525401 Análisis Funcional I
Capítulo 3: Operadores lineales[1]

Leonardo E. Figueroa

CI^{2}MA y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Semestre 2022-1

[1]Casi todos los contenidos tomados del libro **Gabriel N. Gatica:** Introducción al Análisis: Teoría y Aplicaciones, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

3.1 Preliminares

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios vectoriales normados (EVN) sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ que asigna a cada $x \in \mathcal{D}(A)$ un único $y \in Y$ se llama *operador* (o *transformación*) de X en Y. El conjunto $\mathcal{D}(A)$ sobre el cual actúa A se llama el *dominio* del operador.

Definición 3.1

Se dice que un operador $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es *lineal* si

- $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X, y
- $(\forall\, x, z \in \mathcal{D}(A))\ (\forall\, \alpha\, \beta \in \mathbb{K}) \quad A(\alpha x + \beta z) = \alpha\, A(x) + \beta\, A(z)$.

Notar que si $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal, claramente $A(0_X) = 0_Y$.

Definición 3.2

Se dice que un operador lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es *acotado* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad \|A(x)\|_Y \leq M\, \|x\|_X\,.$$

Ejemplo 3.1

1. Dado un espacio de Hilbert real $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la aplicación de Riesz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\colon H' &\to H \\ F &\to \mathcal{R}(F) \end{aligned}$$

es lineal y acotada.

2. Dada $f \in L^2(\Omega)$, consideramos $u \in H_0^1(\Omega)$ la única solución debil del problema de valores de contorno

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega;$$

esto es, u es el único elemento en $H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$(\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v.$$

Entonces, se puede probar que el operador A definido por

$$\begin{aligned} A\colon L^2(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \\ f &\to A(f) := u \end{aligned}$$

es lineal y acotado.

En lo que sigue, a menos que se diga explícitamente lo contrario, se asume que $\mathcal{D}(A) = X$.

Definición 3.3

El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y se designa por $\mathcal{L}(X,Y)$ (o $\mathcal{B}(X,Y)$). En particular, cuando $X = Y$, se escribe simplemente $\mathcal{L}(X)$ en lugar de $\mathcal{L}(X,X)$. Además, notar que $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$.

El conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$, equipado con las operaciones usuales de suma de operadores y multiplicación de escalar por operador es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, cuyo elemento neutro es el operador nulo $0\colon X \to Y$ definido simplemente como $0(x) := 0_Y$ para todo $x \in X$.

Definición 3.4

Dado $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ se define $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ como el ínfimo de todas las constantes $M > 0$ que satisfacen la condición de acotamiento de A según la Definición 3.2; esto es,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \operatorname{ínf}\left\{M > 0\colon (\forall\, x \in X) \quad \|A(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X\right\}.$$

Es fácil ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ es una norma sobre $\mathcal{L}(X,Y)$, equipada con la cual $\mathcal{L}(X,Y)$ constituye un EVN. Más aún, esta norma admite la forma equivalente

$$(\forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)) \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}, \tag{3.3}$$

o bien

$$(\forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)) \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|A(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|A(x)\|_Y\,.$$

En particular, si $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$, se puede probar que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x,z\in X\\ \|x\|,\|z\|\leq 1}} |\langle A(x), z\rangle| .$$

En general, dado $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, claramente se tiene:

$$(\forall\, x \in X) \quad \|A(x)\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X ,$$

y si $M > 0$ es tal que, para todo $x \in X$, $\|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$, entonces necesariamente

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M.$$

Pronto probaremos el Lema 3.3 (análogo al Lema 2.4), que provee la identidad

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_X = \max_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}, \tag{3.4}$$

Definición 3.5

Un operador $A\colon X \to Y$ se dice *continuo en* $x_0 \in X$ si, para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0, se tiene que $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A(x_0)$ en Y; esto es, $\|A(x_n) - A(x_0)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Equivalentemente, A es continuo en x_0 si

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0) \quad x \in B(x_0, \delta) \implies \|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon.$$

Es importante observar que si $A\colon X \to Y$ es un operador lineal acotado ($A \in \mathcal{L}(X,Y)$), entonces A es continuo en todo $x_0 \in X$. En efecto, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x_0 en X,

$$\|A(x_n) - A(x_0)\| = \|A(x_n - x_0)\| \leq \|A\|\,\|x_n - x_0\|\,,$$

lo cual prueba que $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A(x_0)$ en Y.

Se tiene el quizás sorprendente resultado recíproco parcial.

Lema 3.1

Sea $A\colon X \to Y$ un operador lineal y sea $x_0 \in X$ tal que A es continuo en x_0. Entonces, A es acotado y por lo tanto continuo en todo X.

Demostración: Supongamos, por contradicción, que A no es acotado. Entonces, para cada $M > 0$ existe $x_M \in X$ tal que $\|A(x_M)\| > M\,\|x_M\|$. En particular, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\|A(x_n)\| > n\,\|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notar que ninguno de los x_n es nulo. Luego, definiendo

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad z_n := \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} + x_0,$$

se sigue que $\|z_n - x_0\| = 1/n$, de donde $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 en X. Sin embargo, empleando la linealidad de A se obtiene que

$$A(z_n) = \frac{1}{n}\frac{A(x_n)}{\|x_n\|} + A(x_0), \quad \text{de donde} \quad \|A(z_n) - A(x_0)\| = \frac{1}{n}\frac{\|A(x_n)\|}{\|x_n\|} > 1,$$

lo que contradice a la continuidad de A en x_0. □

3.2 Caracterización de $\mathcal{L}(X, Y)$

Lema 3.2

Sean X e Y EVN sobre $\mathbb{K}$ y sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $x_0 \neq 0$. Entonces, existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$A(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad \|A\| = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}.$$

Demostración: Del Teorema 2.7 sabemos que existe un funcional $F \in X'$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(x_0) = \|x_0\|$. Luego, podemos definir el operador $A\colon X \to Y$ por

$$(\forall\, x \in X) \quad A(x) := \frac{F(x)}{\|x_0\|} y_0.$$

Es claro que A hereda de F el ser lineal y acotado y, además, $A(x_0) = y_0$. A su vez,

$$\|A\| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|F(x)|\,\|y_0\|}{\|x\|\,\|x_0\|}$$

$$= \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|} \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|} \|F\| = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}.$$

□

Teorema 3.1

Sean X e Y EVN sobre $\mathbb{K}$. Entonces, $\mathcal{L}(X,Y)$ es Banach si y solo si Y es Banach.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}(X,Y)$ es Banach y sean $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$. Entonces, aplicando el Lema 3.2, se deduce la existencia de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad A_n(x_0) = y_n \quad \text{y} \quad \|A_n\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|}.$$

Todavía más, de acuerdo a la demostración de dicho lema, podemos exigir que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, x \in X) \quad A_n(x) = \frac{F(x)}{\|x_0\|} y_n,$$

donde $F \in X'$ es tal que $\|F\| = 1$ y $F(x_0) = \|x_0\|$. Se sigue que

$$(\forall\, m, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, x \in X)$$
$$(A_n - A_m)(x) = \frac{F(x)}{\|x_0\|}(y_n - y_m) \quad \text{y} \quad \|A_n - A_m\| = \frac{\|y_n - y_m\|}{\|x_0\|},$$

con lo cual $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ el límite de esta sucesión. Entonces,

$$\|y_n - A(x_0)\| = \|A_n(x_0) - A(x_0)\| = \|(A_n - A)(x_0)\| \leq \|A_n - A\|\, \|x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

por lo que hemos hallado un límite para la sucesión de Cauchy $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para probar la otra implicación, supongamos que Y es Banach y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Entonces,

$$(\forall\,\varepsilon>0)\;(\exists\,N\in\mathbb{N})\quad m,n\geq N\implies\|A_m-A_n\|\leq\varepsilon,$$

lo cual, en virtud de la Definición 3.4 y la ecuación (3.3), equivale a escribir

$$(\forall\,\varepsilon>0)\;(\exists\,N\in\mathbb{N})\quad m,n\geq N\implies(\forall\,x\in X)\;\|A_m(x)-A_n(x)\|\leq\varepsilon\,\|x\|\,. \tag{3.5}$$

Se sigue de (3.5) que, para cada $x\in X$, $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, convergente en Y. De este modo, podemos definir al operador $A\colon\,X\to Y$ dado por

$$(\forall\,x\in X)\quad A(x):=\lim_{n\to\infty}A_n(x).$$

Este operador es claramente lineal. Dándonos un $\varepsilon>0$ cualquiera y con N siendo el umbral correspondiente y tomando $m,n\geq N$, aplicando la desigualdad triangular y (3.5), obtenemos,

$$\begin{aligned}(\forall\,x\in X)\quad\|A_m(x)-A(x)\|&\leq\|A_m(x)-A_n(x)\|+\|A_n(x)-A(x)\|\\&\leq\varepsilon\,\|x\|+\|A_n(x)-A(x)\|\,.\end{aligned}$$

Tomando el límite $n\to\infty$,

$$(\forall\,m\geq N)\;(\forall\,x\in X)\quad\|A_m(x)-A(x)\|\leq\varepsilon\,\|x\| \tag{3.6}$$

En particular, para $\varepsilon=1$, existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$(\forall\,m\geq N_1)\;(\forall\,x\in X)\quad\|A_m(x)-A(x)\|\leq\|x\|\,.$$

En consecuencia,

$$(\forall\,x\in X)\quad\|A(x)\|\leq\left\|A(x)-A_{N_1}(x)\right\|+\left\|A_{N_1}(x)\right\|\leq\left(1+\left\|A_{N_1}\right\|\right)\|x\|\,.$$

Por lo tanto, A es acotado y así $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Por último, de (3.6) se deduce que

$$(\forall\, m \geq N) \quad \|A_m - A\| \leq \varepsilon,$$

por lo que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en $\mathcal{L}(X, Y)$. □

Lema 3.3

Sean X e Y EVN sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, tales que Y no es trivial. Entonces,

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\| = \sup_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} = \max_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|}.$$

Demostración: Si $x = 0$ la identidad es inmediata, ya que $A(0) = 0$ para todo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $x \neq 0$, tomamos un $y_0 \in Y \setminus \{0\}$. Por el Lema 3.2, existe $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_0(x) = y_0$ y $\|A_0\| = \|y_0\| \,/\, \|x\|$. Por lo tanto,

$$\sup_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \geq \frac{\|A_0(x)\|}{\|A_0\|} = \frac{\|y_0\|}{\|y_0\| \,/\, \|x\|} = \|x\|\,.$$

Por otro lado,

$$\sup_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|} \leq \sup_{A\in\mathcal{L}(X,Y)\setminus\{0\}} \frac{\|A\|\,\|x\|}{\|A\|} = \|x\|\,.$$

□

3.3 El operador adjunto en espacios normados

Sean X e Y EVN sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, dado $G \in Y'$ definimos al funcional $G \circ A \colon X \to \mathbb{K}$ por

$$(\forall\, x \in X) \quad (G \circ A)(x) := G(A(x)).$$

El funcional $G \circ A$ es lineal y acotado porque G y de A lo son, por lo que $G \circ A \in X'$. Esto induce la definición del operador

$$\begin{aligned} A' \colon Y' &\to X' \\ G &\to A'(G) := G \circ A, \end{aligned}$$

el cual se llama OPERADOR ADJUNTO de A.

Lema 3.4

Dado $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ y $\|A\| = \|A'\|$.

DEMOSTRACIÓN: La linealidad de A' es directa:

$$\begin{aligned} &(\forall\, G_1, G_2 \in Y')\ (\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K})\ (\forall\, x \in X) \\ &A'(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2)(x) = (\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2)(A(x)) = \alpha_1 G_1(A(x)) + \alpha_2 G_2(A(x)) \\ &\qquad = \alpha_1 A'(G_1)(x) + \alpha_2 A'(G_2)(x) = (\alpha_1 A'(G_1) + \alpha_2 A'(G_2))(x). \end{aligned}$$

Para el acotamiento observamos que

$$(\forall\, G \in Y') \quad \left\|A'(G)\right\| = \|G \circ A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|G(A(x))|}{\|x\|} \le \|A\|\, \|G\|\,,$$

por lo que A' es acotado y $\|A'\| \le \|A\|$.

Por otro lado, aplicando la consecuencia del Teorema de Hahn–Banach dada por el Lema 2.4, se obtiene

$$(\forall\, x \in X) \quad \|A(x)\| = \sup_{G \in Y' \setminus \{0\}} \frac{|G(A(x))|}{\|G\|} = \sup_{G \in Y' \setminus \{0\}} \frac{|A'(G)(x)|}{\|G\|} \leq \sup_{G \in Y' \setminus \{0\}} \frac{\|A'(G)\|\, \|x\|}{\|G\|} \leq \|A'\|\, \|x\|\,,$$

de donde $\|A\| \leq \|A'\|$. □

Lema 3.5

Sean X, Y y Z EVN. Entonces,

1. $(\forall\, A, B \in \mathcal{L}(X, Y)) \quad (A + B)' = A' + B'$.
2. $(\forall\, \alpha \in \mathbb{K})\ (\forall\, A \in \mathcal{L}(X, Y)) \quad (\alpha A)' = \alpha A'$.
3. $(\forall\, A \in \mathcal{L}(X, Y))\ (\forall\, B \in \mathcal{L}(Z, X)) \quad (AB)' = B' A'$.

Demostración: Tarea.

En el siguiente ejercicio calcularemos explícitamente un operador adjunto.

Ejemplo 3.2

Sea X la variante real de $C([0,1])$, provista de la norma uniforme $\|u\| := \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$ para todo $u \in X$. Sean $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ los monomios dados por

$$(\forall\, j \in \{0,\ldots,n\})\ (\forall\, t \in [0,1]) \quad p_j(t) := t^j.$$

Sea $A\colon X \to X$ el operador definido por

$$(\forall\, u \in X) \quad A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left[\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, \mathrm{d}t\right] p_j.$$

Definiendo, para cada $j \in \{0,\ldots,n\}$, los funcionales $F_j\colon X \to \mathbb{R}$ mediante

$$(\forall\, u \in X) \quad F_j(u) := \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, \mathrm{d}t,$$

es fácil comprobar que éstos son lineales y, por

$$(\forall\, u \in X) \quad |F_j(u)| \le \int_0^1 |u(t)|\, |p_j(t)|\, \mathrm{d}t \le \int_0^1 p_j(t)\, \mathrm{d}t \max_{t\in[0,1]} |u(t)| = \frac{1}{j+1} \|u\|,$$

también acotados.

Ejemplo 3.2 (cont.)

Como el operador A puede expresarse de acuerdo a

$$(\forall\, u \in X) \quad A(u) = \sum_{j=0}^{n} F_j(u)\, p_j\,,$$

es claro que A hereda de los F_j su condición de lineal y acotado. Ahora, dado $G \in X'$ y $u \in X$, se obtiene

$$\begin{aligned} A'(G)(u) = (G \circ A)(u) = G(A(u)) = G\left(\sum_{j=0}^{n} F_j(u)\, p_j\right) \\ = \sum_{j=0}^{n} F_j(u)\, G(p_j) = \sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j(u) = \left(\sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j\right)(u), \end{aligned}$$

con lo cual

$$(\forall\, G \in X') \quad A'(G) = \sum_{j=0}^{n} G(p_j)\, F_j\,.$$

3.4 El operador adjunto en espacios de Hilbert

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dado $y \in Y$, definamos el funcional

$$X \ni x \mapsto \langle A(x), y\rangle_Y \in \mathbb{K},$$

el cual hereda su linealidad de la A y de la del producto interior de Y en su primer argumento y, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$|\langle A(x), y\rangle_Y| \leq \|A(x)\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\| \, ,$$

lo que demuestra que este funcional es acotado y que su norma es menor o igual que $\|A\| \, \|y\|$.

Por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 2.4), sabemos que existe un único $z \in X$ tal que

$$(\forall\, z \in X) \quad \langle A(x), y\rangle_Y = \langle x, z\rangle_X \, .$$

Este análisis induce la definición del operador

$$\begin{aligned} A^*: Y &\rightarrow X \\ y &\rightarrow A^*(y) := z, \end{aligned}$$

el cual se llama ADJUNTO DE HILBERT de A y está caracterizado por la relación

$$(\forall\, x \in X)\, (\forall\, y \in Y) \quad \langle A(x), y\rangle_Y = \langle x, A^*(y)\rangle_X \, . \tag{3.7}$$

A continuación probaremos un análogo del Lema 3.4.

