Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Matriz diagonalizable con valores propios reales

Carlos M. Mora

Resultado general

Considere $A \in \mathbb{R}^{d,d}$. Su polinomio característico es $\mathfrak{p}(\lambda) = |A - \lambda I|$.
Suponga que todas las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathfrak{p}$ son reales y tienen multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente. Además, asuma que para cada $k = 1, \ldots, n$ el sistema

$$A \overrightarrow{v} = \lambda_k \overrightarrow{v}$$

tiene m_k soluciones linealmente independientes $\overrightarrow{v}_{k,1}, \ldots, \overrightarrow{v}_{k,m_k}$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{Z}(t) = A \overrightarrow{Z}(t)$$

es

$$\left\{ e^{\lambda_k t} \overrightarrow{v}_{k,j} : k = 1, \ldots, n \text{ y } j = 1, \ldots, m_k \right\}.$$

Ejemplo: $\frac{d}{dt} \overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t)$

$\mathfrak{p}(\lambda) = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6$ tiene raíces simples, que son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$.
Los vectores propios asociados a λ_k son: $\overrightarrow{v}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v}_{2,1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Entonces $\overrightarrow{Z}(t) = c\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\, e^{5t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $c, k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X'(t) = -3\,Y(t) + X(t) + 3\,Z(t) \\ Y'(t) = 3\,X(t) + 3\,Z(t) - 5\,Y(t) \\ Z'(t) = 6\,X(t) - 6\,Y(t) + 4\,Z(t) \end{cases}$$

con $X(t), Y(t), Z(t) \in \mathbb{R}$

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

Elegimos $\overrightarrow{U}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{U}(t) = A\,\overrightarrow{U}(t)$$

Paso 1: Buscar los autovalores de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}$$

$$\mathfrak{p}(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda + 16 \\ &= -(\lambda+2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

Valores propios:

$\lambda_1 = 4$ con multiplicidad 1

$\lambda_2 = -2$ con multiplicidad 2

Paso 2: Buscar autovectores de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}, \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 4 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 & m_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 4$

$$(A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{v} = 0$$

$$\begin{cases} 2\,v_1 - v_3 = 0 \\ 2\,v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_3/2 \\ v_2 = v_3/2 \end{cases} \rightsquigarrow \overrightarrow{v}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Buscar autovectores de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}, \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 4 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 & m_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_2 = -2$

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

$$v_3 = 0\colon\ \vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 0\colon\ \vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

Solución general

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^{4\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^{-2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.