UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

LISTADO DE EJERCICIOS 525401
Análisis Funcional y Aplicaciones I

Primer Semestre de 2023 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

Índice

1. Introducción

1.1 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S := \{x \in X : \quad \|x\| = 1\}$. Pruebe que S es completo si y sólo si X es Banach.*

1.2 *Sean $I := (t_0, t_0 + \tau)$, $f_j : \bar{I} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in \{1, \ldots, n\}$, funciones continuas, y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Hallar $u := (u_1, \cdots, u_n)^{\mathtt{t}} \in [C^1(I) \times C(\bar{I})]^n$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} = f_j(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \quad \forall\, t \in I \qquad y \\ \\ u_j(t_0) = \eta_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{1}$$

donde t_0, τ, η_j, $j = 1, \cdots, n$ son constantes reales dadas y τ es positivo. Suponga además que existe $M > 0$ tal que

$$|f_j(t, z) - f_j(t, w)| \leq M\|z - w\|_\infty \quad \forall\, z, w \in \mathbf{R}^n, \quad \forall\, t \in \bar{I}.$$

Demuestre que (1) tiene una única solución $u(t)$ para todo $t \in \bar{I}$.

1.3 *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall\, x \in H$. Además, dada una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n$ converge en H si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$.*

1.4 *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$, se define el* espacio de Sobolev *de orden m, como*

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall\, \alpha,\, |\alpha| \leq m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ con el producto escalar usual $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \displaystyle\int_\Omega uv\, dx$ es un espacio de Hilbert, y demuestre que $H^m(\Omega)$ también lo es.

1.5 *Se dice que un espacio de Banach X es* uniformemente convexo *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\Big(x, y \in X\,,\ \|x\| \leq 1\,,\ \|y\| \leq 1 \quad y \quad \|x - y\| > \varepsilon \Big) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta\,.$$

Demuestre que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

1.6 ([26]) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera suave* Γ, *y sea* $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, *un problema de suma importancia en mecánica de fluidos, consiste en encontrar el vector de velocidades* $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ *y la presión* p *de un fluido, tales que*

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad en \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Gamma\,, &\qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, $Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx = 0 \right\}$, *y demuestre que la formulación débil de (2) se reduce a: encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \qquad \forall\,\mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \qquad \forall\,q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $a : H \times H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, *y* $f : H \to \mathbb{R}$, *están definidas por*

$$a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,v_i\,dx\,,$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

1.7 ([26]) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera suave* Γ, *y sea* $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Stokes *corresponde a una versión linealizada del problema de Navier-Stokes y consiste en encontrar el vector de velocidades* $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ *y la presión* p *de un fluido, tales que*

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad en \quad \Omega\,, &\quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad en \quad \Gamma\,, &\qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Utilice el ejercicio anterior para deducir la formulación débil de (3).

1.8 *Dado* Ω *abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $p \in [1, +\infty)$, *se define*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \quad f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p\,dx < \infty \right\}\,.$$

Puede probarse que $L^p(\Omega)$, *provisto de la norma* $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p\,dx \right\}^{1/p}$ *es un espacio de Banach. Además, dados* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^q(\Omega)$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *se tiene la desigualdad de Hölder*

$$\int_\Omega |f\,g|\,dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$ *se define el* Espacio de Sobolev *de orden* (m, p), *como*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall\,\alpha,\ |\alpha| \le m \right\},$$

el cual se provee de la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}$. *Demuestre que* $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*

1.9 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, ..., T_N\}$ *una triangularización de* Ω*, es decir:*

i) $\bar{T}_j$ *es un triángulo con interior no-vacío* $\quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) $T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$, *y*

iii) $\bar{\Omega} = \cup\{\, \bar{T}_j : \quad j \in \{1, ..., N\}\,\}$.

Defina el subespacio de $[L^2(\Omega)]^2$

$$H := \{\, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., N\}\,\}\,,$$

donde la pertenencia local $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in L^2(T_j)$ *está dada en el sentido distribucional, es decir en* $\mathcal{D}'(T_j)$*, lo cual significa que existe* $z_j \in L^2(T_j)$ *tal que*

$$-\int_{T_j} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = \int_{T_j} z_j\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(T_j)\,,$$

y en tal caso se escribe $z_j = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})$ *en* T_j*. Demuestre que* H *provisto de la norma*

$$\|\boldsymbol{\tau}\| := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^2} + \sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{L^2(T_j)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

es un espacio de Hilbert real.

2. Dualidad

2.1 *Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Pruebe que $f \in X'$ si y sólo si $N(f)$, el espacio nulo de f, es un subespacio cerrado de X.*

2.2 *Sean X un Hilbert sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $F : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que su espacio nulo $N(F) := \Big\{ x \in X : \quad F(x) = 0 \Big\}$ no es denso en X. Pruebe que $F \in X'$ y concluya así que $N(F)$ es un subespacio cerrado propio de X.*

2.3 *Sea V un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Demuestre que el dual V' es Banach.*

2.4 *Sea M un subespacio cerrado propio de un Banach X y sea $x_0 \in X - M$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existen F_1, $F_2 \in M^o$ tales que $\|F_1\| = 1$ y $F_2(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, M)$.*

2.5 *Sea H un espacio vectorial normado real. Pruebe que si la norma de H satisface*

$$||x + y||^2 \, + \, ||x - y||^2 \, = \, 2 \, \big\{ \, ||x||^2 + ||y||^2 \, \big\} \quad \forall \, x, y \, \in \, H,$$

entonces ella proviene de un producto escalar.

2.6 *Sea $X := C([0,1])$ provisto de la norma uniforme*

$$\|u\| \, := \, \text{máx} \, \{ \, |u(t)| : \quad t \, \in \, [0,1] \, \} \qquad \forall \, u \, \in \, X \, ,$$

y dado $f \, \in \, X$, fijo, defina el funcional lineal $F \, : \, X \, \to \, \mathbb{R}$ como

$$F(u) \, := \, \int_0^1 u(t) \, f(t) \, dt \qquad \forall \, u \, \in \, X \, .$$

Demuestre que $F \, \in \, X'$ y $\|F\| \, = \, \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, dt$.
Indicación: *Para cada $n \, \in \, \mathbb{N}$ considere $x_n \, \in \, X$ dada por $x_n(t) \, := \, u_n(f(t)) \ \ \forall \, t \, \in \, [0,1]$, donde $u_n \, : \, \mathbb{R} \, \to \, \mathbb{R}$ es la función continua*

$$u_n(t) \, := \, \begin{cases} \ \ 1 & si \quad t \, \geq \, 1/n \, , \\ -1 & si \quad t \, \leq \, -1/n \, , \\ \ n\,t & si \quad -1/n \, \leq \, t \, \leq \, 1/n \, , \end{cases}$$

y luego use x_n para probar que $\quad \|F\| \, \geq \, \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, dt \, - \, \frac{1}{n}$.

2.7 ([4], [32]) *Considere un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) \, := \, \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^n \, : \quad \mathrm{div} \; v \, := \, \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, \in \, L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} \, := \, \int_\Omega v \cdot w \, dx \, + \, \int_\Omega \mathrm{div} \; v \; \mathrm{div} \; w \, dx \quad \forall \, v, \, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \, .$$

a) *Demuestre que* $(H(\mathrm{div}\,;\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo* $g \in [L^2(\Omega)]^n$ *existe un único* $v_g \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega v_g \cdot w\,dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{div}\; v_g \;\mathrm{div}\; w\,dx \,=\, \int_\Omega g \cdot w\,dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\,.$$

IND.: *Dada* $v \in [L^2(\Omega)]^n$, *se dice que* $\mathrm{div}\; v \,\in\, L^2(\Omega)$ *si existe* $z \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega z\,\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

2.8 ([4], [32]) *Considere un abierto acotado* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera* Γ *suficientemente suave, y defina el espacio*

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \left\{ v := (v_1,v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \,:\quad \mathrm{rot}\, v \,:=\, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \,-\, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \,:=\, \int_\Omega v \cdot w\,dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{rot}\, v\;\mathrm{rot}\, w\,dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) *Demuestre que* $(H(\mathrm{rot};\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ *es un espacio de Hilbert.*

b) *Pruebe que para todo* $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *existe un único* $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega v_g \cdot w\,dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g\;\mathrm{rot}\, w\,dx \,=\, \int_\Omega \mathrm{rot}\, g\,\mathrm{rot}\, w\,dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

IND.: *Notar que* $v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *si y sólo si* $(v_2, -\,v_1) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. *También, dada* $v \in [L^2(\Omega)]^2$, *se dice que* $\mathrm{rot}\, v \,\in\, L^2(\Omega)$ *si existe* $z \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$-\int_\Omega v_2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx + \int_\Omega v_1\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx = \int_\Omega z\,\varphi\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

2.9 *Sea* X *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$ *y sea* $p : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$p(\alpha\, x) \,=\, |\alpha|\, p(x) \quad y \quad p(x+y) \,\le\, p(x) \,+\, p(y) \qquad \forall\,\alpha \,\in\, \mathbb{C}\,,\ \forall\, x\,,\, y \,\in\, X\,.$$

Además, sean S *un subespacio de* X *y* $f \,:\, S \,\to\, \mathbb{C}$ *un funcional lineal tales que*

$$|f(x)| \,\le\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, S\,.$$

Demuestre que f *puede extenderse a un funcional lineal* $F \,:\, X \,\to\, \mathbb{C}$ *tal que*

$$|F(x)| \,\le\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

2.10 *Pruebe que todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.*

2.11 *Demuestre que para todo* $f \,\in\, (H^m(\Omega))'$ *existen funciones* $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \le m$, *tales que*

$$f(v) \,=\, \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega f_\alpha\, \partial^\alpha\, v\,dx \quad \forall\, v \in H^m(\Omega)\,.$$

2.12 *Sea X un espacio vectorial normado.*

a) *Sea Y un subespacio no denso de X. Demuestre que existe un funcional no nulo $F \in X'$ tal que $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.*

b) *Sean $x_0,\, x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$. Pruebe que existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ tal que $||F_n|| = ||x_0 - x_1||^n$ y $F_n(x_1) = F_n(x_0) + ||x_1 - x_0||^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2.13 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H. El anulador (o aniquilador) de V se denota por V^o y se define como*

$$V^o := \{\, F \in H' : \quad F(x) = 0 \quad \forall\, x \in V \,\}\,.$$

Demuestre que

$$H \,=\, V \,\oplus \mathcal{R}(V^o)\,,$$

donde $\mathcal{R} : H' \to H$ denota la aplicación de Riesz.

2.14 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $x_0 \in X$ tal que $|\,F(x_0)\,| \leq C_0$ para todo $F \in X'$ con $||F||_{X'} = 1$. Demuestre que $||x_0|| \leq C_0$.*

2.15 *Sea V un subespacio de un Hilbert $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y defina*

$$V^\perp := \{y \in Y : \quad \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in V\}\,.$$

Si $\overline{V}$ denota la clausura de V, demuestre que $\overline{V}^\perp = V^\perp$. Concluya que V es denso en Y si y sólo si $V^\perp = \{0\}$.

2.16

a) *Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.*

b) *Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.*

2.17

a) *Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^\perp = \bar{S}^\perp$.*

b) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice un subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.*

2.18 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto*

$$S \,:=\, \Big\{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, 1 \,\Big\}\,,$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\, dx \,=\, \min_{v\in S} \int_\Omega \kappa(x)\,\|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}\, dx\,.$$

2.19 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert* COMPLEJO, *y sean $u\,,\ v \in H$, $u \neq v$, tales que $\|u\| = \|v\|$. Defina $w := u - v$ y considere la proyección ortogonal $\mathbf{P} : H \to S^{\perp}$, donde S es el subespacio generado por w. Demuestre que*

$$\mathbf{P}(u) \,=\, \mathbf{P}(v) \,=\, \frac{u+v}{2} \,+\, \left\{ \frac{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\langle u, v\rangle)}{\|w\|^2} \right\} w\,.$$

Qué sucede cuando H es un Hilbert REAL *? Interprete gráficamente.*

2.20 ([4], [32]) *Sea $\Omega :=]0,1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere el espacio de Hilbert $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde*

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \{\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

y

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle \,:=\, \int_{\Omega} \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx \,+\, \int_{\Omega} \mathrm{div}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\,dx \qquad \forall\,\boldsymbol{\zeta},\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Además, sea S el subespacio de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dado por

$$S := \{\boldsymbol{\tau} :\ \boldsymbol{\tau}(x) = (\alpha + \gamma\,x_1, \beta + \gamma\,x_2)\ \forall\,x := (x_1,x_2) \,\in\, \Omega;\ \text{con } \alpha,\ \beta,\ \gamma \,\in\, \mathbb{R}\,\}\,,$$

y sea $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ definida por $\quad \boldsymbol{\sigma}(x) \,=\, (x_1x_2, x_1 + x_2) \quad \forall\,x := (x_1,x_2) \,\in\, \Omega$. Aplique el teorema de caracterización respectivo y encuentre la mejor aproximación de $\boldsymbol{\sigma}$ por elementos de S, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.21 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, provisto del producto escalar $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t\,B)\ \ \forall\,A,\,B \in X$.*

a) *Demuestre que $X \,=\, X_{\mathtt{sim}} \,\oplus\, X_{\mathtt{asim}}$, donde*

$$X_{\mathtt{sim}} \,=\, \{\,A \in X : \quad A^t \,=\, A\,\} \quad \text{y} \quad X_{\mathtt{asim}} \,=\, \{\,A \in X : \quad A^t \,=\, -\,A\,\}\,.$$

b) *Sea $C := (c_{ij})_{n\times n} \in X$ tal que $\quad c_{ij} \,=\, 1\ \ \forall\,i \geq j \quad$ y $\quad c_{ij} \,=\, 0\ \ \forall\,i < j$. Encuentre las mejores aproximaciones de C por matrices de $X_{\mathtt{sim}}$ y $X_{\mathtt{asim}}$, con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

2.22 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.*

a) *Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \,\in\, X'$ tales que $F_j(x_i) \,=\, \delta_{ij} \quad \forall\,i,j \,\in\, \{1,...,n\}$.*

b) *Pruebe que $X \,=\, U \,\oplus\, V$, donde $V := \{\,x \in X : \quad F_j(x) \,=\, 0 \quad \forall\,j \in \{1,...,n\}\,\}$.*

2.23

a) *Dado $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con aplicación de Riesz $\mathcal{R} : X' \to X$, defina $[\,\cdot,\cdot\,] : X' \times X' \to \mathbb{R}$ por*

$$[F, G] \,:=\, \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G)\rangle \qquad \forall\,F,\,G \,\in\, X'\,,$$

y pruebe que $(X', [\,\cdot,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert.

b) *Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y denote por X'' al dual del dual X', es decir*
$$X'' := \Big\{ \mathcal{F} : X' \to \mathbb{R} : \quad \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado} \Big\} .$$
Demuestre que para cada $x \in X$ el funcional $J(x) : X' \to \mathbb{R}$ definido por $J(x)(F) := F(x) \quad \forall\, F \in X'$ es un elemento de X'', y que la aplicación resultante $J : X \to X''$ es inyectiva e isométrica. Luego, utilice a) para probar que si X es un Hilbert entonces J es biyectiva.

