



Listado 4: Conjuntos

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado. Los problemas marcados con **(V)** serán resueltos en videos que publicaremos en Canvas.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

- (a) $[-10, 1] \cup [5, +\infty[$.
(b) $[-2, 3] \cap [1, 5]$.
(c) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\} \setminus \{x^2 : x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \leq 2\}$.
(d) $\{4, 3, 6, 7, 1, 9\} \cap \{5, 6, 8, 4\}$.

Observación: Realice primero la operación correspondiente y describa por comprensión el conjunto resultante.

2. Considere $A = \{4, 3, 6, 7, 1, 9\}$, $B = \{5, 6, 8, 4\}$ y $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9, 10\}$. Determine

- (a) $\mathcal{U} \setminus A$,
(b) $\mathcal{U} \setminus A$,
(c) $A \cap A^c$,
(d) $A \setminus B^c$,
(e) $A \cup B$,
(f) $A \setminus B$,
(g) $A^c \cap B$,
(h) $\mathcal{U} \setminus (A^c \cap B)$.

Observación: Con A^c se denota al conjunto $\mathcal{U} \setminus A$ y con B^c , a $\mathcal{U} \setminus B$.

3. Determine:

- (a) $[0, 10] \cap [7, 12]$,
(b) $[-1, 6] \setminus [2, +\infty[$,
(c) $] - 1, 0] \cup [0, 5]$,
(d) $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

2. Problemas intermedios

1. Sean

$$\begin{aligned} A &= \{x + 3 : (x \in \mathbb{Z}) \wedge -5 \leq x \leq 5\}, & B &= \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x - 6 = 0\}, \\ C &= \{2q + 1 : q \in \mathbb{Z}\}, & D &= \{x^2 + 2 : (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 5)\}, \end{aligned}$$

determine

- (a) $A \cap B$,
(b) $C \setminus D$,
(c) **(A)** $D \setminus C$,
(d) $B \setminus A$,
(e) **(A)** $A \cup D$,
(f) **(A)** $B \cap (\mathbb{Z} \setminus C)$.

2. Sea $A = \{a, b\}$. Determine:

- (a) $\mathcal{P}(A)$. (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. (c) **(A)** $A \cap \mathcal{P}(A)$. (d) **(A)** $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\emptyset)$.

3. Sea $A = \{1, \star, \{2\}\}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- (a) $1 \in A$. (d) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. (g) $\star \in \mathcal{P}(A)$.
 (b) $\{1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. (e) $\{\{2\}\} \in \mathcal{P}(A)$. (h) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$.
 (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$. (f) $\{\star, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. (i) $\{1, \star, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

4. Considere $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas.

- (a) $[\{2, 3, 4\} \subseteq B \wedge \{1, 4\} \notin \mathcal{P}(B)] \rightarrow \{1, 2\} \not\subseteq B$,
 (b) $(\forall x \in \mathcal{P}(A))(\forall y \in x)(y \in A)$.

5. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

- (a) $\{2, 1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
 (b) $\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
 (c) $\{1\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
 (d) $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 0$.
 (e) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{1\})$.
 (f) $\{X \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) : |\mathcal{P}(X)| = 8\} = \{X \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) : |X| = 3\}$.
 (g) **(A)** El conjunto $\{X \in \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\}) : |X \cup \{0, 1\}| = 2\}$ tiene cardinalidad 3.
 (h) $\emptyset = \{\emptyset\}$.
 (i) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

6. Considere:

$$A_1 = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : 2 \in X\}, A_2 = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : |X| = 2\}, A_3 = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \cap \{1, 2\} = X\}.$$

- (a) Defina por extensión a los conjuntos anteriores.
 (b) **(A)** Defina por comprensión $A_1 \cap A_2$.
 (c) ¿Es 2 elemento de $A_1 \cup A_2$? Justifique su respuesta.
 (d) Determine $A_2 \setminus A_3$.

7. **(A)** En los juegos panamericanos que se realizaron en Chile 60 de los atletas participantes obtuvieron, a lo más, una medalla de cada tipo (oro, plata o bronce).

Sabemos que de esos 60:

- 20 atletas obtuvieron oro y de esos 20, 10 atletas obtuvieron **solo** oro,
- 25 deportistas ganaron plata,
- 21 obtuvieron bronce,
- 6 recibieron bronce y plata, pero no oro,
- 7 obtuvieron oro y plata,
- 3 recibieron las tres medallas.

Teniendo en cuenta las cantidades anteriores responda, justificando sus respuestas:

- (a) ¿Cuántos atletas no obtuvieron medallas?
 (b) ¿Cuántos atletas obtuvieron al menos 2 medallas?

