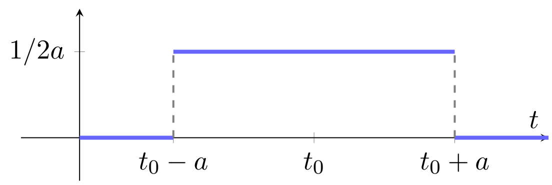
1.5 Función Delta de Dirac

Consideremos la función definida por partes:

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < t_0 - a, \\ \dfrac{1}{2a} & \text{si} \quad t_0 - a \leq t < t_0 + a, \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t_0 + a, \end{cases}$$

cuya gráfica está dada por:

Función $\delta_a(t-t_0)$.



Notemos que esta función tiene la propiedad de integración:

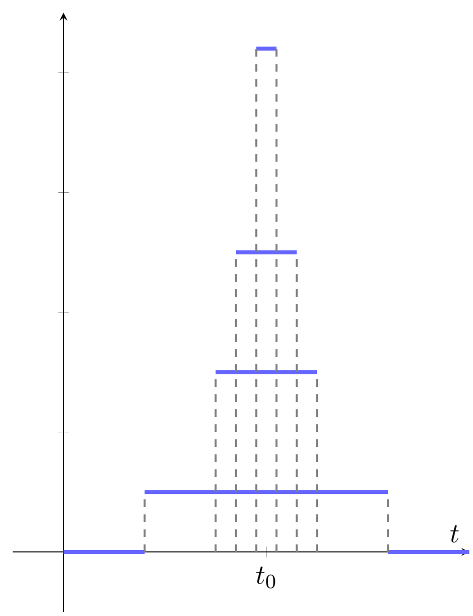
$$\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt = 1.$$

En términos de la función de Heaviside podemos escribir:

$$\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\left(H(t-(t_0-a)) - H(t-(t_0+a))\right).$$

Si fijamos el punto t_0 y estudiamos el comportamiento cuando $a \to 0$, gráficamente ocurre lo siguiente:

Comportamiento de $\delta_a(t-t_0)$ cuando $a \to 0$.



La Delta de Dirac es una función generalizada (una distribución) dada por:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0),$$

y que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad t = t_0, \\ 0 & \text{si} \quad t \neq t_0. \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Usando las propiedades de las transformadas de Laplace podemos demostrar que:

Definición

Para $t_0 \geq 0$, la transformada de Laplace de la Delta de Dirac es:

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}$$

Informalmente, desde el 2do teorema de traslación tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}(s) &= \frac{1}{2a}\left(\mathcal{L}\{H(t-(t_0-a))\}(s) - \mathcal{L}\{H(t-(t_0+a))\}(s)\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left(e^{-(t_0-a)s}\frac{1}{s} - e^{-(t_0+a)s}\frac{1}{s}\right) \\ &= e^{-t_0 s + as}\left(\frac{1-e^{-2as}}{2as}\right). \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \lim_{a\to 0} \mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}(s) &= \frac{1}{2a}\left(\mathcal{L}\{H(t-(t_0-a))\}(s) - \mathcal{L}\{H(t-(t_0+a))\}(s)\right) \\ &= e^{-t_0 s}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.16. *Determine la solución del siguiente PVI:*

$$\begin{aligned} & y'' + 16y = \delta(t-2\pi), \\ & y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Primero aplicamos la transformada de Laplace a la EDO dada:

$$s^2 Y(s) - s + 16Y(s) = e^{-2\pi s} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{s}{s^2+16} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+16}.$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace a esta última expresión:

$$y(t) = \cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(4(t-2\pi))H(t-2\pi) = \begin{cases} \cos(4t), & 0 \leq t < 2\pi, \\ \cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(4t), & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Ejercicio: Determine la solución del siguiente PVI:

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 3y = \delta(t-2), \\ & y(0) = 2, y'(0) = 0. \end{aligned}$$

1.6 Derivada de la transformada

Sea f una función de orden exponencial tal que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s).$$

Entonces, si suponemos que podemos intercambiar derivadas e integrales (cuando esto tenga sentido)

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt.\end{aligned}$$

Luego, deducimos que

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}(s)$$

Más generalmente,

$$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s)$$

La propiedad anterior nos permite resolver ecuaciones de tipo Cauchy-Euler.

