal caso, existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que

$$B(x,\bar{\varepsilon}) \cap A = \emptyset. \tag{1.2}$$

Como $x \in \overline{(\overline{A})}$ entonces

$$B(x,\bar{\varepsilon}/3) \cap \overline{A} \neq \emptyset.$$

Dado $y_{\bar{\varepsilon}}$ en la anterior intersección, se tendrá que

$$y_{\bar{\varepsilon}} \in B(x,\bar{\varepsilon}/3) \;\wedge\; B(y_{\bar{\varepsilon}},\bar{\varepsilon}/3) \cap A \neq \emptyset,$$

pero como $B(y_{\bar{\varepsilon}},\bar{\varepsilon}/3) \subseteq B(x,\bar{\varepsilon})$ se contradice (1.2). Por lo tanto $\overline{(\overline{A})} \subseteq \overline{A}$. ■

Corolario 1.2.4 En un espacio métrico (X,d), para todo conjunto $A \subseteq X$ se tendrá

$$\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A); \qquad \overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

Ejercicio 1.9 Para un espacio métrico (X,d), pruebe que los conjuntos X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos y cerrados.

Ejercicio 1.10 En un espacio métrico (X,d), pruebe que si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces

$$\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B) \;\; \wedge \;\; \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

Proposición 1.2.5 En un espacio métrico (X,d), un conjunto $A \subseteq X$ es abierto si, y solamente si, A^c es cerrado.

Demostración. Supongamos que A es abierto y probemos que A^c es cerrado (i.e., $\overline{(A^c)} \subseteq A^c$). Sea $x \in \overline{(A^c)}$. Si $x \notin A^c$, entonces $x \in A$. Como A es abierto, existirá $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Esto implica

$$B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset,$$

lo que contradice $x \in \overline{(A^c)}$, por lo tanto x debe estar en A^c.

Supongamos ahora que A^c es cerrado y probemos que A es abierto (i.e., $A \subseteq \operatorname{int}(A)$). Sea $x \in A$ y supongamos $x \notin \operatorname{int}(A)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x,\varepsilon) \nsubseteq A$, que es equivalente a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Es decir, $x \in \overline{(A^c)}$. Como A^c es cerrado, se obtiene que $x \in \overline{(A^c)} = A^c$, lo que es una contradicción. ■

Ejercicio 1.11 En un espacio métrico (X,d), para un conjunto $A \subseteq X$ demuestre que $\operatorname{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A, es decir,

$$(\theta \subseteq A \;\wedge \theta \text{ es abierto}) \;\Rightarrow\; \theta \subseteq \operatorname{int}(A).$$

Adicionalmente, demuestre que $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

Del resultado anterior, se deduce que el interior de un conjunto es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en el conjunto, y la adherencia de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto.

Proposición 1.2.6 Dado un espacio métrico (X,d) y un conjunto distinto de vacío $A \subseteq X$, se define $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (función distancia al conjunto A), por

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y).$$

Esta función está bien definida y $x \in \overline{A}$ si y solamente si, $d_A(x) = 0$.

Demostración. Como $A \neq \emptyset$, existe $x_0 \in A$. Entonces,

$$0 \leq d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,x_0) < +\infty \qquad \forall\, x \in X,$$

por lo tanto d_A está bien definida, pues el conjunto sobre el que se toma ínfimo no es vacío y está acotado (en $\mathbb{R}$), implicando que su ínfimo, y por lo tanto $d_A(x)$, pertenece a $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

Comencemos suponiendo que $x \in \overline{A}$. Esto implica que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$B(x,1/k) \cap A \neq \emptyset.$$

Tomando x_k en la anterior intersección, obtendremos que

$$0 \leq d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,x_k) < \frac{1}{k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto $d_A(x) = 0$.

Ahora supongamos $d_A(x) = 0$. Por la definición de ínfimo, esto implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x_\varepsilon \in A$ tal que

$$d(x,x_\varepsilon) < \varepsilon + \inf_{y\in A} d(x,y) = \varepsilon + d_A(x) = \varepsilon.$$

Es decir, $x_\varepsilon \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Hemos probado que

$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

por lo tanto $x \in \overline{A}$. ■

Definición 1.2.4 En un espacio métrico (X,d), su **topología** (inducida por la métrica d), que notaremos $\mathscr{T}$, es el conjunto que contiene a todos los conjuntos abiertos, es decir,

$$\mathscr{T} = \{\theta \subseteq X \mid \theta \text{ es abierto } \}.$$

Proposición 1.2.7 Dado un espacio métrico (X,d) y $\mathscr{T}$ su topología, entonces se tiene que:

(a) $X \in \mathscr{T}$ y $\emptyset \in \mathscr{T}$;

(b) Para $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{T}$, se tiene

$$\bigcap_{j=1}^{n} \theta_j \in \mathscr{T} \qquad \text{(toda intersección finita de abiertos es abierto);}$$

(c) Para una familia $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de conjuntos en $\mathscr{T}$ (i.e., $\theta_\alpha \in \mathscr{T}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, siendo Λ un conjunto de índices cualquiera) se tendrá

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha \in \mathscr{T} \qquad \text{(toda unión de abiertos es abierto).}$$

Demostración. Analicemos cada una de las partes de la proposición:

(a) Ver Ejercicio 1.9.

(b) Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{T}$ y

$$\theta = \bigcap_{j=1}^{n} \theta_j.$$

Si $x \in \theta$, entonces $x \in \theta_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Como los θ_j son abiertos, para cada j existe $\varepsilon_j > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon_j) \subseteq \theta_j.$$

Si definimos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$, se tendrá

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \theta_j \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

y, por lo tanto, $B(x,\varepsilon) \subseteq \theta$. Hemos probado que $\theta \subseteq \operatorname{int}(\theta)$, es decir, $\theta \in \mathscr{T}$ (es abierto).

(c) Sea una familia $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de abiertos y

$$\theta = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha.$$

Dado $x \in \theta$, se tendrá que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in \theta_\alpha$. Como θ_α es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \theta_\alpha \subseteq \theta,$$

por lo tanto,

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \theta.$$

Es decir, $\theta \subseteq \operatorname{int}(\theta)$ y por lo tanto $\theta \in \mathscr{T}$ (es abierto).

■

En la última parte del texto, veremos que las propiedades (a), (b) y (c) de la anterior proposición son las que definen un espacio topológico, es decir, dado un espacio X y una colección $\mathscr{T}$ de conjuntos de X, se dirá que $(X, \mathscr{T})$ es un **espacio topológico** si $\mathscr{T}$ satisface (a), (b) y (c) de la Proposición 1.2.7. Dada esta definición y la Proposición 1.2.7, se deduce de inmediato que un espacio métrico será un espacio topológico, si se considera la topología que induce la métrica.

1.3 Métricas equivalentes

Si en un espacio X hay dos métricas d_1 y d_2, estas no necesariamente definen los mismos conjuntos abiertos. Por otro lado, en el Ejercicio 1.6, se puede apreciar que en $\mathbb{R}^2$ diferentes métricas definían bolas distintas, pero tal vez, a pesar de esto, esas métricas si están definiendo los mismos conjuntos abiertos. A continuación introduciremos el concepto de métricas equivalentes y probaremos que si dos métricas son equivalentes, entonces definen los mismos conjuntos abiertos, es decir, la misma topología.

Definición 1.3.1 Dado un conjunto X y dos métricas $d_1, d_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, se dice que d_1 y d_2 son equivalentes, si existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X. \tag{1.3}$$

Ejercicio 1.12 Para un conjunto X, considere el conjunto de todas las métricas que se pueden definir sobre él, dado por

$$D = \{d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \mid d \text{ es métrica}\},$$

y demuestre que en D, la relación $\mathscr{R}$ definida por

$$d_1 \mathscr{R} d_2 \ \Leftrightarrow\ d_1 \text{ y } d_2 \text{ son métricas equivalentes},$$

es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema 1.3.1 Sea un conjunto X y dos métricas equivalentes $d_1, d_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Entonces, los abiertos y cerrados que estas métricas definen son los mismos.

Demostración. Veamos que d_1 y d_2 definen los mismos abiertos solamente. Que definen los mismos cerrados se deducirá de lo anterior dado que un conjunto es cerrado si y solo si su complemento es abierto (ver Proposición 1.2.5).

En realidad, basta con demostrar que los abiertos que define una métrica son abiertos para la otra métrica. Notaremos por $B_1(x,\varepsilon)$ y $B_2(x,\varepsilon)$ las bolas que definen d_1 y d_2 respectivamente. Consideremos $c_1,\ c_2 > 0$ que satisfacen (1.3), dados por la equivalencia entre d_1 y d_2. Sea θ un abierto para d_1 y mostremos que es un abierto para d_2.

Dado $x \in \theta$ existe $\delta > 0$ tal que $B_1(x,\delta) = \{y \in X \mid d_1(x,y) < \delta\} \subseteq \theta$. Mostremos que para $\varepsilon = c_1\delta > 0$ se tiene

$$B_2(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d_2(x,y) < \varepsilon\} \subseteq B_1(x,\delta) \subseteq \theta. \tag{1.4}$$

De hecho, si $y \in B_2(x,\varepsilon)$, entonces

$$d_1(x,y) \leq \frac{1}{c_1} d_2(x,y) < \frac{\varepsilon}{c_1} = \delta,$$

por lo tanto, se tiene (1.4). Es decir, para todo $x \in \theta$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2(x,\varepsilon) \subseteq \theta$, probando así que θ es abierto para d_2. ■

Corolario 1.3.2 Las topologías definidas por dos métricas equivalentes son idénticas.

Un caso interesante de analizar es cuando se tiene un producto finito de espacios métricos. Es decir, si $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ son espacios métricos, se considerará el espacio producto $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ dotado de alguna de las siguientes métricas para $x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n) \in X$ (donde $x_j, y_j \in X_j$)

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left(\sum_{j=1}^{n} (d_j(x_j,y_j))^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{para } p \geq 1 \\ d_\infty(x,y) &= \max_{j=1,\ldots,n} d_j(x_j,y_j). \end{aligned}$$

Las anteriores métricas serán denominadas a lo largo del texto como *métricas usuales* cuando se trabaje en un producto finito de espacios métricos.

Ejercicio 1.13 En el espacio métrico producto $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ pruebe que la métrica d_p (con $p \geq 1$) es equivalente a la métrica d_∞.

Apéndice

1.A Desigualdades importantes

A continuación se presentan algunas desigualdades importantes en $\mathbb{R}$, que son de utilidad para demostrar en el Ejercicio 1.2, que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con las funciones ahí propuestas.

Lema 1.1 — Desigualdad de Young. Dados $a,\ b \in \mathbb{R}_+$ y $p,\ q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Si $ab = 0$ se tiene de inmediato el resultado. Supongamos $ab > 0$ y consideremos la función $f(x) = e^x$ que es una función convexa, es decir,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Para $x = p \ln a$; $y = q \ln b$, por la convexidad de f se tendrá

$$f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p} f(x) + \frac{1}{q} f(y),$$

es decir,

$$f(\ln a + \ln b) = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Lema 1.2 — Desigualdad de Hölder. Para $k = 1, \ldots, n$ sean $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}_+$ y $p,\ q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.$$

Demostración. Definamos

$$A=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k^p\right)^{1/p};\qquad B=\left(\sum_{k=0}^{n}b_k^q\right)^{1/q}.$$

Si $AB=0$ se obtiene de inmediato el resultado. Si $AB>0$, por el Lema 1.1 se tendrá

$$\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}\leq\frac{(a_k/A)^p}{p}+\frac{(b_k/B)^q}{q},$$

esto implica

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{AB}\leq\frac{1}{p}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}\right)^p}_{=1}+\frac{1}{q}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{B}\right)^q}_{=1}=1,$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq AB=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k^q\right)^{1/q}.$$

■

Lema 1.3 — Desigualdad de Minkowski. Para $k=1,\ldots,n$ sean $a_k,\ b_k\in\mathbb{R}_+$ y $p\geq 1$, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}.$$

Demostración. Si $p=1$ se tiene de inmediato la desigualdad, de hecho se tiene la igualdad. Para $p>1$, tomamos $q>1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Observe que $(p-1)q=p$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{por el Lemma 1.2}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}}\right)^{1/q}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\right).$$

Por lo tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\overbrace{1-1/q}^{=1/p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}.$$

■

2. Completitud y compacidad

En este capítulo introduciremos los conceptos de completitud y compacidad que, como veremos, están relacionados con el comportamiento de sucesiones en espacios métricos. Comenzaremos por definir qué se entiende por el límite de una sucesión en este contexto. Tener en cuenta que el contar con una métrica o distancia, nos permite definir el límite de una sucesión de manera análoga como se hace con sucesiones de números reales.

2.1 Sucesiones

Recordemos que dado un conjunto X, una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una secuencia (numerable) de elementos en X o, dicho de otra forma, es una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ que a cada $k \in \mathbb{N}$ le asocia un elemento $x(k) = x_k \in X$.

Definición 2.1.1 Dado un espacio métrico (X,d), se dice que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $\bar{x} \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que dependerá de $\varepsilon > 0$) tal que

$$x_k \in B(\bar{x},\varepsilon) \qquad \forall\, k \geq k_0. \tag{2.1}$$

De manera equivalente (se deja como ejercicio demostrarlo), se puede decir que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $\bar{x}$, si para todo conjunto abierto $\theta \subseteq X$ que contiene a $\bar{x}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in \theta \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Cuando $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$, diremos que $\bar{x}$ es el **límite** de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y lo notaremos $x_k \to \bar{x}$ o $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$.

La definición anterior no cambia si en (2.1) se utiliza una bola cerrada en lugar de una bola abierta (demostrarlo). Por otro lado, el concepto de convergencia depende estrictamente de la métrica utilizada. Es decir, si uno cambia la métrica, cambia la noción de convergencia (sucesiones que convergen con una, pueden no hacerlo con la otra, o viceversa). Sin embargo, por la definición de límite de una sucesión utilizando conjuntos abiertos (en lugar de bolas), deducimos directamente que si dos métricas son equivalentes, entonces las sucesiones que convergen según una métrica, lo harán también para la otra.

Una propiedad directa que se obtiene de la definición de convergencia, es la siguiente caracterización que se deja como ejercicio.

Ejercicio 2.1 En un espacio métrico (X,d), demuestre que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $\bar{x} \in X$, si y solamente si la sucesión de números reales $\{d(x_k,\bar{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Para practicar la noción de convergencia, se plantea el siguiente ejercicio en un espacio métrico de dimensión infinita.

Ejercicio 2.2 Considere $X = \mathscr{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua }\}$ (el conjunto de funciones continuas definidas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$) y las siguientes dos métricas

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \left(\int_0^1 (f(t)-g(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad f,\ g \in X; \\ d_\infty(f,g) &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \qquad f,\ g \in X. \end{aligned}$$

Para la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ definida por

$$f_k(t) = \begin{cases} 1-kt & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} < t \le 1, \end{cases}$$

pruebe que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge según d_2 (encuentre el límite) pero no converge según d_∞.

Proposición 2.1.1 — Unicidad del límite. En un espacio métrico (X,d), si una sucesión converge, entonces su límite es único.

Demostración. Supongamos que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $\bar{x} \in X$ y a $\bar{y} \in X$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existirán $k_0^1,\ k_0^2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$x_k \in B(\bar{x},\varepsilon/2) \ \ \forall\, k \ge k_0^1 \quad \text{y} \quad x_k \in B(\bar{y},\varepsilon/2) \ \ \forall\, k \ge k_0^2.$$

Definiendo $k_0 = \text{máx}\{k_0^1,k_0^2\}$ se tiene que

$$x_k \in B(\bar{x},\varepsilon/2) \cap B(\bar{y},\varepsilon/2) \ \ \forall\, k \ge k_0.$$

Por lo tanto,

$$d(\bar{x},\bar{y}) \le d(\bar{x},x_{k_0}) + d(x_{k_0},\bar{y}) < \varepsilon,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ hemos probado que $d(\bar{x},\bar{y}) < \varepsilon$, lo que nos lleva a concluir $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$. ■

Definición 2.1.2 En un espacio métrico (X,d), se dice que un conjunto $A \subseteq X$ es **acotado**, si existe $x \in X$ y $M > 0$ tales que

$$A \subseteq B(x,M).$$

Proposición 2.1.2 Dado un espacio métrico (X,d), si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión convergente, entonces es un conjunto acotado.

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión convergente a $\bar{x} \in X$. Entonces (tomando $\varepsilon = 1$), existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B(\bar{x},1) \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Si definimos $M = \text{máx}\{1, d(x_0,\bar{x}), d(x_1,\bar{x}), \ldots, d(x_{k_0-1},\bar{x})\} < +\infty$ se tendrá que

$$x_k \in B(\bar{x},M) \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B(\bar{x},M),$$

concluyendo que la sucesión es un conjunto acotado. ■

Proposición 2.1.3 — Caracterización de cerrados con sucesiones. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces, A es cerrado si y solo si para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente, se tiene que su límite está en A.

Demostración. Supongamos que A es cerrado y sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión que converge a $\bar{x} \in X$. Probemos que $\bar{x} \in A$. Para todo $\varepsilon > 0$, se tendrá que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B(\bar{x},\varepsilon) \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(\bar{x},\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bar{x}$ está en $\overline{A}$ y como A es cerrado, concluimos que $\bar{x} \in A$.

Si ahora suponemos que para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente, se tiene que su límite está en A, probemos que A es cerrado ($\overline{A} \subseteq A$). Para $\bar{x} \in \overline{A}$ se tendrá

$$B(\bar{x},1/k) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Tomando x_k en la anterior intersección, se tiene que $x_k \to \bar{x}$ pues $d(\bar{x},x_k) \to 0$ (ver Ejercicio 2.1). Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$, por hipótesis $\bar{x}$ está en A, lo que demuestra que A es cerrado. ■

2.1.1 Subsucesiones

A partir de una sucesión, dado es una secuencia infinita de términos, es posible extraer otras sucesiones, que son denominadas subsucesiones.

Definición 2.1.3 Dada una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$, si se tiene una secuencia de números naturales $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ donde $k_j < k_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se dice que $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

■ **Ejemplo 2.1.4** Considere los siguientes ejemplos:

(1) Dada la sucesión $x_k = (-1)^k$, para $k_j = 2j$ se tiene la subsucesión $x_{k_j} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(2) Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión, entonces para $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{x_{k+p}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión. En tal caso se considera $k_j = j + p$.

Una subsucesión (de una sucesión) es en sí una sucesión, por lo tanto, puede converger a un determinado límite.

Ejercicio 2.3 Demuestre que si una sucesión es convergente, entonces toda subsucesión converge al mismo límite.

Definición 2.1.4 En un espacio métrico (X,d), se dice que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tiene un **punto de acumulación** $\bar{x} \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, existe $k \geq k_0$ tal que

$$x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon).$$

Ejercicio 2.4

(1) Para la sucesión $x_k = (-1)^k$ demuestre que 1 y -1 son puntos de acumulación.

(2) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la sucesión en $X = \mathbb{R}^2$ dada por $x_k = A^k \bar{x}$ donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto de acumulación de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 2.5 Pruebe que una sucesión tiene un punto de acumulación, si y solo si, existe una subsucesión que converge a ese elemento.

2.1.2 Sucesiones de Cauchy

Una clase muy importante de sucesiones, son las denominadas sucesiones de Cauchy, introducidas en la siguiente definición. Estas serán sucesiones cuyos términos se van acercando (de acuerdo a la métrica considerada) cada vez más entre sí.

Definición 2.1.5 En un espacio métrico (X,d), se dice que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es de **Cauchy**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon \qquad \forall\, k, k' \geq k_0.$$

Proposición 2.1.5 En un espacio métrico (X,d) toda sucesión de Cauchy es un conjunto acotado.

Demostración. Si una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es de Cauchy, entonces (tomando $\varepsilon = 1$) existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, x_{k'}) < 1 \quad \forall\, k,\ k' \geq k_0 \ \Rightarrow\ d(x_k, x_{k_0}) < 1 \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Si definimos $M = \max\{1, d(x_0, x_{k_0}), d(x_1, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_{k_0})\} < +\infty$ se tendrá

$$x_k \in B(x_{k_0}, M) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B(x_{k_0}, M),$$

concluyendo que la sucesión es un conjunto acotado. ■

Proposición 2.1.6 En un espacio métrico (X,d), si una sucesión es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy y $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a $\bar{x} \in X$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon/2 \qquad \forall\, k, k' \geq n_0.$$

Por otro lado, existirá $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{k_j} \in B(\bar{x}, \varepsilon/2) \qquad \forall\, j \geq j_0.$$

Si definimos $k_0 = \max\{k_{j_0}, n_0\}$, se tendrá

$$d(x_k, \bar{x}) \leq d(x_k, x_{k_{j_0}}) + d(x_{k_{j_0}}, \bar{x}) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

por lo tanto $x_k \to \bar{x}$. ■

2.2 Espacios métricos completos

La completitud de espacios métricos es, de alguna manera, una generalización de la completitud de los números reales. En palabras simples, la completitud hace referencia a que no hay elementos faltantes en el espacio. Esta propiedad la definimos a continuación.

Definición 2.2.1 Un espacio métrico (X,d) se dice **completo**, si toda sucesión de Cauchy (de acuerdo a la métrica d) es convergente en el espacio.

Ejercicio 2.6 Sea (X,d) un espacio métrico completo y $C \subseteq X$ un conjunto cerrado. Demuestre que (C,d') es un espacio métrico completo, donde d' es la restricción de la métrica d al conjunto $C \times C$.

En diversos resultados que se presentan en este texto, la propiedad de completitud de un espacio métrico será requerida. Por el momento, comenzaremos demostrando un resultado muy importante en análisis como es el teorema de Baire, descrito en la próxima sección.

2.2.1 Teorema de Baire

El teorema de Baire (o de las categorías de Baire) es un resultado muy importante en topología y análisis funcional. Su importancia radica en que a partir de él, se desprenden propiedades claves en análisis funcional, alguna de las cuales se abordan en este texto. Antes de introducir el teorema de Baire, necesitamos definir algunos conceptos y establecer propiedades que nos ayudarán a demostrar el resultado.

Definición 2.2.2 En un espacio métrico (X,d), para un conjunto $A \subseteq X$ se define su **diámetro** por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y),$$

valor que puede ser $-\infty$ (si $A = \emptyset$) o $+\infty$ (si A no es acotado).

Proposición 2.2.1 Para todo conjunto A de un espacio métrico (X,d), se tendrá

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A}).$$

Demostración. Como $A \subseteq \overline{A}$, se tendrá

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in \overline{A}} d(x,y) = \operatorname{diam}(\overline{A}).$$

Para probar que $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$, supongamos $\operatorname{diam}(A) < +\infty$ y $\overline{A} \neq \emptyset$, pues en alguna de estas situaciones la desigualdad buscada se obtiene de inmediato.

Sea $r > 0$ tal que $\operatorname{diam}(A) < r$. Si probamos que $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq r$ habremos demostrado el resultado, pues dados dos números reales $a,\ b \in \mathbb{R}$, si para todo $r > a$ uno tiene $b \leq r$, entonces se concluye $b \leq a$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\operatorname{diam}(A) < r - \varepsilon.$$

Para $x,\ y \in \overline{A}$ se tendrá que existen $z_x,\ z_y \in A$ tales que

$$d(x,z_x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(y,z_y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$d(x,y) \leq d(x,z_x) + d(z_x,z_y) + d(z_y,y) < \varepsilon + \operatorname{diam}(A) < r,$$

es decir,

$$d(x,y) < r \qquad \forall\, x,\ y \in \overline{A},$$

concluyendo que $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq r$. ■

La siguiente proposición, establece una caracterización de los espacios métricos completos.

Proposición 2.2.2 Un espacio métrico (X,d) es completo, si y solo si, para toda sucesión de conjuntos cerrados no vacíos $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ($C_k \subseteq X$), tales que $C_{k+1} \subseteq C_k$ con $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$, se tiene

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \{\bar{x}\},$$

para algún $\bar{x} \in X$.

Demostración. Sea $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de X, cerrados y no vacíos tales que $C_{k+1} \subseteq C_k$ con $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos un elemento $x_k \in C_k$. Como $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{diam}(C_k) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Dado que $C_k \subseteq C_{k_0}$ para $k \geq k_0$, se tendrá

$$d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon \qquad \forall\, k, k' \geq k_0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo (hipótesis), la sucesión converge a un elemento $\bar{x} \in X$.

Probemos que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \{\bar{x}\}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{k'} \in C_k$ para todo $k' \geq k$. Por lo tanto, $\bar{x} \in C_k$ (pues C_k es cerrado; Ver Proposición 2.1.3) y esto se tiene para todo $k \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\bar{x} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k.$$

Consideremos $\bar{y} \in X$ tal que

$$\bar{y} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k.$$

Como $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$, se tendrá $d(\bar{x},\bar{y}) \leq \operatorname{diam}(C_k) \to 0$. Por lo tanto $\bar{x} = \bar{y}$.

Para probar la otra implicancia de la proposición, tomemos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy y definamos los conjuntos

$$A_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \quad \text{y} \quad C_k = \overline{A_k}.$$

Entonces, los conjuntos C_k son cerrados, no vacíos y $C_{k+1} \subseteq C_k$. Veamos que $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$. Para $\varepsilon > 0$, como la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe k_0 tal que

$$d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon \qquad \forall\, k, k' \geq k_0.$$

Lo anterior implica que

$$\operatorname{diam}(C_{k_0}) = \operatorname{diam}(A_{k_0}) \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \operatorname{diam}(C_k) \leq \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

donde la igualdad $\operatorname{diam}(C_{k_0}) = \operatorname{diam}(A_{k_0})$ se obtiene gracias a la Proposición 2.2.1. Por lo tanto, $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$.

Finalmente, por hipótesis, existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \{\bar{x}\}.$$

Probemos que $x_k \to \bar{x}$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(C_k) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Como $\bar{x}$ y x_k están en C_{k_0} para todo $k \geq k_0$, entonces

$$d(\bar{x}, x_k) \leq \operatorname{diam}(C_{k_0}) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

lo que demuestra $x_k \to \bar{x}$. Hemos probado que toda sucesión de Cauchy es convergente, por lo tanto el espacio métrico (X,d) es completo. ■

Definición 2.2.3 En un espacio métrico (X,d), un conjunto $A \subseteq X$ se dice **denso** si su adherencia es todo el espacio, es decir, $\overline{A} = X$.

Lema 2.1 En un espacio métrico (X,d), un conjunto $A \subseteq X$ es denso, si y solamente si, para todo abierto $\theta \subseteq X$ distinto de vacío se tiene

$$A \cap \theta \neq \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que el conjunto A es denso y sea θ un abierto no vacío. Para $x \in \theta$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \theta.$$

Como A es denso y $x \in \overline{A} = X$, se tiene que

$$\emptyset \neq B(x,\varepsilon) \cap A \subseteq \theta \cap A.$$

Consideremos ahora $x \in X$. Como para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x,\varepsilon)$ es un conjunto abierto distinto de vacío, concluimos que

$$A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Es decir, $x \in \overline{A}$. Hemos probado entonces la inclusión

$$X \subseteq \overline{A},$$

concluyendo que A es denso. ■

Teorema 2.2.3 — Baire. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Entonces, toda intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso.

Demostración. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos densos. Definamos

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

y probemos que A es denso. Para ello, sea $\theta \subseteq X$ un abierto no vacío y demostremos $A \cap \theta \neq \emptyset$ (ver Lema 2.1). Comencemos definiendo $B_0 = A_0 \cap \theta$ que será un conjunto abierto no vacío, al ser una intersección de dos abiertos y dado que A_0 es denso.

Dado $x_1 \in B_0$, existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$ tal que

$$B_1 := B(x_1,\varepsilon_1) \subseteq \overline{B}_1 := B[x_1,\varepsilon_1] \subseteq B_0 = A_0 \cap B_0.$$

Como $B_1 \cap A_1 \neq \emptyset$ es no vacío (pues A_1 es denso) y abierto, para $x_2 \in B_1 \cap A_1$ existe $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ tal que

$$B_2 := B(x_2, \varepsilon_2) \subseteq \overline{B}_2 := B[x_2, \varepsilon_2] \subseteq B_1 \cap A_1 \subseteq \overline{B}_1.$$

De esta forma vamos construyendo la sucesión $\{\overline{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados, no vacíos, tales que $\overline{B}_{k+1} \subseteq \overline{B}_k$ y

$$\operatorname{diam}(\overline{B}_k) = \operatorname{diam}(B_k) = 2\varepsilon_k < \frac{2}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}} \to 0.$$

Como X es completo, por la Proposición 2.2.2 podemos concluir que existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_k = \{\bar{x}\}.$$

Dado que $\overline{B}_{k+1} \subseteq A_k \cap B_k$, entonces

$$\bar{x} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = A.$$

Además $\bar{x} \in \overline{B}_1 \subseteq B_0 = A_0 \cap \theta$, concluyendo $\bar{x} \in \theta \cap A$ y, por lo tanto, $A \cap \theta \neq \emptyset$ para todo abierto θ no vacío, de donde se desprende que A es denso. ■

En topología se definen los espacios de Baire, como aquellos donde toda intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso. Por lo tanto, la forma del teorema de Baire presentada anteriormente, establece que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Un resultado que se desprende directamente del teorema de Baire, y que será utilizado más adelante, es el siguiente.

Corolario 2.2.4 Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados que satisface

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k,$$

entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(C_{k_0}) \neq \emptyset$.

Demostración. Definiendo $\theta_k = C_k^c$ (abiertos), como $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \theta_k = \emptyset$ no es un conjunto denso, de acuerdo al Teorema 2.2.3 existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que θ_{k_0} no es denso, es decir, existe un abierto no vacío $\theta \subseteq X$ tal que

$$\theta \cap \theta_{k_0} = \theta \cap C_{k_0}^c = \emptyset \ \Rightarrow\ \emptyset \neq \theta \subseteq C_{k_0},$$

pero como $\operatorname{int}(C_{k_0})$ es el conjunto abierto más grande contenido en C_{k_0} (ver Ejercicio 1.11), se tiene entonces $\emptyset \neq \theta \subseteq \operatorname{int}(C_{k_0})$, demostrando así lo deseado. ■

2.3 Espacios métricos compactos

La compacidad de un espacio métrico o de un subconjunto de un espacio métrico, es una propiedad muy útil en análisis. Entre otras cosas, permitirá extraer subsucesiones convergentes. En esta sección presentaremos la definición de espacio métrico compacto, para posteriormente analizar algunas propiedades relativas a funciones.

Antes de ver en qué consiste la compacidad, es necesario definir lo que es un recubrimiento.

Definición 2.3.1 En un espacio métrico (X,d), se dice que una familia de conjuntos $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $\theta_\alpha \subseteq X$ para todo $\alpha \in \Lambda$, es un **recubrimiento** de X, si

$$X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha.$$

Si los conjuntos θ_α son abiertos, se dirá que $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un **recubrimiento de abiertos** o un **recubrimiento abierto** de X.

Dado un conjunto $C \subseteq X$, se dice que la familia de conjuntos $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $\theta_\alpha \subseteq X$ para todo $\alpha \in \Lambda$, es un **recubrimiento** de C, si

$$C \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha,$$

y si los conjuntos θ_α son abiertos, se dirá que $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un **recubrimiento de abiertos** o un **recubrimiento abierto** de C.

Si se tiene un subconjunto de indices $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda$ tal que $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\bar{\Lambda}}$ sigue siendo un recubrimiento (de X o de C), se dice que es un **subrecubrimiento** del recubrimiento original. Si la cardinalidad del subconjunto de índices $\bar{\Lambda}$ es finita, se dirá que $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\bar{\Lambda}}$ es un **subrecubrimiento finito**.

■ **Ejemplo 2.3.1** Veamos algunos ejemplos de recubrimientos de abiertos.

(1) En un espacio métrico (X,d) evidentemente X es un recubrimiento abierto.

(2) Dado un espacio métrico (X,d), se tiene que $\{B(x,\varepsilon)\}_{(x,\varepsilon)\in\Lambda}$, con

$$\Lambda = X \times (0,+\infty),$$

es un recubrimiento abierto de X.

(3) Para $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $a<b$, si consideramos $X=\mathbb{R}$ dotado de la métrica usual en $\mathbb{R}$, para $\varepsilon>0$ se tiene que $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}_{x\in[a,b]}$ es un recubrimiento abierto de (a,b).

(4) Para $X=\mathbb{R}$, dotado de la métrica usual en $\mathbb{R}$, se tiene que $\{(1/n,1)\}_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ es un recubrimiento abierto de $(0,1)$.

Definición 2.3.2 Un espacio métrico (X,d) se dice que es un **espacio métrico compacto**, si todo recubrimiento de abiertos admite un subrecubrimiento finito. Un conjunto $C \subseteq X$ se dirá que es un **conjunto compacto**, si todo recubrimiento de abiertos de C admite un subrecubrimiento finito o, equivalentemente, si (C,d) (con d restringido a $C\times C$) es un espacio métrico compacto.

Ejercicio 2.7 Demuestre las siguientes propiedades:

(1) En un espacio métrico, la unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

(2) En un espacio métrico, la intersección de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

(3) Si (X,d) es un espacio métrico compacto y $C \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces (C,d) es un espacio métrico compacto.

Proposición 2.3.2 Un espacio métrico (X,d) es compacto, si y solamente si, para toda familia de conjuntos $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $C_\alpha \subseteq X$ cerrado para todo $\alpha \in \Lambda$, que satisface

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \emptyset, \tag{2.2}$$

se tiene que existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos (X,d) es compacto y sea $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados que satisface (2.2). Entonces, la familia $\{C_\alpha^c\}_{\alpha\in\Lambda}$ constituida de los complementos de C_α, es un recubrimiento de abiertos de X pues, tomando complemento en (2.2), se obtiene

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha^c = X.$$

Por la compacidad de X existe un subrecubrimiento finito, es decir, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_{\alpha_j}^c = X \ \Rightarrow\ \bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} = \emptyset.$$

Probemos ahora que (X,d) es compacto si se tiene la propiedad con los conjuntos cerrados del enunciado. Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de X, entonces $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $C_\alpha = \theta_\alpha^c$, es una familia de cerrados que satisface (2.2). Por lo tanto, existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} C_{\alpha_j}^c = \bigcup_{j=1}^{n} \theta_{\alpha_j} = X,$$

es decir, a partir de $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ existe un subrecubrimiento finito de X, probando así que X es compacto. ■

Proposición 2.3.3 Si el espacio métrico (X,d) es compacto, entonces para toda sucesión de conjuntos cerrados no vacíos $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $C_{k+1} \subseteq C_k \subseteq X$, se tiene $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados como en el enunciado. Si $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \emptyset$, por la proposición anterior, existirán $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{n} C_{k_j} = \emptyset.$$

Sin embargo, como $C_{k+1} \subseteq C_k$, tomando $\bar{k} = \text{máx}\{k_1,\ldots,k_n\}$ se tiene que $C_{\bar{k}} = \bigcap_{j=1}^{n} C_{k_j} = \emptyset$, lo que no puede ser pues $C_{\bar{k}} \neq \emptyset$. Por lo tanto concluímos $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \neq \emptyset$. ■

Ejercicio 2.8 Demuestre que un producto finito de espacios métricos compactos, es un espacio métrico compacto, considerando en el espacio métrico producto alguna de las métricas usuales (ver página 24).

A continuación presentamos el teorema de Bolzano-Weierstrass, que establece una caracterización de los espacios métricos compactos en términos de sucesiones.

Teorema 2.3.4 — Bolzano-Weierstrass. Un espacio métrico (X,d) es compacto, si y solamente si, toda sucesión en X tiene un punto de acumulación o, equivalentemente, tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Supongamos X es compacto. Para una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ probemos que tiene un punto de acumulación (o una subsucesión convergente). Definamos

$$A_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \quad \text{y} \quad C_k = \overline{A_k} \neq \emptyset \quad (\text{cerrados y } C_{k+1} \subseteq C_k).$$

Por la Proposición 2.3.3 se tiene

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \neq \emptyset.$$

Sea $\bar{x}$ en la anterior intersección. Para $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bar{x} \in C_{k_0} = \overline{A_{k_0}}$ y, por lo tanto, $B(\bar{x},\varepsilon) \cap A_{k_0} \neq \emptyset$, es decir, existe $k \geq k_0$ tal que

$$x_k \in B(\bar{x},\varepsilon),$$

concluyendo que $\bar{x}$ es un punto de acumulación de la sucesión.

Probemos ahora que si toda sucesión en X tiene un punto de acumulación, entonces X es compacto. Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de X. Probemos que existe $r > 0$, tal que para todo $x \in X$ se tiene que existe $\alpha \in \Lambda$ que satisface $B(x,r) \subseteq \theta_\alpha$. Si esto no es verdad, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ se tiene $B(x_k, 1/k) \nsubseteq \theta_\alpha$. Es decir,

$$\forall\, k \in \mathbb{N};\ \exists\, x_k \in X \quad \text{tal que} \ \ B(x_k, 1/k) \cap \theta_\alpha^c \neq \emptyset \qquad \forall\, \alpha \in \Lambda.$$

Por hipótesis, existirá una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y un elemento $\bar{x} \in X$ tal que $x_{k_j} \to \bar{x}$.

Sea $\bar{\alpha} \in \Lambda$ tal que $\bar{x} \in \theta_{\bar{\alpha}}$ y $\varepsilon > 0$ que satisface $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \theta_{\bar{\alpha}}$. Sabemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_j} \in B(\bar{x}, \varepsilon/2)$ para todo $j \geq j_0$. Si se toma $j \geq j_0$ tal que $1/k_j < \varepsilon/2$, se tendrá

$$B(x_{k_j}, 1/k_j) \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \theta_{\bar{\alpha}},$$

pues

$$d(z, \bar{x}) \leq d(z, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, \bar{x}) < \varepsilon \qquad \forall\, z \in B(x_{k_j}, 1/k_j),$$

llegando así a una contradicción, pues los elementos x_k fueron elegidos de tal forma que

$$B(x_k, 1/k) \cap \theta_\alpha^c \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$, se tiene que existe $\alpha \in \Lambda$ que satisface $B(x, r) \subseteq \theta_\alpha$.

Sea ahora $x_1 \in X$ (cualquiera) y $\alpha_1 \in \Lambda$ tal que $B(x_1, r) \subseteq \theta_{\alpha_1}$. Si $B(x_1, r)$ no recubre a X, tomamos $x_2 \in X \setminus B(x_1, r)$ y $\alpha_2 \in \Lambda$ tal que $B(x_2, r) \subseteq \theta_{\alpha_2}$. Si $B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$ no recubre X, tomamos $x_3 \in X \setminus [B(x_1, r) \cup B(x_2, r)]$ y así sucesivamente.

En algún momento el procedimiento se detiene, es decir, debe existir una cantidad finita de x_k, pues si no es así, la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene punto de acumulación dado que $d(x_k, x_{k'}) \geq r$ para $k \neq k'$. Concluimos entonces,

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \theta_{\alpha_k},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, encontrando así un subrecubrimiento finito a partir de $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, lo que prueba la compacidad de X. ■

Ejercicio 2.9 Pruebe que si en un espacio métrico (X, d) se tiene un conjunto $C \subseteq X$ compacto, entonces C es cerrado y acotado.

La recíproca en la anterior propiedad no es cierta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.3.5** Dado el espacio

$$X := \ell_2(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k\geq 0} x_k^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x_k^2 < +\infty \right\},$$

dotado de la métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d\left(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \left(\sum_{k\geq 0} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X,$$

para $n \in \mathbb{N}$ considere la sucesión $\{\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_k^n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Claramente $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, cada uno de estos elementos está en $B[0, 1]$ (bola cerrada de centro cero y radio 1). Sin embargo, vemos que $B[0, 1]$ si bien es un conjunto cerrado y acotado, no puede ser compacto, pues la sucesión considerada no tiene punto de acumulación dado que

$$d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k^{n'}\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sqrt{2} \qquad \forall\, n, n' \in \mathbb{N},\ n \neq n'.$$

3. Funciones en espacios métricos

En este capítulo final de la primera parte, estudiaremos funciones y espacios de funciones definidas en un espacio métrico, comenzando por describir qué significa que una función sea continua. Como hemos recalcado en los capítulos anteriores, el contar con una métrica en un conjunto, nos permitirá definir nuevos conceptos (como la continuidad) de manera análoga a como hacemos en el conjunto de los números reales. Finalizaremos el capítulo introduciendo los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de funciones, caracterizando también la compacidad de espacios de funciones a través del teorema de Arzela-Ascoli.

Dados dos espacios métricos (X,d_X) e (Y,d_Y) consideraremos funciones $f : X \longrightarrow Y$, es decir, relaciones que a cada elemento de X le asocian un único elemento de Y. Para diferenciar las bolas (abiertas, cerradas) en los espacios X e Y, estas serán denotadas por B_X y B_Y respectivamente.

3.1 Continuidad

Uno de los principales conceptos relacionados con funciones es el de continuidad.

Definición 3.1.1 — Continuidad. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dirá que f es **continua en** $x_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_X(x_0,\delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in B_Y(f(x_0),\varepsilon),$$

o equivalentemente

$$B_X(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}\left(B_Y(f(x_0),\varepsilon)\right),$$

donde para un conjunto $B \subseteq Y$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es la preimagen de B a través de f, es decir,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Se dice que f es **continua** si lo es en cada elemento de X.

En la definición anterior, se pueden remplazar las bolas abiertas por bolas cerradas obteniendo definiciones equivalentes.

Una caracterización de la continuidad, que de hecho es como se define para funciones en espacios topológicos, como se verá en la última parte del texto, es la que se demuestra a continuación.

Proposición 3.1.1 Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua, si y solamente si, para todo abierto $\theta \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(\theta)$ es un abierto de X.

Demostración. Supongamos que f es continua y consideremos un conjunto abierto $\theta \subseteq Y$. Tomemos $x_0 \in f^{-1}(\theta)$, es decir, $f(x_0) \in \theta$. Como θ es abierto, existirá $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq \theta.$$

Por la continuidad de f en x_0, existirá $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_X(x_0, \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon),$$

por lo tanto

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(\theta),$$

probando así que $f^{-1}(\theta)$ es abierto.

Por otro lado, si para todo abierto $\theta \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(\theta)$ es un abierto de X, demostremos ahora que f es continua. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ es un conjunto abierto, por hipótesis se tiene que $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto. Como

$$x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

existirá $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \;\Leftrightarrow\; (x \in B_X(x_0, \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

probando así la continuidad de f en x_0. ■

Ejercicio 3.1 Pruebe que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua, si y solamente si, para todo cerrado $C \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado de X.

Proposición 3.1.2 Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $\bar{x} \in X$, si y solamente si, para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a $\bar{x}$ se tiene que $f(x_k) \to f(\bar{x})$.

Demostración. Supongamos que f es continua en $\bar{x} \in X$ y sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\bar{x}$. Para $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f existirá $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_X(\bar{x}, \delta) \ \Rightarrow\ f(x) \in B_Y(f(\bar{x}), \varepsilon).$$

Como $x_k \to \bar{x}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_X(\bar{x}, \delta)$ para todo $k \geq k_0$, por lo tanto

$$f(x_k) \in B_Y(f(\bar{x}), \varepsilon) \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

probando así que $f(x_k) \to f(\bar{x})$.

Si para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a $\bar{x}$ se tiene que $f(x_k) \to f(\bar{x})$, demostremos ahora que f es continua en $\bar{x}$. Supongamos que no lo es, es decir,

$$\exists\, \varepsilon > 0;\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ (\delta = 1/k);\ \ \exists\, x_k \in B_X(\bar{x}, 1/k)\ \wedge\ d_Y(f(x_k), f(\bar{x})) \geq \varepsilon.$$

Esto es una contradicción con la hipótesis, pues la sucesión que se obtiene satisface $x_k \to \bar{x}$ pero $f(x_k)$ no converge a $f(\bar{x})$. Por lo tanto, f es continua en $\bar{x}$. ■

Definición 3.1.2 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dice que $\bar{y} \in Y$ es el **límite** de f cuando x tiende a $\bar{x} \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_X(\bar{x}, \delta) \ \Rightarrow\ f(x) \in B_Y(\bar{y}, \varepsilon).$$

En tal caso se escribe $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = \bar{y}$.

