525043
Taller de Razonamiento Matemático II

Nicolás Sanhueza-Matamala
nsanhuezam@udec.cl
ICM, Universidad de Concepción, Chile

Objetivos de hoy

- Introducción a la combinatoria
- Algunos problemas cortos

Combinatoria

Combinatoria: El arte de contar.

Por ejemplo, podemos determinar la cantidad de formas de ordenar un grupo de objetos, *sin necesidad* de listar todos los objetos en cuestión.

Principio de multiplicación

Si realizar una experiencia E_1 puede arrojar m resultados, y ante la ocurrencia de cualquiera de estos otra experiencia E_2 puede arrojar n resultados; entonces la realización conjunta de E_1 y E_2 puede arrojar mn resultados.

Principio de multiplicación

Si realizar una experiencia E_1 puede arrojar m resultados, y ante la ocurrencia de cualquiera de estos otra experiencia E_2 puede arrojar n resultados; entonces la realización conjunta de E_1 y E_2 puede arrojar mn resultados.

Iterando esta observación, si una experiencia E_1 puede arrojar n_1 resultados; para cualquiera de estos una experiencia E_2 puede arrojar n_2 resultados... y así hasta E_k que puede arrojar n_k resultados; entonces la realización conjunta de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ se puede realizar de $n_1 \times \cdots \times n_k$ maneras distintas.

Problema 1: ¿Cuántas palabras de dos letras terminan en vocal?

Ej: ba, re, po, ju, etc.

Problema 1: ¿Cuántas palabras de dos letras terminan en vocal?

Ej: ba, re, po, ju, etc.

E_1 = ubicar la letra inicial = 27 posibilidades

Problema 1: ¿Cuántas palabras de dos letras terminan en vocal?

Ej: ba, re, po, ju, etc.

E_1 = ubicar la letra inicial = 27 posibilidades

E_2 = ubicar la letra final = 5 posibilidades

Problema 1: ¿Cuántas palabras de dos letras terminan en vocal?

Ej: ba, re, po, ju, etc.

E_1 = ubicar la letra inicial = 27 posibilidades

E_2 = ubicar la letra final = 5 posibilidades

Total = $27 \times 5 = 135$.

Problema 2: Las patentes automovilísticas usan 4 letras y 2 números. No se usan las letras M, N, Ñ, Q ni las vocales; y los números van del 10 al 99. ¿Cuántas patentes posibles se pueden armar?

Problema 2: Las patentes automovilísticas usan 4 letras y 2 números. No se usan las letras M, N, Ñ, Q ni las vocales; y los números van del 10 al 99. ¿Cuántas patentes posibles se pueden armar?

$$18 \times 18 \times 18 \times 18 \times 90 = 9447840$$

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

Podemos elegir el primer elemento de n maneras distintas.

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

Podemos elegir el primer elemento de n maneras distintas.

Dada esta elección, podemos elegir el segundo elemento de $n - 1$ maneras distintas.

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

Podemos elegir el primer elemento de n maneras distintas.

Dada esta elección, podemos elegir el segundo elemento de $n - 1$ maneras distintas.

$\ldots$

En general, podemos elegir el k-ésimo elemento de $n - k + 1$ maneras distintas, para todo $1 \leq k \leq n$.

¿Cuántas maneras hay para ordenar un conjunto de n elementos?

Podemos elegir el primer elemento de n maneras distintas.

Dada esta elección, podemos elegir el segundo elemento de $n - 1$ maneras distintas.

$\ldots$

En general, podemos elegir el k-ésimo elemento de $n - k + 1$ maneras distintas, para todo $1 \leq k \leq n$.

Por lo tanto, el total de maneras es

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times 1 = n!$$

Dado $m \leq n$, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

Dado $m \leq n$, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

$$n^m$$

Dado $m \leq n$, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

$$n^m$$

¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, sin repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

Dado $m \leq n$, ¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, con posibles repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

$$n^m$$

¿cuántas elecciones *ordenadas* de m elementos, sin repeticiones, se pueden hacer usando un conjunto de n elementos?

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Problema 3

Un grupo de 6 hombres y 3 mujeres deben formar seleccionar sus jugadores para un torneo de tenis mixto, y para ello deben elegir 3 parejas mixtas. ¿De cuántas formas se puede realizar esto?

Problema 4

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden armar con los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, si es que la suma de las cifras es par?

Una *permutación* de n elementos es una secuencia ordenada de estos elementos, sin repetir.

Por ejemplo, $(4, 2, 3, 1)$ es una permutación de $\{1, 2, 3, 4\}$. También usaremos la notación 4231.

Hay $n!$ permutaciones de un conjunto de n elementos.

Problema 5

¿En cuántas permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ hay tal que los múltiplos de 3 aparezcan consecutivamente?