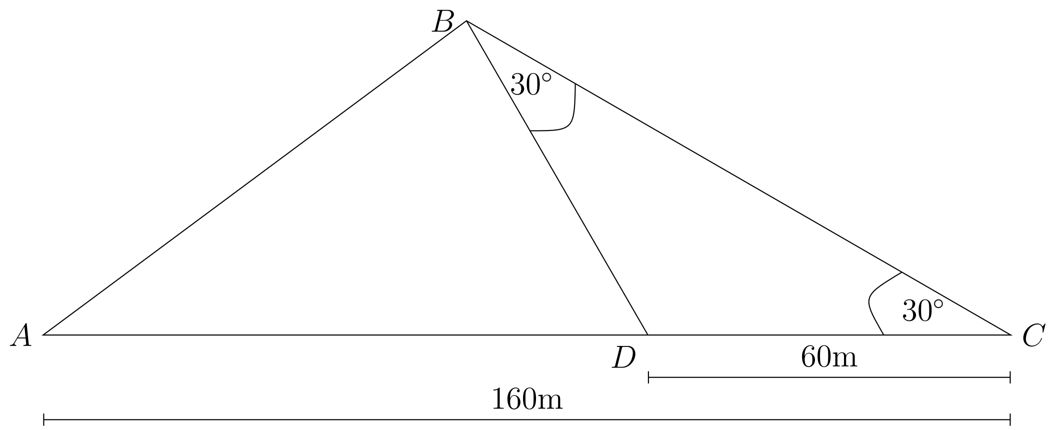
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Álgebra I - 525140
3 de agosto de 2022
Duración: 100 min

Evaluación de Recuperación

Pregunta 1

(10 puntos) Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}$, y encierre en un círculo la alternativa correcta.



a) $60\sqrt{3}$ b) 19600 c) $20\sqrt{19}$ d) $\sqrt{19600}$

Solución: Con los datos entregados y por suma de los angulos interior de un triángulo en una superficie plana, se tiene lo siguiente:

- $m(\angle CDB) = 180° - 30° - 30° = 120°$.
- $m(\angle BDA) = 180° - 120° = 60°$.
- $m\left(\overline{AD}\right) = m(\overline{AC}) - m(\overline{DC}) = 160m - 60m = 100m$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo BCD, determinamos la longitud del segmento $\overline{BD}$, como sigue:

$$\frac{60m}{\sin(30°)} = \frac{m(\overline{BD})}{\sin(30°)} \Leftrightarrow m(\overline{BD}) = 60m$$

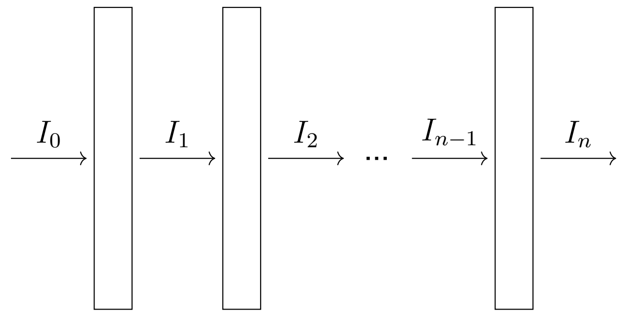
Ahora bien, aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABD para obtener la medida de $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned} m(\overline{AB})^2 &= (60)^2 + (100)^2 - 2 \cdot 60 \cdot 100 \cdot \cos(60°) \\ m(\overline{AB}) &= \sqrt{13600 - 12000 \cdot \frac{1}{2}} \\ m(\overline{AB}) &= \sqrt{7600} = \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 19} = 20\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que la alternativa correcta es **c)**

Pregunta 2

(10 puntos) En una vidriería hay n vidrios colocados en forma vertical, uno al lado de otro, como muestra la figura. La luz pasa a través de estos, sin embargo cada vidrio atenúa el nivel de iluminación en un 50 %.