Ejercicio 3.2 Pruebe que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $\bar{x} \in X$ si y solamente si

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Ejercicio 3.3 Sean $(Y_1, d_1), \ldots, (Y_n, d_n)$ espacios métricos e $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ el espacio producto dotado de alguna de las siguientes métricas para $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X$ (donde $y_j, z_j \in Y_j$)

$$\begin{aligned} d_p(y,z) &= \left(\sum_{j=1}^{n} (d_j(y_j, z_j))^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{para } p \geq 1 \\ d_\infty(y,z) &= \max_{j=1,\ldots,n} d_j(y_j, z_j). \end{aligned}$$

Si (X, d) es otro espacio métrico, pruebe que la función $f : X \longrightarrow Y$ que a cada elemento $x \in X$

le asocia $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in Y$, es continua en $\bar{x} \in X$ si y solamente si, para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene que $f_j : X \longrightarrow Y_j$ es continua en $\bar{x}$.

En un espacio métrico (X,d), al ser $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, es natural preguntarse sobre su continuidad. La respuesta a esto es enunciada en el próximo ejercicio.

Ejercicio 3.4 En un espacio métrico (X,d), demuestre que la distancia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, considerando en el espacio producto $X \times X$, alguna de las métricas usuales (ver página 24).

Ejercicio 3.5 Sean (X,d_X), (Y,d_Y) y (Z,d_Z) tres espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ dos funciones tales que f es continua en $\bar{x} \in X$ y g es continua en $f(\bar{x})$. Pruebe que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ (f compuesta con g) es continua en $\bar{x}$.

Teorema 3.1.3 Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $C \subseteq X$ es un conjunto compacto, entonces $f(C) \subseteq Y$ es un conjunto compacto.

Demostración. Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento de abiertos (en Y) de $f(C)$. Como f es continua, se tendrá que $\{f^{-1}(\theta_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de abiertos en X (ver Proposición 3.1.1), que además será un recubrimiento de C, pues

$$f(C) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha \;\Leftrightarrow\; C \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(\theta_\alpha).$$

Como C es compacto, existirán $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(\theta_{\alpha_j}) \;\Leftrightarrow\; f(C) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \theta_{\alpha_j},$$

probando así que $f(C)$ es compacto. ■

Corolario 3.1.4 Dado un espacio métrico compacto (X,d) y una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existen $x_m,\ x_M \in X$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall\, x \in X,$$

es decir, la función f alcanza un mínimo y un máximo en X.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.1.3 considerando que un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ tiene un mínimo y un máximo. ■

Corolario 3.1.5 Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto y (Y, d_Y) un espacio métrico. Entonces, el conjunto

$$\mathscr{C}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$$

dotado de la función

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \qquad \forall\, f,\ g \in \mathscr{C}(X,Y),$$

es un espacio métrico.

Demostración. Probar que la función d_∞ satisface las propiedades de una métrica resultará de manera directa (heredará dichas propiedades de d_Y). Lo que no es directo de observar, es que dicha función esté bien definida, pues al ser definida mediante un supremo, el valor $d_\infty(f,g)$ podría no estar en $\mathbb{R}$. Sin embargo, al ser las funciones f y g continuas, y al ser la distancia d_Y continua (ver Ejercicio 3.4), se tendrá que la función $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi(x) = d_Y(f(x), g(x))$ es una composición de funciones continuas y, por lo tanto, es continua (ver Ejercicio 3.5). De esta forma, aplicando el Corolario 3.1.4, la función ϕ alcanza su máximo sobre el compacto X, concluyendo que $d_\infty(f,g)$ está bien definida para todo f y g en $\mathscr{C}(X,Y)$. ■

A la métrica d_∞ definida en el corolario anterior, sobre el conjunto de las funciones continuas definidas en un espacio métrico compacto, se le denomina métrica del supremo o métrica de la convergencia uniforme.

Definición 3.1.3 — Uniforme continuidad. Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es **uniformemente continua**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Ejercicio 3.6 Pruebe que si una función es uniformemente continua entonces es continua.

Observe que en $X = \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = x^2$ es una función continua pero no es uniformemente continua.

Proposición 3.1.6 Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función uniformemente continua, entonces para todo par de sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $d_X(x_k, y_k) \to 0$, se tendrá $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \to 0$.

Demostración. Consideremos dos sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $d_X(x_k, y_k) \to 0$. Para $\varepsilon > 0$, por la uniforme continuidad de f se tendrá que existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, y_k) < \delta$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto,

$$d_Y(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

demostrando así que $d_Y(f(x_k), f(y_k)) \to 0$. ■

A continuación veremos que una función continua definida sobre un compacto, es uniformemente continua.

Proposición 3.1.7 Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces, f es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que f no es uniformemente continua, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen $x_k,\ y_k \in X$ que satisfacen

$$d_X(x_k, y_k) < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad d_Y(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Como X es compacto, existirán $\bar{x},\ \bar{y} \in X$ y dos subsucesiones $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{y_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $(x_{k_j}, y_{k_j}) \to (\bar{x}, \bar{y})$, pero como $d_X(x_k, y_k) \to 0$ entonces $\bar{x} = \bar{y}$ y por la continuidad de f (y de la función distancia d_Y), se debería tener

$$d_Y(f(x_{k_j}), f(y_{k_j})) \ \to d_Y(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = 0,$$

lo que es una contradicción con (3.1). ■

En las siguientes definiciones presentamos las funciones Lipschtiz y localmente Lipschitz, para luego demostrar el teorema de punto fijo de Banach en espacios métricos completos.

Definición 3.1.4 — Lipschitz. Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice es **Lipschitz**, si existe $L \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \ \in X.$$

En caso en que $L < 1$, se dirá que la función f es **contractante**.

Definición 3.1.5 — Localmente Lipschitz. Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice es **localmente Lipschitz en** $x_0 \in X$, si existen $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ tales que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \ \in B(x_0, \varepsilon).$$

Se dice que la función es **localmente Lipschitz** si lo es en cada elemento $x_0 \in X$.

Ejercicio 3.7 Demuestre las siguientes propiedades:

(1) Si f es Lipschitz, entonces es localmente Lipschitz.

(2) Si f es localmente Lipschitz, entonces es continua.

(3) Si f es Lipschitz, entonces es uniformemente continua.

Teorema 3.1.8 — Punto fijo de Banach. Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función contractante, entonces existe un único elemento $\bar{x} \in X$ (punto fijo de f) tal que

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$

Demostración. Dado $x_0 \in X$, consideremos la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $x_{k+1} = f(x_k)$. Vamos a probar que esta sucesión es de Cauchy. Sea $L \in (0,1)$ la constante de Lipschitz de f, es decir,

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Observe que se tendrá:

$$\begin{array}{rcl} d(x_1,x_2) & = & d(f(x_0), f(x_1)) \leq Ld(x_0,x_1) \\ d(x_2,x_3) & = & d(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1,x_2) \leq L^2 d(x_0,x_1) \\ & \vdots & \\ d(x_k,x_{k+1}) & = & d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq Ld(x_{k-1},x_k) \leq L^k d(x_0,x_1). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$d(x_k,x_{k+1}) \leq L^k d(x_0,x_1) \qquad \forall\, k \geq 1.$$

Supondremos $x_0 \neq x_1$, en caso contrario x_0 es un punto fijo. Sean $n, n' \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supondremos $n' = n + p$. Entonces,

$$d(x_{n+p},x_n) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p})$$

$$\leq (L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{n+p-1})d(x_0,x_1) = \frac{L^n - L^{n+p}}{1-L} \leq \frac{L^n}{1-L} \to 0.$$

De esta forma, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{L^{n_0}}{1-L} < \varepsilon$ y, por lo tanto,

$$d(x_n,x_{n'}) < \varepsilon \qquad \forall\, n,n' \geq n_0,$$

concluyendo que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por la completitud de X, deducimos que existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_k \to \bar{x}$. Como $x_{k+1} = f(x_k)$, por la continuidad de f se debe tener $\bar{x} = f(\bar{x})$, por lo tanto $\bar{x}$ es un punto fijo de f. Para ver que es único, supongamos existe $\bar{y} \neq \bar{x}$ punto fijo de f, entonces $d(\bar{x},\bar{y}) > 0$ y

$$d(\bar{x},\bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq Ld(\bar{x},\bar{y}) \ \Rightarrow\ L \geq 1,$$

lo que es una contradicción, probando así la unicidad de $\bar{x}$. ■

3.2 Convergencia puntual y uniforme

En esta sección definiremos dos tipos de convergencia para una sucesión de funciones (puntual y uniforme), y veremos algunas relaciones que existen entre ellas. Al finalizar, demostraremos el teorema de Arzela-Ascoli, que permite determinar cuándo un conjunto de funciones continuas posee una propiedad de compacidad relacionada con la convergencia uniforme.

Definición 3.2.1 — Convergencia puntual y uniforme. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre X a valores en Y. Se dice que esta sucesión **converge puntualmente** a $f : X \longrightarrow Y$, si para todo $x \in X$ se tiene $f_k(x) \to f(x)$, es decir, $d_Y(f_k(x), f(x)) \to 0$.

Se dirá que la sucesión **converge uniformemente** a $f : X \longrightarrow Y$, si

$$\sup_{x\in X} d_Y(f_k(x), f(x)) \to 0.$$

Ejercicio 3.8 Demuestre que si la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : X \longrightarrow Y$, entonces converge puntualmente.

Teorema 3.2.1 — Dini. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Suponga que la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}(X,\mathbb{R}) = \{h : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid h \quad \text{es continua}\}$ (funciones continuas de X en $\mathbb{R}$) satisface la siguiente propiedad:

$$f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$C_k^\varepsilon := \{x \in X \ : \ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X \ : \ f_k(x) - f(x) \geq \varepsilon\}$$

es cerrado y no vacío para todo $k \in \mathbb{N}$. Además $C_{k+1}^\varepsilon \subseteq C_k^\varepsilon$. Por la compacidad de X deducimos que (ver Proposición 2.3.3)

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k^\varepsilon \neq \emptyset.$$

Sin embargo, para $\bar{x}$ en esa intersección, se tendrá

$$f_k(\bar{x}) - f(\bar{x}) \geq \varepsilon \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

lo que es una contradicción con la convergencia puntual. ■

3.2.1 Equicontinuidad y teorema de Arzela-Ascoli

Para establecer los siguientes resultados, trabajaremos en espacios métricos separables, cuya definición entregamos a continuación.

Definición 3.2.2 — Espacios separables. Un espacio métrico (X,d) se dice **separable**, si existe un subconjunto de X que es denso y tiene cardinalidad numerable.

Ejercicio 3.9 Demuestre que un espacio métrico compacto es separable.

Dado dos espacios métricos (X,d_X) e (Y,d_Y), consideraremos el conjunto $\mathscr{C}(X,Y)$ de funciones continuas definidas sobre X a valores en Y, es decir,

$$\mathscr{C}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Definición 3.2.3 — Funciones equicontinuas. Un conjunto de funciones $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X,Y)$ se dice **equicontinua en** $x_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon)) \qquad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Se dirá que $\mathscr{F}$ es **equicontinua** si lo es en cada elemento de X.

Por otra parte, se dice que $\mathscr{F}$ es **uniformemente equicontinua**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Ejercicio 3.10 Demuestre que los siguientes conjuntos de funciones son equicontinuas:

(1) Conjunto finito de funciones continuas;

(2) Conjunto de funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz acotadas. En este caso pruebe además que este conjunto es uniformemente equicontinua.

Ejercicio 3.11 Si (X,d) es compacto, demuestre que un conjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X,Y)$ de funciones equicontinua es uniformemente equicontinua.

Teorema 3.2.2 — Arzela-Ascoli. Sea (X,d_X) un espacio métrico separable e (Y,d_Y) un espacio métrico completo. Si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X,Y)$ es equicontinua y para todo $x \in X$ el conjunto

$$\overline{\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}} \subseteq Y$$

es compacto, entonces para toda sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ existe una subsucesión convergente puntualmente a una función $f \in \mathscr{C}(X,Y)$. La convergencia será uniforme sobre conjuntos compactos.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq X$ el conjunto denso numerable dado por el hecho que X es un espacio métrico separable. Tomemos $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ y probemos que existe una subsucesión convergente puntualmente para todo $x \in D$.

Sea $x_1 \in D$. Como $\overline{\{f_k(x_1)\}}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es compacto, existirá una subsucesión $\{f_{k_j^1}(x_1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Luego sea $x_2 \in D$. Como $\overline{\{f_{k_j^1}(x_2)\}}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es compacto, existirá una subsucesión $\{f_{k_j^2}(x_2)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.

Sucesivamente, como $\overline{\{f_{k_j^{n-1}}(x_n)\}}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es compacto, existirá una subsucesión $\{f_{k_j^n}(x_n)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.

Consideremos ahora la subsucesión $\{f_{k_n^n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$. Para $x \in D$, existirá $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_{\bar{n}}$. Observe que

$$\{f_{k_n^n}\}_{n\geq\bar{n}} \quad \text{es una subsucesión de} \quad \{f_{k_j^{\bar{n}}}\}_{j\in\mathbb{N}},$$

por lo tanto, $f_{k_n^n}(x_{\bar{n}})$ converge en Y. Es decir, $\{f_{k_n^n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ converge para todo $x \in D$.

Para alivianar la notación, a esta subsucesión la notaremos $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y mostraremos que converge puntualmente para todo $x_0 \in X$.

Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la equicontinuidad, existirá $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x_0, x) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f_{k_j}(x_0), f_{k_j}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Además, existe $z \in D$ tal que $d_X(x_0, z) < \delta$ y como $\{f_{k_j}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, existirá $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_Y(f_{k_j}(z), f_{k_{j'}}(z)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, j,\ j' \geq j_0.$$

Por lo tanto,

$$d_Y(f_{k_j}(x_0), f_{k_{j'}}(x_0)) \leq d_Y(f_{k_j}(x_0), f_{k_j}(z)) + d_Y(f_{k_j}(z), f_{k_{j'}}(z)) + d_Y(f_{k_{j'}}(z), f_{k_{j'}}(x_0)) < \varepsilon$$

para todo $j,\ j' \geq j_0$. Es decir, $\{f_{k_j}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es de Cauchy, y como Y es completo, existirá $f(x_0) \in Y$ que es el límite.

De esta forma definimos $f : X \longrightarrow Y$ como

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} f_{k_j}(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Probemos que f es continua. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la equicontinuidad, existirá $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x_0, x) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f_{k_j}(x_0), f_{k_j}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon,$$

mostrando así que f es continua, lo que prueba la primera parte del teorema (convergencia puntual de una subsucesión a una función $f \in \mathscr{C}(X,Y)$). La técnica utilizada se conoce como *argumento diagonal* o *sucesión diagonal* y dice relación con ir construyendo una subsucesión de subsucesiones y luego considerar la subsucesión diagonal.

Finalmente, mostremos que se tiene la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Sea $C \subseteq X$ un compacto. Entonces, $\mathscr{F}$ será uniformemente equicontinua sobre C (ver Ejercicio 3.11). Lo anterior implicará que dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d_X(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ & d_Y(f_{k_j}(x), f_{k_j}(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \\ & d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otra parte, sabemos que existen $y_1, \ldots, y_n \in C$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta).$$

Además, existirá $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_Y(f_{k_j}(y_i), f(y_i)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, j \geq j_0,\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Por lo tanto, para todo $x \in C$, existirá y_{i^*} tal que $x \in B(y_{i^*}, \delta)$ teniéndose

$$d_Y(f_{k_j}(x), f(x)) \leq \underbrace{d_Y(f_{k_j}(x), f_{k_j}(y_{i^*}))}_{<\varepsilon/3 \text{ por (3.2)}} + \underbrace{d_Y(f_{k_j}(y_{i^*}), f(y_{i^*}))}_{<\varepsilon/3 \text{ por (3.3)}} + \underbrace{d_Y(f(y_{i^*}), f(x))}_{<\varepsilon/3 \text{ por (3.2)}} < \varepsilon \qquad \forall\, j \geq j_0.$$

Hemos probado entonces que

$$\sup_{x \in X} d_Y(f_{k_j}(x), f(x)) < \varepsilon \qquad \forall\, j \geq j_0,$$

concluyendo así que la convergencia de $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ a f es uniforme sobre C. ■

Antes de ver un corolario del teorema de Arzela-Ascoli, que dice relación con la caracterización de la compacidad de conjuntos en el espacio de las funciones continuas $\mathscr{C}(X,Y)$, introduzcamos la siguiente definición.

Definición 3.2.4 En un espacio métrico (X,d), un conjunto $C \subseteq X$ se dice **relativamente compacto**, si $\overline{C}$ es compacto, es decir, si toda sucesión en C tiene punto de acumulación.

Corolario 3.2.3 Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico completo y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X,Y)$ un conjunto de funciones continuas, espacio que dotamos de la métrica del supremo (ver definición en el Corolario 3.1.5). Entonces, $\mathscr{F}$ es relativamente compacto, si y solo si:

(a) $\mathscr{F}$ es equicontinua;

(b) Para todo $x \in X$ el conjunto $\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en Y.

Demostración. Supongamos $\mathscr{F}$ es relativamente compacto, entonces se tiene (b) de manera directa, pues para $x \in X$, y una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$, se tendrá que existe una sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ tal que $y_k = f_k(x)$. Por lo tanto, existirá una subsucesión convergente de $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Probemos por contradicción que también se tiene (a).

Si $\mathscr{F}$ no es equicontinua, existe $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B(x, 1/k)$ y $f_k \in \mathscr{F}$ que satisfacen $d_Y(f_k(x), f_k(x_k)) \geq \varepsilon$. Como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a una función continua $f : X \longrightarrow Y$ y $x_k \to x$, se tendrá

$$d_Y(f_{k_j}(x), f_{k_j}(x_{k_j})) \leq \underbrace{d_Y(f_{k_j}(x), f(x))}_{\leq d_\infty(f_{k_j}, f)} + d_Y(f(x), f(x_{k_j})) + \underbrace{d_Y(f(x_{k_j}), f_{k_j}(x_{k_j}))}_{\leq d_\infty(f_{k_j}, f)} \to 0,$$

de donde se obtiene una contradicción.

Para demostrar que si se tiene (a) y (b) entonces $\mathscr{F}$ es relativamente compacto, basta utilizar el teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 3.2.2).

■

Ejercicios resueltos

(E1) Considere el conjunto

$$\ell_1(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \ : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty \right\}$$

y la función

$$d\left(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k| \qquad \forall\ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{R}).$$

Demuestre que $(\ell^1(\mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico completo.

Solución: La función d estará bien definida en $\ell_1(\mathbb{R}) \times \ell_1(\mathbb{R})$ dado que para $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{R})$, se tendrá

$$0 \leq d\left(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| + \sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k| < +\infty.$$

Las otras propiedades que confirman d es una métrica, son directamente obtenidas a partir de las propiedades del valor absoluto y de los límites en $\mathbb{R}$.

Veamos que $(\ell^1(\mathbb{R}), d)$ es completo. Para ello, sea $\{\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^1(\mathbb{R})$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k^{n'}\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \leq \varepsilon$ para todo $n, n' \geq n_0$. Esto implicará que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tenga

$$|x_k^n - x_k^{n'}| \leq \varepsilon \qquad \forall\ n, n' \geq n_0,$$

de donde se concluye que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{x_k^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es completo, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_k^n = x_k$.

Probemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$. Como $\{\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, en particular es una sucesión acotada (ver Proposición 2.1.5) y, por lo tanto, existe $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n| \leq M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De esta forma se tendrá,

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k^n| \leq M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Haciendo tender $n \to +\infty$ deducimos

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k| \leq M \qquad \forall\, N \in \mathbb{N},$$

que permite concluir $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{R})$.

Finalmente, probemos que $d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Para $\varepsilon > 0$ sabemos existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k^{n'}\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k^{n'}| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n,\ n' \geq n_0.$$

Entonces, para todo $N \in \mathbb{N}$ se tendrá

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k^n - x_k^{n'}| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n,\ n' \geq n_0.$$

Tomando límite $n' \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k^n - x_k| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

que permite concluir $d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, demostrando así

$$d\left(\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \to 0.$$

(E2) Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado y $C \subseteq X$ un conjunto compacto y no vacío. Considere el siguiente conjunto

$$L(C) = \{f : C \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lipschitz }\}$$

y la función $\|\cdot\| : L(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| = \sup_{x\in C} |f(x)| + \sup_{x,y\in C;\ x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_X} \qquad \forall\, f \in L(C).$$

Para la función $d : L(C) \times L(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(f,g) = \|f - g\|$, pruebe que $(L(C), d)$ es un espacio métrico completo.

Solución: Si se demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma, se tendrá que $(L(C),d)$ es un espacio métrico. Para ello, escribiremos $\|\cdot\|$ de la siguiente forma

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_L = \sup_{x\in C}|f(x)| + \sup_{x,y\in C;\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_X} \qquad \forall\, f\in L(C),$$

y probaremos que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_L$ son normas sobre $L(C)$. De la definición de $L(C)$ (funciones Lipschitz que en particular son continuas) se obtendrá que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_L$ están bien definidas, pues dado que C es compacto, se tiene $\|f\|_\infty < +\infty$ (por la continuidad de f) para todo $f\in L(C)$. Adicionalmente, para $f\in L(C)$, como es Lipschitz, también se tendrá que

$$\|f\|_L = \sup_{x,y\in C;\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_X} < +\infty.$$

Las otras propiedades que confirman $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_L$ son normas, son directamente obtenidas a partir de las propiedades del valor absoluto y del supremo.

Probemos que $(L(C),d)$ es completo. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq L(C)$ una sucesión de Cauchy. Es directo probar que para todo $x\in C$, la sucesión $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ es de Cauchy, por lo tanto existirá $f(x)\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. Se define así una función $f: C\longrightarrow\mathbb{R}$.

Veamos que $f\in L(C)$. Como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq L(C)$ es de Cauchy, en particular es una sucesión acotada (ver Proposición 2.1.5), por lo tanto existirá $M>0$ tal que

$$d(0,f_k) = \|f_k\| = \|f_k\|_\infty + \|f_k\|_L \le M \qquad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

En particular, para $x,\ y\in C$, se tendrá

$$|f_k(x)-f_k(y)| \le \|f_k\|_L\|x-y\|_X \le M\|x-y\|_X \qquad \forall\, k\in\mathbb{N},\ \ \forall\, x,\ y\in C.$$

Tomando límite $k\to+\infty$, como $|\cdot|$ es una función continua, deducimos

$$|f(x)-f(y)| \le M\|x-y\|_X \qquad \forall\, x,\ y\in C,$$

concluyendo así que $f\in L(C)$.

Finalmente, demostremos que $\|f_k - f\|\to 0$. Para ello, probemos que $\|f_k-f\|_\infty\to 0$ y $\|f_k - f\|_L\to 0$. Dado $\varepsilon>0$, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq L(C)$ es de Cauchy, existirá $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_{k'}\|_\infty \le \varepsilon \quad \text{y} \quad \|f_k - f_{k'}\|_L \le \varepsilon \qquad \forall\, k,\ k'\ge k_0.$$

Lo anterior implica que

$$|f_k(x) - f_{k'}(x)| \le \varepsilon \quad \forall\, x\in C,\ \forall\, k,k'\ge k_0$$

y

$$|(f_k(x)-f_k(y)) - (f_{k'}(x)-f_{k'}(y))| \le \varepsilon\|x-y\|_L \quad \forall\, x,\ y\in C,\ \forall\, k,k'\ge k_0.$$

Tomando límite $k'\to+\infty$, se deduce

$$|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall\, x\in C,\ \forall\, k\ge k_0$$

y
$$|(f_k(x)-f_k(y))-(f(x)-f(y))| \leq \varepsilon \|x-y\|_L \quad \forall\, x,\, y \in C,\, \forall\, k \geq k_0,$$
concluyendo
$$\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|f_k - f\|_L \leq \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,$$
demostrando así lo deseado.

(E3) Considere un espacio métrico (X,d) y dos funciones continuas $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Pruebe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$$h(x) = f(x) + \lambda g(x) \qquad x \in X,$$
es continua.

Solución: Si $\lambda = 0$ el resultado es directo, pues la función $h = f + \lambda g = f$ es continua de acuerdo al enunciado. Supongamos entonces $\lambda \neq 0$.
Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f y g son continuas en x, se tendrá que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que
$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x,y) < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$
Por lo tanto, definiendo $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tendrá
$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x)+\lambda g(x) - f(y) - \lambda g(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |\lambda||g(x)-g(y)| < \varepsilon,$$
concluyendo así que $f + \lambda g$ es continua en x.

b) Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ considere los siguientes subconjuntos de X:
$$A := \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) \geq \alpha\} \qquad \text{y} \qquad B := \{x \in X \ : \ f(x) + g(x) < \beta\}.$$
Demuestre que A es cerrado y B es abierto.

Solución: Para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ se observa que los conjuntos A y B se pueden escribir de la siguiente forma:
$$A = (f-g)^{-1}((\alpha, +\infty)), \qquad B = (f+g)^{-1}((-\infty, \beta)). \tag{3.4}$$
Por otro lado, por la parte anterior se tiene que las funciones $f-g$ y $f+g$ son continuas. Por lo tanto, como $[\alpha, +\infty)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $(-\infty, \beta)$ es abierto, deducimos que A es cerrado y B es abierto en X, en virtud de las expresiones indicadas en (3.4) (preimágenes de un conjunto cerrado y de un conjunto abierto a través de funciones continuas; Ver Ejercicio 3.1 y Proposición 3.1.1).

c) Para los mismos conjuntos A y B definidos en el punto anterior, pruebe que

$$\{x \in X \ : \ f(x)-g(x) > \alpha\} \subseteq \operatorname{int}(A) \qquad \text{y} \qquad \overline{B} \subseteq \{x \in X \ : \ f(x)+g(x) \leq \beta\}.$$

Solución: Como $A^* := \{x \in X \ : \ f(x)-g(x) > \alpha\} = (f-g)^{-1}((\alpha,+\infty))$, $f-g$ es una función continua y $(\alpha,+\infty)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, se tiene que A^* es abierto que además está contenido en A. Por lo tanto $A^* \subseteq \operatorname{int}(A)$ pues $\operatorname{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A (ver Ejercicio 1.11).

Similarmente, observamos que $B^* := \{x \in X \ : \ f(x)+g(x) \leq \beta\} = (f+g)^{-1}((-\infty,\beta])$ es un conjunto cerrado, por ser $f+g$ una función continua y $(-\infty,\beta]$ un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. Como $B \subseteq B^*$ se deduce $\overline{B} \subseteq B^*$.

(E4) En un espacio métrico (X,d), considere un conjunto no vacío $C \subseteq X$ y la función $d_C : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} d(x,y),$$

denominada función distancia al conjunto C. Por la Proposición 1.2.6 la función d_C está bien definida.

a) Pruebe que d_C es continua en todo punto de X.

Solución: Sean $x,\ y \in X$. Entonces,

$$d_C(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall\, z \in C.$$

De aquí se concluye

$$d_C(x) \leq d(x,y) + d_C(y).$$

Intercambiando los roles de x e y, deducimos

$$|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X,$$

por lo tanto $d_C(\cdot)$ es Lipschitz y, en consecuencia, es una función continua (ver Ejercicio 3.7).

b) Para dos conjuntos no vacíos $A,\ B \subseteq X$ se define

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\} = \inf_{b \in B} d_A(b) = \inf_{a \in A} d_B(a),$$

donde $d_A(\cdot)$ y $d_B(\cdot)$ son las funciones distancia a los conjuntos A y B respectivamente. Si A es compacto y B es cerrado, demuestre que $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\operatorname{dist}(A,B) > 0$.

Solución:
Si $A \cap B \neq \emptyset$, mostremos que $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

Alternativa 1: Sea $\bar{x} \in A \cap B$. Entonces $d_A(\bar{x}) = 0$, pues A es un conjunto cerrado (ver Proposición 1.2.6) y, por lo tanto,

$$0 \leq \operatorname{dist}(A,B) = \inf_{b \in B} d_A(b) \leq d_A(\bar{x}) = 0.$$

Alternativa 2: Sea $\bar{x} \in A \cap B$. Entonces,

$$\inf\{d(a,b)\ :\ a\in A,\ b\in B\}\leq d(\bar{x},\bar{x}),$$

luego $0\leq \operatorname{dist}(A,B)\leq 0$, por lo tanto $\operatorname{dist}(A,B)=0$.

Supongamos ahora $\operatorname{dist}(A,B)=0$ y mostremos $A\cap B\neq\emptyset$.

Alternativa 1: Por definición del ínfimo, para cada $k\in\mathbb{N}$ existe $a_k\in A$ y $b_k\in B$ tales que

$$0\leq d(a_k,b_k)\leq \operatorname{dist}(A,B)+\frac{1}{k}=\frac{1}{k}.$$

Como A es un conjunto compacto, existe $\bar{a}\in A$ y una subsucesión $\{a_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{k_j}\to\bar{a}$. Se tendrá además que $b_{k_j}\to\bar{a}$ pues

$$d(b_{k_j},\bar{a})\leq d(b_{k_j},a_{k_j})+d(a_{k_j},\bar{a})\leq\frac{1}{k_j}+d(a_{k_j},\bar{a})\to 0.$$

Como A y B son conjuntos cerrados, y recordando que $a_{k_j}\in A$ y $b_{k_j}\in B$, se tendrá entonces

$$\lim_{j\to+\infty}a_{k_j}=\bar{a}\in A$$

y

$$\lim_{j\to+\infty}b_{k_j}=\bar{a}\in B,$$

concluyendo $\bar{a}\in A\cap B$ y, por lo tanto, $A\cap B\neq\emptyset$.

Alternativa 2: Sabemos que $d_B:X\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función continua y como A es compacto, entonces d_B alcanza un mínimo en A (ver Corolario 3.1.4). Sea $a_0\in A$ tal que

$$d_B(a_0)=\inf_{a\in A}d_B(a).$$

Tenemos que B es cerrado y $d_B(a_0)=0$, por lo tanto $a_0\in B$, luego $A\cap B\neq\emptyset$.

c) Sean $K,\ U\subseteq X$ con K compacto no vacío y U abierto tal que $K\subseteq U$. Demuestre que existe un conjunto abierto $V\subseteq X$, tal que

$$K\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$

Solución:

Alternativa 1: Como U es un conjunto abierto, se tiene que para todo $x\in U$, existe $\varepsilon_x>0$ tal que

$$B(x,\varepsilon_x)\subseteq B[x,\varepsilon_x]\subseteq U.$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{x\in X}B(x,\varepsilon_x)=\bigcup_{x\in X}B[x,\varepsilon_x]=U.$$

Como $K\subseteq U$ y K es compacto, existirán $x_1,\ldots,x_n\in U$ tales que

$$K\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\varepsilon_{x_j})\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}B[x_j,\varepsilon_{x_j}]\subseteq U.$$

Si definimos

$$V := \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon_{x_j}),$$

se tiene que V es abierto (unión de conjuntos abiertos) y

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, \varepsilon_{x_j}],$$

puesto que el conjunto del lado derecho es un cerrado (unión finita de cerrados) que contiene a V. Por lo tanto,

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Alternativa 2: Se tiene que K es compacto, U abierto y $K \subseteq U$, por lo tanto U^c es cerrado y $K \cap U^c = \emptyset$. Por el resultado de la parte anterior, tenemos que $\operatorname{dist}(K, U^c) > 0$. Definamos $r := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, U^c)$. Como K es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

Definamos ahora

$$V := \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

El conjunto $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B[x_j, r]$ es cerrado, puesto que es unión finita de conjuntos cerrados, por lo tanto

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r].$$

Demostremos ahora que $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B[x_j, r] \subseteq U$.

Sea $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} B[x_j, r]$, luego $x \in B[x_{j_0}, r]$ para algún $j_0 \in \{1, \cdots, n\}$. Para $y \in U^c$ se tiene que

$$d(x,y) \geq d(x_{j_0}, y) - d(x, x_{j_0}) \geq d_{U^c}(x_{j_0}) - r \geq 2 \operatorname{dist}(K, U^c) - r = r > 0,$$

por lo tanto $d_{U^c}(x) > 0$. Como U^c es cerrado, tenemos que $x \in U$.
Hemos demostrado que

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B[x_j, r] \subseteq U,$$

concluyendo que existe V conjunto abierto tal que

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

(E5) Considere un espacio métrico (X,d).

a) Pruebe que un conjunto $D \subseteq X$ es denso, si y solamente si, para todo $r > 0$ se tiene que

$$X \subseteq \bigcup_{y \in D} B(y,r). \tag{3.5}$$

Solución: Supongamos que $D \subseteq X$ es denso. Entonces, para todo $r > 0$ y $x \in X$, se tendrá $B(x,r) \cap D \neq \emptyset$ (ver Lema 2.1). Tomando $y \in B(x,r) \cap D$ se tiene $x \in B(y,r)$, probando así la inclusión (3.5).

Supongamos ahora que para todo $r > 0$ se tiene la inclusión (3.5) y consideremos un abierto $\theta \neq \emptyset$. Para $x \in \theta$ se tendrá que existe $r^* > 0$ tal que $B(x,r^*) \subseteq \theta$. Por otro lado, como se tiene (3.5) para $r = r^*$, existirá $y \in D$ tal que $x \in B(y,r^*)$. Esto implica que $y \in B(x,r^*) \subseteq \theta$. Por lo tanto $\theta \cap D \neq \emptyset$, probando así que D es denso.

b) Demuestre que si (X,d) es compacto, entonces es separable, es decir, existe un conjunto denso $D \subseteq X$ de cardinalidad numerable.

Solución: Por la compacidad de X sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de cardinalidad finita $A_k \subseteq X$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{y \in A_k} B(y,1/k).$$

Probemos que $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, que es de cardinalidad numerable, es denso. Tomemos un abierto $\theta \neq \emptyset$. Para $x \in \theta$ se tendrá que existe $r^* > 0$ tal que $B(x,r^*) \subseteq \theta$. Consideremos $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $k^* > 1/r^*$. Por otro lado, existirá $y \in A_{k^*}$ tal que $x \in B(y,1/k^*)$, por lo tanto, $y \in B(x,1/k^*) \subseteq B(x,r^*) \subseteq \theta$, probando así que $\theta \cap D \neq \emptyset$, lo que nos permite concluir que D es denso.

(E6) Sea (X,d) un espacio métrico. Para un conjunto $A \subseteq X$ recordemos se define la función distancia $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_A(x) := \inf_{y \in A} d(x,y).$$

a) Dado un conjunto $A \subseteq X$ y $r > 0$, considere $B(A,r) := \{x \in X \mid d_A(x) < r\}$.

1) Pruebe que

$$B(A,r) = \bigcup_{y \in A} B(y,r).$$

Solución: Del Ejercicio **(E4)** se tiene que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. En consecuencia, los conjuntos $B(A,r) = d_A^{-1}((-\infty,r))$ son abiertos. Sea ahora $x \in B(A,r)$. Se tiene entonces que $d_A(x) < r$, por lo que existirá $y \in A$ tal que $d(x,y) < r$, lo que nos permite concluir que $x \in \bigcup_{y \in A} B(y,r)$. Por otro lado, si $x \in \bigcup_{y \in A} B(y,r)$, existirá $y \in A$ tal que $d_A(x) \leq d(x,y) < r$, concluyendo que $x \in B(A,r)$.

2) Demuestre que si A es cerrado, entonces $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(A,1/k)$, y concluya que todo conjunto cerrado es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Solución: Observar que para todo conjunto A y $r > 0$, se tiene que $A \subseteq B(A,r)$, por lo tanto

$$A \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(A,1/k).$$

Si $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} B(A,1/k)$, entonces $d_A(x) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $d_A(x) = 0$. Esto implica que $x \in \overline{A}$, pero si A es cerrado, entonces $x \in A$, probando así la igualdad deseada.

b) Para dos conjuntos $A,\ B \subseteq X$ se define $\operatorname{dist}(A,B) := \operatorname{ínf}\{d(x,y) \mid x \in A;\ y \in B\}$. Si B es compacto, pruebe que $\operatorname{dist}(A,B) = 0$ si y solo si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

Solución: Si $\operatorname{dist}(A,B) = 0$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existirá $x_k \in A$ e $y_k \in B$ tales que $d(x_k,y_k) < 1/k$. Como B es compacto, existirá una subsucesión $\{y_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y un elemento $\bar{y} \in B$ tales que $y_{k_j} \to \bar{y}$. Como $d(x_k,y_k) < 1/k$ deducimos que $x_{k_j} \to \bar{y}$ y, por lo tanto, $\bar{y} \in \overline{A} \cap B$.

Supongamos ahora $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existirá $y \in A$ tal que $\operatorname{dist}(A,B) \leq d(x,y) < \varepsilon$, concluyendo así que $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

(E7) Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

a) Si (Y,d_Y) es completo y $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua, biyectiva y su inversa es continua, pruebe que (X,d_X) es también completo.

Solución: Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy y $\varepsilon > 0$. Por la uniforme continuidad de f, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow\ d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k,x_{k'}) < \delta$ para todo $k,k' \geq k_0$. Por lo tanto, $d_Y(f(x_k),f(x_{k'})) < \varepsilon$ para todo $k,k' \geq k_0$, probando así que $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy. Dado que Y es completo, existirá $z \in Y$ tal que $f(x_k) \to z$. Como $x_k = f^{-1}(f(x_k))$ y f^{-1} es continua, se tiene que $x_k \to f^{-1}(z)$, por lo tanto la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, permitiendo concluir la completitud de X.

b) Si para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, demuestre que f es continua.

Solución: Supongamos existe $x \in X$ donde f no es continua. Es decir, existirá $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in B(x,1/k)$ que satisface $d_Y(f(x),f(x_k)) \geq \varepsilon$. Deducimos que $x_k \to x$. Definamos el conjunto $A = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Como $x \in \overline{A}$ se tiene que $f(x) \in f(\overline{A})$ y, por la hipótesis, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Esto implicará que $B(f(x),\varepsilon) \cap f(A) \neq \emptyset$. Como $f(A) = \{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_k) \in B(f(x),\varepsilon)$, pero esto contradice la desigualdad $d_Y(f(x),f(x_k)) \geq \varepsilon$, por lo tanto la función f debe ser continua.

(E8) Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función tal que $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ veces}}$ es contractante para algún $n \geq 1$.

a) Mostrar que todo punto fijo de f es punto fijo de f^n.

b) Demuestre que si $\bar{x} \in X$ es punto fijo de f^n, entonces es punto fijo de f.

c) Pruebe que f tiene un único punto fijo.

Solución: Si $\bar{x} \in X$ es punto fijo de f, entonces $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Aplicando f a la anterior igualdad, se obtiene

$$f(f(\bar{x})) = f^2(\bar{x}) = f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Haciendo esto un número k de veces, se tendrá que $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$, por lo tanto $\bar{x}$ será punto fijo de f^k para cualquier $k \in \mathbb{N}$, probando así la primera parte.

Como f^n es contractante y (X,d) es un espacio métrico completo, entonces existe un único elemento $\bar{x} \in X$ tal que $f^n(\bar{x}) = \bar{x}$ (ver Teorema 3.1.8). Al aplicar f a la anterior ecuación se obtiene

$$f(f^n(\bar{x})) = f^n(f(\bar{x})) = f(\bar{x}),$$

concluyendo que $f(\bar{x})$ es punto fijo de f^n, pero el punto fijo de f^n es único e igual a $\bar{x}$, por lo tanto $f(\bar{x}) = \bar{x}$, demostrando así la parte (b).

Por la parte (b) la función f tendrá un punto fijo, dado que f^n lo tiene. Este será único pues si hubiese otro, eso implicaría que f^n tiene dos puntos fijos diferentes (por la parta (a)), lo que no puede suceder.

(E9) Considere el espacio $\mathscr{C}([0,1])$ de las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$, es decir,

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } \},$$

dotado de la métrica

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Sea $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}([0,1])$ un conjunto de funciones tales que:

- $\dot{f}(t)$ (la derivada de f en t) existe para todo $f \in \mathscr{F}$ y todo $t \in (0,1)$.
- Las imágenes de $t = 0$ para $f \in \mathscr{F}$ están uniformemente acotadas, es decir,

$$\sup_{f\in\mathscr{F}} |f(0)| < +\infty.$$

- Las derivadas de las funciones en $\mathscr{F}$ están uniformemente acotadas, es decir,

$$\sup_{f\in\mathscr{F}} \sup_{t\in(0,1)} |\dot{f}(t)| < +\infty.$$

Demuestre que el conjunto $\mathscr{F}$ es relativamente compacto en el espacio métrico $(\mathscr{C}([0,1]), d_\infty)$.

Solución: Por el Teorema 3.2.2, y dado que $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, basta probar que $\mathscr{F}$ es equicontinua y que para todo $t \in [0,1]$ el conjunto

$$\{f(t) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathbb{R}$$

es relativamente compacto, que es equivalente (en $\mathbb{R}$) a mostrar que es acotado. Para demostrar lo anterior probaremos que las funciones en $\mathscr{F}$ son Lipschitz con la misma constante.

Como las funciones en $\mathscr{F}$ son diferenciables en $(0,1)$, por el teorema del valor medio se tiene que para todo $t_1,\ t_2 \in (0,1]$ existe t^* entre t_1 y t_2 tal que

$$f(t_1) - f(t_2) = f'(t^*)(t_1 - t_2).$$

Como

$$L = \sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{t \in (0,1)} |\dot{f}(t)| < +\infty$$

se tendrá que

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1,\ t_2 \in [0,1],\ \forall\, f \in \mathscr{F},$$

concluyendo así que todas las funciones en $\mathscr{F}$ son Lipschitz de constante L. Esto prueba que $\mathscr{F}$ es equicontinua.

Ahora, dado $t \in (0,1]$ se tendrá, nuevamente por el teorema del valor medio, que existe $t^* \in (0,t)$ tal que

$$|f(t)| = |f'(t^*)t + f(0)| \leq L + |f(0)|.$$

Como

$$M = \sup_{f \in \mathscr{F}} |f(0)| < +\infty \qquad \forall\, f \in \mathscr{F},$$

deducimos

$$\{f(t) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq [-(L+M), L+M],$$

por lo tanto $\{f(t) \mid f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto para todo $t \in [0,1]$.

Parte 2: Espacios vectoriales normados

4. Definiciones preliminares

4.1 Conceptos iniciales, ejemplos y analogías

En esta segunda parte del texto, el objeto de estudio serán los espacios vectoriales normados. Como se demostró en la Proposición 1.1.3, un espacio vectorial normado es en particular un espacio métrico, por lo que para variados resultados haremos referencia a la primera parte del texto.

Luego de introducir los conceptos preliminares que nos permitirán desarrollar los contenidos, veremos algunas propiedades para espacios vectoriales normados de dimensión finita, para estudiar a continuación ciertos espacios de funciones importantes, enunciado y demostrando resultados fundamentales de análisis funcional, los que también serán estudiados en el curso del mismo nombre más adelante en la carrera. También introduciremos los espacios de Hilbert, de manera muy preliminar, viendo resultados como la existencia de la proyección sobre conjuntos convexos cerrados o el Teorema de representación de Riesz. Esta parte la culminaremos con el capítulo de diferenciabilidad para funciones definidas sobre espacios vectoriales normados.

Recordemos de antemano la definición de un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que a lo largo del texto será por defecto el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 4.1.1 Un conjunto X, dotado de dos operaciones $+ : X \times X \longrightarrow X$ (suma) y $\cdot : X \times \mathbb{K} \longrightarrow X$ (multiplicación por escalar), se dice que es un espacio vectorial, si:

- La operación suma es conmutativa, asociativa, existe un único neutro en X (denotado por 0_X o simplemente 0) y para todo elemento x en X existe un único inverso para esta operación (denotado por $-x$);
- La operación multiplicación por un escalar es asociativa y distribuye con respecto a la operación suma, es decir

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x,\ y \in X.$$

Si a un espacio vectorial se le dota de una función denominada norma, estaremos en presencia de un espacio vectorial normado. El concepto de norma, se puede asimilar al de la *magnitud* de un elemento (vector) en un espacio vectorial o, haciendo alusión a la noción de métrica estudiada en la primera parte, sería la distancia al cero del espacio vectorial.

Definición 4.1.2 En un espacio vectorial X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una norma sobre X, si:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$;
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x,\ y \in X$ (desigualdad triangular).

En este caso, se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un **espacio vectorial normado**.

