

EVALUACIÓN 2 - ANÁLISIS NUMÉRICO II (525441) 2019-I

**ATENCIÓN:** Sea claro y ordenado en el desarrollo de la presente evaluación. No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno durante el desarrollo de la misma. 14/08/2019

**Problema 1.**

**15 puntos**

Se desea resolver el sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  es una matriz no singular con elementos diagonales no nulos, y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Para ello se propone el método iterativo definido por

$$\begin{cases} (\mathbf{D} - \mathbf{E})\mathbf{x}^{(k+\frac{1}{2})} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \omega\mathbf{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1 - \omega)\mathbf{x}^{(k)}, \end{cases}$$

donde  $\omega$  es un parámetro real,  $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{E}$  es la parte triangular inferior estricta de  $-\mathbf{A}$  y  $\mathbf{F}$  es la parte triangular superior estricta de  $-\mathbf{A}$ .

a) Re-escribir este método iterativo de la forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\omega,$$

explicitando la matriz de iteración  $\mathbf{B}_\omega$  y el vector  $\mathbf{c}_\omega$ . Identifique el método que resulta cuando  $\omega = 1$ .

b) Para el caso

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

determinar los valores del parámetro  $\omega$  para los cuales el método iterativo descrito es convergente. Determine, si es posible, el valor optimal de dicho parámetro, y esboce una gráfica del radio espectral de la matriz de iteración respecto de  $\omega$ .

**Problema 2.**

**15 puntos**

El algoritmo **QR** con shift para el cálculo de los valores propios de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  define primero  $\mathbf{A}^{(0)} := \mathbf{A}$ , y luego construye la sucesión  $\left\{ \mathbf{A}^{(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  como  $\mathbf{A}^{(k)} := \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k + \mu_k \mathbf{I}$ , donde  $\mu_k := a_{mm}^{(k-1)}$ , y  $\mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{R}_k$  son matrices unitaria y triangular superior, respectivamente, tales que  $\mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k + \mu_k \mathbf{I}$ . Demuestre que cada matriz  $\mathbf{A}^{(k)}$  tiene los mismos valores propios que  $\mathbf{A}$ .

**Problema 3.****15 puntos**

Recordemos el **Algoritmo 1**, del método de Gradiente Conjugado.

---

**Algoritmo 1** Método de Gradiente Conjugado para  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ( $\mathbf{A}$  sim, def. pos.)

---

**Entrada:**  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  dado;  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ ;  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$ ,

```

1: para  $k = 1, 2, 3, \dots$  hacer
2:    $\mathbf{z}_k = \mathbf{A} \mathbf{p}_{k-1}$ 
3:    $\alpha_k = \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{r}_{k-1} / \mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{z}_k$ 
4:    $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_{k-1}$ 
5:    $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{z}_k$ 
6:    $\beta_k = \mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k / \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{r}_{k-1}$ 
7:    $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$ 
8: fin para

```

---

Consideremos el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular, y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Se desea resolver este sistema usando Gradiente Conjugado en el sistema de ecuaciones  $\mathbf{AA}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$ , para luego recuperar la solución  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$  (lo cual se conoce como el método CGNE). Explique por qué basta modificar las siguientes 4 líneas del Algoritmo 1 para obtener la sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  correspondiente, sin necesidad de efectuar una multiplicación matriz-matriz:

línea 2:  $\mathbf{z}_k = \mathbf{A}^T \mathbf{p}_{k-1}$

línea 3:  $\alpha_k = \mathbf{r}_{k-1}^T \mathbf{r}_{k-1} / \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k$

línea 4:  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{z}_k$

línea 5:  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{Az}_k$

**Problema 4.****15 puntos**

Sea  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , y consideremos el esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} - 1 & 1 \\ \alpha & \frac{1}{\alpha} + 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(j)} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} \\ 1 - \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

siendo  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$  dado.

- Suponiendo que el esquema es convergente, determine el límite de la sucesión inducida por éste:  $\{\mathbf{x}^{(j)}\}_{j \geq 0}$ .
- ¿Para qué valores de  $\alpha$  es convergente el esquema iterativo propuesto?
- Si consideramos  $\alpha \in \{0.5, 1.5, 2.5\}$ , ¿para qué valores converge el esquema? ¿con cuál valor de  $\alpha$  converge más rápido?

RBP/rbp