525402 Análisis Funcional II
Capítulo -1: Operadores compactos[1]

Leonardo E. Figueroa

CI^{2}MA y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Semestre 2023-1

[1]Contenidos tomados del capítulo 5 del libro **Gabriel N. Gatica:** Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

4.1 Preliminares

Estudiaremos propiedades de los operadores lineales compactos, que generalizan la noción de operador lineal de rango de dimensión finita. Comenzamos con algunos resultados clásicos en dimensión finita.

Teorema -1.1

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado (EVN) de dimensión finita. Entonces, todas las normas sobre X son equivalentes.

Demostración: Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de X. Definimos la norma $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \quad \text{donde} \quad x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Sea $\|\cdot\|$ cualquier otra norma definida sobre X. Probaremos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes, lo que inmediatamente implica que cualquier par de normas son mutuamente equivalentes sobre X.

Notemos primero que, para todo $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x \in X$,

$$\|x\| \overset{\text{DT}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, \|x_j\| \leq \left[\max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|\right] \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| = \left[\max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|\right] \|x\|_1\,.$$

Para la otra desigualdad podríamos emplear el Teorema de la Inversa Acotada, pero nos interesa aquí ilustrar otras técnicas a las que dan acceso propiedades de compacidad. Entonces supongamos por reducción al absurdo que no existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_1 \leq C\, \|x\|\,.$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}\, x_j \in X$ tal que

$$\|x_k\|_1 > k\,\|x_k\|\,;$$

esto es,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}\, x_j\right\| < \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{k,j}|\,.$$

Luego, definiendo a los coeficientes y vector reescalados

$$(\forall\, i \in \{1,\dots,n\}) \quad \beta_{k,i} := \frac{\alpha_{k,i}}{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{k,j}|} \qquad \text{e} \qquad y_k := \sum_{i=1}^{n} \beta_{k,i}\, x_i,$$

se obtiene $\|y_k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\beta_{k,i}| = 1$ y, además,

$$(\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad \|y_k\| < \frac{1}{k}.$$

Por lo tanto $y_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ en la norma $\|\cdot\|$.

Sin embargo, por el Teorema de Bolzano–Weierstrass, que establece que toda sucesión acotada de $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente, se deduce que existe una subsucesión $\left\{\beta_{\phi^{(1)}(k),1}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\beta_{k,1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un $\beta_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_{\phi^{(1)}(k),1} \xrightarrow{k\to\infty} \beta_1$.

Del mismo modo, existe una subsucesión $\left\{\beta_{\phi^{(2)}(k),2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left\{\beta_{\phi^{(1)}(k),2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un $\beta_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_{\phi^{(2)}(k),2} \xrightarrow{k\to\infty} \beta_2$ y todavía $\beta_{\phi^{(2)}(k),1} \xrightarrow{k\to\infty} \beta_1$.

Iterando este razonamiento se obtiene la existencia de una función seleccionadora de índices $\phi^{(n)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y de escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \beta_{\phi^{(n)}(k),i} \xrightarrow{k\to\infty} \beta_i.$$

Definiendo al vector $y := \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ se obtiene

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |\beta_i| = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \left|\beta_{\phi^{(n)}(k),i}\right| = 1$$

y

$$\left\|y_{\phi^{(n)}(k)} - y\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n \left(\beta_{\phi^{(n)}(k),i} - \beta_i\right) x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \left|\beta_{\phi^{(n)}(k),i} - \beta_i\right| \|x_i\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Por lo tanto, $y_{\phi^{(n)}(k)} \xrightarrow{k\to\infty} y$ en la norma $\|\cdot\|$. Como las subsucesiones heredan límites y éstos, en espacios métricos, son únicos, inferimos que $y = 0$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de X, necesariamente $\beta_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$, lo cual contradice que $\|y\|_1 = 1$. $\square$

Corolario -1.1

Todo espacio vectorial normado de dimensión finita es completo, y todo subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial normado es cerrado.

Definición -1.1

Un subconjunto S de un espacio vectorial normado X se dice *compacto* si toda sucesión en S posee una subsucesión convergente a un elemento de S.

Definición -1.2

Un subconjunto S de un espacio vectorial normado X se dice *relativamente compacto* si toda sucesión en S posee un subsucesión convergente a un elemento de X.
Equivalentemente, S es relativamente compacto si y solo si $\overline{S}$ es compacto.

Corolario -1.2

Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita y sea S un subconjunto cerrado y acotado de X. Entonces, S es compacto.

Lema -1.1 (Lema de Riesz)

Sea S un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X tal que $S \neq X$.
Entonces, para cada $\epsilon \in (0,1)$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $\|x_\epsilon\| = 1$ y $\operatorname{dist}(x_\epsilon, S) \geq \epsilon$.

Demostración: Como $S \neq X$, existe algún $x_1 \in X \setminus S$. Como S es cerrado,

$$d := \operatorname{dist}(x_1, S) = \inf_{x \in S} \|x_1 - x\| > 0.$$

Como $d/\epsilon > d$, por propiedad del ínfimo, existe algún $x_0 \in S$ tal que $\|x_1 - x_0\| < d/\epsilon$.

Definiendo $x_\varepsilon := \dfrac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$ se obtiene que $\|x_\epsilon\| = 1$ y, para todo $x \in S$,

$$\begin{aligned}\|x_\epsilon - x\| &= \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \|(x_1 - x_0) - \|x_1 - x_0\| \, x\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \|x_1 - \underbrace{(x_0 + \|x_1 - x_0\| \, x)}_{\in S}\| > \frac{\epsilon}{d} \, d = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema -1.2

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Entonces, la esfera unitaria $\partial B(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es compacta si y solo si X es de dimensión finita.

Demostración: El "si" se sigue de que claramente $\partial B(0,1)$ es un conjunto cerrado y acotado y del Corolario -1.2.

Para el "solo si", asumamos que $\partial B(0,1)$ es compacta y probemos que X es de dimensión finita. Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$ y definamos $M_1 := \operatorname{span}(\{x_1\})$. Si $X = M_1$, entonces se acaba la demostración. Si $X \neq M_1$, entonces, por el Lema de Riesz (Lema -1.1) con $\epsilon = 1/2$ deducimos que existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $\operatorname{dist}(x_2, M_1) \geq 1/2$. Si $X = M_2 := \operatorname{span}(\{x_1, x_2\})$, entonces se acaba la demostración. Si $X \neq M_2$, entonces se aplica de nuevo el Lema de Riesz y se concluye la existencia de $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$ y $\operatorname{dist}(x_3, M_2) \geq 1/2$. Luego se define $M_3 = \operatorname{span}(\{x_1, x_2, x_3\})$ y se continúa este razonamiento.

Si el proceso anterior **no** se detiene, se construye de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \partial B(0,1) \subseteq X$ que satisface

$$n > m \implies \|x_n - x_m\| > 1/2.$$

Esta última desigualdad implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes, lo cual contradice la suposición de que $\partial B(0,1)$ es compacta. Por lo tanto, necesariamente el proceso anterior se detiene y existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = M_k = \operatorname{span}(\{x_1, \ldots, x_k\})$ y así X es de dimensión finita. $\square$

4.2 Operadores de rango finito

Sean $(X, \|\cdot\|)$ y e $(Y, \|\cdot\|)$ espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y consideremos conjuntos finitos $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq X'$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$. Entonces, definimos al operador $K\colon X \to Y$ mediante

$$(\forall\, x \in X) \quad K(x) := \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\, y_j. \tag{-1.1}$$

El operador K hereda la linealidad de los F_j y es acotado ya que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|K(x)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |F_j(x)|\, \|y_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|F_j\|\, \|y_j\| \right) \|x\|\,.$$

Además, su rango $R(K)$ es de dimensión finita ya que $R(K) \subseteq \operatorname{span}(\{y_1, \ldots, y_n\})$. El siguiente lema establece el recíproco de lo anterior.

Lema -1.2

Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ espacios vectoriales normados y sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(K)$ es de dimensión finita. Entonces, K es de la forma (-1.1).

Demostración: Sea $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ una base de $R(K)$. Entonces, para cada $x \in X$ existe una única colección de escalares $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ tales que

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) y_j.$$

Esto induce la definición, para $j \in \{1, \ldots, n\}$, del funcional $F_j\colon X \to \mathbb{K}$ mediante $(\forall\, x \in X)$ $F_j(x) := \alpha_j(x)$. Cada uno de los F_j es claramente lineal.