2.24 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \le M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando algún resultado de dualidad, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que*
$$\int_\Omega \Big\{ \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\kappa} u\, v \Big\} = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega) ,$$
y
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \left\{ \frac{M}{\text{mín}\left\{\beta, \frac{1}{M}\right\}} \right\}^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} .$$

2.25 *Dado $n \in \mathbb{N}$, considere una partición $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ de $\Omega :=]0,1[$ y defina los subespacios de $L^2(\Omega)$ dados por*
$$H^1_n(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \in H^1(]t_{j-1},t_j[) \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\} ,$$
y
$$S_n := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_{]t_{j-1},t_j[} \text{ es constante } \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\} \Big\} .$$
Entonces, dado $u \in H^1_n(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_n^\perp$ con respecto al producto escalar
$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} p_j\, v\, w \qquad \forall\, v,\, w \in H^1_n(\Omega) ,$$
donde p_j es el polinomio definido por $p_j(t) := (t - t_{j-1}) \quad \forall\, t \in]t_{j-1}, t_j[$. Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se reemplaza por
$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ p_j\, v\, w + v'\, w' \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \in H^1_n(\Omega) \,?$$

2.26 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T}$ un conjunto finito de triángulos T, cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que $\bar{\Omega} = \cup\{T : \quad T \in \mathcal{T}\}$. Defina*
$$H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \in H^1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\} , \quad y$$
$$S_{\mathcal{T}} := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \quad \text{es constante} \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\} .$$
Entonces, dado $u \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S_{\mathcal{T}}^\perp$ con respecto al producto escalar
$$\langle v, w \rangle := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \Big\{ v\, w + \nabla v \cdot \nabla w \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) .$$

Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *se reemplaza por*

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle \,:=\, \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T v\,w \qquad \forall\, v,\, w \,\in\, H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)\,?$$

2.27 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado y* $\bar{B}(\mathbf{0},1) \,:=\, \Big\{ x \in X : \quad \|x\| \leq 1 \Big\}$ *su bola unitaria cerrada. A su vez, dados* $N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^N)$, *y* $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$, *se define el funcional* $(\boldsymbol{\beta}\cdot A) : X \to \mathbb{R}$ *por* $(\boldsymbol{\beta}\cdot A)(x) \,:=\, \langle \boldsymbol{\beta}, A(x)\rangle_N \quad \forall\, x \in X$, *donde* $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ *es el producto escalar usual de* $\mathbb{R}^N$. *Demuestre que un vector* $\boldsymbol{\alpha}$ *de* $\mathbb{R}^N$ *pertenece a* $\overline{A\big(\bar{B}(\mathbf{0},1)\big)}$ *si y sólo si* $|\,\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}\rangle_N\,| \,\leq\, \|\boldsymbol{\beta}\cdot A\|_{X'} \quad \forall\, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$.
[INDICACION: *Para la implicación recíproca razone por contradicción*].

2.28 *Dados* $k \in \mathbb{N}$ *y* $a,\, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$, *denote por* $P_k([a,b])$ *al espacio de polinomios de grado* $\leq\, k$ *definidos sobre* $[a,b]$. *Equivalentemente,* $p \,\in\, P_k([a,b])$ *si y sólo si existen* $\alpha_0,\, \alpha_1, \ldots,\, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *tales que* $p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, x^j \quad \forall\, x \in [a,b]$. *Demuestre que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen* $p_n \in P_n([a,b])$ *y* $\delta_n > 0$, *tales que*

$$\inf_{q\in P_{n-1}([a,b])} \int_a^b p_n(x) \Big\{ x^n + q(x) \Big\}\, dx \;\geq\; \delta_n\,.$$

2.29 *Dado* $k \in \mathbb{N}$, *defina los subespacios de dimensión finita de* $L^2(]-\pi,\pi[)$:

$$E_k \,:=\, \langle \Big\{ \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \Big\} \rangle \qquad \text{y} \qquad F_k \,:=\, \langle \Big\{ \psi_1, \ldots, \psi_k \Big\} \rangle\,,$$

donde $\varphi_j(x) \,:=\, \cos(jx)$ *y* $\psi_j(x) \,:=\, \sin(jx), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \forall\, x \in]-\pi,\pi[$. *Demuestre que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen* $(r_n, s_n) \,\in\, E_n \times F_n$ *y* $\varepsilon_n > 0$, *tales que*

$$\inf_{(\varphi,\psi)\in E_{n-1}\times F_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big\{ r_n + s_n \Big\} \Big\{ \varphi_n \,-\, \varphi \,+\, \psi_n \,-\, \psi \Big\} \,\geq\, \varepsilon_n\,.$$

2.30 *Sea* $X \,:=\, C([0,1])$ *provisto de la norma* $\|u\|_X := \text{máx}\Big\{ |u(t)| : \quad t \in [0,1] \Big\} \;\; \forall\, u \in X$, *y dado* $n \,\in\, \mathbb{N}$, *considere el subconjunto* $\Big\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \Big\}$ *de* X *definido por* $u_j(t) \,:=\, t^{j-1} \quad \forall\, t \in [0,1]\,, \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\}$. *Demuestre que existen un operador* $A \,\in\, \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ *y una constante* $C_n > 0$, *que depende sólo de* $\mathrm{P}_{n-1}([0,1])$, *el subespacio de polinomios de grado* $\leq n-1$ *definidos sobre* $[0,1]$, *tales que*

$$\|A\| \,\leq\, C_n \qquad \text{y} \qquad A(u_j) \,=\, e_j \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\}\,,$$

donde $\Big\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \Big\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^n$.

2.31 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*

i) *En el caso de un Hilbert, el Teorema de Hahn-Banach es consecuencia del Teorema de Representación de Riesz.*

ii) *El anulador de un subconjunto* S *de un espacio vectorial normado* X *es ortogonal a* S.

iii) Un subespacio U de un Hilbert H es denso en H si y sólo si $U^\perp$ es el vector nulo.

iv) El dual H' de un Hilbert H es también un Hilbert.

2.32 *Dados X e Y espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, considere subconjuntos $X_N := \Big\{x_1, x_2, \dots, x_N\Big\}$ e $Y_N := \Big\{y_1, y_2, \dots, y_N\Big\}$ de X e Y, respectivamente, tal que X_N es linealmente independiente. Demuestre que existen $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y una constante $C_N > 0$, la cual depende de X_N, tales que*

$$A(x_j) \,=\, y_j \quad \forall\, j \in \{1,2,\dots,N\} \quad y \quad \|A\| \,\le\, C_N \sum_{j=1}^{N} \|y_j\|\,.$$

2.33 *Dados un espacio vectorial normado $\big(X, \|\cdot\|\big)$ sobre $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, considere N subespacios de dimensión finita $U_1,\, U_2, \dots,\, U_N$ de X tales que para cada $I \subseteq \{1,2,...,N\}$ y para cada $j \notin I$ se tiene $U_j \cap \sum\limits_{i\in I} U_i \,=\, \big\{\mathbf{0}\big\}$. Además, sea $\Big\{f_1, f_2, \dots, f_N\Big\}$ un conjunto de funcionales tales que $f_j \in U_j' \quad \forall\, j \in \{1,2,\cdots,N\}$. Demuestre que existen $F \in X'$ y una constante $C > 0$ tales que*

$$F|_{U_j} \,=\, f_j \qquad \forall\, j \in \{1,2,...,N\} \qquad y \qquad \|F\|_{X'} \,\le\, C \max_{j\in\{1,2,...,N\}} \|f_j\|_{U_j'}\,.$$

[una variante de lo anterior está dada más adelante por el ejercicio 3.69].

2.34 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado, $n \in \mathbb{N}$, y considere $\big\{x_1, x_2, \dots, x_n\big\} \subseteq X$ y $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$|F(x_j)| \,\le\, \|\beta_j\, F\|_{X'} \quad \forall\, F \in X'\,, \quad \forall\, j \in \big\{1,2,\dots,n\big\}\,.$$

Demuestre que para cada $x \in V := \Big\langle\big\{x_1, x_2, \dots, x_n\big\}\Big\rangle$ existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_X \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\, \|\boldsymbol{\beta}\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclideana usual de $\mathbb{R}^n$.

2.35 *Sean U y V subespacios de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{R}$, tales que el subespacio $U \cap V$ es no trivial, y los conjuntos $U \backslash \bar{V}$ y $V \backslash \bar{U}$ son no vacíos. Demuestre que existe $F \in X'$ tal que*

$$F|_{U\cap V} \,=\, \mathbf{0}\,, \quad F|_{U\backslash \bar{V}} \ne \mathbf{0}\,, \quad F|_{V\backslash \bar{U}} \ne \mathbf{0}\,, \quad y \quad \|F\| \le 2\,.$$

2.36 *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, denote $\mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^2$ y defina el espacio*

$$\mathbf{H}_{\mathtt{r},\mathtt{d}}(\Omega) := \Big\{\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega): \quad \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}) := \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in \mathrm{L}^2(\Omega) \\ y \qquad \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) := \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\}$$

con rot y div en el sentido distribucional, provisto del producto escalar

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathtt{r},\mathtt{d}} := \int_\Omega \Big\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}) + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\Big\} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{\mathtt{r},\mathtt{d}}(\Omega)\,,$$

y norma inducida $\|\cdot\|_{\mathtt{r},\mathtt{d}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathtt{r},\mathtt{d}}^{1/2}$.

a) *Pruebe que para todo* $\boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^2$, *sus rotor y divergencia distribucionales se reducen a* $\langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{curl}(\varphi) \rangle$ *y* $\langle \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{\tau}, \nabla \varphi \rangle$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *donde* $\mathbf{curl}(\varphi) := (\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1})$. *En particular, demuestre que si* $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *se tiene*

$$\langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{curl}(\varphi) \quad y \quad \langle \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}), \varphi \rangle = -\int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

b) *Utilice a) en conjunto con el hecho que* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *y* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *son Hilbert para probar que* $\big(\mathbf{H}_{\mathtt{r},\mathtt{d}}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathtt{r},\mathtt{d}}\big)$ *también lo es.*

c) *Sea* $a \in C(\bar{\Omega})$ *y suponga que existen constantes* α *y* β *tales que para todo* $x \in \bar{\Omega}$ *se tiene que* $0 < \alpha \le a(x) \le \beta$. *Demuestre que para cada* $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *existen funciones* $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, *y* $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, *tales que*

$$\int_\Omega \Big\{ a\, \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau} - f\, \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}) + g\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \Big\} \;=\; \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{\mathtt{r},\mathtt{d}}(\Omega)\,,$$

y deduzca a partir de esta identidad que existe una constante $C > 0$, *que depende sólo de* α, *tal que* $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{0,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} \;\le\; C\, \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$.

2.37 *Sean* $(\mathrm{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{H}})$ *y* $(\mathbf{Q}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Q}})$ *espacios de Hilbert reales, con operadores de Riesz respectivos dados por* $\mathcal{R}_{\mathrm{H}}$ *y* $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$, *y defina los espacios producto*

$$X \;=\; \mathrm{H}^n \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\tau} \;=\; (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} : \quad \tau_i \in \mathrm{H} \quad \forall\, i = \overline{1,n} \Big\}, \quad e$$
$$Y \;=\; \mathbf{Q}^{n\times n} \;:=\; \Big\{ \mathbf{u} \;=\; (u_{ij})_{n\times n} : \quad u_{ij} \in \mathbf{Q} \quad \forall\, i,\, j = \overline{1,n} \Big\},$$

los cuales se proveen de los productos escalares

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_X \;:=\; \sum_{i=1}^n \langle \zeta_i, \tau_i \rangle_{\mathrm{H}} \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta} \;=\; (\zeta_i)_{i=\overline{1,n}}\,,\; \boldsymbol{\tau} \;=\; (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} \in X\,, \quad y$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_Y \;:=\; \sum_{i,j=1}^n \langle u_{ij}, v_{ij} \rangle_{\mathbf{Q}} \qquad \forall\, \mathbf{u} \;=\; (u_{ij})_{n\times n},\, \mathbf{v} \;=\; (v_{ij})_{n\times n} \in Y\,.$$

Exprese los operadores de Riesz de X *(denotado* $\mathcal{R}_X$*) e* Y *(denotado* $\mathcal{R}_Y$*) en términos de* $\mathcal{R}_{\mathrm{H}}$ *y* $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$, *respectivamente.*

3. Operadores Lineales

3.1 *Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X)$. Demuestre que*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x,\, z \in X \\ \|x\|,\, \|z\| \leq 1}} |\langle A(x), z\rangle| \,.$$

3.2 *Sean X, Y, Z espacios de Banach y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' también lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.*

3.3 [Inverso a izquierda]. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(A) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Existe $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $B\,A = I : X \to X$.*

b) *$R(A)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y.*

c) *Confirme o desmienta si en el caso en que ambos espacios son Hilbert, dicho suplemento topológico está dado por $R(A)^{\perp}$.*

3.4 *Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = t^j \;\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X \,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.
Ind.: *Para todo $j \in \{0,1,...,n\}$ defina $F_j : X \to \mathbb{R}$ por $F_j(u) := \displaystyle\int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \;\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.*

3.5 *Considere dos espacios vectoriales normados X e Y.*

a) *Sea $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Demuestre que existe un operador $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X))$ tal que $\mathcal{T}_0 A_0 = A_0^{-1}$ y $||\mathcal{T}_0|| = ||A_0^{-1}||/||A_0||$.*

b) *Pruebe que si Y es Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y',X'))$ es un operador biyectivo, entonces $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(Y',X'), \mathcal{L}(X,Y))$.*

3.6 *Sean X, Y espacios de Banach y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

a) *Demuestre que $R(A)^0 = N(A')$ y que*

$$N(A') = \{0\} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{R(A)} = Y.$$

b) *Pruebe que si $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$, entonces $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.*

3.7 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X. Pruebe que el aniquilador de $(\frac{X}{M})'$ coincide con M.*

3.8 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $T : X' \to Y'$ un operador lineal cerrado y biyectivo. Demuestre que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y', X')$.*

3.9 *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X'$ $\forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
IND.: *Utilizar el* TEOREMA DE BANACH-STEINHAUSS.

3.10 *Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$, con $||A|| < 1$. Demuestre que $(I + A)$ es invertible y que*

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X, X)$. Muestre también que

$$||(I + A)^{-1}|| \,\leq\, \frac{1}{1 - ||A||}.$$

3.11 *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. El grafo de T se denota por $\mathcal{G}_T$ y se define como*

$$\mathcal{G}_T := \{(x, y) \in X \times Y : \quad x \in D(T), \; y = Tx\}$$

Suponga que $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{G}_T$ son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que T es acotado sobre $\mathcal{D}(T)$.

