Diferenciación e integración.

- **Derivación.**
- **Integración.**
- **Relaciones entre derivación e integración.**

Derivación.

En esta clase recordaremos las principales propiedades del Cálculo Infinitesimal, sin incluir las respectivas demostraciones, que pueden verse en los Cap. 5 y 6 del libro de Rudin.

Def.: Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x \in [a,b]$. f es **derivable en** x si existe

$$\boxed{\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} =: f'(x).}$$

En tal caso, ese límite es la **derivada de** f **en** x, que se denota $f'(x)$.

La función $x \mapsto f'(x)$, definida en aquellos $x \in [a,b]$ donde f es derivable, es la **derivada de** f.

f es **derivable** si es derivable en $x \quad \forall x \in [a,b]$

- Notemos que $f'(a)$ y $f'(b)$ se definen mediante límites laterales.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $x \in [a,b]$. Entonces f es continua en x.

Teor.: Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivables en $x \in [a,b]$. Entonces:

a) $(f+g)$ es derivable en x y $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

b) (fg) es derivable en x y $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

c) si $g(x) \neq 0$, entonces (f/g) es derivable en x y

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Teor. [regla de la cadena]: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $x \in [a,b]$ y $g : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ derivable en $f(x)$. Entonces, $(g \circ f)$ es derivable en x y

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ejemplos:

La funcion constante, $\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto c, \end{aligned}$ es derivable y $f'(x) = 0$.
La funcion identidad, $\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$ es derivable y $f'(x) = 1$.
La funcion monomial, $\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^n, \end{aligned}$ $n \in \mathbb{N}$, es derivable y $f'(x) = nx^{n-1}$.

La función polinomial $\begin{array}{l} f:\ [a,b] \to \mathbb{R}, \\ \qquad x \mapsto c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n, \end{array}$ $n \in \mathbb{N}$,

es derivable, pues es suma de productos de constantes por monomiales.

La función racional $\begin{array}{l} f:\ [a,b] \to \mathbb{R}, \\ \qquad x \mapsto p(x)/q(x), \end{array}$ con p, q polinomiales,

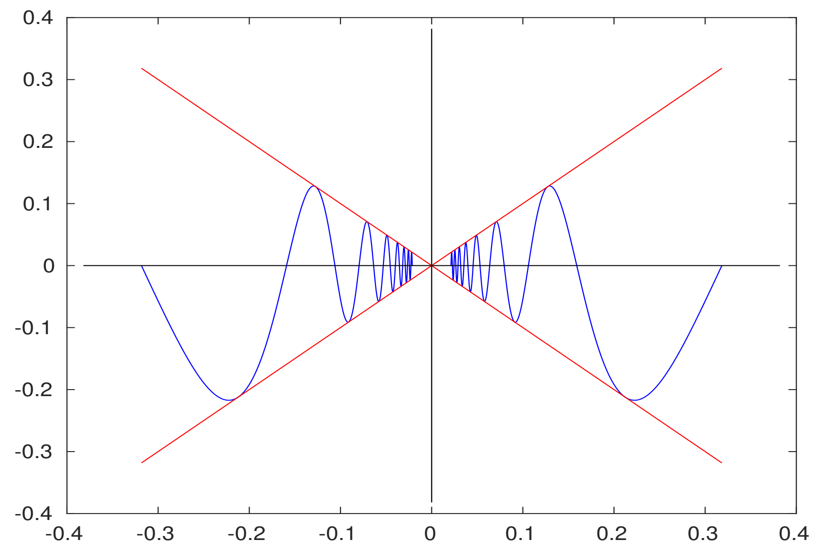
es derivable en todo $x \in [a,b]:\ q(x) \neq 0$, pues es cociente de derivables.

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$ y derivable $\forall x \neq 0$:

$$f'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

¿Es f derivable en $x = 0$?

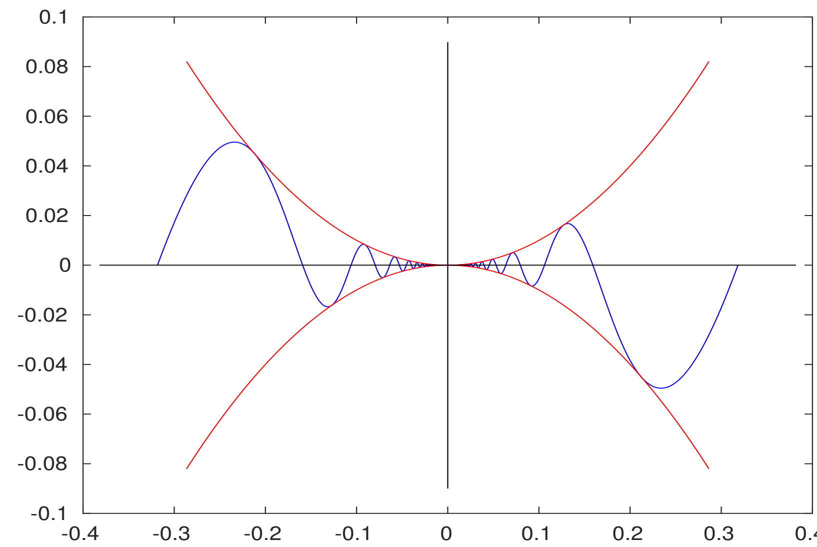


$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right),$$ que no tiene límite cuando $t \to 0$

$\Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$



es continua en $\mathbb{R}$ y derivable $\forall x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

¿Es f derivable en $x = 0$?

