

**Cálculo III (521227)**

**Listado 4**

1. Muestre por definición que las siguientes definiciones son diferenciables en el punto indicado.

(a)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ , en el punto  $(1, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = 2x^3y^2$ , en el punto  $(1, 1)$ .

2. Determine todos los puntos donde la función  $f$  es diferenciable.

(a)  $f(x, y) = y \sin(x)$ .

(b)  $f(x, y) = |x| + |y|$ .

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} xy \cos\left(\frac{1}{xy}\right) & , \text{ si } xy \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } xy = 0 \end{cases}$ .

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

(e)  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} & , \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$ .

3. Sea  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left[(x^2 + y^2)^{-1/2}\right] & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Muestre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existen y que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no son continuas en  $(0, 0)$ . ¿ $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ? Justique.

4. Compruebe que las siguientes funciones son de  $C^1$  en todo su dominio.

(a)  $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ .

(b)  $f(x, y) = \sin^2(x - y) \cos(x + y)$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{1 + \cosh(y)}{\tanh(x)}$ .

(d)  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{1-x-y}{1+x+y}\right)$ .

5. Encuentre la buena aproximación afín  $L(\vec{X})$  de la función  $f$  en el punto  $X_0$  y utilícela para aproximar el valor de  $f$  en el punto  $A$ .

(a)  $f(x, y, z) = xy^2 + z$ ,  $X_0 = (2, 2, -2)$  y  $A = (2.1, 1.98, -2.03)$ .

- (b)  $f(x, y, z) = e^{\arctan(x-y) + \cos(x+z)}$ ,  $X_0 = (2, 2, -2)$  y  $A = (2.1, 1.98, -2.03)$ .
- (c)  $f(x, y, z) = (xy^2 + z, e^{\arctan(x-y) + \cos(x+z)})$ ,  $X_0 = (2, 2, -2)$  y  $A = (2.1, 1.98, -2.03)$ .
6. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $P$  un punto de  $U$ . Suponga que  $\frac{\partial f}{\partial u}(P) = 2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = 3$ , donde  $u = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ,  $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ . Calcule las derivadas parciales de  $f$  en  $P$ .
7. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de  $f(x, y) = xe^{-xy}$  en el punto  $(0, 2)$  es igual a 1.
8. Calcular aproximadamente el valor de la expresión dada:
- (a)  $\arctan(\sqrt{0.2} + 0.98)$ .
- (b)  $\ln(\sqrt{4.15} + \sqrt{9.08} - 4.1)$ .