Ejercicio 4.1 Considere los siguientes ejemplos de conjuntos y funciones y demuestre que son espacios vectoriales normados:

(1) $X = \mathbb{R}^n$ y para $p \geq 1$ la función

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

donde para $x \in \mathbb{R}^n$ estamos escribiendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

(2) $X = \mathbb{R}^n$ y la función $\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|.$$

(3) $X = \ell_2(\mathbb{R})$ (ver Ejercicio 1.4) y

$$\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum_{k\geq 0} (x_k)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X.$$

(4) $X = \mathscr{C}([0,1])$ (ver Ejercicio 1.3) y

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt \qquad \text{para } f \in X.$$

(5) Dado un conjunto A e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio vectorial normado, considere

$$X = \mathscr{A}(A,Y) = \{ f : A \longrightarrow Y \mid \sup_{x\in A} \|f(x)\|_Y < +\infty \}$$

y la función
$$\|f\|_X = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_Y.$$

Pruebe que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio vectorial normado.

(6) Si $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ son espacios vectoriales normados, pruebe que el espacio producto $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ dotado de alguna de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{para } p \geq 1 \\ \|x\|_\infty &= \max_{j=1,\dots,n} \|x_j\|_j, \end{aligned}$$

es un espacio vectorial normado, donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, con $x_j \in X_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Dado que un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ se puede ver como un espacio métrico, al considerar la distancia $d(x,y) = \|x-y\|$ para $x,\ y \in X$ (ver Proposición 1.1.3), no definiremos nuevamente los conceptos de abierto, cerrado, interior, adherencia, compacidad, convergencia de sucesiones, continuidad de funciones (uniforme continuidad, Lipschitz, etc.), ni límites de funciones, es decir, no volveremos a introducir los conceptos iniciales asociados a la topología (relacionados con los conjuntos abiertos), pues estos ya han sido abordados en el contexto de espacios métricos en la primera parte del texto, entendiendo que cuando nos referimos a estos conceptos en espacios vectoriales normados, nos estamos refiriendo a los obtenidos con la métrica que induce la norma.

Proposición 4.1.1 En un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, la norma es una función continua.

Demostración. Por la desigualdad triangular de la norma se tendrá

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \qquad \forall\, x,\ y \in X,$$

por lo tanto la norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Lipschitz y, en consecuencia, continua (ver Ejercicio 3.7). ■

Análogo al concepto de métricas equivalentes (ver Definición 1.3.1), tendremos la noción de normas equivalentes.

Definición 4.1.3 Sobre un espacio vectorial X, dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ se dicen equivalentes, si existen $c_1,\ c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X.$$

Es directo ver que dos normas equivalentes definirán métricas equivalentes, por lo tanto, definirán los mismos conjuntos abiertos (ver Teorema 1.3.1).

Un caso interesante de analizar, es cuando se tiene un producto finito de espacios vectoriales normados. Es decir, si $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ son espacios vectoriales normados, se considerará el espacio producto $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ dotado de alguna de las siguientes normas para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ (donde $x_j \in X_j$)

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{para } p \geq 1 \\ \|x\|_\infty &= \max_{j=1,\ldots,n} \|x_j\|_j. \end{aligned}$$

Las anteriores normas serán denominadas a lo largo del texto, como *normas usuales*, cuando se trabaje en un producto finito de espacios vectoriales normados.

Ejercicio 4.2 Dado $n \geq 2$ espacios vectoriales normados $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$, demuestre que en el espacio producto $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ las normas definidas anteriormente son equivalentes entre sí.

Sobre la completitud de un espacio vectorial normado, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.4 — Espacios de Banach. Si un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es completo (visto como espacio métrico), se dice que es de **Banach**.

Otra definición entregada en el contexto de espacios métricos, que se puede escribir de manera más simple en espacios vectoriales normados, es la de conjunto acotado (ver también Definición 2.1.2).

Definición 4.1.5 En un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, se dice que un conjunto $A \subseteq X$ es **acotado**, si existe $M > 0$ tal que

$$A \subseteq B(0, M) = \{z \in X \mid \|z\| < M\}.$$

4.2 Operadores lineales

En esta sección, introduciremos el concepto de funciones u operadores lineales, definidos sobre un espacio vectorial normado a valores en otro espacio vectorial normado, analizando algunas de sus propiedades. Estas funciones constituyen una clase muy importante en análisis, pues, entre otras razones, los diferenciales o derivadas que veremos al final de esta parte, son operadores lineales, los que nos permitirán hacer aproximaciones de primer orden de diversas funciones.

Definición 4.2.1 Dados dos espacios vectoriales X e Y sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una función $\ell : X \longrightarrow Y$ es **lineal** si

$$\ell(x + \lambda y) = \ell(x) + \lambda \ell(y) \qquad \forall\, x,\ y \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, definiremos el conjunto

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{\ell : X \longrightarrow Y \mid \ell \text{ es lineal y continua}\}, \tag{4.1}$$

que es el espacio vectorial de las funciones lineales continuas definidas sobre X a valores en Y.

Una de las particularidades de los operadores lineales, es la caracterización de la continuidad de estos.

Teorema 4.2.1 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $\ell : X \longrightarrow Y$ una función lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) ℓ es continua;

(b) ℓ es continua en un punto;

(c) ℓ es continua en $x = 0$;

(d) Existe $L \geq 0$ tal que
$$\|\ell(x)\|_Y \leq L\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) es evidente. Comencemos probando (b) $\Rightarrow$ (c). Sea $x_0 \in X$ el elemento donde ℓ es continua. Entonces, para $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|\ell(x) - \ell(x_0)\|_Y = \|\ell(x - x_0)\|_Y < \varepsilon.$$

Lo anterior quiere decir (haciendo el cambio de variable $y = x - x_0$) que

$$\|y - 0\|_X = \|y\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|\ell(y)\|_Y = \|\ell(y) - \ell(0)\|_Y < \varepsilon,$$

es decir, ℓ es continua en 0.

(c) $\Rightarrow$ (d): Tomemos $\varepsilon = 1$. Por la continuidad de ℓ en cero, se tendrá que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|y - 0\|_X = \|y\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|\ell(y)\|_Y = \|\ell(y) - \ell(0)\|_Y < 1.$$

Por lo tanto, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, definiendo $y = \delta x / 2\|x\|_X$, como $\|y\|_X < \delta$, entonces

$$\|\ell(y)\|_Y = \left\| \ell\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X} \right) \right\|_Y < 1 \;\Rightarrow\; \|\ell(x)\|_Y \leq \underbrace{\frac{2}{\delta}}_{L} \|x\|_X,$$

teniéndose la última desigualdad para todo $x \in X$, concluyendo así (d).

(d) $\Rightarrow$ (a): Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Si $L = 0$, entonces ℓ es idénticamente cero, por lo tanto es continua. Supongamos $L > 0$ y definamos $\delta = \varepsilon / L$, entonces, si y es tal que $\|y - x_0\|_X < \delta$ se tendrá

$$\|\ell(y) - \ell(x_0)\|_Y = \|\ell(y - x_0)\|_Y \leq L\|y - x_0\|_X < L\delta = \varepsilon,$$

por lo tanto, ℓ es continua en x_0, y como elegimos cualquier elemento x_0, hemos probado que es continua en todo X.

■

Proposición 4.2.2 Dados dos espacios vectoriales normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, el espacio vectorial $\mathscr{L}(X,Y)$ (ver (4.1)) dotado de

$$\|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

es un espacio vectorial normado. Además, la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ se puede escribir de las siguientes maneras:

$$\|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x\in B_X[0,1]} \|\ell(x)\|_Y = \sup_{x\in X,\, \|x\|_X=1} \|\ell(x)\|_Y. \tag{4.2}$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.1, vemos que la norma $\|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ está bien definida para $\ell \in \mathscr{L}(X,Y)$, pues el supremo que la define está acotado superiormente (ver parte (d) del Teorema 4.2.1). Probar que $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ satisface las propiedades de una norma, es directo y se deja como ejercicio propuesto.

Demostremos la segunda igualdad en (4.2) quedando la primera también como ejercicio propuesto. Es claro que si $x \in X\setminus\{0\}$, entonces $z = x/\|x\|_X$ satisface $\|z\|_X = 1$, y además

$$\frac{\|\ell(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \|\ell(z)\|_Y,$$

por lo tanto se tiene la siguiente igualdad de conjuntos en $\mathbb{R}$

$$\left\{\frac{\|\ell(x)\|_Y}{\|x\|_X} \mid x \in X\setminus\{0\}\right\} = \{\|\ell(z)\|_Y \mid z \in X, \|z\|_X = 1\},$$

obteniendo así (tomando el supremo de ambos conjuntos)

$$\|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{z\in X,\, \|z\|_X=1} \|\ell(z)\|_Y.$$

■

Corolario 4.2.3 Dados dos espacios vectoriales normados $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$, para toda función $\ell \in \mathscr{L}(X,Y)$ (lineal continua) se tendrá

$$\|\ell(x)\|_Y \leq \|\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Demostración. Es directo de la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ en $\mathscr{L}(X,Y)$. ■

5. Dimensión finita

En esta capítulo, demostraremos que en espacios vectoriales normados de dimensión finita, todos los operadores lineales son continuos y todas las normas son equivalentes. Además probaremos una caracterización para los conjuntos compactos en estos espacios, analizando algunas de sus consecuencias.

5.1 Toda lineal es continua

Como se deja propuesto probar en el Ejercicio 2.9, todo conjunto compacto será cerrado y acotado, no siendo la recíproca necesariamente verdadera. En el siguiente resultado, vemos que la recíproca se tiene en $\mathbb{R}^n$ dotado de algunas de las normas definidas en (6) del Ejercicio 4.1.

Proposición 5.1.1 Si al espacio $\mathbb{R}^n$ lo dotamos con alguna de las normas definidas en (6) del Ejercicio 4.1, entonces todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Demostración. Por el Ejercicio 4.2, sabemos que las normas definidas en (6) del Ejercicio 4.1 son todas equivalentes entre sí, por lo tanto, sin pérdida de generalidad solo trabajaremos con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, acotado y no vacío. Consideremos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$. Sabemos que existe $R > 0$ tal que

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n) \in [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $\{x_k^1\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [-R, R]$ tiene una subsucesión convergente (pues $[-R, R]$ es compacto en $\mathbb{R}$), que notaremos $\{x_{k_j^1}^1\}_{j\in\mathbb{N}}$. Luego, $\{x_{k_j^1}^2\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq [-R, R]$ tiene una subsucesión convergente, que denotaremos $\{x_{k_j^2}^2\}_{j\in\mathbb{N}}$. Esto lo hacemos hasta llegar hasta n, es decir, hasta tener una subsucesión $\{x_{k_j^n}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq C$, de la cual por construcción todas sus componentes serán convergentes, concluyendo así que esta subsucesión (de vectores, o elementos en el espacio producto) es convergente. Lo anterior prueba que C es compacto, gracias al Teorema 2.3.4. ■

Analicemos la continuidad de funciones en espacios vectoriales normados de dimensión finita, comenzando con $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.1 Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado. Entonces, toda función lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ es continua, donde $\mathbb{R}^n$ está dotado de la norma $\|\cdot\|_1$.

Demostración. Si denotamos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base canónica en $\mathbb{R}^n$, entonces para $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ se tiene

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j).$$

Por lo tanto,

$$\|T(x)\|_X \leq \left(\max_{j=1,\ldots,n} \|T(e_j)\|_X \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \left(\max_{j=1,\ldots,n} \|T(e_j)\|_X \right) \|x\|_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

demostrando así la continuidad gracias al Teorema 4.2.1. ■

Teorema 5.1.2 — Hausdorff. Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales normados de dimensión finita es un isomorfismo, es decir, es continua y su inversa también.

Demostración. Primero consideremos una función lineal biyectiva $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ donde $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio vectorial normado. Por el Lema 5.1 sabemos que T es continua. Veamos que T^{-1} es continua también. Consideremos

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}.$$

Como S es compacto gracias a la Proposición 5.1.1 y T es continua, entonces $T(S)$ es compacto en X (ver Teorema 3.1.3) y, por lo tanto, existe $x_0 \in S$ tal que

$$\|T(x_0)\|_X \leq \|T(x)\|_X \qquad \forall\, x \in S,$$

pues la norma también es una función continua. Por la inyectividad de T se tiene que $\|T(x_0)\|_X > 0$. Para $y \in X \setminus \{0\}$ consideremos $x = T^{-1}(y)$.

Como $x/\|x\|_1 \in S$ se tiene que

$$\|y\|_X = \|T(x)\|_X = \|x\|_1 \|T(x/\|x\|_1)\|_X \geq \|x\|_1 \|T(x_0)\|_X$$

y, por lo tanto,

$$\|T^{-1}(y)\|_1 \leq \frac{1}{\|T(x_0)\|_X} \|y\|_X \qquad \forall\, y \in X,$$

probando así que T^{-1} es continua (ver Teorema 4.2.1.). Ahora sea $\ell : X \longrightarrow Y$ una biyección lineal, donde X e Y son espacios vectoriales normados de dimensión finita. Si la dimensión de X es n, entonces existe una biyección lineal $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ que debe ser isomorfismo (por lo anterior). Por otro lado, la biyección $\ell \circ \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ también es un isomorfismo. Por lo tanto $\ell = (\ell \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ es también un isomorfismo. ■

Corolario 5.1.3 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Si X es de dimensión finita, entonces toda función lineal $\ell : X \longrightarrow Y$ es continua.

Demostración. Si n es la dimensión de X, entonces existe una biyección lineal $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ que es isomorfismo. Además, $\ell \circ \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ es continua (por el Lema 5.1), por lo tanto $\ell = (\ell \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ es continua. ■

En espacios vectoriales de dimensión infinita, como se muestra en el siguiente ejemplo, existen funciones lineales que no son continuas.

■ **Ejemplo 5.1.4** Sea $X = \{p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid p \quad \text{polinomio}\}$ y

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|.$$

Se puede probar que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado. Considere la función lineal $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\ell(p) = p(3)$. Veamos que ℓ no es continua en $p = 0$. De hecho, si tomamos la sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ definida por

$$p_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

se tiene que $\|p_k\| = 1/2^k \to 0$, es decir, $p_k \to 0$, pero

$$\ell(p_k) = \left(\frac{3}{2}\right)^k \to +\infty.$$

5.2 Caracterización de la compacidad

Otra consecuencia del Teorema 5.1.2, es el siguiente resultado.

Teorema 5.2.1 Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Demostración. Si $n \in \mathbb{N}$ es la dimensión de X, entonces existe una biyección lineal $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y gracias al Teorema 5.1.2 se tendrá que es un isomorfismo. Si $C \subseteq X$ es acotado y cerrado, entonces $\ell(C) \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y cerrado, por lo tanto, por la Proposición 5.1.1, se tiene que es compacto. Concluimos al observar que $C = \ell^{-1}(\ell(C))$ es compacto (pues ℓ^{-1} es continua). ■

Corolario 5.2.2 Toda sucesión acotada en un espacio vectorial normado de dimensión finita, tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Si una sucesión está acotada, quiere decir que todo elemento de la sucesión pertenece a una bola cerrada, que como es acotada, será compacta. ■

Corolario 5.2.3 Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial normado de dimensión finita, es un conjunto cerrado.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos $X = \mathbb{R}^n$ puesto que ya sabemos existirá un isomorfismo entre X y $\mathbb{R}^n$, siendo $n \in \mathbb{N}$ la dimensión de X. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $m \leq n$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base ortonormal de E.

Si E no es cerrado, entonces existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ convergente a $\bar{x} \notin E$ (ver Proposición 2.1.3). Escribiendo los términos x_k como combinación de la base de E, se tiene

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k v_j.$$

Consideremos los vectores $\lambda_k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k) \in \mathbb{R}^m$. Si $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ es acotada, entonces existe una subsucesión convergente a $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)$. En tal caso tendríamos

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_j v_j,$$

es decir, $\bar{x} \in E$, por lo que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada, que implica $\|\lambda_k\| \to \infty$ (o una subsucesión), donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^m$.

Definiendo $\mu_k = (\mu_1^k, \ldots, \mu_m^k) = \lambda_k / \|\lambda_k\|$, se tendrá que $\|\mu_k\| = 1$, por lo tanto tiene una subsucesión convergente a algún elemento $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_m) \neq 0$ y además

$$\frac{x_k}{\|\lambda_k\|} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^k v_j \;\Rightarrow\; 0 = \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}_j v_j,$$

obteniendo una contradicción con la lineal independencia de $\{v_1, \ldots, v_m\}$. ■

Ejercicio 5.1 A través de un contraejemplo pruebe que en el espacio $X = \ell^2(\mathbb{R})$, si se considera la norma

$$\|\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum_{k\geq 0} (x_k)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X,$$

la bola $B[0,1]$ (que es cerrada y acotada) no es compacta.

5.3 Todas las normas son equivalentes

Para finalizar el capítulo sobre espacios vectoriales normados de dimensión finita, a continuación probaremos que en estos espacios todas las normas son equivalentes.

Teorema 5.3.1 Sea X un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, todas las normas que se definan sobre X son equivalentes.

Demostración. Gracias al Teorema 5.1.2, sin pérdida de generalidad supondremos $X=\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\{e_1,\ldots,e_n\}$ a la base canónica en $\mathbb{R}^n$, escribiendo $x=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\ \|e_j\| \leq \left(\max_{j=1,\ldots,n} \|e_j\|\right) \|x\|_1 .$$

Por otro lado, como $\|\cdot\|$ es continua (ver Proposición 4.1.1), y $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_1=1\}$ es compacto, se tiene que $\{\|x\| \mid x\in S\}$ es compacto, por lo tanto, existe $x_0\in S$ tal que $\|x_0\|\leq\|x\|$ para todo $x\in S$, dado que la función $\|\cdot\|$ alcanza su mínimo en S. Entonces, para $x\in X\setminus\{0\}$, como $x/\|x\|_1\in S$ se tendrá

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| \geq \|x_0\| \ \Rightarrow\ \|x\|_1\|x_0\| \leq \|x\| \qquad \forall\, x\in X,$$

probando así que toda norma $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$, lo que demuestra que todo par de normas son equivalentes. ■

6. Espacios de funciones

Dados dos espacios vectoriales normados, en este capítulo estudiaremos algunos espacios de funciones que están definidas entre ellos, con mayor énfasis en el espacio de las funciones lineales continuas introducido en la Definición 4.2.1. Comenzaremos probando que el espacio de las funciones lineales continuas es Banach, si el espacio de llegada lo es. Este mismo resultado se tendrá también para el conjunto de funciones acotadas y de las funciones continuas, considerando normas apropiadas. Luego demostraremos los teoremas de Hahn-Banach y Banach-Steinhaus, resultados que son pilares de muchos de los contenidos que se verán en cursos posteriores, como análisis funcional, ecuaciones diferenciales parciales, y optimización.

6.1 Completitud

Los siguientes resultados entregan condiciones suficientes para poder asegurar la completitud de algunos espacios de funciones.

Proposición 6.1.1 Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Si Y es Banach, entonces $\mathscr{L}(X,Y)$ también lo es.

Demostración. Sea $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{L}(X,Y)$ una sucesión de Cauchy. Probemos que para todo $x\in X$ se tiene que $\{\ell_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy. Esto se tendrá dado que

$$\|\ell_k(x)-\ell_{k'}(x)\|_Y\leq\|x\|_X\|\ell_k-\ell_{k'}\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.$$

Por lo tanto, por la completitud de Y, para todo $x\in X$ existe $\ell(x)\in Y$ tal que $\ell_k(x)\to\ell(x)$. Para finalizar basta probar que la aplicación $\ell: X\longrightarrow Y$ es lineal y continua y que $\|\ell_k-\ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\to 0$.

Para la linealidad, dados $x,\ y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tendrá que

$$\begin{aligned}\ell(x+\lambda y) &= \lim_{k\to\infty} \ell_k(x+\lambda y) = \lim_{k\to\infty} (\ell_k(x)+\lambda \ell_k(y)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \ell_k(x) + \lambda \lim_{k\to\infty} \ell_k(y) = \ell(x)+\lambda\ell(y).\end{aligned}$$

Veamos que ℓ es continua. Como $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ es de Cauchy, entonces es acotada (ver Proposición 2.1.5), es decir, existe $L \geq 0$ tal que

$$\|\ell_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq L \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para $x \in X$ se tiene

$$\|\ell_k(x)\|_Y \leq \|\ell_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \|x\|_X \leq L\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X,$$

que implicará (dado que $\ell_k(x) \to \ell(x)$)

$$\|\ell(x)\|_Y \leq L\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X,$$

concluyendo que ℓ es continua.

Para probar que $\ell_k \to \ell$ en $\mathscr{L}(X,Y)$, tomemos $\varepsilon > 0$. Como $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ es de Cauchy, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\ell_k - \ell_{k'}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \varepsilon \qquad \forall\, k,\ k' \geq k_0.$$

Entonces, para cualquier $x \in X \setminus \{0\}$ se tendrá

$$\frac{\|\ell_k(x) - \ell_{k'}(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|\ell_k - \ell_{k'}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \varepsilon \qquad \forall\, k,\ k' \geq k_0.$$

Tomando límite cuando $k' \to \infty$ obtenemos

$$\frac{\|\ell_k(x) - \ell(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0,\ \forall\, x \in X \setminus \{0\}$$

que implica $\|\ell_k - \ell\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. ■

Ejercicio 6.1 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $\mathscr{A}(X,Y)$ el conjunto de las funciones acotadas de X a Y, es decir,

$$\mathscr{A}(X,Y) = \left\{ f : X \longrightarrow Y \mid \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y < +\infty \right\},$$

dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y \qquad \forall\, f \in \mathscr{A}(X,Y).$$

Pruebe que $(\mathscr{A}(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado y que si Y es Banach, entonces $\mathscr{A}(X,Y)$ también lo es.

Ejercicio 6.2 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $\mathscr{C}(A,Y)$ el conjunto de las funciones continuas de A a Y, donde $A \subseteq X$ es un subconjunto compacto de X. Pruebe que $\mathscr{C}(A,Y)$ dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_Y \qquad \forall\, f \in \mathscr{C}(A,Y)$$

es un espacio vectorial normado, subconjunto de $\mathscr{A}(X,Y)$ (definido en el ejercicio anterior) y que si Y es Banach entonces $\mathscr{C}(A,Y)$ también lo es.

6.2 Teorema de Banach-Steinhaus

El teorema de Banach-Steinhaus, enunciado y demostrado a continuación, constituye uno de los resultados célebres en análisis funcional, el cual se utilizará en diferentes cursos. Su demostración se basa en el Teorema de Baire (Teorema 2.2.3) y en particular en el Corolario 2.2.4.

Teorema 6.2.1 — Banach-Steinhaus. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio vectorial normado y $\{\ell_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ un conjunto de funciones lineales continuas tales que

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|\ell_\alpha(x)\|_Y < +\infty \qquad \forall\, x \in X.$$

Entonces,

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|\ell_\alpha\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Demostración. Para $k \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos cerrados (no vacíos)

$$C_k = \{x \in X \ : \ \|\ell_\alpha(x)\|_Y \leq k \quad \forall\, \alpha \in \Lambda\} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (\|\cdot\|_Y \circ \ell_\alpha)^{-1}([0,k]).$$

Por hipótesis se tendrá

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k.$$

Gracias al Corolario 2.2.4 sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(C_{k_0}) \neq \emptyset$.

Dado $x_0 \in \operatorname{int}(C_{k_0}) \neq \emptyset$, consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0,\varepsilon) \subseteq C_{k_0}$. Para $x \in B[0,1]$, como

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x \in B(x_0,\varepsilon) \subseteq C_{k_0},$$

se tendrá

$$\left\|\ell_\alpha\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x\right)\right\|_Y \leq k_0 \qquad \forall\, x \in B[0,1],\ \forall\, \alpha \in \Lambda.$$

Es decir,

$$\|\ell_\alpha(x)\|_Y \leq \frac{2}{\varepsilon}(\|\ell_\alpha(x_0)\|_Y + k_0) \leq \frac{4k_0}{\varepsilon} \qquad \forall\, x \in B[0,1],\ \forall\, \alpha \in \Lambda,$$

de donde se concluye que $\|\ell_\alpha\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \frac{4k_0}{\varepsilon}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. ■

Un resultado que se obtiene directamente, y cuya demostración se deja como ejercicio, es el siguiente.

Corolario 6.2.2 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio vectorial normado y $\{\ell_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ un conjunto de funciones lineales continuas tales que

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|\ell_\alpha(x)\|_Y < +\infty \qquad \forall\, x \in X.$$

Entonces $\{\ell_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es equicontinua.

El siguiente resultado, también es consecuencia directa del teorema de Banach-Steinhaus.

Corolario 6.2.3 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio vectorial normado y $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ una sucesión de funciones lineales continuas que converge puntualmente a $\ell : X \longrightarrow Y$, entonces $\ell \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Demostración. Claramente ℓ debe ser lineal. Para ver la continuidad, como para todo $x \in X$ se tiene que $\{\ell_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ es convergente, por lo tanto es una sucesión acotada. Gracias al Teorema 6.2.1 se deduce que existe $M > 0$ tal que $\|\ell_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $x \neq 0$ y consideremos $\varepsilon = \|x\|_X > 0$. Sabemos que existe k_0 tal que

$$\|\ell_k(x) - \ell(x)\|_Y \leq \varepsilon = \|x\|_X \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Por lo tanto,

$$\|\ell(x)\|_Y \leq \|\ell(x) - \ell_k(x)\|_Y + \|\ell_k(x)\|_Y \leq (1+M)\|x\|.$$

La anterior desigualdad es cierta para todo $x \in X$ de donde se deduce que ℓ es continua, gracias al Teorema 4.2.1. ■

6.3 Teorema de Hahn-Banach

Un espacio que merecerá especial atención es el **dual topológico** de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, que se define como $X^* = \mathscr{L}(X,\mathbb{R})$, es decir, como el espacio de las funciones lineales continuas definidas sobre X a valores $\mathbb{R}$, dotado de la norma

$$\|\ell\|_* = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} \qquad \forall\, \ell \in X^*.$$

El espacio $(X^*, \|\cdot\|_*)$ siempre será un espacio de Banach, gracias a la Proposición 6.1.1.

Al espacio dual X^* se le puede determinar también su espacio dual, como $X^{**} = \mathscr{L}(X^*,\mathbb{R})$ (espacio bi-dual de X). Observemos que el espacio X puede verse como un subespacio de X^{**}. De hecho, para $x \in X$, podemos definir la función $L_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_x(\ell) = \ell(x)$ para $\ell \in X^*$. La función L_x claramente es lineal y será también continua, pues

$$|L_x(\ell)| = |\ell(x)| \leq \|x\|\|\ell\|_* \qquad \forall\, \ell \in X^*,$$

por lo tanto, $L_x \in X^{**}$ para cada $x \in X$ y, en ese sentido, se dice que X se identifica como un subconjunto de X^{**} dado que la aplicación $\varphi : X \longrightarrow X^{**}$ dada por $\varphi(x) = L_x$ es inyectiva. Si la función φ resulta ser biyectiva, se dirá que el espacio X es **reflexivo**.

A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema de Hahn-Banach en su versión analítica, valida en todo espacio vectorial real, junto con introducir algunas de sus consecuencias, para posteriormente ver la versión geométrica (conocida como teorema de separación) en espacios vectoriales normados. Estos resultados involucran la existencia de elementos en el espacio X^*.

Para la demostración del teorema de Hahn-Banach, haremos utilización del lema de Zorn, que enunciamos en la siguiente sección.

6.3.1 Lema de Zorn

Recordemos de cursos anteriores, que una relación $\preceq$, sobre un conjunto P, se denomina **orden parcial** si es reflexiva, anti-simétrica y transitiva. En tal caso se dirá que $(P,\preceq)$ es un **conjunto ordenado**. Además se tendrán las siguientes definiciones:

- Se dice que $Q \subseteq P$ es **totalmente ordenado** si para todo $(a,b) \in Q \times Q$ se tiene $a \preceq b$ o $b \preceq a$.
- $c \in P$ es una **cota superior** de $Q \subseteq P$ si $a \preceq c$ para todo $a \in Q$.
- $m \in P$ es **maximal** si
$$\forall\, a \in P,\ m \preceq a \ \Rightarrow\ m = a.$$
- P es **inductivo** si todo subconjunto totalmente ordenando tiene una cota superior.

Teorema 6.3.1 — Lema de Zorn. Todo conjunto ordenando $(P,\preceq)$ no vacío que es inductivo, tiene un elemento maximal.

6.3.2 Versión analítica

La versión analítica del teorema de Hahn-Banach hace utilización de funciones sublineales, definidas a continuación.

Definición 6.3.1 Dado un espacio vectorial (real) X, una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice es **sublineal** , si satisface las siguientes dos propiedades:

- Es positivamente homogénea:
$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, \alpha \geq 0.$$
- Es subaditiva:
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Evidentemente una función lineal $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ será sublineal. Un ejemplo de función sublineal obtenida a partir de ℓ, es definir $p(x) = |\ell(x)|$ para $x \in X$.

Teorema 6.3.2 — Hahn-Banach (analítico). Sea X un espacio vectorial (real) y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal. Para un subespacio vectorial $M \subseteq X$ y una función lineal definida sobre él $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mayorada por p, es decir,
$$\ell(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in M,$$

existirá una función lineal $\bar{\ell}: X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) $\bar{\ell}(x) = \ell(x)$ para todo $x \in M$, es decir, $\bar{\ell}$ es una extensión de ℓ;

(b) $\bar{\ell}(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $\bar{\ell}$ es mayorada por p en todo X.

Demostración. Consideremos el conjunto P de las funciones lineales que son extensiones de ℓ (definidas en un subespacio vectorial de X que incluya a M) y que son mayoradas por p en su dominio. Es decir, una función lineal ϕ estará en P, si está definida en un subespacio vectorial $M_\phi \subseteq X$, donde $M \subseteq M_\phi$ y si además $\phi(x) \le p(x)$ para todo $x \in M_\phi$, lo que escribimos de la siguiente manera

$$P = \left\{ \phi \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi : M_\phi \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ es lineal} \\ M_\phi \subseteq X \ \text{ es subespacio vectorial con } \ M \subseteq M_\phi \\ \phi(x) = \ell(x) \quad \forall\, x \in M \\ \phi(x) \le p(x) \quad \forall\, x \in M_\phi \end{array} \right\}.$$

El conjunto P no es vacío pues $\ell \in P$. En este conjunto definiremos el orden parcial dado por

$$\phi_1 \preceq \phi_2 \;\Leftrightarrow\; \left(M_{\phi_1} \subseteq M_{\phi_2} \ \text{ y } \ \phi_1(x) = \phi_2(x) \quad \forall\, x \in M_{\phi_1} \right),$$

donde M_{ϕ_1} y M_{ϕ_2} corresponden a los dominios (subespacios vectoriales de X) de las funciones ϕ_1 y ϕ_2.

Probemos que P es un conjunto inductivo (ver Sección 6.3.1). Para ello, consideremos un conjunto $Q \subseteq P$ totalmente ordenado. Definamos el conjunto

$$\tilde{M} = \bigcup_{\phi \in Q} M_\phi$$

y la función $\bar{\phi} : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) \quad \text{ si } \ x \in M_\phi. \tag{6.1}$$

Veamos que la función introducida en (6.1) está bien definida, cosa que podría fallar en caso de que para un cierto $x \in \tilde{M}$ haya dos formas diferentes de definir el valor $\bar{\phi}(x)$. Esto no sucederá, pues si para $\phi_1,\ \phi_2 \in Q$ se tiene que $x \in M_{\phi_1} \cap M_{\phi_2}$, como Q está totalmente ordenado, se tendrá que $\phi_1 \preceq \phi_2$ o $\phi_2 \preceq \phi_1$. Si suponemos el primer caso, entonces $M_{\phi_1} \subseteq M_{\phi_2}$ y $\phi_1(z) = \phi_2(z)$ para todo $z \in M_{\phi_1}$, por lo tanto, como $x \in M_{\phi_1} \cap M_{\phi_2} = M_{\phi_1}$, no existirá inconsistencia al definir $\bar{\phi}(x)$ en (6.1), es decir, se tendrá

$$\bar{\phi}(x) = \phi_1(x) = \phi_2(x).$$

Por otro lado, no es difícil ver que $\tilde{M}$ es un subespacio vectorial de X, pues para $x,\ y \in \tilde{M}$, se tendrá que existe ϕ_1 y ϕ_2 en Q tales que $x \in M_{\phi_1}$ e $y \in M_{\phi_2}$. Por el mismo argumento utilizado anteriormente (Q está totalmente ordenado), se obtiene que x e y pertenecen a M_{ϕ_1} o a M_{ϕ_2}, y como estos conjuntos son subespacios vectoriales, entonces $x + \lambda y$ pertenecerá a uno de ellos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, deduciendo así que $\tilde{M}$ es un subespacio vectorial de X.

Hemos probado así que $\bar{\phi}$ pertenece a P y, evidentemente, es una cota superior de Q. Por lo tanto, P es inductivo. Por el lema de Zorn (Lema 6.3.1) deducimos que P tiene un elemento maximal $\bar{\ell} \in P$, cuyo dominio lo denotaremos por $E \subseteq X$, que es un subespacio vectorial de X que contiene a M ($M \subseteq E$), y además (porque $\bar{\ell}$ pertenece a P) se tendrá

$$\bar{\ell}(x) = \ell(x) \quad \forall\, x \in M \quad \text{y} \quad \bar{\ell}(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in E. \tag{6.2}$$

A partir de lo anterior, observemos que si probamos $E = X$, habremos culminado la demostración. Para ello, supongamos que existe $y \in X \setminus E$ y lleguemos a una contradicción.

Si existe $y \in X \setminus E$, definamos el subespacio vectorial generado por $\{y\} \cup E$, que denotaremos por

$$S = \{u + \lambda y \mid u \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq X.$$

Claramente $M \subseteq E \subseteq S$ y $S \neq E$.

Como $\bar{\ell}(u) \leq p(u)$ para todo $u \in E$, y dado que la función p es sublineal, se tendrá

$$\bar{\ell}(u_1 + u_2) \leq p(u_1 + u_2) = p(u_1 + y + u_2 - y) \leq p(u_1 + y) + p(u_2 - y) \qquad \forall\, u_1,\ u_2 \in E,$$

implicando

$$\bar{\ell}(u_2) - p(u_2 - y) \leq p(u_1 + y) - \bar{\ell}(u_1) \qquad \forall\, u_1,\ u_2 \in E. \tag{6.3}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{u_2 \in E} \bar{\ell}(u_2) - p(u_2 - y) \leq \inf_{u_1 \in E} p(u_1 + y) - \bar{\ell}(u_1),$$

y estos valores son finitos, pues

$$\sup_{u_2 \in E} \bar{\ell}(u_2) - p(u_2 - y) \leq p(y) \quad \text{y} \quad -p(-y) \leq \inf_{u_1 \in E} p(u_1 + y) - \bar{\ell}(u_1),$$

cotas que se obtienen al evaluar en $u_1 = 0$ (para la primera) y $u_2 = 0$ (para la segunda) en (6.3).

Definamos el valor

$$a = \frac{1}{2}\left(\sup_{u_2 \in E} \bar{\ell}(u_2) - p(u_2 - y) + \inf_{u_1 \in E} p(u_1 + y) - \bar{\ell}(u_1)\right),$$

y la función lineal $L : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(u + \lambda y) = \bar{\ell}(u) + \lambda a \qquad \forall\, u \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Probaremos que $L \in P$ y además $\bar{\ell} \preceq L$, lo que sería una contradicción con la maximalidad de $\bar{\ell}$. En realidad, lo único que debemos probar es que $L \in P$, pues directamente se tendrá que $\bar{\ell} \preceq L$, dado que el dominio de L (que denotamos por S) es un subespacio vectorial que contiene (estrictamente) a E (dominio de $\bar{\ell}$) y, adicionalmente, $L(u) = \bar{\ell}(u)$ para todo $u \in E$. Por lo tanto, lo único que debemos probar es que L está mayorada por p en S.

Como

$$\sup_{u_2 \in E} \bar{\ell}(u_2) - p(u_2 - y) \leq a \leq \inf_{u_1 \in E} p(u_1 + y) - \bar{\ell}(u_1),$$

entonces para todo $u \in E$ se tiene

$$\bar{\ell}(u) - a \leq p(u - y) \quad \text{y} \quad \bar{\ell}(u) + a \leq p(u + y). \tag{6.4}$$

Si $x = u + \lambda y \in S$, donde $u \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, probemos que $L(x) \leq p(x)$. Si $\lambda = 0$ esto se obtiene de inmediato, pues en tal caso $x \in E$ y ya sabemos que $\bar{\ell}$ es mayorada por p en E. Si $\lambda > 0$, entonces, utilizando la segunda desigualdad en (6.4) y el hecho que p es positivamente homogénea, obtendremos

$$L(x) = L(u + \lambda y) = \bar{\ell}(u) + \lambda a = \lambda(\bar{\ell}(u/\lambda) + a) \leq \lambda p(u/\lambda + y) = p(u + \lambda y) = p(x).$$

Finalmente, si $\lambda < 0$, utilizando la primera desigualdad en (6.4) y también la positiva homogeneidad de p, obtenemos de similar forma que

$$L(x) = L(u + \lambda y) = \bar{\ell}(u) + \lambda a = -\lambda(\bar{\ell}(-u/\lambda) - a) \leq -\lambda p(-u/\lambda - y) = p(u + \lambda y) = p(x).$$

Es decir, hemos demostrado que $L(x) \leq p(x)$ para todo $x \in S$, concluyendo que $L \in P$, lo que no puede ser pues al tener que $\bar{\ell} \preceq L$ y $\bar{\ell} \neq L$ (pues el dominio de L contiene estrictamente al dominio de $\bar{\ell}$) se contradice la maximalidad de $\bar{\ell}$. A partir de esta contradicción, hemos probado entonces que $E = X$ y de (6.2) se concluye el resultado. ■

A continuación veremos solo algunos corolarios que se obtienen directamente del resultado anterior. Para ello, introduciremos el concepto de seminorma.

Definición 6.3.2 Dado un espacio vectorial real X, una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una **seminorma** si:

(a) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$;

(b) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$;

(c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x,\ y \in X$ (es subaditiva; desigualdad triangular).

Observe que toda norma definida sobre un espacio vectorial será una seminorma, y que toda seminorma será una función sublineal de acuerdo a la Definición 6.3.1.

Corolario 6.3.3 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial diferente de $\{0\}$. Si $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal tal que

$$|\ell(x)| \leq p(x) \qquad \forall\, x \in M,$$

entonces existe una función lineal $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) $\bar{\ell}(x) = \ell(x)$ para todo $x \in M$;

(b) $|\bar{\ell}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Como $|\ell(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, en particular se tendrá $\ell(x) \leq p(x)$. Dado que p es sublineal, aplicando el Teorema 6.3.2 se tiene que existe una función lineal $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\ell}(x) = \ell(x) \quad \forall\, x \in M \quad \text{y} \quad \bar{\ell}(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Como $-\bar{\ell}(x) = \bar{\ell}(-x) \leq p(-x) = p(x)$ (por ser p seminorma), se concluye $|\bar{\ell}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. ■

Corolario 6.3.4 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial diferente de $\{0\}$. Si $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal continua, entonces existe una función lineal continua $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\bar{\ell} \in X^*$) tal que $\bar{\ell}(x) = \ell(x)$ para todo $x \in M$ y

$$\|\bar{\ell}\|_* = \|\ell\|_{M^*},$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma en el espacio dual X^* dada por

$$\|\bar{\ell}\|_* = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\bar{\ell}(x)|}{\|x\|}$$

y $\|\cdot\|_{M^*}$ es la norma en el espacio dual M^* definida análogamente, es decir,

$$\|\ell\|_{M^*} = \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}.$$

Demostración. Como $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua, sabemos que

$$|\ell(u)| \leq \|\ell\|_{M^*} \|u\| \qquad \forall\, u \in M.$$

Definamos $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $p(x) = \|\ell\|_{M^*} \|x\|$ para todo $x \in X$. Claramente p es una seminorma y se tiene

$$|\ell(x)| \leq p(x) \qquad \forall\, x \in M.$$

Utilizando el Corolario 6.3.3, deducimos que existe una función lineal $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\ell}(x) = \ell(x) \quad \forall\, x \in M \quad \text{y} \quad |\bar{\ell}(x)| \leq p(x) = \|\ell\|_{M^*} \|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto, $\bar{\ell}$ es continua (ver Teorema 4.2.1) y además

$$\|\bar{\ell}\|_* = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\bar{\ell}(x)|}{\|x\|} \leq \|\ell\|_{M^*}.$$

Por otro lado, dado que $M \subseteq X$ se tiene

$$\|\bar{\ell}\|_* = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\bar{\ell}(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \frac{|\bar{\ell}(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \|\ell\|_{M^*},$$

probando así $\|\bar{\ell}\|_* = \|\ell\|_{M^*}$. ∎

Corolario 6.3.5 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces, existe una función lineal continua $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\bar{\ell} \in X^*$) tal que $\|\bar{\ell}\|_* = 1$ y $\bar{\ell}(x_0) = \|x_0\|$.

Demostración. Definamos M el subespacio vectorial generado por x_0, es decir,

$$M = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

y la función lineal $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Claramente ℓ es una función lineal y continua definida sobre M, y se tiene

$$\|\ell\|_{M^*} = \sup_{x\in M\setminus\{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{|\lambda|\|x_0\|}{|\lambda|\|x_0\|} = 1.$$

Por lo tanto, aplicando el Corolario 6.3.4 deducimos la existencia de $\bar{\ell} \in X^*$ tal que $\bar{\ell}(x_0) = \ell(x_0) = \|x_0\|$ y $\|\bar{\ell}\|_* = \|\ell\|_{M^*} = 1$. ■

6.3.3 Teorema de separación

En esta sección demostraremos el teorema de Hahn-Banach geométrico o teorema de separación, en el contexto de espacios vectoriales normados. Más adelante explicaremos por qué se denomina teorema de separación. Lo que se deseará separar son dos conjuntos convexos disjuntos, definición que entregamos a continuación.

Definición 6.3.3 — Conjunto convexo. Dado un espacio vectorial real X, un conjunto $C \subseteq X$ se dice **convexo** si

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \qquad \forall\, x,\ y \in C;\ \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Dicho de otra forma, un conjunto es convexo, si para todo x e y en el conjunto, se tiene que el segmento

$$[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \in C \mid \lambda \in [0,1]\}$$

está contenido en el conjunto.

Observe que todo subespacio vectorial, en particular será un conjunto convexo.

Teorema 6.3.6 — Hahn-Banach (geométrico). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $A,\ B \subseteq X$ dos conjuntos convexos, no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$ y A es abierto. Entonces, existirá una función lineal continua $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\bar{\ell} \in X^*$) distinta de cero, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\bar{\ell}(a) < \gamma \leq \bar{\ell}(b) \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B. \tag{6.5}$$

Demostración. Sean $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $x_0 = b_0 - a_0$. Observe que $x_0 \neq 0$ dado que $A \cap B = \emptyset$. Definamos el conjunto

$$C = A - B + x_0 = \{a - b + x_0 \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Claramente $0 \in C$. Además, C será convexo y abierto (pues A lo es) propiedades que se dejan propuestas a demostrar. Por otro lado, $x_0 \notin C$.

Observe que para todo $x \in X$ existirá $\alpha > 0$ tal que $x/\alpha \in C$. Esto viene del hecho que C es abierto y que $0 \in C$, pues entonces, existirá $r > 0$ tal que $B(0,r) \subseteq C$ y, por lo tanto, para $x \neq 0$ tomando $\alpha = 2\|x\|/r$ se tendrá $x/\alpha \in B(0,r) \subseteq C$. Si $x = 0$ se tiene $x/\alpha \in C$ para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, podemos definir la función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 \mid x/\alpha \in C\}.$$

Esta función estará bien definida, pues el conjunto sobre el cual se toma el ínfimo es no vacío (por lo señalado anteriormente) y acotado inferiormente. Entonces se tendrá $p(x) \in \mathbb{R}_+$ para todo $x \in X$.

Nuestra intención es utilizar el teorema de Hahn-Banach analítico (Teorema 6.3.2) para poder concluir. Para ello veamos que p es una función sublineal (ver Definición 6.3.1).

