¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea?

Método de los aniquiladores

Carlos M. Mora

Resumen Aniquiladores

Cuando $\lambda \in \mathbb{R}$, la base del núcleo del operador

$$(D - \lambda)^m$$

es generada por las funciones

$$\exp(\lambda x), x \exp(\lambda x), \ldots, x^{m-1} \exp(\lambda x)$$

Cuando $\lambda = \alpha + \beta i$, con $\beta \neq 0$, la base del núcleo del operador

$$(D - \lambda)^m (D - \bar{\lambda})^m = \left(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2\right)^m$$

es generada por las funciones

$\exp(\alpha x) \cos(\beta x), x \exp(\alpha x) \cos(\beta x), \ldots, x^{m-1} \exp(\alpha x) \cos(\beta x)$

$\exp(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x), x \exp(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{m-1} \exp(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x)$

Ejemplo

Buscar una solución general de la EDO

$$Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedad de superposición

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x)\,,$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de

$$Y_h''(x) - 3\,Y_h'(x) + 2\,Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $Y_p(x)$ es cualquier solución de

$$Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Encontrar la solución general de

$$Y_h''(x) - 3\,Y_h'(x) + 2\,Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$

$$(D-2)(D-1)\,Y_h(x) = 0$$

con $D = \frac{d}{dx}$

$$Y_h(x) = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

$$Y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{x} + Y_p(x)$$

Ahora, tenemos que buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Problema general

Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$Y^{(n)}(x) + a_1\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}\,Y'(x) + a_n Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Problema general

Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$L\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L = D^n + a_1\,D^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ con $D = \frac{d}{dx}$

Paso 1

Buscar $\hat{L}$ de la forma

$$\hat{L} = D^m + b_1\,D^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}D + b_m$$

tal que $\hat{L}\,g(x) = 0$

Ejemplo: $Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^x$

Como $x\,e^x$ está en el núcleo de $(D-1)^2$,

$$(D-1)^2\,3\,x\,e^x = 0$$

$\hat{L} = (D-1)^2$

Problema general

Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$L\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L = D^n + a_1\,D^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ con $D = \frac{d}{dx}$

Paso 1 : $\hat{L}\,g(x) = 0$

Paso 2

Buscar la solución particular $Y_p(x)$ entre las soluciones de la EDO

$$\hat{L}\,L\,Y_p(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\hat{L}\,L\,Y_p(x) = \hat{L}\,g(x) = 0$$

Ejemplo: $Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^x$

$\hat{L} = (D-1)^2, \quad L = (D-2)(D-1)$

$$\hat{L}\,L\,Y_p(x) = 0 \Leftrightarrow (D-1)^2 (D-2)(D-1)\;Y_p(x) = 0 \Leftrightarrow (D-1)^3 (D-2)\;Y_p(x) = 0$$

Ejemplo: $Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^{x}$

$\hat{L} = (D-1)^2, \quad L = (D-2)(D-1)$

$$(D-1)^3 (D-2)\; Y_p(x) = 0$$

Luego, buscamos $Y_p(x)$ con la forma

$$Y_p(x) = K_1\,e^{2x} + K_2\,e^{x} + K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}$$

con $K_1, \ldots, K_4 \in \mathbb{R}$. Con ese fin, sustituimos $Y_p(x)$ en la EDO original, i.e., $L\,Y_p(x) = g(x)$

$$(D-1)(D-2)\; Y_p(x) = 3\,x\,e^{x}$$

$$(D-1)(D-2)\left(K_1\,e^{2x} + K_2\,e^{x} + K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}\right) = 3\,x\,e^{x}$$

$$(D-1)(D-2)\left(K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}\right) = 3\,x\,e^{x}$$

Ahora, debemos encontrar las constantes K_3 y K_4 que satisfacen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}\right) - 3\frac{d}{dx}\left(K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}\right) + 2\left(K_3\,x\,e^{x} + K_4\,x^2\,e^{x}\right) = 3\,x\,e^{x}$$

Ejemplo: $Y''(x) - 3\,Y'(x) + 2\,Y(x) = 3\,x\,e^x$

$$\frac{d}{dx}\left(K_3\,x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x\right) = K_3\,e^x + (K_3 + 2\,K_4)\;x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K_3\,x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x\right) = (2\,K_3 + 2\,K_4)\,e^x + (K_3 + 4\,K_4)\;x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\left(K_3\,x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x\right) - 3\frac{d}{dx}\left(K_3\,x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x\right) + 2\left(K_3\,x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x\right)\\
&= (2\,K_3 + 2\,K_4)\,e^x + (K_3 + 4\,K_4)\;x\,e^x + K_4\,x^2\,e^x - 3\,K_3\,e^x - 3\,(K_3 + 2\,K_4)\;x\,e^x - 3\,K_4\,x^2\,e^x\\
&\quad + 2\,K_3\,x\,e^x + 2\,K_4\,x^2\,e^x\\
&= (-K_3 + 2\,K_4)\,e^x - 2\,K_4\,x\,e^x
\end{aligned}$$

$$(-K_3 + 2\,K_4)\,e^x - 2\,K_4\,x\,e^x = 3\,x\,e^x \Leftrightarrow -2\,K_4 = 3, \quad -K_3 + 2\,K_4 = 0 \Leftrightarrow K_4 = -3/2, K_3 = -3$$