Resta comprobar que los funcionales F_j son acotados. En efecto, de acuerdo a la equivalencia de normas en dimensión finita (Teorema -1.1) aplicada al espacio $R(K)$, se deduce que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|K(x)\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |F_j(x)| \leq C\,\|K(x)\|\,.$$

Así, gracias a la condición de operador acotado de K se obtiene, para $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\forall\, x \in X) \quad |F_i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |F_j(x)| \leq C\,\|K(x)\| \leq C\,\|K\|\,\|x\|\,,$$

lo cual prueba que $F_i \in X'$, $1 \leq i \leq n$, quedando K expresado en la forma (-1.1). $\square$

Definición -1.3

Un operador $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ de la forma (-1.1) se denomina *operador de rango finito*.

Teorema -1.3 (Alternativa de Fredholm para operadores de rango finito)

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $K \in \mathcal{L}(X)$ un operador de rango finito. Definamos $A := I - K$, donde $I\colon X \to X$ es el operador identidad. Entonces, $R(A)$ es cerrado en X y

$$\dim N(A) = \dim N(A') < \infty.$$

Demostración: Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ y $\{F_1, \ldots, F_n\} \in X'$ tales que, para todo $x \in X$,

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) x_j .$$

Con el propósito de caracterizar a $R(A)$ consideramos la ecuación fundamental: Dado $y \in X$, hallar $x \in X$ tal que

$$A(x) = y. \tag{-1.2}$$

Por las definiciones de A y de K, es claro que $x \in X$ es solución de (-1.2) si y solo si

$$x = y + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, x_j , \tag{-1.3}$$

con $\beta_j = F_j(x)$, $1 \leq j \leq n$. Evaluando F_i en (-1.3) se obtiene

$$(\forall \, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \beta_i - \sum_{j=1}^{n} F_i(x_j) \beta_j = F_i(y),$$

o bien

$$(\forall \, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{i,j} - F_i(x_j)\right) \beta_j = F_i(y). \tag{-1.4}$$

Recíprocamente, es fácil ver que si un vector $(\beta_1, \ldots, \beta_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema lineal (-1.4), entonces x *definido* por (-1.3) verifica $F_i(x) = \beta_i$, $1 \leq i \leq n$ y consiguientemente x es solución de (-1.2).

De esta manera hemos probado que $y \in R(A)$ (equivalentemente, (-1.2) tiene solución) si y solo si el sistema lineal (-1.4) posee solución. De la teoría de sistemas lineales sabemos que esto último ocurre si y solo si $(F_1(y), \ldots, F_n(y))^{\mathtt{t}}$ es ortogonal a todas las soluciones del sistema transpuesto homogéneo[2]; esto es

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j(y) = 0 \tag{-1.5}$$

para todo vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \sum_{j=1}^{n} (\delta_{j,i} - F_j(x_i))\, \alpha_j = 0 \tag{-1.6}$$

Por otro lado, un cálculo simple muestra que el operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(X')$ está dado por

$$(\forall\, G \in X') \quad A'(G) = G - \sum_{j=1}^{n} G(x_j)\, F_j.$$

Afirmamos que

$$N(A') = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathtt{t}} \text{ satisface (-1.6)} \right\}.$$

[2] Ver Ejemplo 3.4 (p. 77) de **Gabriel N. Gatica:** Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

En efecto: $\boxed{\subseteq}$ Si $G \in N(A')$ se tiene que $G = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F_j$ con $\alpha_j := G(x_j)$, $1 \le j \le n$. Evaluando en x_i resulta $\alpha_i = G(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j(x_i)$, que es lo mismo que $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{j,i} - F_j(x_i))\, \alpha_j = 0$, que es (-1.6). $\boxed{\supseteq}$ Si un vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathtt{t}}$ satisface (-1.6), entonces $G := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F_j$ satisface $G(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, F_j(x_i) \overset{\text{(-1.6)}}{=} \alpha_i$, $1 \le i \le n$. Así, $A'(G) = G - \sum_{j=1}^{N} G(x_j) F_j = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, F_j - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, F_j = 0$.

Empleamos esta caracterización de $N(A')$ para reescribir la condición (-1.5)-(-1.6) (equivalente a la solubilidad de (-1.2)) en la forma:

$$\big(\forall\, G \in N(A')\big) \quad G(y) = 0.$$

Esto es, $y \in {}^{\circ}N(A')$, de lo cual se concluye que $R(A) = {}^{\circ}N(A')$ y por lo tanto $R(A)$ es cerrado. Finalmente, del análisis de la primera parte de esta demostración, tomando $y = 0$ se deduce fácilmente que

$$N(A) = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, x_j : (\beta_1, \ldots, \beta_n)^{\mathtt{t}} \text{ satisface (-1.4)-homogenéneo} \right\}.$$

Dado que los sistemas (-1.4)-homogéneo y (-1.6) tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes (por ser uno el transpuesto del otro), se concluye que $\dim N(A) = \dim N(A')$. $\square$

Explicaremos ahora por qué este fenómeno se denomina *alternativa* de Fredholm: Bajo las condiciones del Teorema -1.3, la sobreyectividad de A es equivalente a su inyectividad. En efecto: $\boxed{\Rightarrow}$ Si $R(A) = X$, se tiene que $N(A') = R(A)^\circ = X^\circ = \{0\}$. Como $\dim N(A) = \dim N(A')$, $N(A) = \{0\}$. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $N(A) = \{0\}$, por la coincidencia de dimensiones, $N(A') = \{0\}$ y, como $R(A)$ es cerrado, $R(A) = {}^\circ N(A') = {}^\circ\{0\} = X$.

Esto significa que se tiene solamente una de las siguientes alternativas:

$$R(A) = X \quad \text{y} \quad N(A) = \{0\}$$

o bien

$$R(A) \neq X \quad \text{y} \quad N(A) \neq \{0\}$$

y no es posible que se den las opciones cruzadas.

En términos del problema fundamental (-1.2), el problema $A(x) = y$ posee solución única para todo $y \in X$ **o bien** la ecuación homogénea $A(x) = 0$ admite un número finito m de soluciones linealmente independientes. En este último caso, $A(x) = y$ tiene solución si y solo si $y \in {}^\circ N(A')$; equivalentemente, si y solo si $F_j(y) = 0$, $1 \leq j \leq m$, donde $\{F_1, \ldots, F_m\}$ es una base de $N(A')$.

A continuación extendemos la alternativa de Fredholm a operadores lineales y acotados que son límite (en norma de operadores) de alguna sucesión de operadores de rango finito.

Teorema -1.4 (Alternativa de Fredholm para límites de operadores de rango finito en espacios de Banach)

Sea X un espacio de Banach, sea $K \in \mathcal{L}(X)$ y sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores de rango finito en $\mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|K - K_n\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Si $A := I - K$, entonces $R(A)$ es cerrado en X y $\dim N(A) = \dim N(A') < \infty$.

Demostración: Sea $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que $\|K - K_N\| < 1$. Escribamos

$$A = I - K = I - (K - K_N) - K_N = B_N - K_N,$$

donde $B_N := I - (K - K_N)$. De acuerdo a un resultado clásico (!) en espacios de Banach, B_N es invertible y, por el Teorema de la Inversa Acotada, $B_N^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Entonces podemos escribir $A = B_N(I - B_N^{-1}K_N)$, donde, importantemente, $B_N^{-1}K_N$, al ser composición de un operador acotado con uno de rango finito, también es de rango finito. De esta forma, la ecuación $A(x) = y$ es equivalente a

$$(I - B_N^{-1}K_N)(x) = B_N^{-1}(y),$$

de donde, aplicando el Teorema -1.3,

$$\dim N(A) = \dim N\left(I - B_N^{-1}K_N\right) = \dim N\left(\left[I - B_N^{-1}K_N\right]'\right) < \infty.$$

A su vez, como $A' = (I - B_N^{-1} K_N)' B_N'$ y B_N' es invertible con $(B_N')^{-1} = (B_N^{-1})'$, resulta que

$$\dim N(A') = \dim N\left(\left[I - B_N^{-1} K_N\right]'\right) = \dim N(A).$$

Probemos ahora que $R(A)$ es cerrado[3]. Consideremos entonces una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y un $y \in X$ tales que $A(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} y$. Entonces, $(I - B_N^{-1} K_N)(x_k) = B_N^{-1} A(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} B_N^{-1}(y)$. Como, del Teorema -1.3, $R(I - B_N^{-1} K_N)$ es cerrado, necesariamente existe algún $x \in X$ tal que $(I - B_N^{-1} K_N)(x) = B_N^{-1}(y)$. Aplicando B_N a ambos lados de esta ecuación, obtenemos que $y = B_N\Big((I - B_N^{-1} K_N)(x)\Big) = A(x)$, por lo que $y \in R(A)$. $\square$

De la demostración se desprende que basta que exista un operador de rango finito K_N tal que $\|K - K_N\| < 1$, lo que es una condición más débil que ser *límite* en norma de operadores de rango finito.