Lema 3.6

Dados X e Y espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, se tiene que $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ y $\|A^*\| = \|A\|$.

Demostración: La linealidad de A^* se sigue de la caracterización (3.7) y de las propiedades de los productos escalares; en efecto,

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, x \in X)\ (\forall\, y_1, y_2 \in Y)\ (\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K})\\
&\quad \langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle_X = \langle A(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle_Y\\
&\qquad = \overline{\alpha_1}\langle A(x), y_1\rangle_Y + \overline{\alpha_2}\langle A(x), y_2\rangle_Y = \overline{\alpha_1}\langle x, A^*(y_1)\rangle_X + \overline{\alpha_2}\langle x, A^*(y_2)\rangle_X\\
&\qquad = \langle x, \alpha_1 A^*(y_1) + \alpha_2 A^*(y_2)\rangle_X .
\end{aligned}
$$

Por el Teorema de Representación de Riesz en X, la identidad (3.7) y la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$
(\forall\, y \in Y) \quad \|A^*(y)\| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle x, A^*(y)\rangle_X|}{\|x\|} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle A(x), y\rangle_Y|}{\|x\|} \leq \|A\|\,\|y\|\,,
$$

de donde A^* es acotado y $\|A^*\| \leq \|A\|$. De forma análoga, empleando ahora el Teorema de Representación de Riesz en Y, la identidad (3.7) y la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se demuestra que $\|A\| \leq \|A^*\|$. □

Cabe mencionar que los operadores A^* y A' están relacionados según el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "A"] & Y \arrow[l, shift left, "A^*"] \\ X' \arrow[u, "\mathcal{R}_X"] & Y' \arrow[l, "A'"] \arrow[u, "\mathcal{R}_Y"'] \end{tikzcd}$$

Esto es,

$$A^* = \mathcal{R}_X \circ A' \circ \mathcal{R}_Y^{-1},$$

o bien

$$A' = \mathcal{R}_X^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{R}_Y.$$

Definición 3.6

Sean X un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$. Se dice que A es *autoadjunto* si $A = A^*$.

Ejemplo 3.3

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y, dado $m \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos $\{F_1, \dots, F_m\} \subseteq X'$, $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$ e $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq Y$. Definimos a los operadores $A\colon X \to Y$ y $B\colon X \to X$ por

$$(\forall\, x \in X) \qquad A(x) := \sum_{j=1}^{m} F_j(x)\, y_j \quad \text{y} \quad B(x) := \sum_{j=1}^{m} \langle x, x_j\rangle_X\, x_j .$$

Calcularemos A^* primero. Por el Teorema de Representación de Riesz, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe un único z_j tal que, para todo $x \in X$, $F_j(x) = \langle x, z_j\rangle_X$. Por lo tanto,

$$(\forall\, x \in X) \quad A(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X\, y_j . \tag{3.8}$$

Así, para todo $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned}\langle A(x), y\rangle_Y &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X\, y_j, y \right\rangle_Y \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle_X\, \langle y_j, y\rangle_Y = \left\langle x, \sum_{j=1}^{m} \langle y, y_j\rangle_Y\, z_j \right\rangle_X ,\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 (cont.)

desde donde inferimos que

$$(\forall\, y \in Y) \quad A^*(y) = \sum_{j=1}^{m} \langle y, y_j \rangle_Y \, z_j. \tag{3.9}$$

Ahora probaremos que B es autoadjunto. Puesto que B viene con la forma del operador A en (3.8) con $Y \leftarrow X$, $y_j \leftarrow x_j$ y $z_j \leftarrow x_j$, sustituyendo en (3.9) obtenemos que

$$(\forall\, x \in X) \quad B^*(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, x_j \rangle_X \, x_j = B(x).$$

3.5 La ecuación fundamental

Sean X e Y EVN sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dado $y \in Y$, la ecuación fundamental consiste en:

$$\text{Hallar } x \in X \text{ tal que } A(x) = y, \tag{3.10}$$

es decir, encontrar una preimagen de y a través del operador A. Con el objeto de analizar este problema, se introducen los siguientes conjuntos:

Definición 3.7

Se define el *espacio nulo* o *kernel* de A como

$$N(A) := \{x \in X : A(x) = 0\}.$$

Definición 3.8

Se define el *rango* o *recorrido* de A como

$$R(A) := \{y \in Y : (\exists\, x \in X)\ A(x) = y\}.$$

Es fácil ver que $N(A)$ y $R(A)$ son subespacios de X e Y, respectivamente. Además, como $N(A) = A^{-1}(\{0\})$, se sigue que $N(A)$ es cerrado.

Por otro lado, es claro que el operador A es inyectivo si y solo si $N(A) = \{0\}$, lo que implica que, de haber solución para (3.10), ella es única.

A su vez, el operador A es sobreyectivo si y solo si $R(A) = Y$, lo cual significa que (3.10) tiene siempre al menos una solución.

El siguiente objetivo es caracterizar $R(A)$. Para este efecto, consideremos un elemento $y \in R(A)$. Se sigue que existe $x \in X$ tal que $A(x) = y$. Por lo tanto, dado $G \in N(A')$, se tiene que

$$G(y) = G(A(x)) = A'(G)(x) = 0. \tag{3.11}$$

Esta observación motiva la introducción de varios conceptos y resultados.

Definición 3.9

Sea X un EVN y sea $S \subseteq X$. Un funcional $F \in X'$ se dice *anulador* de S si $F(x) = 0$ para todo $x \in S$. En tal caso se introduce también el *conjunto anulador* de S

$$S^\circ := \left\{F \in X' : (\forall\, x \in S) \quad F(x) = 0\right\}.$$

Definición 3.10

Sea X un EVN y sea $T \subseteq X'$. Un elemento $x \in X$ se dice *anulador* de T si $F(x) = 0$ para todo $F \in T$. En tal caso, se introduce también el *conjunto anulador* de T

$${}^\circ T := \{x \in X : (\forall\, F \in T) \quad F(x) = 0\}.$$

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (3.11) equivale a decir que $y \in {}^\circ N(A')$ y, por lo tanto, se ha demostrado que

$$R(A) \subseteq {}^\circ N(A'). \tag{3.12}$$

En el caso en que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ son espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, lo anterior se reduce a

$$R(A) \subseteq N(A^*)^\perp. \tag{3.13}$$

En efecto, dado $y \in R(A)$, existe $x \in X$ tal que $y = A(x)$. Luego,

$$(\forall\, z \in N(A^*)) \quad \langle y, z\rangle_Y = \langle A(x), z\rangle_Y = \langle x, A^*(z)\rangle_X = \langle x, 0\rangle_X = 0,$$

lo cual prueba que $y \in N(A^*)^\perp$.

Probaremos recíprocos parciales de (3.12) y (3.13), pero antes necesitamos algunos resultados adicionales.

Lema 3.7

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un EVN y sean $S \subseteq X$ y $T \subseteq X'$. Entonces, S° y ${}^\circ T$ son subespacios cerrados de X' y X, respectivamente.

Demostración: Primero probaremos que ${}^\circ T$ es un subespacio. En efecto, $F(0_X) = 0$ para todo $F \in T$, por lo que $0_X \in {}^\circ T$. Ahora, dados $x_1, x_2 \in {}^\circ T$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$$(\forall\, F \in T) \quad F(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1\, F(x_1) + \alpha_2\, F(x_2) = \alpha_1\, 0 + \alpha_2\, 0 = 0.$$

Ahora probaremos que ${}^\circ T$ es cerrado. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq {}^\circ T$ que converge a $x \in X$. Entonces, dado cualquier $F \in T$,

$$|F(x)| = |F(x) - F(x_n)| = |F(x - x_n)| \leq \|F\|\, \|x - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

por lo que $x \in {}^\circ T$.

El caso de S° es análogo. $\square$

Lema 3.8

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ un espacio de Hilbert con aplicación de Riesz $\mathcal{R}\colon X' \to X$ y sean $S \subseteq X$ y $T \subseteq X'$. Entonces,

$$S^\perp = \mathcal{R}(S^\circ) \quad \text{y} \quad {}^\circ T = \mathcal{R}(T)^\perp.$$

Demostración: La primera identidad sale de

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff (\forall\, s \in S) \quad \langle s, x\rangle = 0 \\ &\iff (\forall\, s \in S) \quad \mathcal{R}^{-1}(x)(s) = 0 \\ &\iff \mathcal{R}^{-1}(x) \in S^\circ \\ &\iff x \in \mathcal{R}(S^\circ) \end{aligned}$$

y la segunda de

$$\begin{aligned} x \in {}^\circ T &\iff (\forall\, F \in T) \quad F(x) = 0 \\ &\iff (\forall\, F \in T) \quad \langle x, \mathcal{R}(F)\rangle = 0 \\ &\iff (\forall\, F \in T) \quad x \perp \mathcal{R}(F) \\ &\iff x \in \mathcal{R}(T)^\perp. \end{aligned}$$

□

Notar que la identidad $S^\perp = \mathcal{R}(S^\circ)$, junto al Lema 3.7 y el hecho que $\mathcal{R}\colon X' \to X$ es una biyección isométrica, garantizan que $S^\perp$ también es un subespacio cerrado de X.

Lema 3.9

Sea M un subespacio cerrado de un EVN $(X, \|\cdot\|)$. Entonces ${}^\circ(M^\circ) = M$.

Demostración: $\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in M$. Entonces, para todo $F \in M^\circ$, $F(x) = 0$, lo cual indica que $x \in {}^\circ(M^\circ)$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $\tilde{x} \in X \setminus M$. Como M es cerrado, $\operatorname{dist}(\tilde{x}, M) > 0$. Por la consecuencia del Teorema de Hahn–Banach dada por el Teorema 2.8, se deduce que existe $\tilde{F} \in X'$ con $\|\tilde{F}\| = 1$, $\tilde{F}(\tilde{x}) = \operatorname{dist}(\tilde{x}, M)$ y $(\forall\, x \in M)\ \tilde{F}(x) = 0$. Esto último indica que $\tilde{F} \in M^\circ$. Pero, como $\tilde{F}(\tilde{x}) \neq 0$, $\tilde{x} \notin {}^\circ(M^\circ)$. Así, hemos probado que $X \setminus M \subseteq X \setminus {}^\circ(M^\circ)$, que es equivalente a la inclusión deseada. □

En espacios de Hilbert este resultado se manifiesta como sigue.

Lema 3.10

Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Entonces, $(M^\perp)^\perp = M$.

Demostración: Utilizando el resultado del Lema 3.9 junto a las identidades del Lema 3.8, se obtiene:

$$M = {}^\circ(M^\circ) = {}^\circ(\mathcal{R}^{-1}(M^\perp)) = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}(M^\perp))^\perp = (M^\perp)^\perp.$$

□

A continuación estudiaremos qué ocurre si se toma el anulador del anulador de un subconjunto que no necesariamente es un subespacio cerrado de un EVN.

Lema 3.11

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un EVN y sea $W \subseteq X$ y S el subespacio cerrado generado por W $(S = \overline{\operatorname{span}(W)})$. Entonces, $W^\circ = S^\circ$ y $S = {}^\circ(W^\circ)$.

Demostración: Basta probar que $W^\circ = S^\circ$ ya que entonces, del Lema 3.9, se obtiene ${}^\circ(W^\circ) = {}^\circ(S^\circ) = S$.

$\boxed{\supseteq}$ Como $W \subseteq S$, es claro que $S^\circ \subseteq W^\circ$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $F \in W^\circ$. Dado cualquier $x \in \operatorname{span}(W)$, existen $N \in \mathbb{N}$, escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{K}$ y vectores $x_1, \ldots, x_N \in W$ tales que $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i\, x_i$. Luego,

$$F(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i\, F(x_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i\, 0 = 0,$$

por lo que $F \in \operatorname{span}(W)^\circ$. Ahora, dado cualquier $x \in S = \overline{\operatorname{span}(W)}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{span}(W)$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Entonces,

$$|F(x)| = |F(x) - F(x_n)| = |F(x - x_n)| \leq \|F\|\, \|x - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

de donde $F(x) = 0$. Consiguientemente, $F \in S^\circ$. □

Lema 3.12

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $W \subseteq X$ y S el subespacio cerrado generado por W. Entonces, $W^\perp = S^\perp$ y $S = (W^\perp)^\perp$.

DEMOSTRACIÓN: $W^\perp \overset{\text{L.3.8}}{=} \mathcal{R}(W^\circ) \overset{\text{L.3.11}}{=} \mathcal{R}(S^\circ) \overset{\text{L.3.8}}{=} S^\perp$ y $S \overset{\text{L.3.10}}{=} (S^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp$. □

Los dos resultados que siguen acerca del rango de un operador lineal y acotado nos serán cruciales.

Teorema 3.2

Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ EVN y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

- I $R(A)^\circ = N(A')$.
- II $\overline{R(A)} = {}^\circ N(A')$.
- III $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) = {}^\circ N(A')$.

DEMOSTRACIÓN: La parte I sale directamente de

$$\begin{aligned}
G \in R(A)^\circ &\iff G \in Y' \quad \text{y} \quad (\forall\, z \in R(A)) \qquad G(z) = 0 \\
&\iff G \in Y' \quad \text{y} \quad (\forall\, x \in X) \qquad G(A(x)) = 0 \\
&\iff G \in Y' \quad \text{y} \quad (\forall\, x \in X) \qquad A'(G)(x) = 0 \\
&\iff G \in Y' \quad \text{y} \qquad A'(G) = 0 \\
&\iff G \in N(A').
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la segunda identidad del Lema 3.11 y notando que $\overline{R(A)}$ es el subespacio generado por $R(A)$, se deduce que

$$^\circ N(A') = {}^\circ(R(A)^\circ) = \overline{R(A)},$$

lo cual prueba la parte II. Finalmente, la parte III se sigue de la parte II y del hecho que, de acuerdo al Lema 3.7, $^\circ T$ es un subespacio cerrado de Y cualquiera sea $T \subseteq Y'$. □

El siguiente teorema es una variante del anterior para espacios de Hilbert.

Teorema 3.3

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

- I $R(A)^\perp = N(A^*)$.
- II $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.
- III $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) = N(A^*)^\perp$.

Demostración: La parte I se puede probar directamente de manera análoga a la demostración de la parte I del Teorema 3.2. Alternativamente, si $\mathcal{R}_X : X' \to X$ y $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ son las aplicaciones de Riesz correspondientes, recordando de la Sección 3.4 que $A' = \mathcal{R}_X^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{R}_Y$, se sigue que $N(A') = \mathcal{R}_Y^{-1}(N(A^*))$ y, consiguientemente, la parte I por

$$R(A)^\perp \overset{\text{L. 3.8}}{=} \mathcal{R}_Y(R(A)^\circ) \overset{\text{T. 3.2/I}}{=} \mathcal{R}_Y(N(A')) = \mathcal{R}_Y(\mathcal{R}_Y^{-1}(N(A^*))) = N(A^*).$$

Empleando la igualdad anterior y segunda identidad del Lema 3.12, se deduce que $N(A^*)^\perp = (R(A)^\perp)^\perp = \overline{R(A)}$, lo cual prueba la parte II.

Por último, la parte III es consecuencia de la parte II y del hecho que $N(A^*)$ siempre es un subespacio cerrado de Y. □

En el **caso especial** en que Y es de dimensión finita, $R(A)$ es ciertamente cerrado. Por lo tanto, dado que $N(A^*)^\perp$ también es cerrado, el teorema anterior se resume simplemente con la identidad $R(A) = N(A^*)^\perp$.

