# Formas Bilineales. Formas Cuadráticas

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

July 27, 2021

# Preliminares: Matrices simétricas definidas positiva, semi-definidas positivas, signatura, ...

Definición: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, se dice

1. definida positiva, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \{\theta\}\ :\ x^{\mathrm{t}} A x > 0$.
2. semidefinida positiva, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ :\ x^{\mathrm{t}} A x \geq 0$.
3. definida negativa, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \{\theta\}\ :\ x^{\mathrm{t}} A x < 0$.
4. semidefinida negativa, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ :\ x^{\mathrm{t}} A x \leq 0$.

Observaciones

1. $A$ simétrica definida positiva $\Rightarrow$ $A$ es simétrica semidefinida positiva.
2. $A$ simétrica definida negativa $\Rightarrow$ $A$ es simétrica semidefinida negativa.
3. $A$ simétrica definida negativa $\Leftrightarrow$ $-A$ es simétrica definida positiva.
4. $A$ simétrica semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $-A$ es simétrica semidefinida positiva.
5. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica, pero no es ninguno de los cuatro tipos anteriores, pues $x^{\mathrm{t}} A x = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 + x_2^2$, el cual no tiene signo definido para cualquier $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.
6. Las implicaciones recíprocas de 1) y de 2) no son ciertas. Por ejemplo, la matriz simétrica $A = \Theta$ es semidefinida positiva y semidefinida negativa, pero no es definida positiva ni definida negativa.
7. Los conceptos anteriores pueden ser extendidos a matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitianas, i.e. $A^* = A$... adaptación: $x^* A x$.

Lema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $A$ es definida positiva.
2. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.
3. Las submatrices principales de $A$, $A^{(k)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, con $k \in \{1, \dots, n\}$, tienen determinante positivo, es decir, $\forall\, k \in \{1, \dots, n\} \,:\, \det(A^{(k)}) > 0$.
4. El método de Gauss aplicado a $A$ puede realizarse sin intercambiar filas y con todos los pivotes positivos.

Observación: El hecho que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, implica que toda matriz simétrica definida positiva es no singular.

Para la demostración del lema, primero se establece que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Después, habría que probar (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).
Esto suele hacerse en la asignatura Análisis Numérico II.

## Demostración parcial del Lema: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

1) $\Rightarrow$ 2): Como $A$ es simétrica, se sabe que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \{\theta\}$ un autopar de $A$, i.e. $A\,v = \lambda\,v$. Entonces (aplicando el hecho que $A$ es simétrica definida positiva, por hipótesis)

$$0 < v^{\mathrm{t}} A\,v = \lambda\,v^{\mathrm{t}}\,v = \lambda\,\underbrace{\|v\|_2^2}_{>0} \quad \Rightarrow \lambda > 0\,,$$

y se concluye así que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

2) $\Rightarrow$ 1): Como $A$ es simétrica, entonces $\exists\,P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal (i.e. $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$) tal que $P^{\mathrm{t}}\,A\,P = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. En vista que, por hipótesis, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, se deduce que $D$ es simétrica, y además

$$\forall\,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\} \,:\, y^{\mathrm{t}}\,D\,y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,y_i^2 > 0\,,$$

pues al menos $\exists\,i_0 \in \{1, .., n\} \,:\, y_{i_0} \neq 0$. De esta forma, se establece que la matriz $D$ es simétrica definida positiva. Luego, para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}$, se define $y := P^{\mathrm{t}}\,x \neq \theta$ (pues $P$ es no singular). Esto conduce, teniendo en cuenta también que $x = P\,y$, a

$$x^{\mathrm{t}}\,A\,x = y^{\mathrm{t}}\,P^{\mathrm{t}}\,A\,P\,y = y^{\mathrm{t}}\,D\,y > 0\,.$$

Así, se concluye que $A$ es simétrica definida positiva.

Observaciones importantes:

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica definida positiva si y sólo si $\exists\, L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, triangular inferior, tal que $A = L\,L^{\mathrm{t}}$ (se conoce como FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY).

2. Recordamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, es definida negativa si y sólo si $-A$ es simétrica definida positiva. Luego,

$$\begin{aligned} A \text{ es simétrica definida negativa } &\Leftrightarrow \forall\, k \in \{1, ..., n\} \,:\, \det(-A^{(k)}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, k \in \{1, ..., n\} \,:\, (-1)^k \det(A^{(k)}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^{(1)}) < 0 \quad \wedge \quad \det(A^{(2)}) > 0 \\ &\qquad \wedge \quad ... \quad \wedge \quad (-1)^n \det(A) > 0\,. \end{aligned}$$

   Esto último se conoce como el CRITERIO DE SYLVESTER para matrices simétricas definidas negativas.

