UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Examen de Recuperación
23 de Julio de 2007

Pregunta 1 (15 puntos). Resolver

$$x'(t) = \frac{1}{x+t}, \qquad x(0) = 1$$

Indicación: haga un cambio de variable sencillo que le permita aplicar separación de variables.

Pregunta 2 (15 puntos). Resuelva la forma diferencial

$$\left(6 + 6\,xy^2\right)\,dx + \left(3\,\frac{x}{y} + 6\,x^2y\right)\,dy = 0$$

sabiendo que ella admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^s y^t$.

Pregunta 3 (15 puntos). Sea la ecuación de Euler $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$.

1. Encuentre la solución general.
2. Calcule $W(y_1, y_2)(t)$. Determine que sucede si $t \to 0$.
3. Muestre que $y_1(t)$, $y_2(t)$ forma un sistema fundamental de soluciones en un intervalo I (determine I).
4. Resuelva el PVI asociado a la EDO, con $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Pregunta 4 (15 puntos). Resolver el sistema de EDO

$$\begin{aligned} 2x'' &= -4x + 2(y - x) \\ y'' &= -2(y - x) + 2\delta(t - 6) \end{aligned}$$

sujeto a $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

tiempo = 110 minutos
HMM/JMS/LNB/MSC/msc.

Tabla de Transformadas de Laplace

$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$	(propiedad de linealidad)
$\mathcal{L}\{\,1\} = \dfrac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{\,e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{\,t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{\,\mathrm{sen}(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}\{\,\cos(\omega t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathcal{L}\{\,\mathrm{senh}(bt)\} = \dfrac{b}{s^2-b^2}$
$\mathcal{L}\{\,\cosh(bt)\} = \dfrac{s}{s^2-b^2}$	$\mathcal{L}\{\,\ln(t)\} = -\dfrac{\ln(t)+\gamma}{s}$
$\mathcal{L}\{\,\sqrt[n]{t}\} = s^{-\frac{n+1}{n}} \cdot \Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$	$\mathcal{L}\{\,J_n(t)\} = \dfrac{\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)^n}{\sqrt{1+s^2}}$
$\mathcal{L}\{\,I_n(t)\} = \dfrac{\left(s+\sqrt{-1+s^2}\right)^{-n}}{\sqrt{-1+s^2}}$	$\mathcal{L}\{\,\mathrm{erf}(t)\} = \dfrac{e^{s^2/4}\,\mathrm{erfc}\,(s/2)}{s}$

Derivación e Integración:

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$	$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$$

$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,d(s)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}$$

Fórmulas de Desplazamiento:

$\mathcal{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a)$	$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)u(t-a)$	$\mathcal{L}\{\,t^n f(t)\} = (-1)^n D_s^n[F(s)]$

Funciones impulso y escalón unitario:

$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$	$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \dfrac{1}{s}$

Otras transformadas:

$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ (Convolución)

$\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt$ (Función periódica con periodo p)

$\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\right\} = \dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})\right\} = \dfrac{1}{s(s+a)}$
$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(at+\varphi)\right\} = \dfrac{\mathrm{sen}\varphi s + a\cos\varphi}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\right\} = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\left(\cos(bt) + \left(\frac{c-a}{b}\right)\mathrm{sen}(bt)\right)\right\} = \frac{s+c}{(s+a)^2+b^2}$$

[1] $\gamma = -\int_0^\infty \frac{e^x}{\ln x}dx \approx 0.577215$ (Constante de Euler-Mascheroni).
[2] $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$.
[3] $J_n(x)$, función de Bessel de primera especie, solución analítica de $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$.
[4] $I_n(x)$, función de Bessel modificada de primera especie, sol. analítica de $x^2y''+xy'+(x^2+n^2)y=0$.
[5] $\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau$ (función error), y $\mathrm{erfc}(t) = 1-\mathrm{erf}(t)$ (función error complementaria).

Pauta de Corrección

Pregunta 1

Haciendo el cambio de variable $z = x + t$ se obtiene

$$\begin{aligned} z' = \frac{1}{z} + 1 = \frac{z+1}{z} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{z\,dz}{z+1} = dt \\ &\Longrightarrow \quad \int^z \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz \; = \; \int^t dt + C \\ &\Longrightarrow \quad z - \ln|z+1| = t + C \\ &\Longrightarrow \quad x - \ln|x+t+1| = C \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales $t = 0$ y $x = 1$, se tiene $C = 1 - \ln 2$. Es decir, la solución queda expresada de manera implícita: $\boxed{x(t) - \ln|x(t) + t + 1| = 1 - \ln 2}$

