

TAREA VOLUNTARIA ALGEBRA III 525201-0 - Comentarios

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada.

Problema 1. Demostrar el TEOREMA DE GRASSMANN: Sea $(V, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, y $(U, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ dos subespacios vectoriales de $(V, +, \cdot)$. Entonces,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

La gran mayoría supo abordar la demostración, aunque varios cometieron errores de diversa índole: notaciones incorrectas, eventualmente incoherente con el contexto del desarrollo, otros omitieron describir parte del desarrollo, para concluir su afirmación sin lugar a dudas.

A continuación se da una descripción pauteada de la demostración.

PRIMERO, como V es de dimensión finita, todos sus subespacios también lo serán. De esta forma, sea $\dim(U \cap W) = m$, $\dim(U) = r$ y $\dim(W) = s$, con $m, r, s \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $B_1 := \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de $U \cap W$. Como $U \cap W \subseteq U$, se puede completar la base B_1 de manera de inducir el conjunto $B_2 := \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_{r-m}\}$, una base de U . Análogamente, se induce el conjunto $B_3 := \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_{s-m}\}$, una base de W .

AFIRMACIÓN 1: El conjunto $B := \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_{r-m}, w_1, \dots, w_{s-m}\} \subseteq V$ es l.i.

En efecto, consideremos la combinación lineal de elementos de B que da el vector nulo:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k u_k + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l w_l = \theta \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k u_k = - \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l w_l =: z. \end{aligned}$$

Tenemos que $z \in W$ y también que $z \in U$, en consecuencia $z \in U \cap W = \langle B_1 \rangle$. De esta forma resulta

$$z = \sum_{j=1}^m \delta_j v_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^m \delta_j v_j + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l w_l = \theta,$$

de donde, en vista que B_3 es l.i. (por ser un conjunto base), se desprende que $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \delta_j = 0$ y $\forall l \in \{1, \dots, s-m\} : \gamma_l = 0$. Esto nos permite afirmar que $z = \theta$ y así

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k u_k = \theta.$$

Invocando el hecho que B_2 es l.i, se infiere que $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \alpha_j = 0$ y $\forall k \in \{1, \dots, r-m\} : \beta_k = 0$. De esta manera, se concluye que el conjunto B es l.i.

AFIRMACIÓN 2: $\langle B \rangle = U + W$.

Como $B \subseteq U + W$, se deduce que $\langle B \rangle \subseteq U + W$.

Por probar la otra inclusión: $U + W \subseteq \langle B \rangle$. Sea $z \in U + W$, entonces $\exists x \in U, \exists y \in W$ tales que $z = x + y$. Tenemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k u_k, \\ y &= \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_j v_j + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l w_l, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$z = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \tilde{\alpha}_j) v_j + \sum_{k=1}^{r-m} \beta_k u_k + \sum_{l=1}^{s-m} \gamma_l w_l \in \langle B \rangle.$$

Esto permite deducir que $U + W \subseteq \langle B \rangle$.

En consecuencia, se concluye que $\langle B \rangle = U + W$, y por la AFIRMACIÓN 1, B es una base de $U + W$.

CONCLUSIÓN: Tenemos

$$\dim(U + W) = r + s - m = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$