Comencemos probando que p es positivamente homogénea. Para $x \in X$ y $\lambda > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \text{ínf}\{\alpha > 0 \mid \lambda x/\alpha \in C\} = \lambda\, \text{ínf}\{\alpha/\lambda > 0 \mid x/(\alpha/\lambda) \in C\} \\ &= \lambda\, \text{ínf}\{\alpha' > 0 \mid x/\alpha' \in C\} = \lambda\ p(x), \end{aligned}$$

demostrando así lo deseado.

Demostremos que p es sublineal. Sean $x,\ y \in X$ y tomemos $\alpha,\ \beta > 0$ tales que $x/\alpha \in C$, $y/\beta \in C$. Entonces,

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overbrace{\frac{x}{\alpha}}^{\in C} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overbrace{\frac{y}{\beta}}^{\in C} \in C.$$

Por la convexidad de C, se tendrá entonces

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C.$$

Por lo tanto,

$$p(x+y) \leq \alpha+\beta \qquad \forall\ \alpha,\ \beta > 0 \quad \text{tales que} \quad x/\alpha \in C,\ y/\beta \in C,$$

de donde concluímos

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\ x,\ y \in X,$$

es decir, p es sublineal.

Volvamos a considerar ahora el elemento $x_0 \neq 0$ mencionado al comienzo de la demostración, y definamos el subespacio vectorial $M \subseteq X$ generado por $\{x_0\}$, es decir,

$$M = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sobre este subespacio, definamos la función $\ell : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R},$$

y veamos que $\ell(u) \leq p(u)$ para todo $u \in M$.

Dado que $0 \in C$ y C es convexo, observe que si $p(x) < \alpha$, entonces $x/\alpha \in C$. Por lo tanto, para $\lambda > 0$, si $p(\lambda x_0) < \lambda$, se tendrá $x_0 \in C$, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que

$$\bar{\ell}(\lambda x_0) = \lambda \leq p(\lambda x_0) \qquad \forall\ \lambda > 0.$$

Por otro lado, si $\lambda \leq 0$, entonces

$$\bar{\ell}(\lambda x_0) = \lambda \leq 0 \leq p(\lambda x_0).$$

Hemos demostrado así que $\ell(u) \leq p(u)$ para todo $u \in M$, lo que nos permite utilizar el teorema de Hahn-Banach analítico (Teorema 6.3.2). Este nos dice que existirá una función lineal $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\ell}(\lambda x_0) = \lambda \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \bar{\ell}(x) \leq p(x) \quad \forall\ x \in X.$$

Evidentemente la función $\bar{\ell}$ no es la función nula, pues $\bar{\ell}(x_0) = 1$.

Demostremos que la función $\bar{\ell}$ es continua. Volvamos a considerar $r > 0$ tal que $B(0,r) \subseteq C$, que se obtiene del hecho que C es abierto y $0 \in C$. Entonces, para $z \in B(0,r) \subseteq C$, se tiene también que $-z \in B(0,r) \subseteq C$, de donde deducimos

$$\bar{\ell}(z) \leq p(z) \leq 1 \quad \text{y} \quad -\bar{\ell}(z) = \bar{\ell}(-z) \leq p(-z) \leq 1 \qquad \forall\, z \in B(0,r),$$

que implicará

$$|\bar{\ell}(z)| \leq 1 \qquad \forall\, z \in B(0,r).$$

Entonces, para todo $x \in X \setminus \{0\}$ se tendrá que $rx/2\|x\| \in B(0,r)$ y, por lo tanto,

$$|\bar{\ell}(rx/2\|x\|)| \leq 1 \;\Rightarrow\; |\bar{\ell}(x)| \leq (2/r)\|x\| \qquad \forall\, x \in X,$$

lo que prueba la continuidad de $\bar{\ell}$.

Finalmente, veamos que la función $\bar{\ell}$ es la que nos permite separar A y B, es decir, obtener (6.5). Para $a \in A$, $b \in B$, se tendrá que $a - b + x_0 \in C$. Como C es abierto, entonces existirá $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)(a - b + x_0) \in C$. De esta forma,

$$p(a - b + x_0) \;\leq \frac{1}{1+\varepsilon},$$

y como $\bar{\ell}$ está mayorada por p, se tendrá

$$\bar{\ell}(a - b + x_0) = \bar{\ell}(a) - \bar{\ell}(b) + \overbrace{\bar{\ell}(x_0)}^{=1} \leq p(a - b + x_0) \;\leq \frac{1}{1+\varepsilon},$$

implicando

$$\bar{\ell}(a) - \bar{\ell}(b) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} - 1 < 0$$

y, por lo tanto,

$$\bar{\ell}(a) < \bar{\ell}(b) \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B. \tag{6.6}$$

Si definimos

$$\gamma = \sup\{\bar{\ell}(a) \mid a \in A\},$$

vemos que este supremo está bien definido, pues $A \neq \emptyset$ y de (6.6) se obtiene que

$$\gamma \leq \bar{\ell}(b_0),$$

por lo tanto se está tomando un supremo sobre un conjunto no vacío acotado superiormente, lo que nos asegura $\gamma \in \mathbb{R}$. Para culminar, probemos que $\bar{\ell}(a) < \gamma$ para todo $a \in A$. Si existiese $\bar{a} \in A$ tal que $\bar{\ell}(\bar{a}) = \gamma$, como A es abierto, sabemos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño se tendrá $\bar{a} + \delta x_0 \in A$. Por otro lado,

$$\bar{\ell}(a + \delta x_0) = \bar{\ell}(\bar{a}) + \delta \bar{\ell}(x_0) = \gamma + \delta > \gamma,$$

lo que es una contradicción con la definición de γ, dado que $\bar{a} + \delta x_0 \in A$. En conclusión, a partir de (6.6) y lo que acabamos de realizar, hemos demostrado que se tiene la separación

$$\bar{\ell}(a) < \gamma \leq \bar{\ell}(b) \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B.$$

■

El resultado anterior se conoce como teorema de separación, dado que el conjunto

$$\mathscr{H} = \{x \in X \mid \bar{\ell}(x) = \gamma\}$$

que será un hiperplano de acuerdo a la Definición 7.4.2 que se verá más adelante, separa a los conjuntos A y B, en el sentido que

$$A \subseteq \mathscr{H}_- = \{x \in X \mid \bar{\ell}(x) \leq \gamma\} \quad \text{y} \quad B \subseteq \mathscr{H}_+ = \{x \in X \mid \bar{\ell}(x) \geq \gamma\}$$

y $\mathscr{H} = \mathscr{H}_- \cap \mathscr{H}_+$.

El teorema de separación tiene algunas variantes. Demostrar una de estas importantes variantes, es dejada como ejercicio a continuación.

Ejercicio 6.3 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $A,\ B \subseteq X$ dos conjuntos convexos, no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$, A es compacto y B es cerrado. Entonces, existirá una función lineal continua $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\bar{\ell} \in X^*$) distinta de cero, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\bar{\ell}(a) \leq \gamma - \varepsilon < \gamma < \gamma + \varepsilon \leq \bar{\ell}(b) \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B.$$

Indicación: Pruebe que existe un conjunto A' abierto que contiene a A y es disjunto de B, para luego utilizar el Teorema 6.3.6.

El anterior resultado, implicará el siguiente corolario de manera directa.

Corolario 6.3.7 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $C \subseteq X$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, para $x_0 \notin C$ existirá una función lineal continua $\bar{\ell} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\bar{\ell} \in X^*$) distinta de cero, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\bar{\ell}(x_0) \leq \gamma - \varepsilon < \gamma < \gamma + \varepsilon \leq \bar{\ell}(x) \qquad \forall\, x \in C.$$

Demostración. Basta aplicar el resultado del Ejercicio 6.3 con $A = \{x_0\}$ y $B = C$. ■

7. Espacios de Hilbert

La estructura de espacios de Hilbert, es muy adecuada para el estudio de diversos problemas en ingeniería y otras ciencias. Como veremos en este capítulo, los espacios de Hilbert serán espacios de Banach, dotados de una operación denominada producto interno, que servirá, entre otras muchas cosas, para definir la norma del espacio.

7.1 Producto interno

Definición 7.1.1 — Producto interno. Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$, se dice que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un **producto interno** si

(1) $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$;

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x,\ y \in X$;

(3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal, es decir, para todo $x,\ y,\ z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle \\ \langle x, z + \lambda y \rangle &= \langle x, z \rangle + \lambda \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Observe que si $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno, entonces $\langle x, 0 \rangle = 0$ para todo $x \in X$.

■ **Ejemplo 7.1.1** Algunos ejemplos de espacios vectoriales donde se puede definir un producto interno son:

- $X = \mathbb{R}^n$ y para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$
que corresponde al producto punto en $\mathbb{R}^n$.
- $X = \mathscr{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua } \}$ y
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \qquad \forall\, f,\ g \in X.$$
- $X = \ell_2(\mathbb{R})$ y para $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k.$$
- $X = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (espacio de matrices a coeficientes reales de n filas y m columnas) y
$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B) \qquad \forall\, A,\ B \in X,$$
donde A^t es la matriz traspuesta de A y $\operatorname{tr}(A^t B)$ es la traza de la matriz cuadrada $A^t B$, es decir, la suma de los elementos de su diagonal.

En los siguientes resultados, veremos algunas de las propiedades que tiene un producto interno, comenzando con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que ya conocemos de cursos anteriores para el producto interno usual (producto punto) en $X = \mathbb{R}^n$ (indicado en el Ejemplo 7.1.1).

Proposición 7.1.2 — Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$, si $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno, entonces
$$|\langle x, y \rangle| \leq (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} (\langle y, y \rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, x,\ y \in X, \tag{7.1}$$
teniéndose la igualdad si $x = 0$ o $y = 0$ o si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (i.e., x e y son colineales).

Demostración. Sean $x,\ y \neq 0$ tales que $\alpha x \neq \lambda y$ para todo $\alpha,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (en los otros casos se obtiene de inmediato la igualdad en (7.1)). Entonces,
$$\langle \alpha x - \lambda y, \alpha x - \lambda y \rangle > 0 \qquad \forall\, \alpha,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
Por lo tanto,
$$\alpha^2 \langle x, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle - 2\alpha\lambda \langle x, y \rangle > 0.$$
Tomando $\alpha = (\langle y, y \rangle)^{\frac{1}{2}} > 0$ y $\lambda = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene la desigualdad deseada. ■

Como anunciamos al comienzo, a partir de un producto interno se podrá definir una norma y, por lo tanto, un espacio vectorial normado.

Proposición 7.1.3 Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$, si $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno, entonces para $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.2}$$

se tiene que $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

Demostración. De la definición de producto interno, se tendrá directamente que $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$. Luego, para $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2 \|x\|^2,$$

de donde se deduce $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Para probar la desigualdad triangular, dados $x,\ y \in X$ deducimos

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos entonces

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de donde se deduce la desigualdad triangular. Hemos probado así que $\|\cdot\|$ es una norma y, por lo tanto, $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

■

Ejercicio 7.1 — Ley del paralelogramo. Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, donde la norma $\|\cdot\|$ está definida por un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ como en (7.2). Demuestre que se tiene

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

7.2 Bases de un espacio de Hilbert

Gracias a lo presentado en la sección anterior, ya contamos con todos los ingredientes para definir un espacio de Hilbert.

Definición 7.2.1 — Espacio de Hilbert. Un espacio vectorial normado $(X,\|\cdot\|)$, donde la norma $\|\cdot\|$ está definida por un producto interno, se dice que es **pre-Hilbert**. Si además el espacio resulta ser de Banach (i.e., completo), entonces se dice que es un espacio de **Hilbert**. En ambos casos notaremos $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ para referirnos al espacio pre-Hilbert o de Hilbert, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno que define la norma.

Definición 7.2.2 Dado $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert, una sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice es **ortonormal** si

$$\langle e_k, e_{k'}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k'. \end{cases}$$

Además, se dirá que es una **base ortonormal completa** de X si

$$\langle e_k, x\rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Teorema 7.2.1 Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una base ortonormal completa. Entonces, para todo $x \in X$ se tiene

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle e_k, x\rangle e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k,$$

y además

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle e_k, x\rangle|^2.$$

Demostración. Para $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, se tendrá

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2 - 2\sum_{k=0}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2,$$

de donde se concluye

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{k=0}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2$ converge cuando $n \to \infty$.

Como $\sum\limits_{k=0}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2$ converge cuando $n \to \infty$, entonces $\sum\limits_{k=m}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2 \to 0$ cuando $m,\ n \to \infty$. Definiendo

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k,$$

se tiene que

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} (\langle e_k, x\rangle)^2 \to 0,$$

de donde deducimos que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Entonces, existirá (X es completo) $\bar{y} \in X$ tal que $y_n \to \bar{y}$. El límite $\bar{y}$ de y_n será

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle e_k, x\rangle e_k.$$

Debido a que la base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortonormal, se tendrá

$$\|y_n\|^2 = \left\langle \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k, \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle^2,$$

obteniendo

$$\|\bar{y}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle e_k, x\rangle^2.$$

Probemos que $\bar{y} = x$. Para $k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$ se tendrá,

$$\langle e_k, x - y_n \rangle = \langle e_k, x \rangle - \sum_{j=0}^{n} \langle e_j, x \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, x \rangle = 0 \qquad \forall\, n \geq k.$$

Por lo tanto, $\langle e_k, x - \bar{y} \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Debido a la completitud de la base se concluye $\bar{y} = x$.

■

7.3 Proyecciones

En esta sección, definiremos la proyección sobre conjuntos y mostraremos que en un espacio de Hilbert, la proyección sobre conjuntos convexos cerrados siempre existe y es única.

Definición 7.3.1 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y un conjunto $C \subseteq X$, para $x \in X$ se dice que $y \in C$ es la proyección de x sobre C, si

$$\|y - x\| = d_C(x) = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

Como anunciamos al comienzo, un problema que nos va a interesar, es saber si un elemento tiene proyección sobre un conjunto, y si ésta es única. En un inicio, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 7.3.1 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y un conjunto compacto $C \subseteq X$, entonces todo elemento $x \in X$ tiene una proyección sobre C.

Demostración. La demostración es directa, pues dado que C es compacto y para $x \in X$ la función $z \in X \to f(z) := \|z - x\|$ es continua, se tiene que el conjunto

$$f(C) = \{\|z - x\| \mid z \in C\}$$

es un compacto de $\mathbb{R}$, por lo tanto alcanza su ínfimo que en realidad es un mínimo (ver Corolario 3.1.4), es decir, existe $y \in C$ tal que

$$\inf f(C) = \inf_{z \in C} \|z - x\| = d_C(x) = \|y - x\|.$$

■

Proposición 7.3.2 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ de dimensión finita y un conjunto cerrado $C \subseteq X$, entonces todo elemento $x \in X$ tiene una proyección sobre C.

Demostración. Sea $x \in X$. Si $x \in C$ entonces es evidente que x tiene una proyección sobre C. Si $x \notin C$, sabemos que $d_C(x) > 0$ (ver Proposición 1.2.6). Para $r > d_C(x)$ se tendrá

$$d_C(x) = d_{C \cap B[x,r]}(x).$$

De hecho, $d_C(x) \leq d_{C\cap B[x,r]}(x)$ y si $y_k \in C$ tal que $\|y_k - x\| \to d_C(x) < r$, entonces existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in C \cap B[x,r]$ para $k \geq k_0$. La existencia de la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ proviene de la definición de d_C a partir de un ínfimo, pues para todo $k \in \mathbb{N}$ existirá $y_k \in C$ tal que

$$d_C(x) \leq \|y_k - x\| \leq \frac{1}{k} + \inf_{y\in C} \|y - x\| = \frac{1}{k} + d_C(x).$$

Por lo tanto,

$$d_{C\cap B[x,r]}(x) \leq \|y_k - x\| \to d_C(x) \ \Rightarrow\ d_C(x) = d_{C\cap B[x,r]}(x).$$

Como $C \cap B[x,r]$ es compacto en X (dimensión finita), se concluye.

■

Ejercicio 7.2 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert. Dados $x,\ y,\ z \in X$, definiendo $w = \frac{y+z}{2}$, pruebe que

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2\|x - w\|^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2.$$

En el resto de esta sección, nos concentraremos en obtener un resultado de existencia y unicidad de proyecciones, pero para conjuntos que no sean acotados. La clase de conjuntos para la que obtendremos este resultado (en espacios de Hilbert), son los conjuntos convexos (ver Definición 6.3.3).

Teorema 7.3.3 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $C \subseteq X$ un conjunto convexo (ver Definición 6.3.3), cerrado y no vacío, entonces para todo $x \in X$ existe una única proyección sobre C.

Demostración. Sea $x \in X$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\|x_k - x\| \to d_C(x) = \inf_{y\in C} \|y - x\|$. Probemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Para $k,\ k' \in \mathbb{N}$, aplicaremos el resultado del Ejercicio 7.2 a $x,\ x_k,\ x_{k'}$. Así, se tendrá

$$\|x - x_k\|^2 + \|x - x_{k'}\|^2 = 2\left\|x - \frac{(x_k + x_{k'})}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x_k - x_{k'}\|^2.$$

Esto implica

$$\begin{aligned}\|x_k - x_{k'}\|^2 &= 2\|x - x_k\|^2 + 2\|x - x_{k'}\|^2 - 4\left\|x - \frac{(x_k + x_{k'})}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\|x - x_k\|^2 + 2\|x - x_{k'}\|^2 - 4d_C^2(x).\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_k\|^2 \leq d_C^2(x) + \varepsilon^2$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto, de lo hecho más arriba deducimos

$$\|x_k - x_{k'}\| \leq \varepsilon \qquad \forall\, k,\ k' \geq k_0,$$

concluyendo así que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces, existe $\bar{x}$ tal que $x_k \to \bar{x}$. Como C es cerrado, se tiene $\bar{x} \in C$. De esta forma

$$\|x_k - x\| \to d_C(x) = \|\bar{x} - x\|,$$

demostrando que x tiene una proyección (que es $\bar{x}$) sobre C.

Veamos que la proyección $\bar{x}$ de x sobre C es única. Sea $\bar{y} \in C$ otra proyección de x. Si $x - \bar{x} = \alpha(x - \bar{y})$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, se tendría que $d_C(x) = |\alpha| d_C(x)$. En tal caso, si $d_C(x) = 0$, entonces $x \in C$ (ver Proposición 1.2.6) y, por lo tanto, $\bar{x} = \bar{y} = x$.

Si $d_C(x) > 0$, entonces $|\alpha| = 1$. Si $\alpha = 1$ implicará que $\bar{y} = \bar{x}$. Si $\alpha = -1$, entonces $x = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \in C$ (por la convexidad de C) lo que es una contradicción. En consecuencia, asumiremos ahora que $x - \bar{x}$ no es colineal con $x - \bar{y}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Proposición 7.1.2) tendremos

$$\left\| x - \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) \right\|^2 = \left\| \frac{x-\bar{x}}{2} + \frac{x-\bar{y}}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}(2d_C^2(x) + 2\langle x-\bar{x}, x-\bar{y} \rangle) < d_C^2(x),$$

que es una contradicción, concluyendo que la proyección de x sobre C es única. ■

Corolario 7.3.4 En un espacio de Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, todo conjunto convexo, cerrado y no vacío tiene un elemento de norma mínima.

Demostración. El elemento de norma mínima de un conjunto C correspondería a la proyección de $x = 0$, dada por

$$d_C(0) = \inf_{y \in C} \|y\|,$$

de donde se deduce directamente el resultado. ■

De manera directa, deducimos lo siguiente.

Corolario 7.3.5 Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $C \subseteq X$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, se puede definir la función $P_C : X \longrightarrow C$ (función proyección) que a cada elemento $x \in X$ le asocia su (única) proyección en C.

Ahora que ya sabemos que todo elemento de un espacio de Hilbert, tiene una única proyección sobre un conjunto convexo cerrado, nuestro objetivo es poder caracterizar dicha proyección, para en la práctica poder calcularla.

Proposición 7.3.6 Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $C \subseteq X$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, para $x \in X$ se tiene que $\bar{x} = P_C(x)$ es el único elemento en C que satisface

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0 \qquad \forall\, y \in C. \tag{7.3}$$

Por otro lado, si $\bar{x} \in C$ satisface (7.3), entonces $\bar{x} = P_C(x)$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\bar{x} = P_C(x)$. Para $\lambda \in (0,1]$ e $y \in C$, como $\bar{x} + \lambda(y - \bar{x}) \in C$, se tendrá

$$\|x - \bar{x}\|^2 \leq \|x - (\bar{x} + \lambda(y - \bar{x}))\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \lambda^2 \|y - \bar{x}\|^2 - 2\lambda \langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|y - \bar{x}\|^2 \qquad \forall\, y \in C,\ \forall\, \lambda \in (0,1],$$

concluyendo (7.3).

Por otro lado, si $x \in X$ y $\bar{x} \in C$ satisfacen (7.3), entonces para $y \in C$ se tendrá

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 = \|x-\bar{x}+\bar{x}-y\|^2 &= \|x-\bar{x}\|^2 + \|\bar{x}-y\|^2 + 2\langle x-\bar{x}, \bar{x}-y\rangle \\ &\geq \|x-\bar{x}\|^2 \qquad \forall\, y \in C.\end{aligned}$$

Es decir, $\bar{x} = P_C(x)$. ■

Con la ayuda de la caracterización que entrega la Proposición 7.3.6, realice los siguientes ejercicios.

Ejercicio 7.3 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Para $C = B[x_0, r]$ determine $P_C(x)$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 7.4 Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno (punto) usual en $\mathbb{R}^n$. Para $C = \mathbb{R}^n_+$ determine $P_C(x)$ para todo $x \in X$.

Una propiedad que tendrá la función proyección, es su continuidad. De hecho, como se muestra en el siguiente resultado, será una función Lipschitz.

Corolario 7.3.7 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $C \subseteq X$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, la función $P_C : X \longrightarrow C$ es Lipschitz.

Demostración. Para $x,\ y \in C$, gracias a la Proposición 7.3.6 se tendrá

$$\langle x - P_C(x), z_1 - P_C(x)\rangle \leq 0 \qquad \forall\, z_1 \in C;$$

$$\langle y - P_C(y), z_2 - P_C(y)\rangle \leq 0 \qquad \forall\, z_2 \in C.$$

Tomando $z_1 = P_C(y)$ y $z_2 = P_C(x)$ obtenemos

$$\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle + \langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow\ \langle x - y + P_C(y) - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq 0,$$

concluyendo

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x,\ y \in C,$$

es decir, la función $P_C(\cdot)$ es Lipschitz. ■

Ejercicio 7.5 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Para $x \in X$ demuestre que $\bar{x} = P_M(x)$ si y solo si, $\bar{x} \in M$ y

$$\langle x - \bar{x}, z\rangle = 0 \qquad \forall\, z \in M. \tag{7.4}$$

Proposición 7.3.8 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces, $P_M \in \mathscr{L}(X,X)$ y $\|P_M\|_{\mathscr{L}(X,X)} \leq 1$.

Demostración. La linealidad de P_M se deducirá a partir de (7.4). De hecho, para $x,\ y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\langle x - P_M(x), z\rangle = 0 \qquad \forall\, z \in M$$
$$\langle y - P_M(y), z\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle \lambda y - \lambda P_M(y), z\rangle = 0 \qquad \forall\, z \in M,$$

que implica

$$\langle (x+\lambda y) - (P_M(x) + \lambda P_M(y)), z\rangle = 0 \qquad \forall\, z \in M.$$

Por lo tanto, $P_M(x) + \lambda P_M(y) = P_M(x+\lambda y)$.

Dado que P_M es lineal, ya habíamos probado que la función proyección sobre un convexo cerrado, es Lipschitz (Corolario 7.3.7), teniéndose

$$\|P_M(x) - P_M(y)\| \leq \|x-y\| \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Por lo tanto,

$$\|P_M\|_{\mathscr{L}(X,X)} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|P_M(x)\|}{\|x\|} \leq 1.$$

■

Para un subespacio vectorial y su ortogonal, de acuerdo a la definición siguiente, se pueden obtener más propiedades de las funciones proyecciones sobre estos espacios.

Definición 7.3.2 En un espacio pre-Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dado un conjunto $M \subseteq X$ se define su **espacio ortogonal** por

$$M^{\perp} := \{x \in X \mid \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M\}.$$

Ejercicio 7.6 Demuestre que $M^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado y $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Teorema 7.3.9 Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces, para todo $x \in X$ se tiene

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x).$$

Además,

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^{\perp}}(x)\|^2.$$

Demostración. Para $x \in X$ definamos $\bar{y} = x - P_M(x)$. Entonces, por la caracterización de la proyección,

$$\langle \bar{y}, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in M \ \Rightarrow\ \bar{y} \in M^{\perp}.$$

Luego, para $w \in M^{\perp}$ se tendrá

$$\langle x - \bar{y}, w\rangle = \langle P_M(x), w\rangle = 0 \qquad \forall\, w \in M^{\perp}.$$

Por lo tanto, $\bar{y} = P_{M^\perp}(x)$ de donde se concluye

$$x = \underbrace{x - P_M(x)}_{=\bar{y}=P_{M^\perp}(x)} + P_M(x) = P_{M^\perp}(x) + P_M(x).$$

Finalente,

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2 - \underbrace{2\langle P_M(x), P_{M^\perp}(x)\rangle}_{=0}.$$

■

7.4 Teorema de representación de Riesz

En esta sección, veremos que un espacio de Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se puede identificar con su dual topológico $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ (ir a la Sección 6.3 para ver aspectos de este espacio), es decir, para cada función lineal continua $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$, existirá un único $w \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle w, x\rangle \qquad \forall\, x \in X.$$

En este caso el elemento $\ell \in X^*$ se está identificando con $w \in X$. Este resultado se denomina el teorema de representación de Riesz.

Por otro lado, para cada $w \in X$ se tiene que la función $\ell_w : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\ell_w(x) = \langle w, x\rangle \qquad \forall\, x \in X,$$

es lineal y continua, es decir, $\ell_w \in X^*$.

Es en el sentido anterior que al espacio X se le identificará con el espacio X^*, una característica particular, y muy práctica para su utilización, de los espacios de Hilbert.

Comencemos con establecer un resultado que nos será de utilidad, y cuya demostración queda como ejercicio, utilizando la caracterización de la función proyección sobre un conjunto convexo que entrega la Proposición 7.3.6 y en particular sobre un subespacio vectorial (ver el Ejercicio 7.5).

Ejercicio 7.7 Dado un espacio de Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, consideremos un conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X$ de elementos no nulos tales que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. Si M es el subespacio vectorial generado por A, para $x \in X$ pruebe que la proyección $P_M(x)$ estará dada por

$$P_M(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j,$$

donde

$$\alpha_j = \frac{\langle x, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle} \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

El subespacio vectorial generado por un conjunto de elementos $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lo notaremos por

$$\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R},\;\; j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Definición 7.4.1 Dado un espacio vectorial X, dos subespacios vectoriales $S_1,\ S_2 \subseteq X$ se dicen **suplementarios** si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ y

$$X = S_1 + S_2.$$

■ **Ejemplo 7.4.1** Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado, entonces M y $M^{\perp}$ (su espacio ortogonal) son suplementarios (ver Teorema 7.3.9).

Definición 7.4.2 En un espacio vectorial X, un conjunto $\mathscr{H} \subseteq X$ se dice que es un **hirpeplano**, si es un subespacio vectorial de co-dimensión uno, es decir, es suplementario a un subespacio vectorial de dimensión uno. En otras palabras, si existe $\bar{x} \in X \setminus \mathscr{H}$ tal que $\mathscr{H}$ y $\langle \{\bar{x}\} \rangle$ (el espacio generado por $\bar{x}$) son suplementarios.

Proposición 7.4.2 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal no nula. Entonces,

$$\mathscr{H} = \{x \in X \mid \ell(x) = 0\}$$

es un hiperplano. Si ℓ es continua (es decir, $\ell \in X^*$), adicionalmente se tendrá que $\mathscr{H}$ es cerrado.

Demostración. Sea $\bar{z} \in X$ tal que $\ell(\bar{z}) \neq 0$. Definamos $\bar{x} = \frac{\bar{z}}{\ell(\bar{z})}$ y veamos que todo $x \in X$ se puede escribir como $x = y + \alpha\bar{x}$ con $y \in \mathscr{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, lo que probaría el resultado deseado, puesto que en tal caso se tendría

$$X = \mathscr{H} + \langle \{\bar{x}\} \rangle$$

y además $\mathscr{H} \cap \langle \{\bar{x}\} \rangle = \{0\}$, es decir, $\mathscr{H}$ es un hiperplano.

Definiendo $\alpha = \ell(x)$ e $y = x - \ell(x)\bar{x}$ se tiene que $y \in \mathscr{H}$ pues

$$\ell(y) = \ell(x) - \ell(x)\ell(\bar{x}) = 0,$$

concluyendo así $x = y + \alpha\bar{x}$.

Finalmente, si ℓ es continua, dado que $\mathscr{H} = \ell^{-1}(\{0\})$ y el conjunto $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado, entonces $\mathscr{H}$ es un hiperplano cerrado.

■

Teorema 7.4.3 — Riesz. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\ell \in X^*$, es decir, $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal continua. Entonces, existe un único $w \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle w, x \rangle \qquad \forall\, x \in X.$$

Demostración. Si ℓ es la función nula, entonces $w = 0$. Si ℓ no es nula, por la Proposición 7.4.2 se tiene que

$$\mathscr{H} = \{x \in X \mid \ell(x) = 0\}$$

es un hiperplano cerrado.

Sea $\bar{x} \in X \setminus \mathscr{H}$ (i.e., $\ell(\bar{x}) \neq 0$) y definamos $\bar{y} = \bar{x} - P_{\mathscr{H}}(\bar{x}) \neq 0$. Entonces, por la caracterización de la proyección $P_{\mathscr{H}}(\bar{x})$ (ver Proposición 7.3.6 y Ejercicio 7.5), se tiene

$$\langle \bar{y}, z \rangle = \langle \bar{x} - P_{\mathscr{H}}(\bar{x}), z \rangle = 0 \qquad \forall\, z \in \mathscr{H},$$

es decir, $\bar{y} \in \mathscr{H}^{\perp}$. Más aun, $\langle \{\bar{y}\} \rangle = \mathscr{H}^{\perp}$.

Por otro lado, la proyección sobre $\langle \{\bar{y}\} \rangle$ será (ver Ejercicio 7.7)

$$P_{\langle \{\bar{y}\} \rangle}(x) = \frac{\langle x, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2}\, \bar{y}.$$

Definiendo $w = \ell\left(\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}\right) \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ se obtiene

$$x = P_{\mathscr{H}}(x) + P_{\mathscr{H}^{\perp}}(x) = P_{\mathscr{H}}(x) + \frac{\langle x, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|^2}\, \bar{y} = P_{\mathscr{H}}(x) + \left\langle x, \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right\rangle \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}.$$

Por lo tanto,

$$\ell(x) = \left\langle x, \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right\rangle \ell\left(\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}\right) = \langle x, w \rangle \qquad \forall\, x \in X.$$

■

8. Diferenciabilidad

En este último capítulo de la parte correspondiente a espacios vectoriales normados, introduciremos el concepto de diferenciabilidad, derivada parcial y diferencial, de funciones definidas en estos espacios. Estos conceptos generalizarán aquellos aprendidos en cursos anteriores, para funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$, y más generalmente para funciones en varias variables (definidas de $\mathbb{R}^n$ a valores en $\mathbb{R}^m$).

8.1 La derivada parcial

Definición 8.1.1 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Una función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ se dirá **derivable parcialmente** en $x_0 \in A$ con respecto a la dirección $d \in X$, si el siguiente límite existe

$$Df(x_0; d) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}. \tag{8.1}$$

Al elemento $Df(x_0; d) \in Y$ se le denominará **derivada parcial** de f en x_0 con respecto a d. La función f se dirá **parcialmente derivable en** $x_0 \in A$ si $Df(x_0; d)$ existe para todo $d \in X$. Si la función f es parcialmente derivable en x_0 y la función $Df(x_0; \cdot) : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua, se dice que f es **Gâteaux diferenciable** en x_0.

En la definición anterior, y en general a lo largo de todo este capítulo, se requerirá que la función f esté definida sobre un conjunto abierto A, para que tenga sentido poder tomar el límite en (8.1), de acuerdo a la Definición 3.1.2. Esto pues en el límite se está aproximando x_0 mediante $x_0 + td$ cuando $t \to 0$, y por ello debemos asegurar que f esté definida en los elementos $x_0 + td$.

Si para $\varepsilon > 0$ definimos la función $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Y$ por $\phi(t) = f(x_0 + td)$ ($x_0 \in A$ y $d \in X$ fijos), es fácil ver que se tiene la fórmula $Df(x_0; d) = \phi'(0)$ (la derivada de ϕ en 0) según el cálculo de funciones de una variable real. Con esto vemos que cuando $Y = \mathbb{R}$ y $\|d\|_X = 1$, la cantidad $Df(x_0; d)$ se interpreta como la pendiente de f en x_0 en la dirección d.

Si consideramos que $X = \mathbb{R}^n$ y denotamos por $e_1, \ldots, e_n$ los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces la derivada parcial $Df(x_0; e_j)$, cuando existe, la denotaremos $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \in Y$ o bien $\partial_j f(x_0)$, y la llamaremos derivada parcial de f en x_0 con respecto a x_j.

Cuando se habla de la derivada parcial de una función f con respecto a x_j, se entiende que se trata de la función $\frac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$, donde A es un abierto para cuyos elementos f tiene derivadas parciales, que a cada $x \in A$ le hace corresponder $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in Y$.

A continuación se dejan como ejercicios algunas reglas de cálculo para la derivada parcial de funciones.

Ejercicio 8.1 Si $Df(x_0; d)$ existe, demuestre que $Df(x_0; \lambda d)$ también existirá para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y se tendrá
$$Df(x_0; \lambda d) = \lambda Df(x_0; d).$$

Ejercicio 8.2 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Dadas dos funciones $f,\ g : A \subseteq X \longrightarrow Y$ y dos elementos $x_0 \in A$ y $d \in X$ tales que $Df(x_0; d)$ y $Dg(x_0; d)$ existen, entonces:

(a) $D[f+g](x_0; d)$ existe y se tiene
$$D[f+g](x_0; d) = Df(x_0; d) + Dg(x_0; d);$$

(b) Para $\lambda \in \mathbb{R}, D[\lambda f](x_0; d)$ existe y se tiene
$$D[\lambda f](x_0; d) = \lambda Df(x_0; d);$$

(c) Si $Y = \mathbb{R}$, entonces $D[fg](x_0; d)$ existe y se tiene
$$D[fg](x_0; d) = g(x_0) Df(x_0; d) + f(x_0) Dg(x_0; d);$$

(d) Si $Y = \mathbb{R}$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces $D[1/f](x_0; d)$ existe y se tiene
$$D[1/f](x_0; d) = -\frac{1}{f^2(x_0)} Df(x_0; d).$$

8.2 Diferencialidad (Fréchet)

Que una función sea parcialmente derivable o que incluso sea Gâteaux diferenciable, no es una hipótesis tan fuerte, por ejemplo, esto no implicará que la función sea continua. La diferenciabilidad en el sentido de Fréchet, es un concepto más restrictivo, pero que nos permitirá tener interesantes resultados.

Definición 8.2.1 Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A\subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Una función $f:A\subseteq X\longrightarrow Y$ se dirá **diferenciable en** $x_0\in A$ o **Fréchet diferenciable en** x_0, si existe una función $\ell\in\mathscr{L}(X,Y)$ (ℓ lineal y continua de X en Y) tal que

$$\lim_{d\to 0}\frac{f(x_0+d)-f(x_0)-\ell(d)}{\|d\|_X}=0.$$

A la función lineal continua ℓ (más adelante veremos que es única) se le llama diferencial de f en x_0 y se le denota usualmente por $Df(x_0)\in\mathscr{L}(X,Y)$ o bien $df(x_0)$.

La función f se dirá **diferenciable** o **Fréchet diferenciable** si es diferenciable en todo elemento de A y llamamos **diferencial** de f a la función $Df:A\subseteq X\longrightarrow\mathscr{L}(X,Y)$ que a cada $x\in A$ le hace corresponder el diferencial $Df(x)\in\mathscr{L}(X,Y)$ de f en x. Al diferencial de f lo denotaremos Df ó df.

De la definición anterior, observe que si f es Fréchet diferenciable en x_0, entonces para todo $d\in X$, con $x_0+d\in A$, se tendrá

$$f(x_0+d)=f(x_0)+Df(x_0)(d)+o(d),\tag{8.2}$$

donde $o(\cdot)$ es una función de X en Y que verifica $o(0)=0$ y

$$\lim_{\substack{d\to 0\\ d\neq 0}}\frac{o(d)}{\|d\|_X}=0.$$

Haciendo el cambio de variable $x=x_0+d\in A$, la relación (8.2) toma la forma

$$f(x)=f(x_0)+Df(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\qquad\text{para todo } x\in A.$$

Esta expresión es la que se denomina aproximación de primer orden de la función f en x_0, pues se hace a través de una función lineal afín (respecto a la variable x) y el término $o(x-x_0)$ es pequeño cuando x está cercano (de acuerdo a la norma en X) de x_0 .

De la definición del diferencial de f en x_0, si $\ell=Df(x_0)$, entonces para todo $\varepsilon>0$ existirá $\delta>0$ tal que

$$\|d\|_X\le\delta\ \Rightarrow\ \|f(x_0+d)-f(x_0)-\ell(d)\|_Y\le\varepsilon\|d\|_X.$$

Un primer ejemplo del cálculo del diferencial viene dado por la siguiente proposición.

Proposición 8.2.1 Si $\ell\in\mathscr{L}(X,Y)$, entonces es Fréchet diferenciable y $D\ell(x_0)=\ell$ para todo $x_0\in X$.

Demostración. Es directo, del hecho que

$$\frac{\ell(x_0+d)-\ell(x_0)-\ell(d)}{\|d\|_x}=0 \qquad \forall\, d\in X\setminus\{0\}.$$

■

Veamos ahora que el diferencial de una función es único.

Proposición 8.2.2 Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A\subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Si una función $f:A\subseteq X\longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en $x_0\in A$, entonces su diferencial en ese elemento es único.

Demostración. Si ℓ_1 y ℓ_2 son el diferencial de f en x_0, entonces para todo $\varepsilon>0$ existirá $\delta>0$ tal que

$$\|d\|_X\le\delta \;\Rightarrow\; \|f(x_0+d)-f(x_0)-\ell_j(d)\|_Y\le\frac{\varepsilon}{2}\|d\|_X \qquad j=1,\ 2.$$

Por lo tanto,

$$\|d\|_X\le\delta \;\Rightarrow\; \|\ell_1(d)-\ell_2(d)\|_Y\le\varepsilon\|d\|_X.$$

Si $d\in X\setminus\{0\}$ se tendrá $\left\|\frac{\delta d}{\|d\|_X}\right\|\le\delta$ y entonces

$$\left\|\ell_1\left(\frac{\delta d}{\|d\|_X}\right)-\ell_2\left(\frac{\delta d}{\|d\|_X}\right)\right\|_Y\le\varepsilon\delta \qquad \forall\, d\in X\setminus\{0\}.$$

De esta forma probamos que

$$\|\ell_1-\ell_2\|_{\mathscr{L}(X,Y)}=\sup_{d\in X\setminus\{0\}}\frac{\|\ell_1(d)-\ell_2(d)\|_Y}{\|d\|_X}\le\varepsilon \qquad \forall\,\varepsilon>0,$$

de donde se concluye $\ell_1=\ell_2$.

■

Proposición 8.2.3 Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A\subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Si una función $f:A\subseteq X\longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en $x_0\in A$, entonces f es continua en x_0, parcialmente derivable y Gâteaux diferenciable en x_0. Además se tendrá la igualdad

$$Df(x_0)(d)=Df(x_0;d) \qquad \forall\, d\in X.$$

Demostración. Por la Fréchet diferenciabilidad de f en x_0 se tiene que para $\varepsilon=1$ existirá $\delta>0$ tal que (tomando $d=x-x_0$)

$$\|x-x_0\|_X\le\delta \;\Rightarrow\; \|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|_Y\le\|x-x_0\|_X.$$

Esto implica que si $\|x-x_0\|_X\le\delta$, entonces

$$\|f(x)-f(x_0)\|_Y\le\|Df(x_0)(x-x_0)\|_Y+\|x-x_0\|_X\le(\|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)}+1)\|x-x_0\|_X$$

de donde se deduce la continuidad de f en x_0.

Dado $d \neq 0$ se tendrá (por la Fréchet diferenciabilidad)

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)-Df(x_0)(td)}{\|td\|_X} = \frac{1}{\|d\|_X} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{|t|} - \frac{tDf(x_0)(d)}{|t|\|d\|_X},$$

deduciendo $Df(x_0)(d) = Df(x_0;d)$, lo que concluye la demostración pues la función $Df(x_0;\cdot)$ será lineal y continua (i.e., Gâteaux diferenciable). ■

Ejercicio 8.3 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Si la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en $x_0 \in A$, pruebe que si en X e Y se consideran otras normas, pero equivalentes a $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, entonces la función sigue siendo Fréchet diferenciable y el diferencial es el mismo.

Ejercicio 8.4 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Dadas dos funciones $f,\ g : A \subseteq X \longrightarrow Y$ Fréchet diferenciables en $x_0 \in A$, pruebe que se tendrán las siguientes propiedades:

(a) $f+g$ es Fréchet diferenciable en x_0 y se tiene

$$D[f+g](x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0);$$

(b) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que λf es Fréchet diferenciable en x_0 y

$$D[\lambda f](x_0) = \lambda Df(x_0);$$

(c) Si $Y = \mathbb{R}$, entonces $f \cdot g$ es Fréchet diferenciable en x_0 y se tiene

$$D[f\cdot g](x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0);$$

(d) Si $Y = \mathbb{R}$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces $1/f$ es Fréchet diferenciable en x_0 y se tiene

$$D\left[\frac{1}{f}\right](x_0) = -\frac{1}{f^2(x_0)} Df(x_0).$$

Ejercicio 8.5 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1}), \ldots, (Y_n, \|\cdot\|_{Y_n})$ espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío.

Demuestre que una función $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \subseteq X \longrightarrow Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ será Gâteaux (resp. Fréchet) diferenciable en $x_0 \in A$ si y solamente si las funciones $f_j : A \subseteq X \longrightarrow Y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ son Gâteaux (resp. Fréchet) diferenciables en x_0, teniéndose, en el caso de Fréchet diferenciabilidad, la igualdad

$$Df(x_0) = (Df_1(x_0), \ldots, Df_n(x_0)).$$

Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y un conjunto abierto $A \subseteq X$, si una función $f : A \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable, se tendrá que $Df(x_0) \in X^*$ para todo $x_0 \in A$. En el caso en que X

es un espacio de Hilbert, a este elemento del dual se le identifica con un elemento de X denotado por $\nabla f(x_0) \in X$ (por el teorema de representación de Riesz, Teorema 7.4.3), donde

$$Df(x_0)(d) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle \qquad \forall\, d \in X.$$

El elemento $\nabla f(x_0) \in X$ recibe el nombre de **gradiente** de f en x_0. De esta forma, la aproximación de primer orden de f en una vecindad de x_0 será

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + o(x - x_0).$$

Si $X = \mathbb{R}^n$, entonces $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n$.

A continuación veremos que la composición de funciones diferenciables, es una función diferenciable, estableciendo además la denominada **regla de la cadena**.

Proposición 8.2.4 — Regla de la cadena. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tres espacios vectoriales normados, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ dos abiertos no vacíos. Si la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en un elemento $x_0 \in A$ y $g : B \subseteq Y \longrightarrow Z$ es Fréchet diferenciable en $f(x_0) \in B$, entonces $g \circ f$ es Fréchet diferenciable en x_0 y se tiene

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Demostración. Debemos demostrar

$$\frac{\|g(f(x_0+d)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(d))\|_Z}{\|d\|_X} \to 0$$

cuando $d \to 0$.

