

Cálculo III
Cálculo integral de funciones de varias variables I:
Teoría de la integración n -dimensional
Módulo 4, Presentación 9

Raimund Bürger

4 de mayo de 2025

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es un **intervalo cerrado**, entonces un conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ se llama una **partición por puntos** del intervalo I . Para

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, m$$

el conjunto $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ de estos intervalos cerrados define una **partición por intervalos** de $[a, b]$ con las propiedades

$$I = \bigcup_{k=1}^m I_k, \quad I_k^0 \cap I_l^0 = \emptyset \text{ si } k \neq l,$$

donde I_k^0 denota el conjunto de los puntos interiores del intervalo I_k .

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Definición 4.1 Sean $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, y sea

$$I = [a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

un intervalo cerrado (ver Definición 1.3).

1. El siguiente número se llama **medida n -dimensional** o **contenido n -dimensional** de I :

$$\mu(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

2. Un conjunto $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ de intervalos cerrados se llama **partición de I** si

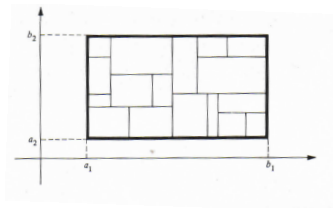
$$I = \bigcup_{k=1}^m I_k \quad \text{y} \quad I_k^0 \cap I_l^0 = \emptyset \text{ si } k \neq l,$$

donde I_k^0 denota el conjunto de los puntos interiores de I_k .

3. Sea $\delta(I_k)$ el diámetro de I_k , entonces $\|P\| := \max_{1 \leq k \leq m} \delta(I_k)$ se llama la **norma de la partición P** .

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Ejemplo de una partición de $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$:



Teorema 4.1 Si $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ es una partición de I , entonces

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^m \mu(I_k).$$

Demostración Tarea. ■

Definición 4.2 Se dice que una partición $P' = \{I'_1, \dots, I'_{m'}\}$ de I es un **refinamiento** de la partición $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ de I si para cada $I'_{k'}$, $k' = 1, \dots, m'$ existe un I_k , $k = 1, \dots, m$, tal que $I'_{k'} \subset I_k$.

Si P' es un refinamiento de P , entonces $\|P'\| \leq \|P\|$.

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Definición 4.3 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el intervalo cerrado $I \subset D(f)$, y sea $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ una partición de I .

1. Definimos las cantidades

$$m_k(f) := \inf_{I_k} f(x), \quad M_k(f) := \sup_{I_k} f(x),$$
$$m(f) := \inf_I f(x), \quad M(f) := \sup_I f(x).$$

2. Se define la **suma inferior de f con respecto a P**

$$\underline{S}_P(f) := \sum_P m_k(f) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m m_k(f) \mu(I_k).$$

3. Se define la **suma superior de f con respecto a P** :

$$\bar{S}_P(f) := \sum_P M_k(f) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m M_k(f) \mu(I_k).$$

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

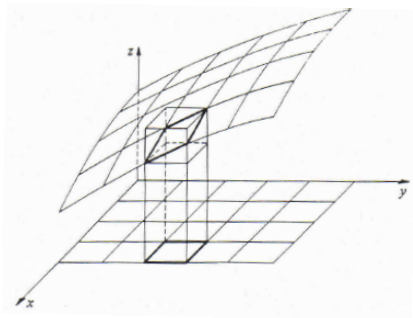


Figura: Sumas inferiores y superiores para una función f positiva, $n = 2$.

Teorema 4.2 Para cada partición se tiene que

$$m(f)\mu(I) \leq \underline{S}_P(f) \leq \bar{S}_P(f) \leq M(f)\mu(I).$$

Demostración Como $m(f) \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M(f)$ para $k = 1, \dots, m$, obtenemos el enunciado después de multiplicar por $\mu(I_k)$ y sumando los productos.

4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Los siguientes resultados son análogos a los enunciados para el cálculo de funciones de una variable. Presentamos estos teoremas sin demostración.

Teorema 4.3 Sea P' un refinamiento de P . Entonces

1. $\bar{S}_{P'}(f) \leq \bar{S}_P(f)$,
2. $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$.

