Operadores adjuntos, unitarios y normales.

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

July 13, 2021

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ y $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno. Se define la aplicación adjunta de $T \in \mathcal{L}(V, W)$ como la transformación / aplicación $T^* : W \to V$, tal que

$$\forall\,(u, z) \in V \times W \,:\, \langle T(u), z\rangle_W = \langle u, T^*(z)\rangle_V\,.$$

Ejemplo: Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ definido por $\mathbb{C}^3 \ni z := (z_1, z_2, z_3) \mapsto T(z_1, z_2, z_3) := (z_2 - 4\,i\,z_3, (1+i)\,z_1)$. Determinar T^*.
Sea $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, fijo pero arbitrario. Considerando el producto interno usual en $\mathbb{C}^3$ y en $\mathbb{C}^2$, y para $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ cualquiera, resulta

$$\begin{aligned}
\langle T(z_1, z_2, z_3), (u, v)\rangle_{\mathbb{C}^2} &= \langle (z_2 - 4\,i\,z_3, (1+i)\,z_1), (u, v)\rangle_{\mathbb{C}^2} \\
&= (z_2 - 4\,i\,z_3)\,\overline{u} + (1+i)\,z_1\,\overline{v} \\
&= \langle (z_1, z_2, z_3), \underbrace{((1-i)\,v, u, 4\,i\,u)}_{=T^*(u,v)}\rangle_{\mathbb{C}^3}\,.
\end{aligned}$$

De esta manera, se deduce que $T^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ viene dada, para cualquier $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, por $T^*(u, v) := ((1-i)\,v, u, 4\,i\,u)$.

Teorema: Sean V, W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y existe T^*, entonces $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

Proof: Es dejado de ejercicio al lector.

Ejemplos en dimensión infinita

1. Sea $V := \mathcal{C}^\infty([0,1])$, provisto del producto interno usual, sobre el cual se define la aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ definido por $V \ni f \mapsto T(f) := f'$. Entonces, si consideramos $g \in V$, tenemos (integrando por partes)

$$\begin{aligned}\langle T(f), g\rangle &= \int_0^1 f'(t)\, g(t)\, dt = \big[f(t)g(t)\big]_0^1 - \int_0^1 f(t)\, g'(t)\, dt \\ &= \big[f(t)g(t)\big]_0^1 + \langle f, (-g')\rangle = \big(f(1)g(1) - f(0)g(0)\big) + \langle f, (-g')\rangle .\end{aligned}$$

   Se observa que a menos que podamos eliminar el primer término de la derecha, no podremos definir T^*, i.e. $\nexists\, T^*$.

2. En cambio, si consideramos $W := \{p \in V \mid p(0) = p(1) = 0\}$, el cual se prueba es subespacio vectorial de V, y $L \in \mathcal{L}(W, V)$ definido por $W \ni f \mapsto L(f) := f'$. Luego, fijando $f \in W$, y procediendo como antes se deduce, para cualquier $g \in V$:

$$\begin{aligned}\langle L(f), g\rangle &= \int_0^1 f'(t)\, g(t)\, dt = \big[f(t)g(t)\big]_0^1 - \int_0^1 f(t)\, g'(t)\, dt \\ &= \big(f(1)g(1) - f(0)g(0)\big) + \langle f, (-g')\rangle = \langle f, (-g')\rangle .\end{aligned}$$

   Esto implica que $\exists\, L^* \in \mathcal{L}(V, W)$, dado por $W \ni g \mapsto L^*(g) := -g'$.

El siguiente resultado asegura la existencia y unicidad de T^* cuando los espacios vectoriales con producto interno involucrados son de DIMENSIÓN FINITA.

Teorema: Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ y $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno de DIMENSIÓN FINITA cada una, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces existe una única $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $\forall\, (u, z) \in V \times W\,:\, \langle T(u), z\rangle_W \,=\, \langle u, T^*(w)\rangle_V$.

Demostración:

UNICIDAD: Supongamos que $T^*, S^* \in \mathcal{L}(W, V)$ son aplicaciones adjuntas de T. Sea $z \in W$ fija pero arbitraria. Luego, para cualquier $u \in V$ se tiene

$$\langle T(u), z\rangle_W \,=\, \langle u, T^*(z)\rangle_V \,=\, \langle u, S^*(z)\rangle_V$$

$$\Rightarrow \forall\, u \in V\,:\, \langle u, T^*(z) - S^*(z)\rangle_V \,=\, 0 \,\Rightarrow\, T^*(z) - S^*(z) \in V^\perp \,=\, \{\theta_V\}\,.$$

De esta manera, se deduce que $\forall\, z \in W\,:\, T^*(z) \,=\, S^*(z)$, i.e. $T^* \,=\, S^*$.

