Problema 1.
Indicar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tales que $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero que:

- (i) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$
- (ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$
- (iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$
- (iv) La sucesion $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada pero no converge.

Solucion

(i) Consideremos $a_n := n^{73}$, $b_n := \dfrac{1}{n^{72}}$, así $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ luego:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{73}}{n^{72}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

(ii) En este caso podemos proceder similar a **(i)** usando $a_n := n^{73}$, $b_n := -\dfrac{1}{n^{72}}$ así:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^{73}}{n^{72}} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$$

(iii) Consideremos $a_n := n^{73}$y $b_n := \dfrac{c}{n^{73}}$, $c \in \mathbb{R}$, así notamos que $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ luego:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{73}c}{n^{73}} = \lim_{n\to\infty} c = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

(iv) Consideremos $a_n := n$ y $b_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$, así $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ luego:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Notamos así que $a_n b_n$ está acotada $-1 \le a_n b_n \le 1$; sin embargo, es conocido que $a_n b_n = (-1)^n$ **no** converge en $\mathbb{R}$.

Problema 2.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Demostrar que la sucesión converge y determinar su límite.

Previo. Mostraremos que: $a_n = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

Demostracion. *(Induccion)*

Para **n=0:** Sabemos que $a_0 = a$ y conjeturamos que $a_0 = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right)^0$, en efecto:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \\ &= \frac{a+2b+2a-2b}{3} = a \end{aligned}$$

Analogamente para **n=1:** Sabemos que $a_1 = b$ asi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a+2b}{3} + \frac{-2(a-b)}{6} \\ &= \frac{2a+4b-2a+2b}{6} = \frac{6b}{6} = b \end{aligned}$$

Así notamos que se cumple para **n=0** y **n=1**, luego supongamos que:

$$a_j = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^j \qquad ,\forall j \in \{1, \dots, n\}$$

por tanto queremos mostrar que a_{n+1} es de la forma deseada, como sigue:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \\ \textbf{(Hipotesis)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2(a+2b)}{3} + \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)\left(\frac{2(a-b)}{3}\right)\right) \\ &= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos mostrar, así concluimos que:

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

□

Con lo obtenido en el **Previo** podemos conjeturar que a_n **converge** y $a_n \to \frac{a+2b}{3}$ cuando $n \to \infty$

Demostracion.
Queremos mostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon : \left| a_n - \frac{a+2b}{3} \right| < \varepsilon$$

Si $a = b$:

$$\begin{aligned}
\left| a_n - \frac{a+2b}{3} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^n - \frac{a+2b}{3} \right| < \varepsilon \\
&\iff \left| \frac{2(0)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right| < \varepsilon \\
&\iff 0 < \varepsilon
\end{aligned}$$

Por tanto, basta tomar cualquier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$; esto se debe a que si $a = b$ entonces $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Si $a \neq b$:

$$\begin{aligned}
\left| a_n - \frac{a+2b}{3} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^n - \frac{a+2b}{3} \right| < \varepsilon \\
&\iff \left| \frac{2(a-b)}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right| < \varepsilon \\
&\iff \frac{2}{3} \left| a-b \right| \left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon \\
&\iff \frac{3}{2\left| a-b \right|} 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\iff 2^n > \frac{2|a-b|}{3\varepsilon} \\
&\iff n > \log_2 \left(\frac{2|a-b|}{3\varepsilon} \right)
\end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier ε, basta tomar :

$$N_\varepsilon > \left\lceil \log_2 \left(\frac{2|a-b|}{3\varepsilon} \right) \right\rceil$$

Así hemos mostrado que a_n **converge** y que su **limite** es $\frac{a+2b}{3}$.

□

Problema 3.
Para un espacio metrico (X, d) y un subconjunto $A \subset X$ un punto $x \in X$ se llama *punto adherente* de A si x pertenece a la *clausura* de A, es decir en cada vecindad de x existe por lo menos un elemento de A, es decir para todo $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$.

Un conjunto A es cerrado si $A = \bar{A}$.

Graficar los siguientes conjuntos (si es posible) e identificar sus **puntos interiores**,de **acumulacion**, de **adherencia**, de **frontera** y **puntos aislados**, Ademas indicar si los conjuntos son **abiertos**, **cerrados** y **compactos**.

(i) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 < 64\}$.

(iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$.

