Guía 11-C1: LÍMITES
§**1**. *Infinitesimales con signo* $\hbar^+$ *y* $\hbar^-$. §**2**. *Notación de límites.* §**3**. *Convergencia o divergencia.* §**4**. *Límites y funciones ramificadas.* §**5**. *Límites laterales.* §**6**. *Álgebra de límites reales.* §**7**. *Límites determinados y por determinar.*

11.1. Límites, ceros hiperreales e infinitos

Ceros hiperreales con signo y su relación con los infinitos

El cero hiperreal $\hbar$ tiene signo desconocido y se escribe $\hbar^+$ y $\hbar^-$ para los ceros hiperreales con signo > 0 y < 0, respectivamente. Con esto, se tienen las siguientes igualdades:

$$\textbf{(I)}\ \frac{1}{\hbar^+} = +\infty; \quad \textbf{(II)}\ \frac{1}{\hbar^-} = -\infty; \quad \textbf{(III)}\ \frac{1}{+\infty} = \hbar^+; \quad \textbf{(IV)}\ \frac{1}{-\infty} = \hbar^-;$$

Es posible concebir $\hbar^+$ como secuencia de números > 0 acercándose al 0 (0.1; 0.01; 0.001; ...) y a $-\infty$ como secuencia de enteros < 0 de valor absoluto creciente (-10; -100; -1000; ...), etc.

Notación de límites

En la notación de '*límites*', las relaciones anteriores e escriben así:

$$\textbf{(I)}\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \textbf{(II)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \textbf{(III)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \textbf{(IV)}\ \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

La notación $x \to 0^\pm$ resume que x es el número hiperreal $\hbar^\pm$ y que se aplicó flecha. La notación $x \to \pm\infty$ resume que x es el número hiperreal $\pm\infty$ y que se aplicó flecha.

`Ejemplo 11.1` *Analizar (i)* $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{x+3}$*; (ii)* $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{x+3}$.

`Solución`. (i) Vemos que $\frac{2}{\hbar^\pm+3} \to \frac{2}{3}$. Así, $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$ y no influye si $x \to 0^+$ ó $x \to 0^-$. (ii) Como $\pm\infty + 3 = \pm\infty$, se tiene $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{x+3} = 0$.

Convergencia o divergencia de límites

$$\textbf{(V)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \nexists; \quad \textbf{(VI)}\ \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

La notación $x \to 0$ indica que x es $\hbar$ y, como el signo es desconocido, el resultado del límite no existe porque *un límite tiene un sólo resultado (converge) o no existe (diverge)*.

`Ejemplo 11.2` *Analizar (i)* $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x+3}$*; (ii)* $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x+3}$.

`Solución`. Ver Ejemplo 11.1. (i) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$. (ii) $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x+3} = 0$.

La expresión $\frac{x}{|x|}$ y límites de expresiones ramificadas

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \implies \textbf{(VII)}\ \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x}{|x|} = \pm 1; \ \textbf{(VIII)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \nexists; \ \textbf{(IX)}\ \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{|x|} = \pm 1.$$

En general, cuando se trabaja con una expresión ramificada, el valor del límite dependerá de la rama que se deba considerar.

Existencia o no existencia de los límites

Un '*límite real*' es uno cuyo resultado es un número real. Un '*límite infinito*' es uno con resultado $+\infty$ o $-\infty$. Si un límite no es real ni infinito, entonces no existe.

`Ejemplo 11.3` *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x}$*; (ii)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-1}{x}$.

`Solución`. Ambos límites son '*formas indeterminadas*' del tipo ∞/∞ y $0/0$. Esto implica que hay que manipular algebraicamente antes de aplicar la flecha. En ambos casos, sirve descomponer como $\frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$. (i) Aquí, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$. Luego, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$. (ii) En este caso, se tiene $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$, así que $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2 \pm \infty = \pm\infty$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-1}{x} = \nexists$.

11.2. Límites a valores arbitrarios

Límites laterales

Dado $a \in \mathbb{R}$, notación $x \to a^+$ expresa que $x = a + \hbar^+$, y se aplicó flecha. En este caso, se habla de '*límite lateral por la derecha*'. Análogamente se escribe $x \to a^-$ y

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

`Ejemplo 11.4` *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^2 + 2$*; (ii)* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$*; (iii)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3-3x}{3-3x+|x-1|}$.

`Solución`. (i) Se trata de un límite que no involucra indeterminación, así que por sencillo '*reemplazo de valores*' se obtiene $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^2 + 2 = 4$. (ii) Se produce una indeterminación $0/0$. así que es necesario manipular antes de aplicar el límite. Se tiene $\frac{x^2-2}{x+2} = x - 2$, así que $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$. (iii) El hecho que $|x-1| = \pm(x-1)$, dependiendo si $x \to 1^\pm$ hace necesario un análisis de límites laterales. Se tiene que si $x =\to 1^+$ entonces $\frac{3-3x}{3-3x+|x-1|} = \frac{3-3x}{3-3x+(x-1)} = \frac{3-3x}{2-2x} = \frac{3}{2} \implies \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3-3x}{3-3x+|x-1|} = \frac{3}{2}$. Por otro lado, si $x =\to 1^-$ entonces $\frac{3-3x}{3-3x+|x-1|} = \frac{3-3x}{3-3x-(x-1)} = \frac{3-3x}{4-4x} = \frac{3}{4} \implies \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3-3x}{3-3x+|x-1|} = \frac{3}{4}$. En conclusión, como los límites laterales son diferentes, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3-3x}{3-3x+|x-1|} = \nexists$.

