

Syllabus:

Unidad Académica Responsable:  
Carrera a la que se imparte:  
Módulo:

**ANÁLISIS FUNCIONAL Y APLICACIONES I:  
FUNCIONALES Y OPERADORES LINEALES**

Departamento de Ingeniería Matemática  
Ingeniería Civil Matemática  
No aplica

## IDENTIFICACION

Nombre: <i>Análisis Funcional y Aplicaciones I: Funcionales y Operadores Lineales</i>		
Código: 525401	Créditos: 4	Créditos SCT:
Prerequisitos: 525302		
Modalidad: Virtual	Calidad: Obligatoria	Duración: Semestral
Trabajo Académico		
Horas Teóricas: 4    Horas Prácticas: 2    Horas Laboratorio: 0		
Horas de otras actividades: 10		

Docente Responsable	Gabriel N. Gatica
Docente Colaborador	
Comisión Evaluación	
Duración	17 semanas
Fecha: 15 de Marzo de 2018	Aprobado por:

## DESCRIPCIÓN

Asignatura obligatoria que describe los principales conceptos y resultados sobre funcionales y operadores lineales en espacios de Hilbert y Banach, mostrando, además, diversas aplicaciones.

Esta asignatura contribuye a las siguientes competencias del perfil de egreso del Ingeniero Civil Matemático: *capacidad analítica y teórica para entender diversos problemas complejos en matemática y en áreas de aplicación, y discernir acertadamente sobre los métodos a emplear para su resolución.*

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE ESPERADOS

Al completar en forma exitosa esta asignatura, los estudiantes serán capaces de conocer, comprender y aplicar los resultados básicos del Análisis Funcional. En particular, ellos deberán:

- conocer y comprender los principales resultados y teoremas fundamentales del Análisis Funcional dentro del contexto de espacios de Banach y espacios de Hilbert.
- Ilustrar la utilidad de estos conocimientos a través de diversas aplicaciones en otras áreas de la matemática, tales como ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, optimización, teoría de aproximaciones, etc., y también en disciplinas afines.

## CONTENIDOS

1. **Introducción:** ejemplos de motivación, conceptos básicos de espacios normados, espacios de Banach, espacios de Hilbert.
2. **Dualidad:** funcionales lineales acotados, Teorema de la Proyección, Teorema de Descomposición Ortogonal, Teorema de Representación de Riesz, Teorema de Hahn-Banach, ejemplos de espacios duales, aplicaciones.
3. **Operadores Lineales Acotados:** propiedades generales, operador adjunto, anuladores, Teorema de la Inversa Acotada, operadores cerrados, Teorema del Grafo Cerrado; aplicación a teoría de aproximaciones; operadores de rango cerrado, solubilidad de ecuaciones lineales; acotación uniforme, Teorema de Banach-Steinhaus.
4. **Problemas Variacionales:** Teorema de Lax-Milgram, Teorema de Stampachia, problemas con restricciones, Teoría de Babuska-Brezzi, problema de Stokes. Esquemas de Galerkin. Aplicaciones.
5. **Operadores Compactos:** resultados preliminares, operadores de rango finito, operador compacto, alternativa de Fredholm, aplicación a ecuaciones diferenciales y a ecuaciones integrales, adjunto de un operador compacto, desigualdad de Garding, aplicación a la estabilidad de esquemas de Galerkin.
6. **Reflexividad y Separabilidad:** conceptos básicos, resultados fundamentales, convergencia débil, convergencia débil\*, compacidad y convergencia débil; Aplicaciones.

## METODOLOGÍA

Cuatro horas de clases teóricas, dos horas de clases prácticas, listado de ejercicios y tareas. Se incentiva permanentemente la participación del alumno a través de preguntas y comentarios, con el objeto de maximizar la comprensión de las materias tratadas en las clases.

## EVALUACIÓN

De acuerdo con el Reglamento interno de Docencia de Pregrado de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. En el presente semestre se considerarán **dos evaluaciones escritas** (40 % cada una), **tareas** (20%), y una **evaluación de recuperación** que modifica, a lo más, una de las evaluaciones escritas.

## BIBLIOGRAFIA Y MATERIAL DE APOYO

Material básico u obligatorio:

- **Brezis, H. :** *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. Masson, 1993.
- **Friedman, A.:** *Foundations of Modern Analysis*. Dover Publications, 1982.
- **Gatica, G.N.:** *Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Editorial Reverte, Barcelona Bogotá Buenos Aires Caracas México, 2014.
- **Kreiszg, E.:** *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1978.
- **Limaye, B. V.:** *Functional Analysis*. Wiley, 1981.
- **Oden, J. T.:** *Applied Functional Analysis*. Prentice-Hall, 1979.
- **Schechter, M.:** *Principles of Functional Analysis*. Academic Press, 1971.
- **Zeidler, E.:** *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences Series, vol. 108, Springer-Verlag New York, Inc., 1995.