8. Durante una sesión de la cámara de diputados se votó una importante ley que propuso el gobierno. Los resultados fueron los siguientes:

Total de votos	21
Votos a favor	13
Votos en contra	8

Entre los diputados que votaron había 10 de oposición y 11 del gobierno. Sabiendo que exactamente 2 de estos últimos votaron en contra de la ley, determine cuántos diputados de oposición apoyaron la ley del ejecutivo. Explique su razonamiento.

9. En la Universidad de Concepción se quiere ofrecer tres tipos de talleres abiertos a toda la comunidad, un taller de danza clásica, otro de manualidades y otro de atletismo.

Una encuesta a aplicada 5010 personas ha arrojado los siguientes resultados: a 1260 les interesa el taller de danza clásica, a 1920 les interesa el taller de manualidades y a 1690 les interesa el taller de atletismo. Además, a los que les interesa sólo el taller de danza clásica y manualidades son 420; a los que les interesa sólo el de danza clásica y atletismo son 340; y los interesados sólo en el de manualidades y atletismo son 380. Si a 1780 no les interesa ninguno de los talleres, ¿cuántas personas están interesadas en los tres talleres?

10. Se quiere determinar el grupo sanguíneo de 1000 personas. Para ello se analiza la presencia o ausencia de tres antígenos en la sangre de estas personas. Estos antígenos son A , B y R_h . Una persona pertenece al grupo sanguíneo:

- A^+ : si en su sangre sólo están presentes los antígenos A y R_h ,
- A^- : si en su sangre sólo está presente el antígeno A ,
- B^+ : si en su sangre sólo están presentes los antígenos B y R_h ,
- B^- : si en su sangre sólo está presente el antígeno B ,
- AB^+ : si en su sangre están presentes los tres antígenos A , B y R_h ,
- AB^- : si en su sangre sólo están presenten los antígenos A y B ,
- O^+ : si en su sangre sólo está presente el antígeno R_h ,
- O^- : si en su sangre no se encuentra ninguno de los tres antígenos buscados.

- (a) Represente, en un diagrama de Venn, a los conjuntos A (personas con antígeno A en sangre), B (personas con antígeno B en sangre), R (personas con antígeno R_h en sangre) y S (personas sin alguno de los tres antígenos).

- (b) Sombree en este diagrama el conjunto de las personas con grupo sanguíneo: A^- , B^+ , AB^+ , O^- y O^+ .

Sabiendo que de las 1000 personas estudiadas: 40 tienen grupo sanguíneo AB^+ , 400 tienen grupo sanguíneo A^+ , 200 tienen grupo sanguíneo O^+ , 220 tienen grupo sanguíneo O^- , 700 poseen el antígeno R_h , 120 poseen el antígeno B , responda, justificando:

- (a) ¿cuántas personas tienen grupo sanguíneo B^+ ?

- (b) ¿cuántas personas tienen grupo sanguíneo A^- ?

11. Un nuevo producto para el aseo, llamado *limpieza*, salió al mercado. Con el objetivo de hacer un estudio de mercado la empresa que lo produce aplica, en tres oportunidades, la misma encuesta a 1000 familias de Concepción. La primera pregunta de la encuesta es si la familia ha utilizado el nuevo producto en algún momento de las últimas dos semanas.

Con las respuestas a esta pregunta ocurrió lo siguiente:

- La primera vez que se aplicó la encuesta 275 familias respondieron que habían usado el producto.
- En la segunda aplicación de la encuesta el número de familias que había usado el producto aumentó a 400, pero sólo 175 de las familias que habían respondido afirmativamente la primera vez respondieron afirmativamente la segunda.
- De las 400 familias que respondieron afirmativamente en la segunda oportunidad, sólo 100 respondieron afirmativamente la tercera.