3.12 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Un operador lineal $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ se dice una extensión de T si $D(T) \subseteq D(\tilde{T})$ y $Tx = \tilde{T}x \quad \forall\, x \in D(T)$.*
DEFINICIÓN. *Se dice que $\overline{T} : D(\overline{T}) \subseteq X \to Y$ es la* CLAUSURA *de T, si:*

- **i)** *$\overline{T}$ es un operador lineal cerrado*
- **ii)** *$\overline{T}$ es una extensión de T*
- **iii)** *Si $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subseteq X \to Y$ es cualquier operador con las propiedades* **i)** *y* **ii)**, *entonces $\tilde{T}$ es una extensión de $\overline{T}$.*

Sean X, Y espacios de Banach, y sea $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T tiene una clausura $\overline{T}$ si y sólo si la siguiente condición se satisface

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq D(T), \; x_n \to 0 \;, \; Tx_n \to y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

3.13 *Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0, \pi]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones trigonométricas $p_j, q_j \in X$, $j \in \{0, 1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \operatorname{sen}(jt)$ y $q_j(t) = \cos(jt)$, $\forall\, t \in [0, \pi]$, se define el operador $A : X \to X$ como*

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \,+\, \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^{\pi} u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

3.14 *Sean X, Y espacios de Hilbert y considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Recuerde que el operador adjunto de Hilbert de A se denota $A^* : Y \to X$, donde para cada $y \in Y$, $A^*y \in X$ es el único elemento (dado por* Teorema de Representación de Riesz*) tal que $\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \quad \forall\, x \in X$.*

a) *Pruebe nuevamente que $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ y $||A^*|| = ||A||$, y deduzca también que $(A^*)^* = A$.*

b) *Demuestre que A^* es inyectivo si y sólo si $R(A)$ es denso en Y.*

c) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle\inf_{z \in N(A)} ||x - z|| \le \beta\, ||Ax|| \quad \forall\, x \in X$, y demuestre que $R(A) = N(A^*)^\perp$.*

d) *Pruebe que $A^* = R_X\, A'\, R_Y^{-1}$, donde $R_X : X' \to X$ y $R_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz. Concluya además que ${}^oN(A') = N(A^*)^\perp$.*

3.15 *Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U,V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\alpha\, ||F||_{U'} \;\le\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \in \mathcal{D}(P)\,.$$

3.16 *Sean X, Y espacios de Banach y $A : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que si $GA \in X'$ $\forall\, G \in Y'$, entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
Ind.: *Hacer una demostración alternativa a la sugerida en el Ejercicio 3.9 utilizando ahora el* Teorema del Grafo Cerrado *en vez del* Teorema de Banach-Steinhauss.

3.17

a) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de* Hilbert. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como*

$$A(u) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y encuentre explícitamente el operador $A^* : H \to H$.

b) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de* Hilbert *$L^2(0,1)$ provisto del producto escalar*

$$\langle u, v\rangle \;:=\; \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\; v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y autoadjunto, *esto es $A \in \mathcal{L}(H,H)$ y $A = A^*$.*

3.18 *Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Descomposición Ortogonal, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la* PROYECCIÓN *de x en M, y el operador $P := X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$ y se dice que P es una proyección.*

i) *Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$.*

ii) *Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.*

3.19 ([4], [32]) *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.*

a) *Demuestre que* $\displaystyle\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) *Suponga que existe $\beta > 0$ tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{v\in V^{\perp}\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\,\|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$*, y pruebe que*

$H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

3.20 [PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE]. *Sean X, Y Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.*

a) *Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^{\perp}$. Pruebe, además, que B es un* inverso a derecha *de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.*

b) *Defina $A_0 : V^{\perp} \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^{\perp}$, es decir $A_0 = A|_{V^{\perp}}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.*

c) *Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio* CERRADO *propio de Y.*

3.21 ([5], [20]) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $P \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial. Se dice que P es un* PROYECTOR *si satisface $P^2 = P$. En tal caso se dice que P es un* PROYECTOR ORTOGONAL *si además verifica que $\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall\, u \in R(P), \quad \forall\, v \in N(P)$.*

a) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es un proyector entonces $H = N(P) \oplus R(P)$ y $\|P\| \geq 1$.*

b) *Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *P es un proyector ortogonal.*

ii) *$R(P) = N(P)^{\perp}$.*

iii) *P es autoadjunto*

c) *Demuestre que si $P \in \mathcal{L}(H,H)$ es un proyector ortogonal entonces $\|P\| = 1$.*

3.22 [Clausura de operadores]. *Sean X e Y Banach. Se dice que un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ admite una clausura si existe un operador lineal $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Y$ tal que B es una extensión de A y $G(B) = \overline{G(A)}$. Demuestre que A admite una clausura si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $(x_n, A(x_n)) \overset{n\to\infty}{\to} (\mathbf{0}, y)$, con $y \in Y$, se tiene necesariamente que $y = \mathbf{0}$ [Notar que el presente enunciado es equivalente al del Ejercicio 3.12].*

3.23 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.*

a) *Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que*

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

b) *Considere el conjunto*

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{y \in H : \text{ existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}\,,$$

y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) := \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

3.24 ([33]) *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H,H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbb{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto proceda como se indica:*

a) *Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$. Pruebe que $S = R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbb{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s \in S$ que satisfacen $\langle p, q\rangle = \langle r, s\rangle = 1$, tales que*

$$\mathbf{Q}(v) = \langle q, v\rangle\, p \qquad y \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) = \langle s, v\rangle\, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

b) *A partir de la identidad $v = \mathbf{Q}(v) + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2\,\|q\|^2 = \|r\|^2\,\|s\|^2 = 1 - \langle p, r\rangle\,\langle q, s\rangle$ y concluya así que*

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

c) *Dado $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} := \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S,S)$, observe que la dimensión de S es ≤ 2, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \leq \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.*

d) *Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.*

3.25 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert complejo y considere $H \times H$ provisto del producto escalar*

$$\langle (u,v), (z,w)\rangle_{H\times H} := \langle u, z\rangle_H + \langle v, w\rangle_H \qquad \forall\, (u,v)\,,\ (z,w) \in H \times H\,.$$

Además, dado $A \in \mathcal{L}(H,H)$, defina el operador $B : H \times H \to H \times H$ por

$$B((u,v)) := (\imath\, A(v), -\,\imath\, A^*(u)) \qquad \forall\, (u,v) \in H \times H\,.$$

Demuestre que $\|B\| = \|A\|$ y que B es autoadjunto.

3.26 *Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \to F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:*

a) *El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.*

b) *Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.*

c) *$R(T)$ es cerrado en F, y T es inyectivo.*

3.27 *Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.*

a) *Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \,\in\, H^1(\Omega)\,.$$

b) *Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:*

$$-\,\Delta z \,+\, z \;=\; r \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} \,=\, 0 \quad \textit{en} \quad \Gamma\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** *(no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.*

c) *Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que*

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \;\leq\; C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \,\in\, L^2(\Omega)\,.$$

3.28 *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real y sea $A \in \mathcal{L}(H, H)$ el operador inducido por una forma bilineal y acotada $a : H \times H \to \mathbb{R}$. Además, sea Π la proyección ortogonal de H sobre un subespacio cerrado S, y suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha\, \langle v, v \rangle \quad \forall\, v \,\in\, S$. Demuestre que $\Pi A \,:\, S \,\to\, S$ es una biyección lineal.*

3.29 ([23]) *Sea $(H, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle)$ un espacio de Hilbert y sean $V_1, V_2, ..., V_N$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H, esto es $v_i \perp v_j \;\forall\, v_i \in V_i,\; \forall\, v_j \in V_j,\; \forall\, i \neq j$. Demuestre que $\mathbb{I} - \mathbb{P} \,=\, \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_N$, donde $\mathbb{P} : H \longrightarrow V_1^\perp \cap V_2^\perp \cap \cdots \cap V_N^\perp$ y $\mathbb{P}_j : H \longrightarrow V_j$ son los proyectores ortogonales respectivos.*

3.30 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y considere el espacio de Hilbert $V \,:=\, [L^2(\Omega)]^{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$ con el producto escalar $\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$, donde*

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \;:=\; \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \tau_{ij} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} \,:=\, (\sigma_{ij})_{n\times n}\,, \quad \boldsymbol{\tau} \,:=\, (\tau_{ij})_{n\times n} \,\in\, V\,.$$

A su vez, defina el subespacio $U \;:=\; \{\, \alpha\, \mathbb{A} \,+\, \beta\, \mathbb{B} \;:\quad \alpha\,,\, \beta \,\in\, \mathbb{R} \,\} \;=\; \langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}\, \rangle$, donde $\mathbb{A} \,:=\, (a_{ij})_{n\times n}$ y $\mathbb{B} \,:=\, (b_{ij})_{n\times n}$ están definidos por

$$a_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } j = i-1 \\ 0 & \textit{e.o.c.} \end{cases} \qquad \textit{y} \qquad b_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } j = i+1 \\ 0 & \textit{e.o.c.} \end{cases}\,.$$

Encuentre $U^\perp$ y defina explícitamente los proyectores ortogonales sobre U y $U^\perp$. Qué sucede con estos proyectores si U se reemplaza por $\langle\, \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{I}\}\, \rangle$, donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad de V ?

3.31 *Sean* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)_2$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{C}$ *con normas inducidas* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$, *respectivamente, y sea* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *tal que* $\|T(x)\|_2 \,=\, \|x\|_1 \quad \forall\, x \in H_1$. *Demuestre que* $\langle T(x), T(y)\rangle_2 \,=\, \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x,\, y \,\in\, H_1$.
IND.: *Considere las expresiones nulas* $\|T(x+y)\|^2 - \|x+y\|^2$ *y* $\|T(x+iy)\|^2 - \|x+iy\|^2$.

3.32 *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, *defina el operador* $A : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *por*

$$A(u) \,:=\, \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \,\in\, H^1(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \,\subseteq\, H^1(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \,\subseteq\, L^2(\Omega)$. *Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^*.

3.33 *Sea* $X \,:=\, C[0,1]$ *provisto de la norma uniforme, y sean* $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \,\subseteq\, X$ *tales que la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} p_j(s)\, q_j(t)$ *converge uniformemente a una funcion continua* $K : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *es decir*

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} \left| K(s,t) \,-\, \sum_{j=1}^{N} p_j(s)\, q_j(t) \right| \right\} \,=\, 0\,.$$

A su vez, sea $F_j \in X'$ *definido por* $F_j(u) \,:=\, \displaystyle\int_0^1 q_j(t)\, u(t)\, dt \quad \forall\, u \in X$. *Pruebe que para todo* $G \in X'$, *la serie* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} G(p_j)\, F_j$ *es convergente en* X'. *Identifique el valor del límite respectivo en términos del adjunto de un operador conveniente.*

3.34 ([4], [32]) [LA CONDICIÓN INF-SUP CONTINUA]. *Sean* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert y considere* $A \,\in\, \mathcal{L}(X, Y)$. *Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A *es sobreyectivo.*

ii) $A^* : Y \to X$ *es inyectivo y de rango cerrado.*

iii) Existe $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle \|A^*(y)\|_X \,:=\, \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\langle A(x), y\rangle_Y\,|}{\|x\|_X} \,\geq\, \alpha\, \|y\|_Y \quad \forall\, y \,\in\, Y\,.$

iv) Existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ *tal que* $A\,B \,=\, I$ *en* Y *y* $B\,A \,=\, I - P$ *en* X, *donde* $P : X \to N(A)$ *es el proyector ortogonal.*

3.35 *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, *defina el operador* $A : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ *por*

$$A(u) \,:=\, \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Delta u\, \Delta u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \,\in\, H^2(\Omega)\,,$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \,\subseteq\, H^2(\Omega)$ *y* $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \,\subseteq\, H^1(\Omega)$. *Demuestre que* A *es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto* A^*.

3.36 *Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.*

3.37 *Sean V y W subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y sean $P : H \to V$ y $Q : H \to W$ los proyectores ortogonales respectivos. Demuestre que*

$$\langle (Q - P)(x), x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H \quad \text{si y sólo si} \quad V \subseteq W\,.$$

3.38 *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$ por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)$$

donde $\{u_1, u_2, ..., u_N\} \subseteq H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_N\} \subseteq H^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

3.39 *El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras tres situaciones distintas, pero con características similares.*

a) *Sean $\Omega :=]a, b[$, $n \in \mathbb{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha,\, \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que*

$$\alpha \int_\Omega \left(u_1^{(m)}(t)\right)^2 dt + \beta \int_\Omega \left(u_2^{(m)}(t)\right)^2 dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v}:=(v_1,v_2)\in H^m(\Omega)\times H^m(\Omega) \\ v_1(t_i) - v_2(t_i) = z_i \ \forall\, i}} \left\{ \alpha \int_\Omega \left(v_1^{(m)}(t)\right)^2 dt + \beta \int_\Omega \left(v_2^{(m)}(t)\right)^2 dt \right\}$$

Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i\ \forall\, i$? Explique y fundamente.

b) *Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, y consideremos una base $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ de S. Además, sea $\Pi : H \to S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_N)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i \rangle_H = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, y de modo que*

$$\|\Pi(u)\|_H = \min_{\substack{v \in H \\ \langle v, p_i \rangle_H = z_i \ \forall\, i}} \|\Pi(v)\|_H$$

Deduzca un algoritmo para calcular u.

c) *Sean $\Omega :=]-\pi, \pi[$ y $\left(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}\right)$ el espacio de Sobolev de orden 1. A su vez, sea $n \in \mathbb{N}$ y considere los conjuntos de funciones $\{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ definidos por $p_k(t) := \operatorname{sen}(kt)$ y $q_k(t) := \cos(kt) \quad \forall\, t \in [-\pi, \pi], \quad \forall\, k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Entonces, dado $\mathbf{z} := (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\langle u_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle u_2, q_k \rangle_{1,\Omega} = z_k \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que*

$$\int_\Omega \left(u_1'(t)\right)^2 dt + \int_\Omega \left(u_2'(t)\right)^2 dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v}:=(v_1,v_2)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \\ \langle v_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle v_2, q_k \rangle_{1,\Omega} = z_k \ \forall\, k}} \left\{ \int_\Omega \left(v_1'(t)\right)^2 dt + \int_\Omega \left(v_2'(t)\right)^2 dt \right\}$$

3.40 *Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X, y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y. Demuestre que:*

a) $\mathrm{dist}(f, G^o) \;=\; \sup\limits_{\substack{x\in\overline{G} \\ \|x\|\le 1}} |f(x)| \qquad \forall\, f \,\in\, X'$.

b) $\overline{N} \;=\; \big({}^oN\big)^o$.

c) $\mathrm{dist}(y, {}^o N) \;=\; \sup\limits_{\substack{g\in\overline{N} \\ \|g\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, y \,\in\, Y$.

d) $\mathrm{dist}(g, \overline{N}) \;=\; \sup\limits_{\substack{y\in {}^oN \\ \|y\|\le 1}} |g(y)| \qquad \forall\, g \,\in\, Y'$.

