UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525551)
Evaluación 3

P1) Sea f^* una solución óptima al PFCM con instancia $(G = (V, A), s, t, c, w, f_0)$.

a) Muestre que existe un camino de peso residual mínimo de s a t en la red residual G_{f^*} si y sólo si f_0 es menor que el valor máximo de un s-t flujo en G.

b) Pruebe si que la función de capacidad c es cambiada por la función capacidad c' definida por:

$$\forall(u, v) \in A, \quad c'(u, v) = f^*(u, v),$$

entonces f^* es también solución óptima al PFCM con instancia $(G = (V, A), s, t, c', w, f_0)$.

c) Suponga que la capacidad c de un arco dado se aumenta en una unidad. Explique cómo se puede determinar un flujo óptimo f' al PFCM con esta nueva capacidad a partir de f^*.

P2) En un curso de Ingeniería Civil Matemática se desea asignar a cada uno de sus n estudiantes uno de los m proyectos de investigación existentes. Un mismo proyecto puede ser asignado a diferentes estudiantes. Cada estudiante debe ser supervisado por un único profesor o profesora. Hay en total r profesores para supervisar todos los proyectos del curso. Para cada proyecto i hay un subconjunto A_i de profesores competentes en el tema que son capaces de supervisar el proyecto. Además, cada proyecto i puede ser elegido a lo más por α_i estudiantes y cada profesor o profesora j debe supervisar al menos un estudiante y a lo más a β_j estudiantes. Cada alumno k ha rankeado el proyecto i con un valor $r_{ik} \in \{1, \ldots, m\}$ según sus preferencias, donde el menor valor indica primera preferencia y el mayor valor el de menor preferencia. El problema es entonces cómo asignar a cada estudiante un proyecto, satisfaciendo las restricciones dadas y de manera de maximizar el bienestar de todos los estudiantes de acuerdo a sus preferencias. Modele este problema como un problema de flujo en redes para encontrar una solución óptima.

Solución:

P1) *a)* $\Longrightarrow$) Por resultado visto en clase, si existe un camino p de s a t en la red residual G_{f^*} (camino de aumento de flujo), entonces a partir f^* se puede construir un nuevo s-t flujo $\overline{f^*}$ tal que:

$$Val(\overline{f^*}) = Val(f^*) + \bar{c} = f_0 + \bar{c} > f_0,$$

donde $\bar{c} = \min\{c_{f^*}(u, v) : (u, v) \in A(p)\} > 0$. Como $\max\{Val(f) : f \text{ un } s-t\text{flujo}\} \geq Val(\overline{f^*})$, entonces f_0 es menor que el valor máximo de un s-t flujo en G.

$\Longleftarrow$) Si f_0 es menor que el valor máximo de un s-t flujo en G, entonces por resultado visto en clase, existe p un camino (de aumento de flujo) de s a t en la red residual G_{f^*}. Por otro lado, como f^* es un flujo óptimo para el problema PFCM, entonces G_{f^*} no tiene ciclo de peso negativo. Así por resultado visto en clase, hay un camino de peso mínimo de s a t en G_{f^*}, el cual puede ser encontrado usando por ejemplo el algoritmo de Bellmand-Ford.

b) Notemos primero que f^* es también un s-t flujo para la nueva función capacidad c'. En efecto se tiene que:

$$\forall(u, v) \in A, 0 \leq f^*(u, v) = c'(u, v)$$

y además se sigue mantendiendo el hecho que f^* es conservativo en los nodos distintos de s y t pues esto no depende de las capacidades de los arcos.

Veamos ahora que f^* es un s-t flujo óptimo para el PFCM con instancia $(G = (V, A), s, t, c', w, f_0)$. Como f^* es un óptimo para la instancia $(G = (V, A), s, t, c, w, f_0)$, entonces por resultado visto en clase, G_{f^*} no tiene ciclo de peso residual negativo. Como todos los arcos de G son saturados por f^* cuando la capacidad es c', entonces los arcos de G_{f^*} con respecto a c' son un subconjunto de los arcos de arcos de G_{f^*} con respecto a c. Por lo tanto, G_{f^*} tampoco tiene ciclo con respecto a c' de peso negativo. De aquí, f^* es un óptimo para la instancia $(G = (V, A), s, t, c, w, f_0)$.

c) Sea $\tilde{c}$ la nueva función de capacidad que es igual a c excepto en un arco $(a,b) \in A$ donde $\tilde{c}(a,b) = c(a,b)+1$. Luego, notemos primero que f^* es también un s-t flujo de $(G,\tilde{c})$, pues

$$\forall (u,v) \in A - \{(a,b)\},\ 0 \leq f^*(u,v) \leq c(u,v) = \tilde{c}(u,v) \ \wedge\ 0 \leq f^*(a,b) \leq c(a,b) \leq c(a,b)+1 = \tilde{c}(a,b).$$

y también tiene la propiedad conservativa pues no depende de la función capacidad. Entonces podemos usar el algoritmo de Klein para a partir de f^* encontrar una solución óptima para el PFCM con instancia $(G=(V,A), s, t, c', w, f_0)$.