3. Aquellas matrices simétricas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ para las cuales existen $x\,, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}$ con $x^{\mathrm{t}}\,A\,x > 0 \wedge y^{\mathrm{t}}\,A\,y < 0$, se llaman INDEFINIDAS.

Definición: Signatura de una matriz simétrica
Se define la función signatura de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica por $\mathrm{sig}(A) := (p, q) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, donde $p$ y $q$ denotan la cantidad de valores propios positivos y negativos de $A$, respectivamente.

Definición: Relación de Congruencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que $A$ y $B$ son congruentes (lo que se denota por $A \cong B$) si $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, tal que $A = P^{\mathrm{t}}\, B\, P$.

Proposición: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cong)$ es una relación de equivalencia.

Lema: La signatura de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica es invariante por congruencia de matrices.

Propiedades: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Se tiene

1. si $\mathrm{sig}(A) := (p, q)$, entonces $\mathrm{rang}(A) = p + q$.
2. $A$ es definida positiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sig}(A) = (n, 0)$.
3. $A$ es definida negativa $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sig}(A) = (0, n)$.
4. $A$ es semidefinida positiva $\Leftrightarrow \exists\, r \leq n : \mathrm{sig}(A) = (r, 0)$.
5. $A$ es semidefinida negativa $\Leftrightarrow \exists\, r \leq n : \mathrm{sig}(A) = (0, r)$

Propiedades: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Se tiene

1. $A$ es definida positiva $\Leftrightarrow$ $A$ es congruente a $I_n$.
2. $A$ es definida negativa $\Leftrightarrow$ $A$ es congruente a $-I_n$.
3. $A$ es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $A$ es congruente a $I_n$ ó a $\begin{pmatrix} I_r & \\ & \Theta \end{pmatrix}$, con $r < n$.
4. $A$ es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $A$ es congruente a $I_n$ ó a $\begin{pmatrix} -I_r & \\ & \Theta \end{pmatrix}$, con $r < n$.

# Formas bilineales

Sean $V$, $W$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $f : V \times W \to \mathbb{K}$ una función. Se dice que $f$ es una forma bilineal si $f$ es lineal con respecto a cada componente, i.e.

$$a)\ \forall\, u_0 \in V\ :\ f_{u_0} := f(u_0,\cdot) \in W' := \mathcal{L}(W,\mathbb{K})\,,$$
$$b)\ \forall\, w_0 \in W\ :\ f_{w_0} := f(\cdot, w_0) \in V' := \mathcal{L}(V,\mathbb{K})\,.$$

Esto a su vez, equivale a decir que:

$$a)\ \forall\, u_0 \in V\ :\ \forall\, x,y \in W\,, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\ :\ f(u_0, \alpha\, x + y) = \alpha\, f(u_0, x) + f(u_0, y)\,,$$
$$b)\ \forall\, w_0 \in W\ :\ \forall\, x,y \in V\ :\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\ :\ f(\alpha\, x + y, w_0) = \alpha\, f(x, w_0) + f(y, w_0)\,.$$

Ejemplos:

1. $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(x,y) := x + y$ no es una forma bilineal. Sin embargo $f$, vista como función de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}$, es lineal (¡VERIFICARLO!).
2. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : g(x,y) := x\,y$ es una forma bilineal. Sin embargo, como: $g((1,0) + (0,1)) = g(1,1) = 1 \neq 0 = g(1,0) + g(0,1)$, se establece que $g$, vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, no es lineal.
   CONCLUSIÓN: No toda forma bilineal es lineal.
3. $\varphi : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, tal que
   $$\forall\, f\,, g \in \mathcal{C}([0,1])\ :\ \varphi(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$ es una forma bilineal.
4. $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ definido, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, por $f(x,y) := \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = y^{\mathrm{t}}\, x = x^{\mathrm{t}}\, y = \langle y, x\rangle$, es una forma bilineal.

Observaciones:

1. Sean $V$, $W$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. El conjunto de las formas bilineales definidas de $V \times W$ en $\mathbb{K}$, se define por $\mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K}) := \{f : V \times W \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ es una forma bilineal}\}$. Se puede probar que $\mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial.
2. Estamos interesados en el caso en que $W = V$, se denota $\mathcal{BIL}(V, \mathbb{K}) := \mathcal{BIL}(V \times V, \mathbb{K})$.
3. El concepto de forma bilineal se puede extender de manera natural a formas mulitilineales, definidas en más de dos espacios vectoriales como sigue: Sean $V_1, ..., V_m$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y una función $f : V_1 \times ... \times V_m \to \mathbb{K}$. Se dice que $f$ es forma multilineal (o $m$-lineal) si $f$ es lineal en cada componente.