EXISTENCIA: Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, y consideremos $z \,\in\, W$, fija pero arbitraria. Definimos ahora $F_z\,:\, V \,\to\, \mathbb{K}$ tal que $\forall\, u \,\in\, V\,:\, F_z(u) \,:=\, \langle T(u), z\rangle_W$.

AFIRMACIÓN 1: $F_z \,\in\, V'$. La prueba es dejada de ejercicio al lector.

IMPLICACIÓN: En vista que V es de DIMENSIÓN FINITA, invocando el TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ, $\exists!\, x \,\in\, V\,:\, \forall\, u \,\in\, V\,:\, F_z(u) \,=\, \langle u, x\rangle_V$.

Esto permite definir la aplicación $L\,:\, W \,\to\, V$ por $W \,\ni\, z \,\mapsto\, L(z) \,:=\, x$, siendo $x \,\in\, V$ el único REPRESENTANTE DE RIESZ DEL FUNCIONAL LINEAL F_z.

AFIRMACIÓN 2: $L \,\in\, \mathcal{L}(W, V)$. La prueba es dejada de ejercicio al lector.

AFIRMACIÓN 3: $L \,=\, T^*$, i.e. $\forall\, (u, z) \in V \times W\,:\, \langle T(u), z\rangle_W \,=\, \langle u, L(z)\rangle_V$.
La prueba es dejada de ejercicio al lector.

A partir de la matriz de $T \in \mathcal{L}(V, W)$ respecto a bases ortonormales B y C de V y W respectivamente, puede obtenerse fácilmente la matriz de su adjunta en las bases C y B correspondientes.

Proposición: Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ y $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita cada una, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Consideremos B y C bases ortonormales de V y W respectivamente. Entonces $[T^*]_C^B = \left([T]_B^C\right)^*$.

Demostración: Sea $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormal de V, y $C := \{w_k\}_{k=1}^m$ una base ortonormal de W. Entonces, para cada $(j, k) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$, se tiene

$$\left([T^*]_C^B\right)_{jk} = \langle T^*(w_k), v_j\rangle_V = \overline{\langle v_j, T^*(w_k)\rangle_V} = \overline{\langle T(v_j), w_k\rangle_W} = \overline{([T]_B^C)_{kj}} = \left(\left([T]_B^C\right)^*\right)_{jk}.$$

Ejemplo: Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la aplicación lineal definida por

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : T(x, y, z) := (x + iy - iz, (2+i)x + iy + z, (1+i)y + 2x).$$

Determinar T^*, considerando el producto interno usual de $\mathbb{C}^3$. Considere $\mathbb{K} := \mathbb{C}$
Considerando la base canónica B de $\mathbb{C}^3$, se deduce

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 2+i & i & 1 \\ 0 & 1+i & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T^*]_B^B := \left([T]_B^B\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ -i & -i & 1-i \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

de donde se desprende que (¡Hacerlo!)
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : T^*(x, y, z) := (x + (2-i)y, -ix - iy + (1-i)z, ix + y + 2z).$

Propiedades de la Aplicación Adjunta

Sean U, V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita. Entonces

a) $\forall\, S, T \in \mathcal{L}(V, W) : (S + T)^* = S^* + T^*$.

b) $\forall\, T \in \mathcal{L}(V, W) : \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda\, T)^* = \overline{\lambda}\, T^*$.

c) $\forall\, T \in \mathcal{L}(V, W) : (T^*)^* = T$.

d) Sea $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la aplicación identidad. Se cumple : $\tilde{I}^* = \tilde{I}$.

e) $\forall\, T \in \mathcal{L}(V, W) : \forall\, S \in \mathcal{L}(W, U) : (S\,T)^* = T^*\,S^*$.

Observación 1: La definición y propiedades de Aplicación Adjunta también son válidas para Endomorfismos.

Ejemplo: Consideremos el espacio complejo $\mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Se define el endomorfismo $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ para cualquier $z := (x, y) \in \mathbb{C}^2$, por $T(x, y) := (x + iy, 2x - (1 + i)y)$. Identificar T^*.

Sea $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle (x, y), T^*(u, v) \rangle &= \langle T(x, y), (u, v) \rangle \\
&= \langle (x + iy, 2x - (1 + i)y), (u, v) \rangle = (x + iy)\overline{u} + (2x - (1 + i)y)\overline{v} \\
&= x(\overline{u} + 2\overline{v}) + y(i\,\overline{u} - (1 + i)\overline{v}) = x\overline{(u + 2v)} + y\,\overline{(-i\,u + (-1 + i)v)} \\
&= \langle (x, y), (u + 2\,v, -\,i\,u + (-1 + i)\,v) \rangle .
\end{aligned}$$

De esta manera, se deduce que $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ viene dada, para cualquier $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, por $T^*(u, v) := (u + 2\,v, -\,i\,u + (-1 + i)\,v)$.

