UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 10 ALGEBRA III 525201-1: Aplicación adjunta. Propiedades.
Aplicaciones autoadjuntas, unitarias, positivas, normales.
Aplicación raíz cuadrada (positiva). Descomposición polar. Descomposición en valores singulares

En lo que sigue, consideraremos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, pudiendo ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Sea $n \in \mathbb{Z}_0^+$ fijo. Se define $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ por $\mathbb{K}^n \ni (z_1, ..., z_n) \mapsto T(z_1, ..., z_n) := (0, z_1, ..., z_{n-1})$. Determine T^*.
2. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x, y) := (-y, x)$, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   Muestre que $\forall\, u \in \mathbb{R}^2 : \langle T(u), u\rangle = 0$, y $T \neq \Theta$.
3. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $u, w \in V$ cualesquiera. Simplificar
   $$\frac{\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle}{4} + i\,\frac{\langle T(u+iw), u+iw\rangle - \langle T(u-iw), u-iw\rangle}{4}.$$
4. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$, y U un subespacio de V. Pruebe que U es T-invariante si y sólo si $U^\perp$ es T^*-invariante.
5. Exhibir un espacio vectorial V finito dimensional con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que exista un subespacio vectorial de V invariante respecto de T, cuyo complemento ortogonal no es T-invariante.
6. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que T es autoadjunta si y sólo si $\forall\, u \in V : \langle T(u), u\rangle \in \mathbb{R}$.
   Hint: tener en cuenta Ejercicio (3).
7. Pruebe que no existe operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$ y $T(2, 5, 7) = (2, 5, 7)$.
8. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x, y) := (2\,x - 3\,y\,,\, 3\,x + 2\,y)$. Demuestre que T no es autoadjunta, pero si es normal.
9. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que T es normal si y sólo si $\forall\, u \in V : ||T(u)|| = ||T^*(u)||$. Luego, aplique esta caracterización para probar que si T es normal, entonces $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$. Si además V es finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$ es Normal, entonces
   (a) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^*)$.
   (b) demuestre, usando la definición, que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : (T - \alpha\,\tilde{I})^* = T^* - \overline{\alpha}\,\tilde{I}$, siendo $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la aplicación identidad. Concluya después que $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : (T - \alpha\,\tilde{I})$ es una aplicación normal.
   (c) si (λ, u) es un autopar de T, entonces $(\overline{\lambda}, u)$ es un autopar de T^*.
   (d) vectores (espacios) propios de T asociados a valores propios distintos, son ortogonales.
10. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ normal, tal que $T(1, 1, 1) = (3i, 3i, 3i)$ y $(z_1, -5iz_2, 2iz_3) \in \mathrm{Ker}(T)\backslash\{\theta\}$. Puebe que $iz_1 + 5z_2 - 2z_3 = 0$.
11. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunta y U un subespacio de V que es T-invariante. Pruebe que:
    $$(a)\, U^\perp \text{ es } T\text{-invariante}. \quad (b)\, T|_U \in \mathcal{L}(U) \text{ es autoadjunta}. \quad (c)\, T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp) \text{ es autoadjunta}.$$
12. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
    (a) T es una isometría.
    (b) $\forall\, u, w \in V : \langle T^*(u), T^*(w)\rangle = \langle u, w\rangle$.
    (c) Para cualquier conjunto ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^m \subseteq V$, $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^m$ es también ortonormal.
    (d) Existe una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^n$ de V, tal que $\{S^*(z_j)\}_{j=1}^n$ es también base ortonormal de V.
13. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva, y considere U un subespacio de V, T-invariante. Demuestre que $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ es positiva.
14. Pruebe que la adición de dos aplicaciones lineales positivas sobre V, es también positiva.
15. Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es positiva, entonces $\forall\, k \in I\!N : T^k$ es también positiva.
16. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, para cualquier $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, definida por $T(z_1, z_2) := (-4z_2, z_1)$.
    (a) Determine los valores singulares de T.
    (b) Determine explícitamente una isometría $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.

