Gravitación Universal

Física II - 510150

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física
Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

Atención de Estudiantes:
jueves de 15:00 a 17:00 hrs.

Cuenta la leyenda que mientras Newton dormía debajo de un manzano una manzana cayó y golpeó su cabeza. Esto lo llevó a imaginar que tal vez todos los objetos del Universo eran atraídos entre sí de la misma forma en que la manzana era atraída hacia la tierra.

A partir del análisis de datos astronómicos acerca del movimiento de la luna alrededor de la tierra, hipotetizó que la ley de fuerza que gobernaba el movimiento de los planetas era la **misma** ley de fuerza que atraía una manzana en caída libre hacia la tierra.

Figura 1: Newton y la manzana que cayó del árbol.

En 1687 Newton publicó su trabajo sobre la ley de gravedad en su tratado **Principios matemáticos de filosofía natural**.

La ley de Newton de la gravitación universal afirma que:

> **Cualquier partícula en el Universo atrae a otras partículas con una fuerza cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.**

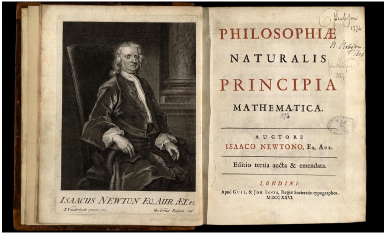

Figura 2: Portada del libro Principios matemáticos de filosofía natural.

Sean m_1 y m_2 las masas de las partículas y sea r la distancia de separación entre ellas. La magnitud de la fuerza gravitacional entre ellas es:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.1}$$

con G una constante llamada **constante gravitacional universal**. En el SI de unidades

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \equiv 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \tag{3.2}$$

La Ec.(3.1) es conocida como una **ley de cuadrado inverso**: F_g varía inversamente con el cuadrado de la distancia de separación entre las partículas.

Si se define el vector unitario $\hat{r}_{12}$ dirigido desde la partícula 1 a la partícula 2, la fuerza ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}, \tag{3.3}$$

donde (-) indica que la partícula 2 es atraida hacia la partícula 1, o sea, la fuerza sobre la partícula 2 está dirigida hacia la partícula 1.

De la tercera ley de Newton sabemos que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (fuerzas que forman un par acción-reacción)

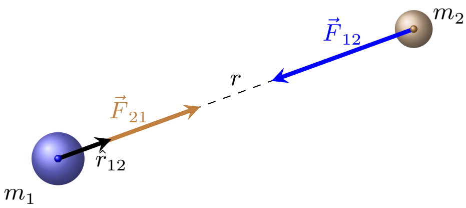

Figura 3:. Fuerza de atracción gravitacional entre dos esferas.

La fuerza gravitacional es una fuerza de campo: Siempre existe entre dos partículas sin importar el medio de separación entre ellas.

Dado que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre las partículas, disminuye rápidamente cuando aumenta la separación entre ellas.

Dato

La fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa M_T, esféricamente simétrica y de tamaño finito, sobre una partícula de masa m fuera de la distribución es la misma como si toda la masa de la distribución se concentrara en su centro.

Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la tierra sobre una partícula de masa m cerca de su superficie es

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2}, \tag{3.4}$$

con M_T la masa de la tierra y R_T el radio de la tierra. Esta fuerza está dirigida hacia el centro de la tierra.

Ejemplo

Tres bolas de billar de 0.300 kg cada una se colocan sobre una mesa en las esquinas de un triángulo rectángulo, como ilustrado en la **Fig.4**. El triángulo tiene lados $a = 0.400\,\mathrm{m}$, $b = 0.300\,\mathrm{m}$ y $c = 0.500\,\mathrm{m}$. Calcule el vector de fuerza gravitacional sobre la bola blanca (de masa m_1) que resulta de las otras dos bolas, así como la magnitud y dirección de ésta fuerza.

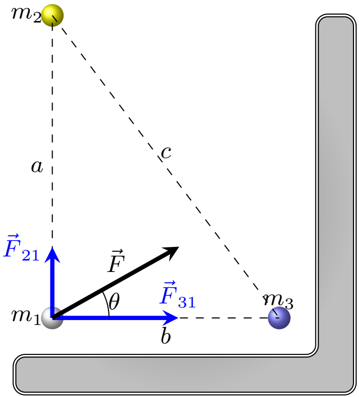

Figura 4: Bolas de billar sobre una mesa.

