UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°2$ (Integrales).

Problemas a resolver en práctica

1. Suponga que μ es una medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa que satisface $\int_\Omega f d\mu = 0$. Demuestre que $f = 0$ μ casi dondequiera.

   Solución

   Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $C_n = \{w \in \Omega : f(w) \geq 1/n\}$. Entonces

$$\int_\Omega I_{C_n} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \int_\Omega I_{C_n}\, d\mu = \frac{1}{n} \mu(C_n).$$

   Como f es no negativa,

$$0 = \int_\Omega 0\, d\mu \leq \int_\Omega I_{C_n} f\, d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu = 0.$$

   Así que $\int_\Omega I_{C_n} f\, d\mu = 0$, lo que implica $\mu(C_n) = 0$. Por lo tanto,

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = 0.$$

   Luego, $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}) = 0$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Asumamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible. Supongamos que:

   - Para todo $x \in \Omega$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   - Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega |f_n|\, d\mu \leq K$, donde K es una constante positiva.

   Demuestre que

$$\int_\Omega |f|\, d\mu < +\infty.$$

Solución

Ya que

$$\int_{\Omega} |f| \, d\mu = \int_{\Omega} \lim_{n} |f_n| \, d\mu = \int_{\Omega} \liminf_{n} |f_n| \, d\mu,$$

Aplicando el lema de Fatou obtenemos

$$\int_{\Omega} |f| \, d\mu \leq \liminf_{n} \int_{\Omega} |f_n| \, d\mu \leq K.$$

3. *a*) Compruebe que $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\{k\}}$ es una medida positiva sobre $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+))$.

   b) Aplicando el teorema de convergencia dominada demuestre que

$$\lim_{\alpha \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos\left(2^k \alpha\right) = 2.$$

Solución

Para cada $A \subset \mathbb{Z}_+$, $\mu(A)$ es igual a la cantidad de elementos de A. De donde deducimos que μ es una medida en $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$.

Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una solución de números reales cualesquiera que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función

$$f_n(k) = 2^{-k} \cos\left(2^k \alpha_n\right) \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Luego

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(k) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-k} \cos\left(2^k \alpha_n\right) = 2^{-k} \cos(0) = 2^{-k}.$$

Además, $|f_n(k)| \leq g(k) := 2^{-k}$ y

$$\int_{\mathbb{Z}_+} g(k) \; \mu(d\,k) = \int_{\mathbb{Z}_+} 2^{-k} \, \mu(d\,k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos\left(2^k \alpha_n\right) = \int_{\mathbb{Z}_+} f_n(k) \; \mu(d\,k) = \int_{\mathbb{Z}_+} 2^{-k} \, \mu(d\,k) = 2.$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, $\alpha > 0$ y $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ una función medible. Demuestre que la función

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < \alpha \ , \\ signo\,(f(x))\,\alpha & \text{si } |f(x)| \geq \alpha \end{cases}$$

   es medible.

2. Considere el espacio de medida positiva $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Suponga que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mu)$. Demuestre que $\alpha f \in L^1(\mu)$ y que $\int_A (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_A f d\mu$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Asuma que $f \in L^1(\mu)$. Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\{w \in \Omega : f(w) \geq n\}) \, .$$

4. Sea ν la medida sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que satisface $\nu(]a, b]) = b - a$. Considere la función

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \qquad \forall t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

   ¿Se cumplirá que $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} G(x, 1/n)\, \nu(d\,x) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} G(x, 1/n)\, \nu(d\,x)$? Justifique su respuesta.

CMG/cmg.