Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo III (521227)
Listado 6

1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función definida por $f(x,y)=ax^2+by^2$, donde a y b son números reales dados.

   (a) Si $a>0$ y $b>0$, muestre que f tiene un mínimo absoluto en el origen.

   (b) Si $a<0$ y $b<0$, ¿ f tiene puntos extremos locales?.Justifique.

   (c) Si $ab<0$, muestre que f tiene un punto de ensilladura en el origen.

   (d) Si $ab=0$, ¿ f tiene puntos extremos locales?. Justifique.

2. Muestre que la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\;\; f(x,y,z)=\arctan(x+2y+3z)$ no tiene extremos locales.

3. Muestre que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\;\; f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4$ tiene solamente un extremo local en el origen, el cual es un mínimo.

4. Muestre que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\;\; f(x,y)=|x|+|y|$, tiene un mínimo local en el origen. Observe que f no es diferenciable en $(0,0)$ ¿por que?. Haga un esquema mostrando las curvas de nivel de está función cerca del origen.

5. Considere la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\;\; f(x,y)=x^{2/3}+y^{2/3}$. Constate que el origen es un punto crítico de está función. Use de hecho de que $f(x,y)\geq 0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, para concluir f tiene un mínimo absoluto en el origen.

6. Considere la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\;\; f(x,y,z)=\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right).$ Muestre que esta función puede tener a lo más un extremo local, el cual se enocontraría en el origen. ¿Qué tipo de extremo es?

7. Identifique y clasifique los puntos críticos de la función correspondiente.

   (a) $f(x,y)=y^2(\sin x-x/2)\,.$

   (b) $f(x,y)=\cos(x+y)+\sin(x-y)\,.$

   (c) $f(x,y)=y^x.$

   (d) $f(x,y)=x/y.$

   (e) $f(x,y)=ye^{-x^2}.$

8. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y)=\left(ax^2+by^2\right)e^{-x^2-y^2}\text{ donde } b>a>0.$$

9. Encontrar los extremos locales de la función

$$f(x,y) = 2x^3 + (x-y)^2 - 6y.$$

10. La suma de las longitudes de las 12 aristas de un bloque rectangular es a; la suma de las áreas de las 6 caras es $a^2/25$. Calcular las longitudes de las aristas cuando es máximo del bloque sobre el de un cubo cuya arista es igual a la menor arista del bloque.

11. Encontrar los extremos locales de la función

$$f(x,y,z) = x^2 (y-1)^2 (z+1/2)^2 .$$

12. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

13. Hallar los extremos absolutos $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ en el circulo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

14. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 y^3 (1-x-y)$ en el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$

15. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ en el conjunto $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3\right\}$.

16. Calcular los extremos absolutos del campo escalar $f(x,y,z) = x + y + z$ en el conjunto $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}$.

17. Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y,z) = xy^2z^3$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

18. De acuerdo con las presentes normas postales en Chile, se puede transportar un bulto rectangular con longitudes de sus lados iguales a x, y, z pulgadas, con $x \leq y \leq z$ sólo si $2(x+y) + z \leq 100$. Encontrar el volumen máximo de un bulto transportable bajo esta condición.

19. Minimizar la función $f(x,y) = x^2y^2$ sujeta a la condición $x + y = 1$.

20. Maximizar la función $f(x,y) = \cos[\pi(x+y)]$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$.