Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Práctica 2 — miércoles 6 de mayo de 2020

Problema 1. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos la distancia del punto x al conjunto A de la siguiente manera:

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\bigl\{d(x, y) \,|\, y \in A\bigr\}.$$

a) Demostrar que la función $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua sobre X.

b) Para otro subconjunto $K \subset X$ definimos

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\bigl\{d(x, A) \,|\, x \in K\bigr\} = \inf\bigl\{d(x, y) \,|\, x \in K, y \in A\bigr\}$$

Demostrar que si A es cerrado, K compacto y $A \cap K = \varnothing$, entonces $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

c) Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados de un espacio métrico X con $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. ¿Se cumple $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$ (demostración o contraejemplo)?

Problema 2. Demostrar el Teorema 1.13. Aviso: aquí conviene demostrar primero la equivalencia 1. $\Leftrightarrow$ 2., y luego ocupar argumentos similares para demostrar 1. $\Leftrightarrow$ 3.

Teorema 1.13 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \varnothing$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Cada sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \in X$ posee un punto de acumulación en X.
3. Cada subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación en X.

Problema 3.

a) Demostrar que la siguiente cantidad *no* define una norma sobre $\mathbb{V}^n$ para $0 < p < 1$, donde $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \vec{x} \in \mathbb{V}^n.$$

b) Calcular constantes κ y K de el Teorema 1.24 si $\|\cdot\|^{**} = \|\cdot\|_2$ y
   (i) $\|\cdot\|^* = \|\cdot\|_\infty$,
   (ii) $\|\cdot\|^* = \|\cdot\|_1$.

Teorema 1.24 Todas las normas en $\mathbb{V}^n$ son equivalentes en el siguiente sentido. Si $\|\cdot\|^*$ y $\|\cdot\|^{**}$ son normas en $\mathbb{V}^n$, entonces existen constantes positivas κ y K tales que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^n: \ \kappa \|\vec{v}\|^* \leq \|\vec{v}\|^{**} \leq K \|\vec{v}\|^*.$$

Problema 4. Se considera el espacio $C[0,1]$ de las funciones continuas sobre $[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|f\|_\infty := \max_{0\le x\le 1} \big|f(x)\big|.$$

Asimismo se define

$$\|f\| := \sup\big\{\big|xf(x)\big| \,|\, 0 \le x \le 1\big\} \quad \text{para } f \in C[0,1]. \tag{1}$$

a) Demostrar que el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es completo.
b) Demostrar que la aplicación $\|\cdot\|$ definida por (**??**) define una norma sobre $C[0,1]$.
c) ¿El espacio $(C[0,1], \|\cdot\|)$ es completo? Fundamente su respuesta.
d) ¿Las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en el sentido del Teorema 1.24?