Teorema: Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ y $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita cada una. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces

1. $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$,
2. $\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{Ker}(T^*))^\perp$,
3. $\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^\perp$,
4. $\mathrm{Im}(T^*) = (\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

PROOF:

1. Sea $z \in W$. Entonces

$$z \in \mathrm{Ker}(T^*) \Leftrightarrow T^*(z) = \theta_V \Leftrightarrow \forall\, u \in V : \langle u, T^*(z)\rangle_V = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall\, u \in V : \langle T(u), z\rangle_W = 0 \Leftrightarrow z \in (\mathrm{Im}(T))^\perp .$$

De esta forma, se concluye que $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$.

2. De lo establecido previamente y sabiendo que estamos en dimensión finita, se tiene

$$\mathrm{Im}(T) = \left((\mathrm{Im}(T))^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Ker}(T^*))^\perp .$$

3. Sabiendo que $(T^*)^* = T$ y tomando en cuenta la primera identidad, resulta

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}((T^*)^*) = (\mathrm{Im}(T^*))^\perp .$$

4. Por un argumento ya aplicado antes, tenemos

$$\mathrm{Im}(T^*) = \left((\mathrm{Im}(T^*))^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Ker}(T))^\perp .$$

REMARK: En dimensión infinita: $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$ y $\mathrm{Im}(T^*) \subseteq (\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

Definición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $T^* \in \mathcal{L}(V)$ su adjunta. Se dice que

1. T es autoadjunta si $T^* = T$,
2. T es unitaria si $T^* \circ T = T \circ T^* = \tilde{I}$, i.e. T es isomorfismo y $T^{-1} = T^*$,
3. T es normal si $T^* \circ T = T \circ T^*$,
4. T es positiva ($T \geq 0$) si T es autoadjunta y $\forall\, u \in V : \langle T(u), u\rangle \geq 0$. Si T es positiva e isomorfismo, se dice que es estrictamente positiva, y se denota por $T > 0$.

Observaciones:

1. Si T es autoadjunta, unitaria o positiva, entonces T es también normal.
2. T es autoadjunta si y sólo si $\forall\, u \in V : \langle T(u), u\rangle \in \mathbb{R}$.

Propiedades de aplicaciones unitarias. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $T^* \in \mathcal{L}(V)$ su adjunta. Entonces son equivalentes:

1. T es unitaria,
2. T^* es unitaria,
3. $\forall\, u, w \in V : \langle T(u), T(w)\rangle = \langle u, w\rangle$,
4. $\forall\, u \in V : \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle$,
5. Si además V es de dimensión finita, entonces existe una base B ortonormal de V, tal que $[T]_B^B$ es una matriz unitaria.
6. Si además V es de dimensión finita, entonces existe una base $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ ortonormal de V, tal que $\{T(v_j)\}_{j=1}^n$ es también una base ortonormal de V.

Consecuencia de 4): Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$ unitaria. Entonces $\forall\, u \in V : ||T(u)|| = ||u||$, i.e. T es una ISOMETRÍA.

Propiedades de aplicaciones normales. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $T^* \in \mathcal{L}(V)$ su adjunta.. Entonces son equivalentes:

1. T es normal,
2. T^* es normal,
3. $\forall\, u \in V \,:\, ||T(u)|| = ||T^*(u)||$,
4. $\forall\, u, w \in V \,:\, \langle T(u), T(w)\rangle = \langle T^*(u), T^*(w)\rangle$.

Demostración: 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4)

Otras propiedades de aplicaciones normales. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Entonces:

1. $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)$.
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, T - \alpha\tilde{I}$ es normal.
3. Si (λ, u) es un autopar de T, entonces $(\overline{\lambda}, u)$ es un autopar de T^*.
4. Su $u, w \in V$ son vectores propios de T asociados a valores propios distintos, entonces $\langle u, w\rangle = 0$.
   Si además V es finito dimensional:
5. $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Im}(T)$.
6. $\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$.
7. $\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \mathrm{Ker}(T^k) = \mathrm{Ker}(T) \wedge \mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T)$.
8. Si U es subespacio de V, T-invariante, entonces $U^{\perp}$ es también T-invariante.

Propiedades espectrales de aplicaciones unitarias y autoadjuntas. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$, con $T^* \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. Si T es autoadjunta, entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$,
2. Si T es unitaria, entonces $\forall\, \lambda \in \sigma(T) \,:\, |\lambda| = 1$.