Si el nivel de iluminación que entra $I_0 = 32000$lux se reduce a $I_n = 125$lux al atravesar los n vidrios, determine cuántos vidrios hay y dibuje un círculo indicando la alternativa correspondiente.

a) $n = 10$ b) $n = 8$ c) $n = 2$ d) $n = 7$

Solución: De acuerdo con la información entregada sabemos que el nivel de iluminación se reduce a la mitad, por ende, si inicialmente hay I_0 lux, entonces $I_1 = \frac{1}{2}I_0$, en el sgte paso, $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}I_0)$, y así sucesivamente. Por lo que esta situación se modela mediante una progresión geométrica, donde al reemplazar recursivamente se obtiene:

$$I_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_0$$

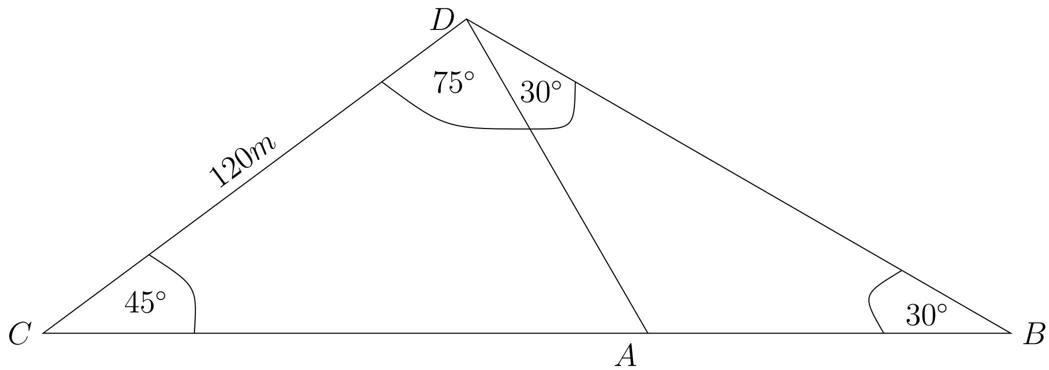
Luego, usando esta fórmula con los datos entregados, obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_0 &\Leftrightarrow 125 \text{ lux} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 32000 \text{ lux} \\
&\Leftrightarrow 2^n = \frac{32000}{125} \\
&\Leftrightarrow 2^n = 256 \\
&\Leftrightarrow 2^n = 2^8 \\
&\Leftrightarrow n = 8
\end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que la alternativa correcta es **b)**

Pregunta 1

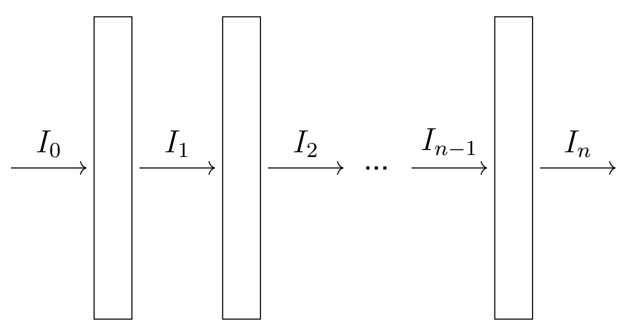
(10 puntos) Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}$, y encierre en un círculo la alternativa correcta.



a) $40\sqrt{6}$ (**Correcta**) **b)** 90 **c)** $\dfrac{\sqrt{240}}{\sqrt{3}}$ **d)** $-\sqrt{9600}$

Pregunta 2

(10 puntos) En una vidriería hay n vidrios colocados en forma vertical, uno al lado de otro, como muestra la figura. La luz pasa a través de estos, sin embargo cada vidrio atenúa el nivel de iluminación en un 75 %.