- Sólo 50 familias respondieron afirmativamente en las tres ocasiones en que se les aplicó la encuesta.
 - 700 familias respondieron afirmativamente al menos una de las encuestas.
 - De las familias que respondieron afirmativamente en la primera aplicación de la encuesta y negativamente en la segunda, ninguna respondió afirmativamente en la tercera.
- (a) Represente en un diagrama de Venn a los conjuntos U (total de familias encuestadas), P (familias que respondieron afirmativamente la pregunta en la primera aplicación de la encuesta), S (familias que respondieron afirmativamente la pregunta en la segunda aplicación de la encuesta), T (familias que respondieron afirmativamente la pregunta en la tercera aplicación de la encuesta).
- (b) Según el enunciado el conjunto de las familias que respondieron afirmativamente en la primera oportunidad, negativamente en la segunda y afirmativamente en la tercera es vacío, sombree este conjunto en el diagrama.
- (c) Determine cuántas familias respondieron negativamente las tres encuestas, cuántas respondieron afirmativamente sólo la primera encuesta, cuántas sólo la segunda y cuántas sólo la tercera.
12. Se encuesta a un grupo de treinta personas sobre preferencias entre comidas dulces o saladas y sobre té o café, debiendo escoger uno de ellos en cada caso. A seis de las personas encuestadas les gusta el café pero no la comida salada. Sólo siete personas tuvieron preferencia por la comida dulce. Tres mujeres prefirieron té y comida salada. Todos los hombres prefirieron café y cuatro de ellos prefirieron comida dulce. Considerando que diez de las personas encuestadas son mujeres. ¿A cuántas personas les gusta la comida salada y el café?
13. En una encuesta a 60 personas: 7 personas consumen el producto A y B pero no C , 6 personas consumen el producto B y C pero no A , 3 personas consumen el producto A y C pero no B , 50 consumen al menos uno de estos productos y 11 consumen A y B . ¿Cuántas personas consumen solamente un producto?.
14. En la Facultad de Ingeniería se realizó una encuesta a un grupo de 230 estudiantes sobre sus gustos musicales, entre los cuales están Pop, Rap y Jazz. La información recopilada fue la siguiente: a 90 estudiantes les gusta el Pop, a 70 les gusta el Rap, a 40 les gusta **sólo** el Jazz, a 33 les gusta **sólo** el Pop, a 31 les gusta **sólo** el Rap, a 3 estudiantes les gustan los tres estilos musicales y a 69 estudiantes les gustan al menos dos de los tres estilos musicales. Además, al final de la encuesta se observó que no a todos los estudiantes encuestados les gusta alguno de los tres tipos de música.

Llamemos

- U , al conjunto de los estudiantes encuestados,
 - P , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta el Pop,
 - R , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta el Rap y
 - J , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta el Jazz.
- (a) Construya un diagrama de Venn para este problema. Sombree en él:
- el conjunto de estudiantes a los que les gusta sólo el Jazz y
 - el conjunto de estudiantes a los que les gusta el Rap y el Pop, pero no el Jazz.
- (b) ¿A cuántos estudiantes les gusta el Rap y el Pop, pero no el Jazz?
- (c) ¿A cuántos estudiantes no les gusta ninguno de los tres tipos de estilos musicales?
- (d) ¿A cuántos estudiantes no les gusta el Jazz?
15. En una encuesta sobre 2 artículos para la piel, A y B , se sabe que
- el 50 % de los encuestados usa el producto A ,
 - el 60 % de los encuestados no usa el producto B ,
 - el 80 % de los encuestados usa A o B .

Determine:

- (a) ¿Qué porcentaje de los encuestados usa A y B ?

(b) ¿Qué porcentaje de los encuestados usa solo uno de ellos?

16. Se preguntó a varias personas si han visto alguna vez los canales de televisión *film and arts*, *discovery channel* y *history*. Se obtuvieron los siguientes resultados:

- 50 personas conocen *film and arts*,
- 15 personas conocen *discovery channel*,
- 25 personas ven de vez en cuando *history*,
- 80 personas han sintonizado alguna vez al menos uno de los tres,
- 5 personas ven los tres de manera frecuente.

Determine:

- (a) ¿Cuántas personas conocen exactamente dos de los tres canales?
- (b) ¿Cuántas personas solo conocen *discovery channel*?
- (c) ¿Cuántas personas solo conocen *history*?

Observación: En las preguntas sobre cardinalidad de conjuntos no basta con escribir la cardinalidad pedida, en su respuesta a la pregunta debe distinguirse bien cómo obtiene cada cantidad.

3. Problemas avanzados

1. (A) Describa por extensión los siguientes conjuntos.

- (a) $\{X : X \subseteq \{3, 2, a\} \wedge |X| = 2\}$.
- (b) $\{X : X \subseteq \{3, 2, a\} \wedge |X| = 4\}$.
- (c) $\{X : X \subseteq \mathcal{P}(\{3, 2, a\}) \wedge |X| \leq 1\}$.

2. Suponga que A es un conjunto con m elementos, $m \in \mathbb{N}$. Determine

- (a) $|\mathcal{P}(A)|$.
- (b) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))|$.
- (c) $|\{X \in \mathcal{P}(A) : |X| = 1\}|$.
- (d) $|\{X \subseteq \mathcal{P}(A) : |X| \leq 1\}|$.