3.41 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X := L^2(\Omega)$ e $Y := \mathbb{R}^{2\times 2}$ provistos de los productos escalares*

$$\langle u, v\rangle_X \;:=\; \int_\Omega u\, v \quad \forall\, u,\, v \,\in\, X\,, \qquad \langle A, B\rangle_Y \;:=\; \mathrm{tr}\big(A^{\mathtt{t}}\, B\big) \quad \forall\, A,\, B \,\in\, Y\,,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) \;:=\; \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Omega u & \displaystyle\int_\Omega x\, u \\ \displaystyle\int_\Omega x\, u & \displaystyle\int_\Omega x^2\, u \end{pmatrix} \qquad \forall\, u \,\in\, X\,.$$

i) *Demuestre que $\mathcal{A}$ es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.*

ii) *Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.*

iii) *Defina $\tilde{Y} \;:=\; \big\{ B \in Y : \quad B^{\mathtt{t}} \;=\; -\, B \big\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \;\ge\; C \inf_{B\in\tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall\, A \in Y\,.$$

iv) *Reemplace $X := L^2(\Omega)$ por $X := H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$.*

3.42 *Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \to Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \to Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y := Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, definido por $A(x) := (A_1(x), A_2(x))$ $\forall\, x \,\in\, \mathcal{D}(A) \;:=\; \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_i, $i \in \{1, 2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_j, $\forall\, j \in \{1, 2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado.*

3.43 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*

i) *Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.*

ii) *Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H,Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q,H)$ es biyectivo.*

iii) *Existen operadores compactos que no son cerrados.*

iv) *Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, también es cerrado.*

v) *Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, es acotado.*

vi) *Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$ es cerrado.*

3.44 *Sea $\Omega :=]0,1[$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X = L^2(\Omega)$ e $Y = \ell_2(\mathbb{R}) := \left\{ A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$, provistos de los productos escalares usuales*

$$\langle u,v\rangle_X := \int_0^1 u\, v \qquad \forall\, u,\, v \in X\,,$$

$$\langle A,B\rangle_Y := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k \qquad \forall\, A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,,\ B := \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Y,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \left\{ \frac{1}{k} \int_0^1 x^k\, u \right\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall\, u \in X\,.$$

i) Demuestre que $\mathcal{A}$ está bien definido y es lineal y acotado, y luego calcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$ y $\overline{R(\mathcal{A}^*)}$.

ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

3.45 ([23]) *El presente ejercicio apunta a caracterizar la sobreyectividad de un operador cuyo rango está contenido en un espacio producto, en términos de la sobreyectividad de sus respectivas componentes.*

a) Recuerde primero que, dados $m,\, n \in \mathbb{N}$ y un operador lineal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, el Teorema de las Dimensiones establece que $n = \dim N(\mathcal{B}) + \dim R(\mathcal{B})$. Luego, suponga que $m = m_1 + m_2$ y que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ es lineal para cada $i \in \{1,2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. *ii) $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.*

b) Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $U^\perp \subseteq U + V$. *ii) $X = U + V$.* *iii) $U^\perp + V^\perp \subseteq U + V$.*

c) *Sean* X, Y_1 *e* Y_2 *espacios de Hilbert arbitrarios y defina* $Y := Y_1 \times Y_2$. *Luego, sea* $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,Y)$ *tal que* $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in X$, *donde* $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}(X, Y_i) \quad \forall\, i \in \{1,2\}$, *y demuestre que* $\mathcal{B}$ *es sobreyectivo si y sólo si*

i) $\mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$ *son sobreyectivos.* *ii)* $X = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

3.46 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach para los cuales existe una biyección* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, *y sea* Z *un subespacio de* X. *Pruebe que todo* $g \in Z'$ *puede "extenderse" a un* $G \in Y'$ *tal que* $\|G\|_{Y'} \cong \|g\|_{Z'}$.

3.47 *Sea* X *un espacio de Banach real y sea* $\mathbf{a}$ *una forma bilineal sobre* X, *esto es,* $\mathbf{a} : X \times X \to \mathbb{R}$ *es una aplicación que satisface:*

i) $\mathbf{a}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X,$

ii) $\mathbf{a}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathbf{a}(x,y) + \beta\, \mathbf{a}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, y,\, z \in X.$

En tal caso se define $\mathbf{A} : X \to X'$ *como* $\mathbf{A}(x)(y) := \mathbf{a}(x,y) \quad \forall\, x,\, y \in X$, *el cual se llama* OPERADOR LINEAL INDUCIDO POR $\mathbf{a}$. *Asuma entonces que existen constantes* M, $m > 0$ *tales que*

iii) $|\mathbf{a}(x,y)| \le M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x,\, y \in X, \quad y$

iv) $\mathbf{a}(x,x) \ge m\, \|x\|^2 \quad \forall\, x \in X,$

y demuestre que $\mathbf{A}$ *es acotado, inyectivo y de rango* $R(\mathbf{A})$ *cerrado. Pruebe además que* ${}^{\circ}R(\mathbf{A}) = \big\{\mathbf{0}\big\}$, *defina el operador adjunto* $\mathbf{A}' : (X')' \to X'$, *y comente bajo qué supuesto adicional sobre el espacio* X *podrá concluirse, a partir de las hipótesis i) - iv), que* $\mathbf{A}$ *es biyectivo.*

3.48 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach reales y sea* $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, esto es,* $\mathcal{A}$ *satisface:*

i) $\mathcal{A}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, z \in X\,,\ \forall\, y \in Y,$

ii) $\mathcal{A}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in X\,,\ \forall\, y,\, z \in Y.$

Asuma adicionalmente que $\mathcal{A}$ *es acotada y débilmente coerciva, es decir:*

iii) *existe* $M > 0$ *tal que* $|\mathcal{A}(x,y)| \le M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y,$

iv) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \ge \alpha\, \|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

v) $\displaystyle\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

y defina los operadores lineales $\mathbf{A} : X \to Y'$ *y* $\mathbf{B} : Y \to X'$ *como*

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad y \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\,.$$

a) *Demuestre que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *están bien definidos y son acotados.*

b) *Pruebe que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son inyectivos y que* $R(\mathbf{B})$ *es cerrado en* X'.

c) *Defina explícitamente los operadores* $\mathbf{A}' : Y'' \to X'$ *y* $\mathbf{B}' : X'' \to Y'$, *y deduzca que* $\mathbf{B}'$ *es sobreyectivo.*

d) *Suponga en particular que* X *e* Y *son espacios de Hilbert y demuestre en tal caso que* $\mathcal{R}_X \circ \mathbf{B} = \big(\mathcal{R}_Y \circ \mathbf{A}\big)^*$, *donde* $\mathcal{R}_X$ *y* $\mathcal{R}_Y$ *son las aplicaciones de Riesz respectivas. Concluya a partir de esta identidad y iv) que* $\mathbf{A}$ *es biyectivo.*

3.49 *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *considere una partición* $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ *de* $\Omega :=]0,1[$, *y defina el operador lineal* $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ *por*

$$A(u) := \Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big\{ t\, u(t) + u'(t) \Big\}\, dt \Big)_{\overline{j=1,n}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $H^1(\Omega)$ *y* $\mathbb{R}^n$ *se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que* $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^n)$, *defina explícitamente el operador* $A^* : \mathbb{R}^n \to H^1(\Omega)$, *y pruebe que* $\|A^*\| \le 2/\sqrt{3}$.

3.50 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathcal{T}$ *un conjunto finito de triángulos* T, *cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que* $\bar{\Omega} = \cup\{T : \quad T \in \mathcal{T}\}$. *Defina* $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ *por*

$$A(u) := \left(\int_T \Big\{ u(x) \,+\, x \cdot \nabla u(x) \Big\}\, dx \right)_{T \in \mathcal{T}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

donde N *es la cardinalidad de* $\mathcal{T}$, *y los espacios* $H^1(\Omega)$ *y* $\mathbb{R}^N$ *se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que* $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^N)$ *y defina explícitamente el operador* $A^* : \mathbb{R}^N \to H^1(\Omega)$.

3.51 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no necesariamente ciertas (a menos que se tenga una hipótesis extra):*

i) *La suma de dos operadores cerrados es un operador cerrado.*

ii) *Si* X *es un Hilbert y* A, $B \in \mathcal{L}(X)$ *son autoadjuntos e inyectivos, entonces* $R(A) = R(B)$.

iii) *Si* X *es un espacio vectorial normado y* $A : X \to X'$ *es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces* A^{-1} *es acotado.*

iv) *Si* X *e* Y *son Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ *es un operador lineal cerrado no acotado, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es un subespacio cerrado propio de* X.

v) *El adjunto de todo operador lineal, acotado y sobreyectivo de un Hilbert* X *en un Hilbert* Y *es inyectivo.*

vi) *La suma de un operador acotado con uno cerrado es un operador cerrado.*

vii) *Si X e Y son espacios vectoriales normados y $A : \mathcal{L}(X,Y) \to Y'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.*

viii) *Si X e Y son espacios de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ es un operador lineal cerrado e inyectivo tal que $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subseteq Y \to X$ no es acotado, entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y.*

ix) *El teorema del grafo cerrado no puede ser demostrado con el teorema de la aplicación abierta.*

3.52 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *A' es sobreyectivo, es decir $R(A') = X'$.*

b) *Existe $c \geq 0$ tal que*
$$\|x\| \,\leq\, c\,\|A(x)\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

c) *$N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(A)$ es cerrado.*

3.53 *Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, considere los espacios de Hilbert*

$$L^2(\Omega) \,:=\, \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \quad v \text{ medible}\,, \quad \int_\Omega v^2 < +\infty \Big\}$$

y

$$H(\mathrm{div};\Omega) \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \Big\}\,,$$

provistos, respectivamente, de los productos interiores

$$\langle v, w\rangle_{0,\Omega} \,:=\, \int_\Omega v\,w \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div},\Omega} \,:=\, \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} \Big\}\,,$$

con normas inducidas $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{div},\Omega}$. Demuestre que para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada conjunto $\Big\{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \ldots, \boldsymbol{\tau}_N\Big\} \subseteq H(\mathrm{div};\Omega)$ se tiene que

$$A_N \,:=\, \bigcap_{n=1}^{N} \Big\{ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} : \quad \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \quad \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_n\|_{\mathrm{div},\Omega} < n \Big\} \quad \text{es abierto en } L^2(\Omega)\,.$$

3.54 *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con normas inducidas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sea $A : \mathcal{D}(A) = H \to Q$ un operador lineal. Suponga que para cada $q \in Q$ existe $c_q > 0$ tal que*

$$|\langle q, A(\boldsymbol{\tau})\rangle_Q| \,\leq\, c_q\,\|\boldsymbol{\tau}\|_H \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

Pruebe de dos maneras distintas que A es acotado.

3.55 *Sean S_1 y S_2 subespacios cerrados de un Banach X. Suponga primero que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que*

$$\operatorname{dist}(x_n, S_1 \cap S_2) \,=\, 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \Big\{\operatorname{dist}(x_n, S_1) \,+\, \operatorname{dist}(x_n, S_2)\Big\} \,=\, 0\,,$$

y concluya que $S_1 + S_2$ es un subespacio propio de $\overline{S_1 + S_2}$. Suponga luego que existen un subespacio S denso en X y una constante $c > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, S_1 \cap S_2) \,\le\, c\Big\{\operatorname{dist}(x, S_1) \,+\, \operatorname{dist}(x, S_2)\Big\} \qquad \forall\, x \in S\,,$$

y demuestre en tal caso que $S_1 + S_2$ es cerrado.

3.56 *Sean A y B subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre $\mathbb{R}$.*

6.1) Pruebe que $\operatorname{dist}(x, A^\perp) \,=\, \sup\limits_{\substack{a\in A\\ \|a\|\le 1}} |\langle a, x\rangle| \qquad \forall\, x \in H.$

6.2) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *a)* $A \,+\, B$ *es cerrado en* H.
- *b)* $A^\perp \,+\, B^\perp \,=\, (A\cap B)^\perp$.
- *c)* $A^\perp \,+\, B^\perp$ *es cerrado en* H.
- *d)* $A \,+\, B \,=\, (A^\perp \cap B^\perp)^\perp$.

3.57 *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to Q$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H. Entonces se introduce el* OPERADOR ADJUNTO *de A como $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subseteq Q \to H$, donde*

$$\mathcal{D}(A^*) \,:=\, \Big\{q \in Q : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau}^* \in H \ \text{tal que} \quad \langle A(\boldsymbol{\tau}), q\rangle_Q = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^*\rangle_H \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}(A)\Big\}\,,$$

y en tal caso se define $A^*(q) \,=\, \boldsymbol{\tau}^* \quad \forall\, q \in \mathcal{D}(A^*)$.

a) Demuestre que A^* está bien definido y es un operador cerrado, y luego deduzca el concepto de autoadjunto cuando $H = Q$.

b) Suponga en particular que $Q \,=\, Q_1 \times Q_2$, donde $(Q_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(Q_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ son también espacios de Hilbert reales, y que

$$A(\boldsymbol{\tau}) = (A_1(\boldsymbol{\tau}), A_2(\boldsymbol{\tau})) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}(A)\,,$$

donde $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq H \to Q_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq H \to Q_2$ son operadores lineales con $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(A)$ denso en H. Describa los dominios $\mathcal{D}(A_1^*)$, $\mathcal{D}(A_2^*)$, y $\mathcal{D}(A^*)$ sólo en términos de A_1 y A_2, y demuestre que

$$A^*(q) \,=\, A_1^*(q_1) \,+\, A_2^*(q_2) \qquad \forall\, q \,:=\, (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)\,.$$

Qué relación (si es que) existe entre $\mathcal{D}(A^*)$ y $\mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)$? Deduzca finalmente que si A es cerrado y sobreyectivo entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|A_1^*(q_1) \,+\, A_2^*(q_2)\|_H \ge\, c\,\|q\|_Q \qquad \forall\, q \,:=\, (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)\,.$$

3.58 *Sean X e Y espacios de Banach, y sea $\mathcal{J} : Y' \times X' \to X' \times Y'$ la aplicación definida por $\mathcal{J}(G,F) = (-F,G) \ \ \forall\,(G,F) \in Y' \times X'$. A su vez, sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, tal que $\mathcal{J}(\mathcal{G}(A')) + N(A)^o \times N(A')$ es un subespacio cerrado de $X' \times Y'$. Demuestre que A es acotado.*

3.59 *Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, considere los espacios de Hilbert*

$$L^2(\Omega) \,:=\, \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \quad v \text{ medible}\,, \quad \int_\Omega v^2 < +\infty \Big\}$$

y

$$H(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau} := (\tau_1,\tau_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau} := \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \Big\}\,,$$

provistos, respectivamente, de los productos interiores

$$\langle v, w \rangle_{0,\Omega} \,:=\, \int_\Omega v\,w \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{rot},\Omega} \,:=\, \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau} \Big\}\,,$$

con normas inducidas $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{rot},\Omega}$. Demuestre que existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cada $v \in L^2(\Omega)$, existe $\boldsymbol{\zeta}_v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ con $\|\boldsymbol{\zeta}_v\|_{\mathrm{rot},\Omega} \,<\, \delta^{-1}$ tal que $v \,=\, \|v\|_{0,\Omega}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta}_v$.

3.60 *Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ para el cual existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|T(x)\| \,\geq\, \alpha\,\|x\| \quad \forall\,x \in X$. Pruebe que para cada $y \in Y$ existe un único $\bar{y} \in R(T)$ tal que $T^*(y) \,=\, T^*(\bar{y})$. Concluya, además, que $\|\bar{y}\| \,=\, \min\limits_{z \in N(T^*)} \|y - z\|$.*

3.61 *Sean $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H\big)$ y $\big(Q_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j\big)$, $j \in \{1,2,\dots,N\}$, espacios de Hilbert reales, y para cada $j \in \{1,2,\dots,N\}$ considere un operador $B_j \in \mathcal{L}(H,Q_j)$. A su vez, sea $Q \,:=\, Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_N$ provisto del producto escalar*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_Q \,:=\, \sum_{j=1}^N \langle p_j, q_j \rangle_j \qquad \forall\,\mathbf{p} := (p_1,p_2,\dots,p_N),\, \mathbf{q} := (q_1,q_2,\dots,q_N) \in Q\,,$$

y muestre que $\big(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q\big)$ es un espacio de Hilbert real. Luego, defina el operador $B : H \to Q$ por $B(\tau) \,:=\, (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_N(\tau)) \ \ \forall\,\tau \in H$, pruebe que $B \in \mathcal{L}(H,Q)$, y calcule explícitamente el operador adjunto $B^* : Q \to H$. Suponga ahora que los espacios involucrados son Banach y calcule el adjunto $B' : Q' \to H'$.

