

OPTIMIZACIÓN III (525151)
Ejercicios de tiempo de ejecución de algoritmos

P1) Sean $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones. Pruebe que:

- a) $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n)).$
- b) $f_1(n) = O(g_1(n)) \wedge f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n)).$
- c) $f(n) = O(g(n)) \wedge \alpha \geq 0 \implies \alpha f(n) = O(g(n)).$
 (Obs: El mismo resultado se tiene en el caso de $o, \omega, \Omega, \Theta$).
- d) $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\}).$

P2) Muestre que $f(n) = (n! + 3^{n+2} + 3n^{100})(n^n + n2^n) = O(n^{2n})$.

P3) Sea $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones.

- a) Muestre que: $O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)).$
- b) Ordene los siguientes conjuntos en forma creciente en cada caso. Justifique su respuesta.

$$O\left(\frac{3}{2}n\right), O(n^2 \log(n)), O(1), O(n!), O(\sqrt{n}), O(2^n), O(\log(n)).$$

P4) Sea $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones.

- a) Pruebe que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.
- b) Sea $f(n) = 3n^2 + 2n + 2$. Use lo anterior para probar que $n^2 \log(n) \notin O(f(n))$, $f(n) \in O(n^2)$ y $f(n) = \Omega(n \log(n))$

P5) Sea $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones.

- a) Pruebe que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ con $k > 0$, entonces $f(n) = \Theta(g(n))$.
- b) Use lo anterior para probar que $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$, $(n+a)^b = \Theta(n^b)$.

P6) Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ : f \text{ es función}\}$. Se define R_Θ , la relación en $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ inducida por Θ , como sigue:

$$\forall f(n), g(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+), f(n) R_\Theta g(n) \iff f(n) = \Theta(g(n)).$$

- a) Pruebe que R_Θ es relación de equivalencia.
- b) Explique por qué las relaciones en $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ inducidas por o, O, ω y Ω no son relaciones de equivalencia.