

**TAREA 2 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios)**

**ATENCIÓN:** favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada problema tiene un puntaje máximo de **15 puntos**.

Recomiendo revisar con calma los desarrollos propuestos. Procurar usar las notaciones apropiadamente, y no dar por sentado algunas inferencias directas en sus desarrollos. Debieran justificarse como corresponde. Algunas de ellas, han sido dejadas de ejercicio al lector.

**Problema 1.** Sean  $S, T, U$  subespacios de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ , tales que

- a)  $S \cap T = S \cap U$ ,
- b)  $S + T = S + U$ ,
- c)  $T \subseteq U$ .

Demostrar que  $T = U$ .

**Desarrollo:** Resta probar  $U \subseteq T$ . Sea  $x \in U$ , tal que  $x \in U$  (fijo pero arbitrario). Observamos que

$$\begin{aligned} x \in U \subseteq S + U &\stackrel{b)}{\Rightarrow} x \in S + T \\ &\Rightarrow \exists (y, z) \in S \times T : x = y + z \\ &\Rightarrow y = x - z. \end{aligned}$$

Gracias a c), tenemos que  $z \in U$ , con lo cual  $x - z \in U$ . Pero  $y \in S$ . Luego,  $y \in S \cap U = S \cap T$ , por a). Como consecuencia, se deduce que  $y \in T$  también. De esta manera, se concluye que  $x = y + z \in T$ . En vista que  $x \in U$  es fijo pero arbitrario, se deduce que  $U \subseteq T$ , lo cual junto con c), permite establecer que  $T = U$ .

**OBSERVACIÓN:** La mayoría ha establecido este resultado cuando  $V$  es de DIMENSIÓN FINITA, invocando el TEOREMA DE GRASSMANN. De esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} \dim(S + T) = \dim(S + U) &\Rightarrow \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(U) - \dim(S \cap U) \\ &\stackrel{a)}{\Rightarrow} \dim(T) = \dim(U). \end{aligned}$$

Luego, en vista que  $T$  es subespacio vectorial de  $U$  (por c)), se concluye que  $T = U$ .

**Problema 2.** En los siguientes casos, indique si existe  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  que verifique:  $\text{Im}(T) = A$  y  $\text{Ker}(T) = B$ . Justifique su respuesta. En caso afirmativo, determine cómo viene definida  $T$ .

- a)  $A := \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,  $B := \{(1, 2, 1)\}$ .
- b)  $A := \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $B := \{(1, -2, 1)\}$ .

**Desarrollo:**

- a) Primero deduzcamos un conjunto generador de  $A$ . Tenemos

$$\begin{aligned} A &:= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\} \\ &= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4\} \\ &= \{x := (-x_2 + x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\} \rangle. \end{aligned}$$

De esta manera,  $S := \{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$  genera  $A$ . Veamos que es l.i. En efecto, sean  $\{\alpha_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$  tales que

$$\alpha_1 (-1, 1, 0, 0) + \alpha_2 (1, 0, 1, 0) + \alpha_3 (-2, 0, 0, 1) = \theta = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Así,  $S$  es una base de  $A$ . Ahora veamos si es posible la existencia de  $T$ . En caso existiera, se tendría que  $n(T) = 1$  y  $r(T) = \dim(A) = 3$ . Pero, invocando el TEOREMA DE NULIDAD Y RANGO, tenemos  $n(T) + r(T) = 4 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ . De esta forma, en este caso, no existe  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  que satisface lo pedido.

b) Como en el caso a), comenzaremos estableciendo un conjunto generador de  $A$ . Tenemos

$$\begin{aligned} A &:= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\} \\ &= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2, x_3 = -x_4\} \\ &= \{x := (-x_2, x_2, -x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\} \rangle. \end{aligned}$$

Así,  $R := \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$  es un conjunto generador de  $A$ . En vista que  $(-1, 1, 0, 0)$  no es múltiplo de  $(0, 0, -1, 1)$ , se infiere que  $R$  es una base de  $A$ . Ahora veamos si es posible la existencia de  $T$ . En caso existiera, se tendría que  $n(T) = 1$  y  $r(T) = \dim(A) = 2$ . Invocando el TEOREMA DE NULIDAD Y RANGO, tenemos  $n(T) + r(T) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ . De esta forma, en este caso, SÍ EXISTE  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  que satisface lo pedido.

