UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra III, 525201
30 de junio de 2014
Duración: 1h40
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación 2

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior, y $P : V \to V$ una proyección no trivial, es decir, un operador lineal que cumple $P^2 = P$ y que no es ni el operador nulo ni la identidad. Tome como dato que estos operadores cumplen las siguientes propiedades (no las demuestre).

   i) $Im(P) = Ker(P - id) \neq \{\theta\}$
   ii) $Ker(P) = Im(P - id) \neq \{\theta\}$
   iii) $Ker(P) \oplus Im(P) = V$

   Demuestre lo siguiente.

   a) **(6 puntos)** $\sigma(P) = \{0, 1\}$.
   b) **(14 puntos)** P es autoadjunto si y solo si $Ker(P) \perp Im(P)$.

2. Considere la siguiente forma bilineal en $\mathbb{R}^4$.

$$B((a, b, c, d), (x, y, z, t)) = az - at + bz + bt - cx - cy + dx - dy$$

   a) **(5 puntos)** Calcule la matriz representante de esta forma bilineal respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   b) **(7 puntos)** Demuestre que se trata de una forma no degenerada.
   c) **(5 puntos)** Decida si se trata de una forma definida positiva, negativa, semi definida positiva, semi definida negativa o ninguna de las anteriores.
   d) **(3 puntos)** Exprese la forma cuadrática asociada.

3. Considere la siguiente matriz que está en su forma canónica de Jordan y responda las preguntas de verdadero y falso que se indican abajo, justificando debidamente cada una de sus respuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) **(5 puntos)** $dim(E_3(13)) = 5$.
   b) **(5 puntos)** A es diagonalizable.
   c) **(5 puntos)** El polinomio minimal de A es $m(x) = x(x - 13)^5$.
   d) **(5 puntos)** La multiplicidad geométrica de 13 es 3.