## Matriz representante de una forma bilineal

### Motivación:

Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$. Consideremos una base $B := \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$. Luego, dada $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal, se tiene que para $u, w \in V$, éstos pueden expresarse de manera única como $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, v_j$, con $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ , $\{\beta_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}$. Así resulta

$$
\begin{aligned}
f(u, w) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f\left(v_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i\, \beta_j\, f(v_i, v_j) = \begin{pmatrix} \alpha_1, ...., \alpha_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

donde

$$
M := \Big(f(v_i, v_j)\Big)_{i,j=1}^{n} := \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & .... & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ f(v_n, v_1) & ... & ... & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})
$$

se conoce como la matriz representante de $f$ con respecto a la base $B$. Suele ser denotada por $A_{f,B}$.

Definición. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$. La matriz representante de una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ con respecto a una base $B := \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$, se define por $A_{f,B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que

$$\forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \; : \; \left(A_{f,B}\right)_{ij} \; := \; f(v_i, v_j)\,.$$

Propiedad: $\forall\, u, w \in V \; : \; f(u, w) \; = \; [u]_B^t\, A_{f,B}\, [w]_B$.

Observación: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la propiedad anterior se puede expresar como:
$\forall\, u, w \in V \; : \; f(u, w) \; = \; \langle A_{f,B}\,[w]_B \,,\, [u]_B \rangle_{\mathbb{R}^n} \; = \; \langle [u]_B \,,\, A_{f,B}\,[w]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que
$\forall\, x := (x_1, x_2)\,,\; y := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \; : \; f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \; := \; x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 - x_1 y_2$. Puede mostrarse que $f$ es una forma bilineal. Ahora, consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $B := \{v_1 := (1, 0)\,,\; v_2 := (0, 1)\}$. Tenemos

$$f(v_1, v_1) = 1\,, \quad f(v_1, v_2) = -1\,, \quad f(v_2, v_1) = 0\,, \quad f(v_2, v_2) = 2\,,$$

de donde se deduce que $A_{f,B} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Además, se verifica que

$$f(x, y) \; = \; f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \; = \; (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \; = \; [x]_B^t\, A_{f,B}\, [y]_B\,.$$

¿Cómo es $A_{f,\tilde{B}}$, con $\tilde{B} := \{(1, 0), (1, 1)\}$?..... ¡Cambio de base!

## Cambio de base.

Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sean $B := \{v_i\}_{i=1}^n$, $\tilde{B} := \{\tilde{v}_j\}_{j=1}^n$ dos bases de $V$. Sea también $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. ¿Cuál es la relación entre $A_{f,B}$ y $A_{f,\tilde{B}}$?

Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz de paso de $B$ a $\tilde{B}$, i.e. $P := [\tilde{I}]_B^{\tilde{B}}$. Luego, se tiene que $\forall\, u \in V : P\,[u]_B = [u]_{\tilde{B}}$. Luego, para $u, w \in V$ resulta

$$\begin{aligned} f(u,w) &= [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [w]_B \\ &= [u]_{\tilde{B}}^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, [w]_{\tilde{B}} = [u]_B^{\mathrm{t}}\, P^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, P\, [w]_B \,, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\forall\, u, w \in V : [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [w]_B = [u]_B^{\mathrm{t}}\, P^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, P\, [w]_B$. Luego, eligiendo $u := v_i \in B$ y $w := v_j \in B$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, se infiere que

$$e_i^t A_{f,B}\, e_j = e_i^t\, (P^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, P)\, e_j \Leftrightarrow \Big(A_{f,B}\Big)_{ij} = \Big(P^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, P\Big)_{ij} .$$

De esta manera se concluye que: $A_{f,B} = P^{\mathrm{t}}\, A_{f,\tilde{B}}\, P$, donde $P$ es la matriz de paso de $B$ a $\tilde{B}$.

Observación: En forma análoga, se deduce que $A_{f,\tilde{B}} = Q^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, Q$, siendo $Q$ la matriz de paso de $\tilde{B}$ a $B$ (i.e. $Q = P^{-1}$). En este caso se dice que $A_{f,B}$ y $A_{f,\tilde{B}}$ son matrices congruentes. Nótese que matrices congruentes no necesariamente son semejantes (sólo si $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$, i.e. $P$ es ortogonal). Además, la relación de congruencia de matrices cuadradas es en efecto una relación de equivalencia.

Observación: Si $f \in \mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$, entonces $\forall\, w \in W \,:\, f(\theta_V, w) = 0$ y $\forall\, v \in V \,:\, f(v, \theta_W) = 0$.

