UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 3 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios / desarrollos)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 50 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Sean $F_1, F_2 \in \big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$, definidas para cualquier $q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ por **(15 puntos)**

$$F_1(q) := \int_0^1 q(x)\,dx \quad \wedge \quad F_2(q) := \int_{-1}^0 q(x)\,dx\,.$$

Definimos ahora $C := \{F_1, F_2\}$.

1.1) Demostrar que el conjunto C es una base de $\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$.

Desarrollo: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\,F_1 + \beta\,F_2 = \Theta \in \big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$. El objetivo es construir un sistema cuadrado de ecuaciones, en α, β para poder resolverla. Para ello, Introducimos ahora $\{v, w\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, i.e. $v, w \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}$: $v(x) := 1$ y $w(x) := x$, respectivamente. Esto permite obtener

$$F_1(v) = 1\,,\; F_2(v) = \frac{1}{2}\,,\; F_2(w) = \frac{1}{2}\,,\; F_2(w) = -\frac{1}{2}\,.$$

Así, evaluando la ecuación dada en v y w, obtenemos el sistema (simplificado):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad C \text{ es l.i.}$$

Como estamos en Dimensión Finita, sabemos que $\dim\Big(\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'\Big) = \dim\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big) = 2$. Esto permite concluir que $\langle C\rangle$ es un subespacio vectorial de $\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$ de dimensión 2, lo cual implica que $\langle C\rangle = \big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$. En consecuencia, se concluye que $C = \{F_1, F_2\}$ es una Base de $\big(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\big)'$.

1.2) Determinar la base B de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que $B' = C$.

Desarrollo: Sea $B := \{p_1, p_2\}$ la base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que su base dual es $B' = C = \{F_1, F_2\}$. Como $p_1 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, existen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) := a_1 + b_1\,x$. Por definición de Base Dual, se cumple

$$\begin{cases} F_1(p_1) = 1 \\ F_2(p_1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 + \frac{b_1}{2} = 1 \\ a_1 - \frac{b_1}{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2}\,,\; b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall\,x \in \mathbb{R} : p_1(x) = \frac{1}{2} + x\,.$$

En forma análoga, dado que $p_2 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, existen $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}$, $p_2(x) := a_2 + b_2\,x$. Por definición de Base Dual, se cumple

$$\begin{cases} F_1(p_2) = 0 \\ F_2(p_2) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_2 + \frac{b_2}{2} = \\ a_2 - \frac{b_2}{2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}\,,\; b_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \forall\,x \in \mathbb{R} : p_2(x) = \frac{1}{2} - x\,.$$

Finalmente, $B = \{p_1, p_2\}$ (ya determinada) es la base solicitada.

Problema 2. Sean $B_1 := \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_2 := \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Si $\varphi \in \left(\mathbb{R}^3\right)'$ tiene coordenadas $(1,-3,2)^{\mathfrak{t}}$ respecto de B_1', determinar sus coordenadas respecto de B_2'. **(10 puntos)**

Desarrollo: Por definición de coordenadas, y considerando que B_1' es la BASE DUAL de B_1, tenemos:

$$\varphi(1,1,0) \,=\, 1\,,\; \varphi(1,0,1) \,=\, -3\,,\; \varphi(0,1,1) \,=\, 2\,.$$

Nos piden

$$[\varphi]_{B_2'} \,=\, \begin{pmatrix} \varphi(1,1,-1) \\ \varphi(1,-1,1) \\ \varphi(-1,1,1) \end{pmatrix} \tag{1}$$

La estrategia consistirá en expresar los elementos de B_2 como combinación lineal de elementos de B_1. Para $(1,1,-1)$. Sean $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha\,(1,1,0) \,+\, \beta\,(1,0,1) \,+\, \gamma\,(0,1,1) \,=\, (1,1,-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha \,+\, \beta \,=\, 1 \\ \alpha \,+\, \gamma \,=\, 1 \\ \beta \,+\, \gamma \,=\, -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha \,=\, 3/2 \\ \beta \,=\, -1/2 \\ \gamma \,=\, -1/2 \end{cases} .$$

Así, $\varphi(1,1,-1) \,=\, \frac{3}{2}(1) \,-\, \frac{1}{2}(-3) \,-\, \frac{1}{2}(2) \,=\, 2$.
Procediendo de manera similar (¡HACERLO!), se deduce que

$$(1,-1,1) \,=\, -\frac{1}{2}\,(1,1,0) \,+\, \frac{3}{2}\,(1,0,1) \,-\, \frac{1}{2}\,(0,1,1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(1,-1,1) \,=\, -\frac{1}{2}(1) \,+\, \frac{3}{2}(-3) \,-\, \frac{1}{2}(2) \,=\, -6\,,$$
$$(-1,1,1) \,=\, -\frac{1}{2}\,(1,1,0) \,-\, \frac{1}{2}\,(1,0,1) \,+\, \frac{3}{2}\,(0,1,1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1,1,1) \,=\, -\frac{1}{2}(1) \,-\, \frac{1}{2}(-3) \,+\, \frac{3}{2}(2) \,=\, 4\,.$$

Finalmente, reemplazando en (1), se concluye que $[\varphi]_{B_2'} \,=\, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Problema 3. Sean $G_1, G_2 \in \left(\mathbb{R}^3\right)'$, definidas para cualquier $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ por **(15 puntos)**

$$G_1(x_1,x_2,x_3) \,:=\, 3\,x_1 \,+\, x_2 \quad \wedge \quad G_2(x_1,x_2,x_3) \,:=\, 2\,x_2 \,+\, x_3\,.$$