3.62 *Dados $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ e $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert reales, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas, y $F \in X'$, $G \in Y'$, considere el problema: Hallar $(\sigma,u) \in X \times Y$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) \ &= \ F(\tau) \qquad \forall\,\tau \in X\,, \\ b(\sigma,v) \ &= \ G(v) \qquad \forall\,v \in Y\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Pruebe que (4) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $(\sigma,u) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\sigma) \,+\, \mathbf{B}^*(u) \ &= \ \mathcal{R}_X(F)\,, \\ \mathbf{B}(\sigma) \ &= \ \mathcal{R}_Y(G)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, X)$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ son los operadores inducidos por a y b, respectivamente, mientras que $\mathcal{R}_X : X' \to X$ y $\mathcal{R}_Y : Y' \to Y$ denotan las aplicaciones de Riesz correspondientes. Además, en el caso particular en que X e Y son de dimensiones finitas n y m, respectivamente, concluya que (4) se transforma en un sistema lineal de $n+m$ ecuaciones y $n+m$ incógnitas.

3.63 *Determine,* **justificadamente**, *si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*

i) Dados X e Y espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene que $N(A)$ es cerrado si y sólo si $R(A)$ también lo es.

ii) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene que $R(A')$ es cerrado.

3.64 [ESTA ES UNA VERSIÓN MÁS GENERAL DEL EJERCICIO 3.60]. *Sean X e Y espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ para el cual existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\|T(x)\| + \|T^*(y)\| \geq \alpha \operatorname{dist}\Big((x, y), N(T) \times N(T^*)\Big) \qquad \forall\, (x, y) \in X \times Y\,. \tag{6}$$

a) *Defina el operador lineal $\mathcal{A} : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ por $\mathcal{A}(x, y) := (T(x), T^*(y))$ $\forall\, (x, y) \in X \times Y$, y demuestre que su adjunto $\mathcal{A}^* : Y \times X \longrightarrow X \times Y$ está dado por $\mathcal{A}^*(y, x) := (T^*(y), T(x)) \quad \forall\, (y, x) \in Y \times X$.*

b) *Pruebe que para cada $(x, y) \in X \times Y$ existe un único $(\bar{x}, \bar{y}) \in R(T^*) \times R(T)$ tal que $T(x) = T(\bar{x})$, $T^*(y) = T^*(\bar{y})$, y*

$$\|(\bar{x}, \bar{y})\| = \min_{(z,w) \in N(T) \times N(T^*)} \|(x, y) - (z, w)\|\,.$$

c) *Qué se concluiría en el caso en que, en vez de (6), se tiene que*

$$\|T(x)\| + \|T^*(y)\| \geq \alpha\, \|(x, y)\| \qquad \forall\, (x, y) \in X \times Y\,?$$

d) *Qué se concluiría en a) si se redefine $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ con $\mathcal{A}(x, y) := (T^*(y), T(x)) \quad \forall\, (x, y) \in X \times Y$?*

3.65 *Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert real $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ tales que $U + V$ es cerrado, y sean $P_U : H \longrightarrow U$, $P_V : H \longrightarrow V$, $P_+ : H \longrightarrow U + V$, y $P_\cap : H \longrightarrow U \cap V$ los proyectores ortogonales respectivos.*

a) *Demuestre que existen operadores lineales y acotados $P : H \longrightarrow U^\perp$ y $Q : H \longrightarrow V^\perp$ tales que $P_+ = \dfrac{1}{2}\big(P_U + P_V\big) + \dfrac{1}{2}\big(P + Q\big)$.*

b) *Pruebe que $P_+ = P_U + P_V$ si y sólo si $U \subseteq V^\perp$ (equivalentemente, $V \subseteq U^\perp$).*

c) *Demuestre que existen operadores lineales y acotados $S, T : H \longrightarrow \big(U \cap V\big)^\perp$ tales que $P_\cap = \dfrac{1}{2}\big(P_U + P_V\big) + \dfrac{1}{2}\big(S + T\big)$.*

d) *Pruebe que $P_\cap = \dfrac{1}{2}\big(P_U + P_V\big)$ si y sólo si $P_U(x) + P_V(x) \in U \cap V \quad \forall\, x \in H$.*

3.66 *Dado X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, denote por X'' al dual de X', el cual se conoce también como bi-dual de X, esto es*

$$X'' := \big(X'\big)' := \Big\{\mathcal{F} : X' \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \mathcal{F} \text{ es lineal y acotado}\Big\},$$

y defina el operador $\mathcal{J}_X : X \longrightarrow X''$ por

$$\mathcal{J}_X(x)(F) := F(x) \qquad \forall\, F \in X', \qquad \forall\, x \in X\,.$$

a) *Pruebe que X'' es Banach y que $\mathcal{J}_X$ es lineal, inyectivo e isométrico (y por lo tanto acotado con $\|\mathcal{J}_X\|_{\mathcal{L}\left(X,X''\right)} = 1$).*

b) *Sean V un subespacio cerrado de X' y $\widetilde{F} \in X'$ tal que $\widetilde{F} \notin V$, y suponga que $\mathcal{J}_X$ es sobreyectivo. Demuestre que existe $\widetilde{x} \in X$, $\widetilde{x} \neq \mathbf{0}$, tal que $\widetilde{F}(\widetilde{x}) \neq 0$ y $G(\widetilde{x}) = 0$ $\forall\, G \in V$.*

3.67 *Sean X_1 y X_2 subespacios cerrados de un Banach X, y suponga que existe $C > 0$ tal que*

$$\operatorname{dist}(x, X_1 \cap X_2) \,\le\, C\Big\{\operatorname{dist}(x, X_1) \,+\, \operatorname{dist}(x, X_2)\Big\} \qquad \forall\, x \in X\,.$$

El propósito de este ejercicio es probar que $X_1 + X_2$ también es cerrado, para lo cual se sugiere proceder como se indica a continuación.

i) *Defina el operador $T : X \longrightarrow X/X_1$ por $T(x) := [x]$ (clase de x) $\forall\, x \in X$, y pruebe que T es lineal, acotado y sobreyectivo.*

ii) *Considere el operador $S := T|_{X_2}$, pruebe que $N(S) = X_1 \cap X_2$, y luego utilice la hipótesis y un resultado de caracterización para demostrar que $R(S)$ es cerrado en X/X_1. Finalmente, muestre que $X_1 + X_2 = T^{-1}(R(S))$ y concluya.*

3.68 [el presente enunciado es la versión Hilbert del Ejercicio 3.67]. *Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert H, y suponga que existe $C > 0$ tal que*

$$\operatorname{dist}(x, U \cap V) \,\le\, C\Big\{\operatorname{dist}(x, U) \,+\, \operatorname{dist}(x, V)\Big\} \qquad \forall\, x \in H\,. \tag{7}$$

El propósito de este ejercicio es demostrar que $U + V$ también es cerrado, para lo cual se sugiere considerar la proyección ortogonal $A : H \longrightarrow U^\perp$ y definir su restricción $B := A|_V : V \longrightarrow U^\perp$. Entonces, pruebe que $N(B) = U \cap V$, y luego utilice (7) para deducir que $R(B)$ es cerrado en $U^\perp$. Finalmente, muestre que $U + V = A^{-1}(B(V))$ y concluya.

3.69 [el presente enunciado es una variante del Ejercicio 2.33]. *Dado un espacio de Banach $\big(X, \|\cdot\|\big)$ sobre $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, considere N subespacios cerrados $U_1, U_2, \ldots, U_N$ de X tales que $U := \displaystyle\sum_{j=1}^{N} U_j$ también es cerrado, y de modo que para cada $I \subseteq \{1,2,...,N\}$ y para cada $j \notin I$ se tiene $U_j \cap \displaystyle\sum_{i\in I} U_i = \big\{\mathbf{0}\big\}$. Además, sea $\Big\{f_1, f_2, \ldots, f_N\Big\}$ un conjunto de funcionales tales que $f_j \in U_j'$ $\quad\forall\, j \in \{1,2,\cdots,N\}$. Demuestre que existen $F \in X'$ y una constante $C > 0$ tales que*

$$F|_{U_j} \,=\, f_j \qquad \forall\, j \in \{1,2,...,N\} \qquad \text{y} \qquad \|F\|_{X'} \,\le\, C \max_{j\in\{1,2,...,N\}} \|f_j\|_{U_j'}\,.$$

ind.: *considere la posibilidad de eventualmente aplicar TIA.*

3.70 *Dados X e Y espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, establezca fundadamente la relación que existe entre $\big(X \times Y\big)'$ y $X' \times Y'$, y entre sus normas respectivas. A su vez, dado $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, defina explícitamente $A'' := \big(A'\big)'$, y luego establezca la relación entre A'' y $\big(A^*\big)^*$ en el caso particular en que X e Y son espacios de Hilbert. Por otro lado, dados U y V subespacios cerrados de X, encuentre la relación (inclusión o igualdad) entre $U \cap V$ y ${}^\circ\big(U^\circ + V^\circ\big)$.*

3.71 *Dados $\Omega :=]0,1[$ y $n \in \mathbb{N}$, considere el espacio matricial sobre $\mathbb{R}$*

$$X = [H^1(\Omega)]^{n\times n} := \Big\{\mathbf{u} = (u_{ij})_{n\times n} : \quad u_{ij} \in H^1(\Omega) \quad \forall\, i,\, j = \overline{1,n}\Big\},$$

el cual se provee del producto escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{ij}, v_{ij}\rangle_{1,\Omega} \qquad \forall\, \mathbf{u} = (u_{ij})_{n\times n},\, \mathbf{v} = (v_{ij})_{n\times n} \in X\,,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}$ denota el producto escalar usual de $H^1(\Omega)$.

a) *Demuestre que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Hilbert, y exprese su operador de Riesz $\mathcal{J}_X$ asociado en términos de aquel de $H^1(\Omega)$ (denotado por $\mathcal{J}$).*

b) *Defina el operador $A : X \longrightarrow H^1(\Omega)$ por $A(\mathbf{u}) := \mathrm{tr}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} \;\; \forall\, \mathbf{u} \in X$, y calcule explícitamente sus adjuntos A^* y A'.*

c) *Defina el operador $B : X \longrightarrow L^2(\Omega)$ por $B(\mathbf{u}) := \mathrm{tr}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} \;\; \forall\, \mathbf{u} \in X$, y calcule explícitamente sus adjuntos B^* y B'.*

d) *Sean p_j, $j = \overline{1,n}$, los polinomios mónicos, esto es $p_j(t) := t^j \;\; \forall\, t \in]0,1[$, denote por U_j el subespacio de $H^1(\Omega)$ generado por p_j, e introduzca el subespacio de X dado por*

$$S := \Big\{\mathbf{u} = (u_{ij})_{n\times n} \in X : \quad u_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j, \quad \text{y} \quad u_{ii} \in U_i \quad \forall\, i = \overline{1,n}\Big\}.$$

Calcule $S^\perp$ y defina lo más explícitamente posible el proyector ortogonal $\Pi : X \longrightarrow S^\perp$.

e) *Pruebe que el resultado de los Ejercicios 2.33 y 3.69 se puede aplicar a $H^1(\Omega)$ y sus subespacios $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Además, concluya que en esta aplicación particular se tiene que $\Pi_j\big(\mathcal{J}(F)\big) = \mathcal{J}_j(f_j) \;\; \forall\, j = \overline{1,n}$, donde $\Pi_j : H^1(\Omega) \longrightarrow U_j$ es el proyector ortogonal y $\mathcal{J}_j : U_j' \longrightarrow U_j$ es el operador de Riesz. Más aún, muestre que $F \in \big(H^1(\Omega)\big)'$ puede elegirse de modo tal que $\mathcal{J}(F) \in \sum_{j=1}^{n} U_j$.*

3.72 [el presente enunciado es una variante del ejercicio 3.71]. *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, considere el espacio vectorial real*

$$X = [\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)]^n := \Big\{\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} : \quad \tau_i \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega) \quad \forall\, i = \overline{1,n}\Big\},$$

el cual se provee del producto escalar

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta_i, \tau_i \rangle_{\mathrm{div};\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_i)_{i=\overline{1,n}}\,,\ \boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} \in X\,,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div};\Omega}$ *denota el producto escalar usual de* $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$.

a) *Demuestre que* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *es Hilbert, y exprese su operador de Riesz* $\mathcal{J}_X$ *asociado en términos de aquel de* $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *(denotado por* $\mathcal{J}$*).*

b) *Defina el operador lineal y acotado* $A : X \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *por* $A(\boldsymbol{\tau}) := \sum_{i=1}^{n} \tau_i \ \ \forall\, \boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} \in X$, *y calcule explícitamente su adjunto* A^*.

c) *Defina el operador lineal y acotado* $B : X \longrightarrow L^2(\Omega)$ *por* $B(\boldsymbol{\tau}) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}\, \tau_i \ \ \forall\, \boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} \in X$, *y calcule explícitamente su adjunto* B^*.

d) *Sean* p_i, $i = \overline{1,n}$, *los polinomios* $p_i(\mathbf{x}) := x_i^i \ \ \forall\, \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, *denote por* U_i *el subespacio de* $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *generado por* $p_i\, e_i$, *donde* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^n$, *e introduzca el subespacio de* X *dado por*

$$S := \Big\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i=\overline{1,n}} \in X : \quad \tau_i \in U_i \quad \forall\, i = \overline{1,n} \Big\}.$$

Calcule $S^{\perp}$ *y defina explícitamente el proyector ortogonal* $\Pi : X \longrightarrow S^{\perp}$.

3.73 *Sea* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ *un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$, *y defina el operador* $T : X \to X'$ *por* $T(z)(x) := \langle x, z \rangle$ *para todo* $z, x \in X$. *El objetivo principal de este ejercicio es hacer una demostración del Teorema de Representación de Riesz, ligeramente distinta a la hecha en clases, probando que* T *es biyectivo. Para ello se pide proceder como se indica a continuación:*

a) *Muestre que* $T \in \mathcal{L}(X, X')$ *y que* $\|T(z)\|_{X'} \ge \|z\|_X$ *para todo* $z \in X$, *y concluya a partir de esto último que* T *es inyectivo.*

b) *Para la sobreyección de* T, *considere* $F \in X'$, $F \neq 0$, *y un vector* $x_0 \in X$ *tal que* $F(x_0) = 1$. *A su vez, sea* V *el espacio nulo de* F, *denote por* $Q : X \to V^{\perp}$ *la proyección ortogonal, y demuestre que* $F(Q(x_0)) = 1$. *Luego, descomponga cada* $x \in X$ *como* $x = \big(x - F(x)Q(x_0)\big) + F(x)Q(x_0)$, *y haga el producto escalar con* $Q(x_0)$ *para despejar* $F(x)$. *Concluya a partir de ello que* T *es sobreyectivo.*

c) *Denote* $X'' := (X')'$ *(dual del dual), defina explícitamente el operador adjunto* $T' : X'' \to X'$, *y pruebe que* $N(T')$ *es el subespacio nulo de* X''.