Definición: Sean $V$ y $W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales. $f \in \mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$ se dice degenerada si $\exists\, u_0 \in V \backslash \{\theta_V\} \,:\, \forall\, x \in W \,:\, f(u_0, x) = 0$, o $\exists\, w_0 \in W \backslash \{\theta_W\} \,:\, \forall\, u \in V \,:\, f(u, w_0) = 0$. Esto induce las definiciones

$$\mathrm{Ker}_L(f) := \{z \in V \,|\, \forall\, x \in W \,:\, f(z, x) = 0\} = \{z \in V \,|\, f_z = \Theta_{W'}\}.$$
$$\mathrm{Ker}_R(f) := \{x \in W \,|\, \forall\, z \in V \,:\, f(z, x) = 0\} = \{x \in W \,|\, f_x = \Theta_{V'}\}.$$

Proposición: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sea $B := \{v_j\}_{j=1}^{n}$ una base de $V$. $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ es degenerada $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es singular (no tiene inversa).

Demostración:

$(\Rightarrow)$ : Veamos que $0 \in \sigma(A_{f,B})$, lo que equivale a decir que $\mathrm{Ker}(A_{f,B}) \neq \{\theta\}$. Como $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ es degenerada, $\exists\, u_0 \in V \backslash \{\theta\}$ tal que $\forall\, w \in V \,:\, f(u_0, w) = [u_0]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [w]_B = 0$. En particular, para $w := v_j \in B$, con $j \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $[w]_B = [v_j]_B = e_j \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ($j$-ésimo vector canónico). De esta manera, resulta $\forall\, j \in \{1, ..., n\} \,:\, \left([u_0]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\right)_j = 0$. Así tenemos

$$[u_0]^{\mathrm{t}}\, A_{f,B} = \theta \in \mathbb{K}^{1 \times n} \Rightarrow A_{f,B}^{\mathrm{t}}\, [u_0]_B = \theta \in \mathbb{K}^{n \times 1} \Rightarrow A_{f,B}^{\mathrm{t}}\, [u_0]_B = 0 \cdot [u_0]_B\,,$$

de donde se deduce que $0 \in \sigma(A_{f,B}^{\mathrm{t}}) = \sigma(A_{f,B})$, y se concluye que $A_{f,B}$ es singular.

$(\Leftarrow)$ : Supongamos que $\mathrm{Ker}(A_{f,B}) \neq \{\theta\}$, i.e. $\exists\, z_0 \in V \backslash \{\theta\} \,:\, A_{f,B}\, [z_0]_B = \theta$, lo cual implica que $\forall\, u \in V \,:\, f(u, z_0) = [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [z_0]_B = 0$, lo cual establece que $f$ es degenerada.

Definición: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$. Se dice que

1. $f$ es simétrica si $\forall\, u\,, w \in V\ :\ f(u, w) = f(w, u)$.
2. $f$ es antisimétrica si $\forall\, u\,, w \in V\ :\ f(u, w) = -f(w, u)$.

Proposición: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sea $B$ una base de $V$ cualquiera. Sea además y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$. Entonces se tiene que

1. $f$ es simétrica $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es simétrica.
2. $f$ es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es antisimétrica.

Demostración de 1): Sea $B := \{v_j\}_{j=1}^{n}$ una base de $V$, y $A_{f,B} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tenemos

$$f \text{ es simétrica } \Leftrightarrow \forall\, u\,, w \in V\ :\ [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [w]_B = f(u, w) = f(w, u) = [w]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [u]_B\,.$$

En particular, para $u := v_i$ y $w := v_j$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$, resulta

$$e_i^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, e_j = e_j^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, e_i \quad \Leftrightarrow \quad \left(A_{f,B}\right)_{ij} = \left(A_{f,B}\right)_{ji}.$$

FInalmente, como $i, j$ son fijos pero arbitrarios, se deduce que $A_{f,B} = \left(A_{f,B}\right)^{\mathrm{t}}$.

Demostración de 2): análoga. Es dejada al lector.

Observaciones:

1. Notar que la condición de $A_{f,B}$ de ser simétrica no depende de la base. Más aún, para $f$ simétrica, la condición de $A_{f,B}$ de ser simétrica definida positiva, tampoco depende de la base $B$.
2. Nos interesa conocer las formas bilineales cuyas matrices representantes sean simétricas definidas positivas. Sabemos que si una matriz es simétrica con respecto a la base $B$, también lo es con respecto a la base $\tilde{B}$. ¿Ocurre lo mismo con el concepto de definida positiva?
3. Si $V$ es un espacio vectorial real, con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces la función $f(u,w) := \langle u, w \rangle$ es una forma bilineal simétrica (¡VERIFICAR!).
4. Sea $V$ un espacio vectorial real. Dada $f \in \mathcal{BIL}(V,\mathbb{R})$ simétrica, ¿cuándo $f$ es un producto interior en $V$?

Proposición: Sea $V$ un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$, y sea $B$ una base de $V$ cualquiera. Entonces

$f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ es producto interior en $V \Leftrightarrow A_{f,B}$ es simétrica definida positiva.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ : Supongamos que $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ es un producto interior en $V$. Como

- $f$ es simétrica, se tiene que $A_{f,B}$ es simétrica.
- $\forall\, u \in V \backslash \{\theta\} \,:\, f(u,u) > 0 \Leftrightarrow \forall\, [u]_B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \{\theta\} \,:\, [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [u]_B > 0.$

De esta manera, se infiere que $A_{f,B}$ es simétrica definida positiva.

