UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 3 - Álgebra III (525201)
Guía del ayudante

Ejercicio 0. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas de X. Es decir, los elementos de $\mathcal{P}$ son las particiones $\{A_i\}_{i=1}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Se define la relación $\leq$ en $\mathcal{P}$ como sigue:

$$\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m \iff \forall j \in \{1,\dots,m\}, \exists i \in \{1,\dots,n\}, B_j \subseteq A_i$$

a) Pruebe que $\leq$ es relación de orden.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición finita de X. Luego, $\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{A_i\}_{i=1}^n$. En efecto, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $\exists i = j$ tal que $A_j \subseteq A_i$. Por tanto, $\leq$ es **refleja**.

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_j\}_{j=1}^m$, $\{C_k\}_{k=1}^l$ particiones finitas de X tales que $\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m$ y $\{B_j\}_{j=1}^m \leq \{C_k\}_{k=1}^l$. Sea $k \in \{1,\dots,l\}$. Luego, como $\{B_j\}_{j=1}^m \leq \{C_k\}_{k=1}^l$, $\exists j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $C_k \subseteq B_j$. A su vez, para este j existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $B_j \subseteq A_i$ (pues $\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m$). Así, hemos encontrado un $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $C_k \subseteq A_i$ (por transitivad de $\subseteq$). Por tanto, $\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{C_k\}_{j=1}^l$ y, en consecuencia, $\leq$ es **transitiva**.

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_j\}_{j=1}^m$ particiones finitas de X tales que $\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m$ y $\{B_j\}_{j=1}^m \leq \{A_i\}_{i=1}^n$. Sea $i \in \{1,\dots,n\}$. Como $\{B_j\}_{i=1}^m \leq \{A_i\}_{i=1}^n$, existe $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que

$$A_i \subseteq B_j$$

A su vez, para este j existe $i^* \in \{1,\dots,n\}$ tal que

$$B_j \subseteq A_{i^*}$$

de lo cual se sigue que $A_i \subseteq A_{i^*}$ (de lo cual tenemos $A_i \cap A_{i^*} = A_i$). Sin embargo, como $\{A_i\}_{i=1}^n$ es partición, tenemos que $i \neq i^*$ implica $A_i \cap A_{i^*} = \emptyset$ (una contradicción pues todo A_i debe ser distinto de vacío). Por tanto, $i = i^*$ y concluimos $A_i = B_j$.

De lo anterior hemos concluido que $\forall i = 1,\dots,n$, existe $j = 1,\dots,m$ tal que $A_i = B_j$. A su vez, podemos repetir este argumento para $\{B_j\}_{j=1}^m$ y concluir que ambas particiones son iguales. Es decir, $\leq$ es **antisimétrica**.

Por tanto, de las tres propiedades probadas anteriormente concluimos que $\leq$ es relación de orden en $\mathcal{P}$. ∎

b) Muestre que si $|X| > 3$, entonces $\leq$ es relación de orden parcial.

Demostración. Sea $X = \{a,b,c,d\}$ y considere las particiones $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{c,d\}$, $B_1 = \{a\}$, $B_2 = \{b,c,d\}$. De aquí se sigue que estas particiones no pueden relacionarse por $\leq$ y por tanto $\leq$ es orden parcial. ∎

Ejercicio 1. Se define la relación R en $\mathcal{M}_2(\{0,1\})$ por:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\{0,1\}), \quad ARB \iff \exists P \in \{I_2, I_2^*\}, B = P \cdot A,$$

donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Pruebe que R es relación de equivalencia.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$. Luego, $A = I_2 \cdot A$. Por tanto, ARA. Es decir, R es **refleja**.

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$ tales que ARB y BRC. Es decir, $\exists P_1, P_2 \in \{I_2, I_2^*\}$ tales que $B = P_1 \cdot A$ y $C = P_2 \cdot B$. Notemos que $\forall S, T \in \{I_2, I_2^*\}$, $S \cdot T \in \{I_2, I_2^*\}$. Luego,

$$\begin{aligned} C &= P_2 \cdot B \\ &= P_2 \cdot (P_1 \cdot A) \\ &= \underbrace{(P_2 \cdot P_1)}_{\in\{I_2, I_2^*\}} \cdot A \end{aligned}$$

y por tanto ARC. Es decir, R es **transitiva**.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$ tales que ARB. Notemos que $\forall S \in \{I_2, I_2^*\}$, $S^2 = I_2$. Luego,

$$\begin{aligned} B = P \cdot A &\implies P \cdot B = P^2 \cdot A \\ &\iff P \cdot B = A \end{aligned}$$

y por tanto BRA. Invirtiendo las letras tenemos que $ARB \iff BRA$. Es decir, R es **simétrica**.

De las propiedades anteriores concluimos que R es una relación de equivalencia. ■

b) Determine el espacio cuociente $\mathcal{M}_2(\{0,1\})/R$.

