UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra II. 525148

13 de junio de 2016
Prof.: Anahí Gajardo

Espacios vectoriales

Definición 1 *Un* grupo conmutativo *es un conjunto G con una operación $+ : G \times G \to G$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $(\forall x, y, z \in G)\ x + (y + z) = (x + y) + z,$ *(asociatividad)*
2. $(\forall x, y \in G)\ x + y = y + x,$ *(conmutatividad)*
3. $(\exists \mathcal{O} \in G)(\forall x \in G)\ \mathcal{O} + x = x,$ *(existencia de neutro para +)*
4. $(\forall x \in G)(\exists y \in G)\ x + y = \mathcal{O}.$ *(existencia de inverso para +)*

Propiedad 1 *En cualquier grupo conmutativo se cumple que en neutro es único, al igual que el inverso. Además, si denotamos por $-x$ al inverso de x, entonces se cumplen:*

1. $-(-x) = x,$
2. $x + z = y + z \Rightarrow x = y.$

Definición 2 *Un* cuerpo *es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ y $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que cumplen las siguientes propiedades:*

1. $(\mathbb{K}, +)$ *es grupo conmutativo,*
2. $\cdot$ *es conmutativa y asociativa en $\mathbb{K}$,*
3. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ *es grupo conmutativo,*
4. $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K})\ \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$ *(distributividad)*

Donde 0 denota el neutro de $(\mathbb{K}, +)$.

Propiedad 2 *En cualquier cuerpo se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $-(\alpha\beta) = (-\alpha)\beta,$
2. $0\alpha = 0,$
3. $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \lor \beta = 0,$
4. *Si $\gamma \neq 0$ y $\alpha\gamma = \beta\gamma$, entonces $\alpha = \beta$.*

Definición 3 *Un* espacio vectorial (e. v.) *sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto V junto con dos operaciones $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ que cumplen las siguientes propiedades:*

1. $(V, +)$ *es un grupo conmutativo,*
2. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall u, v \in V)$

a) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \wedge$

b) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \wedge$

c) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$,

3. $(\forall u \in V)\ 1u = u$.

Donde 1 denota el neutro de $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$. *Los elementos de* V *son llamados* vectores.

A partir de los axiomas de espacio vectorial se pueden demostrar las siguientes propiedades.

Propiedad 3 *En cualquier espacio vectorial* $(V, +, \cdot)$ *se cumple que el neutro aditivo es único, al igual que el inverso aditivo. Si denotamos por 0 al neutro aditivo del cuerpo* $\mathbb{K}$ *y por* Θ *al neutro aditivo de* V*; y denotamos además por* $-u$ *al inverso aditivo de* u*, entonces para cualquier* $u \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se cumple lo siguiente.*

1. $0u = \Theta$
2. $\alpha\Theta = \Theta$
3. $\alpha u = \Theta \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = \Theta$
4. $-(-u) = u$
5. $(-1)u = -u$
6. $(-\alpha)u = -(\alpha u)$
7. *Si* $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha u = \alpha v$*, entonces* $u = v$.
8. *Si* $u \neq \Theta$ *y* $\alpha u = \beta u$*, entonces* $\alpha = \beta$.

Ejemplos conocidos de espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ son:

- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ el conjunto de los vectores de n coordenadas en $\mathbb{K}$.
- $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ el anillo de los polinomios.
- $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ el anillo de las matrices de m por n con la ponderación por escalar.
- $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ el conjunto de las funciones de cualquier conjunto X en $\mathbb{K}$, con la suma usual de funciones y la ponderación por escalar usual.

Definición 4 *Dado* $(V, +, \cdot)$ *un e. v. sobre* $\mathbb{K}$*, se dice que* W *es un* sub espacio vectorial (s. e. v.) *de* V *si* $W \subseteq V$ *y* $(W, +, \cdot)$ *es también un e.v. sobre* $\mathbb{K}$.