$(\Leftarrow)$ : Es dejada al lector. Tener presente que

$$\forall\, u, w \in V \,:\, f(u,w) = [u]_B^{\mathrm{t}}\, A_{f,B}\, [w]_B\,.$$

Ejemplo 1: Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\,(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : f(A, B) := \operatorname{tr}(A\,B)$. Muestre que $f$ es una forma bilineal simétrica, pero no es producto interior en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Aquí hay que tener presente las propiedades de traza de matrices.
Veamos que $f$ es bilineal. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(\alpha\,A + B, C) &= \operatorname{tr}((\alpha\,A + B)C) = \operatorname{tr}(\alpha\,AC + BC) = \operatorname{tr}(\alpha\,AC) + \operatorname{tr}(BC) \\ &= \alpha\operatorname{tr}(AC) + \operatorname{tr}(BC) = \alpha\,f(A, C) + f(B, C) \\ f(A, \alpha\,B + C) &= \operatorname{tr}(A(\alpha\,B + C)) = \operatorname{tr}(\alpha\,AB + AC) = \operatorname{tr}(\alpha\,AB) + \operatorname{tr}(AC) \\ &= \alpha\operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(AC) = \alpha\,f(A, B) + f(A, C)\,. \end{aligned}$$

De esta manera, se verifica que $f$ es lineal en cada componente. Luego $f$ es una forma bilineal.
Veamos que $f$ es simétrica. Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tenemos

$$f(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = f(B, A)\,,$$

con lo cual queda establecido que $f$ es una forma bilineal simétrica.
Veamos ahora si $A_{f,B}$ es simétrica definida positiva. Para esto consideraremos la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, es decir $B := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, donde

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora construimos la matriz representante de $f$ con respecto de $B$.

$$\begin{aligned}
f(A_1, A_1) &= \operatorname{tr}(A_1\, A_1) = 1\,, f(A_1, A_2) = \operatorname{tr}(A_1\, A_2) = 0\\
f(A_1, A_3) &= \operatorname{tr}(A_1\, A_3) = 0\,, f(A_1, A_4) = \operatorname{tr}(A_1\, A_4) = 0\\
f(A_2, A_1) &= 0 = f(A_2, A_2)\,, f(A_2, A_3) = 1\,,\ f(A_2, A_4) = 0\\
f(A_3, A_3) &= 0 = f(A_3, A_4)\,, f(A_4, A_4) = 1\,.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$A_{f,B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En vista que $\det(A^{(2)}_{f,B}) = 0$, se concluye que $A_{f,B}$ es simétrica, pero no definida positiva. En consecuencia, $f$ no es producto interior.

Ejercicio 2: Muestre que $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\,(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : g(A, B) := \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}\, B)$ es un producto interior.

Ortogonalidad respecto de una forma bilineal real que es producto interior.

Sea $V$ un espacio vectorial real, y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ que es producto interno en $V$.

1. Se dice que $u, w \in V$ son ortogonales respecto a $f$ si $f(u, w) = f(w, u) = 0$. Se denota por $u \perp_f w$.
   REMARK: Algunos autores se refieren a esta ortogonalidad como Conjugación de vectores con respecto a la forma bilineal real $f$.
2. Además, dado $S \subseteq V$ se define el (complemento) ortogonal a $S$ respecto de $f$, como el conjunto

$$\begin{aligned} S^{\perp_f} &:= \{z \in V : \forall\, u \in S : u \perp_f z\} \\ &= \{z \in V : \forall\, u \in S : f(u, z) = f(z, u) = 0\}. \end{aligned}$$

# Formas cuadráticas

Definición: Una función $\omega : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ se llama forma cuadrática si $\exists\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \omega(x) = x^{\mathrm{t}} A\, x$.
Notar que si $f$ es una forma cuadrática, entonces

$$\forall\, x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{n\times 1} : f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad \text{donde } \forall\, i,j \in \{1,..,n\} : a_{ij} \in \mathbb{R}\,.$$

Además, toda forma cuadrática $\omega$ es homogénea de grado 2, es decir, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \omega(\alpha\, x) = \alpha^2\, \omega(x)$.

