

# Ecuaciones Diferenciales MAT 525223

## PAUTA Evaluación No 2. (24.06.14-13:15hrs.)



Nota: En la ecuación de Euler Cauchy no olvide normalizar al calcular la solución particular.

### Solución:

**P1-1** Procedemos por etapas:

- 1º Solución general homogénea. Si

$$y_h''' + y_h'' = 0 \iff D^2(D+1)y_h = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_h(x) &= a + bx + ce^{-x}, \quad a, b, c, \text{ constantes arbitrarias} \\ &= c_1 + c_2(x - 1) + c_3 e^{-(x-1)}, \quad c_i \text{ constantes arbitrarias.} \end{aligned}$$

- 2<sup>a</sup> Solución particular. Se construye  $y_p(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$  donde los coeficientes  $A$  y  $B$  se determinan de la ecuación no homogénea:

$$\cos(x) = y_p'''(x) + y_p''(x) = -y_p'(x) - y_p(x) = -(A+B)\cos(x) + (A-B)\sin(x)$$

es decir,  $A = B = -\frac{1}{2}$ . En consecuencia:

$$y_p(x) = -\frac{\cos(x) + \sin(x)}{2}.$$

- 3º Solución general.  $y(x) = c_1 + c_2(x - 1) + c_3e^{-(x-1)} + y_p(x)$  donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p(1) \\ -y'_p(1) \\ 1 - y''_p(1) \end{pmatrix}$$

y realizando dos operaciones elementales por fila se concluye:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_p(1) - 1 \\ 1 - y'_p(1) - y''_p(1) \\ 1 - y''_p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \cos(1) + \sin(1) \\ 1 + \cos(1) \\ 1 + \frac{\cos(1) + \sin(1)}{2}. \end{pmatrix}$$

### (Problema de las Guías de Ejercicios)

**P1-2** Procedemos por etapas:

- 1º Solución homogénea. Ensayamos  $y_h(x) = x^m$  en

$$x^2 y''_h(x) + xy'_h(x) - y_h(x) = 0$$

en tal caso, para  $x > 0$  se obtiene:

$$(m(m-1) + m - 1)x^m = 0 \iff |m| = 1$$

en consecuencia:

$$y_h(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x, \quad c_i \text{ constantes arbitrarias.}$$

- 2º Solución particular. Se aplica el Método de Variación de Parámetros de Lagrange, a la ecuación normalizada:

$$y_p''(x) + \frac{1}{x} y_p'(x) - \frac{1}{x^2} y_p(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}, \quad x > 0.$$

donde las funciones coeficientes de  $y_p(x) = \frac{u(x)}{x} + v(x)x$  satisfacen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dx}(x) \\ \frac{dv}{dx}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2(x+1)} \end{pmatrix}$$

es decir, aplicando la función inversa (usualmente resuelven por regla de Kramer)

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dx}(x) \\ \frac{dv}{dx}(x) \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2(x+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+1)} \\ \frac{1}{2x^2(x+1)} \end{pmatrix}$$

Se eligen como primitivas  $u(x) = -\ln(\sqrt{x+1})$  y  $v(x) = -\frac{1}{2x} + \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$ .

- 3º Solución general:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{c_1}{x} + c_2 x + \frac{u(x)}{x} + v(x)x \\ &= [c_1 - \ln(\sqrt{x+1})] \frac{1}{x} + \left[ c_2 - \frac{1}{2x} + \ln\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right] x. \end{aligned}$$

(Problema presentado en Clase de Práctica)

- P2** 1. Sean  $\alpha, \beta$  y  $w$  tres constantes positivas. ¿Qué condiciones deben verificarse estas constantes tal que el modelo

$$y'' + 2\alpha y' + \beta^2 y = \sin(wt)$$

sea

- a) Críticamente amortiguado?      b) Sobre amortiguado?      c) Resonante?

2. a) Interprete el siguiente modelo masa-resorte-amortiguador y clasifique el movimiento de la solución homogénea:

$$\frac{1}{5} \frac{d^2x}{dt^2} + 1,2 \frac{dx}{dt} + 2x = 5 \cos(4t), \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0.$$

- b) Si la solución particular es:

$$x_p(t) = -\frac{25}{102} \cos(4t) + \frac{50}{51} \sin(4t).$$

que puede decir de la solución forzada  $x(t)$  para valores grandes de  $t$ .

### Solución

**P2-1** La ecuación puede ser re-escrita, usando el operador,  $D = \frac{d}{dx}$ , como

$$[(D + \alpha)^2 + \beta^2 - \alpha^2]y = \sin(wt)$$

En consecuencia:

**P2-1a**  $\beta^2 - \alpha^2 = 0$ .

**P2-1b**  $\beta^2 - \alpha^2 < 0$ .

**P2-1c**  $\alpha = 0$  y  $w = \beta$

[0.9 puntos]

**P2-a**  $m = \frac{1}{5}$ ,  $\alpha = 0,6$  y constante de Hooke  $k = 2$ . Fuerza aplicada en  $t = 0$   $f(t) = 5 \cos(t)$ , la masa ha sufrido un desplazamiento de 0,5 cm desde el reposo, sin velocidad inicial. [0.3 puntos]

**P2-b** La solución homogénea:

$$x_h''(t) + 6x_h'(t) + 10x_h(t) = [(D + 3)^2 + 1]x_h(t) = 0$$

resulta ser:

$$x_h(t) = e^{-3t}[c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)]$$

donde  $c_i$  son constantes arbitrarias. Gracias al Principio de Superposición de Soluciones:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Pero si  $t \gg 14$ :

$$x_h(t) \approx 0 \quad \wedge \quad x(t) \approx x_p(t)$$

Sin embargo,  $x(t)$  no es periódica.