Solución

Asuma un sistema de coordenadas en el plano-xy con origen en m_1.

La fuerza ejercida por la masa m_2 sobre la masa m_1 es

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{a^2}\hat{\jmath} = \left(6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\frac{(0.300\,\mathrm{kg})^2}{(0.400\,\mathrm{m})^2}\hat{\jmath} = (3.75 \times 10^{-11}\,\mathrm{N})\hat{\jmath}$$

La fuerza ejercida por la masa m_3 sobre la masa m_1 es

$$\vec{F}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{b^2}\hat{\imath} = \left(6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\frac{(0.300\,\mathrm{kg})^2}{(0.300\,\mathrm{m})^2}\hat{\imath} = (6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N})\hat{\imath}$$

La fuerza neta sobre la bola de masa m_1 es

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{21} = (6.67 \times 10^{-11}\hat{\imath} + 3.75 \times 10^{-11}\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$$

La magnitud de dicha fuerza es

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_{31}^2 + F_{21}^2} = 7.65 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

Continuación

La fuerza neta está dirigida

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3.75 \times 10^{-11}}{6.67 \times 10^{-11}}\right) = 29.3^{\circ}$$

medidos desde el eje x-positivo y en la dirección anti-horaria.

Recuerde que $F_g = mg$ es el peso de un objeto de masa m en la superficie de la tierra. Igualando esa expresión a la Ec.(3.4), se obtiene

$$mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}, \quad \therefore \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2} \tag{4.1}$$

Imagine, ahora, que el objeto se encuentra a una altura h sobre la superficie de la tierra o una distancia $r = R_T + h$ desde su centro. Se tiene

$$F_g = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

la que debe ser igual a $F_g = mg$, con g la magnitud de la aceleración de gravedad a la altura h. Así

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} \tag{4.2}$$

mostrando que la magnitud de la aceleración de gravedad, g, disminuye a medida que **aumenta** la altura.

Ejemplo

La Estación Satelital Internacional opera a una altura de 350 km desde la superficie de la tierra. Los planes para la construcción final muestran que 4.22×10^6 N de material, pesado en la superficie de la tierra, fueron transportados por diferentes naves espaciales. ¿Cuál es el peso de la estación espacial cuando está en órbita? $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ y $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$.

Solución

Del peso del material en la tierra, obtenemos su masa

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6\,\mathrm{N}}{9.80\,\mathrm{m/s^2}} = 4.31 \times 10^5\,\mathrm{kg}$$

En la Estación Satelital, el valor de g, con $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ y $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, es

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6.37 \times 10^6 + 3.5 \times 10^5)^2\,\mathrm{m^2}} = 8.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

Continuación

El peso del material en la Estación Satelital es

$$F_g = mg = (4.31 \times 10^5\,\mathrm{kg})\left(8.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 3.80 \times 10^6\,\mathrm{N}$$

Ejemplo

Conocido el radio de la tierra y el valor de $g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$ en la superficie de la tierra, determine la densidad promedio de la tierra.

Solución

Asumiendo la tierra como una esfera perfecta, se tiene

$$\rho_T = \frac{M_T}{V} = \frac{3}{4\pi}\frac{M_T}{R_T^3}, \quad \text{donde} \quad V = \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

Continuación

Sabemos que en la superficie de la tierra

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}, \quad \therefore \quad M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

así

$$\begin{aligned}
\rho_T &= \frac{3}{4\pi}\frac{M_T}{R_T^3} = \left(\frac{3}{4\pi R_T^3}\right)\left(\frac{gR_T^2}{G}\right) = \left(\frac{3}{4\pi R_T}\right)\frac{g}{G} \\
&= \frac{3(9.80\,\mathrm{m/s^2})}{4\pi(6.37\times 10^6\,\mathrm{m})(6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{Kg\cdot m^2/kg^2})} \\
&= 5.51\times 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}
\end{aligned}$$

La observación del movimiento de los planetas, estrellas y otros objetos en el espacio data de miles de años.

En el siglo II Claudius Ptolomeo (100 - 170 A.C) elaboró el **modelo geocéntrico** con la tierra como centro del Universo.

En 1543 Nicolás Copérnico (1473 - 1543) sugirío que la tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrdedor del Sol: **Modelo Heliocéntrico**.