3.74 *Sean* H *y* Q *espacios de Hilbert arbitrarios con operadores de Riesz dados por* $\mathcal{R}_{\mathrm{H}} : \mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ *y* $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}' \to \mathbf{Q}$, *respectivamente, y sea* $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}, \mathbf{Q}')$.

a) *Defina los operadores* $\widetilde{\mathbf{B}} := \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{B} : \mathrm{H} \to \mathbf{Q}$ *y* $\underline{\mathrm{B}} : \mathbf{Q} \to \mathrm{H}'$ *por*

$$\underline{\mathrm{B}}(v)(\tau) := \mathbf{B}(\tau)(v) \quad \forall\, \tau \in \mathrm{H}\,, \quad \forall\, v \in \mathbf{Q}\,,$$

y demuestre que $\widetilde{\mathbf{B}}^* = \mathcal{R}_{\mathrm{H}}\, \underline{\mathrm{B}} : \mathbf{Q} \to \mathrm{H}$.

b) *Suponga que existe una constante* $\beta > 0$ *tal que* $\|\underline{\mathrm{B}}(v)\|_{\mathrm{H}'} \geq \beta \|v\|_{\mathbf{Q}}$ *para todo* $v \in \mathbf{Q}$, *y pruebe a partir de ello que* $\widetilde{\mathbf{B}}^*$ *es inyectivo y su rango* $R(\widetilde{\mathbf{B}}^*)$ *es cerrado.*

c) *Deduzca a partir de b) y de la definición de* $\widetilde{\mathbf{B}}$ *que* $R(\widetilde{\mathbf{B}}^*) = N(\mathbf{B})^{\perp}$.

3.75 *Dado* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, *considere los espacios*

$$\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) := \Big\{\tau \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\,(\tau) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\} \quad y$$

$$\mathrm{H}^1_\Delta(\Omega) := \Big\{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \quad \Delta v \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\},$$

con div *y* Δ *en el sentido distribucional, provistos de los productos escalares*

$$\langle \zeta, \tau\rangle_{\mathrm{div}} := \int_\Omega \Big\{\zeta \cdot \tau + \mathrm{div}\,(\zeta)\,\mathrm{div}\,(\tau)\Big\} \quad \forall\, \zeta,\, \tau \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega), \quad y$$

$$\langle w, v\rangle_\Delta := \int_\Omega \Big\{w\,v + \nabla w \cdot \nabla v + \Delta w\,\Delta v\Big\} \quad \forall\, w,\, v \in \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega),$$

cuyas normas inducidas se denotan por $\|\cdot\|_{\mathrm{div}}$ *y* $\|\cdot\|_\Delta$, *respectivamente.*

a) *Demuestre que para toda* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *su Laplaciano distribucional se reduce a*

$$\langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle u, \Delta\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y que, en particular, para $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *se tiene*

$$\langle \Delta u, \varphi\rangle = \int_\Omega u\,\Delta\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

b) *Utilice a) en conjunto con el hecho que* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *y* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *son Hilbert para probar que* $\big(\mathrm{H}^1_\Delta(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_\Delta\big)$ *también lo es.*

c) *Defina el operador* $A : \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega) \to \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *por* $A(v) := \nabla v$ *para todo* $v \in \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega)$, *y pruebe que* A *es lineal y acotado con* $\|A\| \leq 1$.

d) *Demuestre que el adjunto* $A^* : \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \to \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega)$ *se puede definir como* $A^*(\tau) := \mathcal{R}_\Delta(F_\tau)$ *para todo* $\tau \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$, *donde* $\mathcal{R}_\Delta : \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega)' \to \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega)$ *es el operador de Riesz y* $F_\tau \in \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega)'$ *es el funcional dado por*

$$F_\tau(v) := \int_\Omega \Big\{\nabla v \cdot \tau + \Delta v\,\mathrm{div}\,(\tau)\Big\} \quad \forall\, v \in \mathrm{H}^1_\Delta(\Omega).$$

3.76 *Sean* $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X\big)$ *e* $\big(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y\big)$ *espacios de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$, *y sea* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *tal que* $R(A)$ *es un subespacio cerrado de* Y. *La idea de este ejercicio es demostrar que* $R(A^*) = N(A)^{\perp}$, *con lo cual* $R(A^*)$ *también es cerrado, para lo cual se pide adaptar al presente contexto Hilbert la demostración hecha en clases en el caso de espacios de Banach. De acuerdo a ello, se sugiere la siguiente secuencia lógica:*

a) *Pruebe por inclusión directa que* $R(A^*) \subseteq N(A)^{\perp}$.

b) *Dado $z \in N(A)^\perp$, defina el funcional $g : R(A) \to \mathbb{R}$ por*

$$g(y) := \langle x, z \rangle_X \qquad \forall\, y \in R(A)\,,$$

donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$, y pruebe que g está bien definido y es lineal.

c) *Utilice la caracterización de operadores con rango cerrado para mostrar que g es acotado.*

d) *Aplique el Teorema de Representación de Riesz para deducir la existencia de un vector $y_g \in Y$ tal que $z = A^*(y_g) \in R(A^*)$, y concluya la inclusión recíproca a la de a).*

3.77 *Sean $\big(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1\big)$ y $\big(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2\big)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con normas inducidas denotadas por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente, tales que $H_2 \subset H_1$, y suponga que existe una constante $\widetilde{C} > 0$ tal que $\|w\|_1 \le \widetilde{C}\,\|w\|_2$ para todo $w \in H_2$. A su vez, sea $A : H_1 \times H_1 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, y suponga que para todo $F \in H_1'$ existe un único $u \in H_2$ tal que $A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H_1$. Utilice el Teorema del Grafo Cerrado para demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que, para cada $F \in H_1'$, la única solución u anterior verifica*

$$\|u\|_2 \le C\,\|F\|_{H_1'}\,.$$

[notar que este ejercicio es una versión más general del ejercicio 3.27]

3.78 *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, considere los espacios*

$$\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) := \Big\{\tau \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}(\tau) := \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\} \quad y$$

$$\mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega) := \Big\{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \quad \mathfrak{L}(v) := \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\}\,,$$

con rot y $\mathfrak{L}$ en el sentido distribucional, provistos de los productos escalares

$$\langle \zeta, \tau\rangle_{\mathrm{rot}} := \int_\Omega \Big\{\zeta\cdot\tau + \mathrm{rot}(\zeta)\,\mathrm{rot}(\tau)\Big\} \quad \forall\,\zeta,\,\tau \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\,, \quad y$$

$$\langle w, v\rangle_{\mathfrak{L}} := \int_\Omega \Big\{w\,v + \nabla w\cdot\nabla v + \mathfrak{L}(w)\,\mathfrak{L}(v)\Big\} \quad \forall\, w,\, v \in \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)\,,$$

cuyas normas inducidas se denotan por $\|\cdot\|_{\mathrm{rot}}$ y $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$, respectivamente.

a) *Pruebe que para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathfrak{L}(u)$ se reduce distribucionalmente a $\langle \mathfrak{L}(u), \varphi\rangle = \langle u, \mathfrak{L}(\varphi)\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, y que, en particular, para $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ se tiene $\langle \mathfrak{L}(u), \varphi\rangle = \int_\Omega u\,\mathfrak{L}(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

b) *Utilice a) en conjunto con el hecho que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ y $\mathrm{L}^2(\Omega)$ son Hilbert para probar que $\big(\mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{L}}\big)$ también lo es.*

c) *Defina el operador $T : \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega) \to \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ por $T(v) := \big(\frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_1}\big)^{\mathtt{t}}$ para todo $v \in \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)$, y pruebe que T es lineal y acotado con $\|T\| \le 1$.*

d) *Demuestre que el adjunto* $T^* : \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)$ *se puede definir como* $T^*(\tau) := \mathcal{R}_{\mathfrak{L}}(F_\tau)$ *para todo* $\tau \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$, *donde* $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}} : \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)' \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)$ *es el operador de Riesz y* $F_\tau \in \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)'$ *es el funcional dado por*

$$F_\tau(v) := \int_\Omega \Big\{ T(v)\cdot\tau + \mathfrak{L}(v)\,\mathrm{rot}(\tau) \Big\} \quad \forall\, v \in \mathrm{H}^1_{\mathfrak{L}}(\Omega)\,.$$

[NOTAR QUE ESTE EJERCICIO ES ANÁLOGO AL EJERCICIO 3.75]

3.79 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach reflexivos,* $A \in \mathcal{L}(X, Y')$, *y defina el operador* $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(Y, X')$ *por* $\widetilde{A}(y)(x) := A(x)(y) \;\; \forall\, y \in Y, \;\; \forall\, x \in X$.

a) *Pruebe que* $\widetilde{A} = A' \circ \mathcal{J}_Y$ *y* $A = \widetilde{A}' \circ \mathcal{J}_X$, *donde* $\mathcal{J}_Y : Y \to Y''$ *y* $\mathcal{J}_X : X \to X''$ *son los operadores lineales biyectivos que garantizan la reflexividad de* X *e* Y, *respectivamente. En particular, recuerde que* $\mathcal{J}_Y(y)(G) := G(y) \;\; \forall\, G \in Y', \;\; \forall\, y \in Y$, *y análogamente para* $\mathcal{J}_X$.

b) *Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   i) $R(A)$ *es cerrado.*

   ii) $R(A') = N(A)^\circ$.

   iii) $R(A')$ *es cerrado.*

   iv) $R(A) \; = \; {}^\circ N(A')$.

   IND.: *se sugiere seguir un orden lógico igual al secuencial, esto es* i) $\Rightarrow$ ii), ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ iv), *y* iv) $\Rightarrow$ i). *Además, se recomienda que para* iii) $\Rightarrow$ iv) *se usen las identidades de a) y la implicación* i) $\Rightarrow$ ii).

3.80 *Sean* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, *y* U *un subespacio de dimensión finita* N *de* $\mathrm{H}^1(\Omega)$. *Dada una base* $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ *de* U, *denote* $\mathbf{w}_j := \nabla u_j$ *para cada* $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, *observe que* $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N\} \subseteq \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n$, *y defina el operador* $A : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Omega)$ *por*

$$A(\mathbf{z}) \; := \; \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\mathbf{w}_j \right\} u_j \qquad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,.$$

a) *Encuentre explícitamente el operador adjunto* $A' : \mathrm{H}^1(\Omega)' \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)'$.

b) *Demuestre que el operador adjunto* $A^* : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ *está dado por*

$$A^*(v) \; := \; \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \Big(u_j\, v \; + \; \mathbf{w}_j \cdot \nabla v \Big) \right\} \mathbf{w}_j \qquad \forall\, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,,$$

   y concluya, además, que $\|A^*\| \; \leq \; \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{1,\Omega}$.

c) *Recuerde que el producto escalar de* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *se define como*

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{0,\Omega} := \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} \qquad \forall\, \mathbf{z},\, \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,,$$

y pruebe que $N(A)^\perp = \big\langle \big\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_N \big\} \big\rangle$.

d) *Considere el proyector ortogonal* $\mathrm{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow N(A)$, *y explique como calcularía, para cada* $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \backslash N(A)$, *su mejor aproximación* $\mathrm{P}(\mathbf{z})$. *Qué sucede con este cálculo si* $\big\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_N \big\}$ *es linealmente independiente en* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *? Qué ocurre con lo mismo si* $\big\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_N \big\}$ *es un conjunto ortogonal en* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *?*

3.81 *Recuerde que un espacio de Banach* X *se dice* <u>*reflexivo*</u> *si el operador lineal* $\mathcal{J}_X : X \longrightarrow X''$, *definido por*

$$\mathcal{J}_X(x)(F) := F(x) \quad \forall\, x \in X\,, \quad \forall\, F \in X'\,,$$

el cual es siempre inyectivo e isométrico, es además sobreyectivo, con lo cual $\mathcal{J}_X$ *resulta* <u>*biyectivo*</u>. *El presente ejercicio se refiere básicamente a dos resultados principales vinculados a este concepto.*

a) *Dado* $\big(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H\big)$ *un Hilbert real, demuestre que* H *es reflexivo siguiendo los siguientes pasos. En primer lugar, denote por* $\mathcal{R} : H' \longrightarrow H$ *el operador de Riesz de* H, *defina* $[\cdot, \cdot] : H' \times H' \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $[F, G] := \langle \mathcal{R}(F), \mathcal{R}(G) \rangle_H \quad \forall\, F,\, G \in H'$, *y pruebe que* $\big(H', [\cdot, \cdot]\big)$ *es a su vez un Hilbert real. En segunda instancia, denote por* $\widetilde{\mathcal{R}} : H'' \longrightarrow H'$ *el operador de Riesz de* H', *muestre que* $\mathcal{J}_H = \widetilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$, *y concluya la reflexividad de* H.

b) *Dados* X *e* Y *espacios de Banach, defina* $S : \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}(Y', X')$ *por* $S(B) := B'$ $\forall\, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, *y demuestre que* S *es un operador lineal, acotado, inyectivo y de rango cerrado.*

c) *Demuestre que el operador* S *definido en b) es sobreyectivo si y sólo si* Y *es reflexivo, para lo cual se sugiere seguir el razonamiento que se detalla a continuación.*

[$\Rightarrow$] *Dados* $\mathcal{G} \in Y''$ *y* $F \in X'$, $F \neq \mathbf{0}$, *defina* $A \in \mathcal{L}(Y', X')$ *por*

$$A(G) := \mathcal{G}(G)\, F \qquad \forall\, G \in Y'\,,$$

considere el operador $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ *tal que* $S(B) = A$, *y muestre que*

$$\mathcal{G}(G)\, F(x) = G\big(B(x)\big) \quad \forall\, G \in Y'\,, \quad \forall\, x \in X\,.$$

Luego, elija un x *conveniente en la identidad anterior, y deduzca a partir de ello que existe* $y \in Y$ *tal que* $\mathcal{G} = \mathcal{J}_Y(y)$, *probando así la sobreyección de* $\mathcal{J}_Y$, *y por lo tanto la reflexividad de* Y.