Ejemplo: $\omega(x,y) := x^2 - 3xy + 2y^2$ es una forma cuadrática, pues

$$\forall\, (x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : \omega(x,y) = (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{simétrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{no simétrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observación: Si $\omega(x) = x^{\mathrm{t}} A\, x$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, entonces $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $P^{\mathrm{t}} A\, P = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. De esta manera, introduciendo $y := P^{\mathrm{t}}\, x$, resulta

$$\omega(x) = x^{\mathrm{t}} A\, x = \left(x^{\mathrm{t}} P\right) D \left(P^{\mathrm{t}} x\right) = \left(P^{\mathrm{t}} x\right)^{\mathrm{t}} D \left(\underbrace{P^{\mathrm{t}} x}_{=:\, y}\right) = y^{\mathrm{t}}\, D\, y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2\,.$$

# Forma cuadrática asociada a una forma bilineal

Definición: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y sea $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ simétrica. Se define la forma cuadrática asociada a $f$, como la función $\omega : V \to \mathbb{K}$ definida, para cualquier $u \in V$, por $\omega(u) := f(u, u)$.

El siguiente resultado permite saber cuando una aplicación de $V$ en $\mathbb{K}$ es una forma cuadrática.

Teorema: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. La aplicación $\omega : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si se verifica:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \forall\, u \in V : \omega(\alpha\, u) = \alpha^2\, \omega(u)$,
2. La aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ definida mediante la relación

$$\forall\, u, z \in V : f(u, z) := \frac{1}{2}\Big(\omega(u + z) - \omega(u) - \omega(z)\Big),$$

   es una forma bilineal simétrica. Cuando esto sucede, a $f$ se le llama la forma polar de $\omega$.

Definición: Dos formas cuadráticas reales son linealmente equivalentes (en $\mathbb{R}$) si las matrices simétricas que la representan, tienen la misma signatura.

Ejemplo: Considere la aplicación real definida en $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$\omega(x) := x_1^2 + a\,x_2^2 + 3\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,a\,x_2\,x_3\,, \quad \forall\, x := (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}\,,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un parámetro.

1. Demuestre que $\omega$ es una forma cuadrática y determine $f$, su forma polar.
2. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $f$ define un producto interior.
3. Para $a = 2$, determine $S^{\perp_f}$, si existe, donde $S := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Parte 1). Veremos si podemos aplicar el Teorema anterior. Consideremos $x := (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}, y := (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, fijos pero arbitrarios. Tenemos

a) $\omega(\alpha\, x) = \ldots = \alpha^2\, \omega(x)\,,$

b)
$$\begin{aligned} f(x, y) &:= \frac{1}{2}\Big(\omega(x + y) - \omega(x) - \omega(y)\Big) = \ldots \\ &= x_1\,y_1 + a\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_1\,y_3 + x_3\,y_1 + a\,(x_2\,y_3 + x_3\,y_2) \\ &= x^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} y\,, \end{aligned}$$

la cual es en efecto una forma bilineal simétrica (¡VERIFICARLO!). Luego, en virtud al Teorema aludido, $\omega$ es una forma cuadrática real, y $f$ es su forma polar.

Parte 2). Como estamos en dimensión finita, para saber cuando $f$ definirá un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$, basta con analizar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la matriz representante de $f$ (en cualquier base, por ejemplo la canónica) es simétrica definida positiva. Sea $B := \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Tenemos

$$f(e_1, e_1) = \omega(e_1) = 1\,,\ f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1) = 1\,,\ f(e_1, e_3) = f(e_3, e_1) = 1$$
$$f(e_2, e_2) = \omega(e_2) = a\ \ f(e_2, e_3) = f(e_3, e_2) = a\,,\ f(e_3, e_3) = \omega(e_3) = 3\,.$$

Así, la matriz representante de $f$ con respecto a la base $B$, es $A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$, la cual claramente es matriz simétrica. Aplicando el Criterio de Sylvester, $A_{f,B}$ será definida positiva si y sólo si $\forall\, k \in \{1, 2, 3\}\ :\ \det(A_{f,B}^{(k)}) > 0$. Esto conduce a las inecuaciones

$$\begin{aligned} 1 > 0 \quad \wedge \quad a - 1 > 0 \quad \wedge \quad (1-a)(3-a) > 0 \\ \Rightarrow a > 1 \quad \wedge \quad a \in (1, 3)\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A_{f,B}$ será (simétrica) definida positiva si y sólo si $a \in (1, 3)$. Por ende, la forma bilineal simétrica $f$ definirá un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$ si y sólo si $a \in (1, 3)$.

Parte 3). Consideremos $a = 2 \in (1,3)$. Esto nos dice que $A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Por consiguiente, la forma bilineal simétrica $f$, definida con este valor del parámetro $a$, es un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Por definición,

$$S^{\perp_f} = \left\{ v \in \mathbb{R}^{3\times 1} : f(e_1, v) = 0 \ \wedge \ f(e_3, v) = 0 \right\}.$$

Tenemos, considerando $v := (x, y, z)^{t} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$\begin{cases} f(e_1, v) = 0 \Leftrightarrow & e_1^{t} \, A_{f,B} \, v = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0\,, \\ f(e_3, v) = 0 \Leftrightarrow & e_3^{t} \, A_{f,B} \, v = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -2s \\ z = s \\ s \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Finalmente, resulta $S^{\perp_f} := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Teorema de Inercia (de Sylvester): Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, y $\omega(x) := x^{\mathrm{t}} A x$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Entonces, $\exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular tal que si $z := Q\,x \Leftrightarrow x = Q^{-1} z$, se tiene que $\omega(x) = z_1^2 + .... + z_s^2 - (z_{s+1}^2 + ... + z_r^2)$, donde $r$ indica el rango de $A$, y $s$ el número de valores propios positivos.