Ejercicios propuestos:

17. Considere el espacio vectorial real $V := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dotado del producto interno usual: $\forall\, A, B \in V \,:\, \langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} A)$. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ definido por $V \ni A := (a_{ij}) \mapsto T(A) := \begin{pmatrix} a_{12} - a_{21} & 3\,a_{11} \\ 5\,a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$. Determine explícitamente T^*.

18. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que si T es autoadjunta y $\forall\, u \in V \,:\, \langle T(u), u\rangle = 0$, entonces $T = \Theta$.

19. Sea V finito dimensional, y $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$. Pruebe que existe un subespacio U de V tal que $P = \operatorname{Proj}_U$ si y sólo si P es autoadjunto.

20. Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjuntas. No es difícil establecer que $ST \in \mathcal{L}(V)$. Luego, demuestre que ST es autoadjunta sobre V si y sólo $ST = TS$.

21. Sea V un espacio finito dimensional complejo. Demuestre que una aplicación lineal normal definido sobre V, es autoadjunta si y sólo si todos sus valores propios son reales.

22. Sea V un espacio vectorial complejo, dotado de un producto interior, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal tal que $T^9 = T^8$. Pruebe que T es autoadjunta y que $T^2 = T$.

23. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ normal, tal que $\{3, 4\} \subseteq \sigma(T)$. Pruebe que $\exists\, z \in V \,:\, ||z|| = \sqrt{2}$ y $||T(z)|| = 5$.

24. Suponga que $\dim(V) \ge 2$. Pruebe que el conjunto de todos los operadores normales definidos sobre V no es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V)$.

25. Sea V finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva. Pruebe que T es isomorfismo si y sólo si $\forall\, u \in V \backslash \{\theta\} \,:\, \langle T(u), u\rangle > 0$.

26. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, con la cual se define la función $\langle\cdot,\cdot\rangle_T \,:\, V \to V$ tal que $\forall\, u, w \in V \,:\, \langle u, w\rangle_T := \langle T(u), w\rangle$. Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ es un producto interno sobre V si y sólo si T es un isomorfismo positivo (con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

27. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$, $S \in \mathcal{L}(V)$ isometría, y $R \in \mathcal{L}(V)$ positiva, tales que $T = SR$. Pruebe que $R = \sqrt{T^* T}$.

28. De un ejemplo de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tal que 0 es el único valor propio de T, mientras que 0 y 5 son los valores singulares de T.

29. Sea V finito dimensional. Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunta, entonces los valores singulares de T son iguales a los valores absolutos de los valores propios de T (repetidos según sea necesario).

30. Sea V finito dimensional. Pruebe o de un contra-ejemplo: Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces los valores singulares de T^2 son iguales a los cuadrados de los valores singulares de T.

31. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que si T es un isomorfismo, entonces existe una única isometría $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = S\sqrt{T^* T}$.

32. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que T es un isomorfismo si y sólo si 0 no es un valor singular de T.

33. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que $\dim(\operatorname{Im}(T))$ es igual al número de valores singulares no nulos de T. Hint: Matrices equivalentes, tienen el mismo rango.

34. Sea V finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(V)$, de modo que tiene la siguiente Descomposición en valores singulares:

$$\forall\, z \in V \,:\, T(z) = \sum_{j=1}^{n} s_j \,\langle z, x_j\rangle\, y_j\,,$$

donde $\{s_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$ es el conjunto de valores singulares de T, mientras que $\{x_j\}_{j=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^n$ son bases ortonormales de V. Demuestre que:

$(a)\, \forall\, z \in V \,:\, T^*(z) = \sum_{j=1}^{n} s_j \,\langle z, y_j\rangle\, x_j$ $\quad (b)\, \forall\, z \in V \,:\, \big(T^* T\big)(z) = \sum_{j=1}^{n} s_j^2 \,\langle z, x_j\rangle\, x_j$ $\quad (c)\, \forall\, z \in V \,:\, \sqrt{T^* T}(z) = \sum_{j=1}^{n} s_j \,\langle z, x_j\rangle\, x_j$

(d) Si T es un isomorfismo, entonces $\forall\, z \in V \,:\, T^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \,\langle z, y_j\rangle\, x_j\,,$

35. Sea V finito dimensional y $S \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que S es una isometría si y sólo si todos los valores singulares de S son iguales a 1.