[3] Una demostración alternativa consiste en aplicar el resultado de caracterización de op. cit., Teorema 3.17.

4.3 Operadores compactos en espacios normados

Definición -1.4

Sean X e Y espacios vectoriales normados. Un operador lineal $K\colon X \to Y$ se dice *compacto* o *completamente continuo* si $\mathcal{D}(K) = X$ y para cada sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, la sucesión $\{K(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en Y.

Equivalentemente, para todo conjunto acotado $S \subseteq X$, $K(S)$ es relativamente compacto en Y ($\overline{K(S)}$ es compacto en Y).

El conjunto de operadores compactos de X en Y se denota por $\mathcal{K}(X,Y)$.

Una primera observación es que todo operador lineal compacto es acotado; esto es, $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. En efecto, sea $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ y supongamos, por reducción al absurdo, que K *no* es acotado. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que

$$\|x_n\| < \frac{1}{n}\,\|K(x_n)\|\,.$$

Definiendo $z_n := \dfrac{n\,x_n}{\|K(x_n)\|}$ se observa que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \|z_n\| < 1 \quad \text{y} \quad \|K(z_n)\| = n.$$

Sea $\{K(z_{\phi(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier subsucesión de $\{K(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces ella diverge, pues $\left\|K(z_{\phi(n)})\right\| = \phi(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, esto contradice la compacidad de K.

El siguiente lema recolecta ésta y otras propiedades de operadores compactos que son fáciles de probar.

Lema -1.3

Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados.

1. $\mathcal{K}(X, Y)$ es subespacio de $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es de rango finito $\implies K \in \mathcal{K}(X, Y)$.
3. $A \in \mathcal{L}(X, Y),\ K \in \mathcal{K}(Y, Z) \implies KA \in \mathcal{K}(X, Z)$.
4. $K \in \mathcal{K}(X, Y),\ A \in \mathcal{L}(Y, Z) \implies AK \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Si Y es Banach, $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema -1.5

Sean X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Banach, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ y $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tales que $\|K_n - K\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Entonces, $K \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Como el operador K_1 es compacto, existe una subsucesión $\{x_{\phi^{(1)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{K_1(x_{\phi^{(1)}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.

Como K_2 también es compacto, existe una subsucesión $\{x_{\phi^{(2)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{\phi^{(1)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{K_2(x_{\phi^{(2)}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y; crucialmente $\{K_1(x_{\phi^{(2)}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ todavía converge en Y por ser subsucesión de la sucesión convergente $\{K_1(x_{\phi^{(1)}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Análogamente, como K_3 es compacto, existe una subsucesión $\left\{x_{\phi^{(3)}(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left\{x_{\phi^{(2)}(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\left\{K_i\left(x_{\phi^{(3)}(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y para $1 \leq i \leq 3$.

Por inducción, se deduce que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $\{x_{\phi^{(k)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{\phi^{(k-1)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\left\{K_i\left(x_{\phi^{(k)}(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y para $1 \leq i \leq k$.

Definimos a la **subsucesión diagonal** $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mediante

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad z_n := x_{\phi^{(n)}(n)}.$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{x_1} & x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_3 & x_{12} & \cdots \\
x_3 & \boldsymbol{x_3} & x_3 & x_3 & x_3 & x_{12} & x_{23} & \cdots \\
x_4 & x_4 & \boldsymbol{x_4} & x_8 & x_9 & x_{23} & x_{27} & \cdots \\
x_6 & x_6 & x_8 & \boldsymbol{x_9} & x_{12} & x_{27} & x_{36} & \cdots \\
x_8 & x_8 & x_9 & x_{11} & \boldsymbol{x_{23}} & x_{35} & x_{42} & \cdots \\
x_9 & x_9 & x_{11} & x_{12} & x_{27} & \boldsymbol{x_{36}} & x_{44} & \cdots \\
x_{10} & x_{10} & x_{12} & x_{18} & x_{32} & x_{42} & \boldsymbol{x_{49}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Figura: Ilustración de subsucesión diagonal. La columna j-ésima contiene posibles entradas de la subsucesión $\{x_{\phi^{(j)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Las entradas en cada columna $j+1$ fueron tomadas, preservando el orden, desde la correspondiente columna j. La sucesión diagonal, a partir de su m-ésima entrada, obtiene todos sus valores, en último término, desde la columna m.

Es claro que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de la sucesión original $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Afirmamos que, dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{K_k(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Y. En efecto, todas las entradas de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de la k-ésima fueron tomadas, en orden, desde $\{x_{\phi^{(k)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$; por lo tanto, $\{z_{n+k-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_{\phi^{(k)}(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y consiguientemente el garantizado límite de $\left\{K_k(x_{\phi^{(k)}(n)})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también límite de $\{K_k(z_{n+k-1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, por último, también de $\{K_k(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Probemos ahora que $\{K(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Abreviemos $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Si $C = 0$, la convergencia deseada es obvia. En el caso no trivial $C > 0$, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la convergencia de $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a K, existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|K - K_N\| \leq \frac{\epsilon}{4C}.$$

Como la sucesión $\{K_N(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Y, es de Cauchy. Por lo tanto existe un umbral $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall\, m, n \geq N_1) \quad \|K_N(z_m) - K_N(z_n)\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

De esta forma, para todo $m, n \geq N_1$,

$$\begin{aligned}
&\|K(z_m) - K(z_n)\| \\
&\quad \leq \|K(z_m) - K_N(z_m)\| + \|K_N(z_m) - K_N(z_n)\| + \|K_N(z_n) - K(z_n)\| \\
&\qquad \leq \|K - K_N\|\,\|z_m\| + \frac{\epsilon}{2} + \|K - K_N\|\,\|z_n\| \leq \frac{\epsilon}{4C}C + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4C}C = \epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\{K(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio de Banach Y y por tanto convergente. $\square$

Notar que el teorema anterior establece, en particular, que si $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es el límite en norma de una sucesión de operadores $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ de rango finito, entonces $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. En algunos casos, este hecho ofrece una forma muy simple de probar que algún operador determinado es compacto.

Cabe preguntarse si el recíproco es válido. La respuesta es que, en general, no lo es[4]. Sin embargo, sí es cierto si Y es un espacio de Hilbert.

Teorema -1.6

Sean X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Entonces, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ de operadores de rango finito tal que $\|K_n - K\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Demostración: Utilizamos la definición equivalente de operador compacto que dice que la imagen de un conjunto acotado posee clausura compacta (cf. Definición -1.4). Entonces el conjunto $S := \overline{K\left(\overline{B_X(0,1)}\right)}$ es compacto en Y y por lo tanto, dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito de índices I_n y una colección de vectores $\{y_i\}_{i\in I_n} \subseteq Y$ tales que

$$S \subseteq \bigcup_{i\in I_n} B(y_i, 1/n). \tag{-1.7}$$

Definimos al espacio $Y_n := \operatorname{span}(\{y_i\}_{i\in I_n})$ y consideramos el operador proyección ortogonal $\Pi_n \colon Y \to Y_n$. Se sigue que el operador $K_n := \Pi_n K \colon X \to Y$ pertenece a $\mathcal{L}(X,Y)$ y es de rango finito. Además, dado $x \in \overline{B_X(0,1)}$, se deduce de la inclusión (-1.7) que existe algún $j \in I_n$ tal que $K(x) \in B(y_j, 1/n)$. Esto es, $\|K(x) - y_j\| < 1/n$.

[4] La demostración le granjeó a Per Enflo un ganso de parte de Stanisław Mazur.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\|K_n(x) - K(x)\| &\leq \|K_n(x) - y_j\| + \|y_j - K(x)\| \\ &= \|\Pi_n(K(x)) - \Pi_n(y_j)\| + \|K(x) - y_j\| \\ &= \|\Pi_n(K(x)) - y_j)\| + \|K(x) - y_j\| \\ &\leq 2\,\|K(x) - y_j\| \\ &\leq 2/n.\end{aligned}$$

Como esto vale para todo $x \in \overline{B_X(0,1)}$, $\|K_n - K\| \leq 2/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\square$

Combinando el Teorema -1.4 y el recién probado Teorema -1.6 inmediatamente obtenemos:

Teorema -1.7 (Alternativa de Fredholm para operadores compactos en un espacio de Hilbert)

Sea X un espacio de Hilbert y sea $K \in \mathcal{K}(X,X)$. Si $A := I - K$, entonces $R(A)$ es cerrado en X y $\dim N(A) = \dim N(A') < \infty$.