La propiedad anterior se puede demostrar más simplemente usando la siguiente caracterización:

Propiedad 4 $(W, +, \cdot)$ *es un s. e. v. de* $(V, +, \cdot)$ *si y sólo si se cumple:*

1. $W \subseteq V$*, el neutro de* V *está en* W,
2. $(\forall\alpha \in \mathbb{K})(\forall u, v \in W)$

   a) $\alpha u \in W$*, y*

   b) $u + v \in W$.

Ejemplos de s. e. v. son las rectas y planos que pasan por el origen, el síngleton $\{\Theta\}$, el conjunto de polinomios pares, el conjunto de matrices antisimétricas, el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, etc. Notamos también que V y $\{\Theta\}$ son s. e. v. de V.

Definición 5 *Dados dos s. e. v. W, U de V, se define su* suma *como sigue.*

$$W + U = \{w + u \mid w \in W \ \wedge \ u \in U\}$$

Propiedad 5 *Dados dos s. e. v. W, U de V, resulta que $W \cap U$ y $W + U$ son también s. e. v. de V.*

Se observa que la unión de s. e. v. no siempre es s. e. v., es más, la única forma que la unión de dos s. e. v. dé como resultado un s.e.v. es cuando uno es subconjunto del otro.

Definición 6 *Dos s. e. v. W, U de V se dicen en* suma directa *si $W \cap U = \{\Theta\}$, en tal caso denotamos $W \oplus U$ en lugar de $W + U$.*

La suma directa es de particular importancia debido a la siguiente propiedad.

Propiedad 6 *Si W y U son dos s. e. v. de V que están en suma directa, entonces se cumple:*

$$(\forall v \in W \oplus U)(\exists! w \in S)(\exists! u \in U) \ v = w + u.$$

Definición 7 *Dado un e. v. $(V, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{K}$, y un conjunto de vectores $\{v_1, .., v_n\}$, decimos que u es una* combinación lineal (c. l.) *de estos vectores si existen escalares $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{v_1, .., v_n\}$, o generado por*, está dado por:*

$$\langle \{v_1, .., v_n\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Dado $\phi \neq S \subseteq V$ cualquiera, se define el conjunto generado por S por:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid n \in \mathbb{N} \wedge \{v_i\} \subseteq S \wedge \{\alpha_1, .., \alpha_n\} \subset \mathbb{K} \right\}.$$

Se conviene que $\langle \phi \rangle = \{\Theta\}$.

Notamos que la noción de espacio generado depende fuertemente del cuerpo considerado. Por ejemplo un conjunto de vectores de $\mathbb{C}^n$ no genera el mismo subespacio si el cuerpo es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Propiedad 7 *Dado cualquier $S \subseteq V$, $\langle S \rangle$ coincide con el s. e. v. más pequeño que contiene a S.*

Propiedad 8 *Dado $S \subseteq V$ cualquiera, se cumple lo siguiente.*

1. $\Theta \in \langle S \rangle$.
2. $S \subseteq \langle S \rangle$.
3. $\langle S \rangle$ *es un s. e. v.*

4. *Si $S \subseteq R$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle R \rangle$.*

5. *Si U es un s. e. v, entonces $\langle U \rangle = U$.*

6. *$\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$.*

7. *Si U, W son s. e. v., entonces $U + W = \langle U \cup W \rangle$.*

Definición 8 *Si $U = \langle \{v_1, .., v_n\} \rangle$, entonces decimos que $\{v_1, .., v_n\}$* genera *a U y que es un* sistema de generadores *para U.*

Definición 9 *Un conjunto finito de vectores $\{v_1, .., v_n\}$ se dice* linealmente independiente (l. i.) *si*

$$(\forall \alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{K}) \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in \{1, .., n\}) \ \alpha_i = \Theta \right].$$

Esta definición es equivalente a decir que Θ se representa de manera única como c. l. de los vectores $\{v_1, .., v_n\}$, la única forma de obtener Θ como c.l. de estos vectores es ponderarlos todos por 0. Pero ¿a quién le importa como se escribe el Θ? lo interesante de esta propiedad es que induce unicidad en la representación de todos los vectores de $\langle \{v_1, .., v_n\} \rangle$, como lo muestra la siguiente propiedad.