Observación: Si (λ, u) es un autopar de $T \in \mathcal{L}(V)$, con $||u|| = 1$, se tiene:

1. Si $T^* = T$, entonces $\lambda = \langle T(u), u\rangle = \langle u, T^*(u)\rangle = \langle u, T(u)\rangle = \overline{\lambda}$, y así $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
2. Si T es unitaria, entonces $|\lambda|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, (T^*T)(u)\rangle = \langle u, u\rangle = 1$, lo que implica $\forall\, \lambda \in \sigma(T) \,:\, |\lambda| = 1$.
3. Si T es positiva, entonces $\lambda = \langle T(u), u\rangle \geq 0$, de donde se infiere que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Si además, T es isomorfismo, entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Ejemplos:

1. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Si U es un subespacio de V, entonces la aplicación lineal proyección ortogonal sobre U, Proj_U, es una aplicación positiva.
2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ definida por $\mathbb{K}^3 \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto T(z_1, z_2, z_3) := (0, z_2, 0)$. Se prueba que T es positiva.

Relaciones matriciales con endomorfismos autoadjuntos, normales, unitarios, positivos.

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de Dimensión Finita, y consideremos B una base ortonormal de V. Sea también $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces puede probarse que:

1. T es autoadjunta si y sólo si $[T]_B^B$ es hermitiana (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), o bien simétrica (caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
2. T es normal si y sólo si $[T^*]_B^B [T]_B^B = [T]_B^B [T^*]_B^B$.
3. T es isometría si y sólo si $[T^*]_B^B [T]_B^B = [T]_B^B [T^*]_B^B = I$, i.e. $\left([T]_B^B\right)^{-1} = [T^*]_B^B$.
4. T es positiva si y sólo si $[T]_B^B$ es hermitiana/simétrica semi-definida positiva.
5. T es estrictamente positiva si y sólo si $[T]_B^B$ es hermitiana/simétrica definida positiva.

Observaciones: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$.

1. Entonces el polinomio característico asociado a $[T]_B^B$ (para alguna base B de V) tiene sus raíces en $\mathbb{C}$. Esto garantiza que $\emptyset \neq \sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$. Luego, se asegura que T tiene al menos un vector propio u_1, el cual puede considerarse unitario, i.e. $||u_1|| = 1$.
2. Si además T es normal, u_1 será también autovector de T^*. Esto significa que $U := \langle\{u_1\}\rangle$ es unidimensional y T^*-invariante (también T-invariante). Esto implica también que $U^\perp$ es T (y T^*)-invariante, aún en el caso trivial.
3. Esto permite definir la restricción de T a $U^\perp$, i.e. $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ tal que $\forall\, z \in U^\perp : T|_{U^\perp}(z) := T(z)$, la cual es también normal en $U^\perp$. De esta manera, se puede repetir el proceso descrito. Esto permite establecer ...

Teorema espectral complejo en dimensión finita: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Luego, T es normal si y sólo si T es diagonalizable mediante una base ortonormal de V, formada por autovectores de T.

Demostración:

$(\Rightarrow)$: Por Inducción Matemática.

Paso 1: se cumple para subespacios de V de dimensión 1.

Paso 2: Hipótesis de Inducción. Suponemos la propiedad se cumple para subespacios W de V, con $\dim(W) = \dim(V) - 1$.

Paso 3: Tesis de Inducción. Probemos que la propiedad es cierta para el espacio V. De acuerdo a lo expuesto en las Observaciones previas, como T es normal, $\exists\, u_1 \in V$ de norma 1, vector propio de T. Definiendo $U := \langle\{u_1\}\rangle$, se tiene que $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(V)$ es normal, con $\dim(U^\perp) = \dim(V) - 1$. Luego, aplicando la Hipótesis de Inducción, $\exists\,\{u_2, ..., u_{\dim(V)}\}$ una base ortonormal de $U^\perp$ formada por autovectores de T. De esta forma, $\{u_j\}_{j=1}^{\dim(V)}$ es una base ortonormal de $V = U \bigoplus U^\perp$ formada por autovectores de T. Por tanto, T es ortonormalmente diagonalizable.

$(\Leftarrow)$: Sea $\sigma(T) = \{\lambda_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{C}$ y $\{S_{\lambda_j}\}_{j=1}^m$ la familia de espacios propios de T. Invocando una consecuencia (se deja al lector su deducción) del penúltimo Teorema del capítulo de Espacios vectoriales con producto interno, se tiene

$$T = \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{Proj}_{S_{\lambda_j}} \quad \Rightarrow \quad T^* = \sum_{j=1}^m \overline{\lambda}_j \operatorname{Proj}^*_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m \overline{\lambda}_j \operatorname{Proj}_{S_{\lambda_j}}.$$

No es difícil chequear (¡Hacerlo!) que $T^*T = TT^*$, y por tanto T es normal.

