Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 01: División euclidiana e ideales en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}[x]$
Álgebra con Software (527282)

1. ¿Es la unión de ideales un ideal? Demostrar o construir un contraejemplo.
2. En $\mathbb{Q}[x]$, determinar el menor ideal I que contiene a los ideales (x^2) y (x^3-x). *(Menor significa que cualquier otro ideal que contenga a estos dos también contendrá a I)*
3. Mostrar: si a, b están contenidos en un ideal I, entonces I tembién contiene al resto de dividir a por b.
4. Sean $m, n \in R$, donde R es cualquiera de las dos estructuras del título del listado.
   a) Mostrar que $I = \{c_1 m + c_2 n \,:\, c_1, c_2 \in R\}$ es un ideal de R.
   b) Usando el algoritmo de Euclides, mostrar que el máximo común divisor de m y n está en I.
   c) Obtener como conclusión una demostración de la identidad de Bézout en R.
5. *(Software)* Construir una función que, dados $n \in \mathbb{Z}$ e I un ideal de $\mathbb{Z}$, entregue una lista de divisores positivos de n que estén en I.
6. *(Software)* Construir una función que, dados $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{Q}[x]$, entregue una lista con los restos de dividir las potencias de x, desde x^1 hasta x^n, por el polinomio p.

Polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$

Definición. Un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$ se dice *irreducible* si su grado es positivo y es imposible de escribir como el producto de dos polinomios de menor grado.

7. Adaptar la demostración clásica de infinitud de números primos para mostrar que hay infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.
8. Mostrar: todo polinomio de grado uno es irreducible.
9. Mostrar: todo polinomio de grado dos o tres es irreducible si y sólo si no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.
10. Mostrar que $x^4 + 5x^2 + 9$ es reducible, pero no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.
11. *(Difícil)* Mostrar que $x^4 + x + 1$ es irreducible.
12. *(Software)* Confirmar que $x^4 + x + 1$ es irreducible.
13. *(Difícil)* Si $p \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible, mostrar que no tiene raíces repetidas en $\mathbb{C}$. *(Pista: si un polinomio tiene raíces repetidas, entonces tiene un factor común con su derivada... y viceversa)*