Propiedad 9 *Si $\{v_1, .., v_n\}$ es l. i. y $(\alpha_1, .., \alpha_n) \neq (\beta_1, .., \beta_n)$ entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Equivalentemente, se tiene la siguiente propiedad:*

$$(\forall v \in \langle \{v_1, .., v_n\} \rangle)(\exists! \alpha_1, .., \alpha_n) \ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Esto nos permite definir la noción de coordenadas. Cuando $\{v_1, .., v_n\}$ es **l. i.** y **genera un espacio** V, decimos que la *familia ordenada* de vectores $B = \{v_1, .., v_n\}$ es una *base* de V, y para cada vector $v \in V$ definimos sus coordenadas respecto a la base B como el vector $(\alpha_1, .., \alpha_n)$. Lo denotamos:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Notamos que el orden en que aparecen los vectores en la base es importante a la hora de definir las coordenadas. Los mismos vectores ordenados de manera diferente representan bases distintas. La noción de coordenadas nos permite llevar cualquier elemento de un e. v. a un vector de $\mathbb{K}^n$ y viceversa, de manera que éste último lo representa completamente.

Definición 10 *Una* base *de U es una* familia ordenada *de vectores $\{u_1, .., u_n\}$ que cumple que*

- *$\{u_1, .., u_n\}$ genera a U, y*
- *$\{u_1, .., u_n\}$ es l. i.*

Propiedad 10 *Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de V, y $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ tiene $m > n$ elementos, entonces $\{v_1, ..., v_m\}$ es l. d.*

Resulta que el tamaño de la base es una propiedad del s. e. v., es decir, dos bases de un s. e. v. han de tener siempre el mismo tamaño.

Teorema 1 *Si $\{u_1, .., u_n\}$ y $\{w_1, .., w_k\}$ son dos bases de U, entonces $n = k$.*

El tamaño de sus bases caracteriza a un e. v. sobre un determinado cuerpo $\mathbb{K}$. Por lo tanto podemos darle nombre a este atributo.

Definición 11 *Si un s. e. v. U tiene una base $\{u_1, .., u_n\}$, decimos que U tiene* dimensión *n, y escribimos* $\dim(U) = n$.

No todos los s. e. v. tienen una base "finita". Nuevamente llamamos la atención sobre el hecho que la dimensión de un s. e. v. depende del cuerpo sobre el cual está definido ¿Qué dimensión tiene $\mathbb{R}^2$ visto como e. v. sobre $\mathbb{Q}$?

Notar que $\{\Theta\}$ no es un conjunto l. i., pero ϕ sí lo es, así $\dim(\{\Theta\}) = 0$.

Los dos teoremas siguientes nos indican cómo encontrar una base.

Lema 1 *Un conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ es l. d. si y solo si existe un elemento v_j que es c. l. de los demás.*

Lema 2 *Si $u_0 \in \langle\{u_1, ..., u_n\}\rangle$ entonces $\langle\{u_0, u_1, ..., u_n\}\rangle = \langle\{u_1, ..., u_n\}\rangle$*

Teorema 2 *Si $\{u_1, .., u_n\}$ genera a U, entonces $\{u_1, .., u_n\}$ contiene una base de U.*

Teorema 3 *Si $\{u_1, .., u_n\} \subseteq U$ es l.i. y U tiene dimensión finita, entonces hay una base de U que contiene a $\{u_1, .., u_n\}$.*

Propiedad 11 *Dado un e.v. V de dimensión finita, se cumple lo siguiente.*

- *Todo conjunto l. i. de V con* $\dim(V)$ *elementos, es base de V.*
- *El conjunto l. i. más grande de V, tiene* $\dim(V)$ *elementos.*
- *Todo conjunto generador de V con* $\dim(V)$ *elementos es base de V.*
- *El conjunto generador de V más pequeño tiene* $\dim(V)$ *elementos.*
- *Si U es s. e. v. de V, entonces* $\dim(U) \leq \dim(V)$.
- *Si U es s. e. v. de V y* $\dim(U) = \dim(V)$, *entonces $U = V$.*

Teorema 4 *Dados dos s.e.v. U, W de dimensión finita, se cumple:*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Observamos que si U y W están en suma directa, entonces

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$