En lo que sigue procedemos a definir  $T$ , explicitando su regla de correspondencia. Por lo discutido en clases, es suficiente con conocer las imágenes via  $T$  de una base cualquiera del ESPACIO DE PARTIDA,  $\mathbb{R}^3$  en nuestro caso. Como  $\text{Ker}(T) = \langle \{(1, -2, 1)\} \rangle$ , se infiere que  $T(1, -2, 1) = \theta_{\mathbb{R}^4}$ . Completamos ahora  $\{(1, -2, 1)\}$  hasta obtener una BASE DE  $\mathbb{R}^3$ . Por ejemplo, consideremos el conjunto  $U := \{(1, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ , el cual es l.i. En efecto, sean  $\{\beta_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_1 (1, -2, 1) + \beta_2 (1, 0, 0) + \beta_3 (0, 1, 0) = \theta_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -2\beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

De esta manera,  $U$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ . Recordando ahora lo discutido en clases,  $T(U)$  es un conjunto generador de  $\text{Im}(T) = A$ , resulta que  $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)\}$  genera  $A$ . Esto sugiere, por ejemplo, que  $T(1, 0, 0) = (-1, 1, 0, 0)$  y  $T(0, 1, 0) = (0, 0, -1, 1)$ . Con estos datos, ya podemos definir  $T$ . Sea  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , y sean  $\{\beta_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_1 (1, -2, 1) + \beta_2 (1, 0, 0) + \beta_3 (0, 1, 0) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = x \\ -2\beta_1 + \beta_3 = y \\ \beta_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = z, \beta_2 = x - z, \beta_3 = y + 2z.$$

Así,  $(x, y, z) = z(1, -2, 1) + (x - z)(1, 0, 0) + (y + 2z)(0, 1, 0)$ , de donde resulta

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= zT(1, -2, 1) + (x - z)T(1, 0, 0) + (y + 2z)T(0, 1, 0) \\ &= (x - z)(-1, 1, 0, 0) + (y + 2z)(0, 0, -1, 1) = (z - x, x - z, -y - 2z, y + 2z). \end{aligned}$$

Finalmente, como  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  es fijo pero arbitrario,  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  viene dada por

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) := (z - x, x - z, -y - 2z, y + 2z).$$

**Problema 3.** Sean  $V$  y  $W$   $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que  $\forall T \in \mathcal{L}(V, W) : \exists U \subseteq V$  subespacio vectorial, tal que  $U \cap \text{Ker}(T) = \{\theta_V\} \wedge \text{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\}$ .

**Desarrollo:** Sea  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Tenemos tres casos posibles:

- $\text{Ker}(T) = V$ . Esto implica que  $T := \Theta \in \mathcal{L}(V, W)$  (TRANSFORMACIÓN NULA). Entonces con  $U := \{\theta\}$  se obtiene lo pedido.
- $\text{Ker}(T) = \{\theta\}$ . Aquí, considerando  $U := V$ , también se obtiene lo pedido.
- $\text{Ker}(T)$  subespacio vectorial, no trivial, de  $V$  de dimensión  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $n(T) = s \in \{1, \dots, m-1\}$ , y  $\{z_j\}_{j=1}^s \subseteq V$  una base de  $\text{Ker}(T)$ . Luego, invocando el TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA,  $\exists \{z_j\}_{j=s+1}^m \subseteq V$  tal que  $B := \{z_j\}_{j=1}^m$  es una BASE de  $V$ . El candidato a ser el subespacio vectorial buscado es  $U := \langle \{z_j\}_{j=s+1}^m \rangle$ . Por su definición,  $U$  es subespacio vectorial de  $V$ . Verifiquemos que satisface las dos condiciones requeridas.

– Sea  $w \in U \cap \text{Ker}(T)$ , entonces  $w \in U$  y  $w \in \text{Ker}(T)$ . Esto nos dice que  $\exists \{\alpha_j\}_{j=s+1}^m, \{\beta_k\}_{k=1}^s \subseteq \mathbb{K}$  tales que

$$w = \sum_{j=s+1}^m \alpha_j z_j = \sum_{k=1}^s \beta_k z_k \Rightarrow \sum_{k=1}^s \beta_k z_k - \sum_{j=s+1}^m \alpha_j z_j = \theta_V.$$

La última relación nos muestra una combinación lineal de elementos de  $\{z_j\}_{j=1}^m$  para expresar el vector nulo. Pero  $\{z_j\}_{j=1}^m$  es l.i., por ser una base de  $V$ , por lo cual se debe tener que  $\forall k \in \{1, \dots, s\} : \beta_k = 0$  y  $\forall j \in \{s+1, \dots, m\} : \alpha_j = 0$ . De esta forma, se tiene que  $w = \theta_V$ . Así,  $U \cap \text{Ker}(T) \subseteq \{\theta_V\}$ . En vista que  $\{\theta_V\} \subseteq U \cap \text{Ker}(T)$  siempre se cumple, se CONCLUYE que  $U \cap \text{Ker}(T) = \{\theta_V\}$ .

