Ecuaciones Diferenciales MAT 525223

Evaluación de Recuperación (07.07.14[12:15-14:15hrs.])

P1 **(a)** Resolver

$$xdx + (x^2y + 4y)dy = 0, \quad y(4) = 0.$$

(b) Sin resolver, explique por qué el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

no tiene solución para $y_0 < 0$. Resuelva el problema si $y_0 > 0$ y encuentre el intervalo I más grande en el cual está definida la solución. ¿Si $y_0 = 0$, existe solución? ¿es ella única?

Solución

P1-a La ecuación no es exacta, pues, $\frac{\partial}{\partial y}[x] = 0 \neq \frac{\partial}{\partial x}[y(x^2+4)] = 2xy$. Sin embargo existe un factor integrante $\mu(y) = exp\left(\int \frac{2xy-0}{x}dy\right) = ey^2$ tal que

$$xe^{y^2}dx + ye^{y^2}(x^2+4)dy = 0$$

es exacta. Procediendo de la manera usual se tiene que

$$e^{y^2}(x^2+4) = 4$$

define implícitamente la curva solución que pasa por el punto $y(4) = 0$. [0.8 puntos]

P1-b Re-escribimos la ecuación como $y'(x) = f(x,y) = \sqrt{y}$ la cual está definida para $y \geq 0$, en consecuencia si $y_0 < 0$ no esta bien definido el PVI. Por otra parte, $f(x,y)$ y $f_y(x,y)$ están definido sobre el semiplano $\mathcal{P} = \mathbb{R}\times]0,\infty[$,y por todo punto $(x_0, y_o) \in \mathcal{P}$ pasa una única curva solución. Para dichos puntos se obtiene integrando entre $x = x_0$ y $x \in R$ y recordando que $y_0 = y(x_0)$:

$$2\sqrt{y(x)} = x - (x_0 - 2\sqrt{y_0})$$

lo cual tiene sentido si $x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$. Luego

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x - x_0 + 2\sqrt{y_0}\right)^2, \quad x \in I = [x_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty[.$$

[0.7 puntos]

Si $y_0 = 0$ la función nula es solución pero no es única, por ejemplo

$$y_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < k \\ (x-k)^2 & \text{si} \quad x \geq k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, k > x_0.$$

define infinitas soluciones que pasa por (x_0, y_0), ellas se denominan soluciones singulares.

P2 Construir la solución general de las siguientes ecuaciones y clasificar el movimiento de la solución homogénea de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' + 9y = \cos(3x)$ **(b)** $y''' + y'' - 2y = \cos(x)$

Solución

P2-a El polinomio característico es $p(m) = m^2 + 9 = 0$, luego

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_i \text{ constantes arbitrarias}$$

como el termino fuente es $f(x) = \cos(3x)$el sistema presenta el fenómeno de resonancia. Solución particular:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x(A\cos(3x) + B\sin(3x)) \\ y_p'(x) &= (A\cos(3x) + B\sin(3x)) + 3x(-A\sin(3x) + B\cos(3x)) \\ y''(x) &= 6(-A\sin(3x) + B\cos(3x)) - 9y_p(x) \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\cos(3x) = y_p''(x) + 9y_p(x) = -6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) \Longleftrightarrow A = 0 \wedge B = \frac{1}{6}.$$

Luego

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{x}{6}\sin(3x)$$

P2-b El polinomio característico es $p(m) = m^3 + m^2 - 2 = (m-1)(m^2 + 2m + 2) = 0$, luego

$$y_h(x) = c_1 e^x + e^{-x}(c_2\cos(c) + c_3\sin(x)), \quad c_i \text{ constantes arbitrarias.}$$

y se tiene que $\lim_{x\to\infty} y_h(x) \neq 0$. Solución particular:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) \\ y_p''(x) &= -y_p(x) \\ y_p'''(x) &= -y_p'(x) = A\sin(x) - B\cos(x) \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\cos(x) = -y_p'(x) - 3y_p(x) = -(B + 3A)\cos(x) + (A - 3B)\sin(x) \Longleftrightarrow A = -\frac{3}{10} \wedge B = -\frac{1}{10}.$$

Luego la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

donde y_h e y_p son definidas más arriba. [0.8 puntos]

P3 Resolver

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= e^{-t}\cos(x) & x \in \mathbb{R} \quad t > 0. \\ u(x,0) &= \sin(x) & -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Solución

Nota: Problema desarrollado en clases.

