I Un sistema lineal está regido por la EDO :

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4\frac{d}{dt}y(t)+5y(t)=h(t)$$

Determine la respuesta del sistema si la fuerza externa h(t) corresponde a dos impulsos instantáneos ,el primero es $\sqrt{2}$ veces el impulso unitario en t = 0 y transcurrido 3 minutos el segundo corresponde a $\sqrt{3}$ veces el impulso unitario . El sistema está inicialmente en reposo

20 puntos

① $h(t)=\sqrt{2}\,\delta(t)+\sqrt{3}\,\delta(t-3)$

además $y(0)=y'(0)=0$ sistema en reposo

$y''+4y'+5y=\sqrt{2}\,\delta(t)+\sqrt{3}\,\delta(t-3)$

② Usando Transformada

$$Y(s)\left(s^2+4s+5\right)=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,e^{-3s}$$

③ $$Y(s)=\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+1}+\frac{\sqrt{3}\,e^{-3s}}{(s+1)^2+1}$$

Usando Trasformada inversa

④ $$y(t)=\sqrt{2}\,e^{-2t}\operatorname{sen} t+\sqrt{3}\,\mathcal{U}(t-3)\,e^{-2(t-3)}\operatorname{sen}(t-3)$$

II.- Considere el PVI

$$x'(t) + y(t) = 2x(t)$$
$$x(t) + y'(t) = 2y(t) - 5sen(t)$$

$x(0) = 1$; $y(0) = 0$

Resuelva este PVI mediante el método de valores propios y variación de parámetros

<u>Indicación</u> : $\int e^{at} sent\, dt = \frac{e^{at}}{1+a^2}(asent - \cos t)$

20 puntos

① $|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad X_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$

② Usando variación de parámetros $\vec{X}_p = A(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + B(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$

$A'(t) = -\frac{5}{2} e^{-t} sen\, t \longrightarrow A(t) = \frac{5}{4}(sen\, t + \cos t) e^{-t}$

$B'(t) = \frac{5}{2} e^{-3t} sen\, t \longrightarrow B(t) = -\frac{1}{4}(3 sen\, t + \cos t) e^{-3t}$

$\vec{X}_p = \frac{5}{4}(sen\, t + \cos t) e^{-t} \cdot e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}(3 sen\, t + \cos t) e^{-3t} \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} sen\, t + \cos t \\ 2 sen\, t + \frac{3}{2} \cos t \end{pmatrix}$

③ $\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1/2\, sen\, t + \cos t \\ 2 sen\, t + \frac{3}{2} \cos t \end{pmatrix}$

usando las CI. $X(0) = 1 \quad y(0) = 0$

$1 = C_1 + C_2 + 1 \qquad C_1 = -C_2 \qquad C_1 = -\frac{3}{4}$

$0 = C_1 - C_2 + 3/2 \qquad 2C_2 = \frac{3}{2} \quad C_2 = \frac{3}{4}$

$X(t) = -\frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1/2\, sen\, t + \cos t \\ 2 sen\, t + \frac{3}{2} \cos t \end{pmatrix}$

III.- Encontrar una solución en SP en torno al punto $x_0 = 0$ de $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ e indique la forma de una segunda solución linealmente independiente con la anterior. (Analice previamente la naturaleza del punto $x_0 = 0$) 20 puntos

① $xy'' + (x-1)y' - y = 0 \,/\cdot x \rightarrow x^2 y'' + x(x-1) - xy = 0$

$x =$ pto singular $\quad x\,p(x) = x-1 \quad \lim_{x\to 0} x\,p(x) = a_0 = -1$

$x^2 q(x) = -x \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = b_0 = 0$

pto. singular regular

$r(r-1) - r = 0 \Rightarrow r = 0 \quad r = 2$

② $y(x) = \sum_0^{\infty} C_K x^{K+2} \quad y' = \sum_0^{\infty} C_K (K+2) x^{K+1} \quad y'' = \sum C_K ((K+2)K+1) x^{K}$

reemplazando en la ecuación.

$y'' x^2 + x(x-1)y' - xy = \sum_0^{\infty} C_K (K+2)(K) x^{K+2} + \sum C_K (K+1) x^{K+3}$

$K+2 = m \quad$ y $\quad K+3 = m$

$\sum_2^{\infty} C_{m-2}\, m(m-2) x^m + \sum_3^{\infty} C_{m-3} (m-2) x^m = 0$

$C_0 \cdot 2 \cdot 0\, x^2 + \sum_3^{\infty} C_{m-2}\, m(m-2) x^m + \sum_3^{\infty} C_{m-3} (m-2) x^m = 0$

$$C_{m-2} = \frac{-C_{m-3}}{m} \qquad m \geq 3$$

$C_1 = \frac{-C_0}{3} \quad C_2 = \frac{C_0}{3\cdot 4} \quad C_3 = \frac{-C_0}{3\cdot 4\cdot 5}$

$y(x) = x^2 \left(C_0 - \frac{C_0}{3} x + \frac{C_0}{3\cdot 4} x^2 + \frac{C_0 x^3}{3\cdot 4\cdot 5} --- \right)$

Considerando $C_0 = \frac{a}{2}$ $\quad a$ y C_0 constantes.

$y_1(x) = a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \cdots \right)$

$= a \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \cdots \right) = \alpha \sum_2^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n!}$

$r_1 - r_2 = 2$ luego $\exists\ Y_2(x) = \sum_0^{\infty} d_n x^n$ ///