Ejemplo 3.4

Reconstruiremos un resultado clásico para la resolución de sistemas lineales de ecuaciones. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces consideramos el sistema lineal de ecuaciones: Hallar $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $Ax = b$. Equivalentemente, denotando $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A}\colon X \to Y$ al operador lineal inducido por A (esto es, $\mathcal{A}(x) := Ax$ para todo $x \in X$), entonces el problema de existencia de soluciones del sistema lineal se reduce a averiguar si b pertenece o no a $R(\mathcal{A})$. Para estos efectos, notemos que $\mathcal{A}^*: Y \to X$ se puede expresar como $\mathcal{A}^*(y) = A^{\mathsf{t}} y$ para todo $y \in Y$. Luego, en virtud del Teorema 3.3, que en este contexto de dimensión finita se reduce a la identidad $R(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}^*)^\perp$, se deduce que

$$
\begin{aligned}
Ax = b \text{ tiene solución } &\iff b \in R(\mathcal{A}) \\
&\iff b \in N(\mathcal{A}^*)^\perp \\
&\iff (\forall\, z \in N(\mathcal{A}^*)) \quad \langle b, z\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \\
&\iff (\forall\, z \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } A^{\mathsf{t}} z = 0) \quad \langle b, z\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.
\end{aligned}
$$

Esto es, el sistema lineal es soluble si y solo si el lado derecho b es ortogonal a todas las soluciones del sistema transpuesto homogéneo.

Ejemplo 3.4 (cont.)

En el caso particular en que $n = m$, en el que $X = Y = \mathbb{R}^n$, se tiene que $\det(A) = \det(A^{\mathtt{t}})$, por lo que

$$\begin{aligned} R(\mathcal{A}) = Y &\iff N(\mathcal{A}^*)^{\perp} = Y \\ &\iff N(\mathcal{A}^*) = \{0\} \\ &\iff \det(A^{\mathtt{t}}) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \\ &\iff N(\mathcal{A}) = \{0\}, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\mathcal{A}$ es **sobreyectivo** si y solo si $\mathcal{A}$ es **inyectivo**. Este resultado se conoce como la *alternativa de Fredholm* en dimensión finita, y también puede deducirse a partir del Teorema de las Dimensiones del Álgebra Lineal, el cual establece que

$$n = \dim(N(\mathcal{A})) + \dim(R(\mathcal{A})).$$

3.6 El operador inverso

Sean X e Y EVN y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Es claro que la ecuación fundamental $A(x) = y$ posee solución para todo $y \in R(A)$ y que aquella es única si $N(A) = \{0\}$. Estos hechos inducen la siguiente definición.

Definición 3.11

Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{0\}$. Entonces, se denota $A^{-1} \colon Y \to X$ y se denomina *inverso* de A al operador que a cada $y \in Y$ le asigna el único $x \in X$ tal que $A(x) = y$. En tal caso, se escribe $x = A^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$.

Nuestro objetivo principal en esta sección es discutir el Teorema de la Inversa Acotada, el cual provee condiciones suficientes para que un operador inverso sea acotado. Para ello, primero probaremos que este resultado es equivalente a otro llamado Teorema del Grafo Cerrado. Ambos teoremas y su equivalencia se enuncian y demuestran más adelante. Previamente, necesitamos introducir la noción de operador cerrado.

En lo que sigue, $A \colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal **no necesariamente acotado**, cuyo dominio $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X.

Definición 3.12

Sea $A \colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Se dice que A es *cerrado* si, para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$ y $A(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y$, se tiene necesariamente que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = y$.

A continuación proveeremos una forma equivalente de caracterizar a un operador cerrado. Recordemos primero que el *espacio producto* $X \times Y$, provisto de sus operaciones suma y multiplicación por escalar usuales, es también un espacio vectorial. Además, provisto de su norma producto (o cualquiera equivalente)

$$(\forall\,(x,y) \in X \times Y) \quad \|(x,y)\|_{X \times Y} := \|x\| + \|y\|\,,$$

$X \times Y$ es un espacio vectorial normado. Todavía más, si X e Y son espacios de Banach, el espacio producto $X \times Y$ normado de esta forma también lo es.

Por otro lado, se define al *grafo* del operador lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, y se le denota por $\mathcal{G}(A)$, al subespacio de $X \times Y$ dado por

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, A(x))\colon x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}\,.$$

Notemos que el elemento nulo de $X \times Y$ es $(0_X, 0_Y)$ y, como A es lineal, se tiene que $0_X \in \mathcal{D}(A)$ y $A(0_X) = 0_Y$, lo cual muestra que $(0_X, 0_Y) \in \mathcal{G}(A)$.

En virtud de lo anterior y la Definición 3.12, es fácil ver que el operador lineal $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es cerrado si y solo si $\mathcal{G}(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

En particular, si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces claramente A es cerrado. El recíproco no es necesariamente verdadero: En el siguiente ejemplo mostraremos explícitamente un operador que es cerrado pero no acotado.

Ejemplo 3.5

Sea $X = C([0,1])$ provisto de la norma uniforme

$$(\forall\, u \in X) \quad \|u\| := \max_{t\in[0,1]} |u(t)|\,.$$

Sabemos que $(X, \|\cdot\|)$ es Banach. Definamos al operador derivada clásica

$$\begin{aligned} A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X &\to X \\ u &\to A(u) = u', \end{aligned}$$

donde escogemos $\mathcal{D}(A) = C^1([0,1])$ de modo que la derivada clásica esté bien definida.

Notemos primero que A **no** es acotado. En efecto, definiendo, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ a $p_n \in X$ como el polinomio $p_n(t) := t^n$, $t \in [0,1]$, se sigue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A(p_n) = n\, p_{n-1}$. Por lo tanto,

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \frac{\|A(p_n)\|}{\|p_n\|} = \frac{n\,\|p_{n-1}\|}{\|p_n\|} = n.$$

Ejemplo 3.5 (cont.)

Sin embargo, A **sí** es cerrado. En efecto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$ y $A(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y \in X$. Luego, para cada $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t x_n'(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_0^t \big(x_n'(s) - y(s)\big)\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_0^t \left|x_n'(s) - y(s)\right|\,\mathrm{d}s \leq |t-0| \max_{s\in[0,1]} \left|x_n'(s) - y(s)\right| \leq \left\|x_n' - y\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que

$$(\forall\, t \in [0,1]) \quad \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo y la convergencia puntual de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a x, se sigue que

$$(\forall\, t \in [0,1]) \quad \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \big(x_n(t) - x_n(0)\big) = x(t) - x(0),$$

de donde

$$(\forall\, t \in [0,1]) \quad x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Esta identidad simultáneamente prueba que $x \in \mathcal{D}(A)$ y que $A(x) = x' = y$.

A continuación enunciamos el Teorema de la Inversa Acotada y el Teorema del Grafo Cerrado, no probamos ninguno de los dos todavía, pero sí probamos que son equivalentes entre sí.

Teorema 3.4 (Teorema de la Inversa Acotada)

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{0\}$. Entonces, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Teorema 3.5 (Teorema del Grafo Cerrado)

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A) = X$. Entonces, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema 3.6

El Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4) y el Teorema del Grafo Cerrado (Teorema 3.5) son equivalentes.

Demostración: $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos válido el Teorema del Grafo Cerrado y sean X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$ y $N(A) = \{0_X\}$. Entonces está bien definido el operador inverso $A^{-1} : Y \to X$, el cual es lineal (¿por qué?) y, por supuesto, $\mathcal{D}(A^{-1}) = Y$. Entonces, para aplicar el Teorema del Grafo Cerrado y así obtener la implicación actual, solamente falta probar que A^{-1} es un operador cerrado. Sea entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una sucesión tal que

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y \qquad \text{y} \qquad A^{-1}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} x \in X.$$

Como A es acotado, se sigue que $y_n = A(A^{-1}(y_n)) \xrightarrow{n\to\infty} A(x) \in X$. Por la unicidad del límite, $y = A(x)$. Equivalentemente, $x = A^{-1}(y)$, lo cual prueba que A^{-1} es cerrado.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos válido el Teorema de la Inversa Acotada y sean X e Y espacios de Banach y $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado con $\mathcal{D}(A) = X$. Definamos al operador $E\colon \mathcal{G}(A) \to X$ por

$$(\forall\, (x, A(x)) \in \mathcal{G}(A)) \quad E(x, A(x)) := x.$$

Como A es cerrado, $\mathcal{G}(A)$ es un subespacio cerrado del Banach $X \times Y$, y por lo tanto también es un espacio de Banach. Además, es claro que

$$R(E) = X \quad \text{y} \quad N(E) = \{(x, A(x))\colon x = 0_X\} = \{(0_X, 0_Y)\}.$$

A su vez,

$$(\forall\, (x, A(x)) \in \mathcal{G}(A)) \quad \|E(x, A(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|A(x)\| = \|(x, A(x))\|\,,$$

lo cual muestra que E es acotado y $\|E\| \leq 1$. En resumen, $E \in \mathcal{L}(\mathcal{G}(A), X)$ y E es biyectivo, con lo cual el Teorema de la Inversa Acotada garantiza que $E^{-1} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{G}(A))$. Esto implica que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \left\|E^{-1}(x)\right\| \leq C\,\|x\|\,.$$

Esto es,

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\| + \|A(x)\| = \|(x, A(x))\| \leq C\,\|x\|\,.$$

Por lo tanto, para todo $x \in X$, $\|A(x)\| \leq C\,\|x\|$, lo que prueba que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

Antes de demostrar el Teorema de la Inversa Acotada (equivalentemente, el Teorema del Grafo Cerrado), estableceremos una versión más general del Teorema de la Inversa Acotada.

Teorema 3.7 (Teorema de la Inversa Acotada Mejorado)

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal y cerrado tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Entonces, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Demostración: Definimos primero $\|\cdot\|_A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ por

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad \|x\|_A := \|x\|_X + \|A(x)\|_Y \,.$$

Es fácil comprobar que $\|\cdot\|_A$ efectivamente es una norma sobre $\mathcal{D}(A)$. Probaremos que $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ es completo. En efecto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_A \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Se sigue que

$$\|x_n - x_m\|_X \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \quad \text{y} \quad \|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

y, puesto que X e Y son Banach, se deduce que existen límites $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ y $A(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Luego, como A es cerrado, se concluye que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = y$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_A &= \|x_n - x\|_X + \|A(x_n) - A(x)\|_Y \\ &= \|x_n - x\|_X + \|A(x_n) - y\|_Y \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Habiendo probado que $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach, definimos al operador $\tilde{A}\colon (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A) \to Y$ por $\tilde{A}(x) := A(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Claramente, $\tilde{A}$ hereda de A su calidad de lineal y

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad \|\tilde{A}(x)\|_Y = \|A(x)\|_Y \leq \|x\|_X + \|A(x)\|_Y = \|x\|_A \,,$$

lo cual muestra que $\tilde{A}$ es acotado y $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A),Y)} \leq 1$. Notemos también que $N(\tilde{A}) = N(A) = \{0_X\}$ y que $R(\tilde{A}) = R(A) = Y$. Por lo tanto, aplicando el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4), se deduce que $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}\left(Y, (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)\right)$, lo cual significa que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, y \in Y) \quad \|\tilde{A}^{-1}(y)\|_A \leq C\,\|y\|_Y \,.$$

Esto es,

$$(\forall\, y \in Y) \quad \|A^{-1}(y)\|_X + \|y\|_Y \leq C\,\|y\|_Y \,,$$

de donde, para todo $y \in Y$, $\|A^{-1}(y)\|_X \leq C\,\|y\|_Y$, por lo que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. □

Teorema 3.8

El Teorema de la Inversa Acotada Mejorado (Teorema 3.7), el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4) y el Teorema del Grafo Cerrado (Teorema 3.5) son todos equivalentes.

Demostración: En la demostración del Teorema de la Inversa Acotada Mejorado empleamos el Teorema de la Inversa Acotada. Claramente, por sus enunciados, también vale la implicación recíproca. Por último, por el Teorema 3.6, ambos son equivalentes al Teorema del Grafo Cerrado también. □

Cuidado: A estos tres teoremas todavía los tenemos flotando.

3.7 ~~Otros dos teoremas clásicos~~ Teoremas de la Aplicación Abierta y de Banach–Steinhaus

Continuamos endeudándonos con teoremas cuya demostración dejamos para después.

Teorema 3.9 (Teorema de la Aplicación Abierta)

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$. Entonces, existe $r > 0$ tal que

$$B_Y(0, r) \subseteq A(B_X(0, 1)). \tag{3.14}$$

Por ahora probaremos que la inclusión (3.14) implica que A transforma abiertos de X en abiertos de Y, lo cual justifica el nombre del teorema anterior, **pero no lo demuestra**.

Lema 3.13

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supongamos, además, que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subseteq A(B_X(0, 1))$. Entonces, para todo abierto U de X se tiene que $A(U)$ es abierto de Y.

Demostración: Sea U un abierto de X y sea $y_0 \in A(U)$. Entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y_0 = A(x_0)$. Como U es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x_0, \delta) \subseteq U$; equivalentemente, $x_0 + B_X(0, \delta) \subseteq U$. Aplicando el operador A, resulta

$$y_0 + A(B_X(0, \delta)) \subseteq A(U).$$

De la hipótesis se tiene que $B_Y(0, \delta r) \subseteq A(B_X(0, \delta))$; en efecto,

$$\|y\| < \delta r \implies \frac{y}{\delta} \in B_Y(0, r) \implies \frac{y}{\delta} \in A(B_X(0, 1)) \implies y \in A(B_X(0, \delta)).$$

Luego,

$$y \in B_Y(y_0, \delta r) \implies y - y_0 \in B_Y(0, \delta r) \implies y - y_0 \in A(B_X(0,\delta))$$
$$\implies y \in y_0 + A(B_X(0,\delta)) \implies y \in A(U).$$

Esto es, para de cada $y_0 \in A(U)$ hallamos una bola abierta de Y allí centrada que está contenida en $A(U)$, lo que demuestra que $A(U)$ es un abierto de Y. □

A continuación probaremos el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4) —equivalentemente, el Teorema del Grafo Cerrado (Teorema 3.5); equivalentemente, el Teorema de la Inversa Acotada Mejorado (Teorema 3.7)— empleando el recién enunciado, mas no probado, Teorema de la Aplicación Abierta (Teorema 3.9).

Teorema 3.10

El Teorema de la Aplicación Abierta (Teorema 3.9) implica al Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4).

Demostración: Asumiendo válido el Teorema de la Aplicación Abierta nos damos X e Y espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ con $R(A) = Y$ y $N(A) = \{0\}$ y debemos probar que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Del Teorema de la Aplicación Abierta y la sobreyectividad de A, inferimos que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0,r) \subseteq A(B_X(0,1))$. Luego, dado cualquier $x \in X$ que satisfaga la condición $\|A(x)\| < r$, se tiene que $A(x) \in A(B_X(0,1))$, lo cual significa que existe $z \in X$ con $\|z\| < 1$, tal que $A(x) = A(z)$. Como A es inyectivo se sigue que $x = z$, por lo que $\|x\| < 1$.

Ahora, dándonos ahora cualquier $x \in X$ con $x \neq 0$, obviamente

$$(\forall\, \varepsilon \in (0,1)) \quad \left\| A\left(\frac{\varepsilon r}{\|A(x)\|} x\right) \right\| = \varepsilon\, r < r$$

y, por lo tanto, gracias al análisis anterior, se obtiene que

$$(\forall\, \varepsilon \in (0,1)) \quad \left\| \frac{\varepsilon\, r}{\|A(x)\|} x \right\| < 1.$$

Equivalentemente,

$$(\forall\, \varepsilon \in (0,1)) \quad \|x\| < \frac{1}{\varepsilon\, r} \, \|A(x)\| \, .$$

Tomando el límite lateral $\varepsilon \to 1^-$ e incorporando el caso trivial en que $x = 0$ se concluye que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\| \leq \frac{1}{r} \, \|A(x)\| \, ,$$

lo cual prueba que A^{-1} es acotado y $\left\|A^{-1}\right\| \leq 1/r$. □

Saldamos nuestra deuda con el Teorema de la Inversa Acotada, el Teorema del Grafo Cerrado y el Teorema de la Inversa Acotada Mejorado, pero todavía le debemos una demostración al Teorema de la Aplicación Abierta.

El siguiente ejemplo constituye una aplicación relevante del Teorema de la Inversa Acotada.

Ejemplo 3.6

Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas sobre X tales que tanto $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach. Suponga además que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_1 \leq C\, \|x\|_2\,.$$

Entonces las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes. En efecto, consideremos al operador identidad $I\colon (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$, el cual claramente es lineal, biyectivo y acotado, ya que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|I(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq C\, \|x\|_2\,.$$

Aplicando el Teorema de la Inversa Acotada se deduce que I^{-1} también es acotado, lo que significa que existe $c > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_2 = \left\|I^{-1}(x)\right\|_2 \leq c\, \|x\|_1\,.$$

Efectuaremos la demostración pendiente del Teorema de la Aplicación abierta a través de una secuencia de tres lemas, siendo el primero el clásico Lema de Baire.

