Álgebra 1 (525140)
Listado 6
Problemas sobre *Capítulo 4: Funciones*

Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 6: Funciones reales

Este listado de problemas se ha dividido en cuatro secciones: problemas básicos, problemas intermedios, problemas avanzados y desafíos.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas cuyo nivel de complejidad es superior al esperado en este curso, inténtalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado. Los problemas marcados con **(V)** serán resueltos en videos que publicaremos en Canvas.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Sean A, el conjunto de estudiantes en 525140 el primer semestre 2024 y
   $B = \{$♈, ♉, ♊, ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐, ♒, ♑, ♓$\}$.

   Definamos dos relaciones con estos conjuntos: la relación $\mathcal{R}_a \subseteq A \times B$ formada por

   $$\mathcal{R}_a = \{(x, y) \,:\, y \text{ es símbolo de signo zodiacal de } x\}$$

   y la relación $\mathcal{R}_b \subseteq B \times A$ formada por

   $$\mathcal{R}_b = \{(x, y) \,:\, x \text{ es símbolo de signo zodiacal de } y\}$$

   ¿Es alguna de ellas una relación funcional? Si alguna es funcional, ¿es una función inyectiva?, ¿es una función sobreyectiva?

   Nota que si una es funcional, entonces ella es una función biyectiva si y solo si la otra relación también es funcional.

2. Sea f la siguiente relación binaria $f \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que

   $$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

   Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   (a) f no es funcional porque no hay pares en f con segunda componente igual a 5.
   (b) f es función inyectiva.
   (c) f es función sobreyectiva.
   (d) El conjunto de las pre-imágenes de 5 por f es $\emptyset$.
   (e) $\text{Rec}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que satisface $f(2x) = x^2 + 1$. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $f(1) = 2$.

(b) $f(1) = \frac{5}{4}$.

(c) $\text{Rec}(f) = [1, +\infty[$.

(d) $f^{-1}(5) = \{4\}$.

e) Para cada $y \in [1, +\infty[$ se cumple que $f^{-1}(y) = \left\{2\sqrt{y-1}, -2\sqrt{y-1}\right\}$.

2. Problemas intermedios

1. Considere las siguientes funciones:

   - $g :]0, +\infty[\to]1, +\infty[$, dada por $g(x) = \sqrt{x} + 1$,
   - $h : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$, dada por $h(x) = |x^2 - 1| + x^2$,
   - **(A)** $r :]-1, 1[\to \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, dada por $r(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$.

   (a) Demuestre que son sobreyectivas.

   (b) Analice si son inyectivas. Si lo son, defina su inversa.

2. Considere las siguientes funciones:

   - $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,
   - $g :]-\infty, -3[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x-3}}$.

   (a) Demuestre que son inyectivas.

   (b) Analice si son sobreyectivas. Si lo son, defina su inversa.

3. Considere las siguientes funciones.

   - $f_1 : \mathbb{R} \to]-\infty, 2]$, dada por $f_1(x) = 2 - |x - 3|$.
   - $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_2(x) = |2x - 3| + 5$.
   - $f_3 :]-\infty, -1] \to [2, +\infty[$, con $f_3(x) = |x - 1| + |x + 1|$.
   - $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_4(x) = |x + 1| + x + 2$.

   Además,

   (a) Analice si f_1, f_2 y f_4 son pares y si son impares.

   (b) Determine el recorrido de cada una de ellas. ¿Es alguna de ellas una función sobreyectiva?

   (c) Determine si son inyectivas.

   (d) ¿Cuáles de ellas son biyectivas? De las que lo sean, defina la inversa.

4. Considere las siguientes funciones:

   - **(A)** $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$.
   - $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{1}{|1-x^2|}$,
   - $h : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$- dada por $h(x) = \sqrt{1 - |x|}$.
   - $k : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $k(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.
   - $m : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + |x|}}$.

   De cada una de ellas:

(a) Determine su dominio.
(b) Analice si son inyectivas.
(c) Determine el recorrido de cada una de ellas y decida si son sobreyectivas.