Nuestro siguiente objetivo es extender la alternativa de Fredholm al caso más general de un espacio de Banach. Lo haremos a través de una secuencia de cinco lemas.

Lema -1.4

Sea X un espacio de Banach y sea $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Si $A := I - K$, entonces $R(A)$ es cerrado en X.

Demostración: De acuerdo a un resultado de caracterización de operadores de rango cerrado en espacios de Banach[5], basta probar que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \operatorname{dist}(x, N(A)) \leq C \, \|A(x)\| \,. \tag{-1.8}$$

Para ello, notemos primero que, dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\hat{x} \in N(A)$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \leq \|x - \hat{x}\| < \operatorname{dist}(x, N(A)) + \epsilon.$$

Definiendo $\tilde{x} := x - \hat{x}$, se tiene

$$A(\tilde{x}) = A(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(x, N(A)) \leq \|\tilde{x}\| < \operatorname{dist}(x, N(A)) + \epsilon. \tag{-1.9}$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que (-1.8) es falso. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $y_n \in X$ tal que

$$\operatorname{dist}(y_n, N(A)) > n \, \|A(y_n)\| \,.$$

Definiendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, al vector reescalado $x_n := \dfrac{y_n}{\operatorname{dist}(y_n, N(A))}$, se obtiene

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \operatorname{dist}(x_n, N(A)) = 1 \quad \text{y} \quad \|A(x_n)\| < \frac{1}{n}.$$

[5] Op. cit., Teorema 3.17.

A su vez, aplicando (-1.9) con $x = x_n$ y $\epsilon = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene la existencia de una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad A(z_n) = A(x_n) \quad \text{y} \quad 1 \leq \|z_n\| < 2.$$

Como $x_n - z_n \in N(A)$,

$$\operatorname{dist}(z_n, N(A)) = \operatorname{dist}(x_n, N(A)) = 1.$$

A la vez, $\|A(z_n)\| = \|A(x_n)\| < 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, de modo que $A(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Como K es un operador compacto y la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión $\{z_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un $w \in X$ tales que $K\big(z_{\phi(n)}\big) \xrightarrow{n\to\infty} w$. Por lo tanto,

$$z_{\phi(n)} = K\big(z_{\phi(n)}\big) + A\big(z_{\phi(n)}\big) \xrightarrow{n\to\infty} w. \tag{-1.10}$$

Como A es continuo, $A(w) = \lim\limits_{n\to\infty} A\big(z_{\phi(n)}\big) = 0$. Luego, $w \in N(A)$ y

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad 1 = \operatorname{dist}\big(z_{\phi(n)}, N(A)\big) = \inf_{z\in N(A)} \big\|z_{\phi(n)} - z\big\| \leq \big\|z_{\phi(n)} - w\big\|.$$

Esta desigualdad contradice (-1.10) y por lo tanto necesariamente existe algún $C > 0$ tal que (-1.8) se cumple. □

Lema -1.5

Sea X un espacio de Banach y sea $K \in \mathcal{K}(X,X)$. Si $A := I - K$, entonces $\dim N(A)$ y $\dim N(A')$ son finitas.

Demostración: De acuerdo al Teorema -1.2, basta probar que la esfera unitaria en $N(A)$ es compacta para concluir que $\dim N(A) < \infty$. Sea entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, existe una subsucesión $\{x_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\left\{K\left(x_{\phi(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en X. Luego, como

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad 0 = A\big(x_{\phi(n)}\big) = x_{\phi(n)} - K\big(x_{\phi(n)}\big)\,,$$

se deduce que $\{x_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es convergente en X. Luego, la esfera unitaria de $N(A)$ es compacta y, consecuentemente, su dimensión es finita.

Por otro lado, posteriormente mostramos que, al ser K compacto, su adjunto $K' \in \mathcal{L}(X', X')$ también lo es, y en consecuencia el mismo argumento anterior da cuenta de que $\dim N(A')$ es finita. Esto es una deuda. ¿Nos pisaremos la cola? □

Lema -1.6

Sea X un espacio de Banach y sea $K \in \mathcal{K}(X,X)$. Si $A := I - K$, entonces $N(A) = \{0_X\}$ si y solo si $N(A') = \{0_{X'}\}$.

Demostración: $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $N(A') = \{0_{X'}\}$. Por el Lema -1.4, ya sabemos que $R(A)$ es cerrado. Por lo tanto, $R(A) = {}^\circ N(A') = {}^\circ\{0_{X'}\} = X$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $N(A) \neq \{0_X\}$.

Entonces existe $x_1 \in X \setminus \{0_X\}$ tal que $A(x_1) = 0_X$. Como A es sobreyectivo, existe $x_2 \in X$ tal que $A(x_2) = x_1$. Iterando este argumento, se construye una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $A(x_n) = x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, A^n es claramente un operador lineal y acotado, por lo que $N(A^n)$ es un subespacio cerrado de X. Además, para $n \geq 2$,

$$A^n(x_n) = A^{n-1}(x_{n-1}) = \cdots = A^2(x_2) = A(x_1) = 0_X$$

mas

$$A^{n-1}(x_n) = A^{n-2}(x_{n-1}) = \cdots = A^2(x_3) = A(x_2) = x_1 \neq 0_X,$$

lo cual muestra que $x_n \in N(A^n) \setminus N(A^{n-1})$. Aplicando el Lema de Riesz (Lema -1.1) con $X \leftarrow N(A^n)$, $S \leftarrow N(A^{n-1})$ y $\epsilon \leftarrow 1/2$, se deduce que existe $z_n \in N(A^n)$ tal que $\|z_n\| = 1$ y $\operatorname{dist}(z_n, N(A^{n-1})) \geq 1/2$.

Luego, para todo $n, m \geq 2$ con $n > m$ se tiene

$$\begin{aligned} \|K(z_n) - K(z_m)\| &= \|z_n - A(z_n) - z_m + A(z_m)\| \\ &= \|z_n - (z_m - A(z_m) + A(z_n))\|, \end{aligned}$$

y, dado que $N(A^m) \subseteq N(A^{n-1}) \subseteq N(A^n)$, resulta

$$A^{n-1}(z_m - A(z_m) + A(z_n)) = A^{n-1}(z_m) - A^n(z_m) + A^n(z_n) = 0_X.$$

Luego, $z_m - A(z_m) + A(z_n) \in N(A^{n-1})$. De acuerdo a lo anterior se concluye que

$$\|K(z_n) - K(z_m)\| \geq 1/2.$$

En consecuencia, $\{K(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes, lo que contradice la compacidad de K. Por lo tanto, necesariamente, $N(A) = \{0_X\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos ahora que $N(A) = \{0_X\}$. Dado que $R(A)$ es cerrado (por el Lema -1.4), se tiene que $R(A')$ también lo es[6]. Luego[7], $R(A') = N(A)^\circ = X'$. Entonces, dado que $A' = I' - K'$ y K' es compacto, el mismo análisis de la otra implicación sirve para probar que $N(A') = \{0_{X'}\}$. □

Necesitamos un lema auxiliar

Lema -1.7

Sea X un espacio de Banach.

1. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una colección linealmente independiente en X. Entonces existe algún $\hat{F} \in X'$ tal que

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, n-1\}) \quad \hat{F}(x_j) = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{F}(x_n) \neq 0.$$

2. Sea $\{F_1, \ldots, F_m\}$ una colección linealmente independiente en X'. Entonces existe algún $\hat{x} \in X$ tal que

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, m-1\}) \quad F_j(\hat{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad F_m(\hat{x}) \neq 0.$$

Demostración: $\boxed{1}$ Sea $M = \operatorname{span}(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\})$. Como M es un subespacio cerrado de X y $x_n \notin M$, $\operatorname{dist}(x_n, M) > 0$. Se deduce de una consecuencia[8] del Teorema de Hahn–Banach que existe $\hat{F} \in X'$ con $\|\hat{F}\| = 1$, $\hat{F}(x_n) = \operatorname{dist}(x_n, M) > 0$ y $\hat{F}\big|_M = 0$.

[6] Op. cit., Teorema 3.18.
[7] Op. cit., Teorema 3.26.
[8] Op. cit., Teorema 2.8.