Lema 3.14 (Lema de Baire/Teorema de Categorías de Baire)

Sea X un espacio métrico completo y sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados en X tal que $\mathrm{Int}(X_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathrm{Int}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\big) = \emptyset$.

Demostración: Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $O_n := X_n^c$. Cada uno de los O_n es abierto y denso en X. Nos basta probar que $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso en X.

Probar que G es denso en X, a su vez, equivale a probar que, para todo abierto no vacío $\omega \subseteq X$, $\omega \cap G \neq \emptyset$ (¿por qué?). Sea entonces ω uno de estos abiertos y sea $x_0 \in \omega$. Sea, además, $r_0 > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \omega$.

Como O_1 es denso en X, el abierto $B(x_0, r_0)$ posee intersección no vacía con O_1. Sea $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$. Como este último conjunto es abierto, existe un $r_1 > 0$ tal que $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) \cap O_1$. Podemos exigir que r_1 sea lo suficientemente pequeño como para que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) \cap O_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}.$$

Podemos iterar este procedimiento para construir sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ tales que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}_0) \qquad \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}.$$

Una consecuencia es que

$$(\forall\, n, p \in \mathbb{N}_0) \quad B(x_{n+p}, r_{n+p}) \subseteq B(x_n, r_n).$$

Luego,

$$(\forall\, n, p \in \mathbb{N}_0) \quad d(x_{n+p}, x_n) < r_n \leq 2^{-n} r_0$$

lo que muestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es completo, esta sucesión converge a un límite $x^\star \in X$. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, como todos los x_{n+p}, $p \in \mathbb{N}_0$, pertenecen a $B(x_n, r_n)$, $x^\star = \lim_{p\to\infty} x_{n+p} \in \overline{B(x_n, r_n)}$.

Así, por un lado, $x^\star \in \overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \omega$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^\star \in \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq O_n$, por lo que $x^\star \in G$. Por lo tanto $\omega \cap G \neq \emptyset$. □

Este resultado típicamente se usa contrarrecíprocamente: Si X es un espacio métrico completo y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$, entonces necesariamente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Int}(X_k) \neq \emptyset$.

Lema 3.15

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon X \to Y$ lineal tal que $R(A) = Y$. Entonces, existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, 2r) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $Y_n := n\,\overline{A(B_X(0,1))}$. Puesto que A es sobreyectivo, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $A(x) = y$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| < N$. Entonces, $y = N\,A(N^{-1}x)$, donde $N^{-1}x \in B_X(0,1)$. Por lo tanto, $y \in Y_N$. Esto prueba que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Por el Lema de Baire, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Int}(Y_k) \neq \emptyset$. Equivalentemente, $\operatorname{Int}\left(\overline{A(B_X(0,1))}\right) \neq \emptyset$. Se sigue que existen $y_0 \in Y$ y $r > 0$ tales que

$$B_Y(y_0, 4r) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}. \tag{3.15}$$

En particular, $y_0 \in \overline{A(B_X(0,1))}$, así que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_X(0,1)$ tal que $A(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} y_0$. Luego, $A(-z_n) \xrightarrow{n\to\infty} -y_0$, por lo que $-y_0 \in \overline{A(B_X(0,1))}$ también. Así,

$$(\forall\, z \in B_Y(0,4r)) \quad z = \underbrace{z + y_0}_{\in B_Y(y_0,4r) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}} + \underbrace{(-y_0)}_{\in \overline{A(B_X(0,1))}} \in 2\overline{A(B_X(0,1))}.$$

Reescalando obtenemos la inclusión deseada. $\square$

Lema 3.16

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, 2r) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}$. Entonces, $B_Y(0, r) \subseteq A(B_X(0,1))$.

Demostración: Sea $y \in Y$ con $\|y\| < r$. Sea $\delta > 0$ tal que $y_\delta := (1+\delta)y \in B(0, r)$ todavía. Como $2y_\delta \in B_Y(0, 2r) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}$, se sigue que existe $\tilde{z}_1 \in X$ con $\|\tilde{z}_1\| < 1$ tal que $\|2y_\delta - A(\tilde{z}_1)\| < r$. Reescalando $z_1 := \tilde{z}_1/2$, se tiene que $\|z_1\| < 1/2$ y que $\|y_\delta - A(z_1)\| < r/2$.

Análogamente, puesto que $4(y_\delta - A(z_1)) \in B(0, 2r)$, existe $\tilde{z}_2 \in X$ con $\|\tilde{z}_2\| < 1$ tal que $\|4(y_\delta - A(z_1)) - A(\tilde{z}_2)\| < r$. Reescalando $z_2 := \tilde{z}_2/4$, se tiene que $\|z_2\| < 1/4$ y que $\|y_\delta - A(z_1) - A(z_2)\| < r/4$.

Iterando este argumento construimos una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ y $\|y_\delta - A(x_n)\| < \frac{r}{2^n}$, donde $x_n := \sum_{j=1}^{n} z_j$. Como la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, se deduce que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, y por lo tanto posee un límite $x_\delta \in X$. Además,

$$\|x_\delta\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} z_j \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|z_j\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = 1;$$

esto es, $\|x_\delta\| \leq 1$. De la relación $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \|y_\delta - A(x_n)\| < r/2^n$ se concluye que $y_\delta = A(x_\delta)$. Equivalentemente, $y = A\left(\frac{x_\delta}{1+\delta}\right)$. Como $\left\|\frac{x_\delta}{1+\delta}\right\| \leq \frac{1}{1+\delta} < 1$, hemos probado el resultado deseado. □

Hemos saldado nuestra deuda con el Teorema de la Aplicación abierta (Teorema 3.9)

Concluimos la sección con otro gran teorema y algunos de sus corolarios.

Teorema 3.11 (Teorema de Banach–Steinhaus/Principio del acotamiento uniforme)

Sean X un espacio de Banach, Y un EVN y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia, no necesariamente numerable, en $\mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que

$$(\forall\, x \in X) \quad \sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty.$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in X)\,(\forall\, i \in I) \quad \|A_i(x)\| \leq M\,\|x\|\,.$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$X_n := \{x \in X : (\forall\, i \in I)\ \|A_i(x)\| \leq n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, dada una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X_n$ que converge a algún límite $x \in X$, se tiene

$$(\forall\, i \in I) \quad \|A_i(x)\| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\|A_i(x_k)\|}_{\in[0,n]} \leq n,$$

lo que muestra que X_n es cerrado. Alternativamente, esta propiedad se sigue de la caracterización $X_n = \bigcap_{i\in I} A_i^{-1}\left(\overline{B(0,n)}\right)$.

Ahora, puesto que, para todo $x \in X$, $\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty$, se deduce que cada uno de los miembros de X pertenece a alguno de los X_n; esto es, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Por el Lema de Baire (Lema 3.14), se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Int}(X_N) \neq \emptyset$, lo cual significa que existe $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B(x_0, r) \subseteq X_N$. Entonces, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, $z_x := x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x \in B(x_0, r) \subseteq X_N$. Luego, para todo $i \in I$, $\|A_i(z_x)\| \leq N$. Como obviamente $x_0 \in B(x_0, r) \subseteq X_N$, para todo $i \in I$, $\|A_i(x_0)\| \leq N$ también. Por lo tanto,

$$(\forall x \in X \setminus \{0\}) \; (\forall i \in I) \quad \|A_i(x)\| = \left\| A_i\left(\frac{2\|x\|}{r} (z_x - x_0) \right) \right\|$$
$$= \frac{2\|x\|}{r} \|A_i(z_x - x_0)\| \leq \frac{2\|x\|}{r} (\|A_i(z_x)\| + \|A_i(x_0)\|) \leq \frac{4N}{r} \|x\| .$$

Incorporando al caso directo en el que $x = 0$, concluimos que $M = 4N/r$ es una constante con las propiedades buscadas. $\square$

Ponemos a trabajar al teorema de Banach–Steinhaus con dos corolarios interesantes.

Lema 3.17

Sean X un espacio de Banach, Y un EVN y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para cada $x \in X$, la sucesión $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y. Entonces,

- a $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.
- b El operador $A \colon X \to Y$, definido por $A(x) := \lim\limits_{n \to \infty} A_n(x)$ para todo $x \in X$, pertenece a $\mathcal{L}(X, Y)$.
- c $\|A\| \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \|A_n\|$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que, para cada $x \in X$, la sucesión $\{A_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, ella es acotada en Y; esto es,

$$(\forall\, x \in X) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\| < \infty.$$

Por lo tanto, una aplicación directa del Teorema de Banach–Steinhaus (Teorema 3.11) implica la parte a. Esto significa que existe $M > 0$ tal que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, x \in X) \quad \|A_n(x)\| \leq M\,\|x\|\,,$$

de donde, tomando el límite $n \to \infty$, se obtiene que, para todo $x \in X$, $\|A(x)\| \leq M\,\|x\|$. Dado que el operador límite A hereda la linealidad de los A_n, esto prueba que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y obtenemos b. Por último, a partir de la relación $\|A_n(x)\| \leq \|A_n\|\,\|x\|$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}(\forall\, x \in X) \quad \|A(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n(x)\| &= \liminf_{n\to\infty} \|A_n(x)\| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\| = \left(\liminf_{n\to\infty} \|A_n\|\right)\|x\|\,,\end{aligned}$$

lo cual demuestra c. □

Ejemplo extra sin cobro adicional

Sean $X = \ell^1(\mathbb{R})$, que es Banach, $Y = \mathbb{R}$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y) = [\ell^1(\mathbb{R})]'$ la sucesión definida por $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X) \quad A_n(x) := c_n\, x_n$, donde c_n es 1 si n es impar y por 2 si n es par.

En ese caso, para todo $x \in X$, $A_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, así que se satisfacen las hipótesis del Lema 3.17. Pero $\lim_{n\to\infty} \|A_n\|$ no existe; el uso de $\liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$ es ineludible.

Lema 3.18

Sea S un subconjunto de un EVN X sobre $\mathbb{R}$ y suponga que, para cada $F \in X'$, el conjunto $\{F(x) : x \in S\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Entonces, S es acotado; es decir, existe $C > 0$ tal que $(\forall\, x \in S)\ \|x\| \leq C$.

Demostración: Aplicamos el Teorema de Banach–Steinhaus (Teorema 3.11) asignando, en la notación de su enunciado

$$X \leftarrow X', \quad Y \leftarrow \mathbb{R}, \quad I \leftarrow S$$

y, para cada $x \in S$ definimos al operador $A_x : X' \to \mathbb{R}$ por $A_x(F) := F(x)$ para todo $F \in X'$. De acuerdo a la hipótesis se tiene que

$$\sup_{x \in S} |A_x(F)| = \sup_{x \in S} |F(x)| < \infty.$$

Por lo tanto, el Teorema de Banach–Steinhaus implica que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$(\forall\, F \in X')\ (\forall\, x \in S) \quad |A_x(F)| = |F(x)| \leq \tilde{C}\, \|F\|\,.$$

De este modo, aplicando la consecuencia del Teorema de Hahn–Banach encapsulada en el Lema 2.4, se deduce que

$$(\forall\, x \in S) \quad \|x\| = \sup_{F \in X' \setminus \{0\}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \tilde{C},$$

lo que expresa el acotamiento de S. □

3.8 ~~Acotamiento uniforme sin Lema de Baire~~

Lema 3.19: OMITIDO

Teorema 3.12: OMITIDO

3.9 Otras consecuencias de la aplicación abierta

Hablaremos de acotamiento de suma de subespacios cerrados, conexión entre inversos a derecha o izquierda y la existencia de suplementos topológicos.

Lema 3.20

Sea X un espacio de Banach y sean U y V subespacios cerrados de X tales que $U + V$ es cerrado. Entonces, existe $C > 0$ tal que, para cada $z \in U + V$, existen $x \in U$ e $y \in V$ que verifican

$$z = x + y, \quad \|x\| \leq C\,\|z\| \quad \text{y} \quad \|y\| \leq C\,\|z\|\,.$$

Demostración: Consideremos al espacio $U \times V$ provisto de la norma producto

$$(\forall\,(x, y) \in U \times V) \quad \|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$$

y al espacio $U + V$ provisto de la norma usual $\|\cdot\|$ de X y definamos al operador $T\colon U \times V \to U + V$ por

$$(\forall\,(x, y) \in U \times V) \quad T(x, y) := x + y.$$

Es claro que T es lineal y sobreyectivo. Además, es acotado debido a que

$$(\forall\,(x, y) \in U \times V) \quad \|T(x, y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|\,.$$

Luego, como tanto $U \times V$ y $U + V$ son Banach, por el Teorema de la Aplicación Abierta (Teorema 3.9) se tiene que existe $r > 0$ tal que

$$B_{U+V}(0, r) \subseteq T(B_{U\times V}(0, 1)).$$

Sea $z \in U + V$, $z \neq 0$ (si z es nulo, x e y nulos sirven con cualquier C). Entonces, $\bar{z} := \frac{r\,z}{2\|z\|} \in B_{U+V}(0, r)$. Por la inclusión de arriba, existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in U \times V$ tal que

$$\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| = \|(\bar{x}, \bar{y})\| < 1 \quad \text{y} \quad \bar{z} = T(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}.$$

Definiendo los vectores reescalados $x := \frac{2\|z\|}{r}\bar{x} \in U$ e $y := \frac{2\|z\|}{r}\bar{y} \in V$, observamos que ellos satisfacen

$$\|x\| + \|y\| = \|(x,y)\| < \frac{2\,\|z\|}{r} \quad \text{y} \quad z = x + y.$$

Como, de lo anterior, $\|x\| < \frac{2}{r}\,\|z\|$ y $\|y\| < \frac{2}{r}\,\|z\|$, obtenemos el resultado deseado con $C = \frac{2}{r}$ para los $z \in U + V$ no nulos. □

El siguiente lema comparte sus hipótesis con el anterior.

Lema 3.21

Sea X un espacio de Banach y sean U y V subespacios cerrados de X tales que $U + V$ es cerrado. Entonces, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$(\forall\, x \in X) \quad C_1 \operatorname{dist}(x, U \cap V) \leq \operatorname{dist}(x, U) + \operatorname{dist}(x, V) \leq C_2 \operatorname{dist}(x, U \cap V).$$

Demostración: De las inclusiones obvias $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$ inferimos que, para todo $x \in X$, $\operatorname{dist}(x, U) \leq \operatorname{dist}(x, U \cap V)$ y $\operatorname{dist}(x, V) \leq \operatorname{dist}(x, U \cap V)$, lo que implica la segunda desigualdad deseada con $C_2 = 2$.

Por otro lado, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que

$$\|x - u\| \leq \operatorname{dist}(x, U) + \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x - v\| \leq \operatorname{dist}(x, V) + \varepsilon. \tag{3.17}$$

Luego, aplicando el lema anterior (Lema 3.20) a $z := u - v \in U + V$, se deduce que existen $\tilde{u} \in U$ y $\tilde{v} \in V$ tales que

$$u - v = \tilde{u} + \tilde{v}, \quad \|\tilde{u}\| \leq C\,\|u - v\| \quad \text{y} \quad \|\tilde{v}\| \leq C\,\|u - v\|,$$

donde $C > 0$ depende solamente de U y V.

En particular se tiene que $u - \tilde{u} = v + \tilde{v} \in U \cap V$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, U \cap V) &\leq \|x - (u - \tilde{u})\| \leq \|x - u\| + \|\tilde{u}\| \\ &\leq \|x - u\| + C\,\|u - v\| \overset{\text{DT}}{\leq} (1 + C)\,\|x - u\| + C\,\|x - v\|\,, \end{aligned}$$

de donde, utilizando también (3.17), se llega a

$$\operatorname{dist}(x, U \cap V) \leq (1 + C)\,(\operatorname{dist}(x, U) + \operatorname{dist}(x, V)) + (1 + 2C)\,\varepsilon.$$

Así, tomando el límite $\varepsilon \to 0^+$, se concluye también la primera desigualdad deseada con $C_1 = 1/(1 + C)$. □

El siguiente recíproco del Lema 3.21, cuya demostración involucra conceptos y resultados que veremos más adelante también es verdadero.

