UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV 525412
Porf. C. Thraves Caro.
Ayudantes: V. Henríquez y C. Opazo.

Listado 3

1. **Tarea*** Demuestre que la distancia definida en clases para dos vértices de un grafo cumple la desigualdad triangular. Use la desigualdad triangular para demostrar que $diam(G) \leq 2rad(G)$ para todo grafo G. Para todo par de enteros r y d que cumplan $r \leq d \leq 2r$, construya un grafo con radio r y diámetro d.

2. Demuestre que todo grafo con diámetro d tiene un conjunto independiente de tamaño al menos $\lceil (d+1)/2 \rceil$.

3. Sea G un grafo y sean u y v dos vértices vecinos en G. Demuestre que la excentricidades de u y v difieren en a lo más 1.

4. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, 3 \ldots, 15\}$ y dos vértices i y j son adyacentes si su máximo común divisor es estrictamente mayor que 1. Determine el número de componentes de G y $\alpha(G)$, y $\omega(G)$.

5. Demuestre o encuentre un contra ejemplo para la siguiente afirmación. El complemento de un grafo disconexo es un grafo conexo.

6. **Tarea*** Determine el tamaño máximo de un clique y el tamaño máximo de un conjunto independiente en el grafo de la figura siguiente.

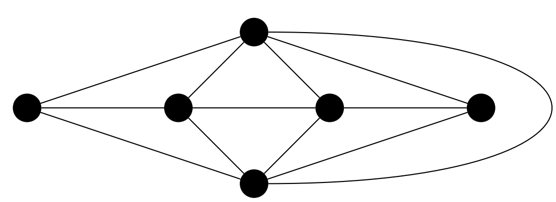

Figura 1: Grafo 1

7. Encuentre el tamaño de un conjunto independiente de tamaño máximo en el Grafo de Petersen.

8. Sean v y w dos vértices de un grafo G. Suponga que $d(v) = \delta(G)$ y que $d(w) = \Delta(G)$. Demuestre o encuentre un contra ejemplo para las siguientes igualdades:

$$\delta(G - v) = \delta(G) - 1,$$

$$\Delta(G - w) = \Delta(G) - 1.$$

9. **Tarea*** Demuestre que para todo grafo G y todo subconjunto X de $V(G)$ se cumple que:

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2m(G[X]) + d(X),$$

donde $d(X) = |\{(x, y) \colon x \in X \wedge y \notin X\}|$

10. Demuestre que todo grafo tiene un corte que contiene al menos la mitad de las aristas del grafo. En otras palabras, demuestre que todo grafo G tiene un subconjunto de vértices X tal que $d(X) \geq m(G)/2$.