5. Determine si las siguientes funciones son biyectivas.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{si } x \geq 1, \\ -x^3, & \text{si } x < 1. \end{cases}$

   (b) **(A)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0, \\ 1 - |x - 1|, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

   Determine además el conjunto de las pre-imágenes de $-2, -1, 0, 2$ y 4 por f y el conjunto de las pre-imágenes de $-1, 0, \dfrac{1}{2}, 1$ y 2 por g.

3. Problemas avanzados

1. Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Dé, si es posible, un ejemplo de una función $f : A \to B$ que:

   (a) sea inyectiva y sobreyectiva.
   (b) sea inyectiva, pero no sobreyectiva.
   (c) sea sobreyectiva, pero no inyectiva.
   (d) no sea ni inyectiva ni sobreyectiva.

   Cuando considere que no es posible construir la función, justifique por qué.

2. La función $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x)$ es el área del rectángulo con dos vértices en $(x, 0)$ y $(-x, 0)$ y los restantes dos sobre la semicircunferencia con centro en el origen y radio 5. (observe la figura 1).

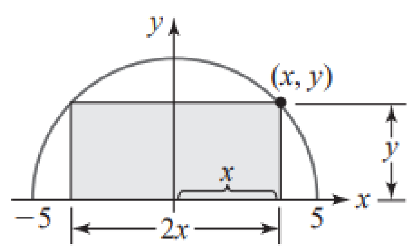

Figura 1: Figura de problema 2

   Encuentre una fórmula matemática para $f(x)$ y, teniendo en cuenta lo que la función representa, responda:

   (a) ¿Qué es $f(3)$?
   (b) ¿Qué significa que $f^{-1}(7) = \left\{\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/2\right\}$?
   (c) ¿Es f una función inyectiva?
   (d) ¿Cuál es el recorrido de f?
   (e) Determine para qué valores de x el área del rectángulo formado es 15?
   (f) ¿Cuál es el área del rectángulo de mayor área? ¿Cuáles son los vértices del rectángulo de mayor área?

3. El auto A, que viaja hacia el Este a una rapidez constante de 40km/h pasa por el punto marcado con O en la figura 2 a las 9 hrs. Una hora después el auto B, que viaja hacia el Norte con una rapidez constante de 60km/h, pasa por el mismo punto O. Encuentre una función $d : [0, 10] \to \mathbb{R}^+$ tal que $d(t)$ sea igual a la distancia a la que se encuentran los autos A y B t horas ($t \in [0, 10]$) después de que el auto B pase por O.

   Teniendo en cuenta lo que representa d,

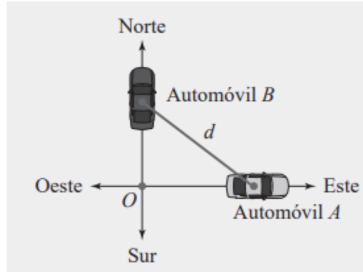

Figura 2: Figura de problema 3

(a) ¿cuál es el conjunto de las pre-imágenes de 20 por d? ¿cuál es el conjunto de las pre-imágenes de 40?

(b) ¿Es d una función inyectiva?

4. Desafíos

1. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la función que $(m, n) \mapsto (m + n, m + 2n)$. Demuestre que f es biyectiva.

2. Considere $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ con $f((m, n)) = \dfrac{m}{|n| + 1}$. Analice si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.

3. ¿Es la función $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $\varphi((m, n)) = 6m - 9n$ una función sobreyectiva? ¿Es φ inyectiva?

4. ¿Es la siguiente función $f : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que $(a, b) \mapsto (-1)^a b$ una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

5. Para cada par de conjuntos A y B, determine cuántas funciones pueden definirse con dominio igual a A y codominio igual a B.

   (a) $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1\}$.   (b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$.   (c) $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$.

   ¿Cuántas de ellas son inyectivas? ¿Cuántas son sobreyectivas?

6. Defina, si es posible, una función biyectiva $f : A \to B$ si

   (a) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) $A = \mathbb{R}$, $B =]0, 1[$.

   Observación: No es necesario que encuentre una expresión algebraica para la función, puede hacer un esbozo de su gráfico.