Lema 3.22

Sean U y V subespacios cerrados de un Banach X tales que

$$(\forall\, x \in X) \quad \operatorname{dist}(x, U \cap V) \leq C\,(\operatorname{dist}(x, U) + \operatorname{dist}(x, V))\,.$$

Entonces, $U + V$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN PREMATURA: Consideremos al operador $T\colon\ X \to X/U$ definido, para todo $x \in X$, por $T(x) = [x]$, el cual claramente es lineal, acotado y sobreyectivo entre espacios de Banach (los conceptos básicos sobre espacios cuocientes se introducen más adelante en la Sección 3.10). A su vez, sea $S := T|_V : V \to X/U$. Se sigue que

$$N(S) = \{v \in V : [v] = [0]\} = \{v \in V : v \in U\} = U \cap V.$$

Luego, para cada $v \in V$ se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(v, N(S)) = \operatorname{dist}(v, U \cap V) &\overset{\text{hip.}}{\leq} C\,(\operatorname{dist}(v, U) + \operatorname{dist}(v, V)) \\ &= C \operatorname{dist}(v, U) = C\,\|[v]\| = C\,\|S(v)\|\,;\end{aligned}$$

es decir,

$$(\forall\, v \in V) \quad \operatorname{dist}(v, N(S)) \leq C\,\|S(v)\|\,,$$

lo cual prueba, en virtud del Teorema 3.17, que $S(V)$ es cerrado en X/U. Por lo tanto, dado que T es acotado, $T^{-1}(S(V))$ también es cerrado. El resultado deseado entonces emana de

$$\begin{aligned}T^{-1}(S(V)) &= \{x \in X : T(x) \in S(V)\} \\ &= \{x \in X : (\exists\, v \in V) \quad T(x) = S(v)\} = \{x \in X : (\exists\, v \in V) \quad [x] = [v]\} \\ &= \{x \in X : (\exists\, v \in V) \quad x - v \in U\} = U + V.\end{aligned}$$

□

Definición 3.13

Sea U un subespacio cerrado de un Banach X. Se dice que un subespacio V de X es un *suplemento topológico* de U si

- V es cerrado y
- $X = U \oplus V$.

En las circunstancias descritas por esta definición obviamente se tiene que todo $x \in X$ se escribe de manera única en la forma $x = u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$. Se sigue, de acuerdo al Lema 3.20, que existe una constante $C > 0$, independiente de x, tal que

$$\|u\| \leq C \|x\| \quad \text{y} \quad \|v\| \leq C \|x\| ,$$

lo cual significa que los operadores (llamados *proyectores* en este caso)

$$\begin{aligned} P\colon X &\to U \\ x &\to P(x) := u \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} Q\colon X &\to V \\ x &\to Q(x) := v \end{aligned}$$

son lineales y acotados.

Cuando X es un espacio de Hilbert, el Teorema de Descomposición Ortogonal (Teorema 2.3) establece precisamente que todo subespacio cerrado U admite a $U^\perp$ como suplemento topológico. En este caso los operadores P y Q son proyectores ortogonales.

El siguiente lema demuestra que todo subespacio de dimensión finita admite un suplemento topológico.

Lema 3.23

Sea U un subespacio de dimensión finita de un EVN X. Entonces, existe un subespacio cerrado V de X tal que $X = U \oplus V$.

Demostración: Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de U. Entonces, para cada $x \in U$ existen únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, lo cual induce la definición, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, del funcional lineal y acotado

$$\begin{aligned}\varphi_i : U &\to \mathbb{K} \\ x &\to \varphi_i(x) := \alpha_i.\end{aligned}$$

Luego, empleando la versión analítica del Teorema de Hahn–Banach (Teorema 2.6), se deduce que existen $\psi_i \in X'$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $\|\psi_i\|_{X'} = \|\varphi_i\|_{U'}$ y $\psi_i|_U = \varphi_i$. Definimos al subespacio

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} \psi_i^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{i=1}^{n} N(\psi_i),$$

el cual claramente es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados.

Además, dado un vector $x \in U \cap V$, éste admite, por pertenecer a U, una expansión de la forma $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, pero, como también pertenece a V,

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}) \quad 0 = \psi_i(x) = \varphi_i(x) = \alpha_i,$$

de donde $x = 0$ y, consiguientemente, $U \cap V = \{0\}$.

A su vez, dado $x \in X$, es claro que $x_U := \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) e_j$ pertenece a U y

$$\begin{aligned}(\forall \in \{1, \ldots, n\}) \quad \psi_i(x - x_U) &= \psi_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x)\psi_i(e_j) \\ &= \psi_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x)\delta_{i,j} = \psi_i(x) - \psi_i(x) = 0,\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $x - x_U \in V$. De este modo, $x = x_U + (x - x_U) \in U + V$ y concluimos que $X = U \oplus V$. $\square$

Ahora, sean X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que A es sobreyectivo. Del Teorema de la Aplicación Abierta (Teorema 3.9) sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subseteq A(B(0,1))$. Luego, dado $y \in Y \setminus \{0\}$, es claro que $\frac{r}{2\|y\|} y \in B(0,r)$, y por lo tanto existe un $\bar{x} \in B(0,1)$ tal que $\frac{r}{2\|y\|} y = A(\bar{x})$. Reescalando $x := \frac{2\|y\|}{r} \bar{x}$, se tiene que

$$A(x) = y \quad \text{y} \quad \|x\| \leq \frac{2}{r} \|y\| ,$$

con lo cual resulta natural preguntarse si es posible construir un operador $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $A \circ B = I \colon Y \to Y$. En este caso se dice que B es un *inverso a derecha* de A. El siguiente teorema muestra que la existencia de tal operador B es equivalente a la condición que $N(A)$ posea un suplemento topológico en X.

Teorema 3.13

Sean X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A) = Y$. Entonces A posee un inverso a derecha si y solo si $N(A)$ posee un suplemento topológico en X.

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ un inverso a derecha de A. Probaremos que $R(B)$ es un suplemento topológico de $N(A)$.

En efecto, para probar que $R(B)$ es cerrado, sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que $B(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$. Aplicando el operador A y empleando que $A \circ B = I \colon Y \to Y$, resulta que $y_n \xrightarrow{n\to\infty} A(x)$. Aplicando el operador B, $B(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} B(A(x))$. Por unicidad del límite, $x = B(A(x)) \in R(B)$.

Por otro lado, dado $x \in N(A) \cap R(B)$, se tiene que $A(x) = 0$ y que existe $y \in Y$ tal que $x = B(y)$. Se sigue que $0 = A(x) = A(B(y)) = y$, y por lo tanto, $0 = B(y) = x$, lo cual prueba que $N(A) \cap R(B) = \{0\}$.

Por último para esta parte, dado $x \in X$, se tiene

$$A\big(x - B(A(x))\big) = A(x) - A \circ B(A(x)) = 0,$$

lo cual prueba que $x - B(A(x)) \in N(A)$. Por lo tanto,

$$(\forall\, x \in X) \quad x = x - B(A(x)) + B(A(x)) \in N(A) + R(B),$$

lo que termina de establecer que $X = N(A) \oplus R(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea V un suplemento topológico de $N(A)$; esto es, V es un subespacio cerrado de X y $X = N(A) \oplus V$. A su vez, sea $P\colon X \to V$ el proyector de X sobre V; es decir, dado $x \in X$, $P(x)$ es el único elemento en V tal que $x - P(x) \in N(A)$. Se sigue que

$$(\forall\, x \in X) \quad A(x) = A(P(x)).$$

Ahora, dado $y \in Y$, consideremos un $x \in X$ tal que $A(x) = y$ y definamos $B(y) := P(x)$. Es necesario comprobar que $B\colon Y \to X$ está bien definido así. En efecto, sea $\bar{x} \in X$ tal que $A(\bar{x}) = y$ también. Se sigue que $x - \bar{x} \in N(A)$, y por lo tanto $P(x - \bar{x}) = 0$, de donde $P(x) = P(\bar{x})$. Es claro que B es lineal y acotado ya que, de acuerdo a observaciones anteriores, se obtiene

$$(\forall\, y \in Y) \quad \|B(y)\| = \|P(x)\| \leq C\,\|x\| \overset{\text{TAA}}{\leq} \tilde{C}\,\|y\|\,.$$

Además,

$$(\forall\, y \in Y) \quad A \circ B(y) = A(B(y)) = A(P(x)) = A(x) = y,$$

lo cual muestra que B es un inverso a derecha de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ (Demostración alternativa) Sea $\tilde{A} := A|_V : V \to Y$ la restricción del operador A a V. Es claro que $\tilde{A}$ es biyectivo y acotado y V es Banach. Por el Teorema de la Inversa Acotada (Teorema 3.4), $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, V)$. De este modo $B := \tilde{A}^{-1}$ constituye el inverso a derecha de A. □

Notemos que, en la demostración anterior, para todo $y \in Y$, $\tilde{A}^{-1}(y) = P(x)$, donde x es cualquier preimagen por A de y.

Un resultado similar al teorema anterior está dado por el siguiente enunciado, cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema 3.14

Sea X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(A) = \{0\}$. Entonces A admite un inverso a izquierda (esto es, existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $B \circ A = I : X \to X$) si y solo si $R(A)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y.

Demostración: Ejercicio.

3.10 Operadores con rango cerrado

El objetivo de esta sección es **caracterizar los operadores lineales que tienen rango cerrado**.

Al respecto, recordemos primero que si X e Y son EVN y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, por el Teorema 3.2, $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) = {}^{\circ}N(A')$. En el caso en que X e Y son espacios de Hilbert, el Teorema 3.3 establece que que $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

A continuación, se deducen **otras condiciones** necesarias y suficientes, más fáciles de verificar, para que $R(A)$ sea un subespacio cerrado de Y.

Comenzamos nuestro análisis suponiendo que $A \colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal, cerrado e inyectivo (esto es, $N(A) = \{0\}$). Si Y es Banach y $R(A)$ es cerrado, entonces $(R(A), \|\cdot\|_Y)$ es claramente Banach. Supongamos además que X es Banach. Entonces, aplicando el Teorema de la Inversa Acotada Mejorado (Teorema 3.7), se deduce que $A^{-1} \in \mathcal{L}(R(A), X)$, lo cual significa que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, y \in R(A)) \quad \left\|A^{-1}(y)\right\| \leq C \, \|y\|$$

o bien

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad \|x\| \leq C \, \|A(x)\| \, . \tag{3.18}$$

Hemos probado así que (3.18) es una **condición necesaria** para que $R(A)$ sea cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal, cerrado e inyectivo y que existe $C > 0$ tal que (3.18) ocurre. A su vez, sea $\{A(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $R(A)$ que converge a algún $y \in Y$. Por la desigualdad (3.18) y la linealidad de A,

$$\|x_m - x_n\| \leq C\,\|A(x_m) - A(x_n)\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0,$$

lo que prueba que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Como A es cerrado, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $y = A(x) \in R(A)$, gracias a lo cual se concluye que $R(A)$ es cerrado, así que (3.18) es también una **condición suficiente** para que $R(A)$ sea cerrado.

Resumiendo, **hemos demostrado** así el siguiente resultado de caracterización:

Teorema 3.15

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{0\}$. Entonces, $R(A)$ es un subespacio cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad \|x\| \leq C\,\|A(x)\|\,.$$

Demostración: Vea la discusión anterior. □

Ahora queremos extender el resultado de caracterización anterior al caso no inyectivo. Partimos con la siguiente observación.

Lema 3.24

Sean X e Y EVN y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado. Entonces, $N(A)$ es un subespacio cerrado de X.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$. Es claro que $A(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ en Y. Como A es cerrado, se infiere que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $A(x) = 0$, lo cual prueba que $x \in N(A)$. $\square$

Emplearemos una noción de espacio cuociente. Más precisamente, sea X un EVN y sea M un subespacio cerrado de X. Entonces **se define** la relación de equivalencia $\sim$ en X por

$$(\forall\, u, v \in X) \quad u \sim v \quad \text{si y solo si} \quad u - v \in M.$$

Así, dado $u \in X$, su clase de equivalencia está dada por

$$[u] := \{v \in X : u - v \in M\},$$

y se dice que u es un *representante* (en general, no único) de $[u]$. Notar que $[0] = M$. Además, es claro (¿sí?) que $[u] = [v]$ si y solo si $u \sim v$. También $[u] \cap [v] = \emptyset$ si y solo si $u \not\sim v$. Al conjunto de todas las clases de equivalencia se le llama *espacio cuociente* y se denota por X/M; esto es,

$$X/M := \{[u] : u \in X\}.$$

A su vez, al espacio X/M se le provee de una estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} +\colon X/M \times X/M &\to X/M \\ ([u],[v]) &\to [u]+[v] := [u+v] \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times X/M &\to X/M \\ (\lambda,[u]) &\to \lambda[u] := [\lambda u]. \end{aligned}$$

Como las operaciones $+$ y $\cdot$ están definidas indirectamente a través de representantes, es necesario asegurarse que da lo mismo cuáles representantes en particular se están tomando.

En efecto, sean $u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in X$ tales que $[u] = [\tilde{u}]$ y $[v] = [\tilde{v}]$. Se sigue que $u - \tilde{u} \in M$ y $v - \tilde{v} \in M$, con lo cual $(u - \tilde{u}) + (v - \tilde{v}) = (u + v) - (\tilde{u} + \tilde{v}) \in M$, de donde $u + v \sim \tilde{u} + \tilde{v}$, o bien $[u + v] = [\tilde{u} + \tilde{v}]$.

A su vez, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean $u, \tilde{u} \in X$ tales que $[u] = [\tilde{u}]$. Entonces, $u - \tilde{u} \in M$. Consiguientemente, $\lambda(u - \tilde{u}) = \lambda u - \lambda\tilde{u} \in M$, lo cual prueba que $[\lambda u] = [\lambda\tilde{u}]$.

Satisfecho el requerimiento de que $+$ y $\cdot$ estén bien definidas, es fácil probar que $(X/M, +, \cdot)$ constituye un espacio vectorial real con elemento neutro dado por $[0] = M$.

Todavía más, la aplicación $\|\cdot\| : X/M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[u]\| := \operatorname{dist}(u, M) = \inf_{v \in M} \|u - v\|\,, \tag{3.19}$$

es una norma sobre X/M que lo dota de la estructura de EVN. En efecto, para probar que esta aplicación definida indirectamente por (3.19) está bien definida, sean $u, \tilde{u} \in X$ tales que $[u] = [\tilde{u}]$. Se sigue que $u - \tilde{u} \in M$, y luego

$$\inf_{v \in M} \|u - v\| = \inf_{v \in M} \|\tilde{u} - (v + \tilde{u} - u)\| = \inf_{v \in M + (\tilde{u} - u)} \|\tilde{u} - v\| = \inf_{v \in M} \|\tilde{u} - v\|\,,$$

lo cual prueba que no hay ambigüedad en la definición $\|\cdot\|$ a causa de la libertad para tomar el representante que participa. Veamos ahora que se satisfacen las propiedades de norma. Es claro que $\|[u]\| \geq 0$ para todo $[u] \in X/M$. Además,

$$\|[u]\| = 0 \iff \operatorname{dist}(u, M) = 0 \overset{M \text{ es cerrado}}{\iff} u \in M \iff [u] = [0].$$

Para la homogeneidad, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $[u] \in X/M$. Si $\lambda \neq 0$,

$$\|\lambda[u]\| = \|[\lambda u]\| = \inf_{v \in M} \|\lambda u - v\| = \inf_{v \in M} \|\lambda(u - v/\lambda)\| = |\lambda| \inf_{v \in M} \|u - v/\lambda\|$$
$$= |\lambda| \inf_{v \in \lambda^{-1} M} \|u - v\| = |\lambda| \inf_{v \in M} \|u - v\| = |\lambda| \, \|[u]\| .$$

Si $\lambda = 0$,

$$\|\lambda[u]\| = \|[\lambda u]\| = \|[0]\| = \inf_{v \in M} \|0 - v\| = \|0 - 0\| = 0 = \lambda \, \|[u]\| .$$

Por último, para la desigualdad triangular, dadas $[u], [z] \in X/M$ se tiene

$$(\forall\, w_1, w_2 \in M) \quad \|[u] + [z]\| = \|[u + z]\| = \inf_{v \in M} \|u + z - v\|$$
$$\leq \|u + z - (w_1 + w_2)\| \leq \|u - w_1\| + \|z - w_2\| .$$

Tomando ínfimo a ambos lados sobre $w_1 \in M$ primero y $w_2 \in M$ después, obtenemos que

$$\|[u] + [z]\| \leq \inf_{w_1 \in M} \|u - w_1\| + \inf_{w_2 \in M} \|z - w_2\| = \|[u]\| + \|[z]\| .$$

Tenemos bien demostrado entonces que $(X/M, \|\cdot\|)$ es un EVN.