Teorema 4.4 Sean P_1 y P_2 particiones de I , entonces

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \bar{S}_{P_2}(f).$$

4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

Los Teoremas 4.2 y 4.3 implican la existencia de las integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores.

Definición 4.4 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el intervalo cerrado I .

1. La siguiente expresión se llama **integral de Riemann-Darboux inferior** de la función f sobre el intervalo I :

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \sup_P \underline{S}_P(f).$$

2. La siguiente expresión se llama **integral de Riemann-Darboux superior** de la función f sobre el intervalo I :

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \inf_P \bar{S}_P(f).$$

4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

Teorema 4.5 Se tiene que

$$\int_I f(x) dx \leq \bar{\int}_I f(x) dx.$$

Demostración Tarea (utilizar Teorema 4.4). ■

La Definición 4.3 tiene como consecuencia que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$\underline{S}_P(f) > \int_I f(x) dx - \varepsilon; \quad \bar{S}_P(f) < \bar{\int}_I f(x) dx + \varepsilon.$$

4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

Sin embargo no es obvio que esta relación también es válida también para **todas** las particiones que posean una norma suficientemente pequeña.

Teorema 4.6 Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todas las particiones P de I con $\|P\| < \delta_\varepsilon$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_I f(x) dx - \varepsilon &< \underline{S}_P(f) \leq \int_I f(x) dx, \\ \int_I f(x) dx &\leq \bar{S}_P(f) < \int_I f(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

4.3. La integral de Riemann para intervalos

Mediante las integrales de Riemann-Darboux definiremos ahora la integral de Riemann para intervalos cerrados en \mathbb{R}^n .

Definición 4.5 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$. Si se tiene que

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx,$$

entonces f se llama **Riemann-integrable** sobre I . El valor común de las integrales superior e inferior se llama **integral de Riemann de f sobre I** , denotada

$$\int_I f(x) dx \quad \text{o} \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Para funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ también escribimos

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) \quad \text{y} \quad \iiint_I f(x, y, z) d(x, y, z).$$

4.3.La integral de Riemann para intervalos

Ejemplo 4.1 Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo cerrado. Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cada partición P de I se tiene entonces que

$$\underline{S}_P(f) = \sum_P \inf_{I_k} f(x) \mu(I_k) = 0,$$

$$\bar{S}_P(f) = \sum_P \sup_{I_k} f(x) \mu(I_k) = \sum_P \mu(I_k) = \mu(I) > 0,$$

por lo tanto f **no puede ser Riemann-integrable**.

4.3. La integral de Riemann para intervalos

Teorema 4.7 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre el intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f es Riemann-integrable sobre I .

Demostración Como que I es compacto, la función f es uniformemente continua sobre I , por lo tanto para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo $x', x'' \in I$ con $d(x', x'') < \delta_\varepsilon$ se tiene que

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(I)}.$$

4.3.La integral de Riemann para intervalos

Demostración del Teorema 4.7 (continuación)

Sea ahora $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ una partición de I tal que $\|P\| < \delta_\varepsilon$.
Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I^{\bar{}} f(x) \, dx - \int_I f(x) \, dx \\ &\leq \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \\ &= \sum_{k=1}^m M_k(f) \mu(I_k) - \sum_{k=1}^m m_k(f) \mu(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\max_{I_k} f(x) - \min_{I_k} f(x) \right) \mu(I_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{\mu(I)} \sum_{k=1}^m \mu(I_k) < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3.La integral de Riemann para intervalos

Teorema 4.8 Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo cerrado y sea c una constante. Entonces

$$\int_I c \, dx = c \cdot \mu(I).$$

En particular, para $c = 1$,

$$\mu(I) = \int_I dx.$$

Demostración Sea $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ una partición arbitraria de I . Entonces

$$\bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^m c \cdot \mu(I_k) = c \sum_{k=1}^m \mu(I_k) = c \cdot \mu(I),$$

por lo tanto según el Teorema 4.7

$$\int_I c \, dx = c \cdot \mu(I). \quad \blacksquare$$

4.4. Sumas de Riemann

Definición 4.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$, y sea $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ una partición de I ; además, sea $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ un conjunto de puntos tales que $\xi_k \in I_k$ para $k = 1, \dots, m$. Entonces

$$S_P(f, \xi) = \sum_P f(\xi_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \mu(I_k)$$

se llama **suma de Riemann de f respecto a P** .