1.7 Transformadas de Integrales

Definición

Sea f y g funciones continuas por tramos en $[0,\infty[$. Se define el producto convolución de estas funciones por

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Ejemplo 1.17. *Determine la convolución entre las funciones $f(t) = e^t$ y $g(t) = \cos(t)$.*

Tenemos que:

$$(f*g)(t) = \int_0^t e^u\cos(t-u)du = \frac{1}{2}(\sin(t)+e^t-\cos(t)).$$

Propiedades: Sean f, g, h tres funciones definidas a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces,

1. Conmutatividad: $f*g = g*f$
2. Asociatividad: $f*(g*h) = (f*g)*h$
3. Distributividad: $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$

Teorema 1.7

Sea f y g dos funciones continuas por tramos en $[0,\infty[$ y de orden exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\{f*g\}(s) = F(s)G(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f*g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$.

Ejemplo 1.18. *Queremos calcular la transformada de Laplace inversa de:*

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b, \text{ arbitrarios.}$$

Hemos visto tres formas de hacerlo:

– **Fraccion partiales**

Descomponemos:

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

Resolviendo

$$1 = A(s-b) + B(s-a)$$

nos queda que $A = \dfrac{1}{a-b}$ *y* $B = -\dfrac{1}{a-b}$, *es decir*

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

Aplicando la transformada inversa y usando linealidad de la misma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}(t) = \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

– **Teorema de traslación**

Antes de aplicar el primer teorema de traslación, debemos completar cuadrados para obtener una transformada con traslación:

$$(s-a)(s-b) = s^2 - (a+b)s + ab = \left(s - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{4} + ab$$

Aplicamos directamente la fórmula:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{4ab-(a+b)^2}{4}}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{\frac{a-b}{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{a-b}{2}}{\left(s - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\right\}(t) \\
&= \frac{2}{a-b}e^{\frac{a+b}{2}t}\sinh\left(\frac{a-b}{2}t\right),
\end{aligned}$$

que se puede verificar que coincide con el resultado anterior.

– **Convolución**

Usamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\}(t) \\
&= \left(e^{at} * e^{bt}\right)(t) = \int_0^t e^{au}e^{b(t-u)}\,du \\
&= e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)u}\,du = e^{bt}\cdot\frac{e^{(a-b)t}-1}{a-b} = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. *Determine la transformada de Laplace de:* $e^t * \cos(t)$*:*

$$\mathcal{L}\left\{e^t * \cos(t)\right\}(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{s}{(s^2+1)}.$$

Ejemplo 1.20. *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) \quad = \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+2} \cdot \frac{1}{s+2}\right\}(t)$$

Si denotamos $F(s-1) = \frac{s}{(s-1)^2+2}$ *y* $G(s) = \frac{1}{s+2}$*, tenemos que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)G(s)\right\}(t).$$

Aplicando el Teorema de la transformada de la convolución, sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)G(s)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}(t), \tag{3}$$

con

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) = e^{-2t},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)\right\}(t) &= e^t\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \\
&= e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}(t) \\
&= e^t\left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right).
\end{aligned}$$

Desde (3)*, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}(t) \\
&= e^{-2t} * e^t\left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right) \\
&= \int_0^t e^{-2(t-u)}e^u\left(\cos(\sqrt{2}u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du \\
&= e^{-2t}\int_0^t e^{3u}\left(\cos(\sqrt{2}u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du
\end{aligned}$$

