UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

---

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218**
PRACTICA 9
Sistemas Lineales de EDO: Segunda Parte

## Problemas a resolver en práctica

## Problema 1

Resuelva usando el método de valores/vectores propios:

$$(i) \begin{cases} x' = 3x - y, & x(0) = 0, \\ y' = 5x - y, & y(0) = 1, \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} x' = -2x - y + z, \\ y' = -x - 2y - z, \\ z' = x - y - 2z, \end{cases}$$

**SOLUCIÓN**

$(i)$ El sistema se puede re – escribir matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}}_{=:A} \boldsymbol{X}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, son

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i,$$

las cuales son **complejas conjugadas simples**, y por tanto, basta obtener un sólo espacio propio.

El espacio propio correspondiente a $\lambda_1$ es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1\, I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

por lo tanto el espacio propio asociado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ es

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2\, I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

los cuales dan origen a las siguientes soluciones l.i.,

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathrm{e}^{(1+i)\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{e}^t \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{Im}\left\{ \mathrm{e}^{(1+i)\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{e}^t \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema homogéneo es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \left\{ \mathrm{e}^t \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} + c_2 \left\{ \mathrm{e}^t \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias.

Imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2\,c_1 - c_2 \end{pmatrix},$$

cuya única solución es $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$.

Por lo tanto, la única solución del PVI planteado está dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = -\boldsymbol{X}_2(t) = -\mathrm{e}^t \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Alternativa:** Se sabe que $\boldsymbol{X}_2$ es solución de sistema, y además, $\boldsymbol{X}_2(0) = (0,-1)^t$, con lo cual $-\boldsymbol{X}_2$ es una solución del PVI planteado, y gracias al **Teorema de Existencia y Unicidad**, es su única solución.

$(ii)$ El sistema se puede re – escribir matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{=:\,A} \boldsymbol{X}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Calculando el determinante, obtenemos $p(\lambda) = -\lambda\,(3+\lambda)^2$. Luego las raices de $p$ son

$$\lambda_1 = -3 \text{ (valor propio doble) }, \qquad \lambda_2 = 0 \text{ (valor propio simple).}$$

El espacio propio correspondiente al valor propio doble $\lambda_1$ es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1\, I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da origen a las siguientes soluciones l.i.,

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notese que puesto que $\dim(S_{\lambda_1}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio, la matriz es diagonalizable.

Para la solución faltante, se observa que

$$S_{\lambda_3} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_3\, I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

de donde se obtiene la tercera solución l.i. con las demás,

$$\boldsymbol{X}_3(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema homogéneo es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\, \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son constantes arbitrarias.

**Problema 2**

Resolver usando variación de parámetros: $\begin{cases} x' = 3x - y - z, \\ y' = x + y - z + t \\ z' = x - y + z + 2\,\mathrm{e}^t \end{cases}$

**SOLUCIÓN**

Se observa que el sistema se puede re – escribir matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=:\,A} \boldsymbol{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Gracias al Principio de Superposición, la solución general del problema está dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t),$$

siendo $\boldsymbol{X}_h$ la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p$ una solución particular del problema planteado.

El calculo del determinante nos da el polinomio característico $p(\lambda) := \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)\,(2 - \lambda)^2$. Sus raices son

$$\lambda_1 = 1 \text{ (valor propio simple)}, \qquad \lambda_2 = 2 \text{ (valor propio doble)}.$$

El espacio propio correspondiente a $\lambda_1$ es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1\, I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da origen a la primera solución,

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El espacio propio asociado al valor propio doble $\lambda_2$ esta dado por

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos las soluciones faltantes linealmente independientes

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_3(t) = \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notese que puesto que $\dim(S_{\lambda_2}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica de $\lambda_2$, la matriz $A$ es diagonalizable.
Así, la solución general del sitema homogéneo, $\boldsymbol{X}_h$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\, \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

donde $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son constantes arbitrarias.

