

## ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 1. 10–Mayo–2021; 19:00.

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

En los ejercicios que siguen  $X$  es un espacio métrico y  $d$  la métrica correspondiente.

1. Sean  $E := \left\{ \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N} : m \leq n \right\}$ . Demuestra si existen o no  $\inf E$  y  $\sup E$ .

Si existen, determínalos justificando cada paso.

2. Sean  $A, B \subset X$ . Demuestra si se cumplen o no las siguientes igualdades:

(a)  $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$ ;

(b)  $\text{int}(A \cup B) = \text{int } A \cup \text{int } B$ .

3. Sean  $K \subset X$  tal que  $K$  es compacto y  $x \notin K$ . Demuestra que hay abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  tales que  $x \in U$  y  $A \subset V$ .

*Sugerencia:* Busca una bola cerrada centrada en  $x$  que no intersekte a  $K$ .

4. Sea  $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  el conjunto de los números irracionales. Determina si  $\mathbb{I}$  es conexo o desconexo justificando cada paso.

5. Sean  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  dos sucesiones en  $X$  tales que  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Demuestra que  $\{x_n\}$  es de Cauchy si y sólo si  $\{y_n\}$  es de Cauchy.