Demostración: Como $A$ es simétrica, se sabe que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, y es diagonalizable ortogonalmente. Vamos a considerar que los valores propios de $A$ están ordenados como se indica en la lista de elementos de $\sigma(A)$, incluyendo repeticiones, $\{\lambda_1, ..., \lambda_s, \lambda_{s+1}, ..., \lambda_r, 0, ...., 0\}$ de tal manera que $\forall\, j \in \{1, ..., s\} : \lambda_j > 0$, y $\forall\, j \in \{s+1, ..., r\} : \lambda_j < 0$. Por otro lado, $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal, tal que

$$P^t A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & & & \\ & & & \lambda_{s+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí recordamos que matrices semejantes poseen el mismo rango. En consecuencia, se tiene que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(D) = r$, pues hay $r$ filas no nulas en $D$.

Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, se define $y := P^{\mathrm{t}}\, x \Leftrightarrow x = P\, y$, y resulta

$$x^{\mathrm{t}}\, A\, x = \left(y^{\mathrm{t}}\, P^{\mathrm{t}}\right) A \left(P\, y\right) = y^{\mathrm{t}} \left(P^{\mathrm{t}}\, A\, P\right) y = y^{\mathrm{t}}\, D\, y = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, y_j^2 \,.$$

Siguiente objetivo: determinar una matriz diagonal no singular $\tilde{D}$ tal que $z := \tilde{D} y$ nos conduzca al resultado buscado.

Estrategia: $\forall\, j \in \{1, ..., s\} \,:\, \lambda_j\, y_j^2 = z_j^2$, y $\forall\, j \in \{s+1, ..., r\} \,:\, \lambda_j\, y_j^2 = -z_j^2$.
Esto induce el vector $z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, cuyas componentes se definen a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_j := \sqrt{\lambda_j}\, y_j & & j \in \{1, ..., s\} \\ z_j := \sqrt{-\lambda_j}\, y_j & & j \in \{s+1, ..., r\} \\ z_j := y_j & & j \in \{r+1, ..., n\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow z := \tilde{D}\, y \,.$$

donde

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_s} & & & & & & \\ & & & \sqrt{-\lambda_{s+1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{-\lambda_r} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, resulta para $z = \tilde{D}\, y = \tilde{D}\, P^{\mathrm{t}}\, x$:

$$\omega(x) = x^{\mathrm{t}} A\, x = y^{\mathrm{t}} D\, y = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, y_j^2 = \left(z_1^2 + \ldots + z_s^2\right) - \left(z_{s+1}^2 + \ldots + z_r^2\right) =: \widetilde{\omega}(z)\,.$$

Finalmente, se define la matriz $Q := \tilde{D}\, P^{\mathrm{t}}$, la cual es no singular, y con la cual se valida lo anterior para cualquier $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Así, se concluye la demostración.

Observación: El cambio de coordenadas $y = P^{\mathrm{t}}\, x$ corresponde a una rotación de ejes coordenados, mientras que el cambio $z = \tilde{D}\, y$ se interpreta como una dilatación o contracción de ciertas direcciones (Homotecia).

# Aplicación: Identificación de lugares geométricos (cónicas y/o superficies cuadráticas)

Interesa identificar cónicas (en $\mathbb{R}^2$) y superficies cuadráticas (en $\mathbb{R}^3$), las cuales pueden haber sufrido alguna traslación y/o rotación de los ejes coordenados. Por lo general, la ecuación de esta curva viene expresado de la forma

$$\omega(x) + F(x) + c = 0\,,$$

donde $\omega : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal, y $c \in \mathbb{R}$ una constante.
En el caso $V := \mathbb{R}^{2\times 1}$, y considerando $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matriz (simétrica) que representa a la forma polar de $\omega$ respecto a la base canónica de $V$, se puede establecer lo siguiente (salvo casos degenerados):

1. Si $\det(A) > 0$, entonces la curva es una elipse.
2. Si $\det(A) = 0$, entonces la curva es una parábola.
3. Si $\det(A) < 0$, entonces la curva es una hipérbola.

