UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°4$ (EDO de Orden Superior: Parte III).

Problemas a resolver en práctica

1. Determine la EDO lineal homogénea y de segundo orden, de modo que su espacio vectorial solución [el Ker(L), donde L es el operador diferencial asociado a la EDO] tenga como base al conjunto $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(x) = 3e^{2x}$, $y_2(x) = x^2$.

   Solución:

   Primero notemos que el conjunto $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(x) = 3e^{2x}$, $y_2(x) = x^2$, es linealmente independiente, l.i., en el espacio vectorial de las funciones dos veces derivables. Entonces vemos que el operador diferencial lineal buscado, al menos debe tener orden dos. Denominemos por L a un tal operador (de orden dos) que tenga en una base de su Ker(L) a las mencionadas funciones y_1 e y_2. Por tanto si $z = z(x)$ es otra solución de la EDO $L(y) = 0$, debe resultar que z es combinación lineal de $y_1 = 3e^{2x}$ e $y_2 = x^2$. Dicho de otra forma el conjunto formado por $\{z(x),\, y_1 = 3e^{2x},\, y_2 = x^2\}$ es linealmente dependiente en el espacio vectorial de las funciones dos veces derivables.

   Por tanto, el Wronskiano, $W(x) := W(y_1, y_2, z; x)0$, es tal que $W(x) = 0$. Esto es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 3\mathrm{e}^{2x} & y(x) \\ 2x & 6\mathrm{e}^{2x} & y'(x) \\ 2 & 12\mathrm{e}^{2x} & y''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 3\mathrm{e}^{2x} & y(x) \\ 2x & 6\mathrm{e}^{2x} & y'(x) \\ 2-4x & 0 & y''(x)-2y'(x) \end{vmatrix} = 0$$

   Ahora, desarrollando el determinante a través de la segunda columna, se obtiene:

$$(-3)[2x(y''(x) - 2y'(x)) - (2-4x)y'(x)] + 6[x^2(y''(x) - 2y'(x)) - (2-4x)y(x)] = 0$$

   de donde obtenemos

$$(6x^2 - 6x)y''(x) + (6 - 12x^2)y'(x) + (24x - 12)y(x) = 0.$$

   Finalmente, normalizando (para lo cual se requiere, por ejemplo, que $x \in]0,1[$), se obtiene la EDO lineal homogénea:

$$y''(x) + \left[\frac{1-2x^2}{x^2-x}\right]y'(x) + \left[\frac{4x-2}{x^2-x}\right]y(x) = 0. \tag{1}$$

   Observe que el operador diferencial asociado a la EDO solicitada es

$$L = D^2 + \left[\frac{1-2x^2}{x^2-x}\right]D + \frac{4x-2}{x^2-x}.$$

Por último, observe que la EDO (1) tiene como base para su espacio solución al conjunto dado, a saber, $\{y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = 3\mathrm{e}^{2x}\}$.

2. Suponga que el conjunto $B = \{y_1, y_2\}$ es una base del espacio solución de las EDO lineales

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \text{ y } y''(x) + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = 0.$$

donde los coeficientes $a_1(x), a_0(x), b_1(x)$ y $b_0(x)$ son funciones continuas en algún intervalo real $]a, b[$. Muestre que $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0$.

Solución: Por hipótesis las funciones y_1 e y_2 son soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0, \\ y''(x) + b_1(x)\, y'(x) + b_0(x)\, y(x) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto y_1 e y_2 son soluciones de la diferencia anterior, esto es: y_1 e y_2 son soluciones de

$$[a_1(x) - b_1(x)]y'(x) + [a_0(x) - b_0(x)]y(x) = 0, \tag{2}$$

que es una EDO de orden uno. Por tanto tenemos un problema, puesto que la dimensión del espacio solución de (2) es uno. De lo anterior, necesariamente debe ser $a_1 = b_1$. Luego se obtiene que $[a_0(x) - b_0(x)]y_1(x) = [a_0(x) - b_0(x)]y_2(x) = 0$, de donde $a_0 = b_0$.

3. Resuelva la EDO $x\, y''(x) - (1 + x)y'(x) + y(x) = 0$, $x > 0$, sabiendo que $y(x) = \mathrm{e}^x$ es una solución de la EDO homogénea asociada.

Solución: Sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una solución de la EDO

$$x\, y''(x) - (1 + x)\, y'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0,$$

una segunda solución se puede obtener como

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\, \mathrm{d}x}}{y_1^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Resolviendo la EDO:

$$y''(x) - \left(\frac{1 + x}{x}\right) y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 0, \quad x > 0,$$

donde $p(x) = -(\frac{1+x}{x})$, luego

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x \int \frac{e^{+\int \left(\frac{1+x}{x}\right) \mathrm{d}x}}{e^{2x}}\, \mathrm{d}x = e^x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x}}{e^{2x}}\, \mathrm{d}x \\ &= e^x \int \frac{e^{\ln(x)} \cdot e^x}{e^{2x}}\, \mathrm{d}x = e^x \int x e^{-x}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integrando por partes la integral:

$$u = x, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x, \quad v = -e^{-x}$$

queda

$$y_2(x) = e^x(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x) = e^x(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x+1).$$

Así:

$$y(x) = c_1e^x + c_2(x+1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

4. Resolver los PVI:

   a) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

   b) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 5$.