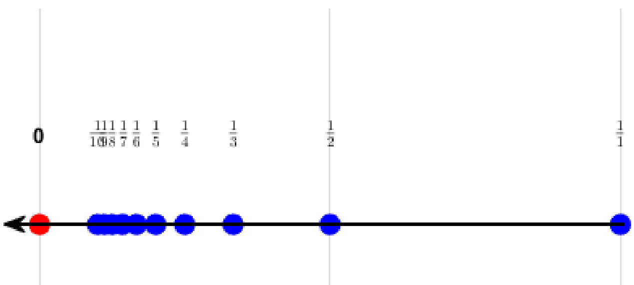
(iv) $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

(v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 + y^2 \geq 0, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cup \{\left(3, 3, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Solucion

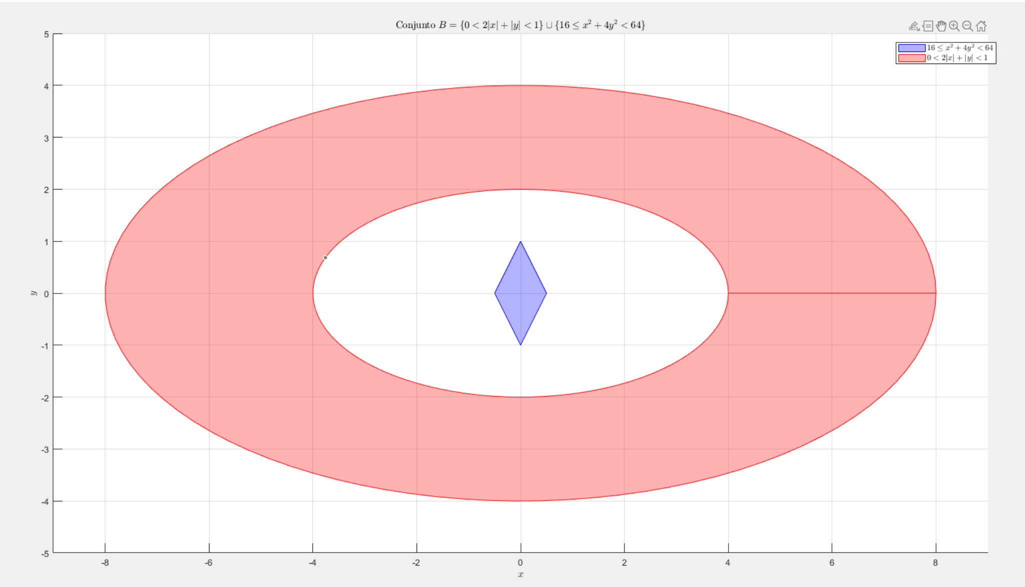
(i) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

- Puntos Interiores: $\emptyset$
- Puntos de Acumulacion: $\{0\}$
- Puntos de Adherencia: A
- Puntos de Frontera: A
- Puntos Aislados: $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Además notamos que este conjunto es **Compacto** ya que está **acotado** $0 \leq a \leq 1 \quad, \forall a \in A$ y es **cerrado** ya que contiene a todos sus puntos de acumulación.
- Grafico del Conjunto A:



(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 < 64\}$.

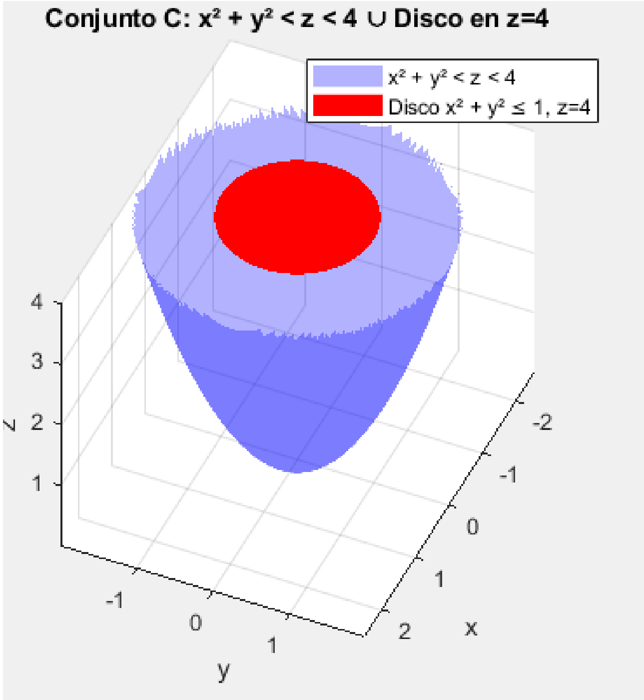
- Puntos Interiores: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 < x^2 + 4y^2 < 64\}$
- Puntos de Acumulacion: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2|x| + |y| \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 \leq 64\}$
- Puntos de Adherencia:$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2|x| + |y| \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 \leq 64\}$
- Puntos de Frontera:$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2|x| + |y| = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 16\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 64\} \cup \{(0, 0)\}$
- Puntos Aislados: $\emptyset$
- Dado que B no contiene a sus puntos de acumulacion y que $int(B) \neq B$ concluimos que B **no** es abierto ni cerrado y por tanto tampoco compacto.
- Grafico del Conjunto B:



(iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$.

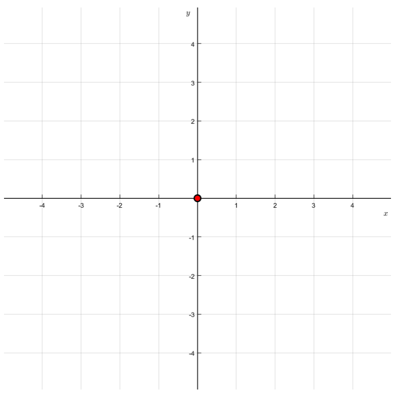
- Puntos Interiores :$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 4\}$
- Puntos de Acumulacion: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$
- Puntos de Adherencia:$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$
- Puntos de Frontera: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 4\}$
- Puntos Aislados:$\emptyset$
- Notamos que este conjunto **no** es cerrado ya que no contiene a todos sus puntos de acumulacion y por tanto tampoco es compacto, ademas no es abierto ya que $int(C) \neq C$.

- Grafico del Conjunto C:



(iv) $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

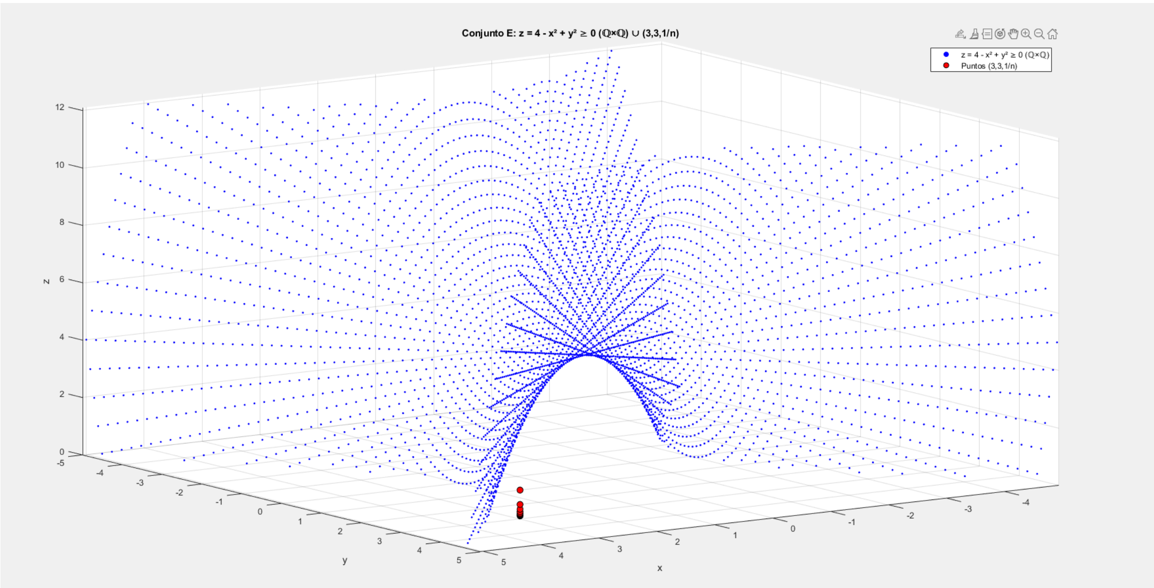
- Puntos Interiores: D
- Puntos de Acumulacion: $\mathbb{R}^2$
- Puntos de Adherencia: $\mathbb{R}^2$
- Puntos de Frontera: $\{(0,0\}$
- Puntos Aislados: $\emptyset$
- Notemos ademas que este conjunto es **abierto** ya que para cualquier punto $x := (a,b) \in D$ basta tomar $r := \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y se cumplira que: $U_r(x) \subset D \quad \forall x \in D$. Por otro lado este conjunto **no** es cerrado ya que no contiene a sus puntos de acumulacion y por tanto tampoco es compacto.
- Grafico del Conjunto D:



