Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 03: Ideales
Álgebra con Software (527282)

Trabajaremos con A anillo conmutativo y unitario.

1. Considerar
$$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \,:\, m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$
   a) Mostrar: $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
   b) Verificar: en $\mathbb{Z}[i]$, los ideales $(1+i)$ y $(1-i)$ son iguales.
   c) Verificar: en $\mathbb{Z}[i]$, el ideal (5) está contenido en el ideal $(2+i)$.
2. Mostrar: la intersección de ideales es un ideal.
3. Mostrar: la unión de ideales no es necesariamente un ideal.
4. Sean $I, J \leq A$ ideales. Mostrar que las siguientes operaciones definen ideales:
$$I + J = \{x + y \,:\, x \in I, y \in J\}$$
$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i \,:\, a_i \in A, x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}$$
5. Mostrar: $IJ \subseteq I \cap J$.
6. Mostrar: si $I + J = A$, entonces $IJ = I \cap J$. *(Sugerencia: A es unitario. Usar el hecho que $1 \in I + J$.)*
7. Sea I un ideal del anillo A. Mostrar que $1 \in I$ si y sólo si $I = A$.
8. Mostrar: si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de un anillo A, entonces
$$(x_1, \ldots, x_n) = \{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \,:\, a_1, \ldots, a_n \in A\}$$
es un ideal de A.
9. Mostrar: si $x_1, \ldots, x_n$ están en un ideal $I \leq A$, entonces $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq I$.
10. Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ dos listas de elementos de A. Mostrar: para concluir que $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq (y_1, \ldots, y_m)$ basta verificar que cada x_i es combinación A-lineal de los y_j.
11. Sea $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$, el anillo de polinomios racionales en tres variables. Sean $I = (x, y)$, $J = (y, z)$. Verificar:
   a) $I + J = (x, y, z)$
   b) $I \cap J = (xz, y)$
   c) $IJ = (xy, yz, zx, y^2)$

Mini proyecto: ideales polinomiales y sistemas de ecuaciones

Las herramientas del álgebra lineal nos permiten trabajar sistemas de ecuaciones lineales sobre un campo; los ideales en anillos de polinomios nos permitirán trabajar sistemas de ecuaciones polinomiales. Para ilustrar esta idea, se mostrará cómo trabajar ciertos sistemas lineales en el lenguaje de ideales.
Trabajaremos en $A = \mathbb{R}[x, y]$, el anillo de polinomios reales en dos variables.

12. Verificar que el sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - 4x = 1 \end{cases}$$
no tiene soluciones en $\mathbb{R}$. Luego verificar que el ideal $I_1 = (2x - y - 1, 2y - 4x - 1)$ es igual a (1). *(Sugerencia: utilizar el problema 7.)*

13. Verificar que el sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$
tiene la solución única $x = 2$, $y = 3$. Luego verificar que el ideal $I_2 = (2x - y - 1, 2y - x - 4)$ es igual a $(x - 2, y - 3)$. *(Sugerencia: utilizar el problema 10.)*

14. Verificar que el sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - 4x = -2 \end{cases}$$
tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$. Luego verificar que el ideal $I_3 = (2x-y-1, 2y-4x+2)$ es igual a $(2x - y - 1)$. *(Sugerencia: utilizar el problema 10.)*

15. Ordenar los conjuntos solución de los tres sistemas usando inclusión de conjuntos. Luegos ordenar los tres ideales generados por cada sistema usando inclusión de conjuntos. ¿Hay alguna relación entre ambos ordenamientos?

16. Considerar un sistema de ecuaciones polinomiales
$$\begin{cases} p_1(x, y) = 0 \\ p_2(x, y) = 0 \\ \vdots \\ p_k(x, y) = 0 \end{cases}$$
. Mostrar: si el ideal $I = (p_1, \ldots, p_k)$ es igual a (1), entonces el sistema no tiene solución. *(Sugerencia: si el* 1 *es combinación* A*-lineal de los* p_i*, ¿qué ocurre al evaluar dicha combinación en alguna solución?)*

Comentario. El recíproco del problema 16 no es verdadero para coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$., Es verdadero si el campo de coeficientes es *algebraicamente cerrado* (por ejemplo $\mathbb{C}$) pero es un resultado mucho más técnico y profundo: Nullstellensatz de Hilbert (leer primeras dos líneas del tercer párrafo, sobre el **weak Nullstellensatz**).