Observar que

$$\begin{aligned} &\|g(f(x_0+d)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(d))\|_Z \\ \leq\ &\underbrace{\|g(f(x_0+d)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x_0+d) - f(x_0))\|_Z}_{A} \\ &+ \underbrace{\|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(Y,Z)} \|f(x_0+d) - f(x_0) - Df(x_0)(d)\|_Y}_{B}. \end{aligned}$$

Ahora utilizamos las hipótesis de diferenciabilidad. Sea $\varepsilon > 0$, entonces:

- Existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|f(x_0+d) - f(x_0)\|_Y \leq \overbrace{(\|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + 1)}^{L} \|d\|_X \qquad \forall\, d \in B_X(0, \delta_1).$$

- Existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|g(f(x_0)+w) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(w)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2L} \|w\|_Y \qquad \forall\, w \in B_Y(0, \delta_2).$$

- Existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|f(x_0+d) - f(x_0)\|_Y \leq \delta_2 \qquad \forall\, d \in B_X(0,\delta_3)$$

y

$$\|f(x_0+d) - f(x_0) - Df(x_0)(d)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2\|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(Y,Z)}}\|d\|_X \qquad \forall\, d \in B_X(0,\delta_3).$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\} > 0$ y definiendo $w = f(x_0+d) - f(x_0)$, se obtiene

$$A + B \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|d\|_X \qquad \forall\, d \in B_X(0,\delta),$$

lo que culmina la demostración.

■

8.3 Valor medio e incrementos finitos

En esta parte veremos dos resultados importantes que permitirán estimar los valores de una función a partir de sus diferenciales. Estos resultados son el teorema del valor medio y el teorema de los incrementos finitos.

Teorema 8.3.1 — Valor medio. Dado un espacio vectorial normado $(X,\|\cdot\|)$ y un conjunto abierto $A \subseteq X$, si una función $f : A \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en todo punto de un segmento $[x_0,y_0] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \mid \lambda \in [0,1]\} \subseteq A$, entonces existe $z \in (x_0,y_0) = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \mid \lambda \in (0,1)\}$ tal que

$$f(y_0) - f(x_0) = Df(z)(y_0 - x_0).$$

Demostración. Definamos la función $\phi(t) = f(x_0 + t(y_0 - x_0))$ para $t \in [0,1]$. Vemos que ϕ es derivable en $(0,1)$ puesto que para $t^* \in (0,1)$ se tendrá

$$\phi'(t^*) = \lim_{t\to 0}\frac{\phi(t^*+t) - \phi(t^*)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+(t^*+t)(y_0-x_0)) - f(x_0+t^*(y_0-x_0))}{t},$$

es decir, $\phi'(t^*) = Df(x_0 + t^*(y_0 - x_0))(y_0 - x_0)$. Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable real, obtenemos que existe $\eta \in (0,1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\eta)$, que corresponde exactamente a lo que deseamos con $z = x_0 + \eta(y_0 - x_0) \in (x_0,y_0)$. ■

Si $(X,\langle\cdot,\cdot,\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $f : A \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable, entonces, para $x_0,\ y_0 \in A$ tales que $[x_0,y_0] \subseteq A$, el teorema anterior señala que existirá $z \in (x_0,y_0)$ tal que

$$f(y_0) - f(x_0) = \langle \nabla f(z), y_0 - x_0\rangle.$$

Teorema 8.3.2 — Incrementos finitos. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Si la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en todo punto de un segmento $[x_0, y_0] \subseteq A$ y si L es una constante que verifica $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq L$ para todo $x \in [x_0, y_0]$, entonces se tiene la desigualdad

$$\|f(y_0) - f(x_0)\|_Y \leq L\|y_0 - x_0\|_X.$$

Demostración. Supongamos que lo anterior no se tiene, es decir,

$$\|f(y_0) - f(x_0)\|_Y - L\|y_0 - x_0\|_X = \delta > 0.$$

Si definimos $m = \frac{x_0+y_0}{2}$, puesto que

$$\|f(y_0) - f(m)\|_Y + \|f(m) - f(x_0)\|_Y \geq \|f(y_0) - f(x_0)\|_Y$$

y

$$\|y_0 - x_0\|_X = \|y_0 - m\|_X + \|m - x_0\|_X,$$

se tendrá

$$\|f(y_0) - f(m)\|_Y - L\|y_0 - m\|_X \geq \frac{\delta}{2},$$

o bien

$$\|f(m) - f(x_0)\|_Y - L\|m - x_0\|_X \geq \frac{\delta}{2}.$$

Si se tiene la primera de estas desigualdades definimos $y_1 := y_0$ y $x_1 := m$. En caso contrario, definimos $y_1 := m$ y $x_1 := x_0$. Así, obtenemos

$$\|f(x_1) - f(y_1)\|_Y - L\|x_1 - y_1\|_X \geq \frac{\delta}{2}.$$

Aplicando sucesivamente el mismo procedimiento obtenemos una sucesión de intervalos encajonados $[x_n, y_n]$ con $\|y_n - x_n\|_X = \frac{\|y_0 - x_0\|_X}{2^n}$ y tales que

$$\|f(y_n) - f(x_n)\|_Y - L\|y_n - x_n\|_X \geq \frac{\delta}{2^n}.$$

Puesto que $\|x_n - y_n\|_X \to 0$ sabemos que las sucesiones $\{x_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ deben converger a un mismo $w \in [x_0, y_0]$.

Por otra parte, por ser f Fréchet diferenciable en w, de la desigualdad anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2^n} &\leq \|f(y_n) - f(w) - (f(x_n) - f(w))\|_Y - L\|y_n - x_n\|_X \\
&= \|Df(w)(y_n - w) + o(y_n - w) - Df(w)(x_n - w) - o(x_n - w)\|_Y - L\|y_n - x_n\|_X \\
&\leq \|Df(w)\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|y_n - x_n\|_X + \|o(y_n - w)\|_Y + \|o(x_n - w)\|_Y - L\|y_n - x_n\|_X,
\end{aligned}$$

y como $\|y_n - w\|_X < \|y_n - x_n\|_X$ y $\|x_n - w\|_X < \|y_n - x_n\|_X$, dividiendo la desigualdad anterior por $\|y_n - x_n\|_X$, se tendrá

$$\frac{\delta}{\|y_0 - x_0\|_X} \leq \|Df(w)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + \frac{\|o(w - y_n)\|_Y}{\|w - y_n\|_X} + \frac{\|o(w - x_n)\|_Y}{\|w - x_n\|_X} - L.$$

Tomando límite $n \to +\infty$ obtenemos una contradicción con la hipótesis $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq L$ para todo $x \in [x_0, y_0]$.

■

Corolario 8.3.3 Si $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable, A es un conjunto convexo y se tiene $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq L$ para todo $x \in A$, entonces f es Lipschitz.

Demostración. Dados $x,\ y \in A$, como A es convexo se tiene que $[x,y] \subseteq A$. Como $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq L$ para todo $w \in [x,y]$, se deduce entonces

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x-y\|_X \qquad \forall\, x,\ y \in A.$$

■

Definición 8.3.1 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, un conjunto $C \subseteq X$ se dirá **conexo**, si no existen dos conjuntos abiertos no vacíos C_1 y C_2 en X que intersecten C, tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C \subseteq C_1 \cup C_2$.

Proposición 8.3.4 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Si la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable y su diferencial es nulo en un conjunto abierto y conexo $C \subseteq A$, entonces f es constante en C.

Demostración. Demostremos primero que f es constante en toda bola $B(x,\delta) \subseteq C$. Para $y \in B(x,\delta)$, dado que $[x,y] \subseteq B(x,\delta) \subseteq C$ y $Df(z) = 0$ para todo $z \in C$, se tendrá $Df(z) = 0$ para todo $z \in [x,y]$. Del Teorema 8.3.2 concluímos que $\|f(x) - f(y)\|_Y \leq 0$, lo que equivale a decir $f(y) = f(x)$.

Sea ahora $x_0 \in C$ y definamos

$$C_1 = \{x \in C \mid f(x) = f(x_0)\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{x \in C : f(x) \neq f(x_0)\}.$$

Puesto que f es continua y C es un conjunto abierto, es fácil demostrar que C_2 es un conjunto abierto.

Mostremos finalmente que C_1 es también un conjunto abierto. Sea $x \in C_1$ y $B(x,\delta) \subseteq C$. De la primera parte concluímos que f es constante en $B(x,\delta)$, y se tendrá entonces $f(y) = f(x) = f(x_0)$ para todo $y \in B(x,\delta)$, que implica $B(x,\delta) \subset C_1$. Lo anterior muestra que C_1 es abierto.

Dado que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C \subseteq C_1 \cup C_2$ y además $C_1 \neq \emptyset$ (en efecto, $x_0 \in C_1$), del hecho que C es conexo concluímos que $C_2 = \emptyset$, es decir, $C = C_1$.

■

8.4 Funciones continuamente diferenciables

Las funciones continuamente diferenciables, serán aquellas que son Fréchet diferenciable y cuyo diferencial es una función continua, como se especifica en la definición siguiente. Para esta clase de funciones podremos demostrar teoremas fundamentales en análisis, que ya se han visto en cursos anteriores para funciones reales, como son el teorema de la función inversa y el de la función implícita.

Definición 8.4.1 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un abierto no vacío. La función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ se dice **continuamente diferenciable** o de **clase** $\mathscr{C}^1$ si es Fréchet diferenciable y el diferencial $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es una función continua.

Ejercicio 8.6 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Dadas dos funciones $f,\ g : A \subseteq X \longrightarrow Y$ continuamente diferenciables en $x_0 \in A$, entonces:

(a) $f+g$ es continuamente diferenciable en x_0 y se tiene

$$D[f+g](x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0);$$

(b) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que λf es continuamente diferenciable en x_0 y

$$D[\lambda f](x_0) = \lambda Df(x_0);$$

(c) Si $Y = \mathbb{R}$, entonces $f \cdot g$ es continuamente diferenciable en x_0 y se tiene

$$D[f \cdot g](x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0);$$

(d) Si $Y = \mathbb{R}$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces $1/f$ es continuamente diferenciable en x_0 y se tiene

$$D\left[\frac{1}{f}\right](x_0) = -\frac{1}{f^2(x_0)} Df(x_0).$$

Proposición 8.4.1 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un abierto no vacío. Si la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es continuamente diferenciable, entonces para todo $x_0 \in A$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq (\|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + \varepsilon)\|x - y\|_X \qquad \forall\, x,\ y \in B(x_0, \delta).$$

En particular, la función f es localmente Lipschitz.

Demostración. Sean $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es una función continua en x_0, existirá $\delta > 0$ tal que

$$\|Df(z)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + \varepsilon \qquad \forall\, z \in B[x_0, \delta].$$

Como $B[x_0, \delta]$ es un conjunto convexo, concluimos por el teorema de los incrementos finitos (Teorema 8.3.2)

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq (\|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + \varepsilon)\|x - y\|_X \qquad \forall\, x,\ y \in B(x_0, \delta),$$

que en particular implicará la local Lipschitzianidad. ∎

Corolario 8.4.2 Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $A \subseteq X$ un abierto no vacío. Si X es de dimensión finita y la función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es continuamente diferenciable, entonces para todo $x_0 \in A$ y $r > 0$ tal que $B[x_0, r] \subseteq A$, se tendrá que f es Lipschitz en $B[x_0, r]$, con constante de Lipschitz $L := \max\limits_{z \in B[x_0, r]} \|Df(z)\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$.

Demostración. Sea $x_0 \in A$ y $r > 0$ tal que $B[x_0, r] \subseteq A$. Como $B[x_0, r]$ es compacto (X es de dimensión finita; ver Teorema 5.2.1) y $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es una función continua, entonces el conjunto

$$\{\|Df(z)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \mid z \in B[x_0, r]\} = (\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \circ Df)(B[x_0, r]) \subseteq \mathbb{R}$$

es compacto en $\mathbb{R}$, por lo tanto alcanza su máximo, que denotaremos por $L \geq 0$, concluyendo por el teorema de los incrementos finitos que

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X \qquad \forall\, x,\ y \in B[x_0, r].$$

■

Ejercicio 8.7 Pruebe que la composición de dos funciones continuamente diferenciables es continuamente diferenciable.

8.4.1 Teoremas de la función inversa e implícita

Los teoremas de la función inversa e implícita, que demostraremos en esta sección, constituyen herramientas muy útiles en análisis, como apreciarán en los cursos siguientes de la carrera. Estos resultados ya los hemos visto para funciones reales de una y varias variables. Lo que haremos ahora, es demostrarlos en un contexto de espacios vectoriales normados. Tal nivel de abstracción, tiene su justificación en diversas aplicaciones, aun cuando sus demostraciones, conservan la esencia de aquellas vistas en cursos precedentes.

Comencemos dando como ejercicio, la demostración del teorema de la función inversa para funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. El intentar demostrar este resultado, nos dará una idea de los pasos a seguir, y las hipótesis que solicitar, para poder demostrarlo en un contexto mucho más general.

Ejercicio 8.8 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Pruebe que existe $\varepsilon > 0$ tal que para $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se tiene que $\tilde{f} : I \longrightarrow f(I)$ es biyectiva y

$$(\tilde{f}^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Antes de enunciar el teorema de la función inversa, introduciremos algunos resultados que necesitaremos.

Proposición 8.4.3 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y A una función lineal continua de X en X, es decir, $A \in \mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X,X)$. Si $\|A\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$, entonces, el operador $I - A$ es biyectivo y su inversa estará dada por

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} A^k = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} A^k,$$

donde $I : X \longrightarrow X$ es la función identidad en X, A^k es la composición k veces de A y $A^0 = I$.

Demostración. Definamos $A_N = \sum_{k=0}^{N} A^k \in \mathscr{L}(X)$ y problemos que $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{L}(X)$, espacio que será de Banach pues X lo es (ver Proposición 6.1.1).

Para $x \in B_X[0,1]$ y $N,\ N' \in \mathbb{N}$, se tendrá

$$\|A_N(x) - A_{N'}(x)\| \leq \sum_{k=N}^{N'} \|A^k\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \sum_{k\geq N} \|A^k\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \sum_{k\geq N} \|A\|^k_{\mathscr{L}(X)} = \frac{\|A\|^N_{\mathscr{L}(X)}}{1 - \|A\|_{\mathscr{L}(X)}}.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existirá $N_0 \in \mathbb{N}$ (basta tomar N_0 tal que $\|A\|^{N_0}_{\mathscr{L}(X)} < \varepsilon(1 - \|A\|_{\mathscr{L}(X)})$) tal que

$$\|A_N - A_{N'}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \varepsilon \qquad \forall\, N,\ N' \geq N_0,$$

concluyendo $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto,

$$T := \sum_{k\in\mathbb{N}} A^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} A^k \in \mathscr{L}(X).$$

Finalmente probemos que T es el inverso de $(I-A)$. Para $x \in X$ se tiene

$$(T\circ(I-A))(x) = T((I-A)(x)) = T(x - A(x)) = T(x) - T(A(x)) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (A^k(x) - A^{k+1}(x)) = \lim_{N\to\infty} x - A^{N+1}(x) = x,$$

de donde se deduce $T\circ(I-A) = I$. De manera análoga se prueba $(I-A)\circ T = I$.

■

Corolario 8.4.4 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, entonces

$$\theta = \{A \in \mathscr{L}(X) \mid A \ \text{ es biyectiva } \}$$

es un conjunto abierto de $\mathscr{L}(X)$.

Demostración. Se tiene que $\theta \neq \emptyset$ pues $I \in \theta$. Sea $A \in \theta$. Como A no es el operador nulo (pues es invertible), definamos

$$\varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}} > 0.$$

Para $L \in B_{\mathscr{L}(X)}(A,\varepsilon) = \{T \in \mathscr{L}(X) \mid \|T-A\|_{\mathscr{L}(X)} < \varepsilon\}$ se tendrá

$$\|(L-A)\circ A^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \|(L-A)\|_{\mathscr{L}(X)}\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < 1.$$

Gracias a la Proposición 8.4.3 que acabamos de ver, deducimos que $I - (L-A)\circ A^{-1} = -L\circ A^{-1}$ es un operador biyectivo. De esta forma, obtenemos que

$$L = -(-L\circ A^{-1})\circ A$$

es un operador biyectivo al ser composición de dos operadores biyectivos, probando así que $L \in \theta$, es decir, $B_{\mathscr{L}(X)}(A,\varepsilon) \subseteq \theta$. Esto demuestra que el conjunto θ es abierto.

■

Corolario 8.4.5 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : A \subseteq X \longrightarrow X$ una función continuamente diferenciable, donde $A \neq \emptyset$ es un abierto. Si para $x_0 \in A$ se tiene que $Df(x_0)$ es un operador lineal biyectivo, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq A$ y $Df(x)$ es biyectivo para todo $x \in B_X(x_0, \delta)$.

Demostración. Como $Df(x_0) \in \mathscr{L}(X)$ es biyectivo y el conjunto de los operadores lineales continuos biyectivos es un abierto en $\mathscr{L}(X)$ (corolario anterior), existirá $\varepsilon > 0$ tal que todo operador en $B_{\mathscr{L}(X)}(Df(x_0), \varepsilon)$ es biyectivo. Como $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ es continua, entonces existirá $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_X(x_0, \delta) \ \Rightarrow\ Df(x) \in B_{\mathscr{L}(X)}(Df(x_0), \varepsilon),$$

por lo tanto $Df(x)$ es biyectivo para todo $x \in B_X(x_0, \delta)$. ■

Teorema 8.4.6 — Función inversa. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : A \subseteq X \longrightarrow X$ una función continuamente diferenciable, donde $A \neq \emptyset$ es un abierto. Si $Df(x_0) \in \mathscr{L}(X)$ es biyectiva para $x_0 \in A$, entonces existe un abierto $V \subseteq X$ que contiene a x_0 tal que la restricción $\tilde{f} : V \to f(V)$ de la función f a V es biyectiva, y su función inversa $\tilde{f}^{-1}$ es Fréchet diferenciable. Se tendrá además

$$D\tilde{f}^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall\, x \in V.$$

Demostración. Primero supondremos que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ y $Df(x_0) = I$ (identidad). Definamos la función $g : A \subseteq X \longrightarrow X$ dada por

$$g(x) = x - f(x),$$

la que resultará ser continuamente diferenciable, con $Dg(x_0) = Dg(0) = 0$. Del Corolario 8.4.4 sabemos que existirá $\delta > 0$ tal que $Df(x)$ es biyectivo para todo $x \in B(0, \delta)$. Además, debido a la Proposición 8.4.1, se tendrá

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{3}\|x - y\| \qquad \forall\, x,\ y \in B[0, \delta].$$

Considerando $y = 0$, se deduce

$$g(B(0, \delta)) \subseteq B(0, \delta/3) \subseteq B(0, \delta/2).$$

Demostremos que para todo $u \in B[0, \delta/2]$ existe un único $x \in B[0, \delta]$ tal que $u = f(x)$. Esto implicará que la función $\tilde{f}$, restricción de la función f al conjunto abierto $V = f^{-1}(B(0, \delta/2)) \cap B(0, \delta)$, es biyectiva de V en $f(V)$.

Para $u \in B[0, \delta/2]$ definamos la función $\ell_u : B(0, \delta) \longrightarrow X$ por

$$\ell_u(y) = g(y) + u.$$

Observe que también se tendrá

$$\|\ell_u(x) - \ell_u(y)\| \leq \frac{1}{3}\|x - y\| \qquad \forall\, x,\ y \in B[0, \delta], \tag{8.3}$$

por lo tanto,

$$\|\ell_u(y)\| \leq \frac{1}{3}\|y\| + \|u\| \leq \delta \qquad \forall\, y \in B[0, \delta].$$

Lo anterior nos indica que la función $\ell_u : B[0, \delta] \longrightarrow B[0, \delta]$, es decir, la imagen de la bola $B[0, \delta]$ mediante la función ℓ_u, está contenida en la misma bola. Además, esta función es contractante debido a

(8.3). Como X es Banach y $B[0,\delta]$ es un conjunto cerrado, entonces $(B[0,\delta],d)$ es un espacio métrico completo, con d la métrica inducida por la norma.

Por el teorema del punto fijo de Banach (Teorema 3.1.8), deducimos existe un único $x \in B[0,\delta]$ tal que

$$\ell_u(x) = g(x) + u = x - f(x) + u = x.$$

Por lo tanto, $u = f(x)$. Hemos concluido que la función $\tilde{f} : V \longrightarrow f(V)$ es biyectiva, donde $\tilde{f}$ es la restricción de f al abierto V. Probemos que $\tilde{f}^{-1}$ es Lipschitz.

Sean $u,\ v \in f(V)$. Definiendo $x,\ y \in V$ como $x = \tilde{f}^{-1}(u)$ y $y = \tilde{f}^{-1}(v)$, dado que $f + g = I$, se tendrá

$$\begin{aligned}\|x-y\| = \|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| &\leq \|g(x)-g(y)\| + \|f(x)-f(y)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x-y\| + \|f(x)-f(y)\|,\end{aligned}$$

es decir,

$$\|x-y\| \leq 2\|f(x)-f(y)\| \;\Leftrightarrow\; \|\tilde{f}^{-1}(u) - \tilde{f}^{-1}(v)\| \leq 2\|u-v\| \qquad \forall\, u,\ v \in f(V).$$

Mostremos ahora que $\tilde{f}^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ es Fréchet diferenciable. Dado $z \in f(V) \subseteq B(0,\delta/2)$ demostremos que

$$D\tilde{f}^{-1}(z) = [Df(x)]^{-1},$$

donde $x = \tilde{f}^{-1}(z) \in B(0,\delta)$.

Sea $z \in f(V) \subseteq B(0,\delta/2)$, $x = \tilde{f}^{-1}(z)$ y $d \in X$ tal que $z + d \in B(0,\delta/2)$. Definiendo

$$h = \tilde{f}^{-1}(z+d) - \tilde{f}^{-1}(z),$$

se tiene que $f(x+h) - f(x) = d$ y

$$\|h\| = \|\tilde{f}^{-1}(z+d) - \tilde{f}^{-1}(z)\| \leq 2\|d\|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\|\tilde{f}^{-1}(z+d) - \tilde{f}^{-1}(z) - [Df(x)]^{-1}(d)\|}{\|d\|} &\leq 2\frac{\|h - [Df(x)]^{-1}(f(x+h)-f(x))\|}{\|h\|} \\ &\leq 2\frac{\|[Df(x)]^{-1}(Df(x)(h) - (f(x+h)-f(x)))\|}{\|h\|} \\ &\leq 2\|[Df(x)]^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \frac{\|Df(x)(h) - (f(x+h)-f(x))\|}{\|h\|}.\end{aligned}$$

Como f es diferenciable en x y $\|h\| \leq 2\|d\|$, la cantidad anterior tiende a cero cuando $d \to 0$.

Ya hemos probado que existe un abierto V donde $x_0 = 0 \in V$ tal que la función $\tilde{f} : V \longrightarrow f(V)$ (restricción de f) es biyectiva y su inversa es Fréchet diferenciable con

$$D\tilde{f}^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall\, x \in V.$$

Para ello hemos asumido que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ y $Df(x_0) = I$. Pasemos ahora al caso general.

Definamos la función $h : A \setminus \{x_0\} \subseteq X \longrightarrow X$ por

$$h(x) = [Df(x_0)]^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)].$$

Claramente $h(0) = 0$ y $Dh(0) = I$. Por lo tanto, dado todo el desarrollo que hemos hecho hasta ahora, existirá un abierto B que contiene al cero, tal que $\tilde{h} : B \longrightarrow h(B)$ es una biyección y cuya inversa es Fréchet diferenciable. De aquí se deduce que $\tilde{f} : V = \{x_0\} + B \longrightarrow Df(x_0)(h(B)) + \{f(x_0)\}$ es una biyección. De hecho, para $u \in Df(x_0)(h(B)) + \{f(x_0)\}$ se tiene

$$[Df(x_0)]^{-1}(u - f(x_0)) \in h(B),$$

que implica existirá $x \in B$ tal que $h(x) = [Df(x_0)]^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)] = [Df(x_0)]^{-1}(u - f(x_0))$, concluyendo existe un único $y = x_0 + x \in \{x_0\} + B$ tal que $f(y) = u$. Es decir,

$$\tilde{f}^{-1}(u) = \tilde{h}^{-1}([Df(x_0)]^{-1}[u - f(x_0)]) + x_0.$$

Como

$$h(x) = [Df(x_0)]^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)] \;\Rightarrow\; Dh(x) = [Df(x_0)]^{-1} \circ Df(x_0 + x),$$

entonces,

$$D\tilde{h}^{-1}(w) = [Df(x_0 + x)]^{-1} \circ Df(x_0),$$

donde $w = h(x) = [Df(x_0)]^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)]$. Por lo tanto,

$$D\tilde{f}^{-1}(f(x_0 + x)) = D\tilde{h}^{-1}(\overbrace{[Df(x_0)]^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)]}^{=h(x)=w}) \circ [Df(x_0)]^{-1}$$

$$= [Df(x_0 + x)]^{-1} \circ Df(x_0) \circ [Df(x_0)]^{-1} = [Df(x_0 + x)]^{-1} \qquad \forall\, x \in B,$$

es decir,

$$D\tilde{f}^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall\, x \in V.$$

■

Ejercicio 8.9 Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : A \subseteq X \longrightarrow X$ una función continuamente diferenciable, donde $A \neq \emptyset$ es un abierto. Si $Df(x_0) \in \mathscr{L}(X)$ es biyectiva para $x_0 \in A$, demuestre existe un abierto $V \subseteq X$ que contiene a x_0 tal que la restricción $\tilde{f} : V \to f(V)$ de la función f a V es biyectiva y su función inversa $\tilde{f}^{-1}$ es continuamente diferenciable. Se tendrá además

$$D\tilde{f}^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall\, x \in V.$$

Dado que ya hemos demostrado el teorema de la función inversa, en el ejercicio anterior lo único que se debe demostrar es que $\tilde{f}^{-1}$ es continuamente diferenciable, es decir, hay que probar que la función $D\tilde{f}^{-1} : f(V) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ dada por

$$D\tilde{f}^{-1}(u) = [Df(x)]^{-1} \qquad \forall\, u \in f(V),$$

(donde $u = f(x)$) es un operador continuo. Para ello, demuestre que el operador $\varphi : \theta \subseteq \mathscr{L}(X) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ definido por $\varphi(\ell) = \ell^{-1}$ es continuo, donde

$$\theta = \{\ell \in \mathscr{L}(X) \mid \ell \text{ es biyectiva } \}$$

es el conjunto que en el Corolario 8.4.4 se demostró es abierto en $\mathscr{L}(X)$.

Para enunciar el teorema de la función implícita, introduciremos el concepto de diferencial parcial para funciones definidas sobre un espacio producto.

Definición 8.4.2 — Diferencial parcial. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $n+1$ espacios vectoriales normados y $A \subseteq X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un abierto no vacío. Para una función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ y $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in A \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, denotaremos por $D_j f(\bar{x})$ (para $j = 1, ..., n$) al diferencial en $\bar{x}_j$ de la función $f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{j-1}, \cdot, \bar{x}_{j+1}, ..., \bar{x}_n) : A_j \subseteq X_j \longrightarrow Y$ cuando este existe, donde $A_j \subseteq X_j$ es un conjunto abierto. Entonces $D_j f(\bar{x})$ pertenecerá a $\mathscr{L}(X_j, Y)$.

Al diferencial $D_j f(\bar{x})$ lo llamamos **diferencial parcial de f en $\bar{x}$ respecto a la variable j**.

Proposición 8.4.7 Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $n+1$ espacios vectoriales normados y $A \subseteq X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un abierto no vacío. Si $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in A \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$, entonces para todo $d = (d_1, \ldots, d_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ se tiene la igualdad

$$Df(\bar{x})(d) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(\bar{x})(d_j).$$

Demostración. Para $j = 1, \ldots, n$ definamos las funciones $p_j : X \longrightarrow X_j$ y $r_j : X_j \longrightarrow X$ dadas por

$$p_j(x) = x_j \qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

$$r_j(x_j) = (0, \ldots, x_j, \ldots, 0) \qquad \forall\, x_j \in X_j.$$

Estas funciones son lineales continuas, de hecho, considerando en X la norma $\|x\|_X = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \|x_j\|_j$, se tiene

$$\|p_j(x)\|_j = \|x_j\|_j \leq \|x\|_X \quad \text{y} \quad \|r_j(x_j)\|_X = \|x_j\|_j.$$

Por lo tanto, $Dp_j(x) = p_j \in \mathscr{L}(X, X_j)$ para todo $x \in X$ y $Dr_j(x_j) = r_j \in \mathscr{L}(X_j, X)$ para todo $x_j \in X_j$. Además,

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(p_j(x)) = x \qquad \forall\, x \in X,$$

es decir, $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j \circ p_j = I$ (identidad de X en X).

Para $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in X$ definamos la función $I_j^{\bar{x}} : X_j \longrightarrow X$ por

$$I_j^{\bar{x}}(x_j) = \bar{x} + r_j(x_j - \bar{x}_j) = (\bar{x}_1, \ldots, x_j, \ldots, \bar{x}_n).$$

Observar que $DI_j^{\bar{x}}(x_j) = Dr_j(x_j - \bar{x}_j) = r_j \in \mathscr{L}(X_j, X)$. La derivada parcial de $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ con respecto a la variable j en el elemento $\bar{x}$, es

$$D_j f(\bar{x}) = D[f \circ I_j^{\bar{x}}](p_j(\bar{x})) \in \mathscr{L}(X_j, Y)$$

$$= Df(I_j^{\bar{x}}(\bar{x}_j)) \circ DI_j^{\bar{x}}(p_j(\bar{x})) = Df(\bar{x}) \circ r_j.$$

Teníamos $D_j f(\bar{x}) = Df(\bar{x}) \circ r_j$ y como $\sum_{j=1}^{n} r_j \circ p_j = I$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{Df(\bar{x}) \circ r_j}_{=D_j f(\bar{x})} \circ p_j = Df(\bar{x}).$$

Por lo tanto, para $d = (d_1, \ldots, d_n)$ se tendrá

$$Df(\bar{x})(d) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(\bar{x})(d_j).$$

■

Teorema 8.4.8 — Función implícita. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach, $A \subseteq X \times Y$ un abierto no vacío y $f : A \subseteq X \times Y \longrightarrow Y$ una función continuamente diferenciable. Se define la siguiente ecuación

$$f(x,y) = 0. \tag{8.4}$$

Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ es solución de (8.4) y se tiene que $D_y f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathscr{L}(Y)$ es biyectiva, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una función continuamente diferenciable $\phi : B_X(\bar{x}, \varepsilon) \longrightarrow Y$ tales que

$$\phi(\bar{x}) = \bar{y} \quad \text{y} \quad f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall\, x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

Además se tiene la fórmula

$$D\phi(x) = [D_y f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x)) \qquad \forall\, x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

Demostración. Definamos la función $\varphi : A \subseteq X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por $\varphi(x,y) = (x, f(x,y))$, es decir, $\varphi(x,y) = (p_X(x,y), f(x,y))$. Entonces, φ es continuamente diferenciable y

$$D\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (p_X, Df(\bar{x}, \bar{y})).$$

Para $d = (d_X, d_Y) \in X \times Y$ se tendrá

$$Df(\bar{x}, \bar{y})(d) = D_X f(\bar{x}, \bar{y})(d_X) + D_Y f(\bar{x}, \bar{y})(d_Y),$$

y como $D\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (p_X, Df(\bar{x}, \bar{y}))$, deducimos que $D\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ es biyectiva, pues

$$[D\varphi(\bar{x}, \bar{y})]^{-1}(u_x, u_Y) = \left(u_x, -\left([D_Y f(\bar{x}, \bar{y})]^{-1} \circ D_X f(\bar{x}, \bar{y})\right)(u_X) + [D_Y f(\bar{x}, \bar{y})]^{-1}(u_Y)\right)$$

para todo $u = (u_X, u_Y) \in X \times Y$ (chequee cuidadosamente la igualdad anterior).

Por lo tanto, existirá un abierto $V \subseteq X \times Y$ que contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que $\varphi : V \subseteq X \times Y \longrightarrow \varphi(V)$ es biyectiva y φ^{-1} es diferenciable en una vecindad de $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{x}, \bar{y})) = (\bar{x}, 0)$. Además, por el teorema de la función inversa,

$$D[\varphi^{-1}](\varphi(x,y)) = [D\varphi(x,y)]^{-1} \qquad \forall\ (x,y) \in V.$$

Para $v = (v_x, v_y) \in X \times Y$ denotemos

$$\varphi^{-1}(v_x, v_y) = (\varphi_X^{-1}(v_x, v_y), \varphi_Y^{-1}(v_x, v_y)).$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(\bar{x}, \varepsilon) \times B_Y(\bar{y}, \varepsilon) \subseteq V$. Definamos $\phi : B_X(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq X \longrightarrow Y$ por

$$\phi(x) = \varphi_Y^{-1}(x, 0) = \varphi_Y^{-1}(r_X(x)).$$

Como $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, 0)$ se tendrá

$$\varphi^{-1}(\bar{x}, 0) = (\bar{x}, \bar{y}) = (\varphi_X^{-1}(\bar{x}, 0), \underbrace{\varphi_Y^{-1}(\bar{x}, 0)}_{=\phi(\bar{x})}).$$

Por lo tanto, $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$. Por otro lado, para $x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$ se tiene

$$(x,0) = \varphi(\varphi^{-1}(x,0)) = \varphi(\varphi_X^{-1}(x,0), \varphi_Y^{-1}(x,0)) = (\varphi_X^{-1}(x,0), f(\varphi_X^{-1}(x,0), \varphi_Y^{-1}(x,0))),$$

es decir,

$$\varphi_X^{-1}(x,0) = x \quad \text{y} \quad f(\varphi_X^{-1}(x,0), \varphi_Y^{-1}(x,0)) = f(x, \phi(x)) = 0 \qquad \forall\ x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

Finalmente, como $\phi(x) = \varphi_Y^{-1}(r_X(x))$, se tiene

$$D\phi(x) = D\varphi_Y^{-1}(r_X(x)) \circ r_X,$$

que implica

$$D\phi(x)(d_X) = D\varphi_Y^{-1}(r_X(x))(d_X, 0).$$

Como $r_X(x) = (x, 0) = \varphi(x, \phi(x))$, entonces

$$D\phi(x)(d_X) = D\varphi_Y^{-1}(\varphi(x, \phi(x)))(d_X, 0) = [D\varphi(x, \phi(x))]_2^{-1}(d_X, 0) =$$

$$= -\left([D_y f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x))\right)(d_X) \qquad \forall\ d_X \in X,$$

de donde se obtiene

$$D\phi(x) = -\left([D_y f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x))\right) \qquad \forall\ x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon).$$

■

8.5 Diferencial de orden superior

Para finalizar la segunda parte de este texto, dedicada a los espacios vectoriales normados, introduciremos brevemente el concepto de diferencial de orden superior. No profundizaremos en este término, de hecho solo hablaremos del diferencial de orden dos, entendiendo que podemos aumentar el orden siguiendo los mismos procedimientos.

Definición 8.5.1 — Diferencial de orden dos. Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $\emptyset \neq A \subseteq X$ un conjunto abierto. Una función $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ se dice es **dos veces Fréchet diferenciable** en $\bar{x} \in A$, si es Fréchet diferenciable en $\bar{x}$ y la función $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ también es Fréchet diferenciable en $\bar{x}$.

En este caso, el diferencial de orden dos de la función f en $\bar{x}$ será el operador lineal continuo $D^2 f(\bar{x}) : X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ dado por

$$D^2 f(\bar{x}) = D[Df](\bar{x}) \in \mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y)).$$

Se dirá que f es de clase $\mathscr{C}^2$ si f y la función Df son de clase $\mathscr{C}^1$ o, dicho de otra forma, si las funciones $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ y $D^2 f : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,Y))$ son continuas.

De acuerdo a la anterior definición, uno puede definir los diferenciales de orden superior de manera inductiva.

Supongamos ahora $Y = \mathbb{R}$ y $f : A \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces Fréchet diferenciable en A.

Para $\bar{x} \in A$ y $d \in X$ definamos la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = f(\bar{x} + td).$$

Entonces, por el teorema fundamental del cálculo se tendrá

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt,$$

donde $\varphi'(t) = Df(\bar{x} + td)(d)$.

Como $Df : A \subseteq X \longrightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ es Fréchet diferenciable en $\bar{x}$, se tiene que

$$\lim_{d \to 0} \frac{Df(\bar{x}+d) - Df(\bar{x}) - D^2 f(\bar{x})(d)}{\|d\|} = 0,$$

es decir, para $d,h \in X$ se tendrá

$$\lim_{t \to 0} \frac{Df(\bar{x}+td)(h) - Df(\bar{x})(h) - tD^2 f(\bar{x})(d)(h)}{t\|d\|} = 0. \tag{8.5}$$

Lo anterior quiere decir que $Df(\bar{x}+td)(h)$ se puede escribir como

$$Df(\bar{x}+td)(h) = Df(\bar{x})(h) + tD^2 f(\bar{x})(d)(h) + o(td)(h),$$

donde la función $o : X \longrightarrow X^*$ satisface $o(0) = 0$ y

$$o(d)/\|d\| \to 0 \quad \text{(límite en } X^*\text{)},$$

cuando $d \to 0$. De hecho, de acuerdo a (8.5), estamos tomando

$$o(d) = Df(\bar{x}+d) - Df(\bar{x}) - D^2 f(\bar{x})(d) \in X^*.$$

Para $d \in X$ veamos que la función

$$o^2(d) = \int_0^1 o(td)(d)dt$$

satisface

$$\lim_{d\to 0} \frac{o^2(d)}{\|d\|_X^2} = 0 \ \text{ (límite en } \mathbb{R}\text{)}.$$

Como $o(d)/\|d\| \to 0$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|o(d)\|_{X^*} \leq 2\varepsilon\|d\| \qquad \forall\, d \in B_X(0,\delta).$$

Por lo tanto, para todo $d \in B_X(0,\delta)$ se tiene

$$|o^2(d)| \leq \int_0^1 |o(td)(d)|dt \leq \int_0^1 \|o(td)\|_{X^*}\|d\|_X dt \leq \int_0^1 2\varepsilon t\|d\|_X^2 = \varepsilon\|d\|_X^2,$$

que implica

$$\frac{|o^2(d)|}{\|d\|_X^2} \leq \varepsilon \qquad \forall\, d \in B_X(0,\delta),$$

concluyendo lo que deseamos.

Recordemos que $\varphi(t) = f(\bar{x}+td)$ y entonces teníamos

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt \ \Leftrightarrow \ f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + \int_0^1 Df(\bar{x}+td)(d)dt$$

$$\Rightarrow \ f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + \int_0^1 \left(Df(\bar{x})(d) + tD^2 f(\bar{x})(d)(d) + o(td)(d)\right) dt,$$

de donde deducimos

$$f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(d) + \frac{1}{2}D^2 f(\bar{x})(d)(d) + o^2(d).$$

Escribiendo $d = x - \bar{x}$ en la anterior igualdad, se tiene

$$f(x) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})(x-\bar{x}) + o^2(x-\bar{x}),$$

que es una aproximación de segundo orden de f en torno a $\bar{x}$.

Si $X = \mathbb{R}^n$ y consideramos el producto punto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en ese espacio, se tiene que $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert, por lo que $Df(\bar{x})$ se identifica con $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, el operador $D^2 f(\bar{x}) \in \mathscr{L}(X,\mathscr{L}(X,\mathbb{R})) = \mathscr{L}(X,X^*) = \mathscr{L}(X,X) = \mathscr{L}(X)$ se identifica con la matriz Hessiana (matriz en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$). Por lo tanto, la aproximación anterior se escribe

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle\nabla f(\bar{x}),(x-\bar{x})\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x}),(x-\bar{x})\rangle + o^2(x-\bar{x}).$$

Ejercicio 8.10 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces Fréchet diferenciable. Si para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $D^2 f(\bar{x})(d)(d) > 0$ para todo $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, demuestre que $\bar{x}$ es un mínimo local de f, es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in B_X(\bar{x}, \delta).$$

Ejercicio 8.11 Sea $(X, \|\cdot\|))$ un espacio vectorial normado y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces Fréchet diferenciable. Si para $\bar{x} \in X$ se tiene que $Df(\bar{x}) = 0$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $D^2 f(x)(d)(d) \geq 0$ para todo $x \in B_X(\bar{x}, \varepsilon)$ y $d \in X$, demuestre que $\bar{x}$ es un mínimo local de f.

Ejercicios resueltos

(E1) Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tres espacios vectoriales normados y $b : X \times Y \longrightarrow Z$ una función bilineal, es decir, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ fijos, las funciones $b(\cdot, y) : X \longrightarrow Z$ y $b(x, \cdot) : Y \longrightarrow Z$ son lineales.

a) Demuestre que si b es continua en $(0,0) \in X \times Y$, entonces existe $L \geq 0$ tal que

$$\|b(x,y)\|_Z \leq L\|x\|_X \; \|y\|_Y \qquad \forall\, (x,y) \in X \times Y. \tag{8.6}$$

Solución: Si b es continua en $(0,0)$, para $\varepsilon = 1$ existirá $\delta > 0$ tal que

$$\text{máx}\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \leq \delta \;\Rightarrow\; \|b(x,y)\|_Z \leq 1.$$

Sean $x \in X \setminus \{0\}$ e $y \in Y \setminus \{0\}$. Al definir $\tilde{x} = \delta x / \|x\|_X$ y $\tilde{y} = \delta y / \|y\|_Y$, se tendrá

$$\text{máx}\{\|\tilde{x}\|_X, \|\tilde{y}\|_Y\} \leq \delta,$$

por lo tanto,

$$\|b(\tilde{x}, \tilde{y})\|_Z \leq 1.$$

Por la bilinealidad de b obtenemos

$$b(\tilde{x}, \tilde{y}) = \delta^2 \frac{b(x,y)}{\|x\|_X \; \|y\|_Y},$$

concluyendo entonces

$$\|b(x,y)\|_Z \leq L\|x\|_X \; \|y\|_Y \qquad \forall\, (x,y) \in X \times Y,$$

donde $L = 1/\delta^2$.

b) Pruebe que si existe $L \geq 0$ tal que (8.6) se tiene, entonces b es continua en todo elemento $(x,y) \in X \times Y$.

Solución: Sea $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que

$$L\delta(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| + \delta) < \varepsilon.$$

Si $\max\{\|x-\bar{x}\|_X, \|y-\bar{y}\|_Y\} \leq \delta$, entonces, por la bilinealidad de b y la relación (8.6), se tendrá

$$\|b(\bar{x},\bar{y}) - b(x,y)\|_Z = \|b(\bar{x},\bar{y}-y) + b(\bar{x}-x,y)\|_Z \leq L(\|\bar{x}\|_X \|\bar{y}-y\|_Y + \|\bar{x}-x\|_X \|y\|_Y).$$

Por lo tanto,

$$\|b(\bar{x},\bar{y}) - b(x,y)\|_Z \leq L\delta(\|\bar{x}\|_X + \|y\|_Y) \leq L\delta(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| + \delta) < \varepsilon,$$

lo que nos permite concluir que b es continua en $(\bar{x},\bar{y})$.

(E2) Considere un espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y una sucesión de conjuntos convexos cerrados $C_k \subseteq H$ tales que $C_{k+1} \subseteq C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k \neq \emptyset.$$

Dado $\bar{x} \in H$, para $k \in \mathbb{N}$ se define x_k como la proyección de $\bar{x}$ sobre el conjunto C_k, es decir, $x_k \in C_k$ y además

$$\|x_k - \bar{x}\| = d_{C_k}(\bar{x}) := \inf_{x\in C_k} \|x-\bar{x}\|.$$

a) Pruebe que $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_{C_{k+1}}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, existe $d^* \in \mathbb{R}$ con $d^* \leq d_C(\bar{x})$ tal que $d_{C_k}(\bar{x}) \to d^*$.