Demostración alternativa para ($\Leftarrow$): Sea B la base ortonormal de V con respecto a la cual T es diagonalizable. Esto significa que $[T]_B^B := D \in \mathcal{M}_{\dim(V)}(\mathbb{C})$ (matriz diagonal). Luego se tiene (¡Chequearlo!)

$$[T^* T]_B^B = [T^*]_B^B [T]_B^B = D^* D = DD^* = [T]_B^B [T^*]_B^B = [TT^*]_B^B \Rightarrow T^* T = TT^* .$$

Teorema espectral real en dimensión finita: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Luego, T es autoadjunta si y sólo si T es diagonalizable mediante una base ortonormal de V, formada por autovectores de T.
Demostración: Es parecida a la prueba de su versión compleja (se deja al lector su deducción).

Definición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que $R \in \mathcal{L}(V)$ es raíz cuadrada de T si $R^2 = T$.

Ejemplo: Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ definida por $\mathbb{K}^3 \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto T(z_1, z_2, z_3) := (z_3, 0, 0)$. Se prueba que $R \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ definida por $\mathbb{K}^3 \ni (z_1, z_2, z_3) \mapsto R(z_1, z_2, z_3) := (z_2, z_3, 0)$ es una raíz cuadrada de T. En tal caso, $S := -R \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ también es raíz cuadrada de T.

Caracterizaciones de aplicaciones positivas. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Son equivalentes:

1. T es positiva.
2. T es autoadjunta y $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_0^+$.
3. T tiene una raíz cuadrada positiva.
4. T tiene una raíz cuadrada autoadjunta.
5. Existe $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R^* R$.

Demostración: Se probará 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1).
1) $\Rightarrow$ 2): ya probado.
2) $\Rightarrow$ 3): HIPÓTESIS: T es autoadjunta y $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_0^+$.
Como T es autoadjunta, T es normal. Por tanto, aplicando el Teorema espectral sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V (versión compleja o real) a $T \in \mathcal{L}(V)$, $\exists \{z_j\}_{j=1}^n$ base ortonormal de V formada por vectores propios de T. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea λ_j el valor propio de T asociado a z_j, i.e. $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : T(z_j) = \lambda_j z_j$. En vista que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, definimos la aplicación lineal $R : V \to V$ tal que $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : R(z_j) := \sqrt{\lambda_j}\, z_j$, y así:

$$\forall u \in V : R(u) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, \langle u, z_j \rangle\, z_j .$$

Se verifica (¡HACERLO!) que $R^* = R$, i.e. R es autoadjunta, y también:

- $\forall u \in V : \langle R(u), u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, \langle u, z_j \rangle\, \overline{\langle u, z_j \rangle} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, |\langle u, z_j \rangle|^2 \geq 0$, y
- $\forall u \in V : R^2(u) = T(u)$, lo cual implica que $R^2 = T$,

de donde se concluye 3).
3) $\Rightarrow$ 4): Inmediato, puesto que toda aplicación lineal positiva es autoadjunta (por su definición).
4) $\Rightarrow$ 5): También es inmediata, pues si $R \in \mathcal{L}(V)$ es raíz cuadrada autoadjunta de T, entonces $R^* R = R^2 = T$.
5) $\Rightarrow$ 1): Sea $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R^* R$. Por un lado, se tiene que T es autoadjunta, pues $T^* = (R^* R)^* = R^* R = T$. Además, para cualquier $u \in V$:
$\langle T(u), u \rangle = \langle (R^* R)(u), u \rangle = \langle R(u), R(u) \rangle \geq 0$, de donde se concluye que $T \geq 0$.

Observaciones:

1. Puede probarse que toda aplicación $T \in \mathcal{L}(V)$ positiva, admite una única raíz cuadrada positiva, la cual se denota por $\sqrt{T}$.
2. Algunas de las implicaciones establecidas, pueden ser válidas en espacios de dimensión infinita. Analizar.

Definición: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es una ISOMETRÍA si $\forall\, u \in V \,:\, ||T(u)|| = ||u||$.

Caracterizaciones de ISOMETRÍAS. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión n, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Son equivalentes:

1. T es una isometría.
2. $\forall\, u, w \in V \,:\, \langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle$.
3. Para cualquier base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^n$ de V, $\{T(z_j)\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal de V.
4. Existe una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^n$ de V tal que $\{T(z_j)\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal de V.
5. $T^*\, T = \tilde{I}$.
6. $T\, T^* = \tilde{I}$.
7. T^* es una isometría.
8. T es invertible y $T^{-1} = T^*$.