$\boxed{2}$ Aplicamos inducción finita sobre m, la cantidad de funcionales. El caso $m = 1$ es inmediato ya que $F_m \neq 0$.
Supongamos ahora que la tesis es cierta en el caso $m = k - 1$ y consideremos una colección de k funcionales linealmente independientes $\{F_1, \ldots, F_k\}$. Aplicando la hipótesis de inducción a cada una de las subcolecciones de $k - 1$ funcionales dadas por

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}) \quad S_i := \big\{F_j : j \in \{1, \ldots, k-1\} \setminus \{i\}\big\} \cup \{F_i\},$$

se deduce que existen vectores $\hat{x}^{(1)}, \ldots, \hat{x}^{(k-1)}$ tales que, para $i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $F_j(\hat{x}^{(i)}) = 0$ si $j \neq i$ y (normalizando, si es necesario) $F_i(\hat{x}^{(i)}) = 1$. Así,

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\})\, (\forall\, x \in X) \quad F_i\left(x - \sum_{j=1}^{k-1} F_j(x)\, \hat{x}^{(j)}\right) = 0.$$

Afirmamos que debe existir algún $\tilde{x} \in X$ tal que

$$F_k\left(\tilde{x} - \sum_{j=1}^{k-1} F_j(\tilde{x})\, \hat{x}^{(j)}\right) \neq 0;$$

en efecto, si no fuese el caso, tendríamos que $F_k = \sum_{j=1}^{k-1} F_k(\hat{x}^{(j)})\, F_j$, lo que contradice la independencia lineal de $\{F_1, \ldots, F_k\}$. Por lo tanto, eligiendo $\hat{x} = \tilde{x} - \sum_{j=1}^{k-1} F_j(\tilde{x})\, \hat{x}^{(j)}$ se completa el paso de inducción. $\square$

Cabe mencionar que la demostración de la parte 2 del lema anterior se puede simplificar radicalmente si X es reflexivo.

Lema -1.8

Sean X un espacio de Banach, $K \in \mathcal{K}(X, X)$, $A := I - K$ y denotemos $n := \dim N(A)$ y $m := \dim N(A')$. Entonces, $n = m$.

Demostración: Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ y $\{F_1, \ldots, F_m\} \subseteq X'$ bases de $N(A)$ y $N(A')$, respectivamente. Sean $\hat{F} \in X'$ y $\hat{x} \in X$ los elementos cuya existencia garantiza el Lema -1.7. Sea $K_0 \colon X \to X$ el operador de rango finito dado por $K_0(x) = \hat{F}(x)\,\hat{x}$ para todo $x \in X$. Definimos al operador $A_1 := A - K_0 = I - (K + K_0)$.

Probaremos primero que

$$N(A_1) = \operatorname{span}\left(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\right). \tag{-1.11}$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in N(A_1)$. Entonces $A(x) = K_0(x) = \hat{F}(x)\,\hat{x}$. Del Lema -1.4 ya sabemos que $R(A)$ es cerrado. Entonces, de $F_m(\hat{x}) \neq 0$, inferimos que $\hat{x} \notin {}^{\circ}N(A') = R(A)$. Luego, necesariamente $\hat{F}(x) = 0$ y $A(x) = 0$. Por lo tanto, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j$. Evaluando el funcional $\hat{F}$ en esta igualdad resulta

$$0 = \hat{F}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \hat{F}(x_j) = \alpha_n\, \hat{F}(x_n).$$

Por construcción, $\hat{F}(x_n) \neq 0$, por lo que necesariamente $\alpha_n = 0$ y, de esta forma, $x \in \operatorname{span}\left(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\right)$. $\boxed{\supseteq}$ Para cualquier colección de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, x_j \in N(A)$ y $\hat{F}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, x_j\right) = 0$, por lo que $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, x_j \in N(A_1)$.

Ahora probaremos que

$$N(A_1') = \operatorname{span}(\{F_1, \ldots, F_{m-1}\}). \tag{-1.12}$$

Para ello primero notemos que $A_1' = A' - K_0'$ donde, para todo $G \in X'$, $K_0'(G) = G(\hat{x})\,\hat{F}$. $\boxed{\subseteq}$ Dado $G \in N(A_1')$, se tiene que $A'(G) = K_0'(G) = G(\hat{x})\,\hat{F}$. Recordemos que $R(A)$ es cerrado, por lo que[9] $N(A)^\circ = R(A')$. Entonces, desde $\hat{F}(x_n) \neq 0$, inferimos que que $\hat{F} \notin N(A)^\circ = R(A')$. Se sigue que, necesariamente, $G(\hat{x}) = 0$ y que $A'(G) = 0$. Por lo tanto, existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tales que $G = \sum_{j=1}^m \beta_j\, F_j$. Evaluando ambos lados en $\hat{x}$ resulta

$$0 = G(\hat{x}) = \sum_{j=1}^m \beta_j\, F_j(\hat{x}) = \beta_m\, F_m(\hat{x}).$$

Por construcción, $F_m(\hat{x}) \neq 0$, por lo que necesariamente $\beta_m = 0$ y, de esta forma, $G \in \operatorname{span}(\{F_1, \ldots, F_{m-1}\})$. $\boxed{\supseteq}$ Para cualquier colección de escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$, $\sum_{k=1}^{m-1} \beta_j\, F_j \in N(A')$ y $\sum_{k=1}^{m-1} \beta_j\, F_j(\hat{x}) = 0$, por lo que $\sum_{k=1}^{m-1} \beta_j\, F_j \in N(A_1')$.

Por (-1.11), $\dim N(A_1) = n - 1$ y por (-1.12), $\dim N(A_1') = m - 1$. Como $A_1 = I - (K + K_0)$ con $K + K_0$ compacto, podemos reiterar este proceso y construir sucesivamente operadores $A_k := A_{k-1} - K_{k-1}$ para $2 \leq k \leq \min(m, n)$ tales que $\dim N(A_k) = n - k$ y $\dim N(A_k') = m - k$. Al llegar a $k = \min(m, n)$, al menos uno de los dos núcleos $N(A_k)$ y $N(A_k')$ será trivial y por lo tanto, de acuerdo al Lema -1.6, $m - \min(m, n) = 0$ y $n - \min(m, n) = 0$, de donde $n = m$. □

[9] Op. cit., Teorema 3.26.

Por fin podemos establecer la alternativa de Fredholm en espacios de Banach.

Teorema -1.8 (Alternativa de Fredholm para operadores compactos en un espacio de Banach)

Sea X un espacio de Banach y sea $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Si $A := I - K$, entonces $R(A)$ es cerrado en X y $\dim N(A) = \dim N(A') < \infty$.

Demostración: Se sigue directamente de los Lemas -1.4, -1.5, -1.6 y -1.8. □

Más aún, podemos cambiar al operador I en $A = I - K$ por cualquier operador lineal y acotado invertible.

Teorema -1.9

Sean X e Y espacios de Banach y sean $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que B es biyectivo. Si $A := B - K$, entonces $R(A)$ es cerrado en Y y $\dim N(A) = \dim N(A') < \infty$.

Demostración: Por el Teorema de la Inversa Acotada, $B^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Por lo tanto, gracias a la parte 4 del Lema -1.3, $B^{-1}K \in \mathcal{K}(X, X)$. Luego, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un vector $y \in Y$, se tiene, por la continuidad de B^{-1}, que

$$B^{-1}A(x_n) = (I - B^{-1}K)(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} B^{-1}(y) \in X.$$

Se sigue del Teorema -1.8 que $R(I - B^{-1}K)$ es cerrado en X y, en consecuencia, existe algún $x \in X$ tal que $(I - B^{-1}K)(x) = B^{-1}(y)$. Aplicando B a cada lado de esta igualdad, resulta $A(x) = y$, lo cual prueba que $R(A)$ es cerrado en Y.

Por otro lado, a partir de las identidades $A = B(I - B^{-1}K)$ y $A' = (I - B^{-1}K)'B'$ y del hecho que B y B' son biyectivos, se obtiene que

$$N(A) = N(I - B^{-1}K) \quad \text{y} \quad N(A') = (B')^{-1} N\big((I - B^{-1}K)'\big)\,.$$

Como del Teorema -1.8 tenemos

$$\dim N(I - B^{-1}K) = \dim N\big((I - B^{-1}K)'\big) < \infty,$$

inferimos que $\dim N(A) = \dim N(A') < \infty$. $\square$

4.4 El adjunto de un operador compacto

Ahora nos pondremos a saldar la deuda que arrastramos desde la demostración del Lema -1.5. Necesitamos una definición y un lema preliminar.

Definición -1.5

Un subconjunto S de un espacio vectorial normado se dice *totalmente acotado* si, para cada $\epsilon > 0$, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq S$ tales que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \epsilon)$.

Lema -1.9

1. Sea X un espacio vectorial normado. Si $S \subseteq X$ es relativamente compacto, entonces es totalmente acotado.
2. Sea X un espacio de Banach. Si $S \subseteq X$ es totalmente acotado, entonces es relativamente compacto.

