

Cálculo III (521227)
Listado 4

1. Muestre por definición que las siguientes definiciones son diferenciables en el punto indicado.
 - (a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, en el punto $(1, 2)$.
 - (b) $f(x, y) = 2x^3y^2$, en el punto $(1, 1)$.
2. Determine todos los puntos donde la función f es diferenciable.
 - (a) $f(x, y) = y \sin(x)$.
 - (b) $f(x, y) = |x| + |y|$.
 - (c) $f(x, y) = \begin{cases} xy \cos\left(\frac{1}{xy}\right) & , \text{ si } xy \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } xy = 0 \end{cases}$.
 - (d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
 - (e) $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} & , \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$.
3. Sea $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin[(x^2 + y^2)^{-1/2}] & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 Muestre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen y que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0, 0)$. ¿ f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifique.
4. Compruebe que las siguientes funciones son de C^1 en todo su dominio.
 - (a) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.
 - (b) $f(x, y) = \sin^2(x - y) \cos(x + y)$.
 - (c) $f(x, y) = \frac{1 + \cosh(y)}{\tanh(x)}$.
 - (d) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{1-x-y}{1+x+y}\right)$.
5. Encuentre la buena aproximación afín $L(\vec{X})$ de la función f en el punto X_0 y utilícela para aproximar el valor de f en el punto A .
 - (a) $f(x, y, z) = xy^2 + z$, $X_0 = (2, 2, -2)$ y $A = (2.1, 1.98, -2.03)$.

- (b) $f(x, y, z) = e^{\arctan(x-y)} + \cos(x+z)$, $X_0 = (2, 2, -2)$ y $A = (2.1, 1.98, -2.03)$.
- (c) $f(x, y, z) = (xy^2 + z, e^{\arctan(x-y)} + \cos(x+z))$, $X_0 = (2, 2, -2)$ y
 $A = (2.1, 1.98, -2.03)$.
6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 y sea P un punto de U . Suponga que $\frac{\partial f}{\partial u}(P) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = 3$, donde $u = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Calcule las derivadas parciales de f en P .
7. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = xe^{-xy}$ en el punto $(0, 2)$ es igual a 1.
8. Calcular aproximadamente el valor de la expresión dada:
- (a) $\arctan(\sqrt{0.2} + 0.98)$.
- (b) $\ln(\sqrt{4.15} + \sqrt{9.08} - 4.1)$.