UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°10

Álgebra 2 - 525150

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   (a) Si $S = \langle\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}\rangle$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, entonces $S^\perp = \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}$.
   (b) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores en V. Entonces $\langle S\rangle^\perp = S^\perp$.
   (c) Sean V un espacio vectorial real finito dimensional con producto interior y U, un subespacio vectorial de V. Si $w \in U^\perp$, entonces la proyección ortogonal de w sobre U es el vector nulo de V.

2. Considere el espacio vectorial $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, provisto del siguiente producto interior

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R},\ \langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

   a) Sean $p, q \in V$, definidos por

$$p(x) = 1 - x + x^2 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x - 3x^2,$$

   con $x \in \mathbb{R}$. Calcular el valor de $\langle p,q\rangle$, $\|p\|$, $\|q\|$ y $\|p+q\|$.
   b) Sea $B = \{p_1, p_2, p_3\} \subset V$, tales que $p_1(x) = 1$ y para $p_{j+1}(x) = x^j$, para $j \in \{1,2\}$. Aplique el Proceso de ortogonalización Gram-Schmidt para transformar B en una base ortogormal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Luego, transforme B en una base ortonormal.
   c) Defina el espacio generado por q, definido en (2a), $S := \langle\{q\}\rangle$, y el subespacio ortogonal $S^\perp$.
   d) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parámetros, con los cuales se construye $s \in V$ tal que $s(x) = \alpha x + \beta$, con $x \in \mathbb{R}$. Determine los valores de α y β para que $\{q, s\}$ sea un conjunto ortogonal con respecto al producto interior usual ($q \in V$ definido en (2a)).
   e) Sea $g \in V$ tal que $g(x) = x^2 - 1$, con $x \in \mathbb{R}$. Determine el vector de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ más cercano a g.

3. Sobre el e.v. $V = \mathbb{R}^4$, se define

$$U = \langle\{(1,1,0,0),(1,1,1,2)\}\rangle$$

   un subespacio vectorial de V. Determine $z \in U$ tal que $\|z - (1,2,3,4)\|_{\mathbb{R}^4}$ sea de valor más pequeño posible. ¿Cuál es este valor?.