Demostración: $\boxed{1}$ Sea S un un subconjunto relativamente compacto de un espacio vectorial normado X y sea $\epsilon > 0$. Sea $x_1 \in S$. Si $S \subseteq B(x_1, \epsilon)$, esta parte está lista. Si no, entonces existe $x_2 \in S$ con $\|x_2 - x_1\| \geq \epsilon$. Si $S \subseteq B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, esta parte está lista. Si no, debe existir $x_3 \in S$ tal que $\|x_3 - x_1\| \geq \epsilon$ y $\|x_3 - x_2\| \geq \epsilon$. Si este proceso continúa indefinidamente, entonces se construye una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ que satisface $j \neq k \implies \|x_j - x_k\| \geq \epsilon$, lo que implica que aquella no posee subsucesiones convergentes. Esto contradice la hipótesis sobre S, así es que necesariamente el proceso debe interrumpirse en algún $N \in \mathbb{N}$ y de ese modo $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \epsilon)$.

$\boxed{2}$ Sea S un subconjunto totalmente acotado de un Banach X y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$.

Para $\epsilon = 1$, existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $\{z_1^{(1)}, \ldots, z_{N_1}^{(1)}\} \subseteq S$ tales que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_1} B(z_j^{(1)}, 1)$. Por lo tanto, una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe estar contenida en $B(z_{i_1}^{(1)}, 1)$ para algún $i_1 \in \{1, \ldots, N_1\}$.

A su vez, para $\epsilon = 1/2$, existen $N_2 \in \mathbb{N}$ y $\{z_1^{(2)}, \ldots, z_{N_2}^{(2)}\} \subseteq S$ tal que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(z_j^{(2)}, 1/2)$. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que está contenida en $B(z_{i_2}^{(2)}, 1/2)$ para algún $i_2 \in \{1, \ldots, N_2\}$.

Iterando este argumento se deduce que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $N_k \in \mathbb{N}$, $\{z_1^{(k)}, \ldots, z_{N_k}^{(k)}\} \subseteq S$ y una subsucesión $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n^{(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_k} B(z_j^{(k)}, 1/k)$ y $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(z_{i_k}^{(k)}, 1/k)$ para algún $i_k \in \{1, \ldots, N_k\}$.

Entonces, definiendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n := x_n^{(n)}$ se obtiene que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe N que satisface $1/N < \epsilon/2$, de modo que

$$m, n \geq N \implies \|y_m - y_n\| \leq \left\|y_m - z_{i_N}^{(N)}\right\| + \left\|y_n - z_{i_N}^{(N)}\right\| < \epsilon.$$

Esto prueba que la subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, como X es un espacio de Banach, es convergente.

Como hemos hallado que cualquier sucesión en S posee una subsucesión convergente, concluimos que S es relativamente compacto. $\square$

Teorema -1.10

Sean X e Y espacios vectoriales normados y sea $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Entonces, $K' \in \mathcal{K}(Y', X')$.

Demostración: Sea W un subconjunto acotado arbitrario de Y'. Como X' es un espacio de Banach, el Lema -1.9 nos indica que basta probar que $K'(W)$ es totalmente acotado en X'. Esto es obvio si $W = \emptyset$ o $W = \{0_{Y'}\}$. En otro caso, sea $C_0 = \sup_{G \in W} \|G\|_{Y'} > 0$ y sea $\epsilon > 0$ arbitrario.

Para ello notemos primero que, por la compacidad de K, $K(\overline{B(0_X, 1)})$ es totalmente acotado en Y. Por lo tanto, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \overline{B(0_X, 1)}$ tal que $K(\overline{B(0_X, 1)}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B\big(K(x_j), \epsilon/(3C_0)\big)$.

Definamos al operador $T\colon Y' \to \mathbb{R}^N$ mediante

$$(\forall\, G \in Y') \quad T(G) := \big(G(K(x_1)), \dots, G(K(x_N))\big)^{\mathtt{t}}.$$

Como T es un operador de rango finito, por la parte 2 del Lema -1.3, es compacto. Como W es un subconjunto acotado de Y', $T(W)$ es totalmente acotado. Por lo tanto, existen $M \in \mathbb{N}$ y $\{G_1, \dots, G_M\} \subseteq W$ tales que $T(W) \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B(T(G_j), \epsilon/3)$.

Así, dado cualquier $G \in W$, existe $k_G \in \{1, \dots, M\}$ tal que $\big\|T(G) - T(G_{k_G})\big\|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon/3$. Por la estructura de T, esto implica que

$$(\forall\, i \in \{1, \dots, N\}) \quad \big|G(K(x_i)) - G_{k_G}(K(x_i))\big| < \epsilon/3.$$

A su vez, dado cualquier $x \in \overline{B(0_X, 1)}$, existe $i_x \in \{1, \ldots, N\}$ tal que

$$\|K(x) - K(x_{i_x})\|_Y < \frac{\epsilon}{3C_0}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left|K'(G)(x) - K'(G_{k_G})(x)\right| &= \left|G(K(x)) - G_{k_G}(K(x))\right| \\
&\leq |G(K(x)) - G(K(x_{i_x}))| \\
&\quad + \left|G(K(x_{i_x})) - G_{k_G}(K(x_{i_x}))\right| \\
&\quad + \left|G_{k_G}(K(x_{i_x})) - G_{k_G}(K(x))\right| \\
&< \|G\|_{Y'} \|K(x) - K(x_{i_x})\|_Y + \frac{\epsilon}{3} \\
&\quad + \left\|G_{k_G}\right\|_{Y'} \|K(x_{i_x}) - K(x)\|_Y \\
&< 2C_0 \frac{\epsilon}{3C_0} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo de esta desigualdad respecto a $x \in \overline{B(0_X, 1)}$, se sigue que $\left\|K'(G) - K'(G_{k_G})\right\|_{X'} < \epsilon$. Como esto ocurre con todo $G \in W$,

$$K'(W) \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B(K'(G_j), \epsilon).$$

En consecuencia, $K'(W)$ es totalmente acotado en X'. $\square$

El siguiente recíproco del teorema anterior es cierto: Sea X un espacio vectorial normado e Y es un espacio de Banach. Sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $K' \in \mathcal{K}(Y', X')$. Entonces, $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. ¿Tarea?

4.5 Convergencias y compacidad

Definición -1.6

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio vectorial normado X converge débilmente a $x \in X$, y se escribe $x_n \xrightarrow{w} x$ o $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en X o $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en X-débil si, para todo $F \in X'$, $F(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$.

Notar que convergencia fuerte (en norma) implica convergencia débil. Además, en último término por el Teorema de Hahn–Banach, el límite débil es único.

Más aún, toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débil es acotada. En efecto, sea $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en X y consideremos la aplicación canónica $J\colon X \to X''$ definida por $J(x)(F) := F(x)$ para $x \in X$ y $F \in X'$. Como, por definición, para todo $F \in X'$ se tiene que $F(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$, es claro que

$$(\forall\, F \in X') \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |J(x_n)(F)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |F(x_n)| < \infty.$$

Luego, aplicando el Teorema de Banach–Steinhaus[10] con $X \leftarrow X'$, $Y \leftarrow \mathbb{R}$ e $I \leftarrow \mathbb{N}$, se deduce que existe $M > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|J(x_n)\| \leq M$.

[10] Op. cit., Teorema 3.11.

Lema -1.10

Sean X e Y espacios vectoriales normados y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ en X. Entonces, para todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ se tiene que $K(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} K(x)$ en Y.

Demostración: Notemos primero que, dado $G \in Y'$, claramente $G \circ K \in X'$ y luego $G(K(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} G(K(x))$, lo cual prueba que $K(x_n) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} K(x)$ en Y.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\{K(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en norma a $K(x)$. Se sigue que existe un $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \|K(x_n^{(1)}) - K(x)\| \geq \epsilon. \tag{-1.13}$$

Así, como $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y K es compacto, existe una subsucesión $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un límite $y \in Y$ tal que $K(x_n^{(2)}) \xrightarrow{n\to\infty} y$ en Y. Se sigue que $K(x_n^{(2)}) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y$ en Y y, por unicidad del límite débil, $y = K(x)$. Entonces se tiene la convergencia fuerte $K(x_n^{(2)}) \xrightarrow{n\to\infty} K(x)$, lo que contradice (-1.13).