Para la solución particular, $\boldsymbol{X}_p$, por variación de paramétros buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = c_1(t)\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2(t)\, \boldsymbol{X}_2(t) + c_3(t)\, \boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2\,t} & \mathrm{e}^{2\,t} \\ \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2\,t} & 0 \\ \mathrm{e}^{t} & 0 & \mathrm{e}^{2\,t} \end{pmatrix}}_{\text{matriz fundamental de soluciones}} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2\,\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} c_1'(t) & = 2 + t\,\mathrm{e}^{-t} \\ c_2'(t) & = -2\,\mathrm{e}^{-t} \\ c_3'(t) & = -t\,\mathrm{e}^{-2\,t}. \end{cases}$$

Integrando, sigue

$$\begin{cases} c_1(t) & = -\,(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,t + c_1 \\ c_2(t) & = 2\,\mathrm{e}^{-t} + c_2 \\ c_3(t) & = \frac{1}{4}\,(1+2\,t)\,\mathrm{e}^{-2\,t} + c_3, \end{cases}$$

donde $c_1, c_2, c_3$ son constantes reales arbitrarias que podemos aqui eligir iguales a 0 pues buscamos una solución particular. Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = (2\,t\,\mathrm{e}^t - 1 - t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(1+2\,t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) = &\quad c_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad c_3\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + &\quad (2\,t\,\mathrm{e}^t - 1 - t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(1+2\,t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son constantes arbitrarias.

**Problema 3**

Considere el sistema lineal de EDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) \quad + \mathrm{e}^{-t} \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) \quad - (\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{cases}$$

$(i)$ Si el vector $\boldsymbol{X}_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}(1,1,-1)^t$ es solución del sistema de EDO lineal homogéneo asociado al sistema dado, escriba la solución general del **sistema lineal homogéneo** correspondiente.

$(ii)$ Determine una solución particular para el sistema dado.

$(iii)$ Determine la solución general del sistema dado.

## SOLUCIÓN

$(i)$ La solución general del problema es $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t)$, donde $\boldsymbol{X}_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p(t)$ es una solución particular del problema. Aquí la matriz de coeficientes del sistema homogéneo, es

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -1 \quad \text{(valores propios simples)}$$

Puesto que $A$ tiene valores propios simples, sigue que $A$ es diagonalizable. Como nos dan la solución asociada a $\lambda_1 = -2$, buscamos los espacios propios $S_{\lambda_2}$ y $S_{\lambda_3}$ asociados respectivamente a $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -1$.

El espacio propio correspondiente a $\lambda_2$, $S_{\lambda_2}$, es

$$S_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da origen a la segunda solución, $\boldsymbol{X}_2(t)$,

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para el espacio propio correspondiente a $\lambda_3$, obtenemos

$$S_{\lambda_3} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_3 I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos la tercera solución $\boldsymbol{X}_3(t)$,

$$\boldsymbol{X}_3(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general del sitema homogéneo, $\boldsymbol{X}_h(t)$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\, \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son constantes arbitrarias.

(*ii*) Para la solución particular, $\boldsymbol{X}_p$, por variación de paramétros buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = c_1(t)\boldsymbol{X}_1(t) + c_2(t)\boldsymbol{X}_2(t) + c_3(t)\boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} c_1'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t} \\ c_2'(t) &= 1 \\ c_3'(t) &= 1 + \mathrm{e}^{-2\,t}. \end{cases}$$

Integrando, obtenemos (eligiendo constantes de integración nulas),

$$\begin{cases} c_1(t) &= \mathrm{e}^{-t} \\ c_2(t) &= t \\ c_3(t) &= t\, -\, \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(iii) Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t) = {} & c_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + {} & \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t\mathrm{e}^{-t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son constantes arbitrarias.

