UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CALCULO III

Listado (Teorema de la función implícita, inversa y Taylor)

Ejercicios ayudantia

1. Suponga que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y que $y = x^3$. Por regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y}$$

   Por lo tanto $2x\partial_y f = 0$, lo que implica que f(x,y) no depende de y. Con la ayuda de un ejemplo explique el error de este argumento

2. Considere el siguiente sistema con 2 ecuaciones y 2 incognitas y_1 y y_2

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y_1 + y_2^2 + 4x & = & 0 \\ \\ 4y_1^3 + y_2 + x & = & 0 \end{cases}$$

   (a) Muestre que si x=-4, luego $(y_1, y_2) = (0, 4)$ es solución del sistema
   (b) Muestre que le sistema una única solución $\overrightarrow{y} = (g_1(x), g_2(x))$ cerca de (0,4) para todo x cerca de -4.
   (c) Usando derivación implícita, calcule $\frac{dg_1}{dx}$ y $\frac{dg_2}{dx}$ en el punto x=-4

3. Considere la función vectorial definida por

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, (x,y) \neq (0,0)$$

   (a) Se puede aplicar el teorema de la función Inversa para invertir localmente esta función?
   (b) Muestre que f no es invertible en las vecindades de $(1,0)^T$ y de $(-1,0)^T$

4. Sean la función vectorial

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$$

(a) Muestre que f es invertible en un abierto V que contiene a $x_0 = (1. - 1)$
En lo que sigue, denotamos

$$g(y_1, y_2) = f^{-1}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

su inversa.

(b) Usando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in V$ y la regla de la cadena, muestre que la matriz Jacobiana de g en $y_0 = f(x_0)$ esta dada por la inversa de la matriz Jacobiana de f en x_0

(c) Determine explícitamente la matriz Jacobiana de g en $f(1, -1)$

5. Sea la funcuin $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z = e^x y^4 cos(z)$$

(a) Determine el polinomio de Taylor $T_2(x, y, z)$ de f correspondiente al punto (0,0,0)

(b) Determine el termino residual $R_2(x, y, z, 0, 0, 0)$ correspondiente

(c) Sea

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x, y \leq 1, \frac{-\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Determine una cosntante C¿0 tal que

$$\max_{(x,y,z)\in B} |R_2(x, y, z, 0, 0, 0)1 \leq C$$

Ejercicios para el estudiante

1. Considere la ecuación F(x,y,z)=0, donde F es una función de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1

   (a) Identifique que condiciones aseguran que cerca de un punto (x_0, y_0, z_0) con $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, la ecuación define implícitamente las funciones z=g(x,y), y=h(x,z) y x=k(y,z), de estas funciones siendo únicas

   (b) En relación con el punto anterior deducir la formula $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -1$

2. Halle la formula de Taylor en el punto (0,0) hasta el segundo orden de la funcion

$$f(x, y) = sin(xy) + cos(xy), (x, y) \in \mathbb{R}$$

3. Considere el sistema de 3 ecuaciones con incognitas y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} x_1 y_2^2 - 2x_2 y_3 & = & 1 \\ \\ x_1 y_1^5 + x_2 y_2 - 4y_2 y_3 & = & -9 \\ \\ x_2 y_1 + 3x_1 y_3^2 & = & 12 \end{cases}$$

(a) Muestre que el sistema se puede resolver para $y = (y_1, y_2, y_3)$ en términos de $x = (x_1, x_2)$ cerca de $(x_0, y_0) = (1, 0, -1, 1, 2)$(es decir, el sistema tiene una única solución y(x) cerca de (x_0, y_0))

(b) Usando derivación implícita, determine la derivada parcial de y(x) con respecto a x_1 en (1,0)(es decir, $\partial_{x_1} y_1(1, 0), \partial_{x_1} y_2(1, 0), \partial_{x_1} y_3(1, 0)$)

4. Encuentre el polinomio de Taylor T_2para la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y, z) = xy^2 + 2x^2 z + e^{yz} sin(y)$$

con $x_0 = (0, 0, 0)$ y el termino residual $R_2(x, y, z, 0, 0, 0)$ correspondiente

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x cos(2y), e^y sin(y))$. Analice la existencia de la función Inversa f^-1 y si existe calcule y obtenga su diferencial