UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 4 - Álgebra III (525201)
Guía del ayudante

Ejercicio 1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $T : V \to V$ una transformación lineal para la cual existe $n \in \mathbb{N}$ y $v_0 \in V$ tales que $T^n(v_0) = \theta$ y $T^{n-1}(v_0) \neq \theta$. Pruebe que el conjunto $\{v_0, T(v_0), \ldots, T^{n-1}(v_0)\}$ es l.i.

Demostración. Sean escalares $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 T(v_0) + \cdots + \alpha_{n-1} T^{n-1}(v_0) = \theta \tag{1}$$

Como T es lineal, se tiene que $T(\theta) = \theta$. Luego, podemos aplicar T a la identidad anterior y obtener

$$\alpha_0 T(v_0) + \alpha_1 T^2(v_0) + \cdots + \alpha_{n-1} T^n(v_0) = \theta \iff \alpha_0 T(v_0) + \alpha_1 T^2(v_0) + \cdots + \alpha_{n-2} T^{n-1}(v_0) = \theta$$

Así, aplicando la transformación $n-1$ veces, obtenemos que

$$\alpha_0 T^{n-1}(v_0) = \theta$$

Como $T^{n-1}(v_0) \neq \theta$ por hipótesis, concluimos que α_0. Luego, (1) se escribe

$$\alpha_1 T(v_0) + \cdots + \alpha_{n-1} T^{n-1}(v_0) = \theta$$

Ahora, aplicando la transformación $n-2$ veces obtenemos que

$$\alpha_1 T^{n-1}(v_0) = \theta$$

y por tanto $\alpha_1 = 0$.

Repitiendo el procedimiento concluimos que $\alpha_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por tanto, $\{v_0, T(v_0), \ldots, T^{n-1}(v_0)\}$ es l.i. ■

Ejercicio 2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $D \subseteq V$ linealmente independiente. Pruebe que si $v \in V - \langle D \rangle$, entonces $D \cup \{v\}$ es l.i.

Demostración. Supongamos que $D \cup \{v\}$ es l.d., i.e. existe $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} \subseteq D \cup \{v\}$ tales que

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i u_i = \theta \tag{1}$$

con $\lambda_i \neq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Por hipótesis sabemos que lo anterior no es cierto si sólo se toman vectores en D, por lo que necesariamente la combinación lineal anterior debe incluir a v. Supongamos $u_{n+1} = v$. Luego, (1) se escribe

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} v = \theta$$

que, a su vez, se puede reordenar como

$$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{n+1}} u_i$$

lo cual es una contradicción, pues $v \notin \langle D \rangle$. ■

Ejercicio 3. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se denota la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = |a - x|.$$

Muestre que el conjunto $D = \{f_a : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es l.i.

Demostración. Sean $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ puntos en $\mathbb{R}$. Consideremos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \cdots + \lambda_n f_{a_n} = \theta$$

Es decir, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 f_{a_1}(x) + \lambda_2 f_{a_2}(x) + \cdots + \lambda_n f_{a_n}(x) = 0$$

Aplicando la definición de f_a tenemos

$$\lambda_1 |a_1 - x| + \lambda_2 |a_2 - x| + \cdots + \lambda_n |a_n - x| = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, tomando $x < a_1$, $a_1 < x < a_2$, $a_2 < x < a_3$, ..., $a_{n-1} < x < a_n$, obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned}
\lambda_1(a_1 - x) + \lambda_2(a_2 - x) + \cdots + \lambda_{n-1}(a_{n-1} - x) + \lambda_n(a_n - x) &= 0 \qquad \forall x < a_1 \\
\lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(a_2 - x) + \cdots + \lambda_{n-1}(a_{n-1} - x) + \lambda_n(a_n - x) &= 0 \qquad \forall a_1 < x < a_2 \\
\lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(x - a_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(a_{n-1} - x) + \lambda_n(a_n - x) &= 0 \qquad \forall a_2 < x < a_3 \\
&\vdots \\
\lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(x - a_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(x - a_{n-1}) + \lambda_n(a_n - x) &= 0 \qquad \forall a_{n-1} < x < a_n
\end{aligned}$$

Luego, derivando estas expresiones con respecto a x obtenemos el sistema de ecuaciones (multiplicando la primera ecuación por -1)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n &= 0 \\
-\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n &= 0 \\
-\lambda_1 - \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n &= 0 \\
&\vdots \\
-\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} + \lambda_n &= 0
\end{aligned}$$

Así, de la última ecuación despejamos $\lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}$. Reemplazando esto en la primera ecuación obtenemos $2\lambda_n = 0$, lo cual implica $\lambda_n = 0$. Reemplazando esto en las ecuaciones anteriores nos encontramos en la misma situación, por lo que, al reemplazar sucesivamente, podemos obtener $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \cdots = \lambda_1 = 0$. ■

Ejercicio 4. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $T : V \to V$ una aplicación lineal. Sea además $y \in V$ tal que el conjunto $B = \{T(y), T^2(y), \ldots, T^n(y)\}$ es base de V. Pruebe que el conjunto $B' = \{T(y), \ldots, T^{n-1}(y), y\}$ es también base de V.

Demostración. Como B' tiene n elementos, basta probar que es l.i. para concluir que es una base de V. En efecto, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1 T(y) + \alpha_2 T^2(y) + \cdots + \alpha_n y = 0$$

Como T es lineal, entonces

$$\alpha_1 T^2(y) + \alpha_2 T^3(y) + \cdots + \alpha_n T(y) = 0$$

como B es l.i., entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. En conclusión, B' es l.i. ■