Aplicamos el Principio de superposición de soluciones en conjunto con la formula de DÁlambert y el Principio de Duhamel:

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-0{,}5t)+\sin(x+0{,}5t)}{2} + \int_0^t z(x,t-\tau;\tau)d\tau$$

donde

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t;\tau) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t;\tau) &=& 0 & x\in\mathbb{R} \quad t>0,\tau>0. \\ z(x,0;\tau) &=& 0 & -\infty<x<\infty \quad \tau>0 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x,0;\tau) &=& e^{-\tau}\cos(x) & -\infty<x<\infty. \quad \tau>0 \end{array}$$

Aplicando nuevamente la formula de DÁlambert se obtiene:

$$z(x,t;\tau) = \frac{2}{2}\int_{x-0{,}5t}^{x+0{,}5t} e^{-\tau}\cos(s)ds = 2e^{-\tau}\sin(0{,}5t)\cos(x)$$

Luego

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos(0{,}5t)\sin(x) + 2\cos(x)\int_0^t e^{-\tau}\sin(0{,}5t-0{,}5\tau)d\tau \\ &= \cos(0{,}5t)\sin(x) + 4e^{-t}\cos(x)\int_0^{t/2} e^{-2\tau}\sin(\tau)d\tau \end{aligned}$$

[1.5 puntos]

P4 Construir la solución del Problema de Difusión:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &=& \frac{3}{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + e^{\frac{-\pi^2 t}{11}}\sin(\pi x), & 0<x<5, \quad t>0. \\ u(0,t) &=& 0, & t\geq 0. \\ u(5,t) &=& 0, & t\geq 0. \\ u(x,0) &=& x, & 0\leq x\leq 5 \quad . \end{array}$$

Indicar la convergencia de la Serie de Fourier de senos de la temperatura inicial.

Solución

Nota: Problema desarrollado en clases (similar). Ofreceré una redacción detallada.

Aplicamos el principio de Superposición de Soluciones y el Principio de Duhamel.

$$u(x,t) = v(x,t) + \int_0^t z(x,t-\tau;\tau)d\tau$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &=& \frac{3}{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t), \\ v(0,t) &=& 0, \\ v(5,t) &=& 0, \\ v(x,0) &=& x, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{\partial z}{\partial t}(x,t;\tau) &=& \frac{3}{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t:\tau) \\ z(0,t;\tau) &=& 0 \\ z(5,t;\tau) &=& 0, \\ z(x,0;\tau) &=& e^{\frac{-\pi^2\tau}{11}}\sin(\pi x), \tau\geq 0. \end{array}$$

Aplicamos el método de separación de variables. Sean

$$v(x,t) = X(x)T(t) \quad \text{y} \quad z(x,t;\tau) = S(x)T(t;\tau)$$

de las condiciones nulas se tiene $X(0) = X(5) = 0$ y $S(0) = S(5) = 0$. Como ambas funciones satisfacen la ecuación del calor se infiere que debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{cte.} \qquad \frac{T'(t;\tau)}{kT(t;\tau)} = \frac{S''(x)}{S(x)} = cte. = \lambda$$

Luego, $X(x)$ y $S(x)$ son soluciones del PSL:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad 0 < x < 5, \quad Y(0) = Y(5) = 0$$

Así, las familias características son

- $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{5}x), \quad \lambda_n = \left[\frac{n\pi}{5}\right]^2, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$
- $S_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{5}x), \quad \lambda_n = \left[\frac{n\pi}{5}\right]^2, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$

Por otra parte las funciones temporales son soluciones de la EDO primer orden:

$$\frac{dT_n}{dt}(t) - \frac{n^2\pi^2}{k25}T_n(t) = 0 \quad \wedge \quad \frac{dT_n}{dt}(t;\tau) - \frac{n^2\pi^2}{k25}T_n(t;\tau) = 0$$

cuyas soluciones son

$$T_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{k25}t} \quad \wedge \quad T_n(t;\tau) = c_n(\tau)e^{-\frac{n^2\pi^2}{k25}t}$$

Enseguida, el principio de superposición permite escribir:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{k25}t}\right]\sin(\tfrac{n\pi}{5}x) \quad \wedge \quad z(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\tau)e^{-\frac{n^2\pi^2}{k25}t}\right]\sin(\tfrac{n\pi}{5}x)$$

la condición inicial se verifica si:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{5}\int_0^5 x\sin(\tfrac{n\pi}{5}x)dx = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}(-1)^{n+1} = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \\ c_n(\tau) &= \frac{2}{5}\int_0^5 e^{\frac{-\pi^2\tau}{11}}\sin(\pi x)\sin(\tfrac{n\pi}{5}x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 5 \\ e^{\frac{-\pi^2\tau}{11}} & \text{si} \quad n = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego

- $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}e^{-\frac{n^2\pi^2}{k25}t}\right]\sin(\frac{n\pi}{5}x)$
- $z(x,t;\tau) = \left[e^{\frac{-\pi^2\tau}{11}}e^{-\frac{3\pi^2}{11}t}\right]\sin(\pi x)$

Finalmente, la integral de Duhamel resulta ser:

$$\int_0^t z(x,t-\tau;\tau)d\tau = e^{-\frac{3\pi^2}{11}t}\sin(\pi x)\int_0^t e^{\frac{2\pi^2}{11}\tau}d\tau = \frac{11}{2\pi^2}\sin(\pi x)\left(e^{-\frac{\pi^2}{11}t} - e^{-\frac{3\pi^2}{11}t}\right).$$

[1.5 puntos]

FPV/fpv.
08 de Julio de 2014