**Problema 4**

Resolver el sistema de ecuaciones no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

sabiendo que una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado viene dada por $\boldsymbol{M}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ y además el sistema no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

tiene por solución particular a $X_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}$.

**SOLUCIÓN**

Del enunciado se desprende que $\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ son soluciones l.i del sistema homogéneo asociado. Luego, la solución general de dicho sistema es

$$\boldsymbol{X}_H(t) = c_1\,\boldsymbol{X}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{X}_2(t) = c_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

siendo $c_1$ y $c_2$ constantes reales arbitrarias.

Gracias al Principio de Superposición, se construye una solución particular de la forma $\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{X}_{p1} + \boldsymbol{X}_{p2}$, siendo $\boldsymbol{X}_{p1}$ una solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

y $\boldsymbol{X}_{p2}$ solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix},$$

Del enunciado sabemos que

$$\boldsymbol{X}_{p1}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2t+1)(e^{t} - e^{-t}) \\ (2t-1)(e^{t} + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Para construir $\boldsymbol{X}_{p2}$ aplicaremos variación de parámetros. Esta técnica propone que

$$\boldsymbol{X}_{P2}(t) = c_1(t)\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2(t)\, \boldsymbol{X}_2(t),$$

de modo que las funciones $c_1$ y $c_2$ satisfacen el sistema

$$\Big(\boldsymbol{X}_1(t)\,,\, \boldsymbol{X}_2(t)\Big) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se tiene

$$c_1'(t) = \frac{e^{2t} - e^{t}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{t}$$

y

$$c_2'(t) = \frac{e^{3t} + e^{4t}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = \frac{1}{6} e^{3t} + \frac{1}{8} e^{4t}.$$

De esta forma,

$$\boldsymbol{X}_{p2}(t) = \left(\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{t}\right) \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6} e^{3t} + \frac{1}{8} e^{4t}\right) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 9\, e^{3t} - 8\, e^{2t} \\ 3\, e^{3t} - 16\, e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del sistema EDO no homogéneo dado es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{X}_H(t) + \boldsymbol{X}_{p1}(t) + \boldsymbol{X}_{p2}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2t+1)(e^{t} - e^{-t}) \\ (2t-1)(e^{t} + e^{-t}) \end{pmatrix} + \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 9\, e^{3t} - 8\, e^{2t} \\ 3\, e^{3t} - 16\, e^{2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $c_1$ y $c_2$ constantes reales arbitrarias.

## Problema 5

1. Dos tanques A y B se conectan a través de dos tubos. Al tanque A desde el externo ingresan 2 [lt/min] de salmuera (una mezcla de agua y sal) a una concentración de 0.01 [kg/lt]; al mismo tiempo 6 [lt/min] de salmuera ingresan desde el externo al tanque B a un concentración de 0.001 [kg/lt]. Además, en todo instante fluyen 2 [lt/min] de

salmuera desde el tanque A al B y 6 [lt/min] (de salmuera) del tanque B al tanque A. Adicionalmente, desde el tanque B se pierden al exterior 4 [lt/min] de mezcla.

En un inicio el tanque A contiene 50 [lt] de salmuera a una concentración de 0.05 [kg/lt] y el tanque B contiene 100 [lt] de agua pura.

Si las capacidades de los tanques son de 400 [lt] para el A y de 600 [lt] para el B. **Determine** el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, EDO, que proporciona la cantidad de sal en cada tanque, hasta el instante en que dicho sistema de EDO cambia en su formulación. ¿Qué instante es ese, explicite?

