Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 05: Dominios a ideales principales y euclidianos
Álgebra con Software (527282)

Todos los anillos considerados son conmutativos y unitarios.

1. Si A es dominio entero, mostrar que hay cancelación en la multiplicación: es decir, si $x \neq 0$ entonces $xy = xz \Rightarrow y = z$.

2. Considerar el anillo $\mathbb{Z}[x]$. Mostrar:

   a) x es irreducible.

   b) La inclusión $(x) \subset (2, x)$ es propia.

   c) El ideal $(2, x)$ es propio.

   Concluir que x es irreducible pero el ideal (x) no es maximal.

3. Mostrar: en un dominio de ideales principales, si x es irreducible entonces (x) es maximal.

4. Mostrar: en un dominio de ideales principales, todo ideal primo distinto de (0) es maximal.

5. Corolario: si un anillo de polinomios $A[x]$ es un dominio de ideales principales, entonces A es un campo. *(Indicación: considerar el homomorfismo evaluación en* $x = 0$*: su kernel es el ideal primo* (x)*, ¿qué resulta al aplicar el primer teorema de isomorfismo?*

6. Mostrar: en un dominio euclidiano con función euclidiana f, si x es invertible entonces $f(x) = f(1)$.

7. Mostrar: en un dominio euclidiano con función euclidiana f, si $f(x) = f(1)$ entonces x es invertible.

8. Mostrar: si A es un dominio euclidiano que no es un campo, existe $x \in A$ no invertible tal que toda clase no nula de $A/(x)$ es representada por un invertible.

Mini proyecto: extensión de $\mathbb{Z}$ con el número de oro

Considerar el número φ, la solución positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Considerar el anillo

$$\mathbb{Z}[\varphi] = \{a + b\varphi \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Es sabido que este anillo es un dominio euclidiano con función euclidiana

$$f(a + b\varphi) = |a^2 + ab - b^2|$$

Por medio de un ejemplo, se mostrará cómo conectar la aritmética modular "clásica" (en $\mathbb{Z}$) con la aritmética modular sobre $\mathbb{Z}[\varphi]$.

9. Verificar que f es *multiplicativa*: es decir, $f(xy) = f(x)f(y)$.
10. Verificar que la función $G : \mathbb{Z}[\varphi] \to \mathbb{Z}[\varphi]$ que envía φ a $1 - \varphi$ puede ser extendida a un homomorfismo.
11. Mostrar: el homomorfismo del ejercicio anterior es un isomorfismo. ¿Cuál es su inversa?
12. Verificar: este isomorfismo preserva la función euclidiana: $G(x) = f(G(x))$ para cualquier x.
13. Usando la función euclidiana, mostrar que $-3 + 2\varphi$ es invertible en $\mathbb{Z}[\varphi]$.
14. Mostrar que la función $h : \mathbb{Z}[\varphi] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dada por $h(a + b\varphi) = a + 3b$ es un homomorfismo de anillos.
15. Usando la factorización $(a + 3b)(a - 2b) = a^2 + ab - 6b^2$, mostrar que si $x \in \ker h$ entonces $f(x)$ es divisible por 5.
16. Usando el punto anterior, encontrar un generador para $\ker h$.
17. Determinar $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$ tal que

$$\mathbb{Z}[\varphi]/(x) \cong \mathbb{Z}/(5)$$