Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Estudio de caso

Carlos M. Mora

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X'(t) = 4\,X(t) - 3\,Y(t) \\ Y'(t) = -2\,X(t) - Y(t) \end{cases}$$

con $X(t)\,,\,Y(t) \in \mathbb{R}$

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

Elegimos $\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$$

Problema

Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.
Encuentre todas las soluciones de

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = A\,\vec{Z}(t)$$

con la forma

$$\vec{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\vec{v},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es no nulo.

Como

$$\frac{d}{dt}\exp(\lambda\, t)\,\vec{v} = \lambda\, \exp(\lambda\, t)\,\vec{v},$$

$$\lambda\, \exp(\lambda\, t)\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\exp(\lambda\, t)\,\vec{v} = A\,\vec{Z}(t) = A\exp(\lambda\, t)\,\vec{v} = \exp(\lambda\, t)\, A\,\vec{v}$$

$$\exp(\lambda\, t)\, A\,\vec{v} = \lambda\, \exp(\lambda\, t)\,\vec{v} \Leftrightarrow \boxed{A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}}$$

Entonces λ es un valor propio de A y $\vec{v}$ es un vector propio asociado a λ.

En general, $\vec{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\vec{v}$ es solución de $\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = A\,\vec{Z}(t)$ si y solo si $A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$.

Cálculo de autovalores

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\vec{v} = 0$$

Como $(A - \lambda\, I)\,\vec{v} = 0$ con $\vec{v} \neq 0$,

$$|A - \lambda\, I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda\, I \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(4-\lambda)\,(-1-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)\,(1+\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\,\lambda - 10 = 0$

Como $\quad 0 = \lambda^2 - 3\,\lambda - 10 = (\lambda - 5)\,(\lambda + 2), \qquad \lambda = -2 \quad$ ó $\quad \lambda = 5\,.$

Cálculo de autovectores

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\,I)\,\vec{v} = 0$$

Cuando $\lambda = -2$, buscamos $\vec{v} \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda\,I)\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2\,I\right)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2\,v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = 2\,v_1 \Leftrightarrow \vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tomado $v_1 = 1$ llegamos a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, que genera la solución $\vec{Z}\,(t) = e^{-2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cuando $\lambda = 5$, buscamos $\vec{u} \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda\,I)\,\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\vec{u} = 0 \Leftrightarrow u_1 + 3\,u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -3\,u_2$$

Eligiendo $u_2 = 1$ obtenemos $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, que tiene asociada la solución $\vec{Z}\,(t) = e^{5\,t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problema

Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

Encuentre todas las soluciones de $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$ con la forma $\overrightarrow{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ es no nulo.

Respuesta

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{-2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{Z}_2(t) = e^{5\,t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observación: $\overrightarrow{Z}_1(t)$, $\overrightarrow{Z}_2(t)$ son linealmente independientes

$$c\,\overrightarrow{Z}_1(t) + k\,\overrightarrow{Z}_2(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{Z}_1(t)\,,\;\; \overrightarrow{Z}_2(t)\right)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{-2\,t} & -3\,e^{5\,t} \\ 2\,e^{-2\,t} & e^{5\,t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si para algún s el Wronskiano $W(s) = \begin{vmatrix} e^{-2\,s} & -3\,e^{5\,s} \\ 2\,e^{-2\,s} & e^{5\,s} \end{vmatrix}$ es diferente de 0, entonces $\begin{pmatrix} e^{-2\,s} & -3\,e^{5\,s} \\ 2\,e^{-2\,s} & e^{5\,s} \end{pmatrix}$ es invertible, lo que implica $c = k = 0$.

Usando que $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ obtenemos $c = k = 0$.

Problema

Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

Encuentre todas las soluciones de $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$ con la forma $\overrightarrow{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ es no nulo.