**NO SE PIDE RESOLVER EL SISTEMA**.

## SOLUCIÓN

1. Las variaciones de volumen en los tanques A y B, son respectivamente

$$\triangle V_A = 6\,[\text{lt/min}] \quad \text{y} \quad \triangle V_B = -2\,[\text{lt/min}];$$

por tanto, los correspondientes volumenes son

$$V_A(t) = (6\,t + 50)\,[\text{lt}] \qquad \text{y} \qquad V_B(t) = (100 - 2\,t)\,[\text{lt}], \quad \text{para } 0 \le t \le T_x,$$

siendo $T_x$ el tiempo mínimo entre el tiempo de ebalse del tanque $A$ y el tiempo de vaciado del tanque $B$ (observe que el volumen en el tanque $A$ está aumentando, mientras que en el B está disminuyendo). Puesto que el tanque $A$ rebalsa en el tiempo $t = \dfrac{350}{6}$ minutos y el tanque B queda vacío en el tiempo $t_v = 50$ minutos, los volumenes anteriores para ambos tanques valen para $0 \le t \le 50\,[\text{min}]$.

Así, si $x(t)$ e $y(t)$ indican en el tiempo $t$ respectivamente las cantidades de sal en el tanque $A$ y en el tanque $B$, medidas en kilogramos, entonces hasta el instante $t_v$ de vacío del tanque $B$, el sistema viene modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \cdot 0,01 + 6\,\dfrac{y(t)}{100 - 2\,t} - 2\,\dfrac{x(t)}{6\,t + 50}; \quad t \in [0, t_v[ \\[2ex] y'(t) = 6 \cdot 0{,}001 + 2\,\dfrac{x(t)}{6\,t + 50} - 10\,\dfrac{y(t)}{100 - 2\,t}; \quad t \in [0, t_v[ \\[2ex] x(0) = 2{,}5\,[\text{kg}], \quad y(0) = 0\,[\text{kg}]. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} x'(t) = 0,02 + \dfrac{3\,y(t)}{50 - t} - \dfrac{x(t)}{3\,t + 25}; \quad t \in [0, t_v[ \\[2ex] y'(t) = 0{,}006 + \dfrac{x(t)}{3\,t + 25} - \dfrac{y(t)}{10 - (1/5)\,t}; \quad t \in [0, t_v[ \\[2ex] x(0) = 2{,}5\,[\text{kg}], \quad y(0) = 0\,[\text{kg}]. \end{cases}$$

**Problemas propuestos para el estudiante.**

**Problema 1**

Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (multiplicidad igual a 1).

$$(i)\ \begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 4, \\ y' = -2x + 4y, & y(0) = 5, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x' = -3x + 3y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x + 5y, & y(0) = 3, \end{cases},$$

**Problema 2**

Usando el método de valores/vectores propios, resuelva:

$$(i)\ \begin{cases} x' = -2x - y + z, & x(0) = 4, \\ y' = -x - 2y - z, & y(0) = 0, \\ z' = x - y - 2z, & z(0) = 1, \end{cases}$$

**Problema 3**

Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (valores propios complejos).

$$(i)\ \begin{cases} x' = -x + y, & x(0) = 4, \\ y' = -x - y, & y(0) = 1, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x' = x - y, & x(0) = 4, \\ y' = 5x - y, & y(0) = 0, \end{cases}$$

**Problema 4**

Resolver usando variación de parámetros:

1. $\begin{cases} x' = x + y + \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-2t}, \\ y' = x + y - \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{3t}, \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y + \mathrm{e}^{t}, & x(0) = 4, \\ y' = -x, & y(0) = 0, \end{cases}$

**Problema 5**

En dos tanques A y B de 800 litros de capacidad, se tienen respectivamente 400 [lts] de agua pura y 200 [lts] de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. Desde el externo ingresan al tanque A 8 lt/min de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. simultáneamente desde el tanque B ingresan al tanque A 2 lt/min de agua y sal, y desde el tanque A ingresan al tanque B 6 [lt/min] de mezcla.

Si del tanque B se pierden al externo 4 lt/min, y suponiendo que en todo instante la mezcla de ambos tanques son homogéneas, escriba el sistema de EDO que rige el proceso anterior, hasta el momento del rebalse.

---

MDT/JMS/CMG/DS//jms/ds/ahn
Agosto de 2020.