Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Tarea no. 2 — martes 24 de abril de 2018

Plazo de entrega: viernes 4 de mayo de 2018, 12.15 horas

Problema 1. Determinar matrices $\boldsymbol{U}_k$, $k=1,2,3$, unitarias y hermitianas tales que

$$\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{x}_k = \exp(\mathrm{i}\delta_k)\|\boldsymbol{x}_k\|\boldsymbol{e}_k, \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \quad k=1,2,3,$$

donde $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,2,-1)^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{x}_3 = (5,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

Problema 2. Sean las matrices $\boldsymbol{H}_1$ y $\boldsymbol{H}_2$ dadas por

$$\boldsymbol{H}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 12 & -12 & 31 & 17 & 12 & 88 \\ 4 & -2 & 40 & 50 & 71 & 119 \\ 0 & 2 & 11 & 38 & -4 & 22 \\ 0 & 7 & 5 & 74 & 45 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre cotas $\tau_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (lo más grande posible) tales que se puede garantizar que $\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{H}_i$ es invertible para $\tau \in [0, \tau_i)$.

b) Sea

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre $\varepsilon > 0$ tal que puede asegurar que

$$\|\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{H})^{-1}\| \leq 0.1,$$

utilizando (i) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ y (ii) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

c) Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Verificar que $\boldsymbol{A}$ es regular, y calcular aproximaciones

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{(k)} = \mu \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \boldsymbol{H}^l, \quad k = 0, \ldots, 4,$$

a la inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$, utilizando una matriz $\boldsymbol{H}$ y un escalar μ apropiados.

Problema 3.

a) Calcular el número de condición con respecto a las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ de la matriz $\boldsymbol{A}$ definida por (1).

b) ¿Para qué normas y qué tipo de matrices $\boldsymbol{A}$ se tiene que $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{B})$ si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son similares?

Problema 4. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es invertible sin calcular $\det \boldsymbol{A}$.

b) Determinar una cota superior para $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})$ en una norma $\|\cdot\|$ apropiada *sin* invertir $\boldsymbol{A}$ o calcular $\det \boldsymbol{A}$.

c) Además consideramos

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.8 \\ 4.7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 5.1 & -2.1 & 1.05 \\ 2.1 & 3.9 & 2.05 \\ 0.05 & 1 & 3.1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sean la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Determinar una cota superior (la mejor posible) para $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| / \|\boldsymbol{x}\|$ sin calcular $\boldsymbol{x}$ o $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Problema 5. Se desea resolver el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ con

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10000 & 100 & 1 \\ -10000 & 200 & 0 \\ 10000 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq 10.$$

Los coeficientes de $\boldsymbol{A}$ y $\mathbf{b}$ han sido pertubados por ciertos errores $\delta\boldsymbol{A}$ y $\delta\mathbf{b}$.

a) Determinar cotas para α y β con

$$\alpha := \frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}, \quad \beta := \frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

tales que puede ser garantizado que

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| / \|\boldsymbol{x}\| < 0.01,$$

donde $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ y $(\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

b) Supongamos que de la solución $\boldsymbol{x}$ nos interesa solamente la tercera componente. Indicar una transformación simple del sistema original que permite una cota significativamente mejor (que la de (a)) de $|\tilde{x}_3 - x_3| / |x_3|$ en dependencia de las perturbaciones de los coeficientes del sistema transformado.