Conjuntos medibles.

- Definición de σ-álgebra.
- Ejemplos de σ-álgebras.
- σ-álgebra de Borel.
- σ-álgebra de Borel extendida.

Definición de σ-álgebra.

Def.: Sean X un conjunto **cualquiera** y $\mathscr{X}$ una familia de subconjuntos de X. $\mathscr{X}$ es una **σ-álgebra** si satisface:

a) $X \in \mathscr{X}$;

b) $A \in \mathscr{X} \implies A^{\mathrm{c}} := X \setminus A \in \mathscr{X}$;

c) $A_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$.

En tal caso, a $(X, \mathscr{X})$ se le denomina un **espacio medible** y todos los conjuntos $A \in \mathscr{X}$ se dice que son **$\mathscr{X}$-medibles** (o **medibles**, a secas, si se sobreentiende cual es la σ-álgebra).

Teor.: Sea $(X, \mathscr{X})$ una espacio medible. Entonces:

a) $\emptyset \in \mathscr{X}$;

b) $A_n \in \mathscr{X} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$;

c) $A_n \in \mathscr{X}$, $n = 1, \ldots, N \implies \bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathscr{X}$ y $\bigcap_{n=1}^N A_n \in \mathscr{X}$.

Dem.: (a) $\emptyset = X^{\mathrm{c}} \in \mathscr{X}$.

(b) $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}} \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathscr{X}$.

(c) Sean $A_m := \emptyset \ \forall m > N$. Entonces, $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$.

Sean $A_m := X \ \forall m > N$. Entonces, $\bigcap_{n=1}^N A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$. ∎

En consecuencia, una σ-álgebra es una familia de subconjuntos de X, cerrada por complementación, unión e intersección, finitas o numerables, que contiene al propio espacio X y al conjunto vacío.

Ejemplos de σ-álgebras.

Sea X un conjunto cualquiera.

- Sea $\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\}$, **el conjunto de partes de** X.
  $\mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra que se denomina **maximal**, pues contiene a cualquier otra σ-álgebra de subconjuntos de X.
- $\mathscr{X} := \{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra que se denomina **minimal**, pues está contenida en cualquier otra σ-álgebra de subconjuntos de X.
- Sea $A \subset X : \emptyset \neq A \neq X$. Entonces, $\mathscr{X} := \{\emptyset, A, A^{\mathrm{c}}, X\}$ es una σ-álgebra. De hecho, es la menor σ-álgebra que contiene a A.

Prop.: Si $\forall \beta \in B$, $\mathscr{X}_\beta$ es una σ-álgebra, entonces $\bigcap_{\beta\in B} \mathscr{X}_\beta$ es una σ-álgebra.

Dem.: **Ej.** ■

Ej. ¿Vale un resultado análogo para la unión de σ-álgebras?

Teor.: $\forall \mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, $\exists!$ σ-álgebra $\mathscr{X}$ tal que:

a) $\mathscr{X} \supset \mathscr{A}$ y

b) $\forall$ σ-álgebra $\mathscr{Y}$ tal que $\mathscr{Y} \supset \mathscr{A}$, se tiene que $\mathscr{Y} \supset \mathscr{X}$.

Dem.: Sea $\mathscr{X} := \bigcap \{\mathscr{Y} : \mathscr{Y}$ σ-álgebra e $\mathscr{Y} \supset \mathscr{A}\}$.

(a) La intersección es no vacía, pues al menos hay una σ-álgebra, $\mathscr{Y} := \mathscr{P}(X)$, que contiene a $\mathscr{A}$. La proposición anterior implica que $\mathscr{X}$ es una σ-álgebra. Como $\forall \mathscr{Y}$ de la intersección, $\mathscr{Y} \supset \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{X} \supset \mathscr{A}$.

(b) Por definición de $\mathscr{X}$, $\forall$ σ-álgebra $\mathscr{Y}$: $\mathscr{Y} \supset \mathscr{A}$, se tiene que $\mathscr{Y} \supset \mathscr{X}$.

Unicidad: Si hubiera dos σ-álgebras $\mathscr{X}$ y $\mathscr{X}'$ que satisficieran (a) y (b), entonces $\mathscr{X}' \supset \mathscr{X}$ y $\mathscr{X} \supset \mathscr{X}' \implies \mathscr{X}' = \mathscr{X}$. ■

Def.: Dado $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, la única σ-álgebra $\mathscr{X}$ que satisface el teorema anterior se denomina la **σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$**.

Ej. Sean $(X, \mathscr{X})$ un espacio medible e $Y \subset X$.
Entonces $\mathscr{Y} := \{E \cap Y,\ E \in \mathscr{X}\}$ es una σ-álgebra en Y.

σ-álgebra de Borel.

Def.: Sean $X := \mathbb{R}$ y $\mathscr{A} := \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}:\ a < b\}$.

La σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$ se llama **la σ-álgebra de Borel** y se denota $\mathscr{B}$.

A los conjuntos $\mathscr{B}$-medibles se los llama **medibles Borel** o **borelianos.**

Prop.: a) Todos los intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos, acotados o no acotados) son borelianos.

b) Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se obtengan mediante una cantidad finita de complementos, uniones e intersecciones de intervalos, son borelianos.

Dem.: $\boxed{\text{Ej.}}$ ■

Sugerencia: Las siguientes igualdades permiten demostrar parcialmente (a):

$$(a,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a,n), \quad (-\infty,b] = (b,+\infty)^{c}, \quad [a,b] = (-\infty,b]\cap[a,+\infty).$$

Sea I un intervalo (acotado o no). La **σ-álgebra de Borel en I** se obtiene usando el ejercicio anterior: $\mathscr{B}_I := \{E \cap I,\ E \in \mathscr{B}\}$.

σ-álgebra de Borel extendida.

Sea $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, el conjunto de los reales extendidos.

Prop.: Sea $X := \overline{\mathbb{R}}$. $\forall E \in \mathscr{B}$, sean

$E_1 := E \cup \{-\infty\}$, $E_2 := E \cup \{+\infty\}$ y $E_3 := E \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Sea $\overline{\mathscr{B}} := \{E, E_1, E_2, E_3,\ E \in \mathscr{B}\}$. Entonces $\overline{\mathscr{B}}$ es una σ-álgebra.

Dem.: $\boxed{\text{Ej.}}$ ■

Sugerencia: Las siguientes propiedades permiten demostrar la proposición:

(a) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \mathbb{R}_3 \in \overline{\mathscr{B}}$;

(b) $\overline{\mathbb{R}} \setminus E_1 = (\mathbb{R} \setminus E)_2$, $\overline{\mathbb{R}} \setminus E = (\mathbb{R} \setminus E)_3$, etc.;

(c) $F_n \in \overline{\mathscr{B}}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \overline{\mathscr{B}}$.

Def.: La σ-álgebra $\overline{\mathscr{B}}$ definida en la proposición anterior se denomina la **σ-álgebra de Borel extendida.**

La **σ-álgebra de Borel extendida en un intervalo I no acotado**, se obtiene procediendo como antes: $\overline{\mathscr{B}}_I := \left\{E \cap I,\ E \in \overline{\mathscr{B}}\right\}$.