Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 2 — lunes 1 de julio de 2013

Problema 1 (25 puntos)**.** Se considera el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 59 \\ 21 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Sean $\mathbf{e} := (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{E} := \alpha \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$, y $\mathbf{d} := \alpha \mathbf{e}$. Decidir si los siguientes vectores son una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (i) para $\alpha = 0.1$, (ii) para $\alpha = 0.5$:

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1.05 \\ 9.95 \\ 20.05 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 0.75 \\ 10.25 \\ 19.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

b) Demostrar que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para la solución numérica de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ convergen para todo vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

c) Ejecutar dos pasos con cada uno de estos métodos, partiendo de $\mathbf{x}_0 = (10, 10, 10)^{\mathrm{T}}$.

d) Sea $\mathbf{x}^*$ la solución exacta de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Estimar el número de iteraciones N del método de Jacobi tal que se puede garantizar que para cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$,

$$\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}^*\| \leq 10^{-3} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|,$$

para una norma vectorial $\|\cdot\|$ adecuada.

Problema 2 (15 puntos)**.** Se desea resolver el problema de aproximación

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0^* + \alpha_1^* t_i + \alpha_2^* t_i^2)^2 = \min_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0 + \alpha_1 t_i + \alpha_2 t_i^2)^2$$

para los datos

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
y_i	8	5	3	5

.

a) Resolver el problema, transformando la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.

b) Graficar el resultado.

c) En cada caso, calcular también la matriz $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Comparar $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ y $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(\mathbf{R})$.

Problema 3 (20 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que el método SOR converge para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y a partir de cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, y para valores $0 < \omega < 2$ del parámetro de relajación ω.

b) Demostrar que el método SOR incluso converge con un parámetro de relajación óptimo, $\omega = \omega_{\mathrm{opt}}$. Calcular ω_{opt} y el valor del radio espectral $r_\sigma(\mathbf{B}(\omega_{\mathrm{opt}}))$.

c) Sea $\tilde{\omega}$ el valor de ω_{opt} redondeado adecuadamente a dos decimales. Calcular $r_\sigma(\mathbf{B}(\tilde{\omega}))$ y dos pasos del método SOR con $\omega = \tilde{\omega}$ para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$