Interpolación: Parte II

- Fenómeno de Runge
- Splines cúbicas.

Fenómeno de Runge

Al realizar una interpolación polinomial para un valor de n grande con puntos x_i equiespaciados, se puede comprobar que se producen grandes oscilaciones del polinomio de interpolación p entre dos puntos consecutivos, especialmente cerca de los extremos del intervalo de interpolación $[a, b]$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $-5 \leq x \leq 5$, consideremos el polinomio de grado 10 que interpola f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5$.

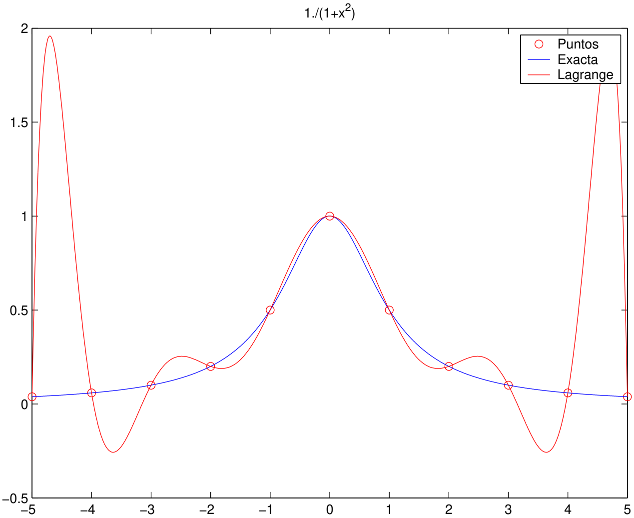


Figura: Fenómeno de Runge

Una estrategia efectiva que evita esta situación consiste en construir funciones de interpolación polinomial por tramos (pedazos), en particular las **interpolantes spline cúbicas**.

Caso general

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
Una función s es una **interpolante spline cúbica** en $[x_0, x_n]$, si existen polinomios $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, de grado a lo más 3, tales que:

(1) $s(x) = q_k(x)$, en $[x_k, x_{k+1}]$, $\quad k = 0, 1, \cdots, n-1$,

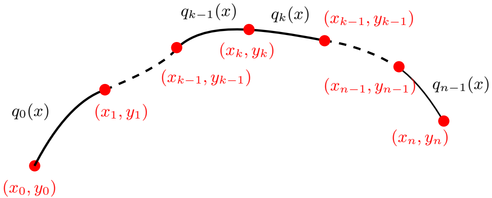
(2) $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ son polinomios de grado a lo más 3,

(3) $q_k(x_k) = y_k$, $\qquad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, (interpola todos los nodos)

(4) $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) = s'(x_k)$, $\quad k = 1, \cdots, n-1$, (igual pendiente en los nodos)

(5) $q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k) = s''(x_k)$, $\quad k = 1, \cdots, n-1$. (igual concavidad en los nodos interiores)

Las dos últimas propiedades garantizan la suavidad de s en $[x_0, x_n]$.



Algunos tipos de spline cúbicos

Para determinar de manera **única** la función spline s, necesitamos algunas condiciones adicionales. Estas condiciones dan origen a diferentes tipos de **spline cúbicos**:

(1) **Natural:** $s''(x_0) = 0$ y $s''(x_n) = 0$ (segundas derivadas en los extremos iguales a cero).

(2) **Completo:** $s'(x_0) = \alpha$ y $s'(x_n) = \beta$, con α y β números dados. (primeras derivadas en los extremos iguales a algún valor dado).

(3) **No-nodo (*not-at-knot*):** $q_0'''(x_1) = q_1'''(x_1)$ y $q_{n-2}'''(x_{n-1}) = q_{n-1}'''(x_{n-1})$ (terceras derivadas continuas en el segundo y penúltimo punto).

El comando *spline* de OCTAVE puede calcular el Completo y el No-nodo.

Ejemplo: Consideremos nuevamente la función f del fenómeno de Runge. Si calculamos la spline cúbica natural s que interpola a f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5$, obtenemos