Todavía más, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.16

Sea X un espacio de Banach y sea M un subespacio cerrado de X. Entonces, $(X/M, \|\cdot\|)$ también es un espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN:[2] Partimos con:

Teoremita incrustado sin cargo adicional

Un EVN $(X, \|\cdot\|)$ es Banach si y solo si, para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ en $\mathbb{R}$ implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X.

DEMOSTRACIONCITA: $\boxed{\Rightarrow}$ Sea X un espacio de Banach y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces, la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=1}^{N} x_n\}_{N\in\mathbb{N}} \subseteq X$, por medio de la desigualdad triangular, hereda de la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|\}_{N\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la calidad de sucesión de Cauchy. Como X es Banach, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
$\boxed{\Leftarrow}$ Asumamos que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ en $\mathbb{R}$ implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Existe una función $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, estrictamente creciente (una función seleccionadora de índices), tal que $\left\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\right\| < 2^{-n}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\right\|$ converge en $\mathbb{R}$. Por nuestras suposiciones, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\right)$ converge a algún $x \in X$. Como la N-ésima suma parcial de esta serie es $x_{\phi(N+1)} - x_{\phi(1)}$, la sucesión $\{x_{\phi(N)}\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge a $x + x_{\phi(1)}$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que posee una subsucesión convergente, ella misma converge, e inferimos que X es completo. □-ito

Sea entonces $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X/M$ una sucesión tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|$ converge en $\mathbb{R}$. Por propiedades del ínfimo,

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, y_n \in M) \quad \|x_n - y_n\| < \|[x_n]\| + 2^{-n},$$

[2] La adapté de `https://math.stackexchange.com/a/319920`.

de donde deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|$ converge.

Como X es un espacio de Banach, por el teorema incrustado, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)$ converge a algún z en X. Así,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}[x_n] - [z]\right\| = \left\|\left[\sum_{n=1}^{N} x_n - z\right]\right\| = \inf_{v\in M}\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n - z - v\right\|$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{N} x_n - z - \sum_{n=1}^{N} y_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N}(x_n - y_n) - z\right\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Por lo tanto, de asumir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|$ converge en $\mathbb{R}$, hemos probado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$ converge en X/M, lo que de acuerdo al teorema incrustado, prueba que X/M es un espacio de Banach. $\square$

Habiendo recolectado lo que necesitamos saber de espacios cuocientes, estamos en condiciones de volver a nuestro interés original en caracterizar los operadores, no necesariamente inyectivos, que poseen rango cerrado.

Teorema 3.17

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado. Entonces $R(A)$ es cerrado en Y si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, u \in \mathcal{D}(A)) \quad \operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C\,\|A(u)\|\,. \tag{3.20}$$

Demostración: Como $N(A)$ es un subespacio cerrado de X (Lema 3.24), se tiene por el el Teorema 3.16 recién probado que $X/N(A)$ es Banach.

Luego, definimos al operador $\hat{A}\colon \mathcal{D}(\hat{A}) \subseteq X/N(A) \to Y$ mediante

$$\mathcal{D}(\hat{A}) := \{[u] : u \in \mathcal{D}(A)\} \qquad \text{y} \qquad (\forall\, [u] \in \mathcal{D}(\hat{A})) \quad \hat{A}([u]) := A(u).$$

Esta definición indirecta por medio de un representante no es ambigua porque si $[u] = [z]$, $u - z \in N(A)$, por lo que $A(u) = A(z)$.

Observemos también que $\mathcal{D}(\hat{A})$ es un subespacio de $X/N(A)$ porque $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de X y que $\hat{A}$ hereda de A su calidad de lineal. A su vez, es claro que $R(\hat{A}) = R(A)$.

Probaremos ahora que $\hat{A}$ también hereda la calidad de cerrado. Consideremos entonces una sucesión $\{[u_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\hat{A})$ tal que $[u_n] \xrightarrow{n\to\infty} [u]$ en $X/N(A)$ y $\hat{A}([u_n]) = A(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$ en Y. Por propiedades del ínfimo,

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, z_n \in N(A)) \quad \|u_n - u - z_n\| < \|[u_n - u]\| + 2^{-n}.$$

Se sigue que $u_n - z_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ en X. También $A(u_n - z_n) = A(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$ en Y. Como el operador A es cerrado, se sigue que $u \in \mathcal{D}(A)$ y que $A(u) = y$. Por la definición de $\hat{A}$ y su dominio, $[u] \in \mathcal{D}(\hat{A})$ y $\hat{A}([u]) = y$, de donde $\hat{A}$ es, efecto, cerrado.

Por último, si $[u] \in N(\hat{A})$, entonces $A(u) = 0$, de donde $u \in N(A)$ y luego $[u] = [0]$, el nulo de $X/N(A)$; esto es, $\hat{A}$ es inyectivo.

Resumiendo, $X/N(A)$ e Y son espacios de Banach, $\hat{A}\colon \mathcal{D}(X/N(A) \to Y$ es un operador lineal cerrado con $N(\hat{A}) = \{[0]\}$. Entonces hemos satisfecho las hipótesis del Teorema 3.15, que en este caso nos dice que $R(\hat{A}) = R(A)$ es un subespacio cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, [u] \in \mathcal{D}(\hat{A})) \quad \|[u]\| \leq C\|\hat{A}([u])\|;$$

esto es,

$$(\forall\, u \in \mathcal{D}(A)) \quad \operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C \, \|A(u)\| \, .$$

$\square$

Notemos que si $N(A) = \{0\}$, entonces $\operatorname{dist}(u, N(A)) = \|u\|$ y en tal caso (3.20) se reduce a la caracterización particular dada por el Teorema 3.15.

En el contexto de operadores de rango cerrado, interesa obtener condiciones para que esta propiedad se traspase al adjunto.

Teorema 3.18

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado en Y. Entonces, $R(A') = N(A)^\circ$, y por lo tanto $R(A')$ es un subespacio cerrado de X'.

DEMOSTRACIÓN: $\boxed{\subseteq}$ Sea $F \in R(A')$. Entonces existe $G \in Y'$ tal que $F = A'(G)$. Luego,

$$(\forall\, x \in N(A)) \quad F(x) = A'(G)(x) = G(A(x)) = G(0) = 0,$$

por lo que $F \in N(A)^\circ$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $F \in N(A)^\circ$. Definimos al funcional $g \colon R(A) \to \mathbb{R}$ mediante

$$(\forall\, y \in R(A)) \quad g(y) := F(x), \quad \text{donde } x \in X \text{ satisface } A(x) = y.$$

Para comprobar que esta definición indirecta no es ambigua, supongamos que para un $y \in R(A)$ tenemos $x, \tilde{x} \in X$ tales que tanto $A(x) = y$ como $A(\tilde{x}) = y$. Entonces, $x - \tilde{x} \in N(A)$, por lo que $F(x) = F(\tilde{x})$.

Además, g es lineal. En efecto, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in R(A)$, sabemos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $A(x_1) = y_1$ y $A(x_2) = y_2$. Como A es lineal, $\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 = A(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2)$. Así,

$$g(\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2) = F(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2) = \alpha_1\, g(y_1) + \alpha_2\, g(y_2).$$

Por otro lado, dado $y = A(x) \in R(A)$ y $z \in N(A)$, tenemos que

$$|g(y)| = |F(x)| = |F(x - z)| \leq \|F\|\, \|x - z\|\,,$$

de donde

$$|g(y)| \leq \|F\| \inf_{z \in N(A)} \|x - z\| = \|F\| \operatorname{dist}(x, N(A)).$$

Empleando que $R(A)$ es cerrado y el Teorema 3.17, existe un $C > 0$, independiente de x e y, tal que

$$|g(y)| \leq C\, \|F\|\, \|A(x)\| = C\, \|F\|\, \|y\|\,.$$

Luego, $g \in R(A)'$.

Aplicando la forma analítica del Teorema de Hahn–Banach para espacios normados (Teorema 2.6), se deduce que existe $G \in Y'$ tal que $\|G\|_{Y'} = \|g\|_{R(A)'}$ y $G|_{R(A)} = g$. Esto implica que, para todo $y \in R(A)$, $G(y) = g(y)$. Luego

$$(\forall\, x \in X) \quad F(x) = g(A(x)) = G(A(x)) = A'(G)(x),$$

con lo cual hemos hallado un $G \in Y'$ tal que $A'(G) = F$; esto es, $F \in R(A')$. $\square$

La siguiente es una simplificación del teorema anterior válida en espacios de Hilbert.

Teorema 3.19

Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado en Y. Entonces, $R(A^*) = N(A)^\perp$, y por lo tanto $R(A^*)$ es un subespacio cerrado de X.

Demostración:

$$\begin{aligned}
x \in R(A^*) &\iff (\exists\, y \in Y) \quad x = A^*(y) \\
&\overset{\S\,3.4}{\iff} (\exists\, y \in Y) \quad x = \mathcal{R}_X(A'(\mathcal{R}_Y^{-1}(y))) \\
&\iff (\exists\, y \in Y) \quad \mathcal{R}_X^{-1}(x) = A'(\mathcal{R}_Y^{-1}(y)) \\
&\iff (\exists\, G \in Y') \quad \mathcal{R}_X^{-1}(x) = A'(G) \\
&\iff \mathcal{R}_X^{-1}(x) \in R(A') \\
&\overset{\text{T. 3.18}}{\iff} \mathcal{R}_X^{-1}(x) \in N(A)^\circ \\
&\overset{\text{L. 3.8}}{\iff} x \in N(A)^\perp.
\end{aligned}$$

$\square$

3.11 ~~Un problema de la teoría de aproximaciones~~

Lema 3.25: OMITIDO

Lema 3.26: OMITIDO

Lema 3.27: OMITIDO

Teorema 3.20: OMITIDO

Teorema 3.21: OMITIDO

Lema 3.28: OMITIDO

Teorema 3.22: OMITIDO

3.12 Algo más sobre operadores no acotados

3.12.1. Algo más sobre anuladores

Sean X un Banach, $S \subseteq X$, $T \subseteq X'$. Recordemos de la Definición 3.9 y la Definición 3.10 que

$$S^\circ := \{F \in X' : (\forall\, x \in S)\ F(x) = 0\} \quad \text{y} \quad {}^\circ T := \{x \in X : (\forall\, F \in T)\ F(x) = 0\},$$

los cuales son subespacios cerrados de X' y X, respectivamente (Lema 3.7). Además, se demostró en el Lema 3.11 que

$$^\circ(S^\circ) = \overline{\operatorname{span}(S)}.$$

En particular, si S es subespacio, $^\circ(S^\circ) = \overline{S}$ y, si S es además cerrado, $^\circ(S^\circ) = S$.

Análogamente, cabe preguntarse qué relación existe entre $\overline{\operatorname{span}(T)}$ y $(^\circ T)^\circ$. Al respecto, es fácil ver que $T \subseteq (^\circ T)^\circ$, de donde, dado que $(^\circ T)^\circ$ es ciertamente cerrado, se sigue que $\overline{\operatorname{span}(T)} \subseteq (^\circ T)^\circ$. Ahora **intentaremos** probar la otra inclusión utilizando la misma argumentación de la demostración del Lema 3.9. En efecto, supongamos que existe $\tilde{F} \in (^\circ T)^\circ$ tal que $\tilde{F} \notin \overline{\operatorname{span}(T)}$ e intentemos obtener una contradicción. Por el corolario del Teorema de Hahn–Banach dado por el Teorema 2.8, se deduce que existe $\mathcal{F} \in X'' := (X')'$ (dual del dual o *bidual*) tal que

$$\|\mathcal{F}\| = 1, \qquad \mathcal{F}(\tilde{F}) = \operatorname{dist}(\tilde{F}, \overline{\operatorname{span}(T)}) > 0 \qquad \text{y} \qquad (\forall\, G \in \overline{\operatorname{span}(T)}) \quad \mathcal{F}(G) = 0.$$

Esto último indica que $\mathcal{F} \in (\overline{\operatorname{span}(T)})^\circ$, el cual es un subespacio cerrado de X'', y el hecho que $\mathcal{F}(\tilde{F}) > 0$ indica que $\tilde{F} \notin {}^\circ((\overline{\operatorname{span}(T)})^\circ) = \overline{\operatorname{span}(T)}$, lo que **no** genera una contradicción sin hipótesis adicionales.

Supongamos adicionalmente que X es un espacio de Banach *reflexivo*. Hablaremos más de este concepto en el Capítulo 6, pero por el el momento nos basta con adelantar que esto significa que, para cada funcional $\mathcal{H} \in X''$, existe un único $x \in X$ tal que

$$(\forall\, F \in X') \quad \mathcal{H}(F) = F(x).$$

En particular, asociado a $\mathcal{F}$ existe $\tilde{x} \in X$ tal que, para todo $F \in X'$, $\mathcal{F}(F) = F(\tilde{x})$. Se sigue que para cada G in $\overline{\operatorname{span}(T)}$ se tiene

$$0 = \mathcal{F}(G) = G(\tilde{x}),$$

lo cual nos dice que $\tilde{x} \in {}^{\circ}(\overline{\operatorname{span}(T)}) \overset{\text{¿Por qué?}}{=} {}^{\circ}T$. Dado que $\tilde{F} \in ({}^{\circ}T)^{\circ}$, necesariamente $\tilde{F}(\tilde{x}) = 0$, lo que, por fin, **contradice** que $\tilde{F}(\tilde{x}) = \mathcal{F}(\tilde{F}) > 0$.

Hemos probado así el siguiente lema.

Lema 3.29

Sean X un espacio de Banach reflexivo y $T \subseteq X'$. Entonces, $({}^{\circ}T)^{\circ} = \overline{\operatorname{span}(T)}$.

Demostración: Ver discusión anterior. □

Los siguientes resultados conectan la suma e intersección de subespacios cerrados con sus anuladores.

Lema 3.30

Sean U y V subespacios cerrados de un Banach X. Entonces,

a $U \cap V = {}^\circ(U^\circ + V^\circ)$.

b $U^\circ \cap V^\circ = (U + V)^\circ$.

Demostración: Para la parte a procedemos por doble inclusión. Sean $x \in U \cap V$ y $F \in U^\circ + V^\circ$. Se sigue que existen $F_U \in U^\circ$ y $F_V \in V^\circ$ tales que $F = F_U + F_V$. Luego, dado que $x \in U$ y $x \in V$, $F(x) = F_U(x) + F_V(x) = 0$, de donde $x \in {}^\circ(U^\circ + V^\circ)$. Para la otra inclusión, es claro que $U^\circ \subseteq U^\circ + V^\circ$, de donde ${}^\circ(U^\circ + V^\circ) \subseteq {}^\circ(U^\circ) = U$. Análogamente, ${}^\circ(U^\circ + V^\circ) \subseteq V$ y concluimos que ${}^\circ(U^\circ + V^\circ) \subseteq U \cap V$.

Para la parte b razonamos por doble inclusión también. Sea $F \in U^\circ \cap V^\circ$ y $x \in U + V$. Entonces existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $x = u + v$. Como $F \in U^\circ$ y $F \in V^\circ$, $F(x) = F(u) + F(v) = 0$. Para la otra inclusión, como $U \subseteq U + V$, se tiene que $(U + V)^\circ \subseteq U^\circ$ y, similarmente, $(U + V)^\circ \subseteq V^\circ$, con lo que $(U + V)^\circ \subseteq U^\circ \cap V^\circ$. □

Corolario 3.1

Sean U y V subespacios cerrados de un Banach X. Entonces,

a $\overline{(U^\circ + V^\circ)} \subseteq (U \cap V)^\circ$.

b ${}^\circ(U^\circ \cap V^\circ) = \overline{U + V}$.