Tycho Brahe (1546 - 1601): Determinó las posiciones de las estrellas (777 visibles a simple vista) y los planetas (sin telescopio).

Johannes Kepler (auxiliar de Brahe) dedujo un modelo matemático para el movimiento de los planetas: **Leyes de Kepler**:

Ley de las Órbitas. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

Ley de las velocidades areales. El radio vector desde el Sol a un dado planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Ley de los periodos. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Las órbitas circulares son casos muy especiales y las órbitas elípticas son la situación más general.

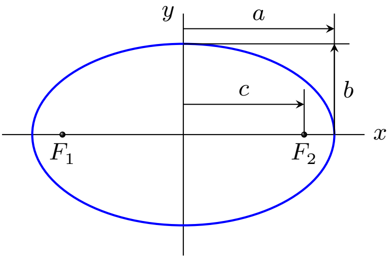

Figura 5: Esquema de una elipse de semieje mayor de longitud a y semieje menor de longitud b con focos a la distancia $\pm c$ del centro.

F_1 y F_2: **Focos**

$2a$: Eje mayor; a: **semieje mayor**

$2b$: Eje menor; b: **semieje menor**

$\pm c$: Posición de los focos desde el centro a lo largo del eje-x. $a^2 = b^2 + c^2$.

En las órbitas elípticas de los planetas el **Sol está en uno de los focos**. En el otro foco no hay nada.

$e = c/a$, $(0 < e < 1)$: **Excentricidad**; describe la forma general de una elipse. Círculo $c = 0, \rightarrow e = 0$.

$e_{\mathrm{tierra}} = 0.017$; $e_{\mathrm{Mercurio}} = 0.21$; $e_{\mathrm{Halley}} = 0.97$: Lejos del Sol la mayor parte de su periodo de 76 años.

Imagine el Sol en el foco F_2 de la Fig.6.3:

- Planeta en el extremo izquierdo de la elipse; distancia Planeta-Sol $= a + c$: **Afelio**; planeta a la máxima distancia del Sol. (Para un objeto orbitando la tierra: **Apogeo**).
- Planeta en el extremo derecho de la elipse; distancia Planeta-Sol $= a - c$: **Perihelio**; planeta a la mínima distancia del Sol. (Para un objeto orbitando la tierra: **Perigeo**).

La primera ley de Kepler es un resultado directo de la dependencia inversamente proporcional al cuadrado de la fuerza gravitacional.

Órbitas circulares y elípticas son permitidas para objetos **ligados** al centro de fuerzas gravitacionales: Planetas, asteroides y cometas (movimiento periódico alrededor del Sol) y lunas que orbitan los planetas.

Objetos **no ligados** puden tener órbitas parabólicas ($e = 1$) o hiperbólicas ($e > 1$): Meteoroides

Es posible mostrar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia de la conservación del momentum angular.

Sea M_p la masa de un planeta girando en una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos.

La fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre el planeta es central (siempre a lo largo del radio vector, dirigida hacia el Sol): Esa fuerza no produce torque sobre el planeta $\vec{F} \parallel \vec{r}$.

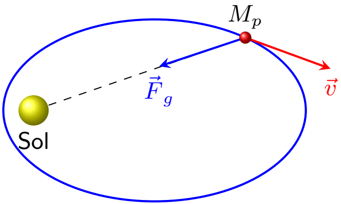

Figura 6: (a) La fuerza gravitacional sobre un planeta se dirige hacia el Sol.

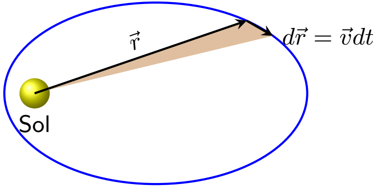

Figura 6: (b) El área que barre el radio vector en el tiempo dt es $|\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}|$.

De la dinámica rotacional recordemos que

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Dado que $\vec{F}_g$ es la única fuerza sobre el planeta $\sum \vec{\tau} = 0$, así

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} = \text{constante}$$

En el tiempo dt, el radio vector $\vec{r}$ barre un área dA [Fig.6.4(b)]

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt| = \frac{L}{2M_p}dt$$

así

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p}, \quad \text{con} \quad L,\, M_p \text{ constantes.} \tag{5.1}$$

El radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Consecuencia de la naturaleza central de la fuerza ($\vec{L}$ constante): Ley **aplicable** a cualquier situación con una fuerza central.