Respuesta

$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{-2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{Z}_2(t) = e^{5\,t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Superposición de soluciones

Para cada $c, d \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(c\,\overrightarrow{Z}_1(t) + k\,\overrightarrow{Z}_2(t)\right) = c\overrightarrow{Z}'_1(t) + k\,\overrightarrow{Z}'_2(t) = c\,A\,\overrightarrow{Z}_1(t) + k\,A\,\overrightarrow{Z}_2(t) = A\left(c\,\overrightarrow{Z}_1(t) + k\,\overrightarrow{Z}_2(t)\right)$$

Entonces

$$\overrightarrow{Z}(t) := c\,\overrightarrow{Z}_1(t) + k\,\overrightarrow{Z}_2(t) = c\,e^{-2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\,e^{5\,t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es solución de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$$

Suponga que las funciones $a_{i,j}(t)$, con $i, j = 1, \ldots, d$, son continuas en un intervalo $]a, b[$. Consideremos $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{R}$.
Supongamos que $\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)$ son funciones linealmente independientes que satisfacen

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t). \tag{1}$$

Entonces, cualquier solución de (1) se puede escribir como

$$\overrightarrow{Z}(t) = c_1 \overrightarrow{Z}_1(t) + c_2 \overrightarrow{Z}_2(t) \cdots + c_d \overrightarrow{Z}_d(t),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$.

$\left\{\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)\right\}$ es llamado conjunto fundamental de soluciones de (1).

Ejemplo: $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t)$

Solución general: $\overrightarrow{Z}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema de existencia y unicidad

Suponga que las funciones $a_{i,j}(t)$, con $i, j = 1, \ldots, d$, y $f_i(t)$, con $i = 1, \ldots, d$, son continuas en un intervalo $]a, b[$. Fijemos $t_0 \in]a, b[$ y $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{R}$.
Entonces el sistema de d ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix} \vec{Z}(t) + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix}$$

tiene una única solución definida para todo $t \in]a, b[$ que satisface: $\vec{Z}(t_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.

Ejemplo

Para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) \\ \vec{Z}(t_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

tiene una única solución definida para todo $t \in]-\infty, +\infty[$

Problema

Considere $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Encuentre la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) \\ \vec{Z}(0) = \vec{z} \end{cases}.$$

Conocemos la solución $\qquad \vec{Z}(t) = c\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\, e^{5t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Para que $\vec{Z}(0) = \vec{z}$,

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En general, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Luego $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

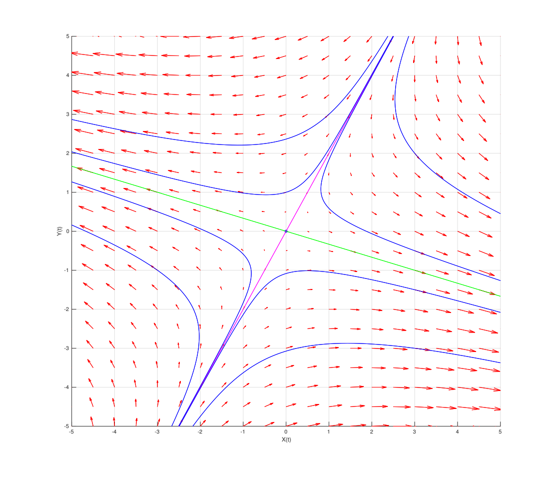
$$\vec{Z}(t) = \frac{z_1 + 3z_2}{7} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{z_2 - 2z_1}{7} e^{5t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X(t) = \frac{z_1+3z_2}{7} e^{-2t} - 3\frac{z_2-2z_1}{7} e^{5t}, \qquad Y(t) = 2\frac{z_1+3z_2}{7} e^{-2t} + \frac{z_2-2z_1}{7} e^{5t}$

Retrato de fase

$$\vec{Z}\,(t) = \frac{z_1 + 3\,z_2}{7}\,e^{-2\,t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{z_2 - 2\,z_1}{7}\,e^{5\,t}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

$X\,(t) = \frac{z_1+3\,z_2}{7}\,e^{-2\,t} - 3\frac{z_2-2\,z_1}{7}\,e^{5\,t},\qquad Y\,(t) = 2\frac{z_1+3\,z_2}{7}\,e^{-2\,t} + \frac{z_2-2\,z_1}{7}\,e^{5\,t}$



Observación

$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ tiene autovalores -2 y 5 con los correspondientes autovectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -15 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 28 & -21 \\ -14 & -7 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución alternativa

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overrightarrow{Z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overrightarrow{Z}(t)$$

Cambio de variable: $\overrightarrow{V}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overrightarrow{Z}(t)$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{V}(t)$$

$$\overrightarrow{V}(t) = \begin{pmatrix} \exp(-2\,t)\; c \\ \exp(5\,t)\; k \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} \exp(-2\,t)\; c \\ \exp(5\,t)\; k \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-2\,t)\; c \\ \exp(5\,t)\; k \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{Z}(t) = c\, e^{-2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\, e^{5\,t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$