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) \to 0 \text{ cuando } t \to 0$$

$\Longrightarrow$ f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. Por lo tanto, f es derivable y

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, f' no es continua. En efecto, f' tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, ya que no existe el $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

Def.: Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $p \in (a,b)$.
f tiene un **máximo relativo** en p si $\exists \delta > 0 : \forall x \in (p-\delta, p+\delta),\ f(x) \leq f(p)$;
f tiene un **mínimo relativo** en p si $\exists \delta > 0 : \forall x \in (p-\delta, p+\delta),\ f(x) \geq f(p)$.

Teor.: Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $p \in (a,b)$. Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en p y f es derivable en p, entonces $f'(p) = 0$.

Teor. [del valor medio]: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces,

$$\boxed{\exists \xi \in (a,b) \text{ tal que } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).}$$

Corol.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces,

- Si $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, f es monótona creciente.
- Si $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$, f es monótona decreciente.
- Si $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, f es constante.

Teor. [regla de L'Hôpital]: Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}}: \ -\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Sean $f, g: \ (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, tales que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Entonces:

- $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0}$ y $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}}$

  $\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A;}$

- $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty}$ y $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}}$

  $\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A.}$

Vale un resultado análogo cuando $x \to b$.

Integración.

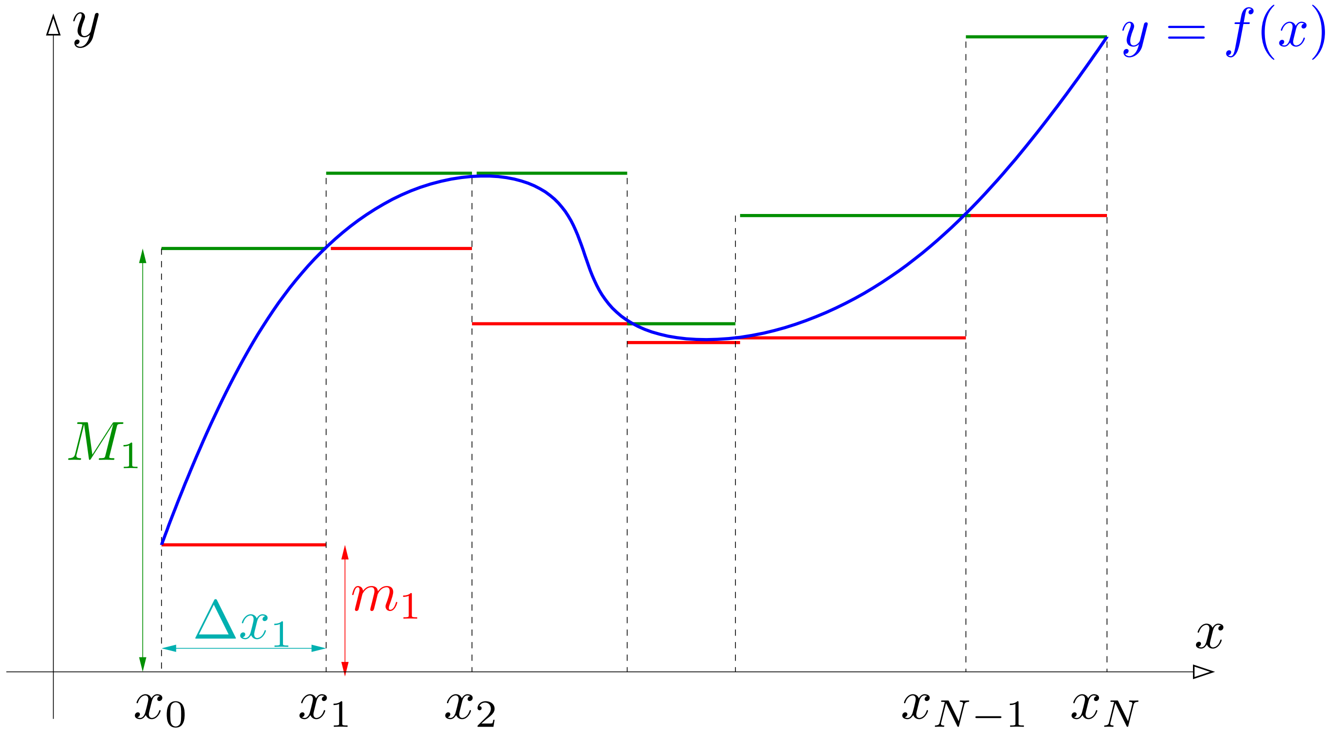
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada.

Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ una **partición de** $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Sean $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}$, las longitudes de $[x_{n-1}, x_n]$, $\quad n = 1, \ldots, N$.

Sean $\boxed{m_n := \inf\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)}$ y $\boxed{M_n := \sup\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x).}$



Repetimos: sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada.

Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ una partición de $[a,b]$:

Sean $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}, \;\; n = 1, \ldots, N$.

Sean $m_n := \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$ y $M_n := \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$.

Def.: Las **sumas inferior y superior de f en P** son, respectivamente,

$$L(P,f) := \sum_{n=1}^{N} m_n \Delta x_n \qquad \text{y} \qquad U(P,f) := \sum_{n=1}^{N} M_n \Delta x_n .$$

Las **integrales inferior y superior de f en $[a,b]$**, son, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_P L(P,f) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} f := \inf_P U(P,f).$$

La función f es **integrable Riemann** en $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

En tal caso, la **integral Riemann de f en $[a,b]$** es $\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

- A veces usaremos la notación $\int_a^b f(x)\,dx$ para la integral Riemann de f en $[a,b]$, a fin de resaltar la variable respecto a la cuál se integra.

- Cuando las integrales inferior y superior de f en $[a,b]$ no coinciden, **la integral Riemann de f no existe.** En cambio, las integrales inferior y superior existen siempre. En efecto, si f es acotada, sean $m, M \in \mathbb{R}$: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$. Entonces, $m \leq m_n \leq M_n \leq M \implies$

$$m(b-a) = \sum_{n=1}^{N} m\Delta x_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \Delta x_n}_{L(P,f)}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} M_n \Delta x_n}_{U(P,f)} \leq \sum_{n=1}^{N} M\Delta x_n = M(b-a)$$

$\implies$ las sumas inferiores y superiores están acotadas $\implies$ tienen supremo e ínfimo $\implies$ las integrales inferior y superior, están bien definidas.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada. Entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada. Entonces, f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

Teor.: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

Teor.: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

Ejemplo: **No todas las funciones acotadas son integrables Riemann.**

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Sea $P := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$.

Entonces, $\boxed{m_n := \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) = 0}$ y $\boxed{M_n := \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) = 1}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L(P,f) = \sum_{n=1}^{N} 0\,\Delta x_n = 0 \quad \forall P, \\ U(P,f) = \sum_{n=1}^{N} 1\,\Delta x_n = b-a \quad \forall P, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{\int_a^b} f = 0, \\ \overline{\int_a^b} f = b-a \end{cases}$$

$\Longrightarrow \underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f \Longrightarrow f$ **no es integrable Riemann.**

Teor.: Sean f_1, f_2, f integrables Riemann en $[a,b]$. Entonces:

a) $(f_1 + f_2)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2;$$

b) $\forall c \in \mathbb{R}$, (cf) es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f;$$

c) si $f_1(x) \leq f_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2;$$

d) $\forall c \in (a,b)$, f es integrable Riemann en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f;$$

e) $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \,.$$

Relaciones entre derivación e integración.

Teor. [fundamental del cálculo]: Sea f integrable Riemann en $[a, b]$.
Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Entonces, F es continua en $[a, b]$.
Además, si f es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

- A la funcion $F(x) := \displaystyle\int_a^x f$ se la denomina la **primitiva de** f.

Corol.: Si una función es continua, su primitiva es derivable y la derivada de la primitiva es la propia función.

Teor. [regla de Barrow]: Sean f integrable Riemann en $[a,b]$ y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable y tal que $F'(x)=f(x)$. Entonces.

$$\int_a^b f = F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a).$$

- A una funcion F tal que $F'=f$ se la denomina una **antiderivada de f.**

  De acuerdo al teorema anterior, para calcular la integral de una función en un intervalo, basta encontrar una antiderivada y evaluarla en los extremos del intervalo.

Teor. [integración por partes]: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivables. Si f' y g' son integrables Riemann en $[a,b]$, entonces $(f'g)$ y (fg') son integrables Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f'g) = -\int_a^b (fg') + (fg)\Big|_a^b.$$

Teor. [regla de sustiución o cambio de variable]: Sea $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ biyección creciente y derivable, tal que φ' es integrable en $[\alpha, \beta]$. Entonces, para toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann, se tiene que $(f \circ \varphi)\, \varphi'$ es integrable Riemann en $[\alpha, \beta]$ y

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\, \varphi'.$$

- Vale un teorema análogo (salvo signo) si φ es una biyección decreciente.
- La forma clásica en la que se suele enunciar esta regla es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$