Es posible mostrar que la tercera ley de Kepler se puede predecir a partir de la ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia para órbitas circulares.

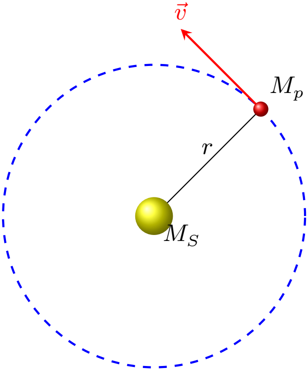

Figura 7: Planeta de masa M_p en una órbita circular alrededor del Sol.

La fuerza gravitacional es proporciona la aceleración centrípeta del planeta en su órbita circular. Usando Newton

$$F_g = \frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p a_r = \frac{M_p v^2}{r}$$

La rapidez angular orbital del planeta es $\omega = v/r$, por lo tanto $v = r\omega = 2\pi r/T$, así

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2} = \left(\frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}\right)$$

o

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3$$

La constante K_S es conocida

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}$$

Asumiendo la validez de la expresión anterior para órbitas elípticas con $r = a$ (a la longitud del semieje mayor), entonces

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3 \tag{5.2}$$

K_S no depende de la masa del planeta: La Ec.(5.2) es válida para cualquier planeta.

En el caso de la Luna orbitando la tierra

$$K_T = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right)$$

Ejemplo

Calcule el valor de la masa del Sol sabiendo que el periodo de la órbita de la tierra alrededor del Sol es 3.154×10^7 s y su distancia desde el Sol es 1.496×10^{11} m.

Solución

Usemos directamente la Ec.(5.2), con $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, $T = 3.154 \times 10^7\,\mathrm{s}$ y $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. Aislando M_S de esa ecuación se obtiene

$$M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(3.154 \times 10^7\,\mathrm{s})^2}$$

o sea,

$$M_S = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Ejemplo

Considere un satélite de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de la tierra con rapidez constante v y a una altura h sobre la superficie de la tierra, como esquematizado en la **Fig.8**.

(a) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R_T (el radio de la tierra) y M_T (la masa de la tierra).

(b) Si el satélite es **geosíncrono** (es decir, parece permanecer en una posición fija sobre la tierra), ¿qué tan rápido se mueve a través del espacio?

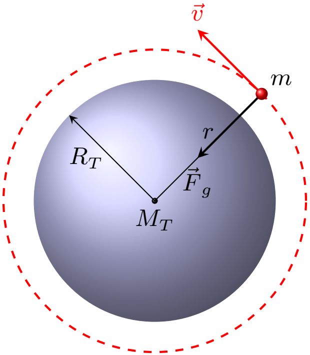

Figura 8: Satélite orbitando circularmente la tierra.

Solución

(a) La tierra atrae gravitacionalmente al satélite. En este caso $r = R_T + h$. Usando Newton, la fuerza gravitacional de la tierra sobre el satélite es

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$

Despejando v, se tiene

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

(b) Un satélite geosíncrono tiene un periodo de $24\,\mathrm{h}$, esto es,

$$T = 24\,\mathrm{h} \times \frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}} \times \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 8.64 \times 10^4\,\mathrm{s}$$

y su órbita sobre el ecuador. Debemos determinar r a partir de la Ec.(5.2)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}\right) r^3 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

Continuación

Usando los valores numéricos en la expresión anterior para r, se tiene

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})(8.64 \times 10^4\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}}$$

o sea

$$r = 4.23 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

Usando ese valor par r en la expresión para v del ítem (a) se obtiene la rapidez

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})}{4.23 \times 10^7\,\mathrm{m}}},$$

es decir,

$$v = 3.07 \times 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tarea. Y si el movimiento del satélite del ítem (a) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más pesado que la tierra, pero del mismo radio, ¿el satélite se movería con mayor o menor rapidez de la que se mueve alrededor de la tierra?

La teoría de la gravitación de Newton tuvo una amplia aceptación: Explicaba satisfactoriamente el movimiento planetario.

Esa teoría se ha usado desde entonces para explicar el movimiento de los cometas, la desviación de la balanza de Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de las galaxias.