Solución: Como $C \subseteq C_{k+1} \subseteq C_k$, se deduce $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_{C_{k+1}}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pues si $A \subseteq B$, entonces el ínfimo sobre B es menor o igual que el ínfimo sobre A. Al ser $d_{C_k}(\bar{x})$ una sucesión creciente y acotada superiormente en $\mathbb{R}$, existirá $d^* \in \mathbb{R}$ tal que $d_{C_k}(\bar{x}) \to d^*$. Finalmente, como $d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$, se tendrá $d^* \leq d_C(\bar{x})$.

b) Demuestre que para todo $n \geq k$ se tendrá

$$\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\| \geq d_{C_k}(\bar{x})$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_k\|^2 = d_{C_n}^2(\bar{x}) + d_{C_k}^2(\bar{x}) - 2\left\|\frac{x_k + x_n}{2} - \bar{x}\right\|^2 \leq d_{C_n}^2(\bar{x}) - d_{C_k}^2(\bar{x}) \qquad \forall\, n \geq k.$$

Solución: Para $n \geq k$ se tiene $x_n \in C_k$. Como $x_k \in C_k$ y C_k es un conjunto convexo, se deduce

$$\frac{x_k + x_n}{2} \in C_k,$$

concluyendo

$$\left\|\frac{x_k+x_n}{2}-\bar{x}\right\| \geq d_{C_k}(\bar{x}).$$

Por otro lado, por la ley del paralelogramo (ver Ejercicio 7.1) se deduce

$$\frac{1}{2}\|x_n-x_k\|^2 = \|x_n-\bar{x}\|^2+\|x_k-\bar{x}\|^2-2\left\|\frac{x_k+x_n}{2}-\bar{x}\right\|^2 = d_{C_n}^2(\bar{x})+d_{C_k}^2(\bar{x})-2\left\|\frac{x_k+x_n}{2}-\bar{x}\right\|^2,$$

que, en conjunto con la desigualdad antes obtenida, permite concluir

$$\frac{1}{2}\|x_n-x_k\|^2 \leq d_{C_n}^2(\bar{x})-d_{C_k}^2(\bar{x}) \qquad \forall\, n \geq k. \tag{8.7}$$

c) Concluya que existe $x^* \in C$ tal que $x_k \to x^*$ y además, x^* corresponde a la proyección de $\bar{x}$ sobre C.

Solución: De la desigualdad (8.7), se deduce que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es un Hilbert, existirá $x^* \in H$ tal que $x_k \to x^*$. Además, como para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in C_k$ para todo $n \geq k$ y C_k es cerrado, deducimos que $x^* \in C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $x^* \in C$.

Finalmente, como $\|x_k-\bar{x}\| = d_{C_k}(\bar{x}) \leq d_C(\bar{x})$, se tiene

$$\|x^*-\bar{x}\| \leq d_C(\bar{x}) \leq \|x^*-\bar{x}\|,$$

donde la última desigualdad es debido a que $x^* \in C$, concluyendo entonces que x^* es la proyección de $\bar{x}$ sobre C.

(E3) Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Para un conjunto $C \subseteq H$ se define su *polar* mediante

$$C^\circ := \{x^* \in H \mid \langle x,x^*\rangle \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in C\}.$$

a) Demuestre que para todo $C \subseteq H$ se tiene que C° es un conjunto convexo cerrado de H y además $0 \in C^\circ$.

Solución: Sean $x^*,\ y^* \in C^\circ$ y $\lambda \in [0,1]$. Para $x \in C$ se tendrá

$$\langle x,\lambda x^*+(1-\lambda)y^*\rangle = \lambda\langle x,x^*\rangle+(1-\lambda)\langle x,y^*\rangle \leq \lambda+(1-\lambda) = 1.$$

Por lo tanto $\lambda x^*+(1-\lambda)y^* \in C^\circ$, probando así la convexidad de C°.

Como $\langle 0,x\rangle = 0 \leq 1$ para todo $x \in C$, se tiene $0 \in C^\circ$. Finalmente, dada una sucesión $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^\circ$ convergente a x^*, para $x \in C$ se tiene $\langle x,x_k^*\rangle \leq 1$, por lo tanto $\langle x,x^*\rangle \leq 1$ para todo $x \in C$, es decir, $x^* \in C^\circ$, probando de esta manera que C° es cerrado.

b) Pruebe que $C \subseteq (C^\circ)^\circ$.

Solución: Sea $x \in C$. Por la definición de C° se tiene que $\langle x,x^*\rangle \leq 1$ para todo $x^* \in C^\circ$, por lo tanto, $x \in (C^\circ)^\circ$.

c) Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, demuestre que si $x \notin C$, entonces existe $\bar{x} \in H \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle x, \bar{x} \rangle > 1 \geq \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall\, y \in C,$$

concluyendo que $\bar{x} \in C^{\circ}$.

Solución: Si $x \notin C$, por el Teorema de Hahn-Banach (ver Corolario 6.3.7), existe $\bar{z} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle x, \bar{z} \rangle > \alpha \geq \langle y, \bar{z} \rangle \qquad \forall\, y \in C.$$

Como $0 \in C$, de la segunda desigualdad deducimos $\alpha \geq 0$ y, por lo tanto, $\langle x, \bar{z} \rangle > 0$. Definiendo $\bar{x} = 2\bar{z}/\langle x, \bar{z} \rangle$ se obtiene

$$\langle x, \bar{x} \rangle > 1 \geq \langle y, \bar{x} \rangle \qquad \forall\, y \in C,$$

de donde se deduce $\bar{x} \in C^{\circ}$.

d) Si $0 \in C$ y además C es convexo y cerrado, pruebe que $C = (C^{\circ})^{\circ}$.

Solución: Sea $x \in (C^{\circ})^{\circ}$. Si $x \notin C$, por la parte anterior existirá $\bar{x} \in C^{\circ}$ tal que $\langle x, \bar{x} \rangle > 1$, lo que es una contradicción con el hecho de que x esté en $(C^{\circ})^{\circ}$. Por lo tanto, $x \in C$. De la inclusión demostrada en la segunda parte, se concluye $C = (C^{\circ})^{\circ}$.

(E4) Sea $X = \mathbb{R}^n$ dotado de la norma Euclidiana. Para $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, calcule la función $P_C(x)$, proyección de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre el conjunto C, el cual está definido por:

$$C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \cdots = x_m = 0 \text{ y } x_{m+1}, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Solución: De manera directa se tiene que C es un conjunto convexo no vacío, pues $(0, \ldots, 0) \in C$ y para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en C y $\alpha \in [0,1]$, se tiene que $\alpha x_j + (1-\alpha) y_j = 0$ para $1 \leq j \leq m$ y $\alpha x_j + (1-\alpha) y_j \geq 0$ para $m+1 \leq j \leq n$. La cerradura de C se obtiene del hecho que C es un producto de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$, pues

$$C = \{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+.$$

Entonces, dado que C es un convexo cerrado no vacío, la función $P_C(\cdot)$ está bien definida (ver Corolario 7.3.5).

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, probemos que $P_C(x) = (y_j)_{j=1,\ldots,n}$, dado por

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ \text{máx}\{0, x_j\} & \text{si } m+1 \leq j \leq n, \end{cases} \tag{8.8}$$

es la proyección de x sobre C. Primero observe que $P_C(x) \in C$. Luego, utilizaremos la caracterización de la proyección sobre un convexo cerrado (ver Proposición 7.3.6) dada por

$$\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0 \qquad \forall\, z = (z_1, \ldots, z_n) \in C.$$

El producto escalar se escribe como

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)(z_j - y_j) = \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)(z_j - y_j) + \sum_{j=m+1}^{n} (x_j - y_j)(z_j - y_j) = \sum_{j=m+1}^{n} (x_j - y_j)(z_j - y_j),$$

donde y_j está dado por (8.8). En la anterior expresión, se ha eliminado la sumatoria de $j=1$ hasta $j=m$ dado que para esos índices se tiene $z_j=y_j=0$. Para los $j=m+1,\dots,n$ se tiene que $(x_j-y_j)(z_j-y_j)=(x_j-\text{máx}\{0,x_j\})(z_j-\text{máx}\{0,x_j\})$. Por lo tanto, si $x_j\geq 0$ obtenemos

$$(x_j-\text{máx}\{0,x_j\})(z_j-\text{máx}\{0,x_j\})=0,$$

y si $x_j<0$ se obtiene

$$(x_j-\text{máx}\{0,x_j\})(z_j-\text{máx}\{0,x_j\})=x_jz_j\leq 0.$$

En consecuencia

$$\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle=\sum_{j=m+1}^{n}(x_j-y_j)(z_j-y_j)\leq 0,$$

para todo $z\in C$, concluyendo que efectivamente $P_C(x)$ dado por (8.8) es la proyección de x sobre el conjunto C.

(E5) Sean $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $T:X\longrightarrow Y$ una función lineal continua. Si X es Banach y existe $c>0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y\geq c\|x\|_X \qquad \forall\, x\in X, \tag{P2}$$

demuestre que la imagen o rango de T es un subespacio vectorial cerrado de Y.

Solución: Dado que T es una función lineal, inmediatamente se tiene que

$$\text{Im}(T):=\{T(x)\mid x\in X\}\subseteq Y$$

es un subespacio vectorial. Probemos que es cerrado. Para ello, consideremos una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\text{Im}(T)$ tal que $y_k\to y$ para algún $y\in Y$. Debemos probar que $y\in\text{Im}(T)$.

Para cada $k\in\mathbb{N}$, se tiene que existe $x_k\in X$ tal que $y_k=T(x_k)$. Como $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, será una sucesión de Cauchy, por lo tanto, para $\varepsilon>0$ existirá $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|y_k-y_{k'}\|_Y=\|T(x_k)-T(x_{k'})\|_Y\leq\varepsilon/c \qquad k,k'\geq k_0.$$

Por (P2), se tendrá

$$\|x_k-x_{k'}\|_X\leq\varepsilon \qquad k,k'\geq k_0,$$

y, por lo tanto, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq X$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es Banach, existe $x\in X$ tal que $x_k\to x$. Por la continuidad de T, concluimos que $y_k=T(x_k)\to T(x)=y$, demostrando así que $y\in\text{Im}(T)$, es decir, $\text{Im}(T)$ es cerrado.

(E6) Sean $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert y $A:X\longrightarrow Y$ una función lineal continua, es decir, $A\in\mathscr{L}(X,Y)$.

a) Para $y\in Y$ se define el operador $\ell:X\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por

$$\ell(x)=\langle Ax,y\rangle_Y \qquad \forall\, x\in X.$$

Pruebe que $\ell \in \mathscr{L}(X,\mathbb{R}) = X^*$ y que existe un único $w_y \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle Ax, y\rangle_Y = \langle w_y, x\rangle_X \qquad \forall\, x \in X. \tag{8.9}$$

Solución: Para $y \in Y$ (fijo), comencemos por probar que $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Dados $x,\ x' \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\ell(x+\lambda x') = \langle A(x+\lambda x'), y\rangle_Y = \langle Ax, y\rangle_Y + \lambda \langle Ax', y\rangle_Y = \ell(x) + \lambda \ell(x'),$$

probando así que ℓ es una función lineal. Demostremos es una función lineal continua. Para ello, observamos que

$$|\ell(x)| = |\langle Ax, y\rangle_Y| \leq \|Ax\|_Y\ \|y\|_Y \leq (\|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\ \|y\|_Y)\ \|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto, existe $M = \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\ \|y\|_Y \geq 0$ tal que

$$|\ell(x)| \leq M\ \|x\|_X \qquad \forall\, x \in X,$$

probando así que $\ell \in X^*$. Finalmente, por el teorema de representación de Riesz, se tendrá que existe un único $w_y \in X$ tal que

$$\ell(x) = \langle w_y, x\rangle_X \qquad \forall\, x \in X.$$

b) Considere la función $A^* : Y \longrightarrow X$ definida por $A^*y = w_y$ donde, para $y \in Y$, el elemento $w_y \in X$ es el único que satisface (8.9), determinado en la parte anterior. Pruebe que $A^* \in \mathscr{L}(Y,X)$ y que

$$\|A^*\|_{\mathscr{L}(Y,X)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.$$

Solución: Demostremos que $A^* : Y \longrightarrow X$ es lineal. Dados $y,\ y' \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $A^*(y+\lambda y') = w_{y+\lambda y'}$, donde (de la parte anterior) sabemos que $w_{y+\lambda y'} \in X$ es el único elemento que satisface

$$\langle w_{y+\lambda y'}, x\rangle_X = \langle Ax, y+\lambda y'\rangle_Y = \langle Ax, y\rangle_Y + \lambda \langle Ax, y'\rangle_Y \qquad \forall\, x \in X.$$

También de la parte anterior, sabemos que $A^*y = w_y$ y $A^*y' = w_{y'}$ son los únicos elementos que

$$\langle w_y, x\rangle_X = \langle Ax, y\rangle_Y \quad \text{y} \quad \langle w_{y'}, x\rangle_X = \langle Ax, y'\rangle_Y \qquad \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto,

$$\langle w_{y+\lambda y'}, x\rangle_X = \langle w_y, x\rangle_X + \lambda \langle w_{y'}, x\rangle_X \qquad \forall\, x \in X,$$

concluyendo así que $A^*(y+\lambda y') = w_{y+\lambda y'} = w_y + \lambda w_{y'} = A^*y + \lambda A^*y'$, lo que prueba la linealidad de A^*.

Para probar la continuidad de A^* se tendrá que

$$\|A^*y\|_X^2 = \langle A^*y, A^*y\rangle_X = \langle y, A(A^*y)\rangle_Y \leq \|y\|_Y\ \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\ \|A^*y\|_X \qquad \forall\, y \in Y.$$

Por lo tanto

$$\|A^*y\|_X \leq \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\ \|y\|_Y \qquad \forall\, y \in Y,$$

de donde se deduce la continuidad de A^* y la desigualdad

$$\|A^*\|_{\mathscr{L}(Y,X)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.$$

c) Pruebe que existe un único $A^* \in \mathscr{L}(Y,X)$ que satisface

$$\langle Ax,y\rangle_Y = \langle A^*y,x\rangle_X \qquad \forall\, x\in X,\ \forall\, y\in Y,$$

y que

$$\|A^*\|_{\mathscr{L}(Y,X)} = \|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)}.$$

Solución: La existencia de $A^* \in \mathscr{L}(Y,X)$ ya está demostrada en el punto anterior. Probemos entonces la unicidad de A^*. Si existen A_1^* y A_2^* tales que

$$\langle Ax,y\rangle_Y = \langle A_1^*y,x\rangle_X = \langle A_2^*y,x\rangle_X \ \Rightarrow\ \langle (A_1^*-A_2^*)y,x\rangle_X = 0 \qquad \forall\, x\in X,\ \forall\, y\in Y,$$

para $y\in Y$ definimos $x=(A_1^*-A_2^*)y$, obteniéndose

$$\|(A_1^*-A_2^*)y\|_X^2 = \langle (A_1^*-A_2^*)y,(A_1^*-A_2^*)y\rangle_X = 0 \qquad \forall\, y\in Y.$$

Por lo tanto $A_1^*=A_2^*$.

Como $A^*: Y\longrightarrow X$ está en $\mathscr{L}(Y,X)$, siguiendo lo ya hecho hasta ahora, sabemos existe $A^{**}: X\longrightarrow Y$ que estará en $\mathscr{L}(X,Y)$ tal que

$$\langle A^*y,x\rangle_X = \langle A^{**}x,y\rangle_Y \qquad \forall\, x\in X,\ \forall\, y\in Y$$

y

$$\|A^{**}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \le \|A^*\|_{\mathscr{L}(Y,X)}.$$

Dado que

$$\langle Ax,y\rangle_Y = \langle A^*y,x\rangle_X \qquad \forall\, x\in X,\ \forall\, y\in Y,$$

deducimos que $A=A^{**}$ concluyendo

$$\|A\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathscr{L}(Y,X)}.$$

(E7) Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(X^*,\|\cdot\|_*)$ su espacio dual, dotado de la norma

$$\|\ell\|_* = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\ell(x)}{\|x\|} = \sup_{x\in B[0,1]} \ell(x) \qquad \forall\, \ell\in X^*,$$

donde $B[0,1]$ es la bola cerrada de centro 0 y radio unitario en X.

a) Pruebe que para todo $M>0$ se tiene

$$\sup_{x\in B[0,M]} \ell(x) = M\|\ell\|_* \qquad \forall\, \ell\in X^*.$$

Solución: Para $M>0$ se tiene que

$$\sup_{x\in B[0,M]} \ell(x) = \frac{M}{M}\sup_{x\in B[0,M]} \ell(x) = M\sup_{x\in B[0,M]} \ell(x/M) = M\sup_{Mz\in B[0,M]} \ell(z) =$$

$$= M\sup_{z\in B[0,1]} \ell(z) = M\|\ell\|_* \qquad \forall\, \ell\in X^*.$$

b) Demuestre la siguiente desigualdad

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\, x \in X.$$

Solución: Para todo $\ell \in X^*$ se tiene que

$$\|\ell\|_* \|x\|_X \geq \ell(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto,

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\, x \in X.$$

c) Suponga que existe $x \in X$ tal que

$$\|x\| > \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} =: R_x. \tag{8.10}$$

Para $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x\| > R_x + \varepsilon,$$

demuestre que existe $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\ell^*(x) > (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_*.$$

Solución: Si para $x \in X$ se tiene (8.10) y dado $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| > R_x + \varepsilon$, entonces x no está en el conjunto convexo cerrado $B[0, R_x + \varepsilon]$. Por el Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existen $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell^*(x) > \alpha \geq \ell^*(z) \qquad \forall\, z \in B[0, R_x + \varepsilon].$$

Es decir

$$\ell^*(x) > \alpha \geq \sup_{z \in B[0, R_x + \varepsilon]} \ell^*(z) = (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_*,$$

donde la última igualdad se obtiene de la primera parte de este problema.

d) Concluya que para todo $x \in X$, se tiene la igualdad

$$\|x\| = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*}.$$

Solución: Por la segunda parte de este problema, sabemos que

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} = R_x \qquad \forall\, x \in X.$$

Si la desigualdad fuese estricta para algún $x \in X$, por la parte anterior deducimos que para $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| > R_x + \varepsilon$, se tendrá que existe $\ell^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\ell^*(x) > (R_x + \varepsilon)\|\ell^*\|_* > R_x\|\ell^*\|_*,$$

es decir,

$$\frac{\ell^*(x)}{\|\ell^*\|_*} > R_x = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, para todo $x \in X$ se tiene la igualdad

$$\|x\| = \sup_{\ell \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*}.$$

(E8) Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ e $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert.

a) Para $\bar{x} \in X$ se define la función $f : \mathscr{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(L) = \langle L(\bar{x}), L(\bar{x}) \rangle_X \qquad \forall\, L \in \mathscr{L}(X).$$

Pruebe que f es Gâteaux diferenciable y para $L,\ T \in \mathscr{L}(X)$ calcule $Df(L;T)$.

Solución: Probemos que f es Gâteaux diferenciable. Para $L,\ T \in \mathscr{L}(X)$ se tendrá

$$Df(L;T) = \lim_{t \to 0} \frac{f(L+tT) - f(L)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\langle (L+tT)(\bar{x}), (L+tT)(\bar{x}) \rangle_X - \langle L(\bar{x}), L(\bar{x}) \rangle_X}{t}.$$

Por la bilinealidad y simetría del producto interno y la linealidad de las funciones L y T obtenemos

$$Df(L;T) = \lim_{t \to 0} \frac{2t \langle L(\bar{x}), T(\bar{x}) \rangle_X + t^2 \langle T(\bar{x}), T(\bar{x})}{t} = 2\langle L(\bar{x}), T(\bar{x}) \rangle_X.$$

Como la función $Df(L;\cdot) : \mathscr{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Df(L;T) = 2\langle L(\bar{x}), T(\bar{x}) \rangle_X \qquad \forall\, T \in \mathscr{L}(X)$$

es lineal continua (composición de funciones continuas), se deduce que f es Gâteaux diferenciable en todo $L \in \mathscr{L}(X)$.

b) Sea $h : X \longrightarrow Y$ una función Gâteaux diferenciable tal que $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in X$. Para $d \in X$, calcule $Dh(0;d)$ y demuestre que $h \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Solución: Como $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $h(0) = 0$ y $h(td) = th(d)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $d \in X$. Considerando lo anterior, calculemos $Dh(0;d)$ para $d \in X$:

$$Dh(0;d) = \lim_{t \to 0} \frac{h(td) - h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{th(d)}{t} = h(d).$$

Como h es Gâteaux diferenciable de acuerdo al enunciado, se tiene que $Dh(0;\cdot) = h(\cdot)$ está en $\mathscr{L}(X,Y)$, probando así lo requerido.

c) Suponga ahora que $X = \mathbb{R}^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ es el producto punto usual en $\mathbb{R}^n$. Para $S \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ (matriz simétrica de $n \times n$) se define la función $g : X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{\langle Sx, x \rangle_X}{\langle x, x \rangle_X} \qquad \forall\, x \in X \setminus \{0\}.$$

Para $x \in X \setminus \{0\}$ calcule $\nabla g(x) \in X$ y pruebe que $\nabla g(x) = 0$ si y solamente si, x es un *vector propio* de la matriz S.

Solución: Primero probemos que la función g es una división de funciones Fréchet diferenciables. De hecho,

$$g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

donde $g_1,\ g_2 : X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$g_1(x) = \langle Sx, x\rangle_X \quad \text{y} \quad g_2(x) = \langle x, x\rangle_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Para la función g_1 veamos que su diferencial de Fréchet en $x \in X$ viene dado por

$$Dg_1(x)(d) = 2\langle Sx, d\rangle_X \qquad \forall\, d \in X.$$

Para probar esto, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y viendo a la matriz S como un elemento de $\mathscr{L}(X)$, se tendrá que existe $M \geq 0$ tal que $\|Sd\|_X \leq M\|d\|_X$ y, por lo tanto,

$$|\langle Sd, d\rangle_X| \leq M\|d\|_X^2 \qquad \forall\, d \in X.$$

Adicionalmente, como S es una matriz simétrica, se tendrá

$$\langle Sd, x\rangle_X = \langle d, Sx\rangle_X \qquad \forall\, x,\ d \in X.$$

Por lo tanto

$$\left| \frac{\langle S(x+d), x+d\rangle_X - \langle Sx, x\rangle_X - 2\langle Sx, d\rangle_X}{\|d\|_X} \right| \leq M\|d\|_X.$$

Lo anterior implica

$$\lim_{d\to 0} \frac{\langle S(x+d), x+d\rangle_X - \langle Sx, x\rangle_X - 2\langle Sx, d\rangle_X}{\|d\|_X} = 0,$$

probando así que g_1 es Fréchet diferenciable y $Dg_1(x)(d) = 2\langle Sx, d\rangle_X$. Considerando S la matriz identidad, de igual forma probamos que g_2 es Fréchet diferenciable y que $Dg_2(x)(d) = 2\langle x, d\rangle_X$.

De esta forma, se tiene que la función g es Fréchet diferenciable en los elementos donde g_2 no se anula, obteniendo

$$Dg(x)(d) = \frac{g_2(x)Dg_1(x)(d) - g_1(x)Dg_2(x;d)}{g_2^2(x)} = 2\frac{(\langle x, x\rangle_X\ \langle Sx, d\rangle_X - \langle Sx, x\rangle_X \langle x, d\rangle_X)}{(\langle x, x\rangle_X)^2}$$

para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Como $Dg(x)(\cdot)$ es una función lineal continua de X en $\mathbb{R}$, es decir, $Dg(x) \in X^*$ y X es un espacio de Hilbert, se puede encontrar un representante de $Dg(x)$ en X, que es el denominado gradiente de g en X y que se denota por $\nabla g(x)$. De la expresión anterior, definiendo

$$\nabla g(x) = \frac{2}{(\langle x, x\rangle_X)^2}(\langle x, x\rangle_X\ Sx - \langle Sx, x\rangle_X\ x) \in X,$$

observamos que

$$Dg(x)(d) = \langle \nabla g(x), d\rangle_X \qquad \forall\, d \in X.$$

Finalmente, se tendrá

$$\nabla g(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle_X \; Sx = \langle Sx,x\rangle_X \; x \Leftrightarrow Sx = \frac{\langle Sx,x\rangle_X}{\langle x,x\rangle_X} x,$$

de donde se deduce que si $\nabla g(x) = 0$ entonces x es vector propio de S. Por otro lado, si x es vector propio de S, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Sx = \lambda x$ y, por lo tanto,

$$\nabla g(x) = \frac{2}{(\langle x,x\rangle_X)^2}(\langle x,x\rangle_X \; Sx - \langle Sx,x\rangle_X \; x) = \frac{2}{(\langle x,x\rangle_X)^2}(\langle x,x\rangle_X \; \lambda x - \langle \lambda x,x\rangle_X \; x) = 0.$$

(E9) Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(X^*,\|\cdot\|_*)$ su espacio dual.

a) Considere dos sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ y los elementos $\bar{x} \in X$ y $\bar{\ell} \in X^*$ tales que

$$x_k \to \bar{x} \quad \text{ y } \quad \ell_k(z) \to \bar{\ell}(z) \quad \forall\, z \in X.$$

Demuestre que $\ell_k(x_k) \to \bar{\ell}(\bar{x})$.

Solución: Como $\ell_k(z) \to \bar{\ell}(z)$ para todo $z \in X$, se tendrá

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\ell_k(z)| < +\infty \qquad \forall\, z \in X.$$

Como $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 6.2.1) se tendrá que existe $M > 0$ tal que

$$\|\ell_k\|_* \leq M \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma en el espacio dual X^*. Por lo tanto

$$\begin{aligned}|\ell_k(x_k) - \bar{\ell}(\bar{x})| &\leq |\ell_k(x_k) - \ell_k(\bar{x})| + |\ell_k(\bar{x}) - \bar{\ell}(\bar{x})| = |\ell_k(x_k - \bar{x})| + |\ell_k(\bar{x}) - \bar{\ell}(\bar{x})| \\ &\leq \|\ell_k\|_* \|x_k - \bar{x}\| + |\ell_k(\bar{x}) - \bar{\ell}(\bar{x})| \leq M\|x_k - \bar{x}\| + |\ell_k(\bar{x}) - \bar{\ell}(\bar{x})| \to 0.\end{aligned}$$

Lo anterior se deduce del hecho que $x_k \to \bar{x}$ (en X) y $\ell_k(\bar{x}) \to \bar{\ell}(\bar{x})$ (en $\mathbb{R}$). Se prueba así que $\ell_k(x_k) \to \bar{\ell}(\bar{x})$.

b) Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión y $\bar{x} \in X$ tal que $\ell(x_k) \to \ell(\bar{x})$ para todo $\ell \in X^*$. Demuestre que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada. Para realizar esto, recuerde que X puede verse como un subconjunto del espacio bi-dual X^{**} y asuma que la norma del bi-dual es equivalente a la norma $\|\cdot\|$.

Solución: Los elementos $x_k \in X$ pueden ser vistos como elementos de X^{**} que operan sobre X^* de la forma $x_k : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $x_k(\ell) = \ell(x_k) \in \mathbb{R}$ para $\ell \in X^*$. Como $\ell(x_k) \to \ell(\bar{x})$ para todo $\ell \in X^*$, se tendrá que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty \qquad \forall\, \ell \in X^*,$$

y dado que $(X^*,\|\cdot\|_*)$ es espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus se tendrá que existe $M > 0$ tal que

$$\|x_k\|_{**} \leq M \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

donde $\|\cdot\|_{**}$ es la norma en el espacio bi-dual X^{**}. Como las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{**}$ son equivalentes, se concluye que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $(X,\|\cdot\|)$.

c) Considere dos sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ y los elementos $\bar{x} \in X$ y $\bar{\ell} \in X^*$ tales que
$$\ell_k \to \bar{\ell} \quad (\text{convergencia en } X^*) \qquad \text{y} \qquad p(x_k) \to p(\bar{x}) \quad \forall\, p \in X^*.$$
Demuestre que $\ell_k(x_k) \to \bar{\ell}(\bar{x})$.

Solución: Por el punto anterior se tendrá que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que
$$\|x_k\| \leq M \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
Por lo tanto
$$|\ell_k(x_k) - \bar{\ell}(\bar{x})| \leq |\ell_k(x_k) - \bar{\ell}(x_k)| + |\bar{\ell}(x_k) - \bar{\ell}(\bar{x})| \leq \|\ell_k - \bar{\ell}\|_* \|x_k\| + |\bar{\ell}(x_k) - \bar{\ell}(\bar{x})|$$
$$\leq M\|\ell_k - \bar{\ell}\|_* + |\bar{\ell}(x_k) - \bar{\ell}(\bar{x})| \to 0.$$
Lo anterior se deduce del hecho que $\ell_k \to \ell$ (en X^*) y $\bar{\ell}(x_k) \to \bar{\ell}(\bar{x})$ (en $\mathbb{R}$, pues $\bar{\ell} \in X^*$).

(E10) Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert, X de dimensión finita y $K \subseteq X$ un *cono*[1] convexo cerrado. Para el cono K se define su polar positivo por
$$K^+ = \{x^* \in X \mid \langle x^*, x\rangle_X \geq 0 \quad \forall\, x \in K\}.$$
Sea $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ un operador lineal continuo e inyectivo y $T^* \in \mathscr{L}(Y,X)$ su *operador adjunto*, es decir,
$$\langle T(x), y\rangle_Y = \langle x, T^*(y)\rangle_X \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

a) Demuestre que el conjunto
$$T(K) = \{y = T(x) \mid x \in K\}$$
es un cono convexo cerrado.

Solución: Para probar que $T(K)$ es un cono, consideremos $y \in T(K)$. Entonces, existirá $x \in K$ tal que $y = T(x)$. Para $\lambda \geq 0$ se tiene que $\lambda y = \lambda T(x) = T(\lambda x)$. Como K es un cono se tiene que $\lambda x \in K$ y, por lo tanto, $\lambda y = T(\lambda x) \in T(K)$, demostrando así que $T(K)$ es un cono. En particular, $0 = T(0) \in T(K)$.

Demostremos que $T(K)$ es convexo. Sean $y_1,\ y_2 \in T(K)$, es decir, existen $x_1,\ x_2 \in K$ tales que $y_1 = T(x_1)$ e $y_2 = T(x_2)$. Para $\alpha \in [0,1]$ se tendrá que
$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha T(x_1) + (1-\alpha)T(x_2) = T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$
Como K es convexo, entonces $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in K$ por lo tanto
$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in T(K)$$
probando así que $T(K)$ es convexo.

Para demostrar que $T(K)$ es cerrado, tomemos una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq T(K)$ convergente a un $\bar{y} \in Y$. Debemos probar que $\bar{y} \in T(K)$. Como $y_k \in T(K)$ existirá $x_k \in K$ tal que

[1] Un conjunto $K \subseteq X$ se dice que es un cono, si $0 \in K$ y si $x \in K$ entonces $\lambda x \in K$ para todo $\lambda \geq 0$.

$y_k = T(x_k)$. Si la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$ es acotada, como X es de dimensión finita existirá una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $\bar{x}$ que estará en K por ser K un conjunto cerrado. En este caso, por la continuidad de T se tendrá

$$\bar{y} = \lim_{j\to\infty} y_{k_j} = \lim_{j\to\infty} T(x_{k_j}) = T(\bar{x}) \in T(K),$$

probando lo requerido.

Si la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$ no es acotada, se tendrá que existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_{k_j}\|_X \to +\infty$. Definiendo

$$w_{k_j} = \frac{x_{k_j}}{\|x_{k_j}\|_X},$$

se observa que $\{w_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq K \cap \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$. Como X es de dimensión finita, el conjunto $\{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$ es compacto y, por lo tanto, existirá una subsucesión de $\{w_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ (que notaremos de igual forma) que converge a $\bar{w} \neq 0$. El elemento $\bar{w}$ no es cero pues debe estar en $\{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$. Sin embargo, como $\{y_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada, se tiene

$$0 = \lim_{j\to\infty} \frac{y_{k_j}}{\|x_{k_j}\|_X} = \lim_{j\to\infty} T(w_{k_j}) = T(\bar{w}),$$

lo que es una contradicción pues T es inyectiva. Se concluye entonces que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$ debe ser acotada y, por lo realizado anteriormente, se prueba que $\bar{y} \in T(K)$.

b) Sea $\bar{y} \in Y$. Si $\bar{y} \in T(K)$ pruebe que no existe $z \in Y$ tal que $T^*(z) \in K^+$ y $\langle \bar{y}, z\rangle_Y < 0$.

Solución: Si existe $z \in Y$ tal que $T^*(z) \in K^+$, entonces

$$\langle z, T(x)\rangle_Y = \langle T^*(z), x\rangle_X \geq 0 \qquad \forall\, x \in K.$$

Es decir,

$$\langle z, y\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall\, y \in T(K).$$

Lo anterior prueba que si $\bar{y} \in T(K)$ no se puede tener $\langle z, \bar{y}\rangle_Y < 0$.

c) Sea $\bar{y} \in Y$. Si $\bar{y} \notin T(K)$, demuestre que existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\langle T(\bar{x}) - \bar{y}, T(\bar{x})\rangle_Y \leq 0$$

y definiendo $z = T(\bar{x}) - \bar{y}$ pruebe que $T^*(z) \in K^+$ y $\langle \bar{y}, z\rangle_Y < 0$.

Solución: Como K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío, existirá una única proyección de $\bar{y}$ sobre $T(K)$. Es decir, existe $\bar{x} \in K$ tal que $T(\bar{x})$ es la proyección de $\bar{y}$ sobre $T(K)$. Como $\bar{y} \notin T(K)$, entonces $T(\bar{x}) \neq \bar{y}$. Por la caracterización de la proyección se tendrá

$$\langle \bar{y} - T(\bar{x}), T(x) - T(\bar{x})\rangle_Y \leq 0 \qquad \forall\, x \in K.$$

Considerando $x = 0$ se prueba

$$\langle T(\bar{x}) - \bar{y}, T(\bar{x})\rangle_Y \leq 0. \tag{8.11}$$

Por otro lado, si $x \in K$ entonces $\bar{x}+x \in K$, de hecho

$$\bar{x}+x = 2\left(\frac{x+\bar{x}}{2}\right) \in K$$

donde la última inclusión se obtiene por la convexidad de K ($(x+\bar{x})/2 \in K$) y por el hecho que K es cono (al multiplicar por 2 el elemento anterior). Por lo tanto, por la caracterización de la proyección (considerando $x+\bar{x}$ como elemento de K) se deducirá que

$$\langle \bar{y}-T(\bar{x}), T(x)\rangle_Y \leq 0 \qquad \forall\, x \in K. \tag{8.12}$$

Definiendo $z = T(\bar{x})-\bar{y} \neq 0$ (pues $T(\bar{x}) \neq \bar{y}$), de la anterior desigualdad (8.12) se tendrá que

$$\langle T^*(z), x\rangle_X = \langle z, T(x)\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall\, x \in K,$$

probando que $T^*(z) \in K^+$.

Finalmente,

$$\langle z,\bar{y}\rangle_Y = \langle T(\bar{x})-\bar{y},\bar{y}\rangle_Y = \overbrace{\langle T(\bar{x})-\bar{y}, \bar{y}-T(\bar{x})\rangle_Y}^{=-\|\bar{y}-T(\bar{x})\|_Y^2<0} + \overbrace{\langle T(\bar{x})-\bar{y}, T(\bar{x})\rangle_Y}^{\leq 0 \ (\text{ver } (8.11))} < 0.$$

Parte 3: Espacios topológicos

9. Definiciones preliminares

9.1 Conceptos iniciales

En la tercera parte y final de este texto, introduciremos la noción de espacios topológicos, que como se podrá ver, es una noción más general que la introducida en las dos primeras partes (espacios métricos y espacios vectoriales normados), en el sentido que todo espacio métrico (y por lo tanto todo espacio vectorial normado) es un espacio topológico. La gran diferencia al trabajar de manera general con espacios topológicos, es que los conjuntos abiertos y todos los conceptos que de este se desprenden, no vienen definido a partir de una métrica.

Definición 9.1.1 Sea X un conjunto y $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ (conjunto de las partes). Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es un **espacio topológico** si:

(a) $X \in \mathscr{T}$ y $\emptyset \in \mathscr{T}$;

(b) Para $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{T}$, se tiene

$$\bigcap_{j=1}^{n} \theta_j \in \mathscr{T};$$

(c) Para una familia $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de conjuntos en $\mathscr{T}$ (i.e., $\theta_\alpha \in \mathscr{T}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, siendo Λ un conjunto de índices cualquiera) se tendrá

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha \in \mathscr{T}.$$

Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, al conjunto (de conjuntos) $\mathscr{T}$ se le denomina **topología** y a los elementos de $\mathscr{T}$ se les denomina **abiertos**.

Por lo visto en la Proposition 1.2.7, sabemos que si (X, d) es un espacio métrico y $\mathscr{T}$ son los conjuntos abiertos de X definidos a partir de la métrica d, entonces $(X,\mathscr{T})$ es un espacio topológico. Sin embargo, existen otros espacios topológicos $(X,\mathscr{T})$ donde los elementos de $\mathscr{T}$ no están definidos a partir de alguna métrica. Cuando la topología venga definida o caracterizada por alguna métrica, se dirá que $(X,\mathscr{T})$ es un **espacio topológico metrizable**.

Definición 9.1.2 En un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, un conjunto $C \subseteq X$ se dice **cerrado** si su complemento es abierto, es decir, $C^c \in \mathscr{T}$.

Ejercicio 9.1 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunto que contiene a todos los conjuntos cerrados. Demuestre que se tienen las siguientes propiedades:

(a) $X \in \mathscr{F}$ y $\emptyset \in \mathscr{F}$;

(b) Si $C_1,\ldots,C_n \in \mathscr{F}$, entonces
$$\bigcup_{j=1}^{n} C_j \in \mathscr{F};$$

(c) Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos en $\mathscr{F}$ (i.e., $C_\alpha \in \mathscr{F}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, siendo Λ un conjunto de índices cualquiera), entonces
$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \in \mathscr{F}.$$

Definición 9.1.3 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico. Para $x \in X$ se dice que $V \subseteq X$ es una **vecindad** de x si existe $\theta \in \mathscr{T}$ tal que
$$x \in \theta \subseteq V.$$
Al conjunto de las vecindades de x lo notaremos $\mathscr{N}(x)$, al conjunto de las vecindades abiertas por $\mathscr{N}_a(x)$ y al conjunto de las vecindades cerradas por $\mathscr{N}_c(x)$.

El concepto de vecindad nos permitirá caracterizar los conjuntos abiertos, como se indica en el siguiente resultado.

Proposición 9.1.1 Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, se tiene que un conjunto $A \subseteq X$ es abierto (i.e., pertenece a $\mathscr{T}$) si y solamente si es vecindad de todos sus elementos.

Demostración. Supongamos que $A \subseteq X$ es abierto y sea $x \in A$. Entonces $A \in \mathscr{N}(x)$, pues $A \in \mathscr{T}$ y
$$x \in A \subseteq A,$$
por lo tanto A es vecindad de todos sus elementos.

Por otro lado, supongamos que A es vecindad de todos sus elementos. Es decir, para todo $x \in A$, existe $V_x \in \mathscr{T}$ tal que
$$x \in V_x \subseteq A.$$
Por lo tanto,
$$A = \bigcup_{x\in A} V_x \in \mathscr{T},$$

concluyendo que A es abierto (pertenece a $\mathscr{T}$) pues es unión de conjuntos abiertos (ver parte (c) de la Definición 9.1.1). ■

Definición 9.1.4 En un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, para un conjunto $A\subseteq X$ se define su **interior** y **adherencia** por

$$\operatorname{int}(A)=\{x\in A \mid \exists\, V\in\mathscr{N}(x) \quad \text{tal que} \quad V\subseteq A\} \quad \text{(interior)}$$

y

$$\overline{A}=\{x\in X \mid \forall\, V\in\mathscr{N}(x) \quad \text{se tiene} \quad V\cap A\neq\emptyset\} \quad \text{(adherencia).}$$

En las definiciones anteriores, se puede remplazar $\mathscr{N}(x)$ por $\mathscr{N}_a(x)$ o $\mathscr{N}_c(x)$ sin que los conceptos introducidos cambien, lo cual se deja propuesto demostrar.

Ejercicio 9.2 Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, pruebe que $A\in\mathscr{T}$ (A es abierto) si y solo si $\operatorname{int}(A)=A$ y que $A^c\in\mathscr{T}$ (A es cerrado) si y solo si $A=\overline{A}$.

9.1.1 Espacios separados (Hausdorff)

Una noción fundamental que se utiliza en análisis, en el contexto de espacios topológicos, es la de espacios separados o de Hausdorff. Como veremos al final de esta sección, tal noción nos permite asegurar la unicidad del límite de sucesiones.

Definición 9.1.5 Un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ se dice que es de **Hausdorff** o es **separado**, si para todo par de elementos $x,\ y\in X$, con $x\neq y$, existen $V_x\in\mathscr{N}(x)$ y $V_y\in\mathscr{N}(y)$ tales que $V_x\cap V_y=\emptyset$.

Ejercicio 9.3 Demuestre que todo espacio métrico es un espacio topológico separado.

Proposición 9.1.2 Un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ es separado, si y solo si, para todo $x\in X$ se tiene que la intersección de todas sus vecindades cerradas es $\{x\}$.

Demostración. Supongamos que $(X,\mathscr{T})$ es separado. Para $x\in X$ consideremos el conjunto

$$C_x=\bigcap_{V\in\mathscr{N}_c(x)} V,$$

donde recuerde $\mathscr{N}_c(x)$ es el conjunto de todas las vecindades cerradas de x. Obviamente $x\in C_x$, pues x estará en todas sus vecindades. Supongamos existe $y\neq x$ tal que $y\in C_x$. Como $(X,\mathscr{T})$ es separado, existirán $V_x\in\mathscr{N}(x)$ y $V_y\in\mathscr{N}(y)$ tales que $V_x\cap V_y=\emptyset$. Es decir, existirán dos abiertos θ_x y θ_y tales que $x\in\theta_x$, $y\in\theta_y$ y además $\theta_x\cap\theta_y=\emptyset$. Pero observamos que θ_y^c es una vecindad cerrada de x, puesto que es complemento de un abierto y

$$x\in\theta_x\subseteq\theta_y^c,$$

llegando así a una contradicción pues $y\notin\theta_y^c$, es decir, $y\notin C_x$. Esto prueba que $C_x=\{x\}$.

Por otro lado, supongamos ahora que para todo $x \in X$ se tiene

$$C_x = \bigcap_{V \in \mathscr{N}_c(x)} V = \{x\}.$$

Sean $x,\ y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $y \notin C_x$, se tiene que existe una vecindad cerrada V de x tal que $y \notin V$. Entonces V^c es una vecindad (abierta) de y, y se tiene que $V \cap V^c = \emptyset$. Es decir, hemos encontrado una vecindad de x (V) y una vecindad de y (V^c) que no se intersectan, concluyendo así que $(X, \mathscr{T})$ es separado. ■

Corolario 9.1.3 Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico separado, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Al ser $(X, \mathscr{T})$ separado, entonces para todo $x \in X$ se tiene que

$$\bigcap_{V \in \mathscr{N}_c(x)} V = \{x\}.$$

Por lo tanto, $\{x\}$ es la intersección de conjuntos cerrados y, en consecuencia, es un conjunto cerrado (ver Ejercicio 9.1). ■

Hay muchos conceptos con los que ya hemos trabajado en el contexto de espacios métricos y espacios vectoriales normados, que utilizaremos en espacios topológicos. Uno de estos conceptos son las sucesiones y la noción de convergencia.

Definición 9.1.6 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión. Se dice que esta sucesión converge a $\bar{x} \in X$, si para toda vecindad $V \in \mathscr{N}(\bar{x})$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in V \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

En este caso notaremos $\mathscr{T} - \lim\limits_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$ ó $x_k \xrightarrow{\mathscr{T}} \bar{x}$, omitiendo la alusión a $\mathscr{T}$ si no cabe duda respecto a la topología con la cual se está considerando el límite.

Como es de esperar, si en un conjunto X se trabaja con dos topologías, eventualmente diferentes, la noción de convergencia con una o con otra podría ser muy distinta.

En el siguiente resultado, veremos que el concepto de límite será único en un espacio topológico separado.

Proposición 9.1.4 Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico separado, entonces el límite de una sucesión en X, en caso de existir, es único.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a $\bar{x}$ y a $\bar{y}$. Si $\bar{x} \neq \bar{y}$, como $(X, \mathscr{T})$ es separado, entonces existen $V_{\bar{x}} \in \mathscr{N}(\bar{x})$ y $V_{\bar{y}} \in \mathscr{N}(\bar{y})$ tales que $V_{\bar{x}} \cap V_{\bar{y}} = \emptyset$.

Dado que $x_k \to \bar{x}$, entonces existe $k_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V_{\bar{x}}$ para todo $k \geq k_0^1$.

Dado que $x_k \to \bar{y}$, entonces existe $k_0^2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V_{\bar{y}}$ para todo $k \geq k_0^2$.

Por lo tanto, para todo $k \geq \max\{k_0^1, k_0^2\}$ se tiene que $x_k \in V_{\bar{x}} \cap V_{\bar{y}}$ lo que es una contradicción. ■

9.1.2 Base de una topología

El concepto de base de una topología, o de un espacio topológico, nos permitirá describir esta y algunas propiedades de forma más sucinta.