- Tenemos  $\text{Ker}(T) + U = V$  (¿POR QUÉ?) Sea  $z \in \text{Im}(T)$  (fijo pero arbitrario). Esto implica que  $\exists w \in V : T(w) = z$ . A su vez,  $\exists (a, b) \in \text{Ker}(T) \times U : z = a + b$ . Luego,  $z = T(w) = T(a) + T(b) = \theta + T(b) = T(b)$ . Así,  $z \in \{T(u) : u \in U\}$ . En vista que  $z \in \text{Im}(T)$  es fijo pero arbitrario, se deduce que  $\text{Im}(T) \subseteq \{T(u) : u \in U\}$ . En vista que  $\{T(u) : u \in U\} \subseteq \text{Im}(T)$  siempre, concluimos que  $\text{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\}$ .

**Problema 4.** Sea la función  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  definida por  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto T(p)$ , donde  $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$ .

- a) Pruebe que  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ .  
b) Determine si  $T$  es un isomorfismo. En tal caso, defina explícitamente  $T^{-1}$ .

**Desarrollo:** Primero, notemos que para cualquier  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $T(p)$  está definido en  $x = 0$ , dado que

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} T(p)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt \stackrel{(\text{L'HÔPITAL})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} p(x) = p(0).$$

Por otro lado, considerando  $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , para algunos  $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$ , resulta

$$\begin{aligned} T(p)(x) &:= \frac{1}{x} \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt = \dots = a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 \\ &\Rightarrow T(p)(0) = a_0 = p(0). \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Sean  $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , y  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$T(p+q)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (p+q)(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x q(t) dt = T(p)(x) + T(q)(x) = (T(p) + T(q))(x).$$

Como  $x \in \mathbb{R}$  es fijo pero arbitrario, se infiere que  $\forall x \in \mathbb{R} : T(p+q)(x) = (T(p) + T(q))(x)$ , es decir  $T(p+q) = T(p) + T(q)$ . Asimismo, siendo  $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , fijos pero arbitrarios, tenemos  $\forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : T(p+q) = T(p) + T(q)$ .

A su vez, si consideramos  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , resulta para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T(\alpha p)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha p(t) dt = \alpha \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt = \alpha T(p)(x) = (\alpha T(p))(x).$$

Siendo  $x \in \mathbb{R}$  fijo pero arbitrario, se deduce que  $\forall x \in \mathbb{R} : T(\alpha p)(x) = (\alpha T(p))(x)$ , i.e.  $T(\alpha p) = \alpha T(p)$ . Como  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , son fijos pero arbitrarios, se tiene que  $\forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha p) = \alpha T(p)$ .

De esta manera, se concluye que  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ .

- b) Como estamos trabajando en DIMENSIÓN FINITA, es suficiente con probar la inyectividad o la sobreyectividad de  $T$  para concluir que ella es biyectiva. Para  $\text{Ker}(T)$ . Sea  $p \in \text{Ker}(T)$ , entonces  $T(p) = \theta$  (POLINOMIO NULO). Luego,  $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_0^x p(t) dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = 0 \Rightarrow p = \theta$ .

ALTERNATIVAMENTE, si consideramos  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , para algunos  $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$ , y teniendo en cuenta (1), resulta

$$\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow p = \theta.$$

Así, tenemos que  $\text{Ker}(T) \subseteq \{\theta\}$ . Como  $\{\theta\} \subseteq \text{Ker}(T)$  siempre, se infiere que  $\text{Ker}(T) = \{\theta\}$ , es decir  $T$  es inyectiva. Por tanto,  $T$  es biyectiva, y por ende  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$  es un ISOMORFISMO.

Esto asegura la existencia de  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ . Ahora pasamos a definir su regla de correspondencia. Sean  $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tales que  $T(p) = q \Leftrightarrow T^{-1}(q) = p$ . Esto conduce a afirmar que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = q(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_0^x p(t) dt = x q(x) \\ &\stackrel{(T.F.C.)}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R} : T^{-1}(q)(x) = p(x) = (x q(x))' = q(x) + x q'(x). \end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE, dado  $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\forall x \in \mathbb{R} : q(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ , para algunos  $\{b_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$ , buscamos  $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , para algunos  $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$ , de modo que  $T(p) = q$ . Luego, teniendo en cuenta (1), nos queda

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = q(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = 2 b_1, a_2 = 3 b_2. \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : T^{-1}(q)(x) = p(x) = b_0 + 2 b_1 x + 3 b_2 x^2 = q(x) + x q'(x). \end{aligned}$$