Demostración. Notemos que multiplicar por I_2 no afecta la matriz y que multiplicar por I_2^* por la izquierda es intercambiar las dos filas. Por tanto, es fácil ver que dos matrices A y B están en la misma clase de equivalencia si y sólo si son la misma matriz o una es el intercambio de filas de la otra. ■

Ejercicio 2. Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación refleja y transitiva en E. Se define la relación $\sim$ por:

$$\forall a, b \in E, a \sim b \iff a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$$

a) Probar que $\sim$ es relación de equivalencia.

Demostración. Notemos que $\sim$ es refleja pues $\mathcal{R}$ es refleja. En efecto, $a \sim a$ pues $a\mathcal{R}a$.

Sean $a, b \in E$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Luego, $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}a$, $b\mathcal{R}c$ y $c\mathcal{R}b$. Como $\mathcal{R}$ es refleja, de lo primero y tercero se sigue que $a\mathcal{R}c$. Además, de lo segundo y de lo cuarto tenemos $c\mathcal{R}a$. Por tanto, $a \sim c$. Es decir, $\sim$ es transitiva.

Es fácil notar que $\sim$ es simétrica a partir de su definición.

Por tanto, de las tres propiedades demostradas anteriormente podemos concluir que $\sim$ es una relación de equivalencia. ■

b) Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$, entonces $a\mathcal{R}b \iff a'\mathcal{R}b'$.

Demostración. Supongamos $a\mathcal{R}b$. Como $a' \in [a]_\sim$, tenemos que $a'\mathcal{R}a$. Luego, por transitividad de $\mathcal{R}$ tenemos que $a'\mathcal{R}b$. Por otra parte, como $b' \in [b]_\sim$ tenemos que $b\mathcal{R}b'$. Nuevamente utilizamos la transitividad de $\mathcal{R}$ para obtener $a'\mathcal{R}b'$.

Invirtiendo los roles de a, a' y b, b' (cambiando el representante de clase) concluimos la implicación en sentido contrario.

Así, hemos demostrado que $a\mathcal{R}b \iff a'\mathcal{R}b'$. ■

c) Considere la relación $\mathcal{R}^*$ definida en $E/\sim$ como sigue:

$$\forall [a]_\sim, [b]_\sim \in E/\sim,\ [a]_\sim \mathcal{R}^* [b]_\sim \iff a\mathcal{R}b$$

Pruebe que $\mathcal{R}^*$ está bien definida y es una relación de orden en $E/\sim$.

Demostración. De la parte anterior tenemos que $\mathcal{R}^*$ es independiente del representante de la clase. Luego, de las propiedades de $\mathcal{R}$ podemos deducir que $\mathcal{R}^*$ es refleja y transitiva.

Para probar la antisimetría, sean $[a]_\sim, [b]_\sim \in E/\sim$ tales que $[a]_\sim \mathcal{R}^* [b]_\sim$ y $[b]_\sim \mathcal{R}^* [a]_\sim$. Luego, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$. Es decir, $a \sim b$. Por tanto, $[a]_\sim = [b]_\sim$.

Como $\mathcal{R}^*$ es refleja, transitiva y antisimétrica, es una relación de orden. ■

Ejercicio 3. Sea $F = \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$ y sea R una relación de orden en B. Se define en F la relación R^* por:

$$fR^*g \iff \forall a \in A, f(a)Rg(a).$$

a) Pruebe que R^* es relación de orden en F.

Demostración. Consideremos $f, g, h \in F$.

Probemos que R^* es refleja. Para este efecto basta notar que dado f en F, $\forall a \in A$, $f(a)Rf(a)$ pues R es refleja.

Para probar que R^* es transitiva, supongamos que fR^*g y gR^*h. Es decir, $\forall a \in A$, $f(a)Rg(a)$ y $g(a)Rh(a)$. Como R es transitiva, se tiene $f(a)Rh(a)$ y por tanto fR^*h.

Supongamos que fR^*g y gR^*f. Luego, $\forall a \in A$, $f(a)Rg(a)$ y $g(a)Rf(a)$. Como R es de orden, entonces $f(a) = g(a)$. Por tanto, $f = g$.

De las tres propiedades anteriores concluimos que R^* es relación de orden. ■

b) Muestre que si $|A| = |B| = 2$, entonces R^* es relación de orden parcial.

Demostración. Sea $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{0, 1\}$ con $(B, \leq)$ dotado del orden usual en $\mathbb{R}$. Sean $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = 0$ y $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 1$.

Luego, tenemos que, $f(a_1) = 1 \not\leq 0 = g(a_1)$ y por tanto $f \not R^* g$. Además, $g(a_2) = 1 \not\leq f(a_2) = 0$ y por tanto $g \not R^* f$. Por tanto, R^* es relación de orden parcial en este caso. ■