



## TEST 2 (Evaluación Sumativa)

Cálculo Numérico (521230)

### Observaciones

- El test 2 se conforma de dos problemas a entregar: uno obligatorio sobre sistemas lineales de ecuaciones y un segundo a escoger entre los problemas **Problema Opcional 1** y **Problema Opcional 2**.
- La guía se divide en dos secciones, la primera es sobre sistemas lineales de ecuaciones, el problema planteado en esta sección es el problema obligatorio del test 2.
- En la segunda sección de la guía se plantean los problemas **Problema Opcional 1** y **Problema Opcional 2**. Deberán escoger **solo uno** de ellos para entregar.
- **El puntaje total asignado a los dos problemas que deben entregar es 5 puntos. El sexto punto del test 2 lo obtienen por realizar la evaluación por pares del laboratorio 6.**

### 1. PROBLEMA OBLIGATORIO: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  la matriz cuyos elementos se definen de la siguiente forma

$$A(i, i) = i\text{-ésimo número primo},$$

$$A(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } |i - j| \in \{1, 2, 2^2, \dots, 2^m\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo  $m$  el mayor entero tal que  $2^m < n$ .

Por ejemplo, si  $n = 5$ , entonces  $m = 2$  pues  $2^3 > 5$  y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Observe que los elementos en la diagonal principal de  $A$  son números primos y el elemento en la posición  $(i, j)$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , es 1 si y solo si  $|i - j| = 2^0$  o  $|i - j| = 2^1$  o  $|i - j| = 2^2$ , es decir, si y solo si

$$i = j \pm 1 \quad \vee \quad i = j \pm 2 \quad \vee \quad i = j \pm 4.$$

El objetivo de este problema es determinar el elemento en la posición  $(1, 1)$  de  $A^{-1}$  siendo  $A$  la matriz definida antes de tamaño  $20000 \times 20000$ .

- 1) Complete la función **MatrizA.m** que, dado un valor de  $n$ , retorna la matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$ .
- 2) Escriba el rutero **memoria.m** en el que para cada  $n \in \{50, 100, 500, 1000\}$ 
  - Construya  $A$  llamando a **MatrizA**.
  - Haga  $B = \text{full}(A)$  y calcule la descomposición LU de  $B$  con ayuda del comando `lu` de OCTAVE.
  - Compare la cantidad de elementos distintos de cero en  $B$ ,  $L$  y  $U$ . ¿Ocurre el fenómeno de llenado (o fill-in) explicado en *Video 4: Matrices Dispersas*?
- 3) Determine un vector  $b \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  de modo que, resolviendo el sistema  $Ax = b$ , sea posible determinar, con ayuda del vector  $x$ , el elemento en la posición  $(1, 1)$  de  $A^{-1}$ . De este modo podremos determinar  $A^{-1}(1, 1)$  sin calcular  $A^{-1}$ .
- 4) Escriba el rutero **ElementoInversaA.m** en el que, para  $n = 20000$ ,
  - Construya la matriz  $A$  llamando a **MatrizA.m**.

- Construya el vector  $b$  determinado en ítem anterior.
- Resuelva, llamando a `gauss_seidel.m`, el sistema  $Ax = b$  con tolerancia igual a  $10^{-4}$  y máximo número de iteraciones igual a 50.
- Determine  $A^{-1}(1, 1)$ .

**Observación:** Éste fue uno de los problemas del *One hundred dollar - One hundred digit challenge* publicado en 2002 por el profesor Nick Trefethen.

## 2. PROBLEMAS OPCIONALES

De los problemas siguientes debe escoger solo uno. Ambos se basan en el mismo problema de valores iniciales.

Un *interruptor genético* es un mecanismo que regula si una proteína particular es sintetizada o no por una célula. Este mecanismo puede ser modelado por el siguiente problema de valores iniciales

$$(2.1) \quad g'(t) = s - 1.51g + 3.03 \frac{g^2}{1 + g^2}, \quad g(0) = 0, \quad t \in [0, 100],$$

donde  $g$  denota la concentración de la proteína y  $s$  es una constante que determina la concentración del químico que activa la producción de la proteína.

El objetivo de los dos problemas opcionales siguientes es determinar si este modelo permite modelar los siguientes fenómenos:

- 1) **Fenómeno 1:** la existencia de un valor umbral para  $s$ : si llamamos  $\tilde{s}$  al valor umbral para  $s$ , debe ocurrir que para  $s < \tilde{s}$  la concentración de la proteína debe variar desde 0 (valor inicial) a un valor cercano a cero y debe permanecer casi constante a partir de ese momento. Si  $s > \tilde{s}$ , debe ocurrir algo similar, pero el valor en que permanece  $g$  (valor en equilibrio de  $g$ ) debe ser “significativamente” mayor al anterior.
- 2) **Fenómeno 2:** si  $g(0)$ , en lugar de ser 0, es igual a la concentración equilibrio de  $g$  y  $s = 0$ , la concentración de la proteína debe disminuir hasta cierto valor mayor que cero y debe permanecer en él.

**Problema Opcional 1:** Estudiemos el primero de los fenómenos anteriores, es decir, determinemos si existe  $\tilde{s}$ . Escriba el rutero `interruptor_fen1.m` en el que:

- 1) Resuelva (2.1) tomando  $s$  igual a cada uno de los siguientes valores: 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4. Grafique, en un mismo gráfico, los valores de  $g$  obtenidos. Observe que la solución numérica tiene el comportamiento esperado. Para los dos primeros valores de  $s$ , los valores de  $g$  se mantienen cercanos a cero, pero para los dos últimos el valor de  $g$  en equilibrio es un número entre 1.5 y 2. Esto indica que  $\tilde{s}$  es un número entre 0.2 y 0.3.
- 2) Resuelva nuevamente (2.1), pero tomando ahora  $s$  igual a 0.201, 0.202, 0.203 y 0.204. ¿Entre cuáles de los valores anteriores usted presumiría que se encuentra el valor de  $\tilde{s}$ ?

**Formato de entrega:** Archivo `interruptor_fen1.m`.

**Problema Opcional 2:** Estudiemos el segundo de los fenómenos anteriores. Escriba el rutero `interruptor_fen2.m` en el que:

- 1) Resuelva (2.1) tomando  $s$  igual a cada uno de los siguientes valores: 0.2, 0.25, 0.3, 0.35 y 0.4. Grafique, en un mismo gráfico, los valores de  $g$  obtenidos. Observe que la solución numérica tiene el comportamiento esperado. Para el primer valor de  $s$ , los valores de  $g$  se mantienen cercanos a cero, pero para los cuatro últimos el valor de  $g$  en equilibrio es un número entre 1.5 y 2.
- 2) Determine el valor de  $g$  en equilibrio con  $s$  igual a 0.25, 0.3, 0.35 y 0.4. Resuelva (2.1), pero tome esta vez  $s = 0$  y  $g(0)$  igual a cada uno de los valores en equilibrio determinados. Grafique la aproximación a  $g$  que obtiene en cada caso. ¿Ocurre en cada caso que  $g$  disminuye hasta un valor menor al inicial y, a partir de cierto instante  $T$  permanece casi constante (en equilibrio)? ¿Cuál es el valor en equilibrio de  $g$ ?

**Formato de entrega:** Archivo `interruptor_fen2`.