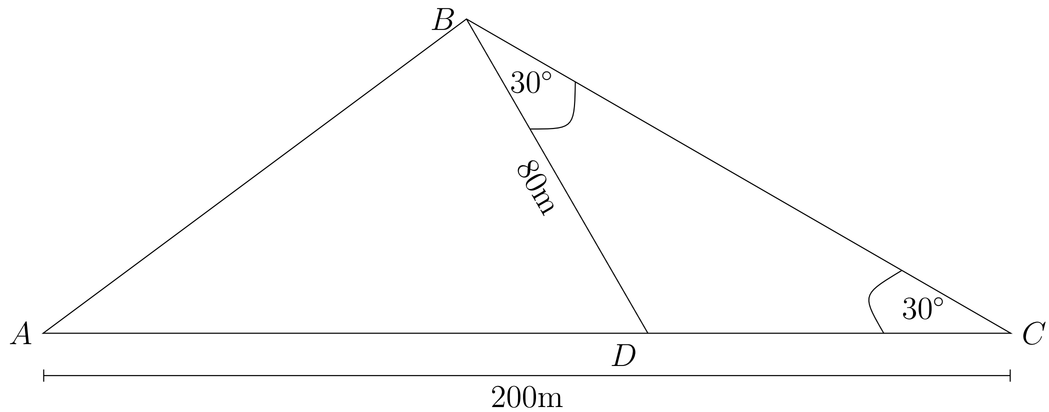


Si el nivel de iluminación que entra $I_0 = 32000$lux se reduce a $I_n \simeq 500$lux al atravesar los n vidrios, determine cuántos vidrios hay y dibuje un círculo indicando la alternativa correspondiente.

a) $n = 11$ b) $n = 3$ **Correcta.** **c)** $n = 5$ **d)** $n = 7$

Pregunta 1

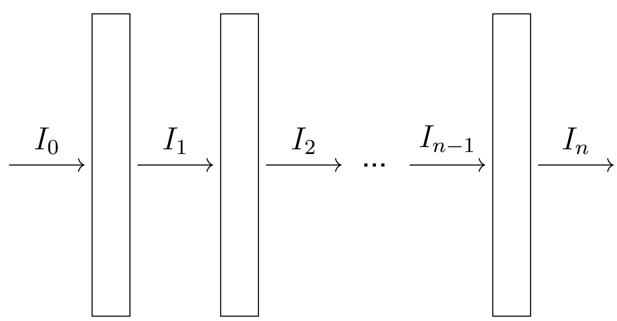
(10 puntos) Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}$, y encierre en un círculo la alternativa correcta.



a) 11200 b) 120 c) $10\sqrt{304}$ d) $\sqrt{11200}$ **Correcto.**

Pregunta 2

(10 puntos) En una vidriería hay n vidrios colocados en forma vertical, uno al lado de otro, como muestra la figura. La luz pasa a través de estos, sin embargo cada vidrio atenúa el nivel de iluminación en un 75 %.

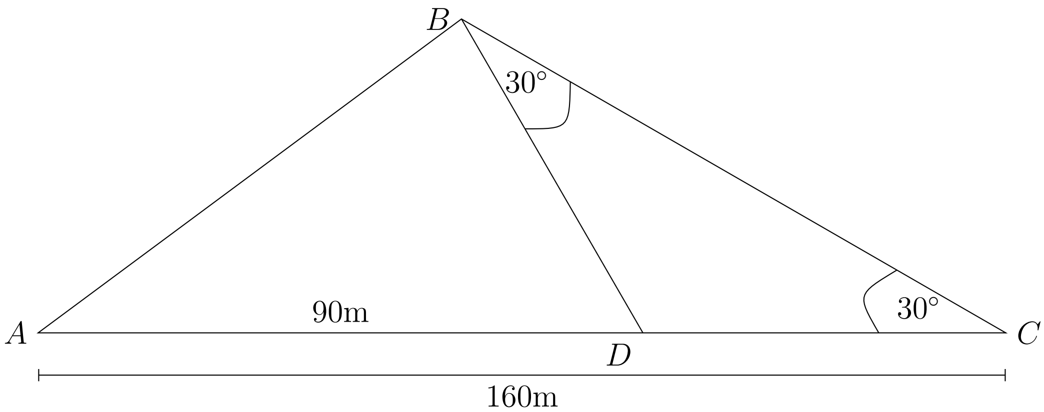


Si el nivel de iluminación que entra $I_0 = 32000$lux se reduce a $I_n \simeq 125$lux al atravesar los n vidrios, determine cuántos vidrios hay y dibuje un círculo indicando la alternativa correspondiente.

