UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo/Indicaciones de algunos ejercicios Listado 7 (2021-I)

Problema 8. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V'$, siendo $V := \mathbb{R}^3$ y $S := \langle\{(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)\}\rangle$.
DESARROLLO: Primero veamos si el conjunto que genera S, $\{(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)\}$, es l.i. Sea $B_{\mathbb{R}^3}$ la BASE CANÓNICA de $\mathbb{R}^3$. Construyendo la matriz transpuesta de aquella que definen sus vectores coordenadas respecto de $B_{\mathbb{R}^3}$, y llevándola a su forma escalonada, resulta

$$\left([(1,-1,2)]_{B_{\mathbb{R}^3}} \mid [(2,1,3)]_{B_{\mathbb{R}^3}} \mid [(1,5,0)]_{B_{\mathbb{R}^3}}\right)^{\mathtt{t}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2-2f_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_3-f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \overset{1/3 f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \overset{f_3+2f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde el rango es 2. Esto nos dice que el conjunto $\{(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)\}$ es l.d. En vista que $(1,5,0) = 2\,(2,1,3) - 3\,(1,-1,2)$, se puede remover $(1,5,0)$ de dicho conjunto. De esta forma, $S = \langle\{(1,-1,2),(2,1,3)\}\rangle$, siendo el conjunto generador $\{(1,-1,2),(2,1,3)\}$, l.i. (¿POR QUÉ?). Ello nos permite aseverar que $\dim(S) = 2$. Por una propiedad vista en clases, tenemos que $\dim(S^\circ) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(S) = 1$.
DETERMINEMOS UNA BASE DE S°:
Para obtener esto, completamos $\{(1,-1,2),(2,1,3)\}$ hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$.
Proponemos el conjunto $B := \{(1,-1,2),(2,1,3),(1,0,0)\}$.
Veamos que B es l.i.: .... (¡hacerlo!)
De esta forma, B es una base de $\mathbb{R}^3$. Consideremos entonces su BASE DUAL $B' := \{T_1, T_2, T_3\}$, base de $\left(\mathbb{R}^3\right)'$.
Luego, proceder en el mismo espíritu del desarrollo del Problema 2....hay que deducir que $\{T_3\}$ es una base de S°.

Problema 12. Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada una, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Demostrar que $T' = \Theta$ si y sólo si $T = \Theta$.
DEMOSTRACIÓN: Se hará por doble implicación:
($\Rightarrow$) HIPÓTESIS: $T' = \Theta \in \mathcal{L}(W', V')$.
Aplicando una relación entre la nulidad de T' y T (pues V y W son de dimensión finita cada uno), también demostrada en clases:

$$\underbrace{n(T')}_{=\dim(W')=\dim(W)} = n(T) + \dim(W) - \dim(V) \Rightarrow n(T) = \dim(V) \Rightarrow T = \Theta \in \mathcal{L}(V,W).$$

($\Leftarrow$) HIPÓTESIS: $T = \Theta \in \mathcal{L}(V,W)$.
Como en la implicación anterior, invocamos la relación que hay entre la nulidad de T' y T (pues V y W son de dimensión finita cada uno), también demostrada en clases:

$$n(T') = \underbrace{n(T)}_{=\dim(V)} + \dim(W) - \dim(V) \Rightarrow n(T') = \underbrace{\dim(W) = \dim(W')}_{(\text{¿POR QUÉ?})} \Rightarrow T' = \Theta \in \mathcal{L}(W', V').$$

Problema 13. Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada una. Pruebe que la aplicación que transforma $T \in \mathcal{L}(V,W)$ en $T' \in \mathcal{L}(W', V')$, es un isomorfismo de $\mathcal{L}(V,W)$ sobre $\mathcal{L}(W', V')$.
INDICACIÓN: Definir la aplicación $S : \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(W', V')$ definido por $\mathcal{L}(V,W) \ni T \mapsto S(T) := T'$.

- Probar que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V,W), \mathcal{L}(W', V'))$.
- Luego, probar que S es un ISOMORFISMO....tener presente que como V y W son de dimensión finita. entonces V' y W' también lo serán, así como también $\mathcal{L}(V,W)$ y $\mathcal{L}(W', V')$.

Problema 14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios de V. Demuestre que:

a) $U = \{\theta\}$ si y sólo si $U^\circ = V'$.

b) $U = V$ si y sólo si $U^\circ = \{\Theta\}$.

INDICACIÓN: Probar cada equivalencia por DOBLE IMPLICACIÓN.

a) ($\Rightarrow$): Por teorema visto antes:

$$\dim(U^\circ) = \dim(V) - \dim(U) = \dim(V) = \dim(V')\,.$$

Como además U° es un subespacio vectorial de V', se infiere que $U^\circ = V'$.

($\Leftarrow$): Invocando el mismo teorema aludido anteriormente, se tiene

$$\dim(U) = \dim(V) - \dim(U^\circ) = \dim(V) - \dim(V') = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \{\theta\}\,.$$

b) (aplicar mismo teorema y concluir).

RBP/rbp 10.06.2021