Criterios clásicos. Convergencia absoluta.

- Criterios de la raíz y del cociente.
- Series alternadas.
- Algebra de series.
- Convergencia absoluta.
- Reordenamientos.

Criterios de la raíz y del cociente.

Teor. [Criterio de la raíz]: Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Entonces:

a) si $\alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

b) si $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge;

c) si $\alpha = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger o no converger.

Dem.: a) Si $\alpha < 1$, sea $\beta \in \mathbb{R} : \alpha < \beta < 1$.

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \sqrt[n]{|a_n|} < \beta$

$\implies |a_n| < \beta^n \quad \forall n \geq N$.

Como $0 < \beta < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge.

Entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Sea $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$ tal que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k} \alpha$.

Como $\alpha > 1$, $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K$, $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$

$\implies \forall k \geq K$, $|a_{n_k}| > 1 \implies a_n \overset{n}{\nrightarrow} 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

c) Lo veremos en los ejemplos.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow{n} \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \xrightarrow{n} 2 \implies \alpha = 2 > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ no converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n} 1 \implies \alpha = 1$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \xrightarrow{n} 1 \implies \alpha = 1$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. $\square$

Los dos últimos ejemplos muestran que, cuando $\alpha = 1$, el criterio de la raíz no da información acerca de la convergencia de la serie.

Teor.: Sean $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

a) $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

b) $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

Dem.: a) Sea $\alpha := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Si $\alpha = \infty,$ no hay nada que demostrar.

Si $\alpha < \infty,$ sea $\beta > \alpha$. Entonces, $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \frac{a_n+1}{a_n} < \beta$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_{N+1} &< \beta a_N, \\ a_{N+2} &< \beta a_{N+1} < \beta^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &< \beta a_{N+k-1} < \beta^k a_N \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $n := N + k: \quad a_n < \beta^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\beta^{n-N} a_N} < \sqrt[n]{\frac{a_N}{\beta^N}}\, \beta \xrightarrow{n} \beta$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \beta \quad \forall \beta > \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha := \limsup \frac{a_n+1}{a_n}.$$

b) $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

Teor. [Criterio del cociente]: Sean $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\exists \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Dem.: a) El teorema anterior $\Longrightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

Entonces, el criterio de la raíz $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Más adelante (pag. 9), demostraremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ también converge.}$$

b) $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1.$

$\Longrightarrow |a_N| < |a_{N+1}| < \cdots < |a_n| \quad \forall n \geq N$

$\Longrightarrow \forall n \geq N : \ |a_n| \geq |a_N| > 0 \Longrightarrow |a_n| \overset{n}{\not\to} 0 \Longrightarrow a_n \overset{n}{\not\to} 0$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. $\square$

Series alternadas.

Def.: Se denomina **serie alternada** a una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teor. [Criterio de Leibnitz]: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ una serie alternada. Si

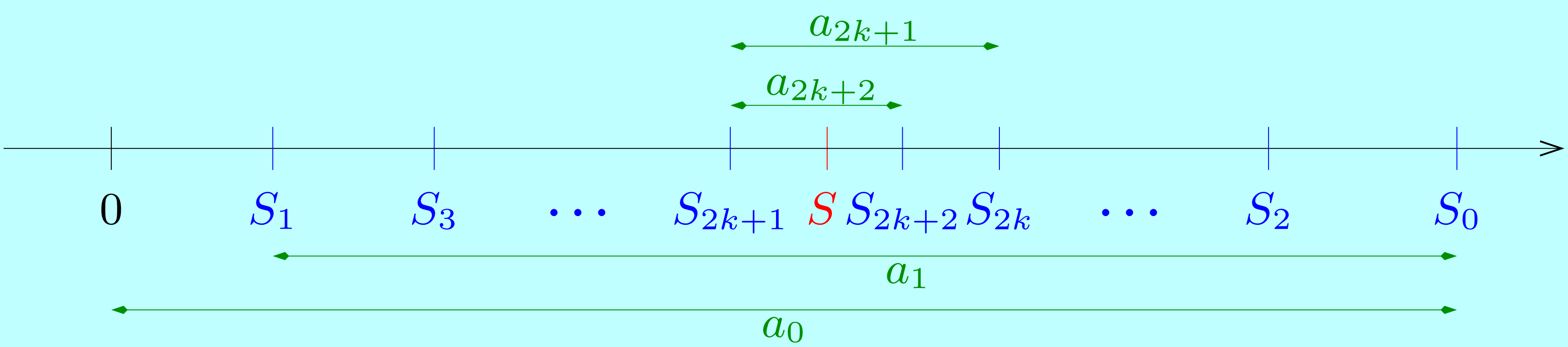
a) $\{a_n\}$ es monótona decreciente (vale decir, $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$) y

b) $a_n \xrightarrow{n} 0,$

entonces la serie converge.

Además, $\forall N \in \mathbb{N},$ las sumas parciales N-ésimas $S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$ satisfacen $\left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - S_N\right| < a_{N+1}$.

Dem.: Lo siguiente es un esquema de la demostración.



