UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ignacio Ruminot Aburto.

TAREA 3 (Optativa)
CÁLCULO III - 525211

Problema 1 (Una nueva forma de calcular áreas de Polígonos). Considere $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^2$, con U un conjunto acotado de frontera ∂U poligonal, cuyos vértices son $\{(x_i, y_i) = v_i\}_{i=1}^n$ (con $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$) y cuyos lados son los segmentos $\mathcal{C}_i = \overline{v_i v_{i+1}}$ (donde $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $v_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = v_1$).

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $F(x,y) = (-y, x)$. Parametrizando el segmento $\mathcal{C}_1$ desde v_1 hacia v_2, determine el valor de
$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr$$

2. Aplicando el Teorema de Green, demuestre que el área de U, $A(U)$, esta dada por:
$$A(U) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Indicación: Recuerde que $x_{n+1} = x_1$ y que $y_{n+1} = y_1$.

Problema 2. Sea S la superficie de las capas de una turbina parametrizada por la ecuación $\varphi(u,v) = (u\cos v, u \sin v, v)$ para $u \in [0,1]$ y $v \in [0, 6\pi]$. Sea F el campo de velocidad del agua que esta dado por:
$$F(x,y,z) = \left(-y + \left(x^2+y^2-1\right), x + \left(x^2+y^2-1\right), \left(x^2+y^2-1\right)\right).$$
Calcular la potencia de la turbina $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \, dS$.

Indicación: El borde de la superficie consiste en 3 segmentos de recta y una hélice. El segmento inferior esta parametrizado por $\varphi(t) = (t, 0, 0)$, $t \in [0,1]$.

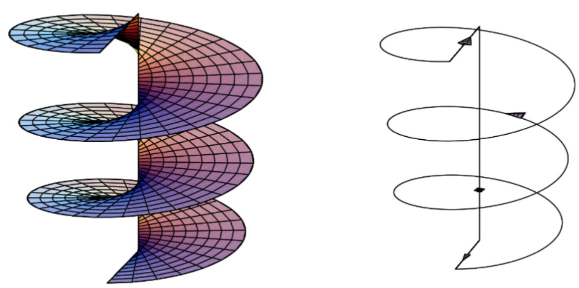

Figura 1: Parametrización de S

Problema 3. Un Globo aerostático tiene forma de esfera truncada, donde su superficie esta descrita por:
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 29, \ z \geq 5\}.$$
Los gases calientes escapan por la superficie porosa a una velocidad:
$$V(x,y,z) = \nabla \times F, \quad \text{donde } F(x,y,z) = (-y, x, \sin(xyz)).$$
Calcule el flujo volumétrico $\displaystyle\iint_\Omega V \cdot \mathbf{n} \, dS$ a través de la superficie

Problema 4 (Integración por Partes en $\mathbb{R}^n$). Considere la siguiente version del Teorema de la Divergencia de Gauss en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1 (de la Divergencia). Sea $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con Ω un abierto conexo de frontera $\partial\Omega$ suave a trozos. Sea $G \in \left[\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)\right]^n$ un campo vectorial y n el vector normal exterior a $\partial\Omega$, entonces

$$\int_\Omega \operatorname{div}(G)\, dV = \int_{\partial\Omega} G \cdot n\, dS$$

---

1. Sean $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$. Defina $G = uve_i$, donde e_i es el i-esimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Demuestre que

$$\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\; n_i\, dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

donde n_i es el coeficiente de la componente i-sima de n.

2. Si ahora $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, demuestre que

$$\int_\Omega v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\; n_i\, dS - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

y concluya que

$$-\int_\Omega v \triangle u\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} v \left(\nabla u \cdot n\right)\, dS$$