¿Cómo es posible que dos objetos interactúen entre sí si no están en contacto? Newton no fue capaz de responder esa pregunta.

Mucho después de Newton se introdujo el concepto de **campo gravitacional** existente en cada punto del espacio.

- una partícula de masa m en un punto del campo gravitacional $\vec{g}$ experimenta una fuerza $\vec{F}_g = m\vec{g}$.

Se define el campo gravitacional $\vec{g}$, en un punto, como

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m} : \tag{6.1}$$

o sea, igual a la fuerza gravitacional que experimenta una **partícula de prueba** colocada en ese punto, dividida por la masa de la partícula.

El objeto que crea el campo se llama **partícula fuente**. El campo gravitacional existe aún en ausencia de partícula de prueba. La partícula de prueba permite detectar y medir la intensidad del campo y la fuerza que ésta experimenta en dicho campo.

Considere un objeto de masa m cerca de la superficie de la tierra. La magnitud de la fuerza gravitacional actuando sobre la partícula es

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2}$$

el campo gravitacional $\vec{g}$ a la distancia r del centro de la tierra es

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G\frac{M_T}{r^2}\hat{r} \tag{6.2}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera de la tierra, y el signo negativo indica que el campo apunta hacia el centro de la tierra.

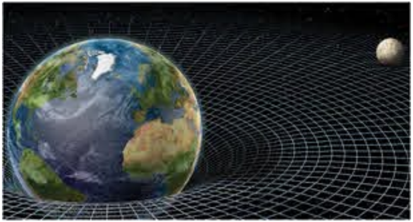

Figura 9: Ilustración del campo gravitacional.

Vectores de campo en diferentes puntos alrededor de la tierra varían tanto en dirección como en magnitud.

En una pequeña región sobre la superficie de la tierra, el campo es aproximadamente constante y uniforme.

La Ec.(6.2) es válida para todos los puntos fuera de la superficie de la tierra (considerada esférica).

En la superficie de la tierra $r = R_T$, la magnitud de $\vec{g}$ es

$$|\vec{g}| \approx 9.80\,\mathrm{N/kg} \equiv 9.80\,\mathrm{m/s}^2$$

En el curso de Fisica I se mencionó que la energía potencial gravitacional es la energía asociada a la configuración de un sistema de cuerpos u objetos interactuando mediante la fuerza gravitacional.

Enfatizamos que la función energía potencial mgy para un sistema partícula-tierra es válida sólo cerca de la superficie de la tierra (fuerza gravitacional constante).

Dado que $F_g \propto 1/r^2$ se espera una función energía potencial más general diferente de mgy.

El cambio en la energía potencial gravitacional ΔU de un sistema asociado con un desplazamiento dr de un integrante del sistema es definido como:

el negativo del trabajo realizado por la fuerza gravitacional $F_g(r)$ sobre dicho integrante durante el desplazamiento

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F_g(r)dr \tag{7.1}$$

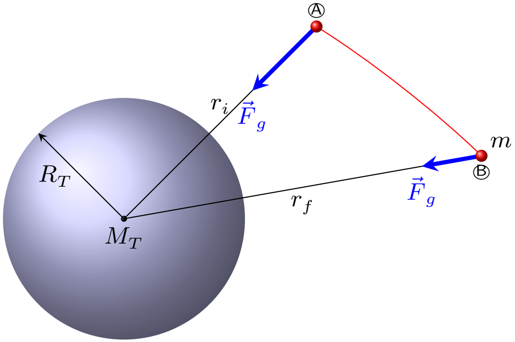

Figura 10: Conforme una partícula de masa m se mueve desde Ⓐ a Ⓑ en el campo gravitacional de la tierra su energía potencial cambia.

Sobre la partícula actúa la fuerza gravitacional

$$F_g = -\frac{GM_T m}{r^2}$$

De la Ec.(7.1) se tiene

$$\Delta U = U_f - U_i = GM_T m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \tag{7.2}$$

Considerando $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, y $r_f \to r$, se obtiene

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r} \tag{7.3}$$

para la energía potencial gravitacional del sistema partícula-tierra: Aplicable para $r \geq R_T$; no aplicable para $r \leq R_T$.

La Ec.(7.3) se puede aplicar a cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{7.4}$$

Dado que la fuerza gravitacional entre dos partículas es de atracción, un agente externo debe realizar un trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas.