*Donde el punto rojo corresponde a $(0,0)$ y **no** pertenece al conjunto.*

(v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 + y^2 \geq 0, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cup \{\left(3, 3, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$

- Puntos Interiores:$\emptyset$
- Puntos de Acumulacion: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 + y^2 \geq 0, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cup \{(3, 3, 0)\}$
- Puntos de Adherencia: $E \cup \{(3, 3, 0\}$
- Puntos de Frontera: $E \cup \{(3, 3, 0\}$
- Puntos Aislados: $\{(3, 3, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Notamos que el conjunto **no** es cerrado ya que no contiene a todos sus puntos de acumulacion, por tanto tampoco es compacto, ademas **no** es abierto ya que $int(E) \neq E$.
- Grafico del Conjunto E:



Problema 4.
a) Sea (M, d) un espacio métrico. Demostrar que:

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|;$$

$$\forall x, y, x', y' \in M : |d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

b) Se considera el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ con las métricas:

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$
$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Para cada una de las metricas, dibujar la bola unitaria:

$$U_{i,1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_i(0, y) \leq 1\}, \quad i = 1, 2, \infty.$$

a$_1$)***Demostracion.*** Queremos mostrar que $\forall x, y, z \in M : d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$
Si $d(x, z) \geq d(y, z)$ entonces:

$$\begin{aligned} & d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) \\ \iff & d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \end{aligned}$$

Notar que lo último es cierto ya que d es métrica.
Si $d(x, z) < d(y, z)$ entonces :

$$\begin{aligned} & d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z) \\ \iff & d(y, x) + d(x, z) \geq d(y, z) \end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior esto es valido ya que d es métrica. Asi de ambos casos concluimos:

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$$

$\square$

a$_2$)***Demostracion*** .
Si $d(x, y) \geq d(x', y')$ queremos mostar que $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y')$:

$$\begin{aligned} & d(x, x') + d(y, y') + d(x', y') \geq d(x, x') + d(x', y) \geq d(x, y) \\ \implies & d(x, x') + d(y, y') + d(x', y') \geq d(x, y) \\ \implies & d(x, x') + d(y, y') \geq d(x, y) - d(x', y') \end{aligned}$$

Por tanto hemos mostrado lo que queriamos. Luego si $d(x, y) < d(x', y')$ queremos mostrar $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$:

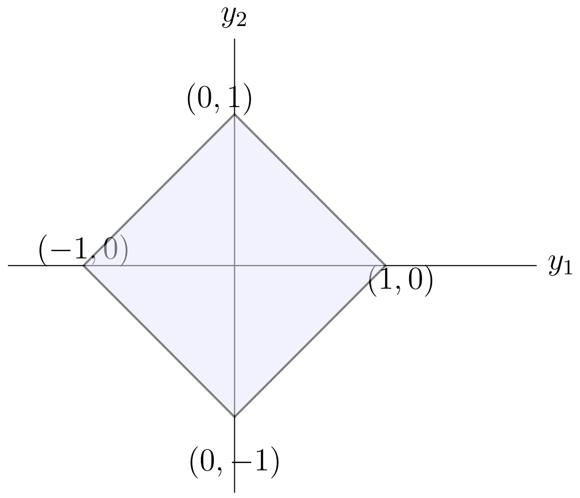
$$\begin{aligned} & d(x, x') + d(y, y') + d(x, y) \geq d(x', y) + d(y, y') \geq d(x', y') \\ \implies & d(x, x') + d(y, y') + d(x, y) \geq d(x', y') \\ \implies & d(x, x') + d(y, y') \geq d(x', y') - d(x, y) \end{aligned}$$

Asi hemos concluido lo buscado. Por tanto como los casos anteriores son los unicos posbiles concluimos que:

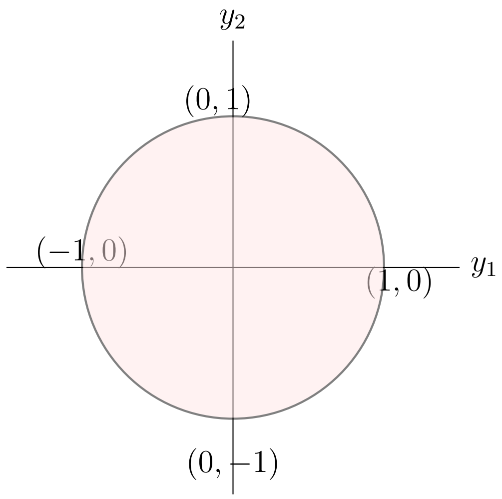
$$\forall x, y, x', y' \in M : |d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