[$\Leftarrow$] *Dado* $A \in \mathcal{L}(Y', X')$, *defina el operador*

$$B := \mathcal{J}_Y^{-1} \circ A' \circ \mathcal{J}_X \,\in\, \mathcal{L}(X, Y)\,,$$

pruebe explícitamente que $B' = A$, *y concluya que* S *es sobreyectivo.*

3.82 *Dados X e Y espacios de Banach y $\Big\{F_1, F_2, \dots, F_N\Big\} \subseteq X'$, defina el subespacio cerrado de X dado por $V := {}^\circ\Big\{F_1, F_2, \dots, F_N\Big\}$, y considere un conjunto linealmente independiente $\Big\{y_1, y_2, \dots, y_N\Big\} \subseteq Y$.*

a) *Demuestre que existe una constante positiva C_N tal que*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{N} F_j(x)\, y_j\Big\|_Y \,\geq\, C_N \inf_{v\in V} \|x - v\|_X \qquad \forall\, x \in X\,.$$

b) *Suponga ahora que $V = \Big\{\mathbf{0}\Big\}$ y pruebe que X' es de dimensión finita $\leq N$.*

3.83 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, y considere el espacio de Hilbert*

$$\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) \,:=\, \Big\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\Big\}\,.$$

a) *Pruebe que para cada $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \Big\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,+\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})\Big\} \,=\, \int_\Omega \nabla v\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)\,,$$

y deduzca, además, que $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)} \,\leq\, \|v\|_{1,\Omega}$.

b) *Suponiendo que para cada $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}$ pertenece a $\mathbf{H}^1(\Omega) := [\mathrm{H}^1(\Omega)]^n$, defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{1,\Omega} \,\leq\, C\,\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall\, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,.$$

3.84 *Sean X e Y espacios de Banach y considere los espacios producto $X \times Y$ y $X' \times Y'$ con normas inducidas dadas por $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ para todo $(x,y) \in X \times Y$, y $\|(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\|_{X'\times Y'} := \|\boldsymbol{f}\|_{X'} + \|\boldsymbol{g}\|_{Y'}$ para todo $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in X' \times Y'$.*

a) *Demuestre que todo funcional $F \in \big(X \times Y\big)'$ se puede identificar de manera única con un par $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in X' \times Y'$ de tal modo que*

$$F\big((x,y)\big) \,=\, \boldsymbol{f}(x) \,+\, \boldsymbol{g}(y) \qquad \forall\,(x,y) \in X \times Y\,,$$

estableciendo así una equivalencia entre $\big(X \times Y\big)'$ y $X' \times Y'$.

b) *Sean $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$, $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq X'$, $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq Y'$, y defina el operador $T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por*

$$T\big((x,y)\big) \,:=\, \Big(\sum_{j=1}^{n} g_j(y)\, x_j, \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, y_j\Big) \qquad \forall\,(x,y) \in X \times Y\,.$$

Utilice la equivalencia descrita en a) para demostrar que el operador adjunto $T' : \big(X \times Y\big)' \longrightarrow \big(X \times Y\big)'$ está dado por

$$T'(F) := \Big(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}(y_j)\, f_j, \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}(x_j)\, g_j\Big) \quad \forall\, F := (\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in \big(X \times Y\big)' \equiv X' \times Y'\,.$$

3.85 *Dados X e Y espacios de Banach, considere los subespacios cerrados dados por $U := {}^\circ\{F_1, \ldots, F_N\}$ y $V := {}^\circ\{G_1, \ldots, G_N\}$, donde $\{F_1, \ldots, F_N\}$ y $\{G_1, \ldots, G_N\}$ son subconjuntos de X' e Y', respectivamente. Además, sean $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq X$ y $\{y_1, \ldots, y_N\} \subseteq Y$ conjuntos linealmente independientes.*

a) *Demuestre que existe una constante positiva C_N tal que*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} G_j(y)\, x_j \Big\|_X + \Big\| \sum_{j=1}^{N} F_j(x)\, y_j \Big\|_Y \geq C_N \left\{ \inf_{u \in U} \|x - u\|_X + \inf_{v \in V} \|y - v\|_Y \right\}$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$.

b) *Suponga ahora que $U = \{\mathbf{0}_X\}$ y $V = \{\mathbf{0}_Y\}$, y pruebe a partir de ello que $\dim\big((X \times Y)'\big) \leq 2N$.*

[Notar que este ejercicio es una versión más general del ejercicio 3.82]

4. Problemas Variacionales

4.1 ([10]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir*

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\} .$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \leq C \, ||\Delta \, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall \, v \in V .$$

Ind.: *Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta \, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta \, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.*

4.2 ([29]) *Sea $\Omega := (0,1)$ y considere el problema de valores de contorno*

$$\begin{aligned} -(au')' + bu &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{8}$$

donde $a(x) = x^2 + 2, b(x) = 2 + sen(x)$ y $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$. Puede probarse que la formulación débil de (8) consiste en hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 (au'v' + buv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \tag{9}$$

Demuestre que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ solución de (9).

4.3 ([29]) *Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{ H_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H tal que $H_{n-1} \subset H_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$, y $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es denso en H. Sea $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y suponga que para todo $f \in H'$ existe una única sucesión $\{ u_n(f) \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que*

$$u_n(f) \in H_n \quad , \quad B(u_n(f), v_n) = f(v_n) \quad \forall \, v_n \in H_n ,$$

y $||u_n(f)|| \leq C_0 \, ||f|| \; \forall \, n \in \mathbb{N}$, donde C_0 es una constante positiva independiente de n y de f. Suponga además que para todo $f \in H'$ existe un único $u(f) \in H$ tal que

$$B(u(f), v) = f(v) \quad \forall \, v \in H .$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u(f) - u_n(f)|| = 0 \quad \forall \, f \in H' .$$

Ind.: *Defina la proyección de Galerkin $P_n : H \to H_n$, donde $\forall \, v \in H$, $P_n v$ denota la única solución de $B(P_n v, w_n) = B(v, w_n) \quad \forall \, w_n \in H_n$ y observe que $P_n u(f) = u_n(f)$.*

4.4 ([28]) *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ. Considere el problema de valores de contorno:*

$$-\Delta \, u = f \quad \text{en} \quad \Omega , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma , \quad \int_\Omega u \, dx = a_1 , \tag{10}$$

donde $a_1 \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$ satisfacen la condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma g \, ds = 0 .$$

Demuestre que una formulación débil de (10) consiste en: Hallar $(u,\lambda) \in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \,+\, \lambda\int_\Omega v\,dx \,=\, \int_\Omega f v\,dx \,+\, \int_\Gamma g v\,ds\,,$$

$$\mu\int_\Omega u\,dx \,=\, \mu a_1\,,$$

para todo $(v,\mu) \in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$.

4.5 ([26]) *Sean* V *un espacio de Hilbert y* $a : V\times V\times V \to \mathbb{R}$ *una forma trilineal tal que para todo* $w \in V$, *la forma bilineal* $a(w;\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ *es acotada. Dado* $F \in V'$, *considere el problema: Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u;u,v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in V\,. \tag{11}$$

Suponga que existe $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(w;v,v) \,\geq\, \alpha\,||v||_V^2 \qquad \forall\, v,w \in V\,.$$

Asuma además que existe una constante $C_0 > 0$ *tal que para todo* w_1, w_2, u, $v \in V$,

$$|a(w_1;u,v) \,-\, a(w_2;u,v)| \,\leq\, C_0\,||w_1 \,+\, w_2||_V\,||u||_V\,||v||_V\,||w_1 \,-\, w_2||_V\,.$$

Encuentre una constante positiva C_1 *tal que para todo* $F \in V'$, $||\,F\,||_{V'} \leq C_1$, *el problema (11) admite una única solución.*

4.6 ([26])

a) *El* Teorema del Punto Fijo de Brouwer *establece que: Dado un subconjunto* S *compacto, convexo, y no vacío de un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación continua* T *de* S *en* S, *entonces* T *tiene al menos un punto fijo. Use este resultado de Brouwer para demostrar que si* X *es un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar* $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ *y norma* $||\cdot||$, *y si* F *es una aplicación continua de* X *en* X *tal que, para algún* $\mu > 0$, $\langle F(u),u\rangle \geq 0 \quad \forall\, u\in X$ *con* $||u|| = \mu$, *entonces existe* $u_0 \in X$, $||u_0|| \leq \mu$, *tal que* $F(u_0) = 0$.

b) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera suave* Γ, *y sea* $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de Navier-Stokes, *un problema de suma importancia en mecánica de fluídos, consiste en encontrar el vector de velocidades* $\mathbf{u} := (u_1,u_2)$ *y la presión* p *de un fluído, tales que*

$$-\Delta\,\mathbf{u} + \sum_{j=1}^{2} u_j\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_j} + \nabla p \,=\, \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad \int_\Omega p\,dx \,=\, 0\,.$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$, *y*

$$Q \,:=\, L_0^2(\Omega) \,:=\, \left\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q\,dx \,=\, 0 \right\}.$$

Demuestre que la formulación débil de (12) se reduce a: encontrar $(\mathbf{u},p) \in H\times Q$ *tales que:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u},q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $a : H\times H\times H \to \mathbb{R}$, $b : H\times Q \to \mathbb{R}$, *y* $f \in H'$, *están definidas por*

$$a(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx\,,$$

$$b(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p\, \nabla\cdot\mathbf{v}\, dx \quad , \quad f(\mathbf{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{v}\, dx\,.$$

c) *En lo que sigue considere un problema del tipo (13), no necesariamente proveniente de (12), y asuma que las siguientes hipótesis se cumplen: b es una forma bilineal acotada, b satisface la condición de Babuška-Brezzi continua, y para cada* $\mathbf{w}\in H$ *la aplicación* $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \to a(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})$ *es también una forma bilineal acotada. A su vez, sea*

$$V := \Big\{ \mathbf{v} \in H : \quad b(\mathbf{v},q) = 0 \quad \forall\, q \in Q \Big\}.$$

Demuestre que (13) puede reducirse, equivalentemente, al siguiente problema no-lineal: hallar $\mathbf{u} \in V$ *tal que*

$$a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{14}$$

d) *Además de lo dicho en* **c)**, *suponga ahora que: existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que* $a(\mathbf{v};\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha\,||\mathbf{v}||^2$ *para todo* $\mathbf{v}\in V$*; V es separable; y para cada* $\mathbf{v}\in V$*, la aplicación* $\mathbf{u} \to a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})$ *es secuencialmente débilmente continua, es decir*

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{w} \mathbf{u} \in V \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a(\mathbf{u}_n;\mathbf{u}_n,\mathbf{v}) = a(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})\,.$$

Demuestre que el problema (14) tiene al menos una solución $\mathbf{u} \in V$.

IND.: *Muestre primero que existe una sucesión* $\{\, \mathbf{v}_n \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en V tal que para todo* $m \geq 1$ *el conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ *es linealmente independiente, y las combinaciones lineales finitas de los* $\mathbf{v}_n$ *constituyen un conjunto denso en V. Luego, denote por* V_m *al subespacio de V generado por* $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$*, y aplique el método de Galerkin en conjunto con lo probado en parte* **a)** *para construir una sucesión de soluciones aproximantes.*

4.7 ([2]) *Sea H un espacio de Hilbert y sea* $B : H\times H \to \mathbf{R}$ *una forma bilineal tal que*

i) *B es simétrica, es decir*

$$B(u,v) = B(v,u) \quad \forall\,(u,v)\in H\times H\,.$$

ii) *B es acotada, es decir existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$|B(u,v)| \leq C_1 ||u||_H ||v||_H \quad \forall\,(u,v)\in H\times H\,.$$

iii) *B es débilmente coerciva, es decir existe* $C_2 > 0$ *tal que*

$$\sup_{v\in H\setminus\{0\}} \frac{|B(u,v)|}{||v||_H} \geq C_2\, ||u||_H \quad \forall\, u\in H\,.$$

Demuestre que, dado $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $B(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$, y además, $||u||_H \leq \frac{1}{C_2}||F||_{H'}$.

4.8 ([4]) *Sean X y M espacios de Hilbert y sean $a : X \times X \to \mathbb{R}$, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ dos formas bilineales acotadas. Suponga además que a es simétrica y semi-definida positiva sobre X. Dados $F \in X'$, $G \in M'$ se define el operador $\mathcal{J} : X \times M \to \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{J}(v,\mu) := \frac{1}{2}\, a(v,v) + b(v,\mu) - F(v) - G(\mu)\,.$$

Considere entonces los siguientes problemas variacionales:

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in X\,, \\ b(u,\mu) &= G(\mu) \quad \forall\, \mu \in M\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Hallar $(u,\lambda) \in X \times M$ tal que

$$\mathcal{J}(u,\mu) \leq \mathcal{J}(u,\lambda) \leq \mathcal{J}(v,\lambda) \qquad \forall\,(v,\mu) \in X \times M\,. \tag{16}$$

Demuestre que (u,λ) es solución de (15) si y sólo si (u,λ) es solución de (16).

4.9 ([24], [25]) *Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es*

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \geq 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \geq \alpha\, ||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \geq \beta\, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x},\tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \leq C\,\{\, ||f|| + ||g||\,\}\,.$$

IND.: *Transforme a una ecuación equivalente en Y y luego aplique el Lema de Lax-Milgram.*

4.10 ([24], [25]) *Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es*

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \geq 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

que $\mathbf{P}$ *es* NOLINEAL, *y que existen constantes* M, α, $\beta > 0$ *tales que*

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \,\leq\, M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad \langle \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x}\rangle_X \,\geq\, \alpha\,||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x}\,\in X\,,$$

y

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \,\geq\, \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ *y* $g \in Y$, *demuestre que existe un único par* $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ & \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, *que depende de* M, α, β *y* $||\mathbf{Q}||$, *tal que*

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \,\leq\, C\,\{\,||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

4.11 *Sea* $\Omega := (0,3)$ *y considere el problema de valores de contorno:* $-u'' + (x+1)\,u = x$ *en* Ω, $u(0) = u(3) = 0$. *Deduzca la formulación débil respectiva y demuestre que ella tiene una única solución* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Considere la partición uniforme* $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3$ *y establezca el sistema de Galerkin asociado usando el subespacio*

$$H_2 \,:=\, \{\, v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(3) = 0 \quad y \quad v\,|_{[x_j, x_{j-1}]} \text{ es un polinomio}$$
$$\text{de grado } \,\leq\, 1\,, \forall\, j \in \{1,2,3\}\,\}\,.$$

IND.: *Notar que* $H_2 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, *donde* $e_j \in H_2$ *es tal que* $e_j(x_i) = \delta_{ij}$ *para todo* i, $j \in \{1,2\}$.

4.12 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera suave* Γ, *y sea* $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. EL PROBLEMA DE STOKES *consiste en encontrar el vector de velocidades* $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ *y la presión* p *de un fluído, tales que*

$$\begin{array}{rl} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p \,=\, \mathbf{f} \quad en \quad \Omega\,, & \operatorname{div}\,\mathbf{u} \,=\, 0 \quad en \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad en \quad \Gamma\,, & \displaystyle\int_\Omega p\,dx \,=\, 0\,. \end{array} \tag{17}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ *y* $Q := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega q\,dx \,=\, 0 \right\}$. *Demuestre que la formulación débil de (17) se reduce a:* encontrar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tales que:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \,+\, B(\mathbf{v}, p) \,=&\quad F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, H\,, \\ B(\mathbf{u}, q) \,=&\quad 0 \quad \forall\, q \,\in\, Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbb{R}$, $B : H \times Q \to \mathbb{R}$ *y* $F \in H'$, *están definidos por*

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \,:=\, \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v}, p) \,:=\, -\int_\Omega p\,\operatorname{div}\,\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) \,=\, \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{v}\,dx\,.$$

4.13 ([7]) *Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \ge \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \ \forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

a) *Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que*

$$A(u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) \,=\, F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) *Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\|u - u_n\|_H \,\le\, C \inf_{v_n\in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{w_n\in H_n\setminus\{0\}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

4.14 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \le \kappa(x) \,\le\, M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto*

$$S \,:=\, \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\le\, 1 \right\},$$

y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2\, dx \,=\, \min_{v\in S} \int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2\, dx\,.$$

4.15 ([7]) [Lema de Aubin-Nitsche]. *Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y el operador identidad $\mathbf{i} : V \to H$ es continuo. Sea $A : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface*

$$A(v, \mathbf{P}(g)) \,=\, \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V\,.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in V\,,$$

y

$$A(u_h, v_h) \,=\, F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \,\le\, C\, ||u - u_h||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h\in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

4.16 *Dados $\Omega := (0, 1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:*

$$-\,u'' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) \,=\, 0\,, \quad u'(1) \,=\, 1\,. \tag{18}$$

a) *Defina* $\sigma := u'$ *en* Ω *y demuestre que una formulación variacional* MIXTA *de (18) se reduce a: Hallar* $(\sigma, (u, \varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau, (u, \varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma, (v, \psi)) &= G((v, \psi)) \quad \forall\, (v, \psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{19}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, *y* $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ *son las formas bilineales definidas por*

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &:= \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \qquad \forall\, \sigma,\, \tau \in H\,, \\ b(\tau, (v, \psi)) &:= \int_\Omega v\, \tau'\, dx \,+\, \psi\, \tau(1) \quad \forall\, (\tau, (v, \psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

b) *Defina los funcionales* F *y* G*, y aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (19) tiene una única solución.*

4.17 *Sean* $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$*, y considere el problema de valores de contorno*

$$u^{(4)} \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) \,=\, 0\,. \tag{20}$$

i) *Defina la incógnita auxiliar* $\sigma := u''$ *en* Ω *y demuestre que una formulación variacional* MIXTA *de (20) se reduce a: Hallar* $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\, \tau\, dx \,+\, \int_\Omega u'\, \tau'\, dx &= 0 \qquad \forall\, \tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\, \sigma'\, dx &= -\int_\Omega f\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

ii) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que (21) tiene una única solución que depende continuamente del dato* f.

