

Integrales de Lebesgue de funciones dependientes de un parámetro.

- Límite y continuidad respecto del parámetro.
- Derivabilidad respecto del parámetro.
- Sumas de Riemann.
- Integral de Riemann respecto del parámetro.

Límite y continuidad respecto del parámetro.

A lo largo de esta clase, sean (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida,

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$ y $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f(\cdot, t)$ **es medible** $\forall t \in [a, b]$.

Teor.: Sea $t_0 \in [a, b]$. Si (i) $\forall x \in X, \exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) =: h(x)$ y

(ii) $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \forall x \in X,$

entonces, $h \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ y

$$\int h(x) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x).$$

Dem.: Lo demostramos usando la caracterización secuencial del límite.

Sea $\{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t_0$, con $t_n \neq t_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(i) $\implies f(x, t_n) \xrightarrow{n} h(x) \quad \forall x \in X \implies h$ medible.

(ii) $\implies f(\cdot, t_n) \leq g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{T.C.D.}} h \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ y

$$\lim_n \int f(x, t_n) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x).$$

Como esto vale $\forall \{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t_0$, con $t_n \neq t_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x). \quad \blacksquare$$

A lo largo del resto de la clase, dada $f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$,
 sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(t) := \int f(x, t) d\mu(x)$, $t \in [a, b]$.

Corol.: Si (i) $f(x, t)$ es continua respecto de $t \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$
 y (ii) $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$,
 entonces F es continua en $[a, b]$.

Dem.: (ii) $\implies f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b] \implies F$ bien definida.

Sea $t_0 \in [a, b]$ arbitrario. Veamos que F es continua en t_0 .

$\forall x \in X, f(x, \cdot)$ es continua en $t_0 \implies f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$. Entonces,

$$F(t_0) := \int f(x, t_0) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x)$$

$$\stackrel{\text{Teor.}}{=} \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t)$$

$\implies F$ es continua en t_0 . ■

Ej. Calcula $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} dx$.

Ej. Estudia la continuidad de $F(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^t dx, \quad t > 0$.

Derivabilidad respecto del parámetro.

Teor.: Si (i) $\exists t_0 \in [a, b] : f(\cdot, t_0) \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$,

(ii) $f(x, t)$ es derivable respecto de $t \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$ y

(iii) $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$,

entonces, $\forall t \in [a, b]$, se tiene que: • $f(\cdot, t)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$,

• F es derivable y

$$\bullet \frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x) \quad \forall t \in [a, b].$$

Dem.: Dado $t \in [a, b]$, sea $\{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t$, con $t_n \neq t \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\implies \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_n \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \implies \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ es medible

y, por lo tanto, (iii) $\implies \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$.

Por otra parte, **T.V.M.** $\implies \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X, \quad \exists \xi$ entre t y t_0 tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi)$$

$$\implies |f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| g(x)$$

$\stackrel{(i), (iii)}{\implies} f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b] \implies F$ bien definida.

Para ver que F es derivable, consideremos los cocientes incrementales

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x).$$

$$(ii) \implies \exists \lim_n \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t).$$

Otra vez **T.V.M.** $\implies \forall x \in X, \exists \zeta$ entre t_n y t tal que

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \zeta) \right| \stackrel{(iii)}{\leq} g(x).$$

$$\text{Entonces, } \mathbf{T.C.D.} \implies \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) \xrightarrow{n} \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x),$$

de manera que F es derivable y, $\forall t \in [a, b]$,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_n \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x). \quad \blacksquare$$

Ej.

Demuestra que $\frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} dx = - \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0.$

Sumas de Riemann.

En lo que sigue, recordaremos la noción de **sumas de Riemann**, que no hemos introducido en la revisión de la integral de Riemann.

Def.: Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y P una partición de $[a, b]$:
$$P := \{t_0, \dots, t_N\} \text{ con } a = t_0 < \dots < t_N = b.$$

Para $j = 1, \dots, N$, sean $\hat{t}_j \in [t_{j-1}, t_j]$ **arbitrarios**. Entonces

$$S(P, f) := \sum_{j=1}^N f(\hat{t}_j) (t_j - t_{j-1})$$

es una **suma de Riemann** de f en la partición P .

Como $m_j := \inf_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} f(t) \leq f(\hat{t}_j) \leq \sup_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} f(t) =: M_j$, entonces

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f).$$

Por lo tanto, si f es integrable Riemann y $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\lim_n L(P_n, f) = \int_a^b f(t) dt = \lim_n U(P_n, f)$, entonces

$$\lim_n S(P_n, f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Integral de Riemann respecto del parámetro.

Teor.: Si (i) $f(x, t)$ es continua respecto de $t \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$ y
(ii) $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$,

entonces: • F es integrable Riemann,

• $\int_a^b f(\cdot, t) dt \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ y

•
$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \left[\int f(x, t) d\mu(x) \right] dt = \int \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x).$$

Dem.: (i) – (ii) $\xRightarrow{\text{Corol.}}$ F es continua y por lo tanto **integrable Riemann**.

(i) $\implies f$ es integrable Riemann respecto de t . Por lo tanto, sea

$$h(x, t) := \int_a^t f(x, s) ds, \quad t \in [a, b], \quad x \in X.$$

La integral de Riemann es límite de sumas de Riemann:

$$h(x, t) = \lim_n S(P_n^t, f(x, \cdot)), \text{ con } P_n^t := \{t_0, \dots, t_N\} \text{ particiones de } [a, t].$$

A su vez, las sumas de Riemann $S(P_n^t, f(x, \cdot)) = \sum_{j=1}^N f(x, \hat{t}_j) (t_j - t_{j-1})$ son combinaciones lineales de funciones medibles $f(\cdot, \hat{t}_j)$.

Por lo tanto, $h(\cdot, t)$ es medible $\forall t \in [a, b]$.

Por otra parte, $|h(x, t)| = \left| \int_a^t f(x, s) ds \right| \stackrel{(ii)}{\leq} \int_a^t g(x) ds = g(x) (b - a).$

Entonces, $(ii) \implies h(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$

y, en particular, $h(\cdot, b) = \int_a^b f(\cdot, t) dt \in L(X, \mathcal{X}, \mu).$

Sean $t \in [a, b]$ y $x \in X$. $(i) \stackrel{\text{T.F.C.}}{\implies} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = f(x, t)$

$\implies \left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \stackrel{(ii)}{\leq} g(x) \stackrel{(ii)}{\implies} \frac{\partial h}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu).$

Finalmente, sea $H(t) := \int h(x, t) d\mu(x)$. Aplicando el teorema anterior,

$\frac{\partial H}{\partial t}(t) = \int \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t) d\mu(x) =: F(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(t) dt &\stackrel{\text{Barrow}}{=} H(b) - H(a) = \int [h(x, b) - h(x, a)] d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{Barrow}}{=} \int \left[\int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt \right] d\mu(x) = \int \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ej.

Calcula $\int_0^\infty \left[\int_1^4 e^{-x\sqrt{t}} dt \right] dx.$