Solución particular: $Y_p(x) = -3\,x\,e^x - \frac{3}{2}x^2\,e^x$

Solución general: $Y(x) = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^x - 3\,x\,e^x - \frac{3}{2}x^2\,e^x \qquad$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Encontrar la solución del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} Y''(x) + 5\,Y'(x) + 4\,Y(x) = 3 + 8\,x^2 + 2\cos(2\,x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ Y(0) = 6, \quad Y'(0) = 2/5. \end{cases}$$

Primeramente buscaremos la solución general de

$$Y''(x) + 5\,Y'(x) + 4\,Y(x) = 3 + 8\,x^2 + 2\cos(2\,x)\,. \tag{1}$$

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x)\,,$$

donde $Y_p(x)$ es cualquier función que satisface (1) y $Y_h(x)$ es la solución general de

$$Y_h''(x) + 5\,Y_h'(x) + 4\,Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\,\lambda + 4 = (\lambda + 4)\,(\lambda + 1)$

$$(D + 4)\,(D + 1)\,Y_h(x) = 0 \qquad \text{con } D = \frac{d}{dx}.$$

$$Y_h(x) = C_1\,e^{-4x} + C_2\,e^{-x}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Solución particular de

Primeramente buscaremos la solución general de

$$Y_p''(x) + 5\,Y_p'(x) + 4\,Y_p(x) = 3 + 8\,x^2 + 2\,\cos(2\,x)\,.$$

$Y_p(x) = Y_{p_1}(x) + Y_{p_2}(x)\,,$
$(D+4)(D+1)\,Y_{p_1}(x) = 3 + 8\,x^2$
$(D+4)(D+1)\,Y_{p_2}(x) = 2\,\cos(2\,x)$

- $D^3\left(3 + 8\,x^2\right) = 0$
- $(D - 2\,i)(D + 2\,i)\,2\,\cos(2\,x) = 0$

- $D^3\,(D+4)(D+1)\,Y_{p_1}(x) = 0$
- $(D - 2\,i)(D + 2\,i)(D+4)(D+1)\,Y_{p_2}(x) = 0$

- $Y_{p_1}(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$
- $Y_{p_2}(x) = B_1 \cos(2\,x) + B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) + 5\,\frac{d}{dx}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) + 4\,\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) = 3 + 8\,x^2$$

$$2\,A_2 + 5\,A_1 + 10\,A_2 x + 4\,A_0 + 4\,A_1 x + 4\,A_2 x^2 = 3 + 8\,x^2$$

$$2\,A_2 + 5\,A_1 + 4\,A_0 + (10\,A_2 + 4\,A_1)\,x + 4\,A_2 x^2 = 3 + 8\,x^2$$

$A_2 = 2,\ A_1 = -5,\ A_0 = 6 \Rightarrow Y_{p_1}(x) = 6 - 5\,x + 2\,x^2$

$$\begin{aligned} 2\,\cos(2\,x) &= 4\,\left(B_1 \cos(2\,x) + B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)\right) + 5\,\frac{d}{dx}\left(B_1 \cos(2\,x) + B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)\right) \\ &\quad + \frac{d^2}{dx^2}\left(B_1 \cos(2\,x) + B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)\right) \\ &= 4\,\left(B_1 \cos(2\,x) + B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x)\right) + 5\,\left(-2\,B_1\,\mathrm{sen}\,(2\,x) + 2\,B_2 \cos(2\,x)\right) \\ &\quad - 4\,B_1 \cos(2\,x) - 4\,B_2\,\mathrm{sen}\,(2\,x) \end{aligned}$$

$$2\,\cos(2\,x) = 10\,B_2 \cos(2\,x) - 10\,B_1\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$$

$B_1 = 0,\ B_2 = 1/5 \Rightarrow Y_{p_2}(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$

$$Y_p(x) = Y_{p_1}(x) + Y_{p_2}(x) = 6 - 5\,x + 2\,x^2 + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(2\,x)$$

Ejemplo: Encontrar la solución del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} Y''(x) + 5\,Y'(x) + 4\,Y(x) = 3 + 8\,x^2 + 2\cos(2\,x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ Y(0) = 6, \quad Y'(0) = 2/5. \end{cases}$$

Solución general

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x) = C_1\,e^{-4x} + C_2\,e^{-x} + 6 - 5\,x + 2\,x^2 + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2\,x),$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$Y(0) = 6 \Rightarrow C_1 + C_2 + 6 = 6 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$Y'(0) = \frac{2}{5} \Rightarrow -4\,C_1 - C_2 - 5 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow 4\,C_1 + C_2 = -5 \Rightarrow 3\,C_1 = -5 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{5}{3}$

Solución general

$$Y(x) = -\frac{5}{3}\,e^{-4x} + \frac{5}{3}\,e^{-x} + 6 - 5\,x + 2\,x^2 + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2\,x),$$