$\square$

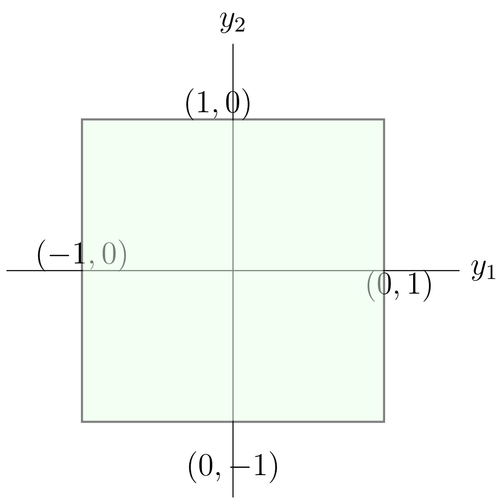
b) Solucion:



Bola unitaria $U_{1,1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_1(0,y) \leq 1\}$



Bola unitaria $U_{2,1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(0,y) \leq 1\}$



Bola unitaria $U_{\infty,1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(0,y) \leq 1\}$

Problema 5. ¿Cuáles de las siguientes funciones $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$ definen una métrica sobre $\mathbb{R}^2$?

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases} \qquad , g_2(x,y) = ((x_1 - y_1)^{1/2} + (x_2 - y_2)^{1/2})^2,$$

$$g_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \text{ (donde } d \text{ es alguna metrica sobre } \mathbb{R}^2\text{)},$$

$$g_4(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ d(x,z) + d(y,z) & si \quad x \neq y \end{cases}$$

donde d es una metrica sobre $\mathbb{R}^2$ y $z \in \mathbb{R}^2$ arbitrario.

Solucion.

g_1**).** Comprobemos que $g_1(x,y)$ define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$:

1. Notemos que por definicion $g_1(x,y) \geq 0$ y $g_1(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Como $x = y \iff y = x$ y $x \neq y \iff y \neq x$ concluimos que $g_1(x,y) = g_1(y,x)$
3. $g_1(x,y) \leq g_1(x,z) + g_1(z,y)$, en efecto:

   Caso 1: Si $x \neq y$ entonces $g_1(x,y) = 1$ luego como $z = y \vee z = x \vee (z \neq x \wedge z \neq y)$ entonces $g_1(y,z) = 1 \wedge g(x,z) = 0 \quad \vee \quad g_1(x,z) = 1 \wedge g_1(y,z) = 0 \quad \vee \quad g_1(x,z) + g_1(y,z) = 2$ asi concluimos $1 \leq g_1(y,z) + g_1(x,z)$ y como $g_1(x,y) = 1$ entonces :

   $$g_1(x,y) \leq g_1(x,z) + g_1(z,y) \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{R}^2 : x \neq y$$

   Caso 2: Si $x = y$ entonces $g_1(x,y) = 0$ y como en **1.** mostramos que $g_1(x,y) \geq 0$ se cumple que:

   $$g_1(x,y) \leq g_1(x,z) + g_1(z,y) \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{R}^2 : x = y$$

   Asi como los casos anteriores son los unicos posibles concluimos que :

   $$g_1(x,y) \leq g_1(x,z) + g_1(z,y) \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{R}^2 \ .$$

   Asi de **1. 2. y 3.** concluimos que g_1 define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$

g_2**).** Notemos que g_2 **no** define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$.
Consideremos el caso $x = (0,0), y = (1,1)$ luego:

$$\begin{aligned} g_2(x,y) &= ((0-1)^{1/2} + (0-1)^{1/2})^2 \\ &= ((-1)^{1/2} + (-1)^{1/2})^2 \\ &= (2i)^2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Asi $\exists x,y \in \mathbb{R}^2 : g_2(x,y) < 0$ y por tanto g_2 **no** define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$.

g_3). Notamos que g_3 define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$, en efecto:

1. Como $d(x,y)$ es metrica sobre $\mathbb{R}^2$ entonces $d(x,y) \geq 0$ y por tanto $1+d(x,y) \geq 1$, asi concluimos que:

$$g_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0 \quad ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   Ademas

$$g_3(x,y) = 0 \iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y \text{ , dado que } d \text{ es metrica.}$$

