UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
20 de mayo de 2014
Duración: 1h 40min
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación 1

1. Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación refleja y transitiva. Se define la relación $\sim$ por:
$$\forall a, b \in E, a \sim b \iff a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$$
   a) **(6 puntos)** Probar que $\sim$ es relación de equivalencia.
   b) **(6 puntos)** Probar que si $a' \in [a]$ y $b' \in [b]$ entonces $a\mathcal{R}b \iff a'\mathcal{R}b'$
   c) **(8 puntos)** Probar que la relación $\leq$ sobre $E/_\sim$ definida por:
$$[a] \leq [b] \iff a\mathcal{R}b$$
   es una relación de orden.

2. **(20 puntos)** Para el siguiente operador $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, calcule todos sus núcleos iterados y determine la base que le asocia una matriz representante triangular.
$$H(x, y, z, t) = (x, 2x + 2y - z, x + y, t)$$

3. Considere el siguiente operador lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:
$$T(x, y, z) = (y, z, 0)$$
   a) **(4 puntos)** Demuestre que su polinomio minimal es $m(x) = x^3$ y calcule $\sigma(T)$.
   b) **(4 puntos)** Suponga que $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un operador lineal tal que $G \circ G = T$, demuestre que si $\lambda \in \sigma(G)$ entonces $\lambda^2 \in \sigma(T)$, y concluya que G tiene un único valor propio.
   c) **(9 puntos)** Demuestre que el polinomio minimal de G es de la forma x^k con $k \geq 4$.
   d) **(3 puntos)** Concluya que G no puede existir.