Por lo tanto, necesariamente $K(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} K(x)$ en Y. □

Lema -1.11

Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z)$ y $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que, para todo $y \in Y$, $A_n(y) \xrightarrow{n\to\infty} A(y)$. Suponga además que existe $M > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leq M$. Entonces,

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(X,Y)) \quad \|A_n K - AK\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe algún $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $\{\|A_n K - AK\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0. En tal caso, debe existir $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{A_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \left\|A_{\phi(n)} K - AK\right\| > \epsilon.$$

Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ que satisface

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \left\|A_{\phi(n)} K(x_n) - AK(x_n)\right\| > \epsilon. \tag{-1.14}$$

Luego, como K es compacto, existe una subsucesión $\{x_{\psi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un límite $y \in Y$ tal que $K(x_{\psi(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Por la desigualdad triangular,

$$
\begin{aligned}
\left\|A_{\phi(\psi(n))}K(x_{\psi(n)}) - AK(x_{\psi(n)})\right\| &\leq \left\|A_{\phi(\psi(n))}K(x_{\psi(n)}) - A_{\phi(\psi(n))}(y)\right\| \\
&\quad + \left\|A_{\phi(\psi(n))}(y) - A(y)\right\| \\
&\quad + \left\|A(y) - AK(x_{\psi(n)})\right\| \\
&\leq M \left\|K(x_{\psi(n)}) - y\right\| \\
&\quad + \left\|A_{\phi(\psi(n))}(y) - A(y)\right\| \\
&\quad + \|A\| \left\|y - K(x_{\psi(n)})\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Esto contradice (-1.14). □

Es importante observar que el acotamiento uniforme de los operadores $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede obviarse del enunciado del Lema -1.11 cuando Y es Banach, ya que, en tal caso, dicha hipótesis es consecuencia directa del Teorema de Banach–Steinhaus. Encapsulamos esta observación en el siguiente resultado.

Lema -1.12

Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados con Y Banach y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z)$ y $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que, para todo $y \in Y$, $A_n(y) \xrightarrow{n\to\infty} A(y)$. Entonces,

$$
(\forall\, K \in \mathcal{K}(X,Y)) \quad \|A_n K - AK\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
$$

Corolario -1.3

Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tales que, para todo $G \in Y'$, $A_n'(G) \xrightarrow{n\to\infty} A'(G)$. Entonces,

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(Y,Z)) \quad \|KA_n - KA\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Demostración: Basta observar que[11]

$$\|KA_n - KA\| = \left\|(KA_n - KA)'\right\| = \left\|A_n'K' - A'K'\right\|,$$

recordar que el Teorema -1.10 provee que $K' \in \mathcal{K}(Z', Y')$ y luego aplicar directamente el Lema -1.12. $\square$

[11] Op. cit., Lema 3.4.

4.6 Método de Galerkin y alternativa de Fredholm

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) y sea $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ el operador inducido por una forma sesquilineal (o bilineal) y acotada $A\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$); esto es:

$$(\forall\, x \in X)\, (\forall\, y \in Y) \quad \langle \mathbb{A}(x), y\rangle_Y = A(x, y).$$

En lo que sigue **suponemos** que $\mathbb{A}$ es biyectivo. Entonces, para cada $F \in Y'$ existe un único $x \in X$ tal que $\mathbb{A}(x) = \mathcal{R}_Y(F)$, donde $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ es la aplicación de Riesz del Hilbert Y. Equivalentemente, para cada $F \in Y'$ existe un único $x \in X$ tal que

$$(\forall\, y \in Y) \quad A(x, y) = \overline{F(y)}.$$

Ahora, sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de X y de Y, respectivamente, y consideremos el esquema de Galerkin asociado: Hallar $x_n \in X_n$ tal que

$$(\forall\, y_n \in Y_n) \quad A(x_n, y_n) = \overline{F(y_n)}. \tag{-1.15}$$

Notar que (-1.15) puede replantearse como:

$$(\forall\, y_n \in Y_n) \quad A(x_n, y_n) = A(x, y_n),$$

o bien

$$(\forall\, y_n \in Y_n) \quad \langle \mathbb{A}(x_n), y_n\rangle_Y = \langle \mathbb{A}(x), y_n\rangle_Y,$$

lo cual implica que el esquema de Galerkin se reduce, equivalentemente, a: Hallar $x_n \in X_n$ tal que

$$\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x_n) = \mathbb{P}_n\mathbb{A}(x), \tag{-1.16}$$

donde $\mathbb{P}_n : Y \to Y_n$ es el proyector ortogonal.

Si introducimos el operador $\mathbb{A}_n := \mathbb{P}_n \left.\mathbb{A}\right|_{X_n}$, entonces (-1.16) se reescribe: Hallar $x_n \in X_n$ tal que

$$\mathbb{A}_n(x_n) = \mathbb{P}_n\mathbb{A}(x). \qquad \text{(-1.17)}$$

A la colección de esquemas de Galerkin (-1.17) indexados por $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ (equivalentemente, $F \in Y'$), se le llama *sistema de Galerkin* y se denota de ahora en adelante como $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición -1.7

Se dice que un sistema de Galerkin $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe un umbral $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $y \in \mathbb{A}(X)$, la ecuación $\mathbb{A}_n(x_n) = \mathbb{P}_n(y)$ tiene una única solución $x_n \in X_n$ para todo entero $n \geq N$ y, además, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, donde $x \in X$ es el único elemento tal que $\mathbb{A}(x) = y$.

En otras palabras, se dice que $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada entero $n \geq N$, el operador $\mathbb{A}_n : X_n \to Y_n$ es biyectivo y, para todo $x \in X$, $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x) \xrightarrow{n\to\infty} x$.

En general, una condición necesaria para la convergencia del sistema de Galerkin es

$$(\forall\, z \in X) \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(z, X_n) = 0, \qquad \text{(-1.18)}$$

supuesto que **asumimos** de ahora en adelante.

Lema -1.13

El sistema de Galerkin $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si existen $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que, para cada entero $n \geq N$, el operador $\mathbb{A}_n \colon X_n \to Y_n$ es biyectivo y $\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq M$.

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, el operador $\mathbb{A}_n \colon X_n \to Y_n$ es biyectivo y, para todo $x \in X$, $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x) \xrightarrow{n\to\infty} x$. Se sigue que la sucesión $\{\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x)\}_{n\geq N}$ es acotada para cada $x \in X$. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Banach–Steinhaus, se deduce que existe $M > 0$ tal que $\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}\| \leq M$ para todo $n \geq N$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que existen $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que, para cada entero $n \geq N$, el operador $\mathbb{A}_n \colon X_n \to Y_n$ es biyectivo y $\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}\| \leq M$. Sea $u_n \in X_n$ arbitrario. Puesto que $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(u_n) = u_n$, se sigue que para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\|x - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x)\right\| &= \left\|(I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A})(x)\right\| = \left\|(I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A})(x - u_n)\right\| \\ &\leq \left\|I - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}\right\| \|x - u_n\| \leq (1 + M) \|x - u_n\|,\end{aligned}$$

de donde, tomando supremo respecto a $u_n \in X_n$,

$$\left\|x - \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x)\right\| \leq (1 + M) \operatorname{dist}(x, X_n). \tag{-1.19}$$

Aplicando el supuesto (-1.18) obtenemos la condición que faltaba para la convergencia del sistema de Galerkin $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Este es el resultado principal de esta sección.

Teorema -1.11

Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) y sean $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbb{K} \in \mathcal{K}(X, Y)$ tales que

1. $\mathbb{A}$ es biyectivo y
2. $\mathbb{T} := \mathbb{A} + \mathbb{K}$ es inyectivo.

A su vez, sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subespacios de dimensión finita de X e Y, respectivamente, tales que la condición (-1.18) se satisface y supongamos que el sistema de Galerkin $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Entonces, el sistema de Galerkin $G\{\mathbb{T}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es.

Demostración: Notemos primero, de acuerdo al Teorema de la Inversa Acotada, que $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ y, por lo tanto, gracias a la parte 4 del Lema -1.3, se deduce que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{K} \in \mathcal{K}(X)$. A su vez, la convergencia del esquema de Galerkin $G\{\mathbb{A}; X_n, Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ asegura que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_1$, $\mathbb{A}_n$ es biyectivo y que, para todo $x \in X$, $\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(x) \xrightarrow{n\to\infty} x$. Se sigue, componiendo a derecha con el operador compacto $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}$ y aplicando el Lema -1.12, que

$$\left\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{-1.21}$$

El Lema -1.13 también asegura que existe $M > 0$ tal que, para todo entero $n \geq N_1$,

$$\left\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}\right\| \leq M. \tag{-1.22}$$

Por otro lado, la alternativa de Fredholm (Teorema -1.9) implica que $\mathbb{T} = \mathbb{A} + \mathbb{K}$ es biyectivo, y por lo tanto,

$$\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A} + \mathbb{K}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{T}$$

también lo es. Sumando y restando $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}$ a $\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K}$ obtenemos

$$\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} = (\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\left[\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\right]$$

y, debido a la convergencia dada en (-1.21), existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \implies \left\|(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\right\| \left\|\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}\right\| < 1/2.$$

Así, podemos aplicar un teorema de Carl Neumann[12] para afirmar que el operador

$$\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})$$

es invertible para cada entero $n \geq N_2$. Además, de la caracterización de la inversa que provee ese teorema se tiene que, para $n \geq N_2$,

$$\left\|\left[\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}(\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})\right]^{-1}\right\| \leq 2.$$

Por lo tanto, para $n \geq N_2$, $\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K} \colon X \to X$ también es invertible y

$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K})^{-1}\right\| \leq 2\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\right\|. \tag{-1.23}$$

[12] Theorem II.1/2 (p. 69) de **Kôsaku Yosida:** Functional Analysis (6th edition), Springer-Verlag, Berlin, 1980.

