La Derivada (parte 2)

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Derivable $\implies$ continua

Teorema

Teorema 1

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I y $a \in I$. Si f es derivable en a entonces es f es continua en a.

Dem. Suponiendo que $f'(a)$ existe, se sigue que

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] = f'(a)\cdot 0 = 0$$

lo que muestra que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a.

Observación 1. Del teorema se tiene que si f es **discontinua** en a entonces f **no es derivable** en a.
Observación 2. **El recíproco no es cierto**: $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable en 0. Otro ejemplo es $f(x) = x^{1/3}$.

Teorema 2

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo abierto I y derivables en $a \in I$. Se tiene entonces que $f+g$, kf $(k \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ son derivables en a cuyas derivadas son:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(kf)'(a) = kf'(a)$
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Dem. Tarea.

Reglas de derivación

Aplicaciones

- **Ejemplo 1.** $\dfrac{d}{dx}[x^3]$
  En general, si $k \in \mathbb{R}$ entonces usando la propiedad 1. y 2. $\dfrac{d}{dx}[kx^n] = nkx^{n-1}$. Así, usando la propiedad 4. la derivada de un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ es

$$\frac{d}{dx}[p(x)] = na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

- **Ejemplo 2.** Calculamos $\dfrac{d}{dx}[\tan(x)]$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right] &= \frac{\frac{d}{dx}[\sin(x)]\cos(x) - \sin(x)\frac{d}{dx}[\cos(x)]}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Reglas de derivación

Aplicaciones

Como $\sin^2(x) + \cos(x) = 1$, luego la derivada de tangente es

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

en $\left\{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Tarea. Mostrar las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sec(x)] &= \sec(x)\tan(x) \\
\frac{d}{dx}[\cot(x)] &= -\csc^2(x) \\
\frac{d}{dx}[\csc(x)] &= -\csc(x)\cot(x)
\end{aligned}$$

- **Ejemplo 4.** Usando la propiedad del cociente, podemos calcular la derivada de funciones de la forma $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[1]x^n - 1\frac{d}{dx}[x^n]}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

De este modo, tenemos que $\forall n \in \mathbb{Z} : \dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$.

Problema: *¿Cómo derivar la función* $f(x) = (x^2+1)^{100}$ *sin expandir su fórmula?*

Teorema 3

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables con $f(I) \subset J$. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en I con

$$\frac{d}{dx}[(g \circ f)(x)] = g'(f(x))f'(x).$$

Observación. En el teorema se asume que la composición $g \circ f$ está bien definida en el intervalo abierto I, si $a \in I$, asumiremos que $f(x) \neq f(a)$ para todo x próximo a a, $x \neq a$.

Regla de la cadena
Aplicaciones

El teorema anterior se puede reinterpretar como relaciones de variables dependientes e independiente. Consideremos las funciones f y g en el teorema como

$$y = f(x), \qquad z = g(y),$$

luego composición $g \circ f$ nos entrega una relación entre las variables x e z como $z = g(f(x))$.

Siendo las derivadas $\dfrac{dz}{dy} = g'(y)$, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ y $\dfrac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x)$, se cumple que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Regla de la cadena

Ejemplos

Ejemplo 1. Calculamos la derivada de $f(x) = (x^2+1)^{100}$. Para ello, consideramos f como la composición de las funciones $g(x) = x^{100}$ y $h(x) = x^2 + 1$. Luego, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[g(h(x))] = g'(h(x))h'(x) &= 100(x^2+1)^{99}(2x) \\ &= 200x(x^2+1)^{99}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcular $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{2x^2+4x}]$.

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{2x^2+4x}] = \frac{1}{2}(2x^2+4x)^{-1/2}(4x+4) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2+4x}}.$$

Ejemplo 3. Calcular $\dfrac{d}{dx}[\sin(x^2)]$ y $\dfrac{d}{dx}[\sin^3(x)]$.

Ejemplo 4. Calcular $\dfrac{d}{dx}[\tan^2(x^3)]$.

Ejemplo 5. Calculamos $\dfrac{d}{dx}[x^r]$, donde r es un número racional.

Luego, si $r = \dfrac{p}{q}$ con $p \in Z$ con $q > 0$ entonces $x^r = (x^p)^{1/q}$ y por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[(x^p)^{1/q}] = \frac{1}{q}(x^p)^{1/q-1}(px^{p-1}) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

De este modo, para todo $r \in \mathbb{Q}$ $\quad \dfrac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$.

Derivadas de orden superior

Definición

Definición 1.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ con derivada $f' : J \to \mathbb{R}$ con I, J intervalos abiertos tales que $J \subseteq I$. En un punto $a \in J$, se define la segunda derivada de f en a por

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

Observación. Es claro que f'' es la derivada de f', por lo que para calcular $f''(a)$ son válidas todas las reglas de derivación vistas.

Ejemplo. Si $f(x) = x^3$, entonces $f''(x) = (3x^2)' = 6x$.

Derivadas de orden superior

Observación. De manera inductiva, si la derivada de orden $(n-1)$ de f, que se denota por $f^{(n-1)}$, existe en un intervalo I tal que $a \in I$, se define la derivada de orden n de f en el punto a por

$$f^{(n)}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(a)}{x-a}$$

cuando este límite existe.

Ejercicio 1. Calcular las derivadas de orden superior de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^3 + x^2 + x$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$ (hasta la tercera derivada)

Ejemplo. Calcular la segunda derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Para todo $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Así, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Notar que f' no es continua en 0 por lo que $f''(0)$ no existe.