Cálculo II (527150)

Clase 06: Teorema fundamental del cálculo

La integral definida

Definición

Sean $[a, b]$ un intervalo y f una función definida en este intervalo, como ha sido descrita. El valor al cual convergen todas las sumas de Riemann al aproximar las longitudes de los subintervalos a cero se denomina la *la integral definida de f sobre el intervalo* $[a, b]$, que se denota

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Se define la función

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Esta función es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y su derivada es $G'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental del cálculo, segunda forma

Teorema (Newton-Leibniz)

Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. Sea G una antiderivada de f en ese intervalo. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$$

Ejemplos de integración definida

Ejemplos

Calcular las integrales siguientes.

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}(x) \,\mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x) \,\mathrm{d}x$

(v) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{5}}^0 \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}} \,\mathrm{d}x$

Ejemplo de función definida por tramos

Ejemplos

Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \cos(2x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ xe^x & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

Determinar el valor de

$$\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$