Ayudantía.

Problema 1: Sea V un $\mathbb{K}$ e.v. de dimensión finita y $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = Id$.

Probar que

a) T es automorfismo.
b) $V = Ker(T + Id) \oplus Ker(T - Id)$.

Dem a).

Veamos que T es inyectiva.

Sea $v \in Ker(T) \iff T(v) = \theta$

$$\overset{\text{AP. } T}{\Longrightarrow} T(T(v)) = T(\theta)$$

$$\iff T^2(v) = \theta$$

$$\overset{T^2 = Id}{\Longrightarrow} v = \theta.$$

Luego, $Ker(T) = \{\theta\}$.

Más aún, por Teorema de las dimensiones

$$dim(V) = \cancel{dim(Ker(T))}^{0} + dim(Im(T))$$

Así, como $Im(T)$ es s.e.v de V, se tiene que $Im(T) = V$, es decir, es sobreyectiva.

Problema 2: Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ tal que $\forall x \in \mathbb{K}^n : T(x) = A$

b) Pruebe que, si B es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, $[T]_{BB} = A$.

Dem:

Denotemos $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Notemos que $T(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} = A_{1i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A_{2i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + A_{ni}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Con lo que:

$A_{\cdot i}$: Columna i de A.
$A_{i\cdot}$: fila i de A.

$$[T(e_i)]_B = \cancel{\begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix} = A_{\cdot i}$$

Luego, $[T]_{BB} = \left[A_{\cdot 1} \middle| A_{\cdot 2} \middle| \dots \middle| \dots A_{\cdot n} \right] = A$

c) Muestre que, si $[T]_{BB} = A$, No necesariamente B es base canónica.

Dem: Si $A = I_n$.

$\forall x \in \mathbb{K}^n$, $T(x) = I_n X = X$

$$[T]_{BB} = \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \middle| \dots \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right] = I_n = A.$$

Problema 3: Sea $P_{n,c}(\mathbb{R}) = \{ e^{cx} p(x) : p \in P_n(\mathbb{R}) \}$.

Sea $\varphi : P_{n,c}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n,c}(\mathbb{R})$ lineal, $u \longmapsto \varphi(u) = \frac{du}{dx}$.

a) $\mathcal{B} = \{ e^{cx}, e^{cx}x, \dots, e^{cx}x^{n-1}, e^{cx}x^n \}$ es base de $P_{n,c}(\mathbb{R})$.

Dem: Sean $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_0 e^{cx} + \alpha_1 e^{cx} x + \cdots + \alpha_n e^{cx} x^n = \theta(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow e^{cx}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow e^{cx}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) \in P_{n,c}(\mathbb{R}).$$

En tal caso, la igualdad anterior se mantiene cuando

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots \alpha_n = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es L.i.

Además, dado $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n(\mathbb{R})$. Luego,

$$e^{cx} P(x) = a_0 e^{cx} \cdot 1 + a_1 e^{cx} \cdot x + \cdots + a_n e^{cx} x^n$$

$$\therefore e^{cx} P(x) \in \langle \mathcal{B} \rangle.$$

b) calcular $[\varphi - bI]_{BB}$.

Notemos que
$$(\varphi - bI)(e^{cx}) = \varphi(e^{cx}) - b\,e^{cx} = ce^{cx} - b\,e^{cx} = e^{cx}(c-b).$$

Además, para $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$(\varphi - bI)(e^{cx}x^i) = ce^{cx}x^i + e^{cx}\,i\,x^{i-1} - b\,e^{cx}x^i$$
$$= (c-b)\,e^{cx}x^i + i\,e^{cx}x^{i-1}.$$

$$[(\varphi - bI)(e^{cx}x^i)]_B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \\ c-b \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \to i-2. \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Por lo tanto:

$$[\varphi - bI]_{BB} = \begin{bmatrix} c-b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & 2 & & \\ 0 & 0 & c-b & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & & c-b \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Encuentre $\sigma(\varphi)$ (es decir, los valores propios de φ).

Sea $u \in P_{n,c}(\mathbb{R})$ tal que.

$$\varphi(u) = \lambda u \quad , u \neq \theta$$
$$\Leftrightarrow \quad u' = \lambda u.$$

Sea $u = e^{cx}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \in P_{n,c}(\mathbb{R})$, $u \neq \theta$

Es decir, $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$.

$$\begin{aligned} u &= \varphi_u \\ &= c e^{cx}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + e^{cx}(a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}) \\ &= \lambda e^{cx}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{cx}(ca_0 + 1 + (ca_1 + 2a_2)x + (ca_2 + 3a_3)x^2 + \dots + (ca_{n-1} + n a_n)x^{n-1} + ca_n x^n)$$

$$= \lambda e^{cx}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ca_0 + 1 = \lambda a_0 \\ \\ \\ \end{cases}$$