Análisis Real I (525.301)

Pauta de corrección

Evaluación 1, 2022

Ej. 1: Dado un conjunto E cualquiera, sea $\mathcal{B}(E)$ el espacio vectorial de las funciones acotadas definidas en E y a valores en $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(E) := \Big\{ f : E \to \mathbb{R} : \ f(E) \text{ es un subconjunto acotado de } \mathbb{R} \Big\}.$$

En este espacio vectorial, se define la norma infinito: $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Demuestra que la norma infinito es efectivamente una norma, justificando cada paso.

Sol.: Veremos que $\|\cdot\|_\infty$ satisface los tres axiomas de norma.

1. Sea $f \in \mathcal{B}(E)$. (i) $\forall x \in E,\ |f(x)| \geq 0 \implies \|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)| \geq 0$.

   (ii) $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \implies f(x) = 0 \quad \forall x \in E \implies f = 0$.

2. Sean $f \in \mathcal{B}(E)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$\|\lambda f\|_\infty := \sup_{x \in E} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in E} \{|\lambda|\,|f(x)|\} \overset{(*)}{=} |\lambda| \sup_{x \in E} |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty\,,$$

   donde, en (*), hemos usado el Ej. 4 del T.P.1.

3. Sean $f, g \in \mathcal{B}(E)$. $\forall x \in E,\ |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

   $$\implies |f(x) + g(x)| \leq \sup_{y \in E} |f(y)| + \sup_{y \in E} |g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \forall x \in E$$

   $$\implies \|f + g\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

   donde hemos usado que el supremo es la menor de las cotas superiores. $\square$

Ej. 2: Sea X un espacio métrico en el que las bolas tienen clausura compacta.

Demuestra que un subconjunto de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Sol.: $\boxed{\implies}$ Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Ya demostramos que en cualquier espacio métrico, K es cerrado (pag. 5, clase 8) y enunciamos que es acotado (pag. 6, clase 8).

Para demostrar que K es acotado, consideramos el siguiente cubrimiento por abiertos de K:

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(p),$$

donde p es un punto cualquiera de X.

Como K es compacto, hay un subcubrimiento finito: $K \subset \bigcup_{k=1}^{K} B_{n_k}(p)$
con $n_1 < \cdots < n_K$, de modo que $\bigcup_{k=1}^{K} B_{n_k}(p) = B_{n_K}(p)$.
$\implies K \subset B_{n_K}(p) \implies K$ es acotado.

$\boxed{\impliedby}$ Sea $K \subset X$ cerrado y acotado.
K acotado $\implies$ hay una bola B tal que $K \subset B \implies K \subset \overline{B}$.
Por hipótesis $\overline{B}$ es compacto y K es cerrado.
Entonces (pag. 6, clase 8), K es compacto. $\square$

Ej. 3: Sea K un subconjunto compacto de X. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito de K,

$$F := \{p_1, \dots, p_N\} \subset K,$$

tal que, para cada $x \in K$, hay al menos un $p_n \in F$ que dista de x menos que ε.

Sol.: Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el siguiente cubrimiento por abiertos de K:

$$K \subset \bigcup_{p \in K} B_\varepsilon(p).$$

Como K es compacto, hay un subcubrimiento finito

$\implies \exists p_1, \dots, p_N \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_\varepsilon(p_n)$.

$\implies \forall x \in K,\ \exists n \leq N :\ x \in B_\varepsilon(p_n) \implies d(x, p_n) < \varepsilon.$

Sea $F := \{p_1, \dots, p_N\} \subset K$. Entonces $\forall x \in K,\ \exists p_n \in F :\ d(x, p_n) < \varepsilon.$ $\square$

Ej. 4: Sea $\{A, B\}$ una separación de X. Demuestra que A y B son abiertos y cerrados.

Sol.: Como $\{A, B\}$ es una separación de X, se tiene que

$$\begin{cases} E = A \cup B, & (1) \\ A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, & (2) \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset. & (3) \end{cases}$$

Para ver que A es cerrado, demostraremos que $\overline{A} \subset A$.

Sea $x \in \overline{A} \overset{(3)}{\Longrightarrow} x \notin B \overset{(1)}{\Longrightarrow} x \in A$.

Entonces $\overline{A} \subset A \implies A$ es cerrado.

La demostración de que B es cerrado es análoga.

$$(1) \implies \begin{cases} A = B^{\mathrm{c}} \overset{B \text{ cerrado}}{\Longrightarrow} A \text{ abierto}, \\ B = A^{\mathrm{c}} \overset{A \text{ cerrado}}{\Longrightarrow} B \text{ abierto}. \end{cases}$$

Por lo tanto, A y B son abiertos y cerrados. $\square$

Ej. 5: Sea X completo. Demuestra que los subconjuntos cerrados de X, también son completos.

Sol.: Sea X completo e $Y \subset X$ cerrado. Debemos demostrar que Y es completo.

Para ello, demostraremos que las sucesiones de Cauchy en Y convergen a un límite en Y.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y

$\implies \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m.n \geq N,\ d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Como $Y \subset X$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy en X.

Como X es completo, entonces $\exists x \in X :\ x_n \to x$.

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, entonces $x \in \overline{Y}$ (pag. 11, clase 10).

Como Y es cerrado, entonces $\overline{Y} = Y$ y, por lo tanto, $x_n \to x \in Y$

$\implies Y$ es completo. $\square$