Demostración: Hay que establecer: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2): (Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Sean $u, w \in V$. Aplicando la IDENTIDAD DE POLARIZACIÓN, VERSIÓN REAL (ver Ejercicio 14-a) en Listado 9), tenemos

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(w) \rangle &= \frac{1}{4}\left(||T(u) + T(w)||^2 - ||T(u) - T(w)|| \right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||T(u+w)||^2 - ||T(u-w)||^2 \right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||u+w||^2 - ||u-w||^2 \right) = \langle u, w \rangle . \end{aligned}$$

REMARK: la demostración en el caso complejo, es análoga. Hay que aplicar la IDENTIDAD DE POLARIZACIÓN, VERSIÓN COMPLEJA (ver Ejercicio 14-b) en Listado 9).

2) $\Rightarrow$ 3): Consideremos $\{z_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormal de V. Luego, como $\forall\, j, k \in \{1, \ldots, n\} \,:\, \langle T(z_j), T(z_k) \rangle = \langle z_j, z_k \rangle = \delta_{jk}$ (gracias a la HIPÓTESIS 2)), se deduce que $\{T(z_j)\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal de V.

3) $\Rightarrow$ 4): Inmediato.

4) $\Rightarrow$ 5): Sea $B := \{z_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormal de V, tal que $\{T(z_j)\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal de V. Para cualquier $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, resulta (invocando propiedades ya establecidas)

$$\begin{aligned} \left([T^*T]_B^B\right)_{jk} &= e_j^* \left([T^*T]_B^B\right) e_k = \langle \left([T^*T]_B^B\right) [z_j]_B, [z_k]_B \rangle \\ &= \langle (T^*T)(z_j), z_k \rangle = \langle T(z_j), T(z_k) \rangle = \langle z_j, z_k \rangle = \delta_{jk} , \end{aligned}$$

lo cual implica que $T^*T = \tilde{I}$.

5) $\Rightarrow$ 6): Sea $B := \{z_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormal de V. Usando matrices asociadas, las cuales son cuadradas en este caso, la hipótesis se expresa como

$$[T^*]_B^B[T_B^B] = [T^*T]_B^B = [\tilde{I}]_B^B = I \Rightarrow \left([T^*]_B^B\right)^{-1} = [T]_B^B$$
$$\Rightarrow [\tilde{I}]_B^B = [T]_B^B[T^*]_B^B = [TT^*]_B^B \Rightarrow TT^* = \tilde{I}.$$

6) $\Rightarrow$ 7): Sea $z \in V$. Como $TT^* = \tilde{I}$, tenemos

$$||T^*(z)||^2 = \langle T^*(z), T^*(z)\rangle = \langle (TT^*)(z), z\rangle = \langle z, z\rangle = ||z||^2,$$

lo cual implica que $\forall\, z \in V : ||T^*(z)|| = ||z||$, i.e. T^* es una isometría.
7) $\Rightarrow$ 8): Considerando T^* en vez de T, y el hecho que $(T^*)^* = T$, la implicación 1) $\Rightarrow$ 5) nos dice que $T^*T = \tilde{I}$, mientras que la implicación 1) $\Rightarrow$ 6) establece $TT^* = \tilde{I}$. De esta manera se establece que T es invertible y $T^{-1} = T^*$.
8) $\Rightarrow$ 1): Sea $z \in V$. Tenemos

$$||T(z)||^2 = \langle T(z), T(z)\rangle = \langle (T^*T)(z), z\rangle = \langle z, z\rangle = ||z||^2,$$

de donde se deduce que T es una isometría.

Comentario: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, y $T \in \mathcal{L}(V)$. No es difícil verificar que $T^*T \in \mathcal{L}(V)$ es positiva, y por lo tanto admite una única raíz cuadrada positiva $\sqrt{T^*T}$. Esto conduce a establecer el siguiente resultado.

Teorema de la Descomposición Polar: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces, existe una isometría $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.

Demostración:

Primera etapa: para cualquier $z \in V$, se tiene

$$\begin{aligned} ||T(z)||^2 &= \langle T(z), T(z)\rangle = \langle (T^*T)(z), z\rangle = \langle (\sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T})(z), z\rangle \\ &= \langle \sqrt{T^*T}(z), \sqrt{T^*T}(z)\rangle = ||\sqrt{T^*T}(z)||^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\forall\, z \in V \,:\, ||T(z)|| = ||\sqrt{T^*T}(z)||$.

Segunda etapa: Ahora definimos la aplicación $S_1 : \mathrm{Im}(\sqrt{T^*T}) \to \mathrm{Im}(T)$ por $\forall\, z \in V \,:\, S_1(\sqrt{T^*T}(z)) := T(z)$, la cual es sobreyectiva por su definición.