Las sumas superiores e inferiores, en general, **no son sumas de Riemann** porque no necesariamente los valores $M_k(f)$ y $m_k(f)$ **deben ser asumidos** por f sobre I_k . Además, tal como en la teoría de funciones de una variable se tiene ahora que

$$\underline{S}_P(f) \leq S(f, \xi) \leq \bar{S}_P(f).$$

La convergencia de las sumas de Riemann se define de manera análoga al cálculo de las funciones de una variable.

4.4. Sumas de Riemann

Definición 4.7 Sea la función f acotada sobre el intervalo cerrado I . Si existe un número $J \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para cada partición $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ de I con $\|P\| < \delta_\varepsilon$, con $\xi_k \in I_k$ elegido arbitrariamente, se tiene que

$$|S_P(f, \xi) - J| < \varepsilon,$$

entonces se dice que las sumas de Riemann **convergen a J** :

$$J = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

4.4. Sumas de Riemann

El próximo teorema, cuya demostración es análoga al cálculo de funciones de una variable y por lo tanto omitida, muestra que la convergencia de las sumas de Riemann es **equivalente** con la **existencia de la integral de Riemann**.

Teorema 4.9 Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo cerrado.

1. Si f es Riemann-integrable sobre I , entonces existe el límite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi)$, y se tiene que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi) = \int_I f(x) dx.$$

2. Por otro lado, si existe el límite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi)$, entonces f es Riemann-integrable sobre I y se tiene que

$$\int_I f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

4.5. Integrales iteradas

Ahora introduciremos un **método práctico** para la computación de una integral n -dimensional. Basicamente reemplazaremos la integración n -dimensional por n integraciones unidimensionales.

Teorema 4.10 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable sobre el rectángulo $I := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

1. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ existe la integral

$$\int_c^d f(x, y) dy.$$

Entonces existe la integral iterada

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

y se tiene que

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

4.5. Integrales iteradas

Teorema 4.10 (continuación)

2. Supongamos que para cada $y \in [c, d]$ existe la integral

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

Entonces existe la integral iterada

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

y se tiene que

$$\int_I \int f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

4.5. Integrales iteradas

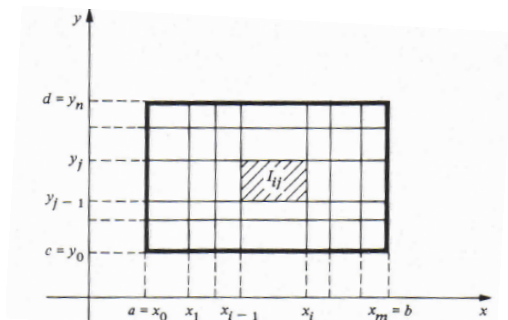
Demostración del Teorema 4.10 Consideremos las siguientes particiones por puntos de los intervalos respectivos $[a, b]$ y $[c, d]$:

$$P_x = \{x_0, \dots, x_m\}, \quad P_y = \{y_0, \dots, y_n\}.$$

Así, el conjunto de los rectángulos

$$I_{ij} := \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

forma una partición $P = \{I_{ij}\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ del rectángulo I :



4.5. Integrales iteradas

Demostración del Teorema 4.10 (continuación) Como siempre,

$$m_{ij} := \inf_{I_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} := \sup_{I_{ij}} f(x, y).$$

Según el Teorema 4.6 podemos elegir para $\varepsilon > 0$ dado $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todas particiones P_x y P_y tales que $\|P_x\| < \delta_\varepsilon$ y $\|P_y\| < \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \underline{S}_P(f) &> \iint_I f(x, y) \, d(x, y) - \varepsilon, \\ \bar{S}_P(f) &< \iint_I f(x, y) \, d(x, y) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.1}$$

1. Consideremos sobre el intervalo $[a, b]$ la función

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

4.5. Integrales iteradas

Demostración del Teorema 4.10 (continuación)

1. Esta función es acotada sobre $[a, b]$, y podemos formar la suma de Riemann (en el sentido de funciones de una variable)

$$S_{P_x}(F, \xi) = \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Evidentemente se tiene que

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \quad \text{para todo } y \in [y_{j-1}, y_j].$$

