

## Espacios $L_p$ (cont.).

- **Completitud de los espacios**  $L_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .
- **Espacios**  $L_\infty$ .

# Compleitud de los espacios $L_p$ , $1 \leq p < +\infty$ .

En esta clase, sea  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  un espacio de medida y  $L_p := L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$ .

**Teor.:**  $\forall p \in [1, +\infty)$ ,  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  es un **espacio de Banach**.

**Dem.:** Ya vimos que  $L_p$  es un E.V.N. Veamos ahora que es **completo**.

Sea  $\{f_n\}$  una **sucesión de Cauchy en  $L_p$** .

Sea  $\{f_{n_k}\}$  una subsucesión tal que  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . **Ej.**

Sean  $g_k := f_{n_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , y  $h := |g_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \in M^+(X, \mathcal{X})$

$$\implies \left( |g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p \nearrow h^p$$

$$\stackrel{\text{T.C.M.}}{\implies} \int h^p d\mu = \lim_K \int \left( |g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu$$

$$\begin{aligned} \implies \|h\|_p &= \lim_K \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \\ &\leq \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_p. \end{aligned}$$

Como  $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$ , entonces  $\|h\|_p \leq \|g_1\|_p + 1 \implies h^p \in L_1$

$$\implies N := \{x \in X : h(x) = +\infty\} \text{ satisface } \mu(N) = 0.$$

$\forall x \notin N, \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < +\infty$  (convergencia absoluta en  $\mathbb{R}$ )

$$\implies \forall x \notin N, \sum_{k=1}^{\infty} [g_{k+1}(x) - g_k(x)] \text{ converge.}$$

$$\text{Sea } f(x) := \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [g_{k+1}(x) - g_k(x)], & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

$\implies f$  medible y, como  $g_1 + \sum_{k=1}^K (g_{k+1} - g_k) = g_{K+1}$ , (telescópica)

$\implies |f(x)|^p = \lim_K |g_{K+1}(x)|^p$  c.t.p.  $(\forall x \notin N)$

$$\begin{aligned} \text{Además, } \forall K \in \mathbb{N}, |g_{K+1}|^p &= \left| g_1 + \sum_{k=1}^K (g_{k+1} - g_k) \right|^p \\ &\leq \left( |g_1| + \sum_{k=1}^K |g_{k+1} - g_k| \right)^p \leq h^p \in L_1 \end{aligned}$$

$\stackrel{\text{T.C.D.}}{\implies} \int |f|^p d\mu = \lim_K \int |g_{K+1}|^p \leq \int h^p d\mu < +\infty \implies f \in L_p.$

Nuestro siguiente paso es demostrar que  $g_k \xrightarrow{k} f$  en  $L_p$ .

$$|f| \leq h \implies |f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2|h|)^p = 2^p h^p \in L_1$$

y  $g_k \xrightarrow{k} f$  c.t.p.  $\implies |f - g_k|^p \xrightarrow{k} 0$  c.t.p. Por lo tanto,

$\stackrel{\text{T.C.D.}}{\implies} \|f - g_k\|_p^p = \int |f - g_k|^p d\mu \xrightarrow{k} 0 \implies g_k \xrightarrow{K} f$  en  $L_p$ .

Así demostramos que cualquier sucesión  $\{f_n\}$  de Cauchy en  $L_p$ , tiene una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  convergente en  $L_p$ , lo cual es una condición suficiente para que  $\{f_n\}$  converja en  $L_p$  al mismo límite. Por lo tanto,  $L_p$  es completo. ■

# Espacios $L_\infty$ .

**Def.:** Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible.

- $S \in \mathbb{R}^+$  es una **cota esencial** de  $f$ , si  $|f| \leq S$  c.t.p.
- $f$  es **esencialmente acotada** si tiene una cota esencial.
- $L_\infty := L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu) := \{ [f], f \text{ esencialmente acotada} \}$ .
- $\forall f \in L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu), \|f\|_\infty := \inf \{ S, \text{cota esencial de } f \}$ .

Como antes, escribimos  $f$  en vez de  $[f]$ , pero debemos recordar que cualquier propiedad de  $f \in L_\infty$  debe ser satisfecha por todos los representantes de  $[f]$ .

Por ejemplo, dada  $f \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , no tiene sentido afirmar que  $f$  es continua en un punto  $x \in \mathbb{R}$ , ya que, si un representante  $f_1 \in [f]$  fuera continuo en  $x$ , redefiniendo el valor de  $f_1(x)$ , obtendríamos otro representante  $f_2 \in [f]$  que sería discontinuo en ese punto  $x$ .

**Lema:**  $\forall f \in L_\infty, \|f\|_\infty$  es una cota esencial de  $f$ .

**Dem.:** Ej. (Ej. 6.T.) Hay que demostrar que  $|f| \leq \|f\|_\infty$  c.t.p.

**Teor.:**  $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  es un **espacio de Banach**.

**Dem.:** Es fácil ver que  $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  es un E.V.N. **Ej.** Veamos que es **completo**.

Sea  $\{f_n\}$  una **sucesión de Cauchy en  $L_\infty$** . (1)

Como  $\|\cdot\|_\infty$  es cota esencial,  $\forall m, n \in \mathbb{N}, \exists M_{mn} \in \mathcal{X} : \mu(M_{mn}) = 0$  y

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \quad \forall x \notin M_{mn}.$$

Sea  $M := \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} M_{mn}$ . Entonces,  $\mu(M) = 0$  y,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \quad \forall x \in X \setminus M. \quad (2)$$

Entonces,  $\forall x \in X \setminus M$ ,  $\{f_n(x)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ .

Por lo tanto, como  $\mathbb{R}$  es completo,  $\forall x \in X \setminus M, \exists \lim_n f_n(x) \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Sea } f(x) := \begin{cases} \lim_n f_n(x), & x \notin X \setminus M, \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Entonces,  $f$  es medible. Veamos que  $f \in L_\infty$  y  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .  $\xrightarrow{(1)} \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\xrightarrow{(2)} \forall m, n \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M$ .

Tomando  $\lim_{m \rightarrow \infty}$  tenemos que  $\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M$ .

$$\xrightarrow{} \begin{cases} |f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M \implies f \in L_\infty, \\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0. \end{cases} \blacksquare$$