La estrategia de la prueba es extender S_1 a una isometría $S \in \mathcal{L}(V)$, tal que $T = S\sqrt{T^*T}$. Para ello:

Tercera etapa: Veamos que S_1 está bien definida. Sean $z_1, z_2 \in V$ tales que $\sqrt{T^*T}(z_1) = \sqrt{T^*T}(z_2)$. Tenemos:

$$||T(z_1) - T(z_2)|| = ||T(z_1 - z_2)|| = ||\sqrt{T^*T}(z_1 - z_2)|| = ||\sqrt{T^*T}(z_1) - \sqrt{T^*T}(z_2)|| = 0,$$

con lo cual se asegura que S_1 está bien definida.

Cuarta etapa: Veamos que $S_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T}), \mathrm{Im}(T))$.

(ES DEJADO COMO EJERCICIO AL LECTOR).

Quinta etapa: De lo establecido en la primera etapa, se deduce $\forall\, u \in \mathrm{Im}(\sqrt{T^*T}) \,:\, ||S_1(u)|| = ||u||$. Como consecuencia, S_1 es inyectiva. En vista que $\mathrm{Im}(S_1) = \mathrm{Im}(T)$, se tiene, gracias al TEOREMA DE LA DIMENSIÓN a S_1:

$$\dim(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})) = \dim(\mathrm{Im}(S_1)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$\Rightarrow \dim\big(\big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp}\big) = \dim\big(\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}\big) = m\,.$$

Sexta etapa: Consideremos $B_1 := \{x_j\}_{j=1}^m$ y $B_2 := \{y_j\}_{j=1}^m$ bases ortonormales de $(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T}))^{\perp}$ e $(\mathrm{Im}(T))^{\perp}$, respectivamente. Así, definimos ahora la aplicación $S_2 \,:\, \big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp} \to \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}$ por $\big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp} \ni x \mapsto S_2(x)$, tal que $[S_2(x)]_{B_2} = [x]_{B_1}$. Puede verificarse (¡HACERLO!) que $S_2 \in \mathcal{L}\big(\big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp}, \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}\big)$ y también

$$\forall\, x \in \big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp} \,:\, ||S_2(x)|| = ||[S_2(x)]_{B_2}|| = ||[x]_{B_1}|| = ||x||\,.$$

Séptima etapa: Recordamos que cualquier vector $w \in V$ puede ser expresada de manera única (gracias al TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL) como $w = u + x$, con $u \in \mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})$ y $x \in \big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp}$. De esta manera, definimos la aplicación $S \,:\, V \to V$ por $V \ni w = u + x \mapsto S(w) := S_1(u) + S_2(x)$, la cual es lineal (!VERIFICARLO!).

Octava etapa: Se verifica que $\forall\, w \in V \,:\, S(\sqrt{T^*T}(w)) = S_1(\sqrt{T^*T}(w)) = T(w)$, i.e. $T = S\sqrt{T^*T}$. Sólo falta establecer que S es una isometría, lo cual se deduce del hecho:

$$||S(w)||^2 = ||S_1(u) + S_2(x)||^2 = ||S_1(u)||^2 + ||S_2(x)||^2 = ||u||^2 + ||x||^2 = ||w||^2,$$

siendo $w = u + x$, con $u \in \mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})$ y $x \in \big(\mathrm{Im}(\sqrt{T^*T})\big)^{\perp}$.

Descomposición de valores singulares

Definición: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Los valores singulares de T son los valores propios de $\sqrt{T^*T}$. La multiplicidad algebraica de cada $\lambda \in \sigma(\sqrt{T^*T})$ viene dada por el valor de $\dim(S_\lambda)$.

Observación: los valores singulares son siempre no negativos, pues son los valores propios de la raíz cuadrada positiva de T^*T: $\sqrt{T^*T}$.

Ejemplo: Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ definido por $\forall\,(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{K}^4 \;:\; T(z_1,z_2,z_3,z_4) \;:=\; (0, 3z_1, 2z_2, -3z_4)$. Determinar los valores singulares de T.

Un simple cálculo, nos permite determinar que $\forall\,(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{K}^4 \;:\; T^*(z_1,z_2,z_3,z_4) \;:=\; (3z_2, 2z_3, 0, -3z_4)$, con lo cual resulta $\forall\,(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{K}^4 \;:\; T^*T(z_1,z_2,z_3,z_4) \;:=\; (9z_1, 4z_2, 0, 9z_4)$. Es inmediato notar que T^*T es diagonalizable ortonormalmente con respecto a la base canónica de $\mathbb{K}^4$. Además, se puede verificar además que la raíz cuadrada positiva de T^*T viene dada por

$$\forall\,(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{K}^4 \;:\; \sqrt{T^*T}(z_1,z_2,z_3,z_4) \;:=\; (3z_1, 2z_2, 0, 3z_4)\,,$$

de donde se deduce que $\sigma(\sqrt{T^*T}) = \{0,2,3\}$, con $\dim(S_0) = 1$, $\dim(S_2) = 1$ y $\dim(S_3) = 2$. Así, los valores singulares de T son: $0, 2, 3, 3$.

