UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 2 - 525301

Análisis Real I

La siguiente tarea se entrega en parejas (no se aceptarán tareas individuales) y consiste de 3 preguntas de 20 puntos cada una. La fecha de entrega es el **25 de Junio del 2021 a las 23:59 hrs**, se recomienda mandar antes para evitar atrasos (No se aceptarán). La tarea debe ser escrita en LaTeX. Se debe entregar via e-mail a eshenriquez2016@udec.cl

Problema 1. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales, con $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, existe al menos un $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_j > 0$ (Es decir, no todos los términos son nulos). Demuestre que la serie $\sum b_n$, con

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es divergente.

Problema 2. Sea $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestra que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una suseción de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Da un ejemplo que ilustre que la condición de continuidad uniforme es necesaria.

Problema 3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

a) Se define la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que si $\lim_n x_n = L$, entonces $\lim_n y_n = L$. Además, dar un contraejemplo de por qué el recíproco no se cumple.

b) Demostrar que si

$$\lim_n x_{n+1} - x_n = L,$$

entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{n} = L.$$

(*Hint: Usar la parte a).*)

Soluciones:

Pregunta 1. Sea j la posición del primer término no nulo de la sucesión $\{a_n\}$, luego $\forall n \geq j$ se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \\ &\geq \frac{a_j}{n}. && \text{(Se quitan términos positivos.)} \end{aligned}$$

Se define $d_n := a_j/n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq j$, $0 \leq d_n \leq b_n$. Finalmente, es claro que $\sum d_n$ diverge, pues

$$\sum d_n = a_j \sum \frac{1}{n}$$

y la serie armónica diverge (Si $\sum d_n$ convergiera, entonces $a_j^{-1} \sum d_n = \sum \frac{1}{n}$ converge, lo cual es una contradicción.). Concluimos así, por criterio de comparación directa, que $\sum b_n$ diverge.

Pregunta 2. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in E : \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

Ahora, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para el $\delta > 0$ anterior existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq N : \ |x_m - x_n| < \delta$$

Y por (1) se concluye que $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. De esta forma, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $f : E := (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in E$. De lo visto en clases sabemos que f no es uniformemente continua. Consideremos ahora la sucesión dada por $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sin embargo $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no lo es. Pues si lo fuera, debería converger en $\mathbb{R}$ por ser este un espacio completo.

Pregunta 3.

a) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_n x_n = L$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_0 \ : \quad |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado,

$$y_n - L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - L), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, si $n \geq N_0$, entonces

$$y_n - L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0-1}(x_i - L) + \frac{1}{n}\sum_{i=N_0}^{n}(x_i - L).$$

Además,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0-1}(x_i - L) = 0,$$

por lo que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N_1 \ : \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_0-1}(x_i - L)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $N := \text{máx}\{N_0, N_1\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq N \ : \quad |y_n - L| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_0-1} (x_i - L) + \frac{1}{n} \sum_{i=N_0}^{n} (x_i - L) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_0-1} (x_i - L) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=N_0}^{n} (x_i - L) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_0-1} (x_i - L) \right| + \frac{1}{n} \sum_{i=N_0}^{n} |x_i - L| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{(n-N_0+1)}{n} \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto $\lim_n y_n = L$.

Para el contraejemplo, consideremos $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$
y_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}
$$

Es claro que $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, sin embargo sabemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no convergente. Así, el recíproco no se cumple.

b) Sea la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_n := x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $z_n \xrightarrow{n\to\infty} L$, entonces, por ejercicio a),

$$
\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i}_{:=y_n} \xrightarrow{n\to\infty} L.
$$

Pero, por suma telescópica se tiene que,

$$
y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) = \frac{x_{n+1} - x_1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Entonces,

$$
\forall n > 1 \ : \quad \frac{x_n}{n} = \frac{n-1}{n} y_{n-1} + \frac{x_1}{n}.
$$

Finalmente, como

$$
\lim_n \frac{n-1}{n} = 1, \qquad \lim_n y_n = L \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{x_1}{n} = 0,
$$

se concluye que

$$
\lim_n \frac{x_n}{n} = L.
$$