

Listado 2: Convexidad, proyecciones y separación.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado convexo y $z \in \text{int}(A)$. Si R es una semirecta que parte de z , entonces R no puede cortar a ∂A en más de un punto.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo:

- a) Si $x \in A^c$ entonces $p_A(x) \in A$
- b) $x \in A$ si y sólo si $p_A(x) = x$

donde $p_A(x)$ representa la proyección de x sobre A

3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos, Entonces $\text{co}(A) + \text{co}(B) = \text{co}(A + B)$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado no vacío, y $p_S(x)$ es la proyección de x sobre el conjunto S , entonces

$$\|p_S(x) - p_S(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Nota: lo anterior quiere decir que la función proyección es Lipschitz de constante $L = 1$, que también suele llamarse como contractante.

5. Sean K_1, K_2 dos convexos no vacíos de \mathbb{R}^n , tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano que separa K_1 y K_2 , es decir, existe $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ tal que

$$p^T x_1 \geq p^T x_2, \quad \forall x_1 \in K_1, x_2 \in K_2.$$

6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado con interior no vacío, tal que para cada $x_0 \in \partial K$ existe un hiperplano soporte de K en x_0 , entonces K es convexo.

¿se puede relajar la hipótesis $\text{Int}(K) \neq \emptyset$?