Definición 9.1.7 En un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, un conjunto $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$ se dice que es una **base de** $\mathscr{T}$, si todo $\theta\in\mathscr{T}$ es unión de elementos en $\mathscr{B}$.

A partir de la definición anterior, observe que describiendo la base de un espacio topológico, queda absolutamente determinada su topología. Producto de esto es que habitualmente se define una topología describiendo los elementos de una base que la genera.

Definición 9.1.8 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y $x\in X$. Un conjunto $B\subseteq\mathscr{N}(x)$ (conjunto de vecindades de x) se dice que es una **base de vecindades de** x, si para todo $V\in\mathscr{N}(x)$ existe $W\in B$ tal que $W\subseteq V$.

Proposición 9.1.5 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$ una base de $\mathscr{T}$. Entonces, todo $x\in X$ tiene una base de vecindades en $\mathscr{B}$.

Demostración. Sea $x\in X$ y $V\in\mathscr{N}(x)$. Es decir, existe $\theta\in\mathscr{T}$ tal que $x\in\theta\subseteq V$. Como $\mathscr{B}$ es una base de $\mathscr{T}$, entonces existe una colección $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathscr{B}$ tal que

$$\theta=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\theta_\alpha.$$

Sea $\alpha\in\Lambda$ tal que $x\in\theta_\alpha$. Entonces,

$$x\in\theta_\alpha\subseteq\theta\subseteq V.$$

Es decir, x tiene una base de vecindades en $\mathscr{B}$. ■

9.1.3 Espacios separables

Para introducir el concepto de espacios separables, comencemos por definir la noción de conjunto denso en el contexto de espacios topológicos.

Definición 9.1.9 Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, se dice que un conjunto $D\subseteq X$ es denso si para todo $\emptyset\neq\theta\in\mathscr{T}$ se tiene que $D\cap\theta\neq\emptyset$.

Ejercicio 9.4 Demuestre que un conjunto es denso si y solamente si su adherencia es todo el espacio.

Ejercicio 9.5 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico, $A\subseteq X$ un conjunto denso y $\theta\subseteq X$ un conjunto

abierto. Demuestre que
$$\overline{A\cap\theta}=\overline{\theta}.$$

Definición 9.1.10 Un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ se dice **separable**, si existe un conjunto denso $D\subseteq X$ de cardinalidad numerable.

Proposición 9.1.6 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico. Si existe una base numerable de $\mathscr{T}$, entonces el espacio es separable.

Demostración. Sea $\mathscr{B}=\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{T}$ una base de $\mathscr{T}$. Sin pérdida de generalidad, supondremos $\theta_k\neq\emptyset$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ tomemos $x_k\in\theta_k$ y definamos
$$D=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq X.$$
Probemos que D es denso. Sea $\emptyset\neq\theta\in\mathscr{T}$. Como $\mathscr{B}$ es base, entonces existe un conjunto de índices $\emptyset\neq I\subseteq\mathbb{N}$ tal que
$$\theta=\bigcup_{k\in I}\theta_k.$$
Entonces,
$$\emptyset\neq\{x_k\mid k\in I\}\subseteq D\cap\left(\bigcup_{k\in I}\theta_k\right)=D\cap\theta,$$
probando así que D es denso y, como tiene cardinalidad numerable, se concluye que $(X,\mathscr{T})$ es separable. ■

9.2 Funciones en espacios topológicos

A continuación, introduciremos el concepto de continuidad para funciones definidas sobre espacios topológicos.

Definición 9.2.1 Sean $(X,\mathscr{T}_X)$ e $(Y,\mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una función $f:X\longrightarrow Y$ se dice continua en $x\in X$, si para toda vecindad W de $f(x)$ $(W\in\mathscr{N}(f(x)))$ existe $V\in\mathscr{N}(x)$ tal que
$$f(y)\in W \qquad \forall\, y\in V$$
o, equivalentemente, si
$$f^{-1}(W)\in\mathscr{N}(x) \qquad \forall\, W\in\mathscr{N}(f(x)).$$
La función f se dirá continua si es continua en todo elemento de X.

Ejercicio 9.6 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Demuestre que f es continua, si y solo si

$$f^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}_X \qquad \forall\, \theta \in \mathscr{T}_Y.$$

Si en el espacio X o Y se está trabajando con más de una topología, en ocasiones, para señalar la continuidad de una función f, se escribirá la topología respectiva en $f : (X, \mathscr{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_Y)$, para que no quede duda respecto a cuales topologías se considera la continuidad.

Ejercicio 9.7 Sea X un conjunto sobre el cual se definen dos topologías $\mathscr{T}_X^1$ y $\mathscr{T}_X^2$, tales que $\mathscr{T}_X^1 \subseteq \mathscr{T}_X^2$. Para un espacio topológico $(Y, \mathscr{T}_Y)$, pruebe que si una función $f : (X, \mathscr{T}_X^1) \longrightarrow Y$ es continua, entonces $f : (X, \mathscr{T}_X^2) \longrightarrow Y$ también es continua.

Ejercicio 9.8 Sea Y un conjunto sobre el cual se definen dos topologías $\mathscr{T}_Y^1$ y $\mathscr{T}_Y^2$, tales que $\mathscr{T}_Y^1 \subseteq \mathscr{T}_Y^2$. Para un espacio topológico $(X, \mathscr{T}_X)$, pruebe que si una función $f : X \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_2^Y)$ es continua, entonces $f : X \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_1^Y)$ también es continua.

Ejercicio 9.9 Demuestre que la composición de funciones continuas es continua.

Definición 9.2.2 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es un **homeomorfismo**, si es una biyección continua y su inversa es continua también, que es equivalente a decir que f es una aplicación abierta (envía abiertos en abiertos). En tal caso, se dirá que los espacios topológicos $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ son **homeomorfos**.

Ejercicio 9.10 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Pruebe que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $\bar{x} \in X$ si y solo si $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ converge a $f(\bar{x}) \in Y$.

9.3 Comparación de topologías

Si en un espacio X se tienen dos topologías $\mathscr{T}_X^1$ y $\mathscr{T}_X^2$, se dice que $\mathscr{T}_X^1$ es más **débil** que $\mathscr{T}_X^2$ si

$$\mathscr{T}_X^1 \subseteq \mathscr{T}_X^2,$$

es decir, si $\mathscr{T}_X^1$ tiene menos conjuntos que $\mathscr{T}_X^2$. Si se tiene la anterior inclusión, también se dice que $\mathscr{T}_X^2$ es más **fuerte** que $\mathscr{T}_X^1$.

En la sección anterior, se dejó como ejercicios propuestos (ver ejercicios 9.7 y 9.8) probar lo que se resume en el siguiente resultado, relacionado con la continuidad de una función cuando se trabaja con topologías que son más débiles o fuertes.

Proposición 9.3.1 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Si una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces lo seguirá siendo si en X la topología $\mathscr{T}_X$ es remplazada por una topología más fuerte, o si en Y la topología $\mathscr{T}_Y$ es remplazada por una topología más débil.

Demostración. Consideremos $\mathscr{T}_X'$ una topología más fuerte que $\mathscr{T}_X$, es decir, $\mathscr{T}_X \subseteq \mathscr{T}_X'$. Como $f : (X, \mathscr{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_Y)$ es continua, se tiene que

$$f^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}_X \subseteq \mathscr{T}_X' \qquad \forall\, \theta \in \mathscr{T}_Y,$$

probando así que $f : (X, \mathscr{T}_X') \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_Y)$ es continua. De igual forma, si $\mathscr{T}_Y'$ es una topología más débil que $\mathscr{T}_Y$, es decir, $\mathscr{T}_Y' \subseteq \mathscr{T}_Y$, se deduce que para todo $\theta \in \mathscr{T}_Y' \subseteq \mathscr{T}_Y$ se tiene

$$f^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}_X,$$

concluyendo que $f : (X, \mathscr{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{T}_Y')$ es continua. ■

Si para dos espacios topológicos $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ se tiene que la función $f : X \longrightarrow Y$ es continua, al debilitar la topología en X puede que f deje de ser continua.

Proposición 9.3.2 Sea $(X, \mathscr{T}_X)$ un espacio topológico y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión convergente a $\bar{x} \in X$. Si se considera una topología más débil en X, entonces la sucesión también converge a $\bar{x}$ de acuerdo a esa topología.

Demostración. Sea $\mathscr{T}_X'$ una topología más débil que $\mathscr{T}_X$ (i.e., $\mathscr{T}_X' \subseteq \mathscr{T}_X$) y V una vecindad de $\bar{x}$ de acuerdo a $\mathscr{T}_X'$, es decir, existe $\theta \in \mathscr{T}_X'$ tal que

$$\bar{x} \in \theta \subseteq V.$$

Como $\mathscr{T}_X' \subseteq \mathscr{T}_X$, entonces $\theta \in \mathscr{T}_X$. Dado que x_k converge a $\bar{x}$ de acuerdo a $\mathscr{T}_X$, entonces existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in \theta \subseteq V \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Por lo tanto, x_k converge a $\bar{x}$ según $\mathscr{T}_X'$. ■

Si para el espacio topológico $(X, \mathscr{T}_X)$ se tiene que una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es convergente, al considerar una topología más fuerte puede que aquella sucesión ya no sea convergente de acuerdo a esa topología. Por otro lado, si la sucesión no converge en la topología $\mathscr{T}_X$, al debilitar esta topología podría suceder que la sucesión si tenga límite. Precisamente aquella es una motivación para debilitar topologías.

9.4 Espacios topológicos compactos

En esta sección, veremos la noción de espacio topológico compacto, extendiendo tal concepto ya definido en las primeras partes del texto. Previo a esto, definamos la topología inducida en un conjunto de un espacio topológico.

Definición 9.4.1 Sea $(X, \mathscr{T}_X)$ un espacio topológico y $M \subseteq X$ un subconjunto. En M se define la **topología inducida por** $\mathscr{T}$ mediante

$$\mathscr{T}_M = \{\theta \cap M \mid \theta \in \mathscr{T}\},$$

teniéndose así que $(M, \mathscr{T}_M)$ será a su vez un espacio topológico.

Definición 9.4.2 Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es un **espacio topológico compacto**, si es separado (de Hausdorff) y además todo recubrimiento de abiertos (elementos en $\mathscr{T}$) admite un subrecubrimiento finito. Un conjunto $C \subseteq X$ se dirá que es un **conjunto compacto**, si $(C, \mathscr{T}_C)$ es un espacio topológico compacto, donde $\mathscr{T}_C$ es la topología inducida en C por $\mathscr{T}$. Lo anterior es equivalente a decir que todo recubrimiento de abiertos (elementos en $\mathscr{T}$) de C admite un subrecubrimiento finito.

Ejercicio 9.11 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $C \subseteq X$ un conjunto compacto. Demuestre que C es cerrado.

Teorema 9.4.1 — Teorema de Bolzano-Weierstrass. Un espacio topológico metrizable $(X, \mathscr{T})$ es compacto, si y solo si toda sucesión en X tiene un punto de acumulación o, equivalentemente, tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Como $(X, \mathscr{T})$ es metrizable, entonces existe una métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que los abiertos definidos a partir de d son exactamente los mismos que los elementos de $\mathscr{T}$.

Entonces, el resultado se reduce a probar que el espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente, resultado demostrado en el Teorema 2.3.4. ■

Si un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es compacto pero no es metrizable, no se puede concluir que toda sucesión en dicho espacio tiene una subsucesión convergente. Los espacios topológicos donde toda sucesión tiene una subsucesión convergente, se denominan **secuencialmente compactos**.

Proposición 9.4.2 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios topológicos separados y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $(X, \mathscr{T}_X)$ es compacto, entonces $f(X)$ (la imagen de f) es un conjunto compacto en Y.

Demostración. Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{T}_Y$ un recubrimiento de abiertos (en Y) de $f(X)$. Como f es continua, se tendrá que $\{f^{-1}(\theta_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{T}_X$, es decir, es una familia de abiertos en X, que además será un recubrimiento de X, pues

$$f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha \Leftrightarrow X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(\theta_\alpha).$$

Como X es compacto, existirán $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(\theta_{\alpha_j}) \;\Leftrightarrow\; f(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \theta_{\alpha_j},$$

probando así que $f(X)$ es compacto. ■

10. Algunas topologías particulares

En este capítulo, introduciremos ciertas topologías particulares, que por su importancia dentro del análisis merecen una atención especial. Estas serán la topología producto, la topología cuociente y la topología generada a partir de una clase de funciones. En el caso de la topología producto, ya tenemos algunas nociones, cuando trabajamos en las primeras partes del texto con productos finitos de espacios métricos y espacios vectoriales normados. La diferencia ahora es que consideraremos productos no necesariamente finitos de espacios topológicos. En cuanto a la topología generada por una familia de funciones, veremos el ejemplo de la topología débil que se construye en un espacio vectorial normado, la cual en el curso de análisis funcional será estudiada con mayor profundidad.

10.1 Topología producto

Comencemos analizando el producto de dos espacios topológicos $(X_1, \mathscr{T}_1)$ y $(X_2, \mathscr{T}_2)$. En el espacio $X = X_1 \times X_2$ se definirá la topología producto, denotada por $\mathscr{T}$, de la siguiente forma: $\theta \in \mathscr{T}$ si y solo si, para todo $x = (x_1, x_2) \in \theta$, existen $\theta_1 \in \mathscr{T}_1$ y $\theta_2 \in \mathscr{T}_2$ tales que

$$x = (x_1, x_2) \in \theta_1 \times \theta_2 \subseteq \theta.$$

Al conjunto $\theta_1 \times \theta_2$ se le denomina **rectángulo de abiertos**.

Ejercicio 10.1 Pruebe que $\mathscr{T}$ definido anteriormente en el espacio producto $X = X_1 \times X_2$ es una topología.

Definición 10.1.1 Sea $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos con la cual se define el espacio producto $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Es decir, un elemento $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ pertenece a X si y solo si

$$x_\alpha \in X_\alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Lambda.$$

En X un conjunto $\theta \subseteq X$ se dirá que es un **rectángulo de abiertos**, si existe un subconjunto de índices $I \subseteq \Lambda$ de cardinalidad finita, tales que para cada $\alpha \in I$ existe $\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ y se tiene

$$\theta = \prod_{\alpha\in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus I} X_\alpha.$$

La **topología producto** en X, que denotaremos por $\mathscr{T}$, es aquella generada por todos los rectángulos abiertos, es decir, el conjunto

$$\mathscr{B} = \{\theta \subseteq X \mid \theta \quad \text{es un rectángulo de abiertos}\ \} \tag{10.1}$$

es una base de $\mathscr{T}$.

Proposición 10.1.1 El conjunto $\mathscr{T}$ definido anteriormente es una topología.

Demostración. Demostremos las tres propiedades que definen una topología.

(1) Evidentemente $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es un rectángulo abierto. Por otro lado, el conjunto vacío $\emptyset$ también lo será, pues para algún $\bar{\alpha} \in \Lambda$ se tiene que

$$\emptyset = \emptyset \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\bar{\alpha}\}} X_\alpha.$$

(2) Basta probar que si $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathscr{T}$, entonces $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathscr{T}$, para luego concluir por inducción que la intersección finita de elementos en $\mathscr{T}$ pertenece a $\mathscr{T}$.

Sean $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathscr{T}$, es decir, existen dos colecciones de rectángulos de abiertos $\{R_a^1\}_{a\in I_1}$ y $\{R_b^2\}_{b\in I_2}$ tales que

$$\theta_1 = \bigcup_{a\in I_1} R_a^1 \quad \text{y} \quad \theta_2 = \bigcup_{b\in I_2} R_b^2.$$

Entonces,

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \left(\bigcup_{a\in I_1} R_a^1\right) \cap \left(\bigcup_{b\in I_2} R_b^2\right) = \bigcup_{a\in I_1} \bigcup_{b\in I_2} (R_a^1 \cap R_b^2).$$

Como la intersección de dos rectángulos de abiertos es un rectángulo de abiertos, se concluye que $\theta_1 \cap \theta_2$ es unión de rectángulos de abiertos y, por lo tanto, pertenece a $\mathscr{T}$.

(3) Sea $\{\theta_\beta\}_{\beta\in I} \subseteq \mathscr{T}$ una colección de elementos en $\mathscr{T}$. Entonces, para todo $\beta \in I$ existe una colección de rectángulos de abiertos $\{R_{i_\beta}^\beta\}_{i_\beta\in I_\beta}$ tales que

$$\theta_\beta = \bigcup_{i_\beta\in I_\beta} R_{i_\beta}^\beta \qquad \forall\, \beta \in I.$$

Por lo tanto,

$$\theta := \bigcup_{\beta\in I}\theta_\beta = \bigcup_{\beta\in I}\bigcup_{i_\beta\in I_\beta} R^\beta_{i_\beta},$$

es decir, θ es unión de rectángulos de abiertos y, por lo tanto, pertenece a $\mathscr{T}$.

■

Para $x \in X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, una base de vecindades estará constituida por elementos de $\mathscr{B}$ (rectángulos abiertos), es decir, $V \subseteq X$ es una vecindad de $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si existe un subconjunto de índices $I \subseteq \Lambda$ de cardinalidad finita, tales que para cada $\alpha \in I$ existe $\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ y se tiene $x_\alpha \in \theta_\alpha$ para $\alpha \in I$ y además

$$\prod_{\alpha\in I}\theta_\alpha \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus I} X_\alpha \subseteq V.$$

Proposición 10.1.2 Si para todo $\alpha \in \Lambda$ se tiene que $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ es un espacio topológico separado, entonces $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, considerando la topología producto $\mathscr{T}$, es separado.

Demostración. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ e $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ tales que $x \neq y$. Como no son iguales, existe $\bar\alpha \in \Lambda$ tal que $x_{\bar\alpha} \neq y_{\bar\alpha}$. Dado que $(X_{\bar\alpha}, \mathscr{T}_{\bar\alpha})$ es separado, existen $\theta^x_{\bar\alpha}$ y $\theta^y_{\bar\alpha}$ en $\mathscr{T}_{\bar\alpha}$ tales que $x_{\bar\alpha} \in \theta^x_{\bar\alpha}$ e $y_{\bar\alpha} \in \theta^y_{\bar\alpha}$ y además

$$\theta^x_{\bar\alpha} \cap \theta^y_{\bar\alpha} = \emptyset.$$

Por lo tanto, definiendo

$$\theta_x = \theta^x_{\bar\alpha} \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\bar\alpha\}} X_\alpha \quad \text{y} \quad \theta_y = \theta^y_{\bar\alpha} \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\bar\alpha\}} X_\alpha$$

se tiene que $x \in \theta_x,\ y \in \theta_y$ y $\theta_x \cap \theta_y = \emptyset$, probando así que $(X, \mathscr{T})$ es separado. ■

Definición 10.1.2 Dada una colección de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y el producto $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, para $\alpha \in \Lambda$ (conjunto de índices) se define la función proyección $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, donde para $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ se tiene $p_\alpha(x) = x_\alpha$.

Teorema 10.1.3 Si $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de espacios topológicos, entonces la topología producto en $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, es la topología más débil que hace continuas a las proyecciones $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Sea $\mathscr{T}'$ una topoloigía sobre X tal que las funciones p_α son continuas para todo $\alpha \in \Lambda$. Probemos que la topología producto $\mathscr{T}$ está contenida en $\mathscr{T}'$.

Por la continuidad de las proyecciones, sabemos que para todo $\bar\alpha \in \Lambda$ y $\theta_{\bar\alpha} \in \mathscr{T}_{\bar\alpha}$ se tendrá

$$R_{\bar\alpha} = \left(\theta_{\bar\alpha} \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\bar\alpha\}} X_\alpha\right) = p^{-1}_{\bar\alpha}(\theta_{\bar\alpha}) \in \mathscr{T}'.$$

De esta forma, todo rectángulo de abiertos (que es intersección finita de conjuntos como $R_{\bar\alpha}$) estará en $\mathscr{T}'$ y, por lo tanto, toda unión de rectángulos de abiertos estará en $\mathscr{T}'$, concluyendo $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. ■

Corolario 10.1.4 Para una colección de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ y un espacio topológico $(Z, \mathscr{T}_Z)$, una función $f : Z \longrightarrow X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ será continua (considerando la topología producto en X) si y solo si, las funciones $f_\alpha : Z \longrightarrow X_\alpha$ son continuas, donde las funciones f_α son las componentes de la función f.

Demostración. Observemos que $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. Por lo tanto, si f es continua, entonces f_α es continua para todo $\alpha \in \Lambda$.

Por otro lado, supongamos ahora que f_α es continua para todo $\alpha \in \Lambda$. Para $\theta \in \mathscr{T}$ (topología producto en X) se tiene

$$\theta = \bigcup_{\beta\in B} R_\beta,$$

donde los conjuntos R_β son rectángulos de abiertos. Como

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in B} R_\beta\right) = \bigcup_{\beta\in B} f^{-1}(R_\beta),$$

para probar la continuidad de f basta probar que $f^{-1}(R) \in \mathscr{T}_Z$ si R es un rectángulo de abiertos.

Sea un rectángulo de abiertos

$$R = \prod_{\alpha\in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus I} X_\alpha,$$

donde $I \subseteq \Lambda$ es un subconjunto de índices de cardinalidad finita y $\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ para $\alpha \in I$. Entonces,

$$f^{-1}(R) = \bigcap_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(\theta_\alpha).$$

Como f_α es continua, se tiene que $f_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \in \mathscr{T}_Z$ y, dado I es de cardinalidad finita, se concluye $f^{-1}(R) \in \mathscr{T}_Z$, probando así que f es continua. ■

Corolario 10.1.5 Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ una sucesión, es decir, $x_k = (x_\alpha^k)_{\alpha\in\Lambda}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, esta sucesión converge a $\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ (de acuerdo a la topología producto en X) si y solo si, para todo $\alpha \in \Lambda$ se tiene que la sucesión $\{x_\alpha^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X_\alpha$ converge a $\bar{x}_\alpha$ (en X_α).

Demostración. Supongamos que $x_k \to \bar{x}$ de acuerdo a la topología producto en X. Como las proyecciones $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ son continuas para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que

$$x_\alpha^k = p_\alpha(x_k) \to p_\alpha(\bar{x}) = \bar{x}_\alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Lambda.$$

Por otro lado, consideremos $V \in \mathscr{N}(\bar{x})$ una vecindad de $\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de acuerdo a la topología producto. Sin pérdida de generalidad, dado que los rectángulos de abiertos constituyen una base de la topología producto, podemos suponer que V es un rectángulo de abiertos. Es decir, existe un conjunto de índices $I \subseteq \Lambda$ de cardinalidad finita, y abiertos $\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ para $\alpha \in I$, tales que

$$\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \;\in\; V = \prod_{\alpha\in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha\in\Lambda\setminus I} X_\alpha.$$

Como $x_\alpha^k \to \bar{x}_\alpha$ (en $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$) para todo $\alpha \in \Lambda$, y $\bar{x}_\alpha \in \theta_\alpha$ para $\alpha \in I$, entonces para todo $\alpha \in I$ existe $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_\alpha^k \in \theta_\alpha \qquad \forall\, k \geq k_\alpha.$$

Definiendo $k_0 = \text{máx}\{k_\alpha \mid \alpha \in I\}$ (posible de hacer pues I es de cardinalidad finita), se tendrá

$$x_k = (x_\alpha^k)_{\alpha\in\Lambda} \in V \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

probando así que $x_k \to \bar{x}$. ■

■ **Ejemplo 10.1.6** Sea A un conjunto e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ un espacio topológico, entonces el conjunto

$$F(A,Y) = \{f : A \longrightarrow Y \mid f \quad \text{es una función}\}$$

se puede ver como el espacio producto $\prod\limits_{x\in A} Y$ el que usualmente se denota por Y^A.

De hecho, un elemento f en $F(A,Y)$ se puede escribir como $(f(x))_{x\in A}$, es decir, que a cada elemento $x \in A$ le asigna un elemento en Y.

Por lo visto anteriormente, una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq F(A,Y) = Y^A$, es decir, $(f_k(x))_{x\in A}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, converge a $f = (f(x))_{x\in A} \in F(A,Y)$ si y solo si

$$f_k(x) \to f(x) \qquad \forall\, x \in A,$$

de acuerdo a la topología en Y, es decir, la convergencia en $F(A,Y) = Y^A$ de acuerdo a la topología producto, corresponde a la convergencia puntual de funciones.

10.1.1 Teorema de Tychonoff

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Tychonoff, que dice relación con la caracterización de la compacidad en un espacio producto. Comencemos definiendo el concepto de sub-base.

Definición 10.1.3 — Sub-base. Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, se dice que $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}$ es una **sub-base** de $\mathscr{T}$, si todo elemento de $\mathscr{T}$ se puede escribir como unión de conjuntos que son intersecciones finitas de elementos en $\mathscr{B}_s$.

Ejercicio 10.2 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}$ una sub-base de $\mathscr{T}$. Pruebe que $\mathscr{T}$ es la topología más débil que contiene a $\mathscr{B}_s$.

Proposición 10.1.7 Sea $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos con la cual se define el espacio producto $X = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Entonces,

$$\mathscr{B}_s = \{p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda;\ \ \theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\}$$

es una sub-base de la topología producto, donde $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ son las funciones proyecciones.

Demostración. Basta probar que todo rectángulo de abiertos se escribe como intersección finita de elementos de $\mathscr{B}_s$, puesto que todo conjunto en $\mathscr{T}$, se escribe como unión de rectángulos de abiertos.

Sea $R \subseteq X$ un rectángulo de abiertos, es decir, existe un conjunto de índices $I \subseteq \Lambda$ de cardinalidad finita, tal que para cada $\alpha \in I$ existe $\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ y se tiene

$$R = \prod_{\alpha \in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus I} X_\alpha.$$

Pero

$$\prod_{\alpha \in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus I} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha).$$

De hecho,

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in I} \theta_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus I} X_\alpha \;\Leftrightarrow\; x_\alpha \in \theta_\alpha \quad \forall\, \alpha \in I$$
$$\Leftrightarrow\; p_\alpha(x) \in \theta_\alpha \quad \forall\, \alpha \in I \;\Leftrightarrow\; x \in p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \quad \forall\, \alpha \in I$$
$$\Leftrightarrow\; x \in \bigcap_{\alpha \in I} p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha).$$

■

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Tychonoff, veremos dos resultados preliminares.

Lema 10.1 Sea $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos con la cual se define el espacio producto $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Si $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ es compacto para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces todo recubrimiento de X formado por elementos de la sub-base

$$\mathscr{B}_s = \{p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda;\;\; \theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\},$$

admite un subrecubrimiento finito.

Demostración. Sea $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{T}$ un recubrimiento de X que contiene solo elementos de $\mathscr{B}_s$. Para $\alpha \in \Lambda$, definamos

$$\mathscr{R}_\alpha = \{\theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \mid p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \in \mathscr{R}\}.$$

Probemos que existe $\alpha^* \in \Lambda$ tal que $\mathscr{R}_{\alpha^*}$ recubre X_{α^*}.

Si para todo $\alpha \in \Lambda$ se tiene que $\mathscr{R}_\alpha$ no recubre X_α, entonces para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $\bar{x}_\alpha \in X_\alpha$ tal que

$$\bar{x}_\alpha \notin \bigcup_{\theta_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha} \theta_\alpha.$$

Si definimos $\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ se tendrá que $\bar{x}$ no pertenece a ningún elemento del recubrimiento $\mathscr{R}$, puesto que si $\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ pertenece a algún elemento del recubrimiento $\mathscr{R}$, como este está formado por conjuntos en la sub-base $\mathscr{B}_s$, entonces existe $\bar{\alpha} \in \Lambda$ y $\theta_{\bar{\alpha}} \in \mathscr{T}_{\bar{\alpha}}$ tal que

$$\bar{x} \in p_{\bar{\alpha}}^{-1}(\theta_{\bar{\alpha}}) \in \mathscr{R} \;\Leftrightarrow\; \bar{x}_{\bar{\alpha}} \in \theta_{\bar{\alpha}} \in \mathscr{R}_{\bar{\alpha}},$$

obteniendo así una contradicción.

Por lo tanto, $\bar{x}$ no pertenece a ningún elemento del recubrimiento $\mathscr{R}$, lo que también es una contradicción (pues es un recubrimiento de X). Entonces, existe $\alpha^* \in \Lambda$ tal que $\mathscr{R}_{\alpha^*}$ recubre X_{α^*}. Como $(X_{\alpha^*}, \mathscr{T}_{\alpha^*})$ es compacto, existen $\theta^1_{\alpha^*}, \ldots, \theta^n_{\alpha^*} \in \mathscr{R}_{\alpha^*}$ tales que

$$X_{\alpha^*} = \bigcup_{j=1}^{n} \theta^j_{\alpha^*}.$$

Entonces, los conjuntos $p^{-1}_{\alpha^*}(\theta^1_{\alpha^*}), \ldots, p^{-1}_{\alpha^*}(\theta^n_{\alpha^*})$, que son elementos de $\mathscr{R}$, recubren X, probando así lo deseado. ■

Para demostrar el segundo lema que necesitamos, requeriremos hacer utilización del Lema de Zorn, enunciado en la Sección 6.3.1.

Lema 10.2 — Teorema de la sub-base de Alexander. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}$ una sub-base de $\mathscr{T}$. Si todo recubrimiento de X formado por elementos de $\mathscr{B}_s$, admite un subrecubrimiento finito, entonces $(X, \mathscr{T})$ es compacto.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathscr{T})$ no es compacto. Es decir, el conjunto

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{R} \subseteq \mathscr{T} \mid \mathscr{R} \text{ es un recubrimiento abierto de } X \text{ que no admite un subrecubrimiento finito}\}$$

es distinto de vacío. En $\mathscr{F}$ consideremos la relación de orden parcial dada por la inclusión $\subseteq$ y veamos que $(\mathscr{F}, \subseteq)$ es inductivo (ver la definición en la Sección 6.3.1). Para ello, sea $\{\mathscr{R}_a\}_{a \in A} \subseteq \mathscr{F}$ un conjunto totalmente ordenado. Probemos que

$$\tilde{\mathscr{R}} = \bigcup_{a \in A} \mathscr{R}_a$$

está en $\mathscr{F}$ y es un elemento maximal de $\{\mathscr{R}_a\}_{a \in A}$. Probar que es un elemento maximal es directo, por lo tanto solo demostraremos que $\tilde{\mathscr{R}} \in \mathscr{F}$.

Como $\tilde{\mathscr{R}}$ es un recubrimiento de X, veamos que no contiene un subrecubrimiento finito. Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \tilde{\mathscr{R}}$, es decir, para todo $j = 1, \ldots, n$ existe $a_j \in A$ tal que $\theta_j \in \mathscr{R}_{a_j}$. Como $\{\mathscr{R}_a\}_{a \in A}$ está totalmente ordenado, existirá $a^* \in A$ tal que $\theta_j \in \mathscr{R}_{a^*}$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

De hecho, como $\theta_1 \in \mathscr{R}_{a_1}$ y $\theta_2 \in \mathscr{R}_{a_2}$, se tiene que θ_1 y θ_2 pertenecen a $\mathscr{R}_{b_1}$ con $b_1 \in \{a_1, a_2\}$. Luego como $\theta_3 \in \mathscr{R}_{a_3}$, se tendrá que $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \in \mathscr{R}_{b_2}$ con $b_2 \in \{a_3, b_1\}$. Realizamos lo anterior de manera sucesiva n veces, hasta determinar cuál es el índice $a^* \in A$.

Como $\mathscr{R}_{a^*} \in \mathscr{F}$, deducimos que $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{R}_{a^*}$ no pueden recubrir X, probando así que $\tilde{\mathscr{R}} \in \mathscr{F}$ y, por lo tanto, $(\mathscr{F}, \subseteq)$ es inductivo.

Por el Lema de Zorn (Sección 6.3.1), $\mathscr{F}$ tiene un elemento maximal $\mathscr{M} \in \mathscr{F}$. Definamos

$$\mathscr{S} = \mathscr{M} \cap \mathscr{B}_s = \{\theta \in \mathscr{M} \mid \theta \in \mathscr{B}_s\},$$

y probemos que $\mathscr{S}$ es un recubrimiento de X.

Si $\mathscr{S}$ no recubre X, existe $x \in X$ tal que $x \notin \tilde{\theta}$ para todo $\tilde{\theta} \in \mathscr{S}$. Como $\mathscr{M}$ es un recubrimiento de X, existe $\theta \in \mathscr{M}$ tal que $x \in \theta$. Dado que $\mathscr{B}_s$ es una sub-base, existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{B}_s$ tales que

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} V_j \subseteq \theta.$$

Deducimos así, que ninguno de los V_j pertenece a $\mathscr{M}$, pues si algún V_j perteneciera a $\mathscr{M}$, entonces $V_j \in \mathscr{S} = \mathscr{M} \cap \mathscr{B}_s$ y, por lo tanto, x pertenecería a un elemento de $\mathscr{S}$. Por la maximalidad de $\mathscr{M}$, se tiene que $\mathscr{M} \cup \{V_j\}$ admite un subrecubrimiento finito para todo $j = 1, \dots, n$.

Como $\mathscr{M} \cup \{V_j\}$ admite un subrecubrimiento finito para todo $j = 1, \dots, n$, entonces para todo $j = 1, \dots, n$ existe U_j, unión finita de elementos en $\mathscr{M}$, tal que

$$X = U_j \cup V_j.$$

Por lo tanto,

$$X = \bigcap_{j=1}^{n} (U_j \cup V_j) \subseteq \left(\bigcap_{j=1}^{n} V_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_j \right) \subseteq \theta \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_j \right).$$

Dado que $\theta \in \mathscr{M}$ y $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ es una unión finita de elementos en $\mathscr{M}$, se obtiene una contradicción, pues $\mathscr{M}$ no admite un sub-recubrimiento finito de X. En consecuencia, $\mathscr{S}$ es un recubrimiento de X.

Dado que

$$\mathscr{S} = \mathscr{M} \cap \mathscr{B}_s = \{\theta \in \mathscr{M} \mid \theta \in \mathscr{B}_s\}$$

es un recubrimiento de X, como $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}_s$, entonces admite un subrecubrimiento finito (ver hipótesis del enunciado). Sin embargo, como $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{M} \in \mathscr{F}$, entonces no admite un sub-recubrimiento finito, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, el conjunto

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{R} \subseteq \mathscr{T} \mid \mathscr{R} \text{ es un recubrimiento abierto de } X \text{ que no admite un subrecubrimiento finito}\}$$

es vacío, es decir, $(X, \mathscr{T})$ es compacto. ■

Con la ayuda de los dos lemas anteriores, la demostración del Teorema de Tychonoff es muy directa.

Teorema 10.1.8 — Tychonoff. Sea $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos con la cual se define el espacio producto $X = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Si $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ es compacto para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(X, \mathscr{T})$ es compacto, donde $\mathscr{T}$ es la topología producto definida en X.

Demostración. Considerando la sub-base

$$\mathscr{B}_s = \{p_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda; \;\; \theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\}$$

de la topología producto. Como los espacios $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ son compactos para todo $\alpha \in \Lambda$, por el Lema 10.1, se tendrá que todo recubrimiento de X formado por elementos de $\mathscr{B}_s$ admite un subrecubrimiento finito. Por lo tanto, por el Lema 10.2 (teorema de la sub-base de Alexander) se concluye que $(X, \mathscr{T})$ es compacto. ■

Ejercicio 10.3 Sea $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos con la cual se define el espacio producto $X = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ y la topología producto denotada por $\mathscr{T}$. Demuestre que si $(X, \mathscr{T})$ es compacto, entonces los espacios $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ son compactos para todo $\alpha \in \Lambda$.

10.2 Topología cuociente

Recordemos que una relación de equivalencia $\mathscr{R}$, definida sobre un conjunto $X \neq \emptyset$, es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

■ **Ejemplo 10.2.1** Algunos ejemplos de relaciones de equivalencia:

1. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subespacio vectorial. Entonces, la relación en X definida por
$$x,\ y \in X;\ \ x\mathscr{R}y \ \Leftrightarrow\ x - y \in M,$$
es de equivalencia.

2. Sea X el espacio de funciones definido por
$$X = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ \middle|\ \int_0^1 |f(t)|dt < +\infty \right\}.$$
En X, la relación
$$f,\ g \in X;\ \ f\mathscr{R}g \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt = 0,$$
es una relación de equivalencia.

En un conjunto X sobre el que está definida una relación de equivalencia $\mathscr{R}$, se define el espacio cuociente, denotado por $X/\mathscr{R}$, constituido por todas las clases de equivalencia, es decir
$$X/\mathscr{R} = \{[x] \mid x \in X\},$$
donde para $x \in X$, su clase de equivalencia $[x]$ la constituyen todos los elementos que se relacionan con él, dada por
$$[x] = \{y \in X \mid x\mathscr{R}y\}.$$

En adelante, consideraremos también la función proyección entre X y $X/\mathscr{R}$, denotada por $\pi : X \longrightarrow X/\mathscr{R}$, que a cada $x \in X$ le asocia la clase de equivalencia a la que pertenece.

Definición 10.2.1 Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia definida sobre X. En el espacio cuociente $X/\mathscr{R}$, la **topología cuociente**, denotada por $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$, estará definida por
$$\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}} = \{\theta \subseteq X/\mathscr{R} \mid \pi^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}\}.$$

Proposición 10.2.2 Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ y una relación de equivalencia $\mathscr{R}$, entonces $(X/\mathscr{R}, \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}})$ es un espacio topológico.

Demostración. Probemos las tres propiedades que una topología debe satisfacer:

(1) $X = \pi^{-1}(X/\mathscr{R})$ y $\emptyset = \pi^{-1}(\emptyset)$, por lo tanto $X/\mathscr{R}$ y $\emptyset$ están en $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$.

(2) Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$, entonces $\pi^{-1}(\theta_1), \ldots, \pi^{-1}(\theta_n) \in \mathscr{T}$. Como $\mathscr{T}$ es una topología, entonces

$$\pi^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \theta_j\right) = \bigcap_{j=1}^{n} \pi^{-1}(\theta_j) \in \mathscr{T} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \theta_j \in \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}.$$

(3) Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$. Entonces, para todo $\alpha \in A$, se tiene $\pi^{-1}(\theta_\alpha) \in \mathscr{T}$. Como $\mathscr{T}$ es una topología, se deduce

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A} \theta_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} \pi^{-1}(\theta_\alpha) \in \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} \theta_\alpha \in \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}},$$

lo que termina de probar que $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$ es una topología.

■

Proposición 10.2.3 Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia definida sobre X. Entonces, la topología cuociente $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$ es la topología más fuerte que hace continua a la función proyección $\pi : X \longrightarrow X/\mathscr{R}$.

Demostración. Sea $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{P}(X/\mathscr{R})$ una topología definida sobre $X/\mathscr{R}$ tal que la función proyección $\pi : X \longrightarrow (X/\mathscr{R}, \mathscr{T}')$ es continua. Para $\theta \in \mathscr{T}'$, se tiene entonces que $\pi^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}$. Por la definición de $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$, se tendrá por lo tanto que $\theta \in \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$, probando así la inclusión

$$\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}.$$

■

Proposición 10.2.4 Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia definida sobre X. Si $(Y, \mathscr{T}_Y)$ es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función compatible con respecto a $\mathscr{R}$, es decir, existe $g : X/\mathscr{R} \longrightarrow Y$ tal que $f = g \circ \pi$, entonces f es continua si y solo si g es continua.

Demostración. Supongamos que $f = g \circ \pi : X \longrightarrow Y$ es continua. Si $\theta \in \mathscr{T}_Y$, entonces $(g \circ \pi)^{-1}(\theta) = \pi^{-1}(g^{-1}(\theta)) \in \mathscr{T}$. Por la definición de $\mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$, se tiene que $g^{-1}(\theta) \in \mathscr{T}_{X/\mathscr{R}}$ probando así que $g : X/\mathscr{R} \longrightarrow Y$ es continua.

Por otro lado, si g es continua, entonces $f = g \circ \pi$ es continua (composición de funciones continuas).

■

10.3 Topología generada por una familia de funciones

Existen ciertas topologías que se pueden generar o definir a partir de una clase de funciones. Las topologías débiles, a ser estudiadas en profundidad en el curso de análisis funcional, forman parte de esta clase. A continuación veremos muy brevemente, cómo se puede, a partir de una clase de funciones, definir una topología.

Definición 10.3.1 Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\{(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos. Dada una familia de funciones $\mathscr{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ donde $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$, la topología en X definida por la familia $\mathscr{F}$ es la topología más débil que hace continuas a las funciones de $\mathscr{F}$.

Proposición 10.3.1 Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\{(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos. Dada una familia de funciones $\mathscr{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$, considere $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ la topología en X definida por $\mathscr{F}$. Entonces,

$$\mathscr{B}_s = \{f_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) \mid \theta_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha;\ \ \alpha \in \Lambda\}$$

es una sub-base de $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$.

Demostración. Por la definición de $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$, se tiene que $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ pues las funciones $f_\alpha : (X, \mathscr{T}_{\mathscr{F}}) \longrightarrow (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ son continuas. Si denotamos por $\mathscr{T}'$ la topología generada por $\mathscr{B}_s$, se tendrá $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ pues los elementos en $\mathscr{T}'$ son uniones de intersecciones finitas de conjuntos en $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}_{\mathscr{F}}$, por lo tanto estarán en $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ pues esta última es una topología.

Por otro lado, si $\mathscr{T}'$ es la topología generada por $\mathscr{B}_s$, entonces las funciones $f_\alpha : (X, \mathscr{T}') \longrightarrow (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ serán continuas. Como $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ es la topología más débil que hace a estas funciones continuas, se tiene que $\mathscr{T}_{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{T}'$.

Concluimos así que $\mathscr{T}' = \mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ y, por lo tanto, $\mathscr{B}_s$ es una sub-base de $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$.

■

■ **Ejemplo 10.3.2** Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, podemos mencionar dos ejemplos de topologías en X y en X^*, que son definidas por una familia de funciones:

1. **Topología débil en X:** Se considera la familia de funciones $\mathscr{F} = X^*$, es decir, es la topología más débil que hace a los elementos de X^* continuos. Esta topología se denota por $\sigma(X, X^*)$.

2. **Topología $*$-débil en X^*:** Se considera la familia de funciones $\mathscr{F} = X$, es decir, es la topología más débil que hace a los elementos de X (vistos como elementos de X^{**}, ver inicio de la Sección 6.3) continuos. Esta topología se denota por $\sigma(X^*, X)$.

A continuación veremos dos resultados relacionados con la topología débil recientemente introducida. Estos resultados serán revisitados nuevamente en el curso de análisis funcional.

Proposición 10.3.3 Dado un espacio vectorial normado $(X,\|\cdot\|)$, pruebe que $\theta \in \sigma(X,X^*)$ si y solo si, para todo $x \in \theta$ existe $\varepsilon > 0$ y $\ell_1,\ldots,\ell_n \in X^*$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{y \in X \ : \ |\ell_j(x-y)| < \varepsilon\} \subseteq \theta.$$

Demostración. Por la Proposición 10.3.1, se tendrá que

$$\mathscr{B}_s = \{\ell^{-1}(I) \mid \ell \in X^*; I \quad \text{es un abierto de } \ \mathbb{R}\}$$

es una sub-base de $\sigma(X,X^*)$.

Por lo tanto, para $\theta \in \sigma(X,X^*)$ y $x \in \theta$, se tendrá que existen $\ell_1,\ldots,\ell_n \in X^*$ y $I_1,\ldots,I_n$ conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} \ell_j^{-1}(I_j) \subseteq \theta.$$

Como $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \ell_j^{-1}(I_j) \subseteq \theta$, entonces para $j = 1,\ldots,n$ se tiene que $\ell_j(x) \in I_j$. Dado los I_j son conjuntos abiertos, para $j = 1,\ldots,n$ existirá $\varepsilon_j > 0$ tal que $(\ell_j(x)-\varepsilon_j, \ell_j(x)+\varepsilon_j) \subseteq I_j$.