- $0 < S_1 < S_3 < \cdots < S_{2k+1} < S_{2k} < S_0$

  $\Longrightarrow$ $\{S_{2k+1}\}$ sucesión creciente y acotada $\Longrightarrow$ $\exists \lim S_{2k+1} =: S_-$.

- $S_0 > S_2 > \cdots > S_{2k} > S_{2k+1} > S_1 > 0$

  $\Longrightarrow$ $\{S_{2k}\}$ sucesión decreciente y acotada $\Longrightarrow$ $\exists \lim S_{2k} =: S_+$.

- $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \xrightarrow{k} 0 \Longrightarrow S_- = \lim S_{2k+1} = \lim S_{2k} = S_+$.

  $\Longrightarrow$ $\exists \lim S_n =: S = S_+ = S_- \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

- Además, $\forall k \in \mathbb{N},\ |S - S_{2k}| < a_{2k+1}$ y $|S - S_{2k+1}| < a_{2k+2}$

  $\Longrightarrow$ $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - S_N\right| = |S - S_N| < a_{N+1}$. $\square$

Algebra de series.

Teor.: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dem.: a) Sean $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$, las sumas parciales de las respectivas series. Entonces, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ son

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + T_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, como $\exists \lim (S_n + T_n) = \lim S_n + \lim T_n$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim (S_n + T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) $\boxed{\text{Ej.}}$ $\square$

Convergencia absoluta.

Def.: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente**, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teor.: Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

Dem.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Criterio de Cauchy $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m \geq n \geq N,\ \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$

$\Longrightarrow\ |\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$

Entonces, el criterio de Cauchy $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Este teorema lo hemos usado en esta misma clase, en la demostración de la parte (a) del criterio del cociente.

- Para series de términos positivos, convergencia y convergencia absoluta son lo mismo, pero para series de términos de signos variados, no.

- Por ejemplo, por el criterio de Leibnitz, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge, pero no converge absolutamente, pues $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ no converge.

- Los criterios de comparación, de la raíz y del cociente son en realidad criterios de convergencia absoluta.

- Cuando una serie converge absolutamente, se puede operar con ella como si fuera una suma finita, pero cuando la convergencia no es absoluta, **¡No!**

- Las propiedades algebraicas que acabamos de demostrar (suma de series y producto de una serie por una constante) valen aunque la convergencia no sea absoluta, pero otras propiedades no. Por ejemplo no vale la conmutatividad, como veremos en lo que sigue.

Reordenamientos.

Def.: Sea $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto k_n \end{array}$ una biyección. Sea $a'_n := a_{k_n}, \; n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ se denomina un **reordenamiento** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Un reordenamiento de una serie se obtiene conmutando sus términos.

- Ingenuamente uno supondría que si una serie converge, entonces todos sus reordenamientos también deberian hacerlo y al mismo límite. Vale decir, algo así como que la suma de una serie es conmutativa. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, esto en general es falso.

- Si el reordenamiento de la serie se obtiene mediante finitas conmutaciones, la convergencia de la serie no se altera, ni tampoco la suma de la serie (**Ej.**). Pero para un reordenamiento cualquiera, en general lo anterior no es cierto. De hecho veremos que es cierto, sólo si la serie converge absolutamente.

Ejemplo: Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$. Ya vimos que de acuerdo al criterio de Leibnitz esta serie converge, pero no converge absolutamente.

Su suma $S := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ satisface

$$S := \underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\frac{5}{6}}\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{<0}-\cdots \implies S < \frac{5}{6}.$$

Consideremos el siguiente reordenamiento de la serie, a cuya suma llamaremos T:

$$T := \underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}_{\frac{5}{6}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}_{\frac{13}{40}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}}_{>\frac{1}{4k}+\frac{1}{4k}-\frac{1}{2k}=0}+\cdots > \frac{5}{6}.$$

Es decir que, si la serie reordenada converge (que de hecho lo hace), su suma satisface $T > \frac{5}{6}$, de modo que

$$T > \frac{5}{6} > S \implies T \neq S.$$

Como veremos en el próximo teorema, este comportamiento no es algo peculiar de esta serie, sino algo esperable en cualquier serie que converja no absolutamente.

Teor.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente, pero no absolutamente convergente. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, hay un reordenamiento $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ de la serie tal que sus sumas parciales $S'_n := \sum_{k=1}^{n} a'_k$, $n \in \mathbb{N}$, satisfacen

$$\liminf S'_n = \alpha \qquad y \qquad \limsup S'_n = \beta.$$

Dem.: Ver Teor. 3.54 del libro de Rudin. $\square$

- Como consecuencia de este teorema, reordenando los términos de una serie que converge no absolutamente, se puede obtener una serie reordenada que converja a cualquier valor prefijado entre $-\infty$ y $+\infty$ (ambos inclusive).
- En cambio, como se ve en el siguiente teorema, si la serie converge absolutamente, todos sus reordenamientos convergen al mismo valor.

Teor.: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a S, entonces todos sus reordenamientos convergen a S.

Dem.: Ver Teor. 3.55 del libro de Rudin. $\square$