a) $n = 12$ b) $n = 1$ c) $n = 4$ **Correcta** d) $n = 8$

Pregunta 1

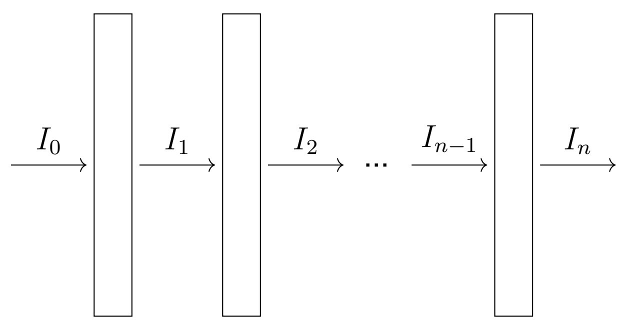
(10 puntos) Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}$, y encierre en un círculo la alternativa correcta.



a) 19300 b) $10\sqrt{67}$ **Correcta** **c)** $\sqrt{16150}$ **d)** $\sqrt{19300}$

Pregunta 2

(10 puntos) En una vidriería hay n vidrios colocados en forma vertical, uno al lado de otro, como muestra la figura. La luz pasa a través de estos, sin embargo cada vidrio atenúa el nivel de iluminación en un 50 %.



Si el nivel de iluminación que entra $I_0 = 8000$lux se reduce a $I_n \simeq 250$lux al atravesar los n vidrios, determine cuántos vidrios hay y dibuje un círculo indicando la alternativa correspondiente.

a) $n = 10$ b) $n = 9$ c) $n = 2$ d) $n = 5$ **Correcta**

Pregunta 3

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x^2 + 1$$

a) **(4 puntos)** Escriba la fórmula de $g \circ f$ y determine su dominio.

b) **(8 puntos)** Calcule $\text{Rec}(g \circ f)$ y determine si la función es o no sobreyectiva.

c) **(4 puntos)** ¿Es inyectiva la función? justifique.

d) **(4 puntos)** Decida si $g \circ f$ es invertible. En caso de no serlo, defina una restricción que si posea inversa y definala.

Solución:

a) Notemos que,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^{x-1}) = 3 \cdot (2^{x-1})^2 + 1 = 3 \cdot 2^{2x-2} + 1.$$

ahora, calculamos el dominio de la función:

$$\begin{aligned} Dom(g \circ f) &= \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2^{x-1} \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

luego, como la función exponencial no posee restricciones, se tiene que el $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$.

b) Obtenemos el recorrido de la función compuesta:

$$\begin{aligned} Rec(g \circ f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ y = g(f(x))\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ y = 3 \cdot 2^{2x-2} + 1\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} : x = \frac{\log_2\left(\frac{y-1}{3}\right) + 2}{2} \in \mathbb{R} \wedge y > 1 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y > 1\} \\ &= (1, +\infty) \end{aligned}$$

Por último, dado que la composición de funciones tiene como codominio el codominio de la función g, en este caso, $Cod(g \circ f) = \mathbb{R}$. Dado lo anterior, podemos concluir que la función no es sobreyectiva pues

$$Rec(g \circ f) \neq Cod(g \circ f).$$

c) Sabemos que una función h es inyectiva ssi

$$\forall x_1, x_2 \in Dom(h) : h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Consideremos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{2x_1-2} + 1 = 3 \cdot 2^{2x_2-2} + 1 &\Rightarrow 3 \cdot 2^{2x_1-2} = 3 \cdot 2^{2x_2-2} \\ &\Rightarrow 2^{2x_1-2} = 2^{2x_2-2} \qquad \text{(Por inyectividad de la fun. exp.)} \\ &\Rightarrow 2x_1 - 2 = 2x_2 - 2 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que la función $g \circ f$ es inyectiva.