Comentario: Observar que -3 y 0 son los únicos autovalores de T. $2 \notin \sigma(T)$.

Teorema de la Descomposición de valores singulares. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión n, y $T \in \mathcal{L}(V)$ con valores singulares $s_1, \ldots, s_n$. Entonces existen dos bases ortonormales $\{x_j\}_{j=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^n$ de V (no necesariamente la misma) tales que

$$\forall\, z \in V \;:\; T(z) \,=\, \sum_{j=1}^{n} s_j\, \langle z, x_j\rangle\, y_j\,.$$

Demostración: Invocando el Teorema espectral correspondiente al cuerpo $\mathbb{K}$ para $\sqrt{T^*T} \in \mathcal{L}(V)$, existe una base ortonormal $\{x_j\}_{j=1}^n$ de V, tal que $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \;:\; \sqrt{T^*T}(x_j) \,=\, s_j\, x_j$. Por otro lado, tenemos también que

$$\forall\, z \in V \;:\; z \,=\, \sum_{j=1}^{n} \langle z, x_j\rangle\, x_j \;\Rightarrow\; \forall\, z \in V \;:\; \sqrt{T^*T}(z) \,=\, \sum_{j=1}^{n} s_j \langle z, x_j\rangle\, x_j\,.$$

Ahora, aplicando el Teorema de Descomposición Polar, existe una isometría $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \,=\, S\sqrt{T^*T}$. Luego, para $z \in V$ fijo, aplicamos S a la identidad anterior, resultando:

$$T(z) \,=\, S\sqrt{T^*T}(z) \,=\, \sum_{j=1}^{n} s_j \langle z, x_j\rangle\, S(x_j)\,.$$

Esto induce el conjunto de vectores $\{y_j \,:=\, S(x_j)\}_{j=1}^n$, el cual resulta ser también una base ortonormal de V (¿Por qué?). De esta manera, se concluye que

$$\forall\, z \in V \;:\; T(z) \,=\, \sum_{j=1}^{n} s_j \langle z, x_j\rangle\, y_j\,, \quad \text{y concluye la demostración.}$$

Comentarios: Considerando un espacio vectorial de dimensón finita V,

1. Cuando trabajamos con endomorfismos sobre V, por lo general se suele trabajar con la matriz representante de éste considerando una misma base para el espacio de partida y de llegada.

2. La Descomposición de valores singulares de un endomorfismo sobre V, nos "obliga" a considerar dos bases $B_1 := \{x_j\}_{j=1}^n$ y $B_2 := \{y_j\}_{j=1}^n$ (ortonormales) de V: B_1 para el espacio de partida, y B_2 para el espacio de llegada. De esta manera, considerando el enunciado del TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES, se verifica $\forall\, j \in \{1, \dots, n\} \,:\, T(x_j) = s_j\, y_j$, lo cual conduce a tener
$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix}.$$

3. La descomposición de valores singulares tiene múltiples aplicaciones, incluyendo aquellas en Álgebra Lineal Computacional. Por ejemplo, para determinar aproximaciones numéricas de los valores singulares de T, primero se calcula T^*T y después se aproximan (numéricamente) sus autovalores (existen buenas técnicas para aproximar autovalores de aplicaciones lineales positivas). Así, las raíces cuadradas de estos autovalores (aproximados), entregarán una aproximación numérica de los valores singulares de T. Esto nos muestra que los valores singulares de T pueden ser aproximados sin tener que determinar la raíz cuadrada positiva de T^*T.

El siguiente resultado nos permite trabajar con T^*T en vez de $\sqrt{T^*T}$, para obtener los valores singulares de una aplicación lineal.

Proposición (valores singulares sin determinar aplicación raíz cuadrada positiva): Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión n, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces, los valores singulares de T son las raíces cuadradas de los valores propios de T^*T, siendo la multiplicidad de cada uno de estos valores propios dada por la dimensión de su espacio propio correspondiente.

Demostración: Sea $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}_0^+$ la lista de valores propios (con repetición) de T^*T. Luego, como T^*T es normal, aplicando el Teorema espectral correspondiente al cuerpo $\mathbb{K}$ para $T^*T \in \mathcal{L}(V)$, existe una base ortonormal $\{x_j\}_{j=1}^n$ de V, tal que $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \,:\, T^*T(x_j) = \lambda_j\, x_j$. Ello implica que $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \,:\, \sqrt{T^*T}(x_j) = \sqrt{\lambda_j}\, x_j$, con lo cual se identifica que los valores singulares de T, contando repeticiones, vienen dados por la lista $\{s_j := \sqrt{\lambda_j}\}_{j=1}^n$. Así, se concluye la demostración.