

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Evaluación 1.
Cálculo III.
525211.
16 de Mayo de 2011.

1. Para los siguientes conjuntos

- (a) $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 + y^2 < 9\}$
- (b) $R_2 := \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < x^2\}$
- (c) $R_3 := \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{x}\}$

Diga cuál de ellos es abierto? poligonalmente conexo? conexo? región? justifique su respuesta.

Sólo para uno de ellos se puede definir una función $f(x, y) \neq \text{constante}$ tal que $\nabla f \equiv 0$. Diga si se trata de R_1 , R_2 o R_3 , y dé un ejemplo de tal función f .

2. Suponga que el centro de la tierra (de masa M) está ubicado en $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$, y un astronauta (de masa m) está ubicado en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. El potencial gravitatorio está dado por una función $\varphi = \Psi \circ f$, donde $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $r \mapsto \Psi(r) = \frac{GMm}{r}$ (con $G \equiv$ Constante Universal), y donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- (a) Pruebe que $\Delta\varphi = 0$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, donde $\Delta\varphi := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$.
 - (b) Se define el campo de fuerza gravitacional como $\vec{F} = \nabla\varphi$; pruebe que la fuerza de gravedad que la tierra ejerce sobre el astronauta está dirigida hacia el centro de la tierra y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.
3. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

Duración : 2:45 horas.
MSC/msc