Demostración: Aplicando la parte a del Lema 3.30 se tiene

$$(U \cap V)^\circ = \left({}^\circ(U^\circ + V^\circ)\right)^\circ .$$

Como $\overline{T} \subseteq ({}^\circ T)^\circ$ para cada subespacio T de X', se deduce con $T = U^\circ + V^\circ$ que

$$\overline{(U^\circ + V^\circ)} \subseteq \left({}^\circ(U^\circ + V^\circ)\right)^\circ = (U \cap V)^\circ,$$

lo cual prueba la parte a. A su vez, aplicando la parte b del Lema 3.30 se obtiene que

$${}^\circ(U^\circ \cap V^\circ) = {}^\circ((U + V)^\circ) = \overline{U + V},$$

lo cual prueba la parte b. □

El siguiente teorema caracteriza la clausura de la suma de dos subespacios cerrados.

Teorema 3.23

Sean U y V subespacios cerrados de un Banach X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a $U + V$ es cerrado en X.
- b $U^\circ + V^\circ = (U \cap V)^\circ$.
- c $U^\circ + V^\circ$ es cerrado en X'.
- d $U + V = {}^\circ(U^\circ \cap V^\circ)$.

Demostración: Pendiente.

Para probar este teorema, precisaremos de un par de lemas previos.

Lema 3.31

Sea U un subespacio cerrado de un Banach X. Entonces,

$$(\forall\, F \in X') \quad \operatorname{dist}(F, U^\circ) = \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| \,.$$

Demostración: Dados $F \in X'$, $x \in U$, $\|x\| \leq 1$ y $G \in U^\circ$, se tiene

$$|F(x)| = |F(x) - G(x)| \leq \sup_{\substack{z \in X \\ \|z\| \leq 1}} |F(z) - G(z)| = \|F - G\| \,,$$

de donde se sigue que, para todo $x \in U$ con $\|x\| \leq 1$, $|F(x)| \leq \operatorname{dist}(F, U^\circ)$. Por lo tanto,

$$\sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| \leq \operatorname{dist}(F, U^\circ).$$

Por otro lado, dado $F \in X'$, denotamos $F_0 := F\big|_U \in U'$. Por la versión analítica del Teorema de Hahn–Banach existe $\tilde{F} \in X'$ tal que $\tilde{F}\big|_U = F_0$ y $\|\tilde{F}\|_{X'} = \|F_0\|_{U'}$. Se sigue que $(F - \tilde{F}) \in U^\circ$ y por lo tanto

$$\operatorname{dist}(F, U^\circ) \leq \|F - (F - \tilde{F})\| = \|\tilde{F}\| = \|F_0\|_{U'} = \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} |F_0(x)| = \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)|,$$

que es la desigualdad que faltaba. □

Lema 3.32

Sean X un Banach reflexivo y T un subespacio cerrado de X'. Entonces,

$$(\forall\, x \in X) \quad \operatorname{dist}(x, {}^\circ T) = \sup_{\substack{F \in T \\ \|F\| \leq 1}} |F(x)|.$$

Demostración: Dados $x \in X$ y $F \in T$ con $\|F\| \leq 1$, se tiene para cada $z \in {}^\circ T$,

$$|F(x)| = |F(x - z)| \leq \sup_{\substack{G \in X' \\ \|G\| \leq 1}} |G(x - z)| = \|x - z\|,$$

de donde

$$|F(x)| \leq \operatorname{dist}(x, {}^\circ T)$$

y por lo tanto

$$\sup_{\substack{F \in T \\ \|F\| \leq 1}} |F(x)| \leq \operatorname{dist}(x, {}^\circ T).$$

Para la otra desigualdad, es claro que, si $x \in {}^\circ T$,

$$\operatorname{dist}(x, {}^\circ T) = 0 \leq \sup_{\substack{F \in T \\ \|F\| \leq 1}} |F(x)| \,.$$

A su vez, si $x \notin {}^\circ T$, se tiene que $\operatorname{dist}(x, {}^\circ T) > 0$, y luego, aplicando una consecuencia del Teorema de Hahn–Banach (Teorema 2.8), se deduce que existe $\tilde{F} \in X'$ tal que $\|\tilde{F}\| = 1$, $\tilde{F}(x) = \operatorname{dist}(x, {}^\circ T)$ y, para todo $z \in {}^\circ T$, $\tilde{F}(z) = 0$. Esto último significa que $\tilde{F} \in ({}^\circ T)^\circ \overset{\text{L. 3.29}}{=} T$, donde estamos empleando la reflexividad de X. En consecuencia,

$$\operatorname{dist}(x, {}^\circ T) = \tilde{F}(x) \leq \sup_{\substack{F \in T \\ \|F\| \leq 1}} |F(x)| \,.$$

□

Ahora sí podemos proceder con la…

Demostración del Teorema 3.23: $\boxed{\text{a} \Rightarrow \text{b}}$ Supongamos que $U+V$ es cerrado en X. Por el Corolario 3.1,

$$U^\circ + V^\circ \subseteq \overline{(U^\circ + V^\circ)} \subseteq (U \cap V)^\circ.$$

Resta probar que $(U \cap V)^\circ \subseteq U^\circ + V^\circ$. En efecto, sea $F \in (U \cap V)^\circ$; esto es, $F \in X'$ y, para todo $x \in U \cap V$, $F(x) = 0$. Definamos al funcional $\varphi\colon U+V \to \mathbb{R}$ indirectamente mediante

$$(\forall\, x \in U+V) \quad \varphi(x) := F(u), \quad \text{donde } x = u+v \text{ con } u \in U \text{ y } v \in V.$$

A pesar de que la descomposición de los $x \in U+V$ no es necesariamente única, de todas formas φ está bien definido, porque si $x = u+v = \tilde{u}+\tilde{v}$ con $u, \tilde{u} \in U$ y $v, \tilde{v} \in V$, se tendrá que $u - \tilde{u} = \tilde{v} - v \in U \cap V$ y luego $F(u-\tilde{u}) = 0$. Es fácil ver que φ es lineal. Además, por una consecuencia del Teorema de la Aplicación Abierta (Lema 3.20), existe $C > 0$ tal que cada $x \in U+V$ admite una descomposición $x = \hat{u} + \hat{v}$, $\hat{u} \in U$ y $\hat{v} \in V$, que satisface $\|\hat{u}\| \leq C\,\|x\|$, con lo cual

$$(\forall\, x \in U+V) \quad |\varphi(x)| = |F(\hat{u})| \leq \|F\|\,\|\hat{u}\| \leq C\,\|F\|\,\|x\|\,.$$

Hemos probado que $\varphi \in (U+V)'$. Por el Teorema de Hahn–Banach, existe $\tilde{\varphi} \in X'$ tal que $\|\tilde{\varphi}\|_{X'} = \|\varphi\|_{(U+V)'}$ y $\tilde{\varphi}|_{U+V} = \varphi$. Se sigue que F admite la descomposición

$$F = (F - \tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi},$$

donde afirmamos que $F - \tilde{\varphi} \in U^\circ$ y $\tilde{\varphi} \in V^\circ$. En efecto, dado $x \in U$, $x = x + 0$ con $x \in U$ y $0 \in V$, por lo que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = F(x)$. A su vez, dado $x \in V$, $x = 0 + x$ con $0 \in U$ y $x \in V$, por lo que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = F(0) = 0$. Hemos así probado que $F \in U^\circ + V^\circ$ y, en consecuencia, $(U \cap V)^\circ \subseteq U^\circ + V^\circ$.

$\boxed{\text{b} \Rightarrow \text{c}}$ Supongamos que $U^\circ + V^\circ = (U \cap V)^\circ$. Por ser un anulador, es inmediato que $U^\circ + V^\circ$ es cerrado en X'.

$\boxed{\text{c} \Rightarrow \text{a}}$ Supongamos que $U^\circ + V^\circ$ es cerrado en X'. Queremos probar que $U + V$ también es cerrado. Sabemos por otra consecuencia del Teorema de la Aplicación Abierta (Lema 3.21) que existe $C > 0$ tal que

$$(\forall\, F \in X') \quad \operatorname{dist}(F, U^\circ \cap V^\circ) \leq C \left(\operatorname{dist}(F, U^\circ) + \operatorname{dist}(F, V^\circ)\right). \tag{3.34}$$

Luego, utilizando el Lema 3.30 y el Lema 3.31 se tiene que

$$U^\circ \cap V^\circ \overset{\text{L. 3.30}}{=} (U + V)^\circ = \left(\overline{U + V}\right)^\circ$$

y

$$\operatorname{dist}(F, U^\circ \cap V^\circ) = \operatorname{dist}\left(F, \left(\overline{U+V}\right)^\circ\right) \overset{\text{L. 3.31}}{=} \sup_{\substack{x \in \overline{U+V} \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)|\,.$$

De este modo, aplicando nuevamente el Lema 3.31, la desigualdad (3.34) se reescribe como

$$(\forall\, F \in X') \qquad \sup_{\substack{x \in \overline{U+V} \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| \leq C \left(\sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| + \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| \right). \tag{3.35}$$

Veamos a continuación que a partir de (3.35) se deduce que

$$B_{\overline{U+V}}(0, 1/C) \subseteq \overline{B_U(0,1) + B_V(0,1)}. \tag{3.36}$$

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe $x_0 \in \overline{U+V}$ con $\|x_0\| < 1/C$ tal que $x_0 \notin \overline{B_U(0,1) + B_V(0,1)}$. Entonces, aplicando la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn–Banach (Teorema 2.10) a los conjuntos

$$A := \overline{B_U(0,1) + B_V(0,1)} \quad \text{y} \quad B := \{x_0\},$$

se deduce que existen $F_0 \in X' \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left(\forall\, x \in \overline{B_U(0,1) + B_V(0,1)}\right) \quad F_0(x) < \alpha < F_0(x_0),$$

de donde, en particular,

$$(\forall\, x \in B_U(0,1))\ (\forall\, y \in B_V(0,1)) \quad |F_0(x)| + |F_0(y)| < \alpha < F_0(x_0),$$

lo cual implica que

$$\sup_{\substack{x\in U\\ \|x\|\le 1}} |F_0(x)| + \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|\le 1}} |F_0(x)| \le \alpha < F_0(x_0) < \sup_{\substack{x\in\overline{U+V}\\ \|x\|\le 1/C}} |F_0(x)| = \frac{1}{C} \sup_{\substack{x\in\overline{U+V}\\ \|x\|\le 1}} |F_0(x)|,$$

contradiciendo así la desigualdad (3.35). Por lo tanto, necesariamente se satisface la inclusión (3.36). Sean ahora $Y := U \times V$ y $Z := \overline{U+V}$ con la variante $U \times V \ni (u,v) \mapsto \|(u,v)\| := \max(\|u\|, \|v\|) \in \mathbb{R}$ de la norma producto y la norma de X, respectivamente, y definamos la aplicación $T\colon Y \to Z$ por $T(u,v) := u + v$ para todo $(u,v) \in Y$. Es claro que T es lineal, acotado, y de acuerdo a (3.36),

$$B_Z(0,1/C) \subseteq \overline{T(B_Y(0,1))},$$

ya que, ciertamente, $B_U(0,1) + B_V(0,1) \subseteq T(B_Y(0,1))$.

Entonces, aplicando la segunda parte de la demostración del Teorema de la Aplicación Abierta (cf. Lema 3.16), se deduce que

$$B_Z(0, 1/(2C)) \subseteq T(B_Y(0,1)),$$

de donde se sigue fácilmente que T es sobreyectivo. Luego, $Z = T(Y)$; esto es,

$$\overline{U+V} = U + V,$$

y por lo tanto, $U + V$ es cerrado.

$\boxed{\text{d} \Rightarrow \text{a}}$ Obvio.

$\boxed{\text{a} \Rightarrow \text{d}}$ Suponiendo que $U + V$ es cerrado se tiene, aplicando el Lema 3.30, que

$$^\circ(U^\circ \cap V^\circ) = {}^\circ((U+V)^\circ) = U + V.$$

$\square$

3.12.2. El adjunto de operadores no-acotados

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, con $\mathcal{D}(A)$ subespacio vectorial de X, un operador lineal no necesariamente acotado. Recordemos que en tal caso el grafo, el rango y el espacio nulo de A se definen, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(A) &:= \{(x, A(x)) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(A)\}, \\ R(A) &:= \{A(x) \in Y : x \in \mathcal{D}(A)\}, \\ N(A) &:= \{x \in \mathcal{D}(A) : A(x) = 0 \in Y\}. \end{aligned}$$

A su vez, sabemos de la Definición 3.12 que A se dice cerrado si $\mathcal{G}(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$, y que en tal caso se tiene que $N(A)$ es un subespacio cerrado de X (cf. Lema 3.24).
En este punto hacemos notar que en aplicaciones, gran parte de los operadores que no son acotados son cerrados con dominio denso en X.

Definición 3.14

Sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Definimos un *operador adjunto* $A' : \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$ de la siguiente manera: Primero, definimos el subespacio vectorial

$$\mathcal{D}(A') := \{G \in Y' : (\exists\, c \geq 0)\ (\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad |G(A(x))| \leq c\,\|x\|\}.$$

Segundo, dado $G \in \mathcal{D}(A')$, definimos la aplicación auxiliar $g\colon \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) := G(A(x))$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Es claro que g es lineal y $|g(x)| \leq c\,\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ para aquel c asociado a G que sabemos que existe. Finalmente, definimos a $A'(G)\colon X \to \mathbb{R}$ como la extensión por densidad de g a todo X; esto es,

$$(\forall\, x \in X) \quad A'(G)(x) := \lim_{n\to\infty} g(x_n) \quad \text{donde} \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A) \text{ converge a } x.$$

Esta definición indirecta no es ambigua; en efecto, dado $G \in \mathcal{D}(A')$ con constante asociada $c > 0$, dado $x \in X$ y dadas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ ambas convergentes a x,

$$|g(x_n) - g(\tilde{x}_n)| \leq c\,\|x_n - \tilde{x}_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Además, es fácil comprobar que $A'(G)$ es lineal y preserva la cota: $\|A'(G)\|_{X'} \leq c$.

Todavía más, es fácil comprobar que A' es lineal y que se verifica

$$(\forall\, G \in \mathcal{D}(A'))\ (\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad A'(G)(x) = G(A(x)).$$

Es importante observar que $\mathcal{D}(A')$ no es necesariamente denso en Y' aún adoptando la hipótesis adicional de que A sea cerrado (pero con eso basta para probar que $\mathcal{D}(A')$ es denso en Y' con respecto a la topología débil-*). El Teorema 6.14 lo prueba adoptando las hipótesis de que A sea cerrado y que X e Y son reflexivos.

Lo que sí se hereda directo es la calidad de cerrado.

Teorema 3.24

Sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal no acotado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Entonces, $A'\colon \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$ es cerrado.

Demostración: Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A')$ tal que, simultáneamente, $G_n \xrightarrow{n\to\infty} G \in Y'$ y $A'(G_n) \xrightarrow{n\to\infty} F \in X'$. Se sigue que, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$G(A(x)) = \lim_{n\to\infty} G_n(A(x)) = \lim_{n\to\infty} A'(G_n)(x) = F(x).$$

Luego, $G \in \mathcal{D}(A')$ porque $G \circ A$ satisface la cota requerida con $c = \|F\|$ y, además, $A'(G)$, al ser la extensión por densidad de $G \circ A$ a todo X, coincide con F. □

3.12.3. Relaciones entre grafos, rangos y espacios nulos

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal no acotado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Nos proponemos establecer relaciones entre los grafos $\mathcal{G}(A)$ y $\mathcal{G}(A')$, además de las conexiones entre los rangos y espacios nulos de A y A'. En lo que sigue, dados $F \in X'$ y $G \in Y'$, definimos a $(F, G) \in (X \times Y)' \equiv X' \times Y'$ por

$$(\forall\, (x, y) \in X \times Y) \quad (F, G)(x, y) := F(x) + G(y).$$

Lema 3.33

Sea $\mathcal{J}\colon Y' \times X' \to X' \times Y'$ la aplicación definida por $\mathcal{J}(G, F) := (-F, G)$ para todo $(G, F) \in Y' \times X'$. Entonces, $\mathcal{J}(\mathcal{G}(A')) = \mathcal{G}(A)^\circ$.