P2) Sea $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ y $D = \{d_1, \ldots, d_r\}$ el conjunto de los estudiantes, proyectos y profesores (docentes) respectivamente. Además, denotamos por , $P' = \{p'_1, \ldots, p'_m\}$ un conjunto auxiliar de proyectos que pemitirá acotar el número máximo de proyectos α_i posibles de asignar. Definamos el grafo dirigido $G=(V,A)$ por:

$$\begin{aligned}
V =& E \cup P \cup P' \cup \cup D \cup \{s,t\}.\\
A =& \{(s,e_i):\ e_i \in E\} \cup \{(e_i,p_j):\ e_i \in E,\ p_i \in P\} \cup \{(p_i,p'_i):\ p_i \in P\}\\
& \cup \{(p'_j,d_k):\ p_j \in P,\ d_k \in D,\ d_k \in A_j\} \cup \{(d_k,t):\ d_k \in D\} \cup \{(t,s)\}.
\end{aligned}$$

Definamos además la funciones de capacidad inferior, superior y de costo $l,c,w: A \to \mathbb{R}_0^+$ respectivamente por $\forall (u,v) \in A$:

$$l(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s,e_i) \vee (u,v) = (d_k,t),\\ n & \text{si } (u,v) = (t,s),\\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s,e_i) \vee (u,v) = (e_i,p_j),\\ \alpha_j & \text{si } (u,v) = (p_j,p'_j) \vee (u,v) = (p'_j,d_k),\\ \beta_k & \text{si } (u,v) = (d_k,t),\\ n & \text{si } (u,v) = (t,s),\\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

$$w(u,v) = \begin{cases} r_{ik} & \text{si } (u,v) = (e_k,p_i),\\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, el problema planteado de asignación puede ser modelado como un problema de Circulación de Costo Mínimo (PCCM) con instancia $(G=(V,A), l, c, w)$ (15 ptos).

Notar que si $f: A \to \mathbb{R}_0^+$ es una circulación factible de G con las capacidades l,c, entonces necesariamente $\forall i = 1,\ldots,n,\ f(s,e_i) = 1$ y $f(t,s) = n$. Mostremos entonces que las soluciones óptimas de asignación al problema planteado están en correspondencia uno a uno con las soluciones óptimas al PCCM con instancia $(G=(V,A), l, c, w)$.

En efecto, sean $g: E \to P$ y $h: P \times D \to \{1,\ldots,n\}$ funciones asociadas a una solución óptima del problema de asignación planteado donde $\forall e_i \in E, g(e_i)$ es el proyecto asignado al estudiante e_i y $\forall (p_i,d_k) \in P \times D,\ h(p_i,d_k)$ es el número de estudiantes con proyecto p_i que supervisará el docente d_k. Notar que $h(p_i,d_k) = 0$ si $d_k \notin A_i$. Luego, podemos definir la función circulación $f: A \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in A,\ f(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s,e_i),\\ 1 & \text{si } (u,v) = (e_i,p_j) \wedge g(e_i) = p_j,\\ |g^{-1}(p_j)| & \text{si } (u,v) = (p_j,p'_j),\\ h(p_j,d_k) & \text{si } (u,v) = (p'_j,d_k),\\ \sum_j h(p_j,d_k) & \text{si } (u,v) = (d_k,t),\\ n & \text{si } (u,v) = (t,s),\\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción se tiene que f definido previamente es efectivamente una circulación en G con funciones de capacidades l,c.

Por otro lado, si $f: A \to \mathbb{R}_0^+$ es una circulación factible de G con las capacidades l,c, entonces definiendo $\forall e_i \in E,\ g(e_i) = p_j \iff f(e_i,p_j) = 1$ y $\forall (p_i,d_k) \in P \times D,\ h(p_i,d_k) = f(p'_i,d_k)$ y dado que $\forall e_i \in E,\ f(s,e_i) = 1$ se tiene que el problema original tiene una solución de asignación de proyecto p_j a cada estudiante e_i que verifica las restricciones dadas.

Por último, como

$$w(f) = \sum_{(u,v)\in A} w(u,v)f(u,v) = \sum_{i,j} w(e_i,p_j)f(e_i,p_j) = \sum_{i,j} r_{ji}f(e_i,p_j),$$

entonces f es una circulación de costo mínimo si y sólo si la asignación de proyectos que cumple las restricciones dadas maximiza el bienestar de todos los estudiantes según sus preferencias (15 ptos.).