

Cálculo II (527150)

Clase 21: Criterios para series de términos positivos

Criterio de la integral

Criterio

Sea $f : [k \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva, decreciente y tal que $f(n) = a_n$. Se tiene la equivalencia

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \quad \text{si y sólo si} \quad \int_k^{\infty} f(x) dx \text{ es convergente}$$

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

► $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

► $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ejemplo: series p

Propiedad

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge si y sólo si $p > 1$.

Criterio de comparación directa

Criterio

Sean a_n , b_n dos sucesiones de números positivos, tales que $a_n \leq b_n$ para todo n .

Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

►
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \sin^2(n)}$$

►
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2 + n}$$

Criterio de comparación en el límite

Criterio

Sean a_n , b_n dos sucesiones de números positivos, tales que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ es finito y positivo.

$\sum a_n$ es convergente si y sólo si $\sum b_n$ es convergente.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

►
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 2n^2 + 1}$$

►
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n - 2n}$$

►
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 5n - 1}}$$

Criterio de comparación en el límite, versión parcial

Criterio

Sean a_n , b_n dos sucesiones de números positivos, tales que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ es cero.

Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.