3. Orden en los números reales

3.1. Axiomas de Orden

Con el fin de disponer de un criterio que nos permita " comparar " números reales, se define en $\mathbb{R}$, una relación de orden compatible con las operaciones de adición y multiplicación (con la estructura de cuerpo). Esto nos permite hablar de $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado.

O. El subconjunto $\mathbb{R}^+$ llamado conjunto de los reales positivos verifica:

O1. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$

O2. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

O3. Dado $a \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las siguientes condiciones se verifica:

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{R}^+$$

Sean a y b números reales, diremos que a es menor que b, lo que escribimos $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$. Diremos que a es menor o igual que b, los que escribimos $a \leq b$, si $a < b$ o $a = b$.

También podemos considerar las relaciones $>$ y $\geq$ definidas por:

$$\begin{aligned} a &> b \Longleftrightarrow b < a \\ a &\geq b \Longleftrightarrow b \leq a \end{aligned}$$

Observe que por definición:

$$a > 0 \Longleftrightarrow 0 < a \Longleftrightarrow a - 0 = a \in \mathbb{R}^+$$

O sea, *los números positivos son los mayores a cero.*

Consecuencias de los Axiomas de Orden

1. Ley de Tricotomía: Si a y b son dos números reales , una y sólo una de las siguientes condiciones se verifica: $a < b$, $a = b$, $b < a$.

2. $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$. En particular $1 \in \mathbb{R}^+$

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ b < c \Longrightarrow a < c$ (transitividad)

4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$:
   $a < b \wedge\ c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ c > 0 \Longrightarrow ac < bc$

7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

8. $a > 0 \Longleftrightarrow a^{-1} > 0 \qquad ; \qquad a < 0 \Longleftrightarrow a^{-1} < 0$

9. $ab > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$

10. $ab < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$

11. $a < b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
    Obs.- Cuando se escribe $a < c < b$ se quiere decir que $a < c \wedge c < b$

Demostración:(de alguna de las proposiciones)

2. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces hay dos casos posibles: $a \in \mathbb{R}^+$ o bien $-a \in \mathbb{R}^+$. Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces por O2, $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{R}^+$. Por otro lado, si $-a \in \mathbb{R}^+$, también por O2, $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^+$, pero $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a = a^2$.

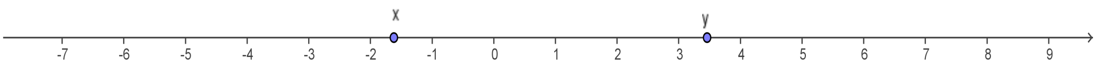
3. $a < b$, $b < c \Longrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$, $c - b \in \mathbb{R}^+$, luego por O1,
$c - a = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$.

8. Si $a > 0$, a^{-1} existe pues $a \neq 0$. Si suponemos que $a^{-1} < 0$, tendríamos que $1 = a \cdot a^{-1} < 0$, lo que es una condradicción, por lo tanto $a^{-1} > 0$.

11.- Dado que $1 > 0, 1+1 = 2 > 0$, luego $\frac{1}{2} > 0$. Entonces, como por hipótesis $b - a > 0$, luego $\frac{b+a}{2} - a = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, con lo cual $a < \frac{a+b}{2}$. Por otro lado $b - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, con lo cual $\frac{a+b}{2} < b$.

3.2. Representación geométrica de los números reales

Es posible obtener una representación geométrica del con junto de los números reales mediante los puntos de una línea recta. Es mejor considerar una recta L horizontal en el plano y entonces dos puntos sobre la recta, uno para representar al número 0 y el otro para representar al número 1, con la consideración que el cero quede a la izquierda del uno. De esta manera se obtiene la representación



donde la relación $x < y$ queda determinada por el hecho que el punto x esté a la izquierda del punto y.

La propiedad 11 nos asegura que no existe un número real positivo que sea menor o igual que cualquier otro número real positivo.

Sean a y b números reales, $a \leq b$. Los siguientes conjuntos reciben el nombre de **intervalos**

Intervalos acotados: Considerando que $a < x < b \Longleftrightarrow x > a \wedge x < b$

$$\begin{array}{ll}
(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{, intervalo abierto} \\
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{, cerrado} \\
(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{, semiabierto o semicerrado} \\
[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{, semiabierto o semicerrado}
\end{array}$$

Intervalos no acotados:

$$\begin{array}{ll}
(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} & [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} & (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(-\infty,+\infty) = \mathbb{R} &
\end{array}$$

4. Inecuaciones

En general, una inecuación corresponde a una relación de desigualdad entre expresiones algebraicas la cual puede presentarse en la forma

$$R(x) < 0$$

o con cualquiera de las desigualdades $\leq$, $>$ o $\geq$.

Resolver la inecuación, en la incognita $x : R(x) < 0$ significa determinar el conjunto de números reales que verifican la relación dada.

Por ejemplo,

1. $2x - 1 < 5$
2. $1 - 2x < 7$
3. $(x+3)(x-1) > 0$
4. $\dfrac{x}{x-2} < 3$
5. $x^2 + 4x + 9 > 0$
6. $8x > \dfrac{1}{x^2}$

5. Valor absoluto

Definición.- Si a es un número real, se define el **valor absoluto** de a mediante:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto:

1. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces: $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$; $-|a| \leq a \leq a$
2. Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x| &= c \Longleftrightarrow x = c \text{ o } x = -c \\ |x| &< c \Longleftrightarrow -c < x < c \\ |x| &> c \Longleftrightarrow x > c \text{ o } x < -c \end{aligned}$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} |ab| &= |a|\,|b| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$.

