UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Ayudantía 3

1. Para la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ encuentre $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ en cada caso. Justifique su respuesta.

   a) $A_i = \{1, 2, 3, \dots, 2i+1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$
   b) $A_i = \left[-1-\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right]$, $\forall i \in \mathbb{N}$
   c) $A_i = \left(\frac{-1}{i}, \frac{1}{i}\right)$, $\forall i \in \mathbb{N}$
   d) $A_i = \mathbb{R} - [0, i]$, $\forall i \in \mathbb{N}$

2. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se dice creciente si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq A_{i+1}$.

   a) Dada $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia creciente de conjuntos no vacíos y todos distintos, se define la familia $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:
   $$B_1 = A_1 \quad \wedge \quad B_k = A_k - A_{k-1}, \forall k \geq 2$$
   Pruebe que $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.
   b) Defina una familia creciente de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no vacíos y todos distintos tal que:
   $$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}$$

3. Estudie y clasifique las siguientes relaciones:

   a) En $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \iff \text{máx}\{x, y\} \leq 100$
   b) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $X\mathcal{R}Y \iff X \subseteq Y^c$
   c) En $\mathcal{M}_{22}(\{0,1\})$: $X\mathcal{R}Y \iff X \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   d) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A\mathcal{R}B \iff \exists m \in \mathbb{N}$, tal que $A^m = B^m$.
   e) $\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$
   f) En $\mathbb{C}$: $(a+bi)\mathcal{R}(c+di) \iff a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$

4. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathscr{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas de X. Es decir, los elementos de $\mathscr{P}$ son las particiones $\{A_i\}_{i=1}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Se define la relación $\leq$ en $\mathscr{P}$ como sigue:
   $$\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m \iff \forall j \in \{1, \dots, m\}, \exists i \in \{1, \dots, n\} : B_j \subseteq A_i$$
   a) Pruebe que $\leq$ es una relación de orden.
   b) Muestre que si $|X| > 3$, entonces $\leq$ es relación de orden parcial.
