



Listado 5: Problemas de valores iniciales

Observación: En la última sección de este listado puede encontrar las fórmulas de los esquemas numéricos que se mencionan en el listado.

1. Problemas con papel y lápiz

1. Escoja cuáles de los métodos en la sección 3 son métodos explícitos y con cada uno de ellos: calcule aproximaciones a la solución exacta del problema de valores iniciales siguiente en $a + h$ y $a + 2h$, siendo a el extremo inferior del intervalo de integración y h , el valor dado en cada caso.

(a)

$$y'(x) = 1 + \frac{y(x)}{x}, \quad x \in [1, 6], \quad h = \frac{1}{2}.$$
$$y(1) = 1.$$

(c)

$$y'(t) = \frac{e^t}{y(t)}, \quad t \in [0, 2], \quad h = \frac{1}{4}.$$
$$y(0) = 1.$$

(b)

$$x'(t) = \frac{t}{x(t)}, \quad t \in [0, 5], \quad h = \frac{1}{2}.$$
$$x(0) = 1.$$

(d)

$$x'(t) = t - x(t), \quad t \in [0, 4], \quad h = 1.$$
$$x(0) = 1.$$

Sabiendo que las soluciones exactas de los problemas anteriores son las siguientes, determine el error de aproximación global en el nodo $a + 2h$ para cada método empleado:

(a) $y(x) = x(1 + \ln(x)).$

(c) $y(t) = \sqrt{2e^t - 1}.$

(b) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}.$

(d) $x(t) = 2e^{-t} + t - 1.$

2. Escoja cuáles de los métodos en la sección 3 son métodos implícitos y con cada uno de ellos: calcule aproximaciones a la solución exacta de los problemas de valores iniciales (1a) y (1d) en los nodos $a + h$ y $a + 2h$, donde a es el extremo inferior del intervalo de integración y h es el valor dado en cada caso. Determine en cada caso el error de aproximación global en el nodo $a + 2h$.
3. Demuestre que los métodos 4 y 6 dados en la última sección de este listado, tienen orden de consistencia igual a 2.
4. Escriba el método de Runge-Kutta correspondiente a las siguientes tablas de Butcher.

(a)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

¿Qué propiedad de los métodos anteriores le permite asegurar que son métodos consistentes? ¿Es el orden de consistencia de todos ellos mayor o igual que dos?

5. Escoja uno de los métodos de Runge-Kutta en ítem anterior y resuelva con él el problema 1 de este listado.
6. Escriba la tabla de Butcher correspondiente a los siguientes métodos de Runge-Kutta.

$$(a) \quad y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))).$$

$$(b) \quad y_{j+1} = y_j + \frac{h}{3} (2f(x_j, y_j) + f(x_j + \frac{3}{2}h, y_j + \frac{3}{2}hf(x_j, y_j))).$$

¿Son ambos métodos consistentes?

2. Experimentos computacionales

1. El siguiente modelo para describir la evolución de personas sanas, infectadas y fallecidas en una pandemia fue propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 (Proceedings of the Royal Society of London): si $H(t)$ denota la cantidad de personas sanas t semanas después de comenzar una epidemia, $I(t)$ es la cantidad de infectadas y $D(t)$, la cantidad de fallecidas, ellos proponen la siguiente relación entre ellas

$$H'(t) = -cH(t)I(t), \quad I'(t) = cH(t)I(t) - mI(t), \quad D'(t) = mI(t),$$

donde c y m son constantes que reflejan la rapidez de transmisión y la mortalidad de la enfermedad respectivamente.

- (a) Demuestre que

$$\frac{dH}{dD} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{dD} = -\frac{c}{m}H(t),$$

y que, por tanto, $H(t) = H(D(t)) = H_0 e^{-\frac{c}{m}D(t)}$, siendo H_0 la cantidad inicial de personas sanas.

- (b) Muestre que

$$\frac{d}{dt}(H + I + D) = 0,$$

por tanto, el valor de $(H + I + D)(t)$ es constante, es decir,

$$I(t) = N - H(t) - D(t) = N - H_0 e^{-\frac{c}{m}D(t)} - D(t)$$

si N es la cantidad inicial de personas.

- (c) Escriba la ecuación diferencial para $D(t)$ utilizando los dos resultados demostrados anteriormente.
- (d) Resuelva el problema de valores iniciales para $D(t)$, $t \in [0, 10]$ considerando $N = 3000$, $I(0) = 150$, $D(0) = 0$, $m = 1.8$, $c = 10^{-3}$. Utilice para ello el método de Euler explícito con $h = 0.1$ y con $h = 0.01$.

- (e) ¿Aproximadamente cuántas personas han fallecido 8 semanas después de haber comenzado la epidemia? Escriba las aproximaciones a esta cantidad que obtiene con cada valor de h .
2. La altura y (en metros) de líquido en el acumulador de un sistema de bombeado satisface el modelo

$$y'(t) + 0.002 \left(52.1 y(t) + \frac{10.3}{10.3 + y(t)} \right) - 1.17 (1 + \sin(3t)) = 0.0308, \quad h(0) = 5,$$

siendo t el tiempo, medido en minutos. Resuelva el P.V.I. para $t \in [0, 100]$.

3. En el siguiente modelo

$$x'(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{(x(t))^2}{1 + (x(t))^2}$$

$x(t)$ describe el tamaño de una población en un instante de tiempo t . El modelo supone:

- para poblaciones de tamaño pequeño, el tamaño de la población crece de forma proporcional a la cantidad de habitantes. Para poblaciones de gran tamaño la ausencia de recursos para su sustento ocasiona que el radio de crecimiento de la población disminuya.
- El segundo término en la parte derecha de la ecuación diferencial representa que la población puede disminuir por la acción de un predador.

Las constantes reales r y k representan el radio de crecimiento y la capacidad del medio ambiente de proporcionar recursos para sustentar a la población respectivamente.

- Considere $r = 0.4$, $k = 20$ y $x(0) = 2.44$. ¿Cómo varía el tamaño de la población con el tiempo? ¿A partir de qué valor de t es el tamaño de la población casi constante?
- Repita el experimento con $x(0) = 2.4$. ¿Es el comportamiento de la población similar al del ítem anterior?

4. Sabiendo que la solución exacta del problema de valores iniciales

$$x'(t) = -(1 + t + t^2) - (2t + 1)x(t) - x(t)^2, \quad t \in [0, 3],$$

$$x(0) = -\frac{1}{2}$$

es $x(t) = -t - 1/(e^t + 1)$, diseñe experimentos computacionales para mostrar el orden de convergencia de cada uno de los métodos explícitos listados en sección 3 de este documento.

3. Métodos numéricos para problemas de valores iniciales

1. $y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$.
2. $y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1})$.
3. $y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j))$.
4. $y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))$.
5. $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}))$.
6. $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j)))$.