Considerando la recta real y las propiedades del valor absoluto , el valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos mediante:

$$d(a,b) = |b - a|$$

5.1. Inecuaciones con valor absoluto

Considerando la recta real y las propiedades del valor absoluto, el valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos mediante:

$$d(a,b) = |b-a| = \begin{cases} b - a & \text{si} \quad a \leq b \\ a - b & \text{si} \quad a > b \end{cases}$$

Note que: $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$; y para $a \neq b : d(a,b) > 0$.

Ejercicio 7 *a) Determine los números reales cuya distancia al* 5 *es igual a* 3 *unidades.*
b) Determine los números reales cuya distancia al 5 *es menor o igual a* 3 *unidades.*

En general para el número real a el conjunto de todos los números reales x cuya distancia al número a es menor o igual a 3 está determinado por la desigualdad

$$|x-a| \leq 3$$

Inecuación que se resuelve aplicando las propiedades del valor absoluto, de manera que

$$|x-a| \leq 3 \Longleftrightarrow -3 \leq x-a \leq 3 \Longleftrightarrow a-3 \leq x \leq a+3$$

Así el conjunto solución es

$$S =]a-3, a+3[$$

Problema 8 *Dado un número real a y $r > 0$, determinar el conjunto de todos los números reales x cuya distancia al punto a es menor que r.*

Haciendo uso de las propiedades vistas anteriormente:

- Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x| &< c \Longleftrightarrow -c < x < c \\ |x| &> c \Longleftrightarrow x > c \quad \vee \quad x < -c \end{aligned}$$

resuelva las siguientes inecuaciones

1. $|x+2| < 4$
2. $|x+2| > 4$
3. $|5x+7| < -1$
4. $|5x+7| > -3$
5. $|2x+3| < |x-1|$
6. $|2x+3| + 1 < |x-1|$
7. $\frac{1}{|x-3|} < 1$
8. $|x^2 - 5x + 6| \leq 2$

Ejercicio 9 *Establecer las propiedades:*
$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$
$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
Por tanto, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$

6. Axioma de Arquímedes

Básicamente este axioma establece que el conjunto de los números naturales tiene elementos tan grandes como se requiera. Concretamente:

Dados un número real y cualquiera y un número $x > 0$, existe un natural n tal que

$$nx > y$$

En particular, para $x = 1$: dado un número real y, existe un número natural n tal queε

$$n > y$$

Esta propiedad determina que dado cualquier $\varepsilon > 0$ (por muy pequeño que sea), existe un natural n tal que $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ y luego

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Así entonces, los términos de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ se aproximan cada vez más al valor 0, en el sentido que:

No importa lo pequeño que sea $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ y por tanto

$$\forall n : n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

O sea, casi todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo abierto $]-\varepsilon.\varepsilon[$ (centrado en 0).

7. Axioma del supremo.

Una importante propiedad de los números reales establece que: .$^{\mathrm{en}}$tre dos números reales existe un número racionalτ .$^{\mathrm{en}}$tre dos numeros reales existe un número irracional". Esta propiedad determina que entre dos números reales existen infinitos números racionales e infinitos números irracionales.

Por esto se dice que el conjunto de los racionales es **denso** dentro de la recta real $\mathbb{R}$ (los racionales están en todas partes). Lo mismo ocurre con los irracionales.

Esta característica de los reales se complementa con la propiedad que establece que los números reales es un continuo de puntos sobre la recta real, o sea sobre le recta real no encontramos agujeros, no hay puntos de la recta que no correspondan a un número real. Esto queda determinado por el llamado Axioma del Supremo que formulamos a continuación:

Definición 10 *Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que el número real a es una cota superior de S si se verifica*

$$\forall x \in S : x \leq a$$

Respecto a esta definición es claro que:

- No todo subconjunto S de los reales posee cota superior. Por ejemplo, el conjunto de los naturales no posee cota supérior, ya que de acuerdo al Axioma de Arquímedes, dado cualquier real x, hay un natural N mayor que él ($N > x$).
- Si a es cota superior de S, entonces todo número $b > a$ también es cota superior de S.
- No confundir este concepto con el de "mayor elemento de un conjunto"

  a es mayor elemento de $S \Longleftrightarrow$

  $$a \in S \wedge (\forall x \in S : x \leq a)$$

  Por ejemplo, en intervalo abierto $S =]0, 1[$ tiene como cota superior el número 1, pero no tiene mayor elemento.

Definición 11 *El conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente cuando él posee una cota superior.*

Definición 12 *El número real s es el supremo del conjunto S si y solo si*
a) s es cota superior de S y
b) ningún número menor que s es cota superior de S
Se escribe $s = \sup S$

En resumen, el supremo de un conjunto es la menor de todas sus cotas superiores.
El axioma del supremo establece que:

Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$ que sea no vacío y acotado superiormente posee supremo

---

Exemplo 13 *El intervalo abierto $I =]0, 1[$ es no vacío y acotado superiormente. El supremo de I es el número* 1.

Exemplo 14 *El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ es no vacío y acotado superiormente. El supremo de S (que existe) define al número real $\sqrt{2}$.*

La construcción anterior (definiciones de cota superior hasta axioma del supremo) tiene un análogo en el concepto de cota inferior de un conjunto e ínfimo del conjunto. (Intente formalizar estas definiciones y la conclusión respecto al ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$)