La demostración se completa verificando que $G\{\mathbb{T}; X_n, Y_n\}$ satisface la caracterización de convergencia que ofrece el Lema -1.13. En efecto, para $n \geq N := \max(N_1, N_2)$,

$$\mathbb{T}_n := \mathbb{P}_n\mathbb{T}|_{X_n} = (\mathbb{P}_n\mathbb{A} + \mathbb{P}_n\mathbb{K})|_{X_n} = \mathbb{A}_n + \mathbb{P}_n\mathbb{K}|_{X_n} = \mathbb{A}_n\ \left(\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K}\right)\Big|_{X_n},$$

el cual es invertible porque $\mathbb{A}_n \colon X_n \to Y_n$ lo es y $(\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K}) \colon X_n \to X_n$ es inyectivo. A su vez,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{T} &= (\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K})^{-1}\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n(\mathbb{A} + \mathbb{K})\\ &= (\mathbb{I} + \mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{K})^{-1}\mathbb{A}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{A}(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}),\end{aligned}$$

de donde, utilizando las estimaciones (-1.22) y (-1.23), se concluye que

$$\left\|\mathbb{T}_n^{-1}\mathbb{P}_n\mathbb{T}\right\| \leq 2M \left\|(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K})^{-1}\right\| \left\|\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{K}\right\|.$$

□

A continuación ilustramos la aplicabilidad del Teorema -1.11 mediante la resolución por un método de elementos finitos de un problema de valores de contorno unidimensional.

En concreto, dados $\Omega := (0, 1)$, $f \in L^2(\Omega)$ y una constante $k \in \mathbb{R}^+$, nos interesa la ecuación $u'' + k\,u = f$ en Ω con condiciones de contorno Dirichlet $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$. Es fácil ver que una formulación variacional está dada por: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega \left(u'\,v' - k\,u\,v\right) = -\int_\Omega f\,v. \tag{-1.24}$$

Sea $H := H_0^1(\Omega)$ y sean $A\colon H \times H \to \mathbb{R}$ y $K\colon H \times H \to \mathbb{R}$ las formas bilineales definidas por

$$(\forall\, w, v \in H) \qquad A(w,v) = \int_\Omega w'\, v' \quad \text{y} \quad K(w,v) = -k \int_\Omega w\, v.$$

Sean $\mathbb{A}\colon H \to H$ y $\mathbb{K}\colon H \to H$ los operadores lineales y acotados inducidos por A y K, respectivamente; esto es:

$$(\forall\, w, v \in H) \qquad \langle \mathbb{A}(w), v\rangle_H = A(w,v) \quad \text{y} \quad \langle \mathbb{K}(w), v\rangle_H = K(w,v).$$

Además, sea $\mathbf{f}$ el único miembro de H, garantizado por el Teorema de Representación de Riesz, que satisface

$$(\forall\, v \in H) \quad \langle v, \mathbf{f}\rangle_H = -\int_\Omega f\, v.$$

Entonces el problema (-1.24) se reescribe equivalentemente en la forma abstracta: Hallar $u \in H$ tal que

$$(\mathbb{A} + \mathbb{K})(u) = \mathbf{f}.$$

La forma bilineal A es claramente acotada y, por la desigualdad de Friedrichs–Poincaré[13], también es H-elíptica. Por el Lema de Lax–Milgram[14], el operador $\mathbb{A}$ es biyectivo.

[13] Lema 4.1 (p. 141) de **Gabriel N. Gatica:** Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

[14] Op. cit., Teorema 4.1 (p. 139).

En contraste, la forma bilineal $A + K$ no es H-elíptica en general (aunque todavía es acotada), así que no satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram.

Sin embargo, por el **Teorema de Rellich**, el operador inyección canónico $\tilde{i}\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacto. Por la parte 3 del Lema -1.3, el operador inyección canónico $i\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacto y, por el Teorema -1.10, también lo es $i'\colon L^2(\Omega)' \to H_0^1(\Omega)'$. Sea $\mathcal{K}\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)'$ definido por

$$(\forall\, w \in H_0^1(\Omega))\ (\forall\, v \in L^2(\Omega)) \quad \mathcal{K}(w)(v) := K(w, v).$$

El operador $\mathcal{K}$ es claramente acotado. Ahora,

$$\begin{aligned}(\forall\, w, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \langle \mathcal{R}_{H_0^1(\Omega)} \circ i' \circ \mathcal{K}(w), v\rangle_{H_0^1(\Omega)} &= i'(\mathcal{K}(w))(v) \\ &= \mathcal{K}(w)(i(v)) = K(w, i(v)) = K(w, v).\end{aligned}$$

por lo que $\mathbb{K} = \mathcal{R}_{H_0^1(\Omega)} \circ i' \circ \mathcal{K}$. Combinando esta caracterización con las partes 3 y 4 del Lema -1.3, concluimos que el operador $\mathbb{K}$ es compacto.

Supongamos que k **no** es un autovalor del problema: Hallar $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega e'\, v' = \lambda \int_\Omega e\, v. \tag{EV}$$

Entonces, dado $u \in H_0^1(\Omega)$ de $(\mathbb{A} + \mathbb{K})(u) = 0$, tenemos que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega [u'\, v' - k\, u\, v] = 0$. Por lo tanto, u debe ser nulo, porque de no serlo, sería autofunción con autovalor k del problema (EV). Así, bajo esta condición, inferimos que $\mathbb{A} + \mathbb{K}$ es un operador inyectivo.

Hemos probado que para k que no es autovalor del problema (EV), el operador $\mathbb{A}+\mathbb{K}$ verifica las hipótesis del Teorema -1.11. En consecuencia, todo esquema de Galerkin que sea convergente para $\mathbb{A}$ y cuyos espacios de dimensión finita verifiquen la condición de aproximación (-1.18), proporciona también un esquema de Galerkin convergente para nuestro operador $\mathbb{A}+\mathbb{K}$.

En particular, se sabe de la teoría de elementos finitos que un esquema de Galerkin convergente para $\mathbb{A}$ es aquel basado en la sucesión de subespacios $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H = H_0^1(\Omega)$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
H_n := \Big\{ & v \in C(\overline{\Omega}) : \\
& v(0) = v(1) = 0 \quad \wedge \quad (\forall\, j \in \{0, \ldots, n\}) \;\; v|_{(x_j, x_{j+1})} \in P_1\left((x_j, x_{j+1})\right) \Big\},
\end{aligned}
$$

donde, a su vez, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ es una partición uniforme de Ω; esto es, $x_j = j/(n+1)$, $0 \leq j \leq n+1$. De este modo, en virtud de la conclusión del Teorema -1.11, se deduce que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, existe un único $u_n \in H_n$ tal que

$$
(\forall\, v_n \in H_n) \quad \int_\Omega \left[u_n' v_n' - k\, u_n v_n \right] = -\int_\Omega f\, v_n .
$$

Además, en virtud de (-1.19), existe $C > 0$, independiente de n, tal que

$$
n \geq N \implies \|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \operatorname{dist}(u, H_n), \tag{-1.25}
$$

donde u es la solución exacta del problema variacional (-1.24). Con un argumento de regularidad elíptica podemos agrandar el combo a que u es solución del problema original $u'' + k\,u = f$ en Ω con $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$.

Más aún, de acuerdo a las propiedades de aproximación de los subespacios H_n, se sabe que existe $C > 0$ tal que, para todo $v \in H^2(\Omega)$, $\operatorname{dist}(v, H_n) \leq \frac{C}{n} \|v''\|_{L^2(\Omega)}$.

Entonces, dado que en nuestro caso $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u'' = f - k\, u \in L^2(\Omega)$, se tiene que $u \in H^2(\Omega)$. Por lo tanto, usando que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, lo cual se sigue del resultado de dependencia continua para (-1.24), se llega a que $\operatorname{dist}(u, H_n) \leq \frac{C}{n} \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Combinando esta estimación con (-1.25) se deduce finalmente que

$$n \geq N \implies \|u - u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{n} \|f\|_{L^2(\Omega)} .$$