UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

---

**Listado 3 ALGEBRA III 525201-0 (repaso de Espacios Vectoriales)**

1. Justifique adecuadamente si el conjunto $V$, con las operaciones adición $\oplus$ y multiplicación por escalar en $\mathbb{K}$, $\odot$, definidas en cada caso, es espacio vectorial

   $(a)\, V := \mathbb{R}^+ ,\, \mathbb{K} := \mathbb{R}\,, \quad \forall\, x\,, y \in V \,:\, x \oplus y := x\,y\,, \quad \forall\, x \in V \,:\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \odot x := x^{\alpha}\,.$

   $(b)\, V := \mathbb{R} ,\, \mathbb{K} := \mathbb{R}\,, \quad \forall\, x\,, y \in V \,:\, x \oplus y := \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \forall\, x \in V \,:\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \odot x := |\alpha|\, x\,.$

2. Determine si los subconjuntos indicados, son subespacios vectoriales del espacio vectorial $V$ dado, con las operaciones usuales de adición y multiplicación por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Justifique sus respuestas.

   $(a)$ $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,, \mathbb{K} := \mathbb{C}\,.$ $\quad (a.1)\, U := \{A \in V \,:\, A \text{ es no singular }\}$ $\quad (a.2)\, S := \{A \in V \,:\, A^2 = \Theta\}\,.$

   $(b)$ $V := \mathcal{P}(\mathbb{R})\,, \mathbb{K} := \mathbb{R}\,.$ $\quad S := \{p \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{K} \,:\, \forall \mathbb{R} \,:\, p(x) = (a+1)\,x^2 + b\,(x+1)\}\,.$

3. Muestre que el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{C}^2$ no es un s.e.v. de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, pero sí lo es si se considera $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial real: $W := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, z_1 + z_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

4. Sea $V := \mathcal{F}((0,1), \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones con dominio $(0,1)$. Decida si el siguiente conjunto es un subespacio vectorial de $V$ o no lo es.

$$E := \{f \in \mathcal{C}^2((0,1)) \,:\, \forall\, x \in (0,1) \,:\, f''(x) = 5\, f'(x) - 3\, f(x)\}\,.$$

5. Sea $J$ un conjunto de índices, y $\{V_j\}_{j\in J}$ una familia de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Consideremos el producto cartesiano $V := \prod_{j\in J} V_j$ de la familia $\{V_j\}_{j\in J}$, cuyos elementos están representados por las familias de uplas $(v_j)_{j\in J}$. Pruebe que, dotando a este conjunto $V$ de las operaciones adición y multiplicación por escalar como sigue:

$$\forall\, (u_j)_{j\in J}\,, (v_j)_{j\in J} \in V \,:\, (u_j)_{j\in J} + (v_j)_{j\in J} := (u_j + v_j)_{j\in J}\,,$$
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, (v_j)_{j\in J} \in V := \lambda \cdot (v_j)_{j\in J} := (\lambda \cdot v_j)_{j\in J}\,,$$

   éste tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, el cual se llama *Espacio vectorial producto* de la familia $\{V_j\}_{j\in J}$.

6. Considere los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y + z + t = 0\}\,, \quad W := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 0 \wedge t = 0\}\,.$$

   a) Determine $U \cap W$ y $U + W$. Diga además si el espacio suma es o no suma directa.
   b) Escriba de dos formas distintas, si es posible, los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ como adición de un vector en $U$ y otro en $W$: $u := (0, 1, -1, 1)$, $v := (0, 1, 0, -1)$.

7. Sea $V$ el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considere los siguientes subespacios vectoriales de $V$.

$$W := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right\}\,, \quad U_1 := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$U_2 := \left\{A \in V \,:\, \exists\, a\,, b \in \mathbb{R} \,:\, A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$$

   a) Compruebe que $W + U_1 = W + U_2$, pero $U_1 \neq U_2$. ¿Son los espacios suma anteriores, sumas directas?

b) Determine $S$, un subespacio vectorial de $V$ distinto de $W$, de modo que $W \cup S$ también sea un subespacio vectorial de $V$.

8. Considerando el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, escriba, si es posible, al vector $p(x) := 1+2x-4x^2+x^3$ como combinación lineal de los vectores en el siguiente conjunto $\{x^3 - x^2 , x^2 - x , x - 1 , 1 - x^3\}$ ¿Es única esta descomposición?

9. En cada caso, determine si el vector $u$ dado pertenece a $\langle S \rangle$

$$a)\, V := \mathbb{C}^2 , \mathbb{K} := \mathbb{R} , S := \{(1,1), (-1,1), (0,1)\} , u := (1,i) ,$$
$$b)\, V := \mathbb{C}^2 , \mathbb{K} := \mathbb{C} , S := \{(1,1), (-1,1), (0,1)\} , u := (1,i) .$$

10. Muestre que $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} = \langle \{x - 1 , (x-1)(x-2)\} \rangle$.

11. Considere el siguiente subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$U := \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) + p'(0) = 0 \wedge p'(0) + p''(0) = 0\} .$$

   a) Determine una base y dimensión de $U$.
   (a) Determine si $U \oplus \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Justifique su respuesta.

12. Sea $A := \{p_0 , p_1 , \ldots , p_m\}$ un conjunto de vectores en el e.v. real $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, tal que cada vector de $A$ se anula en $x = 1$. Demuestre que $A$ es un conjunto l.d.

13. Sean $U$ y $W$ subespacios vectoriales de **dimensión 4** del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^6$. ¿Es posible que existan $z , w \in U \cap W$ tales que $z$ no es múltiplo escalar de $w$?

14. Considere $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Sean $V$ y $W$ subconjuntos del espacio vectorial real $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

$$V := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} , \quad W := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(0) + p'(0) = 0\} .$$

   a) Demuestre que $V$ y $W$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
   b) Determine las dimensiones de $V$ y $W$. Justifique sus respuestas.
   c) ¿Existen valores de $n \in \mathbb{Z}_0^+$ de modo que el espacio suma $V + W$ sea suma directa? Justifique su respuesta.

15. Dados los conjuntos

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} , \quad S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

   $(a)$ Muestre que $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ . $(b)$ ¿Es $S_1$ una base de $S := \langle S_1 \rangle$? $(c)$ Reduzca $S_2$ a una base de $S$.

16. Demuestre que si $\{U_j\}_{j \in J}$ es una familia de subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$, entonces $\bigcap_{j \in J} U_j$ es subespacio vectorial de $V$.

17. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $U$ un subespacio vectorial de $V$. Se define la relación $\sim$ en $V$ por

$$\forall\, u , w \in V : u \sim w \Leftrightarrow u - w \in U .$$

   (a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia en $V$.
   (b) Caracterice la clase de equivalencia de $w \in V$, respecto de $\sim$: $[w]_\sim$ (se le llama *clase de $w$ módulo $U$*).
   (c) Pruebe que $V/U := V/\sim$, provista de las operaciones de adición y multiplicación por escalar:

   $$\forall\, [u]_\sim , [v]_\sim \in V/U : [u]_\sim + [v]_\sim := [u+v]_\sim , \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \forall\, [u]_\sim \in V/U : \lambda\, [u]_\sim := [\lambda \cdot u]_\sim$$

   tiene también la estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, llamado *espacio vectorial cuociente de $V$ por $U$*. Identifique el vector nulo en este espacio vectorial cuociente.