

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 2. Aún más ejercicios adicionales.

Conectividad.

1. El objeto de este ejercicio es determinar cuáles son todos los conjuntos conexos de la recta.
 - (a) Demuestra que los únicos conjuntos conexos, acotados y no vacíos de \mathbb{R} son los intervalos (acotados): (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ y $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$).
 - (b) Demuestra que los únicos conjuntos conexos no acotados de \mathbb{R} son las semirectas y la recta \mathbb{R} : $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(-\infty, +\infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
 - (c) Concluye describiendo todos los conjuntos conexos de \mathbb{R} .
2. El objeto de este ejercicio es demostrar que la definición de conjunto conexo (al igual que la de conjunto compacto) es independiente del espacio métrico que contiene al conjunto.

Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$, de manera que (Y, d) también es un espacio métrico.

Dado $x \in Y$, para distinguir las bolas de radio $r > 0$ en X y en Y , en este ejercicio las llamaremos $B_r^X(x)$ y $B_r^Y(x)$, respectivamente:

$$B_r^X(x) := \{y \in X : d(y, x) < r\},$$
$$B_r^Y(x) := \{y \in Y : d(y, x) < r\} = B_r^X(x) \cap Y.$$

Dado $A \subset Y$, en este ejercicio llamaremos \overline{A}^X y \overline{A}^Y a las clausuras de A en X y en Y , respectivamente:

$$\overline{A}^X := \{y \in X : \forall r > 0 \ B_r^X(y) \cap A \neq \emptyset\},$$
$$\overline{A}^Y := \{y \in Y : \forall r > 0 \ B_r^Y(y) \cap A \neq \emptyset\}.$$

- (a) Demuestra que $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.
- (b) Sea $E \subset Y$. Demuestra que E es conexo en Y si y sólo si es conexo en X .