

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 1. Ejercicios adicionales.

1. Sean $X \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que $c \leq \sup X$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.
2. Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Demuestra que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in A \forall y \in B, x \leq y$. Demuestra que $\sup A \leq \inf B$. Demuestra también que $\sup A = \inf B$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.
4. Dados $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado y $c > 0$, sea $c \cdot A := \{cx, x \in A\}$. Demuestra que $c \cdot A$ es acotado, que $\sup(c \cdot A) = c \sup A$ y que $\inf(c \cdot A) = c \inf A$. Enuncia y demuestra lo que ocurre con $c < 0$.
5. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados, sea $A + B := \{x + y, x \in A, y \in B\}$. Demuestra que $A + B$ es acotado, que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ y que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. Enuncia y demuestra los resultados que valen cuando A y B son sólo acotados superiormente o sólo acotados inferiormente.
6. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^+$ no vacíos y acotados, sea $A \cdot B := \{xy, x \in A, y \in B\}$. Demuestra que $A \cdot B$ es acotado, que $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$ y que $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$.
7. Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente, tales que $\forall x \in A \exists y \in B$ tal que $x \leq y$. Demuestra que $\sup B = \sup A$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.

Además, deben demostrar lo que quedó pendiente en las transparencias y deben hacer los siguientes ejercicios del Capítulo 1 del libro de Rudin: 1, 2, 3, 4 y 5.