Demostración: Sea $(G, A'(G)) \in \mathcal{G}(A')$ con $G \in \mathcal{D}(A')$ y consideremos a $\mathcal{J}(G, A'(G)) = (-A'(G), G)$. Entonces, dado $(x, A(x)) \in \mathcal{G}(A)$ con $x \in \mathcal{D}(A)$, se tiene que

$$\mathcal{J}(G, A'(G))(x, A(x)) = -A'(G)(x) + G(A(x)) = 0,$$

lo cual prueba que $\mathcal{J}(G, A'(G)) \in \mathcal{G}(A)^\circ$, y así $\mathcal{J}(\mathcal{G}(A')) \subseteq \mathcal{G}(A)^\circ$.

Recíprocamente, sea $(F, G) \in X' \times Y'$ tal que $(F, G) \in \mathcal{G}(A)^\circ$. Se sigue que, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$0 = (F, G)(x, A(x)) = F(x) + G(A(x));$$

esto es, $A'(G) = -F$, de donde

$$(F, G) = (-A'(G), G) = \mathcal{J}(G, A'(G)) \in \mathcal{J}(\mathcal{G}(A')),$$

y por lo tanto, $\mathcal{G}(A)^\circ \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{G}(A'))$. □

Interesantemente, el lema anterior (Lema 3.33) nos provee de una demostración del hecho que A' es cerrado (Teorema 3.24); en efecto, usando que $\mathcal{J}$ es un isomorfismo lineal y que $\mathcal{G}(A)^\circ$ es automáticamente cerrado, se tiene que $\mathcal{G}(A') = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{G}(A)^\circ)$ es un subespacio cerrado de $Y' \times X'$.

Lema 3.34

Adoptemos para efectos de este lema las abreviaciones

$$U := \mathcal{G}(A) = \{(x, A(x)) : x \in \mathcal{D}(A)\} \quad \text{y} \quad V := X \times \{0_Y\} = \{(x, 0_Y) : x \in X\}.$$

Entonces, se cumplen las siguientes identidades:

a) $N(A) \times \{0_Y\} = U \cap V$.

b) $X \times R(A) = U + V$.

c) $\{0_{X'}\} \times N(A') = U^\circ \cap V^\circ$.

d) $R(A') \times Y' = U^\circ + V^\circ$.

Demostración: a) Dado $(x, y) \in X \times Y$ se tiene claramente que

$$\begin{aligned} (x, y) \in U \cap V &\iff (x, y) \in U \quad \text{y} \quad (x, y) \in V \\ &\iff x \in \mathcal{D}(A), \quad y = A(x) \quad \text{e} \quad y = 0_Y \\ &\iff (x, y) \in N(A) \times \{0_Y\}, \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad requerida.

$\boxed{\text{b}}$ Dado $(x,y) \in U+V$, se tiene que existen $z \in \mathcal{D}(A)$ y $w \in X$ tales que $(x,y) = (z, A(z)) + (w, 0_Y)$; esto es,

$$(x,y) = (z+w, A(z)) \in X \times R(A).$$

Recíprocamente, si $(x,y) \in X \times R(A)$, se tiene que $x \in X$ y que existe $z \in \mathcal{D}(A)$ tal que $y = A(z)$, de lo cual se sigue que

$$(x,y) = (x, A(z)) = (z, A(z)) + (x-z, 0_Y) \in \mathcal{G}(A) + (X \times \{0_Y\}) = U + V.$$

$\boxed{\text{c}}$ Dado $(F,G) \in \{0_{X'}\} \times N(A')$ se tiene que $F = 0_{X'}$ y que $A'(G) = 0_{X'}$. Luego, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ resulta

$$(F,G)(x, A(x)) = F(x) + G(A(x)) = A'(G)(x) = 0,$$

de donde $(F,G) \in U^\circ$. A su vez, es directo ver que $(F,G) \in V^\circ$, por lo que $(F,G) \in U^\circ \cap V^\circ$.

Recíprocamente, sea $(F,G) \in U^\circ \cap V^\circ$. Esto significa que

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad (F,G)(x, A(x)) = 0 \qquad \text{y} \qquad (\forall\, x \in X) \quad (F,G)(x, 0_Y) = 0;$$

esto es, $F(x) + G(A(x)) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y que $F(x) = 0$ para todo $x \in X$. Se sigue que $F = 0_{X'}$ y $A'(G)(x) = 0$, lo cual significa que $(F,G) \in \{0_{X'}\} \times N(A')$.

$\boxed{\text{d}}$ Dado $(F,G) \in R(A') \times Y'$, se tiene que existe $\tilde{G} \in Y'$ tal que $F = A'(\tilde{G})$, y luego

$$(F,G) = (A'(\tilde{G}),G) = (A'(\tilde{G}),-\tilde{G}) + (0_{X'}, G+\tilde{G}) \in U^\circ + V^\circ;$$

en efecto, aplicando el Lema 3.33 se tiene que

$$(A'(\tilde{G}),-\tilde{G}) = -\mathcal{J}(\tilde{G},A'(\tilde{G})) \in \mathcal{G}(A)^\circ = U^\circ$$

y, a su vez, es fácil ver que $(0_{X'}, G+\tilde{G}) \in V^\circ$.
Recíprocamente, sea $(F,G) \in X' \times Y'$ tal que $(F,G) \in U^\circ + V^\circ$; esto es,

$$(F,G) = (F_1,G_1) + (F_2,G_2), \qquad \text{donde} \qquad (F_1,G_1) \in U^\circ \quad \text{y} \quad (F_2,G_2) \in V^\circ.$$

Se sigue que

$$(\forall\, x \in \mathcal{D}(A)) \quad 0 = (F_1,G_2)(x,A(x)) = F_1(x) + G_1(A(x)) = F_1(x) + A'(G_1)(x)$$

y

$$(\forall\, x \in X) \quad 0 = (F_2,G_2)(x,0_Y) = F_2(x),$$

lo que implica que $F_1 = -A'(G_1)$ y $F_2 = 0_{X'}$, y por lo tanto

$$(F,G) = (A'(-G_1),G) \in R(A') \times Y'.$$

$\square$

Habiendo establecido los lemas anteriores, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.25

Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Entonces,

- a $N(A) = {}^{\circ}R(A')$.
- b $N(A') = R(A)^{\circ}$.
- c $N(A)^{\circ} \supseteq \overline{R(A')}$.
- d ${}^{\circ}N(A') = \overline{R(A)}$.

Demostración: Notemos primero que $U := \mathcal{G}(A)$ y $V := X \times \{0_Y\}$ son claramente subespacios cerrados de $X \times Y$, al ser A cerrado y X Banach. En lo que sigue explotamos el hecho de que la operación de tomar el anulador se distribuye respecto a la operación de tomar producto cartesiano de subespacios.

a Aplicando las partes d y a del Lema 3.34 y la parte a del Lema 3.30, se deduce que

$$\begin{aligned} {}^{\circ}R(A') \times \{0_Y\} &= {}^{\circ}R(A') \times {}^{\circ}(Y') \\ &= {}^{\circ}\big(R(A') \times Y'\big) \\ &= {}^{\circ}(U^{\circ} + V^{\circ}) \\ &= U \cap V \\ &= N(A) \times \{0_Y\}, \end{aligned}$$

de donde ${}^{\circ}R(A') = N(A)$.

$\boxed{\text{b}}$ Aplicando ahora las partes b y c del Lema 3.34 y la parte b del Lema 3.30, se sigue que

$$\begin{aligned}\{0_{X'}\} \times R(A)^{\circ} &= X^{\circ} \times R(A)^{\circ} \\ &= (X \times R(A))^{\circ} \\ &= (U + V)^{\circ} \\ &= U^{\circ} \cap V^{\circ} \\ &= \{0_{X'}\} \times N(A').\end{aligned}$$

de donde $R(A)^{\circ} = N(A')$.

$\boxed{\text{c}}$ Como, para todo T subconjunto de un espacio dual, $\overline{\operatorname{span}(T)} \subseteq ({}^{\circ}T)^{\circ}$, empleando la parte a de este teorema, $\overline{R(A')} \subseteq ({}^{\circ}R(A'))^{\circ} = N(A)^{\circ}$.

$\boxed{\text{d}}$ Recordando que, para todo W subconjunto de un espacio normado, ${}^{\circ}(W^{\circ}) = \overline{\operatorname{span}(W)}$ y aplicando la parte b del presente teorema, $\overline{R(A)} = {}^{\circ}(R(A)^{\circ}) = {}^{\circ}N(A')$. $\square$

Observamos aquí que, en virtud del Lema 3.29, si X es reflexivo, entonces la parte c se convierte en una igualdad; esto es, $\overline{R(A')} = N(A)^{\circ}$.

El objetivo siguiente es compementar el análisis de la Sección 3.10 con algunos resultados adicionales sobre operadores con rango cerrado. En particular, el siguiente teorema extiende lo estipulado por el Teorema 3.19 al caso de un operador cerrado y, además, establece la reciprocidad de dicho enunciado.

Teorema 3.26

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. $R(A)$ es cerrado.

b. $R(A')$ es cerrado.

c. $R(A) = {}^{\circ}N(A')$.

d. $R(A') = N(A)^{\circ}$.

Demostración: Notemos primero que $R(A)$ es cerrado en Y si y solo si $X \times R(A)$ es cerrado en $X \times Y$, lo cual, según la parte b del Lema 3.34, es equivalente a que $U + V$ sea cerrado, donde $U = \mathcal{G}(A)$ y $V = X \times \{0_Y\}$.

A su vez, es claro que $R(A')$ es cerrado en X' si y solo si $R(A') \times Y'$ es cerrado en $X' \times Y'$, lo cual, según la parte d del mismo Lema 3.34, es equivalente a que $U^{\circ} + V^{\circ}$ sea cerrado en $X' \times Y'$.

De manera similar, la igualdad $R(A) = {}^{\circ}N(A')$ es cierta si y solo si

$$X \times R(A) = X \times {}^{\circ}N(A') = {}^{\circ}\{0_{X'}\} \times {}^{\circ}N(A') = {}^{\circ}\big(\{0_{X'}\} \times N(A')\big),$$

lo cual, en virtud de las partes b y c del Lema 3.34, es equivalente a que se tenga que $U + V = {}^{\circ}(U^{\circ} \cap V^{\circ})$.

Por último, la identidad $R(A') = N(A)^\circ$ ocurre si y solo si

$$R(A') \times Y' = N(A)^\circ \times Y' = N(A)^\circ \times \{0_Y\}^\circ = (N(A) \times \{0_Y\})^\circ,$$

lo cual, según las partes a y d del tan explotado Lema 3.34, es equivalente a establecer que $U^\circ + V^\circ = (U \cap V)^\circ$.

Queda claro del análisis anterior que la equivalencia entre las afirmaciones de este teorema se sigue directamente del Teorema 3.23. □

Los siguientes teoremas, cuyas demostraciones hacen uso de la caracterización de operadores cerrados con rango cerrado (cf. Teorema 3.17), extienden las equivalencias dadas por el Lema 3.6 al caso de operadores cerrados.

Teorema 3.27

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a A es sobreyectivo; es decir, $R(A) = Y$.
- b Existe $c \geq 0$ tal que, para todo $G \in \mathcal{D}(A')$, $\|G\| \leq c\,\|A'(G)\|$.
- c $N(A') = \{0_{Y'}\}$ y $R(A')$ es cerrado.

Demostración: $\boxed{\text{a} \Rightarrow \text{b}}$ Supongamos que $R(A) = Y$. Se sigue de las partes a y b del Teorema 3.26 que $R(A')$ es cerrado y que $Y = R(A) = {}^\circ N(A')$. Luego, tomando el anulador a derecha resulta $N(A') = \overline{N(A')} \subseteq ({}^\circ N(A'))^\circ = Y^\circ = \{0_{Y'}\}$. Finalmente, aplicamos al operador A' el resultado de caracterización de rango cerrado dado por el Teorema 3.17.

$\boxed{\text{b} \Rightarrow \text{c}}$ Directo de la desigualdad y el resultado de caracterización de rango cerrado dado por el Teorema 3.17 (alternativamente, en este caso inyectivo, por el Teorema 3.15).

$\boxed{\text{c} \Rightarrow \text{a}}$ Supongamos que $N(A') = \{0_{Y'}\}$ y que $R(A')$ es cerrado en X'. Entonces, aplicando la parte c del Teorema 3.26, se tiene claramente que $R(A) = {}^\circ N(A') = {}^\circ\{0_{Y'}\} = Y$. □

La implicación a $\Rightarrow$ b del teorema anterior admite una demostración alternativa mediante el Teorema de Banach–Steinhaus/Acotamiento Uniforme (Teorema 3.11), AQUÍ OMITIDA.

Teorema 3.28

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a A' es sobreyectivo; es decir, $R(A') = X'$.
- b Existe $c \geq 0$ tal que, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, $\|x\| \leq c\,\|A(x)\|$.
- c $N(A) = \{0_X\}$ y $R(A)$ es cerrado.

Demostración: Análoga a la del teorema anterior. □

Es importante notar aquí, según se deduce de la equivalencia entre las partes a y c del Teorema 3.27, o bien, simplemente de la parte b del Teorema 3.25, que la sobreyectividad de A implica la inyectividad de A'. A su vez, de la equivalencia entre a y c del Teorema 3.28, o bien de la parte a del Teorema 3.25, se deduce que la sobreyectividad de A' implica la inyectividad de A. No obstante, es claro también por los mismos Teoremas 3.27 y 3.28, que para tener las implicaciones recíprocas, y por lo tanto la *equivalencia* entre la inyectividad de uno y la sobreyectividad del otro, se necesita que los rangos $R(A)$ y $R(A')$ sean ambos cerrados. De acuerdo a ello, y en virtud del Teorema 3.26, se observa que un caso particular en que ocurre esto es cuando X o Y es de dimensión finita. Encapsulamos lo anterior en el siguiente resultado.

Lema 3.35

Sean X e Y espacios de Banach, al menos uno de ellos de dimensión finita, y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Entonces,

- a A es sobreyectivo si y solo si A' es inyectivo.
- b A' es sobreyectivo si y solo si A es inyectivo.

Demostración: Ver la discusión anterior. □

Finalizamos esta sección con la equivalencia entre el acotamiento de A y el de su adjunto A'.

Teorema 3.29

Sean X e Y espacios de Banach y sea $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a $\mathcal{D}(A) = X$
- b A es acotado.
- c $\mathcal{D}(A') = Y'$.
- d A' es acotado.

En tal caso, se tiene necesariamente que $\|A\| = \|A'\|$.

Demostración: $\boxed{a \Rightarrow b}$ Es consecuencia directa del Teorema del Grafo Cerrado (Teorema 3.5).

$\boxed{b \Rightarrow c}$ Se sigue fácilmente de la Definición 3.14, ya que, al ser A acotado, todos los funcionales $G \in Y'$ verifican la condición de acotamiento que dicha definición exige para los miembros de $\mathcal{D}(A')$.

$\boxed{c \Rightarrow d}$ Por el Teorema 3.24, A' es un operador cerrado y podemos emplear de nuevo el Teorema del Grafo Cerrado (Teorema 3.5).

$\boxed{d \Rightarrow a}$ Supongamos que $A'\colon \mathcal{D}(A') \subseteq Y' \to X'$ es acotado. Probaremos primero que $\mathcal{D}(A')$ es cerrado. En efecto, sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A')$ tal que $G_n \xrightarrow{n\to\infty} G \in Y'$. Gracias al acotamiento de A' se tiene que $\{A'(G_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X', que es completo, y por lo tanto existe $F \in X'$ tal que $A'(G_n) \xrightarrow{n\to\infty} F$. Luego, como A' es cerrado (Teorema 3.24), se deduce que $G \in \mathcal{D}(A')$ y $A'(G) = F$.

Por otro lado, dados los subespacios cerrados de $X \times Y$

$$U := \mathcal{G}(A) \qquad \text{y} \qquad V := \{0_X\} \times Y,$$

es fácil (um...) comprobar que

$$U + V = \mathcal{D}(A) \times Y \qquad \text{y} \qquad U^\circ + V^\circ = X' \times \mathcal{D}(A').$$

Así, como $\mathcal{D}(A')$ es cerrado, se sigue que $U^\circ + V^\circ$ también lo es, y aplicando la parte a del Teorema 3.23, inferimos que $U + V$ también lo es. Así, se sigue que $\mathcal{D}(A)$ es cerrado, con lo cual $X = \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)$.

$\boxed{\|A\| = \|A'\|}$ En este contexto de operadores acotados la identidad requerida fue establecida en el Lema 3.4. □