Pregunta 2

Utilizando el factor integrante $\mu(x, y) = x^s y^t$, se tiene:

$$\left(6\,x^s y^t \; + \; 6\,x^{s+1} y^{t+2}\right)\, dx \; + \; \left(3\,x^{s+1} y^{t-1} \; + \; 6\,x^{2+s} y^{t+1}\right)\, dy \; = \; 0.$$

Para que este diferencial sea exacto debe verificarse

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(6\,x^s y^t \; + \; 6\,x^{s+1} y^{t+2}\right) \; = \; \frac{\partial}{\partial x}\left(3\,x^{s+1} y^{t-1} \; + \; 6\,x^{2+s} y^{t+1}\right) \\ &\Longrightarrow \; 6\,t\,x^s y^{t-1} \; + \; 6\,(t+2)\,x^{s+1} y^{t+1} \; = \; 3\,(s+1)\,x^s y^{t-1} \; + \; 6\,(s+2)\,x^{1+s} y^{t+1} \\ &\Longrightarrow \; \left\{ \begin{array}{l} 6\,t \; = \; 3\,(s+1) \\ 6\,(t+2) \; = \; 6\,(s+2) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \; s \; = \; t \; = \; 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos el diferencial exacto:

$$\left(6\,xy \; + \; 6\,x^2 y^3\right)\, dx \; + \; \left(3\,x^2 \; + \; 6\,x^3 y^2\right)\, dy \; = \; 0.$$

Integrando $M(x, y)$ respecto de x se tiene:

$$\begin{aligned} &F(x,y) = \int^x \left(6\,xy \; + \; 6\,x^2 y^3\right)\, dx = \; 3x^2 y \; + \; 2x^3 y^3 \; + \; G(y) \\ &\Longrightarrow \; \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \; = \; 3\,x^2 \; + \; 6\,x^3 y^2 \; + \; G'(y) \; \Longrightarrow \; G'(y) = 0 \; \Longrightarrow \; G(y) = Cte \\ &\Longrightarrow \; F(x,y) = 3x^2 y \; + \; 2x^3 y^3 \; + \; C \end{aligned}$$

La solución queda expresada de manera implícita como: $\boxed{3x^2 y \; + \; 2x^3 y^3 \; = \; C}$

Pregunta 3

a) Euler:

$$
\begin{aligned}
t = e^z \implies & 2y''(z) - 2y'(z) + 3y'(z) - y(z) = 0 \\
& 2y''(z) + y'(z) - y(z) = 0 \\
& \text{Polinomio característico:} \qquad 2r^2 + r - 1 = 0 \implies r_1 = 1/2, \quad r_2 = -1 \\
& \boxed{y_1 = \sqrt{t}, \qquad y_2 = \frac{1}{t}}
\end{aligned}
$$

b) $W(y_1, y_2) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t\sqrt{t}}; \qquad \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t\sqrt{t}} = \infty.$

c) $W(y_1, y_2) \neq 0$ forma un SFS ssi $0 < t < \infty$.

d) $y(t) = C_1\sqrt{t} + \dfrac{C_2}{t}$. Usando las condiciones iniciales se tiene que

$$
\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1/2 - C_2 = 1 \end{array} \right. \implies C_1 = 2, \quad C_2 = 0, \implies \boxed{y(t) = 2\sqrt{t}}
$$

Pregunta 4

Usando Transformada de Laplace, se obtiene el sistema algebraico

$$
\left\{ \begin{array}{l} (s^2+3)X - Y = 0 \\ -2X + (s^2+2)Y = 2e^{-6s} \end{array} \right.
$$

Usando el método de Kramer, se tiene

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2+3)(s^2+2) - 2 = (s^2+1)(s^2+4) \\
D_x &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2e^{-6s} & s^2+2 \end{vmatrix} = 2e^{-6s}; \qquad D_y = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & 2e^{-6s} \end{vmatrix} = 2(s^2+3)e^{-6s} \\
&\implies X(s) = \frac{2e^{-6s}}{(s^2+1)(s^2+4)}; \qquad Y(s) = \frac{2(s^2+3)e^{-6s}}{(s^2+1)(s^2+4)}
\end{aligned}
$$

Descomponiendo en fracciones parciales

$$
\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4}; \qquad \frac{s^2+3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2/3}{s^2+1} + \frac{1/3}{s^2+4};
$$

se deduce

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-6s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = 2u_6(t)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s^2+3)e^{-6s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = 2u_6(t)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\implies \boxed{\begin{array}{l} x(t) = 2u_6(t)\left(\dfrac{1}{3}\text{sen}\,(t-6) - \dfrac{1}{6}\text{sen}\,2\,(t-6)\right) \\ y(t) = 2u_6(t)\left(\dfrac{2}{3}\text{sen}\,(t-6) + \dfrac{1}{6}\text{sen}\,2\,(t-6)\right) \end{array}}
$$