Álgebra 1 (525140)
Listado 12
Problemas sobre *Capítulo 7: Polinomios*
Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 12: Polinomios

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son polinomios? De aquellas que son polinomios, determine su grado.

   (a) $p_1(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$.
   (b) $p_2(x) = -5x^2 + 3 - 10x^5$.
   (c) $p_3(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 - 7}{3}$.
   (d) $p_4(x) = 0$.
   (e) $p_5(x) = 1$.
   (f) $p_6(x) = i^3x^3 + i^2x^2 + ix + i$.
   (g) $p_7(x) = 25x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.
   (h) $p_8(x) = 25x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Determine el grado del polinomio $p(x) = 6x^5 + (3x^3 - 2)^4(2x^5)^2$.

3. Determine $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$ y $p(x) \cdot q(x)$ si $p(x) = 4x^5 - 3x^2 + x$ y $q(x) = -x^3 - 2x + 3$.

4. Determine el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que los siguientes polinomios tengan como raíz el valor de c indicado.

   (a) $3x^3 - k\,x^2 + x - 66$, $c = 3$.
   (b) $4x^4 - 3kx^3 + 2kx - 5$, $c = -1$.

5. Divida los siguientes polinomios por el binomio $x - a$, donde el valor a se indica en cada caso. De acuerdo al valor del resto, decida si el valor de a corresponde o no a una raíz del polinomio.

   (a) $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$, $a = 2$.
   (b) $-4x^3 - 5 + ix^2 + (3+i)x^4 + 5x$, $a = i$.
   (c) $x^5 - 208x^2 + 2014$, $a = 5$.
   (d) $-4 + 4x + 3x^2 - 4x^3 + 4x^4$, $a = -1$.

2. Problemas intermedios

1. Sabiendo que para todo número real x se cumple la identidad $2x + 30 = m(x+1) + n(x-3)$, halle los valores de m y n.

2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifique según corresponda.

   (a) El grado del polinomio $(x^5 + x^2 - 1)^7$ es 12.
   (b) $x^{-2} + x^2 - x^5$ es un polinomio de grado 5.
   (c) Si $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = x + 3$, entonces $p \cdot q \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.
   (d) Sean $p,\ q$ polinomios. Si p y q son iguales, entonces $\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(q)$.

(e) Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un polinomio de grado 5 y se sabe que $1+2i$ y $-5i$ son raíces de este polinomio, entonces p tiene una raíz real.

(f) Para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ se cumple que si el grado de p es un número par, entonces p es una función par.

(g) Todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ satisface que su recorrido es $\mathbb{R}$.

(h) Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ un polinomio de grado mayor que cero. Entonces existe $s \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $s(x)p(x) = 1$.

(i) Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ un polinomio de grado mayor que cero. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $s \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $s(x)p(x) = 1$.

(j) **(A)** Si los grados de $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ son n y m ($n, m \in \mathbb{N}$) respectivamente, entonces la función compuesta $p \circ q$ es un polinomio de grado nm.

(k) Para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ se cumple que $\mathrm{gr}(p^2)$ es par.

(l) Si n es impar, entonces $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$.

3. Determine, si existe, el valor de k tal que $p(x) = 4x^2 - 8x + 2k + 1$ tenga una raíz igual al triple de la otra.

4. Dado el polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c$, determine para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que 5 y -1 son raíces de p.

5. **(A)** Sabiendo que 2 y $-i$ son ceros (o raíces) de $p(x) = x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 12x^2 + 8x - 8$, encuentre las raíces restantes en $\mathbb{C}$ y factorice en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ (como producto de polinomios de grado 1 o cero y coeficientes en $\mathbb{C}$).

6. Determine todas las raíces de $p(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$, sabiendo que -3 es raíz múltiple de p.

7. Se sabe que $1 - i$ es una raíz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raíces de p.

8. Se sabe que -2 es raíz múltiple de $p(x) = x^7 + 6x^6 + 12x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 192x + 128$. Determine las otras raíces de p y factorice en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

9. Determine todas las raíces del polinomio:

   (a) $p(x) = x^5 + 6x^4 + 15x^3 + 26x^2 + 36x + 24$, sabiendo que -2 es una raíz múltiple de p,

   (b) $p(x) = x^3 - 2(1+i)x^2 - (1-2i)x + 2(1+2i)$, sabiendo que $1 + 2\,i$ es una raíz de p,

   (c) $p(x) = x^4 + (1-i)x^3 - (4+i)x^2 - 4(1-i)x + 4i$, sabiendo que i y -1 son raíces de p,

   (d) $p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 2x + 12$, sabiendo que 1 y -2 son raíces de p.

10. Defina un polinomio con coeficientes reales y del menor grado posible tal que

    (a) **(A)** $-2i, 2$ y -3 sean sus raíces y -3 sea raíz triple.

    (b) $2 - i, 10 + i, \sqrt{7}$ y π sean raíces del polinomio.

    (c) su gráfico pase por los puntos $(1,0), (2,0), (5,0)$ y $(10,0)$.

11. **(A)** Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el polinomio $p(x) = x^3 - 9x + a$ tiene una raíz de multiplicidad 2.

12. Determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se cumple que $-x + 2$ es un factor de $x^3 - kx^2 + 3x - 5$.

13. Determine para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$ es divisible por $(x-3)(x+1)(x-1)$.

14. Sabiendo que el resto de dividir $x^5 - 32$ por $d(x)$ es 64 y el cociente es $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 16$, determine $d(x)$.

15. Determine, si es posible, dos elementos en cada uno de los siguientes conjuntos. Cuando no sea posible encontrar dos elementos en el conjunto, decida si es posible encontrar uno o no es posible encontrar ninguno. Justifique sus respuestas.

    (a) $\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, -2, 0, 5 \text{ son raíces de } p\}$.

(b) $\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, -4, 3, 0 \text{ son raíces de } p \wedge p(2) = -36\}$.

(c) $\{p \in \mathcal{P}_6(\mathbb{R}) \,:\, p \text{ es mónico} \wedge 0, 3 \text{ son raíces de multiplicidad 2 de } p\}$.

16. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ ocurre que el resto de dividir a $x^2 + ax + 4$ por $x + 1$ es igual al resto de dividirlo por $x - 1$.

17. **(A)** Sea $\mathcal{B} = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(0) + p'(0) = 0\}$. Determine:

    (a) Si para cada par de polinomios $p, q \in \mathcal{B}$, se cumple que $p + q$ es elemento $\mathcal{B}$.

    (b) Si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $p \in \mathcal{B}$ se cumple que λp es elemento de $\mathcal{B}$.

    (c) Si para cada par de polinomios $p, q \in \mathcal{B}$ se cumple que pq es elemento de $\mathcal{B}$.

3. Problemas avanzados

1. Sea el polinomio $p(x) = (3x - 1)^n + 5x + 1$. Si la suma de sus coeficientes es 70, determine el valor de $\sqrt{10 + n}$.

2. Sabiendo que la expresión reducida equivalente a $N(x) = \sqrt[n]{x^3 \sqrt{x^8}}$ es un polinomio de grado uno; halle el grado del polinomio $p(x) = \underbrace{x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \ldots}_{n \text{ términos}}$.