UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la evaluación 1, "Análisis: curso de repaso" (525315), 2022-1

PROBLEMA 1. Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$, sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función de dos variables definida en $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \neq 0, y \neq 0\big\}$ por

$$f(x, y) = xy\, g\left(\frac{x+y}{xy}\right) \quad , \quad (x, y) \in D\,.$$

Muestre que f satisface una ecuación diferencial parcial de la forma

$$x^2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \alpha(x, y) f(x, y)\,,$$

donde $\alpha(x, y)$ no depende de f y g. Halle la función $\alpha(x, y)$.

Solución: Aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= y\, g\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy\, \partial_x \left(\frac{x+y}{xy}\right) g'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ \partial_y f(x, y) &= x\, g\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy\, \partial_y \left(\frac{x+y}{xy}\right) g'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\,. \end{aligned}$$

Calculando las derivadas, se obtiene

$$x^2 \partial_x f(x, y) - y^2 \partial_y f(x, y) = (x^2 y - y^2 x) g\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \alpha(x, y) f(x, y)$$

con $\alpha(x, y) = x - y$ independiente de f y g. [15 puntos]

PROBLEMA 2. Dado $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$, sea $y(x)$ una función de una variable real definida implícitamente por

$$f\big(x, y(x)\big) = 0\,. \tag{1}$$

(a) Suponga que la ecuación (1) tiene una solución $y(x)$ en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}$. Escriba la ecuación de la recta tangente a la curva gráfica de $y(x)$ en el punto x_0 de dos maneras distintas:

(i) en términos de la derivada $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$ de $y(x)$;

(ii) en términos del gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ de f, donde $y_0 = y(x_0)$.

Indicación: en el caso (ii), notar que la curva gráfica de $y(x)$ es una curva de nivel de f.

(b) Deduzca de la pregunta anterior que si $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, luego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} \ . \tag{2}$$

(c) Calcule $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ si y está definido implícitamente por $x^2 + y^3 + \mathrm{e}^y = 0$.

(d) ¿ Es posible obtener la fórmula (2) directamente mediante la regla de la cadena ? Justifique su respuesta; si es afirmativa, dar el detalle del cálculo.

Solución: (a) Sea $\mathcal{C}_y$ la curva gráfica de $y(x)$.

(i) Ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}_y$ en (x_0, y_0): $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. [2 puntos]

(ii) Como $y(x)$ satisface (1), $\mathcal{C}_y$ es una curva de nivel $f(x, y) = c$ de f, con $c = 0$. Sabemos que el gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a la curva de nivel de f pasando por (x_0, y_0). Así, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}_y$ en (x_0, y_0) se obtiene como [3 puntos]

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} , \nabla f(x_0, y_0) \right\rangle = (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0) = 0 \ .$$

(b) Si $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ luego, al comparar las 2 ecuaciones de rectas en (i) y (ii), podemos inferir que $y'(x_0) = -\partial_x f(x_0, y_0)/\partial_y f(x_0, y_0)$. Eso establece la formula (2). [3 puntos]

(c) La ecuación dada tiene la forma (1) con $f(x, y) = x^2 + y^3 + \mathrm{e}^y$. Como $\partial_x f(x, y) = 2x$ y $\partial_y f(x, y) = 3y^2 + \mathrm{e}^y$, deducimos de (2) que [3 puntos]

$$y'(x) = -\frac{2x}{3y^2 + \mathrm{e}^y} \ .$$

(d) Si, se puede derivar (2) directamente usando la regla de la cadena. Sea $g(x) = f(x, y(x))$. Visto que $g(x) = 0$ por (1), al derivar esta identidad con respecto a x obtenemos

$$0 = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \partial_x f(x, y(x)) + \partial_y f(x, y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ ,$$

donde usamos la regla de la cadena en la segunda igualdad. Tomando $x = x_0$ y denotando $y(x_0) = y_0$, deducimos que

$$\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0 \ .$$

La fórmula (2) se obtiene al dividir por $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$. [4 puntos]

PROBLEMA 3. Considere la función

$$f(x,y) = \cos(y)\,\mathrm{e}^{xy} \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

(a) Determine el desarrollo de Taylor de f en el punto $(0, \pi/2)$ hasta el orden 2 incluido.

(b) Determine los extremas y/o punto(s) silla de f.

Solución: (a) Aplicando el resultado visto en clase y calculando las derivadas primeras y segundas de f en $(0, \pi/2)$, hallamos el desarrollo de Taylor de f en este punto hasta el orden 2,

$$f(x,y) = -\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\, x \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + R_2(x,y) \ ,$$

donde el residuo $R_2(x,y)$ es de orden $[x^2 + (y - \pi/2)^2]^{3/2}$. [5 puntos]

(b) Puntos críticos de f:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_x f(x,y) & = & y \cos y\, \mathrm{e}^{xy} = 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & (-\sin y + x \cos y) \mathrm{e}^{xy} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \ \text{ o } \ y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -\sin y + x \cos y = 0 \end{array} \right. .$$

La segunda ecuación del segundo sistema no tiene solución si $y = \pi/2 + k\pi$. Por tanto, f tiene un solo punto crítico en $(x_0, y_0) = (0, 0)$. [5 puntos]

Tenemos

$$D = \left| \begin{array}{cc} \partial_x^2 f(0,0) & \partial_x \partial_y f(0,0) \\ \partial_x \partial_y f(0,0) & \partial_y^2 f(0,0) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -1 \ .$$

Visto que $D < 0$, concluimos por el teorema visto en clase que $(0,0)$ es un punto silla de f. [5 puntos]

PROBLEMA 4. Un trompo de madera de masa $M = 0,25$ [kg] tiene forma de esferoide, descrita por la ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ ,$$

con $a = 5$ [cm] y $c = 4$ [cm]. Se supone que la densidad es constante dentro del trompo delimitado por este esferoide (se desprecia el peso de la punta).
Calcule el momento de inercia del trompo con respeto al eje z.
Indicación: recuerda que el momento de inercia de un sólido Ω con respeto al eje z está definido por $I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, donde ρ es la densidad (en [kg/m^3]).

Solución: Sea Ω el sólido delimitado por el esferoide, el cual modelisa el trompo. Usando coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\varphi, y = r \sin\varphi, z$), tenemos

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, z)\, ;\, -c \leq z \leq c, 0 \leq r \leq a\sqrt{1 - z^2/c^2}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\} .$$

La densidad siendo constante, está dada por $\rho = M/\mathrm{vol}(\Omega)$. Aplicando el teorema de Fubini y usando el Jacobiano $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$, sigue

$$I_z = \frac{M}{\mathrm{vol}(\Omega)} \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2M}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_0^c \left[\int_0^{a\sqrt{1-z^2/c^2}} \left(\int_0^{2\pi} r^3\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}z \ .$$

El factor 2 viene de la simetría de Ω con respecto al plano xy. Calculando las integrales simples, se obtiene

$$I_z = \frac{2M}{\mathrm{vol}(\Omega)} \frac{4\pi a^4 c}{15} \ .$$

Así mismo, el volumen de Ω está dado por

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^c \left[\int_0^{a\sqrt{1-z^2/c^2}} \left(\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3} a^2 c \ .$$

Cabe notar que este volumen coincide con el volumen de la bola de radio a cuando $c = a$. Concluimos que

$$I_z = \frac{8\pi a^4 c M}{15 \times 4\pi a^2 c/3} = \frac{2Ma^2}{5} \ .$$

Con las dimensiones del trompo dadas en el enunciado, el momento de inercia es igual a $I_z = 2,5 \times 10^{-4}$ [kg m^2]. [15 puntos]