El trabajo realizado por el agente externo aumenta la energía potencial a medida que las partículas se separan: U se hace menos negativa a medida que r aumenta.

Para dos partículas en reposo separadas una distancia r, un agente externo debe entregar una energía igual, al menos, a $+Gm_1m_2/r$ para separar las partículas a una distancia infinita.

Se puede pensar al valor absoluto de la energía potencial como la **energía de unión** del sistema. Si la energía suministrada por el agente externo es mayor que la energía de unión, el exceso de energía está en forma de energía cinética de las partículas cuando la separación entre ellas es infinita.

Para un sistema de tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3 separadas una distancia r_{12}, r_{13} y r_{23}, la energía potencial total es

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (7.5)$$

Ejemplo

Una partícula de masa m se desplaza una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la tierra. Muestre que en esta situación la expresión general para el cambio en la energía potencial gravitacional conocida por la Ec.(7.2) se reduce a la familiar $\Delta U = mg\Delta y$.

Solución

La Ec.(7.2) puede ser escrita como

$$\Delta U = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) = GM_T m \left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f} \right)$$

En este caso $r_f - r_i \approx \Delta y$ y $r_i r_f \approx R_T^2$. O sea

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T^2} \Delta y = mg\Delta y, \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

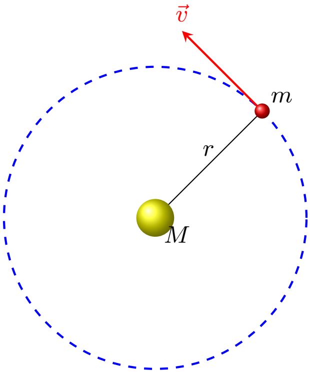

Figura 11: Objeto de masa m en una órbita circular alrededor de un objeto de masa M: $M \gg m$.

Un objeto de masa m orbita un objeto de masa M, con $M \gg m$.

Suponga al objeto de masa M en un marco de referencia inercial en reposo. Cuando los objetos están separados una distancia r

$$E = K + U$$

o sea

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

con $E > 0$, $E = 0$ o $E < 0$, dependiendo del valor de $|\vec{v}|$.

Para un sistema ligado (por ejemplo, tierra-Sol), E **necesariamente es menor que cero** por la convención $U \to 0$ cuando $r \to \infty$.

Aplicando la segunda ley de Newton al objeto de masa m, se tiene

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Multiplicando ambos lados por r y dividiendo por 2, se llega a

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \tag{8.2}$$

Sustituyendo en la Ec.(8.1), se obtiene

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \tag{8.3}$$

La energía mecánica total en el caso de órbitas circulares es negativa. Su valor absoluto es igual a la energía de enlace del sistema.

La **energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial.**

Para el caso de órbitas elípticas la energía total también es negativa. En este caso

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad \text{con } a \text{ longitud del semieje mayor.} \tag{8.4}$$

Para un sistema aislado la energía es constante. En la **Fig.10**, a medida que el objeto de masa m se mueve desde Ⓐ a Ⓑ, se tiene

$$E_i = E_f \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \tag{8.5}$$

Luego:

> **En un sistema de dos objetos ligados gravitacionalmente tanto la energía mecánica total como el momentum angular total del sistema son constantes de movimiento, es decir, son cantidades conservadas.**

Ejemplo

Un vehículo de transporte espacial libera un satélite de comunicaciones de 470 kg de masa mientras está en órbita a 280 km sobre la superficie de la tierra. Un motor cohete en el satélite lo pone en una órbita geosíncrona a una altura $r_f = 4.23 \times 10^7$ km. ¿Cuánta energía debe proporcionar el motor en esta operación espacial?

Solución

Se tiene $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $m = 4.70 \times 10^2$ kg y

$$r_i = R_T + 2.80 \times 10^5 \text{ m} = 6.65 \times 10^6 \text{ m} \quad \text{y} \quad r_f = 4.23 \times 10^7 \text{ m}$$

Debemos econtrar

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_T m}{2r_f} - \left(-\frac{GM_T m}{2r_i}\right) = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Continuación

Usando los valores

$$\Delta E = -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})(4.70 \times 10^{2}\,\mathrm{kg})}{2}$$
$$\times \left(\frac{1}{4.23 \times 10^{7}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^{6}\,\mathrm{m}}\right)$$
$$= 1.19 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$$

Un objeto de masa m es lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra con rapidez inicial v_i.

