UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1
OPTIMIZACION II (525352)

Problema 1. (**0.5 pt.**) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demuestre que el conjunto convexo $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq 0\}$ puede tener a lo más un punto extremo. Muestre un ejemplo de matriz A tal que M no tenga puntos extremales.

Problema 2. (**1.0 pt.**) Sea C un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^n$; C_1 y C_2 conos convexos no vacíos. Demostrar

(a) C es cono convexo $\Longleftrightarrow \lambda C + \mu C \subseteq C$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $\mu \geq 0$.

(b) $C_1 + C_2$ es cono convexo.

(c) $C_1 + C_2 = \mathrm{co}(C_1 \cup C_2)$.

Problema 3. (**0.5 pt.**) Dado un conjunto no vacío A de $\mathbb{R}^n$. Dar un ejemplo de conjunto que muestre (b) no implica (a), donde

(a) $\forall\ v \in L\ \exists\ \varepsilon_0 > 0 :\ a + \varepsilon v \in A\ \forall\ \varepsilon \in\ ]0, \varepsilon_0[$;

(b) $\forall\ v \in L\ \exists\ \varepsilon > 0 :\ a + \varepsilon v \in A$.

Aquí, $\mathrm{aff}\ A = a + L$ con L siendo un subespacio vectorial.

Problema 4. (**1.2 pts.**) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$. Probar que uno y sólo uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:

(I) $Ax = c$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(II) $A^\top y = 0$, $c^\top y = 1$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Problema 5. (**0.8 pt.**) Sean a y b vectores en $\mathbb{R}^n$, α, β números reales, y considere la función:

$$h(x) = \frac{a^\top x + \alpha}{b^\top x + \beta}.$$

Demostrar que las funciones h y $-h$ son pseudoconvexas en el conjunto abierto $K \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : b^\top x + \beta > 0\}$. Cuando esto sucede, se dice que h es pseudolineal.

Problema 6. (1.0 pt.) Sea $f(x) = \left(x_1 - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - 5\right)^2$ (no es necesario demostrar que ésta es función estrictamente convexa) y considere el conjunto poliédrico

$$K = \{(x_1, x_2) : \; -x_1 + x_2 \leq 2,\; 2x_1 + 3x_2 \leq 11,\; x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0\}.$$

Verificar que el punto $\bar{x} = (1, 3)$ es un mínimo de f en K. No escatime en dar detalles.

Problema 7. (1.0 pt.) Sea K un conjunto no vacío, convexo y acotado en $\mathbb{R}^n$, y considere la función de soporte (de apoyo) del conjunto K, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(y) = \sup_{x \in K} y^\top x.$$

Demostrar que:

(a) f es convexa;

(b) si $y \in \mathbb{R}^n$ es tal que $f(y) = y^\top \bar{x}$ para algún $\bar{x} \in K$, entonces $\bar{x} \in \partial f(y)$.

Tiempo: **120 minutos**

Octubre 08 del 2021
FFB/ffb