Ejemplo: Determine el lugar geométrico asociado a la cónica de ecuación $x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2 - 2x_2 - 2\sqrt{3}\,x_1 - 4 = 0.$

Primero, identificamos la forma cuadrática asociada a la ecuación: $\omega(x_1, x_2) := x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2$, cuya forma polar es (¡VERIFICARLO!)

$$\forall\, x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : f(x, y) := x_1\,y_1 + 3\,x_2\,y_2 + \sqrt{3}\,x_1\,y_2 + \sqrt{3}x_2\,y_1\,.$$

Si consideramos $B$, la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 1}$, deducimos que $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. De esta manera, la ecuación de la cónica puede expresarse como:

$$(x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-2\sqrt{3}\ -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 4 = 0\,.$$

Sea ahora $A := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. Se deduce (¡HACERLO!) que $\sigma(A) = \{0, 4\}$, con espacios propios asociados $S_{\lambda=0} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y $S_{\lambda=4} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Se deduce así que $\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ formada por vectores propios de $A$.

Luego, definiendo $P := \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ($P$ se elige por convención de modo que $\det(P) > 0$, i.e. rotación de ejes en sentido antihorario), resulta
$P^t\, A\, P \;=\; D \;:=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ahora, definiendo la rotación de coordenadas (notar que $\det(P) \;=\; 1 \;>\; 0$).

$$y \;:=\; P^t\, x \;\Leftrightarrow\; x \;=\; P\, y \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 \;-\; \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \;+\; \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 \;=\; \frac{1}{2}y_1 \;-\; \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\,, \\ \\ x_2 \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \;+\; \frac{1}{2}y_2\,, \end{cases} \qquad \text{tenemos}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; x^t\, A\, x \;+\; (-2\sqrt{3} \;-2)\, x \;-\; 4 &= (y^t\, P^t)\, A\, (P\, y) \;+\; (-2\sqrt{3} \;-2)\, P\, y \;-\; 4 \\ &= y^t\, D\, y \;+\; (-2\sqrt{3} \;-2)\, P\, y \;-\; 4 \\ &= 4y_1^2 \;-\; 2\sqrt{3}y_1 \;+\; 2y_2 \;-\; 4 \\ &= 4\left(y_1 \;-\; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \;+\; 2y_2 \;-\; \frac{19}{4}\,. \end{aligned}$$

Esto permite afirmar que en las nuevas coordenadas $(y_1, y_2)$, la ecuación de la cónica resulta ser: $4\left(y_1 \;-\; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \;+\; 2\left(y_2 \;-\; \frac{19}{8}\right) \;=\; 0$, la cual corresponde a una parábola, con vértice en $(\sqrt{3}/4, 19/8)$.

Observación: La signatura de $A$ es $\mathrm{sig}(A) \;=\; (1, 0)$.

Ejemplo: Identifique la superficie cuadrática de ecuación
$2y^2 + 2xy + 2xz + 2yz + \sqrt{6}y - 1 = 0$. Indicar las ecuaciones de rotación y/o traslación utilizadas.

Primero, expresamos la ecuación en forma matricial.

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + (0\ \sqrt{6}\ 0)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} - 1 = 0\,.$$

Consideremos $A := \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Se deduce (¡HACERLO!) que $\sigma(A) = \{-1, 0, 3\}$, con espacios propios asociados $S_{-1} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, $S_0 = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, y $S_3 = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$. Se deduce así que $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de $A$.

Candidato a matriz de rotación: $P := \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$. Como $\det(P) = -1 < 0$, no cumple la condición de ROTACIÓN ANTIHORARIA. Hay que permutar dos columnas.

Luego, la matriz de rotación (antihoraria) es $\tilde{P} := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, con la cual se cumple $\tilde{P}^t A \tilde{P} = D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora, definiendo la ROTACIÓN DE COORDENADAS:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \tilde{P} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \end{cases}$$

la ecuación cuadrática nos queda:

$$(\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})\, D \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + (0\ \sqrt{6}\ 0)\, \tilde{P} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 2\,\tilde{y} - \sqrt{2}\,\tilde{z} = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{z} + 2\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\left(\tilde{y} + \frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt{2}/3} - \frac{\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}\,.$$

Si además introducimos las ECUACIONES DE TRASLACIÓN:

$$\begin{cases} \hat{x} \ := \ \tilde{x} \\ \hat{y} \ := \ \tilde{y} + \frac{1}{3} \\ \hat{z} \ := \ \tilde{z} \ + \ 2\frac{\sqrt{2}}{3}\,, \end{cases}$$

la ecuación de la SUPERFICIE CUADRÁTICA nos queda:

$$\hat{z} \;=\; \frac{\hat{y}^2}{\sqrt{2}/3} \;-\; \frac{\hat{x}^2}{\sqrt{2}}\,,$$

la cual corresponde a un PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SILLA DE MONTAR).
Observación: La signatura de $A$ es $\mathrm{sig}(A) \;=\; (1, 1)$.