UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 3. Más ejercicios adicionales.

1. Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ en los siguientes casos:

   (a) $a_n := \sqrt{n\,(n+1)} - n\,, \quad n \in \mathbb{N};$ (b) $a_n := \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

2. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{ \dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \right\};$ (b) $\left\{ \dfrac{n^n}{n!} \right\};$ (c) $\left\{ \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} \right\}.$

3. (a) Demuestra que si $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge.

   (b) Da un ejemplo que muestre que la hipótesis $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ es necesaria.

4. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2-1};$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n}.$

5. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada una de las siguientes series, o bien demuestra que es convergente o bien da un ejemplo que demuestre que no necesariamente lo es:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\ ;$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}\ ;$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}\ .$

6. Determina rigurosamente para qué $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

7. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de números reales convergentes.

   (a) Demuestra que si una de ellas converge absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge absolutamente.

   (b) Da un ejemplo que muestre que si las dos series convergen, pero ninguna de ellos lo hace absolutamente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede no converger.

8. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n^2}-1\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+1}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$.

9. (a) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$.

   (b) En caso que la serie anterior converja, calcula el valor al que converge.

10. (a) Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

    (b) Da un ejemplo de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ no converge.

Además, deben demostrar lo que quedó pendiente en las transparencias y deben hacer los siguientes ejercicios del Capítulo 3 del libro de Rudin: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12 y 16.