d) Sabemos que $g \circ f$ es inyectiva, pero no sobreyectiva, por ende no posee inversa. Es por esto que podemos definir una función restringida tal que $Cod(g \circ f) = Rec(g \circ f) = (1, +\infty)$. Dado lo anterior, la función restringida que resulta biyectiva es:

$$(g \circ f) : \mathbb{R} \to (1, +\infty), \ \ (g \circ f)(x) = 3 \cdot 2^{2x-2} + 1,$$

y su función inversa es:

$$(g \circ f)^{-1} : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \ \ (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{\log_2\left(\frac{x-1}{3}\right) + 2}{2}.$$

Pregunta 4

a) **(10 puntos)** Considere el polinomio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 23x^2 + 36.$$

Sabiendo que p es divisible por $x - 3i$, y que -1 es raíz, encuentre todas las raíces de p y sus respectivas multiplicidades. Además, esriba p como producto de factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Solución: Al ser p divisible por $(x-3i)$, sabemos que este es un factor de p, además, por teorema del factor $3i$ es raíz del polinomio. Por otra parte, al ser p un polinomio con coeficientes reales y $3i$ una raiz compleja, entonces $-3i$ también es raíz. Dado lo anterior, se tiene:

$$p(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x + 1)q(x) = (x^2 + 9)(x + 1)q(x) = (x^3 + x^2 + 9x + 9)q(x).$$

luego, para determinar $q(x)$ realizamos la división $\frac{p(x)}{(x^3+x^2+9x+9)}$, como sigue:

$$\begin{array}{rl}
 & x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 23x^2 + 36 \div x^3 + x^2 + 9x + 9 = x^2 - 4x + 4 \\
- & \underline{(x^5 + x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 0x + 0)} \\
 & 0 - 4x^4 + 0x^3 - 32x^2 - 36 \\
- & \underline{(-4x^4 - 4x^3 - 36x^2 - 36x + 0)} \\
 & 0 + 4x^3 + 4x^2 + 36x + 36 \\
- & \underline{(4x^3 + 4x^2 + 36x + 36)} \\
 & 0
\end{array}$$

Así,

$$p(x) = (x^2 + 9)(x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x^2 + 9)(x + 1)(x - 2)^2$$

Observamos que la factorización de p:

- como producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}$ es:

$$p(x) = (x^2 + 9)(x + 1)(x - 2)^2, y$$

- como producto de factores irreducibles en $\mathbb{C}$ es:

$$p(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x + 1)(x - 2)^2.$$

- Así las raíces de p son:
  - (-1) es raíz de multiplicidad 1 (raíz simple),
  - $(3i)$ es raíz de multiplicidad 1 (raíz simple),
  - $(-3i)$ es raíz de multiplicidad 1 (raíz simple), y
  - (2) es raíz de multiplicidad 2.

b) **(10 puntos)** Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$|z - i|^2 = -\frac{1}{3} - 2\text{Re}(2\overline{z} + 1) - i\text{Im}\left(\overline{z - 1}\right)$$

Solución: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. A partir de esto se tiene:

- $\overline{z} = a - bi$.
- $(z - i) = a + (b-1)i$.
- $2\overline{z} + 1 = 2(a - bi) + 1 = (2a+1) - 2bi$.
- $\overline{z-1} = \overline{(a-1) + bi} = (a-1) - bi$
- $|z-i|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$.
- $\text{Re}(2\overline{z} + 1) = 2a + 1$.
- $\text{Im}\left(\overline{z-1}\right) = -b$.

Como el lado izquierdo de la igualdad corresponde a un número real, y el lado derecho posee el término imaginario $-bi$, para cumplir la igualdad b debe ser cero. Reemplazando esto, la igualdad queda:

$$\begin{aligned} a^2 + 1 = -\frac{7}{3} - 4a &\Leftrightarrow a^2 + 4a + \frac{10}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \vee \quad a = -2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Así, los números complejos que cumplen esta igualdad son

$$z_1 = -2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \wedge \qquad z_2 = -2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$