Álgebra de límites reales

Recordemos que un límite real es uno con resultado un número real. Si $L, M \in \mathbb{R}$, entonces:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = M \implies$ **(X)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$; **(XI)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

Si asumimos además que $M \neq 0$ se cumplirá **(XII)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$.

Expresiones determinadas o por determinar

Para límites no reales hay que estudiar caso a caso. Primero algunas '*determinaciones*':

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty);\ (+\infty)\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty);\ (+\infty) - (-\infty) = (+\infty);\ 1/(\infty) = 0;$$
$$0/(\infty) = 0;\ 1/(0^\pm) = (\pm\infty);\ (+\infty)/(0^\pm) = (\pm\infty);\ (+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty);\ (+\infty)^{(-\infty)} = 0\ \ldots$$

Algunas expresiones '*por determinar*', es decir, que requieren manipulación para decidir:

$$(+\infty) - (+\infty);\ (\infty)\cdot 0;\ (\infty)/(\infty);\ 0/0;\ (\infty)^0; (0^\pm)^{(\infty)}\ \ldots$$

Aquí no tiene sentido memorizar y es necesario entender la lógica de cada caso.

11.3. Ejercicios

Enunciados

P 11.1 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4+x^2}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4+x^2}$.

Técnica. Manipular una fracción multiplicando por $\frac{1/x^n}{1/x^n}$.

P 11.2 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2+2x+\sqrt{3}}{3x^2-x-\sqrt{5}}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+2x+\sqrt{3}}{3x^2-x-\sqrt{5}}$ *(Idea:* $\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2}$*).*

P 11.3 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2x-3)(3x+5)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3x^2+1-\frac{1}{x}}$ *(Idea:* $\cdot\frac{x}{x}$*); (ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3x^2+1-\frac{1}{x}}$ *(Idea:* $\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2}$*).*

P 11.4 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}$.

P 11.5 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{|x|}}$.

P 11.6 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}}$; *(iv)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}}$.

P 11.7 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$.

P 11.8 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to (-2)^+} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; *(iv)* $\lim\limits_{x\to (-2)^-} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

P 11.9 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{1-\sqrt{5-x}}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

P 11.10 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+|x|}{x}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+|x|}{x}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+|x|}{x}$.

P 11.11 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x+1|+|x-1|}{|x|}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x+1|+|x-1|}{|x|}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x+1|+|x-1|}{x}$; *(iv)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x+1|+|x-1|}{x}$.

P 11.12 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+x$ *; (ii)* $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+x$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+x$.

P 11.13 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ *(Idea:* $\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$*); (ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}$.

P 11.14 *Analizar (i)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$; *(ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$; *(iii)* $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{|x|-1}-\frac{2}{x^2-1}$.

Cambio de variable. $x\to a \xRightarrow{u=T(x)} u\to T(a)$

P 11.15 *(i) Indique el cambio de variable* $u=T(x)$ *que justifica la igualdad* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(3x-5)^4-1}{\sqrt{3x-5}-1} = \lim\limits_{u\to 1} \frac{u^8-1}{u-1}$ *(ii) Analice el límite anterior usando la expresión transformada en la variable u.*

P 11.16 *Considere* $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{2x^2+\sqrt{2}x-6}{x-\sqrt{2}}$. *(i) Bajo el cambio de variable* $u=x-\sqrt{2}$*, indique el límite transformado con la nueva variable u. (ii) Analice el límite anterior.*

P 11.17 *Analice* $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$.

Respuestas

P. 11.1 (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4+x^2} = +\infty$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4+x^2} = 0$. **P. 11.2** (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2+2x+\sqrt{3}}{3x^2-x-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+2x+\sqrt{3}}{3x^2-x-\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$. **P. 11.3** (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2x-3)(3x+5)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3x^2+1-\frac{1}{x}} = -90$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3x^2+1-\frac{1}{x}} = 8$. **P. 11.4** (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}} = 0$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}} = 2$; (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}} = \nexists$. **P. 11.5** (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = 0$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = +\infty$; (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{|x|}} = -\infty$. **P. 11.6** (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 0$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1$; (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}} = 0$; (iv) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}} = 1$. **P. 11.7** (i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$; (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{4}$; (iii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{2}}$. **P. 11.8** (i) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = -2$; (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = 0$; (iii) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = -\infty$; (iv) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = +\infty$. **P. 11.9** (i) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4} = -\frac{1}{6}$; (ii) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{1-\sqrt{5-x}} = 2$; (iii) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = -\frac{1}{3}$. **P. 11.10** (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+|x|}{x} = \nexists$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+|x|}{x} = 2$; (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+|x|}{x} = 0$. **P. 11.11** (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x+1|+|x-1|}{|x|} = +\infty$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x+1|+|x-1|}{|x|} = 2$; (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x+1|+|x-1|}{x} = \nexists$; (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x+1|+|x-1|}{x} = \nexists$. **P. 11.12** (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x = +\infty$; (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x = +\infty$; (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + x = +\infty$. **P. 11.13** (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = 0$; (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{|x+1|} - \sqrt{|x|} = 0$. **P. 11.14** (i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = 0$; (iii) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{|x|-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$. **P. 11.15** (i) $u = \sqrt{3x-5}$; (ii) $\lim\limits_{u\to 1} \frac{u^8-1}{u-1} = 8$, así que el límite original es 8. **P. 11.16** (i) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{2u^2+5\sqrt{2}u}{u}$; (ii) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{2u^2+5\sqrt{2}u}{u} = 5\sqrt{2}$. **P. 11.17** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 0$.