UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra III
525201
9 de abril de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 5

1. Demuestre que los siguientes subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ están en suma directa dos a dos, pero no como familia.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\} \\ S_2 &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\ S_3 &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

2. Demuestre que $T^2 = \Theta_{\mathcal{L}}$ si y solo si $Im(T) \subseteq Ker(T)$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, 0)$.

   a) Para todo $i = 1, \ldots, n$ hallar un subespacio T-invariante de dimensión i.

   b) Demuestre que no existen S y U subespacios T-invariantes propios tales que $\mathbb{R}^n = S \oplus U$.

4. **Definición:** *Un operador lineal D se dice idempotente si $D^2 = D$.*

   a) Demuestre que $L(x, y) = (x + y, 0)$ es idempotente.

   b) Demuestre que $Im(L) = S_1(L)$ y $Ker(L) = S_0(L)$.

   c) Concluya que L es diagonalizable.

5. Considere los siguientes operadores

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z, t) &= (x, x, x, t + x - z) \\ P_2(x, y, z, t) &= (y - x, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

   a) Demuestre que P_1 es idempotente y calcule su polinomio característico y espectro.

   b) Considere el operador $T = 3P_1 - P_2$. Calcule su polinomio característico y espectro.Demuestre que T es diagonalizable.

6. Considere el operador $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(a, b, c) = (a + b + c, b, c)$. Calcule su polinomio característico y espectro.Demuestre que F no es diagonalizable.

7. Considere $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz real cuadrada.

   a) Suponiendo que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, demuestre que entonces A tiene al menos un vector propio real asociado a λ. Indicación: use que cualquier vector en $\mathbb{C}^n$ se puede escribir de la forma $v + wi$, con $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   b) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un valor propio de A, demuestre que entonces todos los vectores propios de A asociados a z tienen alguna componente no real.

8. Sea $T : V \to V$ lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio, sea además A la matriz representante de T respecto a una base dada de V. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) λ^k es valor propio de T^k.

   b) Si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha\lambda$ es valor propio de αT.

   c) $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A y de A^t (A traspuesta).

   d) 0 es valor propio de T si y solo si T no es invertible.

   e) Si T es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.

9. Sea λ un valor propio de T no nulo, demuestre que $S_\lambda(T) \subseteq Im(T)$.

10. Sean T, L dos operadores lineales en un espacio de dimensión finita U tales que $L \circ T = id$, demuestre que ambos son invertibles y que uno es el inverso del otro.

11. Sea $T : V \to V$ un operador lineal y sea k el menor natural que cumple $T^k = id$. Determine si T es o no invertible y si lo es, calcule su inversa.

12. Demuestre que $Ker(T) \subseteq Ker(T^2) \subseteq \cdots \subseteq Ker(T^{k-1}) \subseteq Ker(T^k)$.

13. Demuestre que si A es una matriz triangular entonces todas sus potencias son triangulares, y si además es invertible, entonces su inversa también es triangular.