Ahora, integrando sobre $[y_{j-1}, y_j]$ obtenemos

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) \, dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

4.5. Integrales iteradas

Demostración del Teorema 4.10 (continuación)

1. Multiplicando por $(x_i - x_{i-1})$, sumando sobre j y luego sobre i obtenemos

$$\begin{aligned}\underline{S}_P(f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \mu(I_{ij}) \leq \sum_{i=1}^m \left[\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \mu(I_{ij}) = \bar{S}_P(f).\end{aligned}$$

Concluimos que en virtud de (4.1) para cada P_x tal que $\|P_x\| < \delta_\varepsilon$ y cada selección de los ξ_i

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) - \varepsilon \leq S_{P_x}(F, \xi) \leq \iint_I f(x, y) d(x, y) + \varepsilon,$$

es decir la afirmación (1) del teorema es válida.

2. La demostración de (2) es análoga. ■

4.5. Integrales iteradas

Comentamos que la existencia de las integrales iteradas

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (4.2)$$

no necesariamente implica la existencia de

$$\iint_I f(x, y) d(x, y). \quad (4.3)$$

Vice versa, la existencia de (4.3) no necesariamente implica la existencia de las integrales iteradas (4.2).

Si f es continua sobre $I := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces para cada $x \in [a, b]$ y cada $y \in [c, d]$ existen las respectivas integrales

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x, y) dx,$$

además f es Riemann-integrable (según el Teorema 4.7) sobre I .

4.5. Integrales iteradas

Entonces, en virtud del Teorema 4.10,

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

es decir podemos **intercambiar el orden de las integraciones de las integrales iteradas (Teorema de Fubini)**.

Finalmente, comentamos que si la función f tiene la forma

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y),$$

donde f_1 es continua sobre $[a, b]$ y f_2 es continua sobre $[c, d]$, entonces

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

4.5. Integrales iteradas

Ejemplo 4.2 Sea $I := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$, y sea f definida sobre I por $f(x, y) = x^y$. Como f es continua sobre I , el Teorema 4.10 nos permite concluir que

$$\iint_I x^y \, d(x, y) = \int_1^2 \left[\int_0^1 x^y \, dx \right] dy.$$

Aquí obtenemos

$$\int_0^1 x^y \, dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$$

y por lo tanto

$$\iint_I x^y \, d(x, y) = \int_1^2 \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{3}{2}.$$

4.5. Integrales iteradas

Teorema 4.11 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable sobre el intervalo $I := \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$, además definimos para cada ν , $1 \leq \nu \leq n$

$$I_{x_\nu} := \{(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, i \neq \nu\}.$$

1. Si para cada $x_\nu \in [a_\nu, b_\nu]$ existe la integral

$$\int_{I_{x_\nu}} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n),$$

también existe la integral iterada

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} \left[\int_{I_{x_\nu}} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \right] dx_\nu,$$

y esta integral posee el valor $\int_I f(x) dx$.

4.5. Integrales iteradas

Teorema 4.11 (continuación)

2. Si para cada $(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in I_{x_\nu}$ existe la integral

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) dx_\nu,$$

también existe la integral iterada

$$\int_{I_{x_\nu}} \left[\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) dx_\nu \right] d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)$$

y esta integral posee el valor $\int_I f(x) dx$.

Demostración La demostración es análoga a la del Teorema 4.10.



4.5. Integrales iteradas

Ejemplo 4.3 Sea $I := \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$, y sea f definida sobre I por $f(x, y, z) = x + y + z$. Como f es continua sobre I , según el Teorema 4.11 para $I_z := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ se tiene que

$$\mathcal{I} := \iiint_I (x + y + z) \, d(x, y, z) = \int_2^4 \left[\iint_{I_z} (x + y + z) \, d(x, y) \right] dz.$$

La integral interior puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$\iint_{I_z} (x + y + z) \, d(x, y) = \int_0^1 \left[\int_0^2 (x + y + z) \, dx \right] dy, \quad \text{así que}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_2^4 \left[\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y + z) \, dx \right) dy \right] dz \\ &= \int_2^4 \left[\int_0^1 (2 + 2y + 2z) \, dy \right] dz = \int_2^4 (3 + 2z) \, dz = 18. \end{aligned}$$