Material complementario:

- **Braess, D.:** Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Springer-Verlag, 1997.
- **Dautray, R. and Lions, J. L.:** *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vols. 2-4. Springer Verlag, 1990.
- **Correa, C.I. and Gatica, G.N.:** *On the continuous and discrete well-posedness of perturbed saddle-point formulations in Banach spaces*. Computers & Mathematics with Applications, vol. 117, pp. 14-23, (2022).
- **Gatica, G.N.:** *Solvability and Galerkin approximations of a class of nonlinear operator equations*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, vol. 21, 3, pp. 761-781, 2002.
- **Gatica, G.N.:** *A note on weak\* convergence and compactness and their connection to the existence of the inverse-adjoint*. Applicable Analysis, vol. 98, 8, pp. 1478-1482, (2019).
- **Gatica, G.N., Heuer, N. and Meddahi, S.:** *On the numerical analysis of nonlinear two-fold saddle point problems*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, 2003.
- **Gatica, G.N. and Sayas, F.-J.:** *Characterizing the inf-sup condition on product spaces*. Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).
- **Oden, J. T. and Demkowicz, L.:** *Applied Functional Analysis*. CRS Press, 1996.
- **Quarteroni, A. and Valli, A.:** *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1994.

Fecha aprobación:	2016
Fecha próxima actualización:	2022

## PLANIFICACIÓN

Semana	Actividad	Responsable	Trabajo académico
1	Ejemplo de Motivación: un problema geométrico, o un problema de sobreyectividad en espacios producto.	Docente	1 hora
2	Ejemplo de Motivación: un problema de valores de contorno unidimensional; nociones básicas de derivadas distribucionales y espacios de Sobolev.	Docente	2 horas
2	Nociones previas sobre espacios normados: normas, completitud; espacios de Banach; ejemplos.	Estudiantes	2 horas
3	Nociones previas sobre espacios de Hilbert: producto escalar; desigualdad de Cauchy-Schwarz; norma inducida; ley del paralelogramo; ejemplos.	Estudiantes	2 horas
4	Funcionales lineales y acotados; espacio dual; Teorema de la Mejor Aproximación (Teorema de la Proyección); Teorema de Descomposición Ortogonal; Teorema de Representación de Riesz; ejemplos.	Docente	4 horas
5	Forma analítica del Teorema de Hahn-Banach (THB); consecuencias y aplicaciones.	Docente	4 horas
6	Operadores lineales y acotados; caracterización del espacio asociado; ejemplos.	Docente	2 horas
6	El operador adjunto en espacios normados: definiciones; propiedades; ejemplos.	Docente	2 horas

7	El operador adjunto en espacios de Hilbert: definiciones; propiedades; ejemplos.	Docente	2 horas
7	Ecuación fundamental: anuladores; espacios nulos; rangos; inyectividad; sobreyectividad; operador inverso.	Docente	2 horas
8	Teorema de la Inversa Acotada (TIA); operadores cerrados; Teorema del Grafo Cerrado (TGC); equivalencia entre TIA y TGC; ejemplos; aplicaciones	Docente	4 horas
9	Operadores con rango cerrado: definición; espacio cociente; caracterización; ejemplos.	Docente	4 horas
9	<b>Evaluación I</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>3 horas</b>
10	Teorema del Acotamiento Uniforme (Teorema de Banach-Steinhaus) (TBS); aplicaciones.	Docente	1 hora
11	Problemas variacionales: Teorema de Lax-Milgram; Teorema de Stampachia; esquemas de Galerkin; ejemplos.	Docente	4 horas
12	Problemas variacionales con restricciones: Teoría de Babuska-Brezzi; ejemplos.	Docente	2 horas
12	Operadores compactos: motivación; resultados preliminares; Lema de Riesz; dimensión finita y compacidad de la esfera unitaria.	Docente	2 horas
13	Operadores de rango finito: definición y caracterización; alternativa de Fredholm.	Docente	2 horas
13	Operadores compactos: definición; propiedades; alternativa de Fredholm; operador adjunto.	Docente	2 horas
14	Operadores compactos: definición; propiedades; alternativa de Fredholm; operador adjunto.	Docente	1 hora
15	Reflexividad: conceptos básicos; resultados fundamentales.	Docente	2 horas
15	Separabilidad: definición; propiedades; conexión con reflexividad.	Docente	2 horas
16	Convergencia débil; convergencia débil*; compacidad y convergencia débil; conexiones con reflexividad y separabilidad.	Docente	4 horas
17	<b>Evaluación II</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>3 horas</b>
17	<b>Evaluación de Recuperación</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>3 horas</b>

## OTROS

Docente: Gabriel N. Gatica, e-mail: [ggatica@ci2ma.udec.cl](mailto:ggatica@ci2ma.udec.cl)  
 Oficina: Centro CI<sup>2</sup>MA, ex-Cabina 6  
 Fono: 2661556  
 Horario de Clases: Martes y Jueves de 10.15 a 12.00 hrs., Sala FM-202  
 Ayudante: Catalina Opazo  
 Horario de Práctica: Martes, de 15.15 a 17.00 hrs., Sala FM-202

**ATENCIÓN DE ALUMNOS:** Horario Libre (dependiendo de mi disponibilidad). Se recomienda contactar previamente, ya sea justo después de cada clase o bien vía e-mail para agendar una hora de atención en mi oficina. A su vez, también se aceptan **consultas acotadas** escribiendo directamente a mi e-mail en cualquier **horario razonable**, las cuales responderé a la brevedad. Si la pregunta y respuesta respectiva son de interés general, entonces las compartiré a través de un anuncio en Canvas.

GNG/gng