   Solución a): Usando el operador diferencial D, reescribimos la EDO como

   $$(D^2 + 5D + 6)[y(x)] = 0,$$

   donde el polinomio característico es

   $$p(t) = (t^2 + 5t + 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = (t+3)(t+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -3,\ t_2 = -2.$$

   Entonces la solución es

   $$y(x) = c_1\,e^{-3x} + c_2\,e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   y su derivada es

   $$y'(x) = -3c_1\,e^{-3x} - 2c_2\,e^{-2x}$$

   Evaluando en las condiciones iniciales, se obtiene el sistema

   $$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ -3c_1 - 2c_2 &= 2, \end{aligned}$$

   cuya solución es $c_1 = -4$ y $c_2 = 5$. Entonces la solución del PVI es

   $$y(x) = -4e^{-3x} + 5e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Solución b): Usando el operador diferencial D, reescribimos la EDO como

   $$(D^3 + 3D^2 - D - 3)[y(x)] = 0,$$

   donde el polinomio característico es

   $$p(t) = t^3 + 3t^2 - t - 3 = 0, \qquad \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Usando Ruffini, las posibles soluciones son:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \\
\hline
-1 & 1 & 3 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 3 & & \\
\hline
-3 & 1 & 0 & & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
(t-1) & \text{solución} \\[1.2em]
(t+1) & \text{solución} \\[1.2em]
(t+3) & \text{solución}
\end{array}
$$

Luego,

$$p(t) = (t-1)(t+1)(t+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1,\ t_2 = -1,\ t_3 = -3,$$

y la solución es

$$y(x) = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + c_3\, e^{-3x}, \qquad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

La primera y segunda derivada de la solución son

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= c_1\, e^{x} - c_2\, e^{-x} - 3c_3\, e^{-3x}, \\
y''(x) &= c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + 9c_3\, e^{-3x}.
\end{aligned}
$$

Al imponer las condiciones iniciales, se obtiene el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\
c_1 - c_2 - 3c_3 &= 2, \\
c_1 + c_2 + 9c_3 &= 5,
\end{aligned}
$$

el que resolvemos usando regla de Cramer. El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 12 + 2 = -16,$$

y las soluciones buscadas son

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{16}(-6 - 33 + 7) = \frac{32}{16} = 2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{16}(33 - 12 + 3) = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

$$c_3 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}(-7-3+2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Las soluciones del sistema lineal son entonces $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{2}$ y $c_3 = \frac{1}{2}$. Y la solución del PVI es

$$y(x) = 2\,e^{x} - \frac{3}{2}\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{-3x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

5. Resolver aplicando método de aniquiladores:

   a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + t$

   b) $y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \quad y(0) = y'(0) = 0.$

6. Resolver aplicando método de variación de parámetros:

   a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

   b) $2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = x^{-1}\,\mathrm{e}^{x}, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 0$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Determine el operador diferencial lineal de segundo orden L de modo que el espacio solución de $L(y) = 0$, el $\mathrm{Ker}(L)$, tenga por base a $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = 3x^2 - 5x$.

2. Para $D = \dfrac{d}{dx}$, muestre que $D\,[x\,D] \neq [x\,D]D$.
   Observación: Operadores diferenciales lineales con coeficientes variables, en general, no conmutan!

3. Resuelva el PVI (para L a coeficientes variables)

$$\begin{cases} (x^2-1)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + 2y(x) &= x^4 - 2x^2 + 1\,, |x| > 1\,, \\ y\,(2) = 1, \quad y'(2) &= 0, \end{cases}$$

   sabiendo que $y(x) = x$ es una solución de la EDO homogénea asociada.

4. Determine la solución general de

$$(7-2x)y''(x) - 4(x-4)y'(x) + 4y(x) = 6\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,(2\,x-7)^3,$$

   sabiendo que el Ker del operador asociado a la EDO tiene base dada por $B := \{y_1(x) := x - 4,\ y_2(x) := \mathrm{e}^{-2\,x}\}$.

5. Determine la solución general de la EDO $L(y) = 0$, cuando

(a) $L = (D-1)(D+1)$.

(b) $L = (D-1)^2(D+1)$.

(c) $L = (D-1)^2(D+1)^2(D+2)^2$.

(d) $(D^4 - 2\,D^3 - 5\,D^2 + 6\,D)\,y = 0$

6. Sea L un operador diferencial lineal de orden n. Encuentre una solución particular para $L(y) = x^3 + \operatorname{sen}(x)$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^x) = 5\,\operatorname{sen}(x)$ y $L(\cos(x)) = \frac{1}{4}x^3$.

7. Sea L un operador diferencial lineal de orden n a coeficientes constantes. Encuentre una solución particular para $L(y) = \left[\frac{1}{x}\right]^2$, si se sabe que $L(\mathrm{e}^{3x} + \cos^2(x)) = \frac{1}{x}$.

8. Resolver usando aniquiladores:

   (*i*) $y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$,

   (*ii*) $y'' + 3y' - 10y = \mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{-5x}$,

   (*iii*) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{-2x}$.

9. Usando el método de variación de parámetros, resuelva:

   a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\ln(x)$, $\quad y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

   b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$.

25/05/2020 MDT/JMS/CMG/DS//jms/mdt