[0.3 puntos]

**P3** Determinar la temperatura estacionaria,  $u = u(x, y)$  de la placa seminfinita  $P = [0, \infty[ \times [0, \pi[$ , es decir,  $u$  satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \text{int}(P) = ]0, \infty[ \times ]0, \pi[ \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) &= 0, \quad 0 \leq x \\ u(0, y) &= y, \quad 0 \leq y \leq \pi. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq \pi. \end{aligned}$$

(En la prueba se presentó la figura). [1.5 puntos]

### Solución

Si se construye  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  entonces las condiciones de contorno nula infieren que

$$1. \quad Y(0) = 0 \quad 2. \quad Y'(\pi) = 0 \quad 3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} X(x) = 0$$

Mientras que  $\Delta u = 0$  infiere que deberá existir  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{constante.}$$

Esto infiere los problemas diferenciales ordinarios:

- $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < \pi, \quad Y(0) = Y'(\pi) = 0.$

cuya familia característica es:

$$Y_n(y) = \sin(\sqrt{\lambda_n}y), \quad \lambda_n = \left[ \frac{2n-1}{2} \right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- $X''_n(x) - \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 < x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} X(x) = 0$

cuya solución general es  $X_n(x) = b_n e^{-\frac{(2n-1)}{2}x}$

Enseguida el principio de Superposición de Soluciones permite definir:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n e^{-\frac{(2n-1)}{2}x} \right] \sin\left(\frac{(2n-1)}{2}y\right)$$

como  $u(0, y) = y$  la identidad anterior infiere que las constantes  $b_n$  son los coeficientes de Fourier en el Sistema ortogonal de autofunciones  $\{Y_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ . Así:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin\left(\frac{(2n-1)}{2}y\right) dy = \frac{8(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)^2}.$$

**P4** Resolver

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-\frac{t}{2}} \sin(3\pi x) & 0 < x < 2 \\ u(0, t) &= 1 & t \geq 0 \\ u(2, t) &= 2 & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= x + 1 & 0 \leq x \leq 2\end{aligned}$$

**Solución**

Procedemos por etapas:

- 1º Se procede a construir una temperatura estacionaria  $V = V(x)$  tal que  $u(x, t) = V(x) = v(x, t)$  con  $v(x, t)$  la temperatura del objeto con extremos mantenido a temperatura nula. Procediendo de manera habitual:

$$[V''(x) = 0, V(0) = 1, V(2) = 1] \iff V(x) = \frac{x}{2} + 1$$

y en consecuencia  $v(x, t) = u(x, t) - V(x)$  satisface:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) &= e^{-t/2} \sin(3\pi x) & 0 < x < 2 & t > 0 \\ v(0, t) &= 0 & & 0 \leq t \\ v(2, t) &= 0 & & 0 \leq t \\ v(x, 0) &= u(x, 0) - V(x) = \frac{x}{2} & & 0 \leq x \leq 2.\end{aligned}$$

- 2º Aplicando el Principio de Superposición de Soluciones y el Principio de Duhamel se tiene repitiendo el procediendo habitual:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n e^{-(n\pi)^2 t^2 / 4} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) + \int_0^t z(x, t - \tau; \tau) d\tau$$

donde

- $b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 \frac{x}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$ .
- $z(x, t; \tau) = [e^{-\tau/2} e^{9\pi^2 t}] \sin(3\pi x)$  (pues las funciones propias son ortogonales)

Por otra parte, la integral de Duhamel resulta ser:

$$\int_0^t z(x, t - \tau; \tau) d\tau = e^{-9\pi^2 t} \sin(3\pi x) \int_0^t e^{\tau(9\pi^2 - 0,5)} d\tau = \left[ \frac{e^{-t/2} - e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2 - 0,5} \right] \sin(3\pi x)$$

- 3º La solución es:

$$u(x, t) = \frac{x}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} e^{-(n\pi)^2 t^2 / 4} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) + \left[ \frac{e^{-t/2} - e^{-9\pi^2 t}}{9\pi^2 - 0,5} \right] \sin(3\pi x)$$

[1.5 puntos]

**Bonus** Determinar  $w > 0$  tal que

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)]$$

sea enésima suma parcial de la representación de Fourier de la onda  $\frac{w}{2\pi}$  periódica generada por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 < t \leq -1 \\ -0,5 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

(En la prueba se presentó la onda)

1. Determine la convergencia de dicha Serie de Fourier
2. Demuestre que para todo  $n \in \mathbb{N}$

a)  $\frac{a_0}{2} = 0$

b)  $a_{2n} = 0$

c)  $b_{2n} = 0$ .

### Solución

$$w = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**B1** Tanto  $f$  como su primera derivada son continuas por tramos, luego

$$\forall t_0 \in [-2, 2]: \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_0) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{si } t_0 = -2 \\ -1 & \text{si } -2 < t_0 < -1 \\ -\frac{3}{4} & \text{si } t_0 = -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } -1 < t_0 < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } t_0 = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t_0 < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } t_0 = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < t_0 < 2 \end{cases}$$

**B2** Es un simple ejercicio de integración:

**B2-a**  $\frac{a_0}{2} = -1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1 = 0$

**B2-b**

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cos(n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} \left\{ -\sin(n\pi t) \Big|_{-2}^{-1} - 0,5 \sin(n\pi t) \Big|_{-1}^0 + \sin(n\pi t) \Big|_0^1 \frac{1}{2} \sin(n\pi t) \Big|_1^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

**B2-c**  $b_{2n} = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \sin(n\pi t) dt =$

[0.5+0.3 puntos]

FPV/fpv.

24 de Mayo de 2014