Sea también $S \,:=\, \langle\{(2,3)\}\rangle$. Determinar explícitamente la regla de correspondencia de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\mathrm{Ker}(T') \,=\, \langle\{G_1,G_2\}\rangle \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(T') \,=\, S^\circ\,.$$

Desarrollo: En vista que estamos en DIMENSIÓN FINITA, invocamos algunas relaciones establecidas (en clases) entre T y su dual T':

$$S^\circ \,=\, \mathrm{Im}(T') \,=\, (\mathrm{Ker}(T))^\circ \quad \Rightarrow S \,=\, {}^\circ S^\circ \,=\, {}^\circ\,(\mathrm{Ker}(T))^\circ \,=\, \mathrm{Ker}(T) \quad \Rightarrow \quad T(2,3) \,=\, (0,0,0)\,,$$
$$(\mathrm{Im}(T))^\circ \,=\, \mathrm{Ker}(T') \,=\, \langle\{G_1,G_2\}\rangle \quad \Rightarrow \mathrm{Im}(T) \,=\, {}^\circ\,(\mathrm{Im}(T))^\circ \,=\, {}^\circ\langle\{G_1,G_2\}\rangle \,=\, \mathrm{Ker}(G_1) \cap \mathrm{Ker}(G_2)\,.$$

Luego, en vista que

$$\mathrm{Ker}(G_1) \cap \mathrm{Ker}(G_2) \,=\, \cdots\, \langle\{(1,-3,6)\}\rangle\,,$$

se deduce que $\mathrm{Im}(T) \,=\, \langle\{(1,-3,6)\}\rangle$. Consideramos $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, l.i. con $(2,3)$. Por tanto, $\{(2,3),(1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Además, consideramos $T(1,0) \,=\, (1,-3,6)$. Sea ahora $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, fijo pero arbitrario. Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1,x_2) \,=\, \alpha\,(2,3) \,+\, \beta\,(1,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta \,=\, x_1 \,-\, \frac{2}{3}x_2\,, \\ \alpha \,=\, \frac{1}{3}x_2\,. \end{cases}$$

De esta forma, resulta $T(x_1,x_2) \,=\, \alpha\,T(2,3) \,+\, \beta\,T(1,0) \,=\, \left(x_1 \,-\, \frac{2}{3}x_2\right)\,(1,-3,6)$. Finalmente, se concluye que $\forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, T(x_1,x_2) \,:=\, \left(x_1 \,-\, \frac{2}{3}x_2\right)\,(1,-3,6)$.

Problema 4. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios vectoriales propios (i.e. no triviales) de V, tales que $V = U \oplus W$. Demostrar que $V' = U^\circ \oplus W^\circ$. **(10 puntos)**
Desarrollo: Recordamos que $V = U \oplus W$ equivale a decir que $V = U + W$ y $U \cap W = \{\theta_V\}$. Como estamos en Dimensión Finita, invocamos algunas relaciones establecidas (en clases) entre las propiedades de Aniquiladores, los cuales permiten inferir lo siguiente:

$$U + W = V \quad \Rightarrow \quad (U + W)^\circ = V^\circ = \{\Theta_{V'}\} \quad \Rightarrow \quad U^\circ \cap W^\circ = \{\Theta_{V'}\},$$
$$U \cap W = \{\theta_V\} \quad \Rightarrow \quad (U \cap W)^\circ = \{\theta_V\}^\circ = V' \quad \Rightarrow \quad U^\circ + W^\circ = V'.$$

Finalmente, concluimos que $V' = U^\circ \oplus W^\circ$.

Problema 5. Considere V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión infinita. Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $ST = TS$.

5.1) Demuestre que $\mathrm{Ker}(S)$ es invariante bajo T. **(05 puntos)**

Desarrollo: Sea $z \in \mathrm{Ker}(S)$, fijo pero arbitrario, lo cual significa que $S(z) = \theta_V$. Esto implica

$$0 = T(\theta_V) = T(S(z)) = (TS)(z) = (ST)(z) = S(T(z)) \quad \Rightarrow \quad T(z) \in \mathrm{Ker}(S).$$

Como $z \in \mathrm{Ker}(S)$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $\forall\, z \in \mathrm{Ker}(S) : T(z) \in \mathrm{Ker}(S)$, lo cual nos dice que $\mathrm{Ker}(S)$ es invariante bajo T.

5.2) Demuestre que $\mathrm{Im}(T)$ es invariante bajo S. **(05 puntos)**

Desarrollo: Sea $w \in \mathrm{Im}(T)$, fijo pero arbitrario. Esto implica que $\exists\, z \in V : T(z) = w$. De esta forma, tenemos

$$S(w) = S(T(z)) = (ST)(z) = (TS)(z) = T(S(z)) \in \mathrm{Im}(T) \quad \Rightarrow \quad S(w) \in \mathrm{Im}(T).$$

Como $w \in \mathrm{Im}(T)$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $\forall\, w \in \mathrm{Im}(T) : S(w) \in \mathrm{Im}(T)$, i.e. $\mathrm{Im}(T)$ es invariante bajo S.

RBP/rbp 02.07.2021