2. Nuevamente como $d(x,y)$ es metrica sobre $\mathbb{R}^2$ entonces $d(x,y) = d(y,x)$ asi :

$$\begin{aligned} g_3(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \\ &= g_3(y,x) \qquad\qquad ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

3. Sean $a := d(x,y)$, $b := d(x,z)$, $c := d(y,z)$ luego queremos mostrar que:

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

$$\iff a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)$$

$$\iff a + ac + ab + abc \leq b + ba + bc + c + ca + cb + 2abc$$

$$\iff a \leq b + c + 2bc + abc$$

   y como d es metrica sabemos que $a \leq b+c$ y que $2bc \geq 0$ y $abc \geq 0$ asi de lo anterior podemos notar que $a \leq b + c + 2bc + abc$ y como:

$$\begin{aligned} a \leq b + c + 2bc + abc &\iff \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \\ &\iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \end{aligned}$$

   Asi de **1. 2. y 3.** que concluimos que $g_3(x,y)$ define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$.

g_4). Notamos que g_4 define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$, con un z fijo pero arbitrario:

1. Si $x = y$ se cumple $g_4(x,y) = 0 \Rightarrow g_4(x,y) \geq 0$
   Si $x \neq y$ tenemos que $g_4(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$ y como d es metrica sobre $\mathbb{R}^2$ se tiene que $d(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ asi:

$$g_4(x,y) = d(x,z) + d(y,z) \geq 0$$

Ademas:
Si $x = y \implies g_4(x, y) = 0$
Si $x \neq y \implies g_4(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$ y como $x \neq y$ se cumple que $x = z \vee y = z \vee (x \neq z \wedge y \neq z)$ y por tanto en cualquier caso $d(x, z) + d(y, z) > 0$ asi concluimos que si $x \neq y \implies g_4(x, y) \neq 0$ y por tanto:

$$g_4(x, y) = 0 \iff x = y$$

2. Si $x = y$ se cumple que $g_4(x, y) = g_4(y, x) = 0$.
Si $x \neq y$ entonces $g_4(x, y) = d(x, z) + d(y, z) = d(y, z) + d(x, z) = g_4(y, x)$. Ya que d es metrica.

3. Sea $\varphi \in \mathbb{R}^2$. Queremos mostrar que:

$$g_4(x, y) \leq g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi)$$

(1) Si $x = y$ luego $g_4(x, y) = 0$ y se cumple que $x = y = \varphi \vee (x \neq \varphi \wedge y \neq \varphi)$
(1.1) Si $x = y = \varphi$ entonces $g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi) = 0$ por tanto:

$$g_4(x, y) \leq g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi)$$

(1.2) Si $\varphi \neq x \wedge \varphi \neq y$ entonces:

$$\begin{aligned} & g_4(x, y) \leq g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi) \\ \iff \quad & 0 \leq d(x, z) + d(y, z) + 2d(\varphi, z) \end{aligned}$$

Notar que la ultima afirmacion es claramente cierta dado que d es metrica.
(2) Si $x \neq y$ entonces $g_4(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$, luego como $x \neq y$ entonces: $x = \varphi \vee y = \varphi \vee (x \neq \varphi \wedge y \neq \varphi)$.
(2.1) Si $x = \varphi$ asi:

$$\begin{aligned} & g_4(x, y) \leq g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi) \\ \iff & d(x, z) + d(y, z) \leq 0 + d(y, z) + d(\varphi, z) \\ \iff & d(x, z) \leq d(\varphi, z) \\ \iff & d(x, z) \leq d(x, z) \end{aligned}$$

Donde la ultima afirmacion es claramente cierta. Luego si $y = \varphi$ el procedimiento es analogo a lo anterior.
(2.2) Si $x \neq \varphi \wedge y \neq \varphi$ luego:

$$\begin{aligned} & g_4(x, y) \leq g_4(x, \varphi) + g_4(y, \varphi) \\ \iff & d(x, z) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(\varphi, z) + d(y, z) + d(\varphi, z) \\ \iff & 0 \leq 2d(\varphi, z) \\ \iff & 0 \leq d(\varphi, z) \end{aligned}$$

y como d es metrica entonces $0 \leq d(\varphi, z)$. Asi de **1. 2. y 3.** concluimos que g_4 define una metrica sobre $\mathbb{R}^2$.