Definiendo $\varepsilon = \min\limits_{j=1,\ldots,n} \varepsilon_j > 0$ se tiene que para todo $j = 1,\ldots,n$

$$(\ell_j(x)-\varepsilon, \ell_j(x)+\varepsilon) \subseteq I_j \ \Rightarrow \ \{y \in X \ : \ |\ell_j(x-y)| < \varepsilon\} \subseteq \ell_j^{-1}(I_j).$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{y \in X \ : \ |\ell_j(x-y)| < \varepsilon\} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \ell_j^{-1}(I_j) \subseteq \theta,$$

demostrando así lo requerido. ■

Proposición 10.3.4 Dado un espacio vectorial normado $(X,\|\cdot\|)$, si la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge débil a $\bar{x} \in X$ (i.e., de acuerdo a la topología $\sigma(X,X^*)$), entonces es acotada.

Demostración. De la Sección 6.3, recordemos que los elementos $x \in X$ pueden identificarse con elementos de X^{**}. De hecho, para $x \in X$, se define $L_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L_x(\ell) = \ell(x) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, \ell \in X^*$$

y se tiene directamente que $L_x \in X^{**}$. Veamos que para $x \in X$, se tiene que

$$\|L_x\|_{**} = \sup_{\ell \in X^*} \frac{|L_x(\ell)|}{\|\ell\|_*} = \sup_{\ell \in X^*} \frac{|\ell(x)|}{\|\ell\|_*} = \|x\|,$$

donde $\|\cdot\|_{**}$ es la norma definida en el espacio bi-dual X^{**}. De la definición de esta norma, observamos que la desigualdad $\|L_x\|_{**} \leq \|x\|$ es directa, pues para todo $\ell \in X^*$ se tendrá $|\ell(x)| \leq \|\ell\|_* \|x\|$ (ver Corolario 4.2.3).

Si demostramos la implicancia

$$\|x\| > 1 \;\Rightarrow\; \|L_x\|_{**} > 1, \tag{10.2}$$

entonces se tendrá

$$\|x\| > a > 0 \;\Rightarrow\; \|L_x\|_{**} > a.$$

De esta última proposición, se deducirá $\|x\| \leq \|L_x\|_{**}$ (basta considerar $a = \|x\| - 1/k$ y tomar límite $k \to +\infty$).

Probemos entonces la implicancia (10.2). Si $\|x\| > 1$, entonces $x \notin B[0,1] = \{y \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Como $B[0,1]$ es un conjunto convexo cerrado, por el Teorema de Hahn-Banach (ver Corolario 6.3.7), sabemos que existe $\ell \in X^* \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell(x) > \beta \geq \ell(y) \qquad \forall\, y \in B[0,1].$$

De aquí se deduce

$$\ell(x) > \beta \geq \|\ell\|_* = \sup_{y \in X\setminus\{0\}} \frac{|\ell(y)|}{\|y\|} = \sup_{y \in B[0,1]} |\ell(y)| = \sup_{y \in B[0,1]} \ell(y).$$

Por lo tanto ,

$$\|L_x\|_{**} \geq \frac{|\ell(x)|}{\|\ell\|_*} > \frac{\beta}{\|\ell\|_*} \geq 1.$$

Hemos demostrado entonces que $\|x\| = \|L_x\|_{**}$ para todo $x \in X$. Ahora volvamos a la sucesión que converge débil.

Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge débil a $\bar{x} \in X$, veamos que para todo $\ell \in X^*$ se tiene $\ell(x_k) \to \ell(\bar{x})$ (convergencia en $\mathbb{R}$). Esto va a ser directo, pues si $\ell \in X^*$, se tiene que $\ell : (X, \sigma(X,X^*)) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Como $\ell(x_k) \to \ell(\bar{x})$ para todo $\ell \in X^*$, se tendrá

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |L_{x_k}(\ell)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty \qquad \forall\, \ell \in X^*,$$

y dado que $(X^*, \|\cdot\|_*)$ es espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 6.2.1) se tendrá que existe $M > 0$ tal que

$$\|L_{x_k}\|_{**} = \|x_k\| \leq M \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

probando así que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada.

■

11. Espacios vectoriales topológicos

Al finalizar el texto, estudiaremos de manera breve el concepto de espacios vectoriales topológicos, comenzando con su definición y propiedades de sus vecindades. Existen muchas propiedades demostradas en el texto que se podrían probar en el contexto de espacios vectoriales topológicos, como por ejemplo el teorema de Hahn-Banach. Sin embargo, generalizar tales resultados a estos espacios, escapa a los objetivos del texto.

Un resultado importante a retener, con el cual cerraremos el capítulo, es que en espacios vectoriales de dimensión finita, solo hay una topología que lo hace un espacio vectorial topológico separado.

11.1 Propiedades de las vecindades

Definición 11.1.1 Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$, y $\mathscr{T}$ una topología sobre X, se dice que $(X,\mathscr{T})$ es un **espacio vectorial topológico** si la función suma $+ : X \times X \longrightarrow X$ y la multiplicación por escalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ son funciones continuas considerando las topologías respectivas, es decir, la topología usual en $\mathbb{R}$ (la inducida por el valor absoluto) y la topología $\mathscr{T}$ en X, además de las que estas inducen en $X \times X$ y $\mathbb{R} \times X$.

Si $X = \mathbb{R}^n$ vimos que todas las normas definidas sobre X son equivalentes, por lo tanto inducen la misma topología. A esta le llamaremos **topología euclidiana**.

Ejercicio 11.1 Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathscr{T}$ la topología euclidiana definida sobre X. Demuestre que $(X,\mathscr{T})$ es un espacio vectorial topológico separado.

Ejercicio 11.2 Demuestre que todo espacio vectorial normado es un espacio vectorial topológico separado, donde la topología considerada es la definida por la norma.

Ejercicio 11.3 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, pruebe que $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial topológico separado, donde $\sigma(X, X^*)$ es la topología débil en X definida en el Ejemplo 10.3.2.

Ejercicio 11.4 Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, pruebe que $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un espacio vectorial topológico separado, donde $\sigma(X^*, X)$ es la topología $*$-débil en X^* definida en el Ejemplo 10.3.2.

Definición 11.1.2 Sea X un espacio vectorial, un conjunto $W \subseteq X$ se dice **balanceado** si

$$\alpha W \subseteq W \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| \leq 1,$$

y se dice **absorbente** si para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que

$$\alpha x \in W \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| \leq r.$$

Ejercicio 11.5 Sean X e Y dos espacios vectoriales y $L : X \longrightarrow Y$ una función lineal. Si $W \subseteq X$ es balanceado, demuestre que $L(W) \subseteq Y$ es balanceado.

A continuación demostraremos propiedades que tienen las vecindades en espacios vectoriales topológicos.

Proposición 11.1.1 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio vectorial topológico. Entonces:

(1) Para todo $x \in X$ se tiene
$$\mathscr{N}(x) = \{x\} + \mathscr{N}(0),$$
es decir, toda vecindad de x se escribe como la suma de x más una vecindad del cero.

(2) Si $V \in \mathscr{N}(0)$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $\alpha V \in \mathscr{N}(0)$.

(3) Si $V \in \mathscr{N}(0)$, entonces V es absorbente.

(4) Si $V \in \mathscr{N}(0)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existe $W \in \mathscr{N}(0)$ balanceado tal que
$$\overbrace{W + \cdots + W}^{n \text{ veces}} \subseteq V.$$

Demostración. Probemos cada una de las partes:

(1) Sea $x \in X$ y $V \in \mathscr{N}(x)$. Como la función $f : X \longrightarrow X$ definida por $f(y) = x + y$ es continua en $y = 0$ y V es una vecindad de $f(0) = x$, entonces existirá $W \in \mathscr{N}(0)$ tal que
$$f(W) = x + W \subseteq V.$$

Es decir, $W \subseteq V - x$ y, por lo tanto, $V - x \in \mathscr{N}(0)$ concluyendo $V \in \{x\} + \mathscr{N}(0)$, lo que prueba la inclusión $\mathscr{N}(x) \subseteq \{x\} + \mathscr{N}(0)$.

Sea $W \in \mathscr{N}(0)$, es decir, existe $V \in \mathscr{T}$ tal que $0 \in V \subseteq W$. Como la función $f : X \longrightarrow X$ definida por $f(y) = y - x$ es continua y biyectiva ($f^{-1}(z) = z + x$) se tiene que

$$f^{-1}(V) = V + x \in \mathscr{T}.$$

Como $V + x \subseteq W + x$, concluímos que $x + W \in \mathscr{N}(x)$ y, por lo tanto, $\{x\} + \mathscr{N}(0) \subseteq \mathscr{N}(x)$.

(2) Para $\alpha \neq 0$ definimos la función $f : X \longrightarrow X$ por $f(x) = x/\alpha$ que es continua. Para $V \in \mathscr{N}(0) = \mathscr{N}(f(0))$, existirá $\theta \in \mathscr{N}(0)$ tal que

$$f(\theta) \subseteq V \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha}\theta \subseteq V \;\Rightarrow\; \theta \subseteq \alpha V,$$

concluyendo que $\alpha V \in \mathscr{N}(0)$.

(3) Sea $V \in \mathscr{N}(0)$ y $x \in X$. Definimos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ por $f(\alpha) = \alpha x$ que es continua. Como $V \in \mathscr{N}(f(0))$, existirá $r > 0$ tal que $f([-r, r]) \subseteq V$, es decir,

$$f(\alpha) = \alpha x \in V \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| \leq r.$$

(4) Haremos inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ y en realidad será suficiente probarlo para $n = 1$ y $n = 2$. Comencemos con $n = 1$. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ dada por $f(\lambda, x) = \lambda x$ que es continua. Para $V \in \mathscr{N}(0) = \mathscr{N}(f(0,0))$, existirá $\delta > 0$ y $\tilde{W} \in \mathscr{N}(0)$ tales que

$$f((-\delta, \delta) \times \tilde{W}) \subseteq V \;\Rightarrow\; \alpha \tilde{W} \subseteq V \qquad \forall\, |\alpha| < \delta.$$

Definiendo $W = \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha \tilde{W}$ se tiene que W es balanceado, $W \subseteq V$ y $W \in \mathscr{N}(0)$ (por el punto (2)).

Para $n = 2$, consideremos la función $f : X \times X \longrightarrow X$ dada por $f(x, y) = x + y$ que es continua. Para $V \in \mathscr{N}(0) = \mathscr{N}(f(0,0))$ existirá $\tilde{W} \in \mathscr{N}(0)$ tal que

$$f(\tilde{W} \times \tilde{W}) \subseteq V \;\Rightarrow\; \tilde{W} + \tilde{W} \subseteq V.$$

Por lo hecho para $n = 1$ sabemos existe $W \in \mathscr{N}(0)$ balanceado tal que $W \subseteq \tilde{W}$. Por lo tanto,

$$W + W \subseteq V.$$

■

11.2 Aplicaciones lineales

Las siguientes proposiciones establecen propiedades sobre funciones lineales en espacios vectoriales topológicos, las que utilizaremos al finalizar.

Proposición 11.2.1 Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espacios vectoriales topológicos. Si $L : X \longrightarrow Y$ es una función lineal, entonces es continua si y solo si es continua en $x = 0$.

Demostración. Supongamos $L : X \longrightarrow Y$ es continua en $x = 0$ y probemos es continua en todo X. Sea $x \in X$ y $\tilde{W} \in \mathscr{N}_Y(L(x))$. Entonces, por la Proposición 11.1.1, existe $W \in \mathscr{N}_Y(0) = \mathscr{N}_Y(L(0))$ tal que $\tilde{W} = L(x) + W$. Como L es continua en 0, existirá $V \in \mathscr{N}_X(0)$ tal que

$$L(V) \subseteq W.$$

Definiendo $\tilde{V} = x + V \in \mathscr{N}_X(x)$ se tendrá

$$L(\tilde{V}) = L(x+V) = L(x) + L(V) \subseteq L(x) + W = \tilde{W},$$

probando así que L es continua en x y, por lo tanto, en todo X. ■

Proposición 11.2.2 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio vectorial topológico y $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ una función lineal ($\mathbb{R}^n$ dotado de la topología euclidiana). Entonces, L es continua.

Demostración. Probemos que L es continua en $x = 0$. Consideremos $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $V \in \mathscr{N}_X(0)$, entonces, por la Proposición 11.1.1, existe $W \in \mathscr{N}_X(0)$ balanceado tal que

$$\overbrace{W + \cdots + W}^{n \text{ veces}} \subseteq V.$$

Además, como W es absorbente, para cada $j = 1, \ldots, n$ se tendrá que existe $\delta_j > 0$ tal que

$$\alpha L(e_j) \in W \qquad \forall\, |\alpha| \leq \delta_j.$$

Definiendo $\delta = \min_{j=1,\ldots,n} \delta_j > 0$, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tendremos

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| < \delta \;\Rightarrow\; L(x) = x_1 L(e_1) + \cdots + x_n L(e_n) \in W + \cdots + W \subseteq V,$$

probando así que L es continua en cero y, por lo tanto, L es continua. ■

Ejercicio 11.6 Dado un espacio vectorial topológico $(X, \mathscr{T})$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$, para una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X$ se define $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ por

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

Demuestre que φ es lineal, continua y biyectiva.

Si X es un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$), por el Teorema 5.3.1 sabemos que todas las normas que se definan sobre X serán equivalentes, por lo tanto definen la misma topología y, de acuerdo al Ejercicio 11.2, será un espacio vectorial topológico separado. En estos espacios, una pregunta interesante es saber si la topología débil $\sigma(X,X^*)$ es diferente o no a la topología que define cualquier norma, pregunta que responderemos pronto.

Teorema 11.2.3 Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio vectorial topológico separado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Entonces, toda función lineal biyectiva (isomorfismo) $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ es un homeomorfismo, es decir, es continua y su inversa es continua.

Demostración. Por la Proposición 11.2.2, sabemos que $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ es continua. Demostremos que $L^{-1} : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en 0. Para ello, consideremos una norma $\|\cdot\|$ cualquiera en $\mathbb{R}^n$ y probemos que existe $V \in \mathscr{N}_X(0)$ tal que

$$L^{-1}(V) \subseteq B(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}.$$

Esto en particular implicará que para todo $\varepsilon > 0$ existirá una vecindad $W \in \mathscr{N}_X(0)$, dada por $W = \varepsilon V$, tal que

$$L^{-1}(W) = L^{-1}(\varepsilon V) = \varepsilon L^{-1}(V) \subseteq \varepsilon B(0,1) = B(0,\varepsilon),$$

probando así que L^{-1} es continua en cero.

Consideremos

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

que es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Como L es continua y $(X,\mathscr{T})$ es separado, se tiene que $K = L(S)$ es compacto (ver Proposición 9.4.2) y, en particular, es cerrado (ver Ejercicio 9.11).

Como $0 \notin S$, por la inyectividad de L se tiene que $0 \notin K = L(S)$. Dado K^c es abierto, entonces $K^c \in \mathscr{N}_X(0)$. Sabemos además (por la Proposición 11.1.1), que existe $V \in \mathscr{N}_X(0)$ balanceado tal que $V \subseteq K^c$, de donde obtenemos $V \cap K = \emptyset$.

Dado L^{-1} es lineal, se tiene que $L^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ es balanceado (ver Ejercicio 11.5) y, también por la inyectividad de L, se tiene que

$$L^{-1}(V) \cap S = \emptyset.$$

Concluimos entonces que

$$L^{-1}(V) \subseteq B(0,1),$$

pues si $z \in L^{-1}(V)$ y $\|z\| \geq 1$, entonces como $L^{-1}(V)$ es balanceado (y $1/\|z\| \leq 1$), se tendría

$$\frac{z}{\|z\|} \in L^{-1}(V) \cap S,$$

lo que es una contradicción. Como decíamos al principio, lo demostrado implicará entonces que L^{-1} es continua en cero y, por la Proposición 11.2.1, será continua en todo X. ■

11.3 Dimensión finita

A partir del Teorema 11.2.3, se obtienen como corolarios los siguientes resultado para espacios de dimensión finita, con los cuales concluimos este texto.

Corolario 11.3.1 Solo la topología euclidiana hace de $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial topológico separado.

Demostración. Sea $\mathscr{T}$ una topología definida sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T})$ es un espacio vectorial topológico separado. Entonces, como la función identidad $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal y biyectiva, por el Teorema 11.2.3 se tendrá que $I : (\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_E) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathscr{T})$ es un homeomorfismo, donde $\mathscr{T}_E$ es la topología euclidiana. Se concluye entonces que $\mathscr{T}_E = \mathscr{T}$. ■

Corolario 11.3.2 Si X es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces solo existe una única topología que lo hace un espacio vectorial topológico separado.

Demostración. Sea $n \geq 1$ la dimensión del espacio vectorial X y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X$ una base. La función $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

será lineal y biyectiva (ver Ejercicio 11.6). Sean $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ dos topologías definidas sobre X tal que $(X, \mathscr{T}_j)$ $(j = 1, 2)$ es un espacio vectorial topológico separado. Por el Teorema 11.2.3, la función φ será un homeomorfismo si en X se considera $\mathscr{T}_1$ o $\mathscr{T}_2$. Por lo tanto, la identidad $I : (X, \mathscr{T}_1) \longrightarrow (X, \mathscr{T}_2)$ es también un homeomorfismo, al ser la composición $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Se concluye entonces que $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. ■

Como consecuencia del corolario anterior, deducimos que en un espacio vectorial de dimensión finita, la topología que induce una norma será igual a la topología débil, ya que ambas hacen del espacio un espacio vectorial topológico separado (ver ejercicios 11.2 y 11.3).

Ejercicios resueltos

(E1) Considere dos espacios topológicos $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva y continua. Pruebe que f es un homeomorfismo, si y solamente si,

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \qquad \forall\, A \subseteq X.$$

Solución: Si f es un homeomorfismo, en particular es una aplicación cerrada ($f(C)$ es cerrado para todo cerrado C). De esta forma, dado $A \subseteq X$, se tendrá que $f(\overline{A})$ es un conjunto cerrado y como $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ se deduce

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}).$$

Por otro lado, si tomamos $y \in f(\overline{A})$ y V una vecindad de y, dado $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$, por la continuidad de f se tendrá que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y, por lo tanto,

$$f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset,$$

concluyendo

$$V \cap f(A) \neq \emptyset$$

para toda vecindad V de y, de donde se deduce que $y \in \overline{f(A)}$.

Finalmente, si

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \qquad \forall\, A \subseteq X,$$

mostremos que f es una aplicación cerrada para probar así que es un homeomorfismo. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado, entonces

$$f(A) = f(\overline{A}) = \overline{f(A)},$$

lo que nos permite concluir que $f(A)$ es un conjunto cerrado.

(E2) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(X^*, \|\cdot\|_*)$ su espacio dual, dotado de la norma

$$\|\ell\|_* = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\ell(x)}{\|x\|} = \sup_{x\in B[0,1]} \ell(x) \qquad \forall\, \ell \in X^*,$$

donde $B[0,1]$ es la bola cerrada de centro 0 y radio unitario en X.

Considere la siguiente familia de conjuntos

$$B := \{\ell^{-1}(I) \subseteq X \mid \ell \in X^*,\ I \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto } \},$$

y defina $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ como la colección de todos los conjuntos que se obtienen como uniones de intersecciones finitas de elementos en B.

a) Pruebe que $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico y que si $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ es la topología que induce la norma $\|\cdot\|$, entonces $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$, es decir, $\mathscr{T}$ es más débil que $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$.

Solución: Probemos que $\mathscr{T}$ es una topología:

- Si consideramos $\ell \equiv 0$ (la función lineal nula), se tiene que $\ell \in X^*$ y $X = \ell^{-1}((-1,1))$, por lo tanto X está en B y, en consecuencia, X está en $\mathscr{T}$. El conjunto vacío también estará en B pues para cualquier $\ell \in X^*$ se tendrá que $\emptyset = \ell^{-1}(\emptyset)$.
- Probaremos que la intersección de dos conjuntos en $\mathscr{T}$ está en $\mathscr{T}$, de donde se deducirá que toda intersección finita de conjuntos en $\mathscr{T}$ estará en $\mathscr{T}$. Sean θ_1 y θ_2 dos conjuntos en $\mathscr{T}$. Para $j = 1,2$, el conjunto θ_j se puede escribir como

$$\theta_j = \bigcup_{\alpha_j\in\Lambda_j} W_{\alpha_j} = \bigcup_{\alpha_j\in\Lambda_j} \bigcap_{\beta_{\alpha_j}\in\Omega_{\alpha_j}} B_{\beta_{\alpha_j}},$$

donde los conjuntos $B_{\beta_{\alpha_j}}$ están en B y Ω_{α_j} es un conjunto finito de índices para todo $\alpha_j \in \Lambda_j$ y $j = 1,2$. En consecuencia,

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \left(\bigcup_{\alpha_1\in\Lambda_1} \bigcap_{\beta_{\alpha_1}\in\Omega_{\alpha_1}} B_{\beta_{\alpha_1}} \right) \cap \left(\bigcup_{\alpha_2\in\Lambda_2} \bigcap_{\beta_{\alpha_2}\in\Omega_{\alpha_2}} B_{\beta_{\alpha_2}} \right) =$$

$$= \bigcup_{\alpha_1\in\Lambda_1} \bigcup_{\alpha_2\in\Lambda_2} \bigcap_{\beta_{\alpha_1}\in\Omega_{\alpha_1}} \bigcap_{\beta_{\alpha_2}\in\Omega_{\alpha_2}} \left(B_{\beta_{\alpha_1}} \cap B_{\beta_{\alpha_2}} \right).$$

Como para cada $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ se tiene que

$$\bigcap_{\beta_{\alpha_1}\in\Omega_{\alpha_1}} \bigcap_{\beta_{\alpha_2}\in\Omega_{\alpha_2}} \left(B_{\beta_{\alpha_1}} \cap B_{\beta_{\alpha_2}} \right)$$

es una intersección finita de elementos en B, concluimos que $\theta_1 \cap \theta_2$ se escribe como una unión de intersecciones finitas de elementos en B, por lo tanto $\theta_1 \cap \theta_2$ está en $\mathscr{T}$.

- Sea $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos en $\mathscr{T}$. Cada θ_α es una unión de intersecciones finitas de elementos en B, por lo tanto, el conjunto
$$W := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha$$
será una unión de intersecciones finitas de elementos en B, de donde se concluye que $W \in \mathscr{T}$.

Concluimos entonces que $\mathscr{T}$ es una topología y, por lo tanto, $(X,\mathscr{T})$ es un espacio topológico.

Para probar $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$, como ya sabemos que $\mathscr{T}$ es una topología, es suficiente mostrar que $B \subseteq \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$.

Sea $\theta \in B$, es decir, existe un abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in X^*$ tales que $\theta = \ell^{-1}(I)$. El hecho que $\ell \in X^*$ quiere decir que $\ell : (X,\mathscr{T}_{\|\cdot\|}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, por lo tanto $\theta = \ell^{-1}(I) \in \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$, probando así que $B \subseteq \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ y, en consecuencia, $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$.

b) Para todo $\ell \in X^*$ pruebe que $\ell : (X,\mathscr{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Solución: Dado $\ell \in X^*$, se tiene que para todo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto $\ell^{-1}(I)$ está en B y, por lo tanto, está en $\mathscr{T}$, probando así la continuidad de $\ell : (X,\mathscr{T}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) Demuestre que $(X,\mathscr{T})$ es un espacio topológico separado. Para ello puede utilizar la igualdad (demostrándola previamente; Ver demostración de la Proposición 10.3.4)
$$\|x\| = \sup_{\ell\in X^*\setminus\{0\}} \frac{\ell(x)}{\|\ell\|_*} \qquad \forall\, x \in X. \tag{11.1}$$

Solución: Sean $x,\ y \in X$ distintos, por lo tanto $\|x-y\| > 0$. De la expresión de la norma dada por (11.1), deducimos que debe existir $\ell \in X^*$ tal que $\ell(x-y) \neq 0$. Definamos
$$\varepsilon := \frac{|\ell(x-y)|}{3} > 0$$
y los abiertos en $\mathbb{R}$ dados por
$$I_1 := (\ell(x)-\varepsilon, \ell(x)+\varepsilon) \quad \text{ y } \quad I_2 := (\ell(y)-\varepsilon, \ell(y)+\varepsilon).$$
Claramente se tendrá que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Definiendo $\theta_1 = \ell^{-1}(I_1)$ y $\theta_2 = \ell^{-1}(I_2)$, conjuntos que están en $\mathscr{T}$, concluimos $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$, $x \in \theta_1$ e $y \in \theta_2$, por lo tanto $(X,\mathscr{T})$ es un espacio topológico separado.

(E3) Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico. Si $\theta \in \mathscr{T}$ y $A \subseteq X$, pruebe las siguientes propiedades:

(a) Si $A \cap \theta = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \theta = \emptyset$.

Solución: Supongamos $A \cap \theta = \emptyset$. Si $\overline{A} \cap \theta \neq \emptyset$, sea $x \in \overline{A} \cap \theta$. Como $\theta \in \mathscr{T}$ y $x \in \theta$, se tiene $\theta \in \mathscr{N}(x)$. Entonces, como $x \in \overline{A}$, obtenemos $\theta \cap A \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, concluyendo así $\overline{A} \cap \theta = \emptyset$.

(b) $\theta \cap \overline{A} \subseteq \overline{\theta \cap A}$.

Solución: Sea $x \in \theta \cap \overline{A}$ y $V \in \mathscr{N}(x)$. Como $x \in \theta$ y $\theta \in \mathscr{T}$, entonces $\theta \cap V \in \mathscr{N}(x)$. Dado que $x \in \overline{A}$, se tendrá $(\theta \cap V) \cap A = V \cap (\theta \cap A) \neq \emptyset$, es decir,

$$V \cap (\theta \cap A) \neq \emptyset \qquad \forall\, V \in \mathscr{N}(x),$$

probando así que $x \in \overline{\theta \cap A}$.

(E4) Si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son dos topologías definidas sobre X tales que $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, $(X, \mathscr{T}_1)$ es separado y $(X, \mathscr{T}_2)$ es compacto, demuestre que $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

Solución: Sea $\theta \in \mathscr{T}_2$, entonces θ^c es $\mathscr{T}_2$-cerrado. Como $(X, \mathscr{T}_2)$ es compacto, entonces θ^c es $\mathscr{T}_2$-compacto.

Por la inclusión $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, se tendrá que todo recubrimiento de θ^c de elementos en $\mathscr{T}_1$, será un recubrimiento de elementos en $\mathscr{T}_2$ y, por lo tanto (dado θ^c es $\mathscr{T}_2$-compacto), tendrá un subrecubrimiento finito. Como $(X, \mathscr{T}_1)$ es separado, deducimos que θ^c es $\mathscr{T}_1$-compacto, implicando que es $\mathscr{T}_1$-cerrado, concluyendo así que $\theta \in \mathscr{T}_1$.

Lo anterior prueba la inclusión $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$. Por la hipótesis $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ se concluye $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

(E5) Pruebe que si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico compacto, entonces para toda topología $\mathscr{T}'$ estrictamente más débil que $\mathscr{T}$ se tiene que $(X, \mathscr{T}')$ no es separado.

Solución: Si $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$ y $(X, \mathscr{T}')$ es separado, por el ejercicio anterior se tiene que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. Por lo tanto, si $\mathscr{T}'$ es estrictamente más débil que $\mathscr{T}$ (i.e., $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$ y $\mathscr{T}' \neq \mathscr{T}$) necesariamente $(X, \mathscr{T}')$ no es separado.

(E6) Sea $(X, \mathscr{T}_X)$ un espacio topológico. Dado un conjunto $A \subseteq X$, demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es denso;

(b) $\operatorname{int}(A^c) = \emptyset$;

(c) Si $C \subseteq X$ es cerrado y $A \subseteq C$, entonces $C = X$.

Solución:

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos $\operatorname{int}(A^c) \neq \emptyset$ y sea $x \in \operatorname{int}(A^c)$. Entonces, existe $\theta \in \mathscr{T}_X$ tal que $x \in \theta \subseteq A^c$. Esto implica que $\theta \neq \emptyset$ y $A \cap \theta = \emptyset$, lo que es una contradicción pues A es denso y, por lo tanto, intersecta a todo abierto no vacío. Concluimos entonces $\operatorname{int}(A^c) = \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $C \subseteq X$ cerrado tal que $A \subseteq C$. Para $x \in X$ supongamos que $x \notin C$, es decir, $x \in C^c \in \mathscr{T}_X$. Como $C^c \subseteq A^c$ concluimos que $x \in \operatorname{int}(A^c)$, lo que es una contradicción con (b). Por lo tanto, $x \in C$ probando así la inclusión $X \subseteq C$ que evidentemente implica la igualdad $C = X$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Como $A \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es cerrado, por (c) se concluye $\overline{A} = X$, es decir, A es denso.

(E7) Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T}_X)$, demuestre que un conjunto $A \subseteq X$ intersecta a todo conjunto denso de X si y solamente si $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$.

Solución:

Si $\operatorname{int}(A) = \emptyset$, por el ejercicio anterior se tendrá que A^c es denso. Pero $A \cap A^c = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis de que A intersecta a todo conjunto denso. Deducimos entonces que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$.

Por otro lado, si D es denso, entonces $D \cap \operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, pues $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ y es abierto. Entonces $\emptyset \neq \operatorname{int}(A) \cap D \subseteq A \cap D$, concluyendo que A intersecta a todo conjunto denso.

(E8) Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ e $(Y, \mathscr{T}_Y)$ con $(Y, \mathscr{T}_Y)$ separado (Hausdorff) y $f,\ g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas.

(a) Pruebe que el conjunto
$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \tag{11.2}$$
es cerrado.

Solución: Sea $x \in A^c$, es decir, $f(x) \neq g(x)$. Como $(Y, \mathscr{T}_Y)$ es separado, existirán $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathscr{T}_Y$ tales que $f(x) \in \theta_1$, $g(x) \in \theta_2$ y $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$. Por otro lado,
$$x \in V = f^{-1}(\theta_1) \cap g^{-1}(\theta_2).$$
Por la continuidad de f y g se tiene que $V \in \mathscr{T}_X$.

Veamos que $V \subseteq A^c$. Para $z \in V = f^{-1}(\theta_1) \cap g^{-1}(\theta_2)$ se tiene que $f(z) \in \theta_1$ y $g(z) \in \theta_2$. Como $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$, entonces $f(z) \neq g(z)$ concluyendo $z \in A^c$.

De esta forma, para todo $x \in A^c$ hemos encontrado $V \in \mathscr{N}(x)$ tal que $V \subseteq A^c$, probando así que A^c es abierto y, por lo tanto, A es cerrado.

(b) Si f y g son iguales en un conjunto denso de X, demuestre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Solución: Sea $D \subseteq X$ un conjunto denso tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$. Probemos que el conjunto A, definido por (11.2), es igual a X. La hipótesis nos dice que
$$D \subseteq A.$$
Como A es cerrado (por el ejercicio anterior) se tendrá que $X = \overline{D} \subseteq A$, concluyendo lo deseado.

(E9) Sea X el conjunto definido por
$$X = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \leq x_k \leq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\} = \prod_{k\in\mathbb{N}} [0,1] = [0,1]^{\mathbb{N}},$$
es decir, el espacio de la sucesiones reales a valores en el intervalo $[0,1]$, conjunto que se puede escribir como el espacio producto $[0,1]^{\mathbb{N}}$. A este conjunto, lo dotaremos de la topología producto, considerando en $[0,1]$ la topología inducida por la topología euclidiana en $\mathbb{R}$. A la topología producto en X la denotaremos $\mathscr{T}_p$.

Por otra parte, consideraremos la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual, para $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ e $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ estará definida por
$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1}.$$

a) Demuestre que (X,d) es un espacio métrico.

Solución: Primero veamos que la función d está bien definida. Para $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ e $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$, se tendrá que

$$\frac{|x_k - y_k|}{k+1} \leq 1 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

dado que $x_k,\ y_k \in [0,1]$. Por lo tanto $d(x,y) \in \mathbb{R}$ y la función d está bien definida.

Si $d(x,y) = 0$, entonces

$$\frac{|x_k - y_k|}{k+1} = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

por lo tanto $x_k = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ concluyendo $x = y$.

Evidentemente $d(x,y) = d(y,x)$ ya que

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|y_k - x_k|}{k+1} = d(y,x).$$

Finalmente, para $z = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ se tendrá

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - z_k|}{k+1} + \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|z_k - y_k|}{k+1} = d(x,z) + d(z,y).$$

Por lo tanto, (X,d) es espacio métrico.

b) Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > 1/\varepsilon - 1$, para $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ e $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$ se tiene

$$d(x,y) < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \max_{0\leq k\leq k_0} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon.$$

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > 1/\varepsilon - 1$. Evidentemente

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \max_{0\leq k\leq k_0} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, probaremos la otra inclusión. Supongamos

$$\max_{0\leq k\leq k_0} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon.$$

Para $k > k_0$ se tiene

$$\frac{|x_k - y_k|}{k+1} \leq \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon \qquad \forall\, k > k_0.$$

Lo anterior (junto con la hipótesis) permite concluir

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon.$$

c) Si $\mathscr{T}_d$ es la topología que define la métrica d en X, demuestre que $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_d$.

Solución: Sea V un conjunto abierto de $[0,1]$, es decir, V se escribe como $V = W \cap [0,1]$ con W un abierto de $\mathbb{R}$. Sabemos que para todo $k^* \in \mathbb{N}$, los conjuntos

$$\theta = V \times \prod_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k^*\}} [0,1]$$

son abiertos de acuerdo a la topología $\mathscr{T}_p$, pues es un rectángulo de abiertos. De hecho,

$$\mathscr{B}_s = \left\{ V \times \prod_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k^*\}} [0,1] \mid V \text{ abierto de } [0,1];\ k^* \in \mathbb{N} \right\}$$

constituye una sub-base de $\mathscr{T}_p$. Por esta razón, para demostrar la inclusión $\mathscr{T}_p \subseteq \mathscr{T}_d$, solo probaremos $\mathscr{B}_s \subseteq \mathscr{T}_d$.

Consideremos W un abierto de $\mathbb{R}$, $V = W \cap [0,1]$, $k^* \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathscr{B}_s$ dado por

$$\theta = V \times \prod_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k^*\}} [0,1].$$

Sea $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \theta$, que es equivalente a decir $x_{k^*} \in V$. Como V es un abierto de $[0,1]$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x_{k^*} - (k^*+1)\varepsilon, x_{k^*} + (k^*+1)\varepsilon) \cap [0,1] \subseteq V,$$

por lo tanto

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \theta,$$

ya que si $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in B(x,\varepsilon)$, entonces $d(x,y) < \varepsilon$, es decir

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{k+1} < \varepsilon \ \Rightarrow\ \frac{|x_{k^*} - y_{k^*}|}{k^*+1} < \varepsilon \ \Rightarrow\ y_{k^*} \in V \ \Leftrightarrow\ y \in \theta.$$

Hemos demostrado así que para todo $x \in \theta$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq \theta$, probando entonces que $\theta \in \mathscr{T}_d$ para todo $\theta \in \mathscr{B}_s$. Nuevamente, como $\mathscr{B}_s$ es una sub-base de $\mathscr{T}_p$ (y $\mathscr{T}_d$ es una topología), concluimos $\mathscr{T}_p \subseteq \mathscr{T}_d$.

Para probar la otra inclusión, dado $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in X$ y $\varepsilon > 0$, demostremos que $B(x,\varepsilon) \in \mathscr{T}_p$.

Consideremos $k_0 > 1/\varepsilon - 1$ y en $[0,1]$ definamos los abiertos

$$V_k = (x_k - (k+1)\varepsilon, x_k + (k+1)\varepsilon) \cap [0,1].$$

En X definamos el conjunto

$$\theta = \prod_{k=0}^{k_0} V_k \times \prod_{k > k_0} [0,1].$$

Observar que $\theta \in \mathscr{T}_p$ al ser un rectángulo de abiertos. Probemos ahora que

$$\theta \subseteq B(x,\varepsilon).$$

Para $y=\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\theta$, se tiene

$$y_k\in V_k=(x_k-(k+1)\varepsilon,x_k+(k+1)\varepsilon)\cap[0,1]\quad\forall\, k\leq k_0\;\Leftrightarrow\;\frac{|x_k-y_k|}{k+1}<\varepsilon\qquad\forall\, k\leq k_0.$$

Lo anterior implicará $\max\limits_{0\leq k\leq k_0}\dfrac{|x_k-y_k|}{k+1}<\varepsilon$ y, por el ejercicio anterior, concluimos $d(x,y)<\varepsilon$, es decir, $y\in B(x,\varepsilon)$.

Hemos demostrado que para todo $x\in X$ y todo $\varepsilon>0$ existe $\theta\in\mathscr{T}_p$ tal que $x\in\theta\subseteq B(x,\varepsilon)$. Esto prueba que todas las bolas abiertas (de acuerdo a la métrica d) son conjuntos abiertos de acuerdo a $\mathscr{T}_p$, probando así $\mathscr{T}_d\subseteq\mathscr{T}_p$ y, por lo tanto, la igualdad $\mathscr{T}_p=\mathscr{T}_d$.

(E10) Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$. Si $\ell:X\longrightarrow\mathbb{R}$ es un funcional lineal no nulo, demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) ℓ es continua;

(b) $\ker(\ell)=\{x\in X\mid \ell(x)=0\}$ es un conjunto cerrado;

(c) $\ker(\ell)$ no es un conjunto denso;

(d) En X existe una vecindad del origen $V\in\mathscr{N}(0)$ y $M>0$ tal que

$$\ell(x)\in[-M,M]\qquad\forall\, x\in V.$$

Solución:

(a) $\Rightarrow$ (b): Como $\mathbb{R}$ es un espacio topológico separado, entonces $\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, si ℓ es continua, se tiene que

$$\ker(\ell)=\{x\in X\mid \ell(x)=0\}=\ell^{-1}(\{0\})$$

es un conjunto cerrado, al ser preimagen de un cerrado por una función continua.

(b) $\Rightarrow$ (c): Como ℓ no es nulo, entonces existe $x\in X$ tal que $\ell(x)\neq 0$, es decir, $x\notin\ker(\ell)$. Por otro lado, si $\ker(\ell)$ es cerrado, entonces $\overline{\ker(\ell)}=\ker(\ell)$. Como $x\notin\ker(\ell)$, entonces $\overline{\ker(\ell)}\neq X$, concluyendo así que $\ker(\ell)$ no es denso.

(c) $\Rightarrow$ (d): Supongamos que no se tiene (d), es decir, para toda vecindad $V\in\mathscr{N}(0)$ y para todo $M>0$ se tiene que existe $x\in V$ tal que $|\ell(x)|>M$.

Sea $z\in X$ y $W\in\mathscr{N}(z)$. Por propiedad de los espacios vectoriales topológicos (ver Proposición 11.1.1), sabemos que existirá $\tilde{V}\in\mathscr{N}(0)$ tal que $W=z+\tilde{V}$. Además, sabemos que existirá $V\in\mathscr{N}(0)$ balanceada, tal que $V\subseteq\tilde{V}$. Sea $M>|\ell(z)|$. Entonces (dado no se tiene (d)), existirá $x\in V$ tal que $|\ell(x)|>M$. Definamos ahora

$$y=z-\frac{\ell(z)}{\ell(x)}x.$$

Observemos que $\ell(y)=0$, por lo tanto, $y\in\ker(\ell)$. Además, como V es balanceado y

$$\left|-\frac{\ell(z)}{\ell(x)}\right|\leq\frac{|\ell(z)|}{M}<1,$$

dado $x \in V$ se tendrá
$$-\frac{\ell(z)}{\ell(x)}x \in V.$$
Por lo tanto,
$$y = z - \frac{\ell(z)}{\ell(x)}x \in z + V \subseteq z + \tilde{V} = W,$$
concluyendo que $y \in \ker(\ell) \cap W$.

Hemos demostrado asi que para todo $z \in X$ y $W \in \mathscr{N}(z)$, se tiene $\ker(\ell) \cap W \neq \emptyset$, es decir, $\overline{\ker(\ell)} = X$ deduciendo que $\ker(\ell)$ es denso, lo que es una contradicción. De esta forma hemos probado que se tiene (d).

(d) $\Rightarrow$ (a): Suponiendo cierto (d), consideremos $V \in \mathscr{N}(0)$ y $M > 0$ tales que
$$\ell(x) \in [-M, M] \qquad \forall\, x \in V.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $W = (\varepsilon/2M)V$. Observe que $W \in \mathscr{N}(0)$ (ver Proposición 11.1.1).

Para $y \in W$, existe $x \in V$ tal que $y = (\varepsilon/2M)x$. Por lo tanto,
$$|\ell(y)| = \frac{\varepsilon}{2M}|\ell(x)| \leq \frac{\varepsilon M}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Hemos demostrado entonces, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $W \in \mathscr{N}(0)$ tal que
$$\ell(W) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon),$$
lo que prueba la continuidad de ℓ en cero y, por lo tanto (al ser ℓ lineal), la continuidad en todo X.

(E11) Considere $(X, \mathscr{T})$ un espacio vectorial topológico separado. Sea $K \subseteq X$ compacto y $C \subseteq X$ cerrado tales que $K \cap C = \emptyset$.

(a) Demuestre que para todo $x \in K$ existe $V_x \in \mathscr{N}(0)$ balanceada tal que
$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset$$
y
$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset.$$

Solución: Como $K \cap C = \emptyset$, entonces $K \subseteq C^c$. Como C^c es abierto, entonces para todo $x \in K$, existe una vecindad $W_x \in \mathscr{N}(0)$ tal que $x + W_x \subseteq C^c$.

Por propiedad de espacios vectoriales topológicos (ver Proposición 11.1.1), existirá una vecindad $V_x \in \mathscr{N}(0)$ balanceada tal que $V_x + V_x + V_x \subseteq W_x$ y, por lo tanto,
$$x + V_x + V_x + V_x \subseteq x + W_x \subseteq C^c \;\Rightarrow\; (x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset.$$

Por otro lado, como V_x es una vecindad balanceada, se tiene que $-V_x = V_x$. Por lo tanto, si
$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) \neq \emptyset,$$

entonces existen $u,\ v,\ w \in V_x$ y $z \in C$ tales que $x+u+v=z+w$. Pero

$$z = x+u+v-w \in x+(x+V_x+V_x+V_x)\cap C,$$

lo que es una contradicción con lo ya obtenido, concluyendo

$$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)=\emptyset.$$

(b) Pruebe que existe $V \in \mathscr{N}(0)$ tal que

$$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset.$$

Solución: Por la parte anterior, para todo $x \in K$ existe $V_x \in \mathscr{N}(0)$ balanceada tal que

$$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)=\emptyset.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar a los conjuntos V_x abiertos. Entonces,

$$K \subseteq \bigcup_{x\in X}(x+V_x).$$

Como K es compacto, existen $x_1,\ldots,x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(x_j+V_{x_j}).$$

Definamos

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$$

que estará en $\mathscr{N}(0)$ dado es una intersección finita de vecindades del cero.

Supongamos existe $x \in X$ tal que

$$x \in (K+V)\cap(C+V),$$

es decir, existe $y \in K$, $v \in V$, $z \in C$ y $w \in V$ tales que $x=y+v=z+w$. Como $y \in K$, existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $y \in x_j+V_{x_j}$. Dado que $v,\ w \in V$, entonces $v,\ w \in V_{x_j}$. De esta forma se tendrá

$$x=y+v=z+w \in (x_j+V_{x_j}+V_{x_j})\cap(C+V_{x_j}),$$

lo que es una contradicción con lo ya obtenido. Concluimos así que

$$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset.$$

Bibliografía & Índice alfabético

Bibliografía

[1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, 1983.

[2] N. L. Carothers. *Real Analysis*. Cambridge University Press, 2000.

[3] R. Correa. *Cálculo en varias variables*. Universidad de Chile, 1995.

[4] J. Dieudonné. *J. Foundations of modern analysis*. Pure and Applied Mathematics, Vol. X Academic Press, New York-London 1960.

[5] C. S. Hönig. *Aplicações da topologia à análise*, Proyecto Euclides, IMPA, 1976.

[6] E. L. Lima. *Espaços métricos* (4a ed.). IMPA, 2017.

[7] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Springer-Verlag, 1989.

[8] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third edition McGraw-Hill Book Co., New York 1976.

[9] L. Schwartz. *Analyse: Topologie génerale et analyse fonctionnelle*. Hermann, Paris, 1970.

[10] L. Schwartz. *Analyse I: Théorie des ensembles et topologie*. Hermann, Paris, 1991.

Índice alfabético

E

F

G

H

I

L

M