UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo III Joaquín Riquelme, Javier Salinas Concepción 2025, Junio

CÁLCULO III

Listado Integrales de linea y campos conservativos

Ejercicios para la práctica

Problema 1: Sea $M(x,y) = x^3 + y^3$ y $L(x,y) = 2x^3 - y^3$. Sea $\mathcal{C}$ el círculo de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio 1 orientado positivamente. Calcule la integral curvilínea

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (L\,dx + M\,dy)$$

Indicación:
Usar la relación trigonométrica:

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{3}{4} + \frac{\cos(4\theta)}{4}$$

Problema 2: Sea D la región acotada por el eje x, el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$, contenida en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$. Calcule la integral

$$\iint_D x^3 y\,dx\,dy$$

Problema 3: Sea el campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x,y,z) = y\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} - yz\,\hat{k}$$

- Pruebe que F es conservativo.
- Calcular el trabajo $W = \int_C F \cdot d\mathbf{r}$ efectuado al mover una partícula desde el punto $(2, 0, \sqrt{5})$ hasta el punto $(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{5})$, con $y \geq 0$, a lo largo de la curva de intersección C entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $z = \sqrt{5}$ bajo la influencia del campo F.

Problema 4: Determine si los siguientes campos son conservativos. Además, de ser posible encontrar un potencial:

- $F(x,y) = (e^x y^2 + 1,\ 2e^x y)$
- $F(x,y) = (x^2 + y^2,\ 2xy)$
- $F(x,y) = (2x\sin y,\ x^2\cos y - 3y^2)$
- $F(x,y,z) = (y,\ x,\ -xz)$
- $F(x,y,z) = (x,\ y^2,\ z)$
- $F(x,y,z) = (x^2 - yz,\ y^2 - xz,\ z^2 - xy)$