Resolviendo esta última integral por partes, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{3u}\left(\cos(\sqrt{2}u)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du &= \tfrac{1}{3}e^{3t}\left(\cos(\sqrt{2}t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)-\tfrac{1}{3}\\
&\quad -\tfrac{\sqrt{2}}{3}\int_0^t e^{3u}\left(-\sin(\sqrt{2}u)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}u)\right)du\\
&= \tfrac{1}{3}e^{3t}\left(\cos(\sqrt{2}t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)-\tfrac{1}{3}\\
&\quad -\tfrac{\sqrt{2}}{9}e^{3t}\left(-\sin(\sqrt{2}t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t)\right)+\tfrac{1}{9}\\
&\quad -\tfrac{2}{9}\int_0^t e^{3u}\left(\cos(\sqrt{2}u)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du\\
\left(1+\frac{2}{9}\right)\int_0^t e^{3u}\left(\cos(\sqrt{2}u)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du &= \tfrac{1}{3}e^{3t}\left(\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\cos(\sqrt{2}t)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\tfrac{2}{3}\right)\sin(\sqrt{2}t)\right)-\tfrac{2}{9}\\
\int_0^t e^{3u}\left(\cos(\sqrt{2}u)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u)\right)du &= e^{3t}\left(\tfrac{2}{11}\cos(\sqrt{2}t)+\tfrac{5}{11\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)-\tfrac{2}{11}
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-1)\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}(t)\\
&= e^t\left(\frac{2}{11}\cos(\sqrt{2}t)+\frac{5}{11\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)-\frac{2}{11}e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Con fracciones parciales *Si elegimos calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t)$ *aplicando fracciones parciales:*

Separamos

$$
\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}=\frac{As+B}{(s-1)^2+2}+\frac{C}{s+2},
$$

es decir

$$
s=(As+B)(s+2)+\left((s-1)^2+2\right)C.
$$

Dado que lo anterior debe ser cierto para todo s*, podemos considerar* $s=-2$*, obteniendo así el valor de* C*:*

$$
-2=11C\Rightarrow C=-\frac{2}{11}.
$$

Además, haciendo $s=0$ *y* $s=1$*, tenemos*

$$
0=2B+3C\Rightarrow B=\frac{3}{11}.
$$

$$
1=3(A+B)+2C\Rightarrow A=\frac{2}{11}.
$$

Así, volviendo al calculo de la transformada inversa:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) &= \frac{1}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-1)^2+2}-\frac{2}{s+2}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1+1)+3}{(s-1)^2+2}\right\}(t)-\frac{2}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t)\\
&= \frac{2}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2}\right\}(t)+\frac{5}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\}(t)-\frac{2}{11}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t).
\end{aligned}
$$

En orden tenemos por 1er Teorema de Traslación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2}\right\}(t) &= e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}(t) = e^t\cos(\sqrt{2}t) \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\}(t) &= e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) &= e^{-2t}
\end{aligned}$$

obteniendo el mismo resultado que antes:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{((s-1)^2+2)(s+2)}\right\}(t) = e^t\left(\frac{2}{11}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{5}{11\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right) - \frac{2}{11}e^{-2t}.$$

Note que en este caso sí fue más sencillo aplicar fracciones parciales.

1.8 Otras propiedades

Note que

$$f * 1(t) = \int_0^t f(u)du,$$

por lo que, si f una función de orden exponencial, tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Esto se puede aplicar directamente para resolver ecuaciones integrodiferenciales:

Ejemplo 1.21. *Determine la solución de la ecuación integral:*

$$f(t) + \int_0^t (t-u)f(u)du = t.$$

Desde la transformada de la convolución tenemos:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)f(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\{t * f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s)\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}F(s).$$

Entonces, si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y despejamos F, tendremos que:

$$\begin{aligned}
F(s) + \frac{F(s)}{s^2} &= \frac{1}{s^2} \\
F(s) &= \frac{1}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

Dado que nuestro objetivo es hallar f, aplicamos la transformada de Laplace inversa y concluimos que la solución de la ecuación integral viene dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}(t) = \sin(t).$$