UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Examen Adicional. Análisis Real II (525302)

NOMBRE:

TIEMPO: **105 minutos**

P1	Observaciones
P2	Observaciones
P3	Observaciones
NOTA	Observaciones

- Todos los artefactos electrónicos como calculadoras, celulares, smartwatches, etc tienen que estar apagados y guardados.
- No se puede conversar e intercambiar información con sus pares, o con personas que se encuentren en el exterior de la sala.
- La Nota Parcial se calcula como el mínimo entre 60 y la suma de los puntos obtenidos en las preguntas 1,2 y 3. La Nota Final es igual a 1 sumado con la Nota Parcial dividida por 10.

1. **(20 puntos)** Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que dos σ-álgebras $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ contenidas en $\mathcal{F}$ son independientes si y solo si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

para todo $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$.

Considere la σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Suponga que para todo $j \in J$, donde J es un conjunto dado (puede ser no numerable), $X_j : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una variable aleatoria. Asuma que para cualquier subconjunto finito $\{j_1, \ldots, j_p\} \subset J$, $\mathcal{G}$ es independiente de $\sigma\left(X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}\right)$, que es la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual $X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}$ son medibles. Demuestre que $\mathcal{G}$ es independiente de la menor σ-álgebra sobre Ω con respecto a la cual todos los X_j con $j \in J$ sean medibles.

Recuerde:

Theorema 1 *Supongamos que $\mathcal{K}$ es una familia de subconjuntos de Ω que contiene al subconjunto $\emptyset$ y satisface: $A \cap B \in \mathcal{K}$ cuando $A, B \in \mathcal{K}$. Sea τ la menos familia de subconjuntos de Ω tal que: (i) $\mathcal{K} \subset \tau$; (ii) si $A \in \tau$, entonces $A^c \in \tau$; y (iii) si $A_1, A_2, \ldots \in \tau$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$, entonces*

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \tau.$$

Entonces $\tau = \sigma(\mathcal{K})$.

2. Sea μ una medida positiva sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Supongamos que las funciones $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ son medibles, donde $n \in \mathbb{N}$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

(b) **(5 puntos)** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente convergente μ-c.d.

(c) **(10 puntos)** Demuestre que

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

3. **(20 puntos)** Sean μ_1, μ_2 medidas positivas sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Sean $f_1, f_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ funciones medibles no negativas. Para todo $A \in \mathcal{F}$ se define
$$\lambda_k\left(A\right) = \int_A f_k \, d\mu_k$$
con $k = 1, 2$. Demuestre que
$$\lambda_1 \otimes \lambda_2 = \lambda,$$
donde
$$\lambda\left(B\right) = \int_A f_1\left(\omega_1\right) \, f_2\left(\omega_2\right) \, d\mu_1 \otimes \mu_2\left(\omega_1, \omega_2\right)$$
para todo $B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$.