Problema 6.
Sea (X,d) un espacio metrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos la distancia del punto x al conjunto A de la siguiente manera:

$$\operatorname{dist}(x,A) := \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

a) Demostrar que la función $x \mapsto dist(x,A)$ es continua sobre X.

b) Para otro subconjunto $K \subset X$ definimos

$$\operatorname{dist}(K,A) := \inf\{d(x,A) \mid x \in K\} = \inf\{d(x,y) \mid x \in K, y \in A\}$$

Demostrar que si A es cerrado, K compacto y $A \cap K = \emptyset$, entonces $dist(K,A) > 0$.

c) Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados de un espacio métrico X con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ¿Se cumple $dist(A_1, A_2) > 0$?

Previo:
Sea $a \in A$ luego:

$$\begin{aligned}
&\inf_{b_0 \in A} d(x,b_0) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \quad ,\forall a \in A \\
\Longrightarrow &\inf_{b_0 \in A} d(x,b_0) \leq d(x,y) + d(a,y) \quad ,\forall a \in A \\
\Longleftrightarrow &\ dist(x,A) - d(x,y) \leq d(a,y) \quad ,\forall a \in A \\
\Longrightarrow &\ dist(x,A) - d(x,y) \leq \inf_{b \in A} d(y,b) \leq d(a,y) \\
\Longrightarrow &\ dist(x,A) - dist(y,A) \leq d(x,y)
\end{aligned}$$

Este proceso se pude repetir analogamente con y concluyendo que:

$$dist(y,A) - dist(x,A) \leq d(x,y)$$

De esto se infiere que:

$$|dist(x,A) - dist(y,A)| \leq d(x,y)$$

a) Demostracion. Queremos mostrar que $x \mapsto dist(x,A)$ es continua sobre X es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Longrightarrow |dist(x,A) - dist(y,A)| < \varepsilon$$

Luego supongamos que $d(x,y) < \delta$, además del **previo** sabemos que:

$$|dist(x,A) - dist(y,A)| \leq d(x,y)$$

así

$$\begin{aligned}
&|dist(x,A) - dist(y,A)| \leq d(x,y) < \delta \\
\Longrightarrow \quad &|dist(x,A) - dist(y,A)| < \delta
\end{aligned}$$

Así para cada $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon$. Asi concluimos que $x \mapsto dist(x,A)$ es continua en X.

$\square$

b) Demostracion: Supongamos que $dist(K, A) = 0$ así $\inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in A\} = 0$ por lo tanto:

$$\exists\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K, \exists\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A : d(x^k, y^k) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

y como $x^k \in K$ y sabemos que K es compacto y por tanto cerrado y acotado **(H.B)** entonces x^k es acotada así, invocando al **Teorema de Bolzano Weistrass** x^k posee una subsucesión convergente, es decir:

$$\exists x_0 \in X : x^{k_i} \to x_0 \text{ cuando } i \to \infty \text{ y como } K \text{ es cerrado entonces } x_0 \in K$$

además $d(x^k, y^k) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y por tanto $d(x^{k_i}, y^{k_i}) \to 0$ cuando $i \to \infty$, ya que la subsucesion y^{k_i} converge al mismo punto que la sucesion y^k. Luego:

$$\begin{aligned} & 0 \leq d(y^{k_i}, x_0) \leq d(y^{k_i}, x^{k_i}) + d(x^{k_i}, x_0) \\ \implies & d(y^{k_i}, x_0) \to 0 \text{ cuando } i \to \infty \text{ (por acotamiento)} \\ \implies & y^{k_i} \to x_0 \text{ cuando } i \to \infty \end{aligned}$$

y como $y^{k_i} \subset A$ y A es un conjunto cerrado entonces se tiene que $x_0 \in A$, pero anteriormente concluimos que $x_0 \in K$ por tanto $K \cap A \neq \emptyset$ $(\rightarrow\leftarrow)$

□

c) Solucion. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ donde $d(x, y) := |x - y|$, Sean S_1, S_2 subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $S_1 = \mathbb{N}$ y $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n + e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ y $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Mostraremos que S_1y S_2 son cerrados como sigue:

Demostración. $S_1^\complement := \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ es abierto, en efecto: Sea $x \in S_1^\complement$ luego:

i) Si $x < 1$ consideramos $r := \dfrac{|1 - x|}{2}$ asi:

$$U_r(x) \subset S_1^\complement \quad \forall x \in S_1^\complement : x < 1$$

ii) Si $x > 1 \implies \exists n \in \mathbb{N} : n < x < n+1$ luego si consideramos $R := \min\left(\dfrac{|x - n|}{2}, \dfrac{|n + 1 - x|}{2}\right)$ entonces:

$$U_R(x) \subset S_1^\complement \quad \forall x \in S_1^\complement : x > 1$$

Asi es claro que $S_1^\complement$ es abierto y por tanto S_1 es cerrado. Mostrar que $S_2^\complement$ es abierto es analogo al procedimiento anterior y por tanto S_2 tambien es cerrado. □

Notamos que **no** se cumple que lo dicho en **c)**. Ya que si $n_1 := n \in S_1$ y $n_2 = n + e^{-n} \in S_2$, donde $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$d(n_1, n_2) = |n_1 - n_2| = |n - n - e^{-n}| = | - e^{-n}|$$

y como $-e^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ se tiene que:

$$\inf\{d(x, y) \mid x \in S_1, y \in S_2\} \leq 0$$

es fácil notar que en efecto:

$$\inf\{d(x, y) \mid x \in S_1, y \in S_2\} = 0$$

Así no se cumple que $dist(S_1, S_2) > 0$ a pesar de que sí se cumplen las hipótesis, por tanto hemos encontrado un contraejemplo.

□

Problema 7. *(Demostrar el Teorema 1.13)*
Teorema 1.13: Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto
2. Cada sucesion $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x^k \in X$ posee un punto de acumulacion en X.
3. Cada subconjunto infinito de X posee un punto de acumulacion en X.

Demostración. :
$1 \iff 2$:
$(1 \Rightarrow 2)\rfloor$. Como X es compacto entonces por el **Teorema de Heine Borel** tenemos que X es cerrado y acotado y como $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ entonces $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada luego invocando al **Teorema de Bolzano Weistrasss** sabemos que $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesion convergente es decir:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : x^{k_i} \to x_0 \text{ cuando } i \to \infty$$

y como X es cerrado entonces $x_0 \in X$ por tanto se infiere que x_0 es un punto de acumulacion de la sucesion $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $x_0 \in X$.

$(2 \Rightarrow 1)\rfloor$ Queremos mostrar que X es cerrado y acotado, luego: Supongamos que X no fuera acotado asi existe $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\|x^k\| \to \infty$ por tanto esta sucesion no puede tener puntos de acumulacion $(\to\leftarrow)$ asi concluimos que X es acotado.

Supongamos que X no es cerrado, asi existe una sucesion $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X : x^k \to x', x' \notin X$ sin embargo como $x^k \to x'$ x' es un punto de acumulacion de la sucesion, ademas notar que este es el unico punto de acumulacion posible de la sucesion y por tanto como $x' \notin X$ lo cual es una contradiccion $(\to\leftarrow)$. Asi concluimos que X es cerrado y acotado y por tanto por el **Teorema de Heine Borel** es **Compacto**.

$1 \iff 3$:
$(1 \Rightarrow 3)\rfloor$ Sea $X_0 \subset X$ con X_0 un conjunto infinito, luego consideremos una sucesion en X_0 es decir $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0 \subset X$ ademas esta sucesion cumple que $i \neq j \Rightarrow x^i \neq x^j$, notemos que tal sucesion existe ya que X_0 es un conjunto infinito. Luego como $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0 \subset X$ entonces $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y usando **2.** concluimos que $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee un punto de acumulacion en X y como $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0$ y dado que $i \neq j \Rightarrow x^i \neq x^j$ entonces X_0 tiene un punto de acumulacion en X.

$(3 \Rightarrow 1)\rfloor$ Queremos mostrar que X es cerrado y acotado, como sigue: Supongamos que X no es cerrado, asi existe $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X : x^k \to h, h \notin X$ y como $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto infinito de X y su unico posible punto e acumulacion no pertenece a X hemos llegado a una contradiccion $(\to\leftarrow)$.

Supongamos que cada subconjunto infinito de X posee un punto de acumulacion en X y X no es acotado, luego existe una sucesion $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x^k\| \to \infty$ cuando $k \to \infty$ notemos asi que el conjunto $S := \{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no posee puntos de acumulacion en X lo cual contradice la hipotesis $(\to\leftarrow)$. Asi concluimos que X es cerrado y acotado y por tanto usando el **Teorema de Heine Borel** X es **Compacto**.

□