Problema 1

Compruébese que un paseo aleatorio $\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ definido por $Y_t = \sum_{j=1}^{t} \xi_j$ donde $\xi_j \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

a) tiene esperanza cero,

b) pero no es estacionario.

Hint. Es suficiente calcular la función de autocovarianzas

c) ¿por que?

<u>Solución</u> a) $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{t} \xi_j\right] = \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\xi_j] = 0$

b) $\mathrm{cov}[Y_t, Y_{t+h}] = \mathrm{Cov}\left[\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=1}^{t+h} \xi_j\right] =$

$$= \mathrm{cov}\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{t} \xi_j}_{=Y_t}, \underbrace{\sum_{j=1}^{t} \xi_j}_{=Y_t}\right] + \mathrm{cov}\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{t} \xi_j}_{=Y_t}, \underbrace{\sum_{j=t+1}^{t+h} \xi_j}_{\sum_{j=1}^{t+h}\xi_j - \sum_{j=1}^{t}\xi_j}\right] =$$

$$= \mathrm{Var}[Y_t] + \underbrace{\mathrm{cov}[Y_t, Y_{t+h} - Y_t]}_{=0}$$

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j\right)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{t} \xi_j^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{1\le i,j\le t \\ i\neq j}} \xi_i \xi_j\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} \underbrace{\mathbb{E}[\xi_j^2]}_{=\sigma^2} + \sum_{\substack{\xi_i \perp\!\!\!\perp \xi_j \\ i\neq j}} \mathbb{E}[\xi_i \xi_j] = t\sigma^2 \neq \text{cte.} \quad (*)$$

Además, $\operatorname{cov}[Y_t, Y_{t+h} - Y_t] =$

$$= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{t} \xi_j\Big)\Big(\sum_{j=t+1}^{h} \xi_j\Big)\Big] = 0$$

son $\perp\!\!\!\perp$.

Por lo anterior, $(*) \Rightarrow \{Y_t\}$ no es estacionario.
(débil)

c) En general, "estacionario estricto" $\Rightarrow$ "est. débil"

Así, si el proc. no es est. debil, tampoco es est. estricto.

En este caso (proceso gaussiano)

débil $\Longleftrightarrow$ estricto. ∎