Prof.: V. Aros, J. Careaga, S. Caro, A. Gajardo, F. Jara,
F. Lobos, I. Navarrete, K. Tabilo y G. Torres.

Test 3
Teorema del Binomio

1.A La constante que aparece en el tercer término del desarrollo de $\left(1+\frac{x}{2}\right)^n$ es igual a n. El término que contiene a x^5 en este desarrollo es: $\frac{63}{16}x^5$

Solución: Por teorema del binomio:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

luego, el tercer término está dado por:

$$t_3 = t_{2+1} = \binom{n}{k} 1^{n-2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \binom{n}{k} \frac{1}{2^2} x^2$$

y por tanto, de acuerdo a la información del enunciado, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{k}\frac{1}{2^2} &=& \; n \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{1}{4} &=& \; n \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!2!} &=& \; 4n \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(n-1)n}{2} &=& \; 4n \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(n-1)}{2} &=& \; 4 \\
\Leftrightarrow \quad & (n-1) &=& \; 8 \\
\Leftrightarrow \quad & n &=& \; 9
\end{aligned}$$

Por otro lado, el término que contiene a x^5 será tal que:

$$t_{k+1} = \binom{9}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \binom{9}{k}\frac{x^k}{2^k}$$

por tanto $x^5 = x^k$, es decir: $k = 5$. Finalmente:

$$t_{5+1} = \binom{9}{5}\frac{x^5}{2^5} = \frac{63}{16}x^5$$

1.B La constante que multiplica x^3 en el desarrollo $\left(1+\frac{x}{2}\right)^n$ es igual a $\frac{5n}{12}$. El término que contiene a x^5 en este desarrollo es: $\frac{3}{16}x^5$

<u>Solución:</u> Por teorema del binomio:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{x}{2}\right)^k$$

luego, el término que contiene a x^3 está dado con $k = 3$, por ende:

$$t_{3+1} = \binom{n}{3}1^{n-3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \binom{n}{3}\frac{1}{2^3}x^3$$

y por tanto, de acuerdo a la información del enunciado, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& & \binom{n}{3}\frac{1}{2^3} &= \frac{5n}{12} \\
&\Leftrightarrow & \frac{n!}{(n-3)!3!}\frac{1}{8} &= \frac{5n}{12} \\
&\Leftrightarrow & \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!6} &= 8\frac{5n}{12} \\
&\Leftrightarrow & (n-2)(n-1)n &= 48\frac{5n}{12} \\
&\Leftrightarrow & (n-2)(n-1) &= 48\frac{5}{12} \\
&\Leftrightarrow & (n-2)(n-1) &= 20 \\
&\Leftrightarrow & n^2-3n-18 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (n+3)(n-6) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & n=-3 &\vee n=6
\end{aligned}$$

Por otro lado, el término que contiene a x^5 será tal que:

$$t_{k+1} = \binom{6}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \binom{6}{k}\frac{x^k}{2^k}$$

por tanto $x^5 = x^k$, es decir: $k = 5$. Finalmente:

$$t_{5+1} = \binom{6}{5}\frac{x^5}{2^5} = \frac{3}{16}x^5$$

2.A Sabiendo que los primeros tres términos de la expansión de $(a-2x)^n$ son $1, -16x, bx^2$. Los valores de a, b y n son: $a = 1$, $n = 8$ y $b = 112$

Solución: Notemos que, haciendo uso del teorema del binomio, se obtiene lo siguiente:

$$(a-2x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot(-2x)^k$$

Luego, los primeros tres términos están dados por:

- $t_1 = t_{0+1} = \binom{n}{0}a^{n-0}\cdot(-2x)^0 = 1$
- $t_2 = t_{1+1} = \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot(-2x)^1 = -16x$
- $t_3 = t_{2+1} = \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot(-2x)^2 = bx^2$

Así,

(1) $\binom{n}{0}a^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1,\ (n \neq 0).$

(2) Reemplazando $a = 1$ y considerando lo obtenido para el segundo término.

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot(-2x) = -16x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{n!}{(n-1)!1!}\cdot -2x = -16x \\ \Leftrightarrow\quad & -2xn = -16x \\ \Leftrightarrow\quad & n = 8 \end{aligned}$$

(3) Reemplazando $a = 1$ y $n = 8$. Además, considerando lo obtenido para el tercer término, se tiene:

$$\begin{aligned} & \binom{8}{2}1^{8-2}\cdot(-2x)^2 = bx^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 28\cdot 4x^2 = bx^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 112 = b \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene:

$$a = 1, \quad n = 8 \quad \text{y} \quad b = 112$$

2.B Sabiendo que los primeros tres términos de la expansión de $(a + 2x^2)^n$ son $-1, 26x^2, bx^4$. Los valores de a, b y n son: $a = -1$, $n = 13$ y $b = -312$

<u>Solución:</u> Notemos que, haciendo uso del teorema del binomio, se obtiene lo siguiente:

$$(a + 2x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (2x^2)^k$$

Luego, los primeros tres términos están dados por:

- $t_1 = t_{0+1} = \binom{n}{0} a^{n-0} \cdot (2x^2)^0 = -1$
- $t_2 = t_{1+1} = \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (2x^2)^1 = 26x^2$
- $t_3 = t_{2+1} = \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot (2x^2)^2 = bx^4$

Así,

(1) $\binom{n}{0} a^n \cdot 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a^n = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1,\ n \neq 0$ y n impar.

(2) Reemplazando $a = -1$, considerando n es impar y considerando lo obtenido para el segundo término.

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} (-1)^{n-1} \cdot (2x^2) = 26x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & n \cdot \cancel{(-1)^n} \cdot \cancel{(-1)^1} \cdot 2x^2 = 26x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & n \cdot 2x^2 = 26x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & n = 13 \end{aligned}$$

(3) Reemplazando $a = -1$ y $n = 13$. Además, considerando lo obtenido para el tercer término, se tiene:

$$\begin{aligned} & \binom{13}{2} (-1)^{13-2} \cdot (2x^2)^2 = bx^4 \\ \Leftrightarrow \quad & -78 \cdot 4x^4 = bx^4 \\ \Leftrightarrow \quad & -312 = b \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene:

$$a = -1, \quad n = 13 \quad \text{y} \quad b = -312$$

Esperamos que hayas entendido la solución. Si no entendiste o tienes dudas por favor pregúntanos. Los horarios de consultas y correos de contacto están en el syllabus, y recuerda que también puedes preguntar en canvas y en teams.