

EVALUACIÓN 2 - CÁLCULO I
 (527140)

1. (15 ptos) Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Resp.

Puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -(\sqrt{x}+1)(x+1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2x-3}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+3) = -4 \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4$$

(10 ptos)

(b) ¿Es f continua en $x = 1$? Justifique su respuesta.

Resp. Como $f(1) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4$, entonces f no es continua en $x = 1$.

(05 ptos)

2. (25 ptos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + 5}{2x - 1}, & \text{si } x < 0 \\ 3x - 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - x}}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- (a) Encuentre todas las asíntotas para la gráfica de f .

Resp.

i. **Asintota vertical.**

La única posible asíntota vertical es la recta $x = 1$.

Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - x}} = 2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 2$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe (es finito) por lo que la recta $x = 1$ **no es** asíntota vertical.

Así, la gráfica de f no tiene asíntota vertical

(03 ptos)

ii. **Asintota Horizontal.**

Puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - x}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces la gráfica de f admite asíntota horizontal en $+\infty$, y es la recta $y = 1$.

Por otro lado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x - 1} = -\infty$$

luego la gráfica de f **no admite** asíntota horizontal en $-\infty$.

(03 ptos)

iii. **Asintota Oblicua**

Como la gráfica de f admite asíntota horizontal en $+\infty$, entonces **no** tiene asíntota oblicua en $+\infty$

Por otro lado, ya que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 5}{x(2x - 1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{4x^2 + 5}{(2x - 1)} \right) - 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(2x + 5)}{2x - 1} \right) = 1 \end{aligned}$$

entonces la recta de ecuación

$$y = 2x + 1$$

es asíntota oblicua para gráfica de f en $-\infty$.

(03 ptos)

- (b) Estudie la continuidad de f en $[0, 2]$.

Resp. Se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\frac{x+3}{x}}, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Claramente f es continua en $]0, 1[\cup]1, 2[$.

(03 ptos)

- Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ y $f(1) = 2$, entonces f es continua en $x = 1$

(03 ptos)

Además,

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 1) = -1$, y $f(0) = -1$
por lo que f es continua por la derecha en $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ y $f(2) = \sqrt{\frac{5}{2}}$
por lo que f es continua por la izquierda en $x = 2$

Así, concluimos que f es continua en $[0, 2]$

(04 ptos)

- (c) Decida si la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en el intervalo $]0, 2[$.

Resp. De lo anterior, f es continua en $[0, 2]$.

Y puesto que $f(0) = -1$ y $f(2) = \sqrt{\frac{5}{2}}$, entonces $f(0) \times f(2) < 0$

Luego, por Bolzano (aplicación del teorema del valor intermedio), existe un $c \in]0, 2[$ tal que $f(c) = 0$.

(06 ptos)

3. (20 ptos)

Sea f la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{2x}, & x < 0 \\ kx, & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Determine un valor de k tal que f sea derivable en $x_0 = 0$.

Resp.

1. Se tiene que $f(0) = 0$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{kx}{x} = k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - \cos x}{2x}}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe si, y solo si, $k = \frac{1}{4}$.

Esto es, f es derivable en $x = 0$ si y solo si $k = \frac{1}{4}$, con $f'(0) = \frac{1}{4}$

(13 ptos)

- (b) Usando el valor k encontrado, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(0, f(0))$.

Resp. La recta tangente T a la gráfica de f en $(0, f(0))$ es:

$$T : y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

como $f(0) = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{4}$

$$T : y = \frac{1}{4}x$$

(07 ptos)