En la superficie de la tierra $v = v_i$ y $r = r_i = R_T$.

A la máxima altura $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{\text{máx}}$.

Conservación de la energía implica $E_i = E_f$ o sea

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_Tm}{r_T} = -\frac{GM_Tm}{r_{\text{máx}}}$$

resolviendo para v_i^2 se llega a

$$v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\text{máx}}}\right) \tag{8.6}$$

la que se puede usar cuando se sabe la altura máxima $h = r_{\text{máx}} - R_T$

La **rapidez de escape** es la mínima rapidez inicial de un objeto en la superficie de la tierra, para alejarse a una distancia infinita de ella. El objeto se aleja cada vez más de la tierra y su rapidez se aproxima asintóticamente a cero.

Haciendo $r_{\text{máx}} \to \infty$ en la Ec.(8.6) y anotando $v_i = v_{\text{esc}}$, se tiene

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \tag{8.7}$$

la cual no depende de la masa del objeto, o sea, un satélite o una molécula tienen una rapidez de escape igual en la tierra. El resultado, además, no depende de la dirección de la velocidad e ignora la resistencia del aire.

En general, la rapidez de escape desde la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{8.8}$$

Ejemplo

Calcule la rapidez de escape- desde la tierra- de una nave espacial de 5.00×10^3 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie de la tierra para alejarse infinitamente de ella.

Solución

La rapidez de escape es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\,\text{kg})}{6.37 \times 10^6\,\text{m}}}$$

o sea

$$v_{\text{esc}} = 1.12 \times 10^4\,\text{m/s}$$

y su energía cinética es

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(5.00 \times 10^3\,\text{kg})(1.12 \times 10^4\,\text{m/s})^2 = 3.13 \times 10^{11}\,\text{J}$$

En una supernova (explosión catastrófica de una estrella muy pesada), el material que queda en el núcleo central continúa colapsándose y su destino final depende de su masa:

- Masa $< 1.4M_{\mathrm{Sol}}$, enfriamiento gradual terminando como muna enana blanca.
- Masa $> 1.4M_{\mathrm{Sol}}$, colapso gravitacional acentuado, terminando como una estrella de neutrones, con una masa comprimida a un radio $\sim 10\,\mathrm{km}$.

Si la Masa $> 3M_{\mathrm{Sol}}$ el colapso puede originar un objeto muy pequeño en el espacio, comúnmente llamado **agujero u hoyo negro**: Restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. La fuerza gravitacional experimentada por objetos cerca es extremadamente grande y quedan atrapados para siempre.

La rapidez de escape desde un agujero negro es muy grande. Si $v_{\mathrm{esc}} > c$ (c la rapidez de la luz) la radiación del objeto (luz visible, por ejemplo) no escapa y el objeto parece negro. El radio crítico R_{S}, donde $v_{\mathrm{esc}} = c$ se llama **radio de Schwarzschild**.

La superficie imaginaria de una esfera de este radio que rodea al agujero negro se llama **horizonte de eventos**: Límite de lo cerca que se puede aproximar del agujero y es posible escapar.

En una estrella binaria (estrella ordinaria y un agujero negro) es posible que el material que rodea a la estrella sea jalado hacia el agujero negro, formando un **disco de acrecentamiento** alrededor de éste.

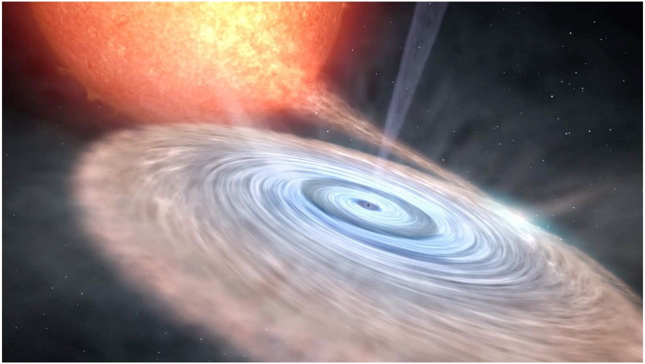

Figura 12: Una estrella binaria.