4.18 ([4]) [LEMA DE FORTIN]. *Sean* H, Q *espacios de Hilbert, y sea* $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada que satisface la condición inf-sup, es decir, existe* $\beta > 0$ *tal que:*

$$\sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \,\geq\, \beta\, \|q\|_Q \qquad \forall\, q \in Q\,.$$

Sean $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *y* $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *sucesiones de subespacios de dimensión finita de* H *y* Q*, respectivamente, y asuma que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(H, H_n)$ *tal que*

$$b(v - \mathcal{P}_n(v), q_n) \,=\, 0 \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,.$$

Suponga que la familia de operadores $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es uniformemente acotada, es decir existe* $C > 0$ *tal que* $\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(H, H_n)} \,\leq\, C$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y demuestre que existe* $\beta^* > 0$*, independiente de* n*, tal que*

$$\sup_{v_n \in H_n \setminus \{0\}} \frac{b(v_n, q_n)}{\|v_n\|_H} \,\geq\, \beta^*\, \|q_n\|_Q \qquad \forall\, q_n \in Q_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

4.19 ([7]) [El presente enunciado es una variante del Ejercicio 4.13]. *Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$. Suponga también que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha} \|v_n\|_H^2$ $\forall\, v_n \in H_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

a) *Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que*

$$A(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H \qquad \text{y} \qquad A_n(u_n, v_n) \,=\, F_n(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) *Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \left(\inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \|\mathbf{A}(v_n) \circ \mathbf{i}_n \,-\, \mathbf{A}_n(v_n)\|_{H_n'} \right\} \right.$$
$$\left. +\quad \|F \circ \mathbf{i}_n \,-\, F_n\|_{H_n'} \right),$$

donde $\mathbf{A} : H \to H'$ y $\mathbf{A}_n : H_n \to H_n'$ son los operadores lineales y acotados inducidos por A y A_n, respectivamente, e $\mathbf{i}_n : H_n \to H$ es la inyección canónica, esto es $\mathbf{i}_n(v_n) = v_n \quad \forall\, v_n \,\in\, H_n$.

4.20 ([11]) *Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega u\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \,-\, \int_\Omega v\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, dx \,=\, \int_\Omega f\, v\, dx \tag{22}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau})\, dx = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{23}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \;=\; -\int_\Omega f\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{24}$$

De este modo, sumando (22), (23) y (24), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) \;=\; F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \,\in\, \mathbf{H}\,, \tag{25}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F \,:\, \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (25) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \,\in\, \mathbf{H} \,:=\, H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

4.21 *Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \,\to\, \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada, simétrica y débilmente coerciva, y $A : V \,\to\, V'$ el operador lineal y acotado inducido por a. Dado*

$f \in V'$ y U un subconjunto de V no vacío convexo y cerrado, es sabido (por Teorema de Stampacchia*) que existe un único $u \in U$ tal que*

$$a(u, v-u) \,\geq\, f(v-u) \quad \forall\, v \,\in\, U.$$

Ahora, sean V_h un subespacio de V de dimensión finita, U_h un subconjunto de V_h no vacío convexo y cerrado, y denote por $u_h \in U_h$ a la única solución del problema discreto:

$$a(u_h, v_h-u_h) \,\geq\, f(v_h-u_h) \quad \forall\, v_h \,\in\, U_h.$$

Además, sea H un Hilbert tal que $V \subseteq H$, y la inyección canónica $i: V \to H$ es continua y densa. Demuestre que si $Au - f \in H$, entonces existe una constante C independiente de V_h y U_h, tal que

$$||u-u_h||_V \,\leq\, C\left\{ \inf_{v_h\in U_h} \left(||u-v_h||_V^2 \,+\, ||Au-f||_H\,||u-v_h||_H \right) \right.$$
$$\left. +\,||Au-f||_H \inf_{v\in U} ||u_h - v||_H \right\}^{1/2}.$$

4.22 ([3]) *Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sean $a: H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea K_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en K_2. Suponga que:*

i) $\Pi_2\,\mathbf{A} : K_1 \to K_2$ *es un isomorfismo.*

ii) existen β_1, $\beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} \,:=\, \sup_{\substack{v\in H_j\\ v\neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \,\geq\, \beta_j\,\|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) \quad &= \quad F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,, \\ b_1(u,q) \quad &= \quad G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

4.23 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen constantes M, $\beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre, utilizando el* Lema de Lax-Milgram*, que para todo $f \in L^2(\Omega)$ y para toda constante $\delta \in \big(0, \text{mín}\,\{2\,\beta, \frac{2}{n\,M}\}\big)$, existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \left\{ \kappa\,\nabla u \cdot \nabla v \,+\, \frac{1}{\kappa}\,u\,v \,-\, \delta \sum_{i=1}^{n} u\,\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} \,=\, \int_\Omega f\,v \qquad \forall\, v \,\in\, H^1(\Omega)\,,$$

y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, \frac{1}{\text{mín}\left\{\beta - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{M} - \frac{n\delta}{2}\right\}}\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

4.24 ([4]) *Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1, M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ como:*

$$A := \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array} \right)$$

y

$$T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.

b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.

4.25 ([2]) *Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H, \| \cdot \|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H, H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que*

$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_1 \|\tau\|_H^2 \quad y \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{S}_2(\tau), \tau \rangle_H \geq \alpha_2 \|\tau\|_H^2 \quad \forall \tau \in H .$$

a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\boldsymbol{\sigma} \in H$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \tau) = F(\tau) \qquad \forall \tau \in H ,$$

y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_H \leq C \|F\|_{H'} .$$

b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim_{h \to 0} \operatorname{dist}(\boldsymbol{\tau}, H_h) = 0 \ \forall \boldsymbol{\tau} \in H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h) = F(\tau_h) \qquad \forall \tau_h \in H_h . \tag{26}$$

Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes C_i, $\delta > 0$, independientes de h, tales que

$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) - \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \leq C_i \, h^\delta \, \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall \tau_h \in H_h .$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (26) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.

c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

4.26 ([12], [15], [16], [17]) *Sean* $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_1})$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2})$, *e* $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ *espacios de Hilbert, defina el producto* $X := X_1 \times X_2$, *y considere operadores lineales y acotados* $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} : X \to Y$, $A : X_1 \to X_1$, $B : X_1 \to X_2$, *y* $C : X_2 \to X_2$, *tales que:*

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -C \end{pmatrix}.$$

Sea $V := V_1 \times V_2$ *el kernel de* $\mathbf{Q}$, *donde* $V_1 \subseteq X_1$ *y* $V_2 \subseteq X_2$, *y suponga que:*

i) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\langle A(x_1), x_1\rangle_{X_1} \geq \alpha \|x_1\|_{X_1}^2 \qquad \forall\, x_1 \in V_1$.

ii) *existe* $\beta > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{x_1 \in V_1 \backslash \mathbf{0}} \frac{\langle B(x_1), x_2\rangle_{X_2}}{\|x_1\|_{X_1}} \geq \beta \|x_2\|_{X_2} \qquad \forall\, x_2 \in V_2$.

iii) $\langle C(x_2), x_2\rangle_{X_2} \geq 0 \qquad \forall\, x_2 \in V_2$.

iv) *existe* $\tilde{\beta} > 0$ *tal que* $\|\mathbf{Q}^*(y)\|_X \geq \tilde{\beta} \|y\|_Y \qquad \forall\, y \in Y$.

a) *Pruebe que para todo* $(f, g) \in X \times Y$ *existe un único* $(x, y) \in X \times Y$ *tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}^*(y) &= f\,, \\ \mathbf{Q}(x) &= g\,, \end{aligned} \tag{27}$$

y encuentre explícitamente una constante $C > 0$ *tal que*

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq C \Big\{ \|f\|_X + \|g\|_Y \Big\}.$$

b) *Defina un esquema de Galerkin para (27) y establezca condiciones suficientes que aseguren su solubilidad única y estabilidad.*

c) *Demuestre la estimación de Cea para el esquema definido en b).*

4.27 ([7], [31]) *Dados* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* Γ *de clase* C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, *y constantes* κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, *considere el problema:*

$$-\Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{28}$$

donde $\mathbf{n}$ *es el vector normal en* Γ. *Deduzca la formulación primal de* (28) *y encuentre la mayor región factible para* $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ *que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de* κ_1 *y* κ_2. *Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de* κ_2.

4.28 ([27]) *Dados H, Q_1 y Q_2 espacios de Hilbert reales, defina $Q := Q_1 \times Q_2$ y considere formas bilineales acotadas $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$, con operadores inducidos denotados por $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente, tales que*

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi)) \,=\, b_1(\boldsymbol{\tau}, v) \,+\, b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \quad \forall\, (v, \psi) \,\in\, Q\,.$$

Pruebe en primer lugar que $\mathbf{B}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\tau})) \in Q \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H$. Luego, introduzca los espacios nulos $V_1 := N(\mathbf{B}_1)$ y $V_2 := N(\mathbf{B}_2)$, y demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) *existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi))}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \,\geq\, \beta\, \|(v, \psi)\|_Q \qquad \forall\, (v, \psi) \in Q\,.$$

b) *existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_1 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta\, \|\psi\|_{Q_2} \quad \forall\, \psi \in Q_2 \quad y \quad \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_2 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_1(\boldsymbol{\tau}, v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta\, \|v\|_{Q_1} \quad \forall\, v \in Q_1\,.$$

Extienda el resultado anterior al caso en que b se escribe como suma de n formas bilineales acotadas $b_i : H \times Q_i \to \mathbb{R}$, con $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ espacios de Hilbert reales.

4.29 *Dados X, M y Q espacios de Hilbert reales, defina $H := X \times M$ y considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$ y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$. A su vez, sean $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ los operadores definidos matricialmente por*

$$A \,:=\, \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad T \,:=\, \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

a) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.*

b) *Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y asuma hipótesis adicionales que le permitan demostrar la estimación de Cea correspondiente.*

4.30 *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:*

$$-\,\Delta\, u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad en \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad en \quad \Gamma\,. \tag{29}$$

Defina la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (29): Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} - \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_j\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} = -\int_\Omega f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega)\,.$$

Dibuje la region $S := \Big\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 : \;\; \kappa_2 > 0 \;\; y \;\; |\kappa_1| \,<\, 2\, \text{mín} \big\{ \kappa_2, \frac{1}{n} \big\} \Big\}$, y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ que depende continuamente del dato f.

4.31 *Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{K} \in [C(\bar{\Omega})]^{n\times n}$ simétrica y uniformemente definida positiva, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:*

$$- \operatorname{div}\big(\mathbf{K}\,\nabla u\big) \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad en \quad \Omega\,, \quad \mathbf{K}\,\nabla u\cdot \mathbf{n} \,=\, 0 \quad en \quad \Gamma\,, \tag{30}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario en Γ. Deduzca la formulación primal de (30) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura, mediante el Lema de Lax-Milgram clásico, que dicha formulación tiene una única solución. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea en términos de $\mathbf{K}$, κ_1 y κ_2.

4.32 ([9]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean Γ_D, $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que*

$$H^{1/2}(\Gamma_*) \,:=\, \Big\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : \quad w \in H^1(\Omega) \Big\} \qquad \forall\, * \in \{D, N\}\,,$$

con $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_*} \,:=\, \text{ínf} \Big\{ \|w\|_{1,\Omega} : \quad w \,\in\, H^1(\Omega)\,, \quad \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} \,=\, \varphi \Big\}$ $\forall\, \varphi \,\in\, H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) \,:=\, \begin{cases} \varphi & en \quad \Gamma_N \\ 0 & en \quad \Gamma\backslash\Gamma_N \end{cases} \qquad \forall\, \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N)\,,$$

se tiene que $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N) \,:=\, \Big\{ \varphi \,\in\, H^{1/2}(\Gamma_N) : \quad E_{N,0}(\varphi) \,\in\, H^{1/2}(\Gamma) \Big\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2,00,\Gamma_N} \,:=\, \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2,\Gamma}$ $\forall\, \varphi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$.

i) *Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D} \,=\, \|w_\varphi\|_{1,\Omega}$.*

ii) *Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno*

$$\Delta z_\varphi = 0 \;\; en \;\; \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} \,=\, \varphi \;\; en \;\; \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) \,=\, 0 \;\; en \;\; \Gamma_N\,,$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \widetilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\widetilde{z}_\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{z}_\varphi \cdot \nabla v \,=\, -\int_\Omega \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \qquad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,. \tag{31}$$

Pruebe que (31) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1,\Omega} \,\le\, c\, \|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D}$.

iii) *Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) \,:=\, \gamma_0(z_\varphi)$ $\forall\, \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.*

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \,=\, E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \,\oplus\, E_{N,0}(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) \,+\, E_{N,0}(\psi_N)$.

v) *Deduzca a partir de iv) que, dado* $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, *existen* $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ *y* $\lambda_N \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$ *tales que* $\langle \lambda, \psi \rangle = \langle \lambda_D, \psi_D \rangle_{\Gamma_D} + \langle \lambda_N, \psi_N \rangle_{\Gamma_N}$ $\forall\, \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. *Concluya que si* $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ *se identifica con un funcional en* $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

4.33 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera* Γ *de clase* $C^{0,1}$, *y sean* Γ_D, $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ *tales que* $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$ *y* $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. *Dados* $f \in L^2(\Omega)$ *y* $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, *considere el problema de valores de contorno*

$$-\Delta u = f \;\text{ en }\; \Omega\,, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} \,=\, g \;\text{ en }\; \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) \,=\, 0 \;\text{ en }\; \Gamma_N\,. \tag{32}$$

i) *Utilice lo que sea necesario del Ejercicio 4.32 para probar que una formulación primal-mixta de* (32) *se reduce a: Hallar* $(u, \lambda) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b(v,\lambda) &\;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H\,, \\ b(u,\xi) &\;=\; G(\xi) \quad \forall\, \xi \in Q\,, \end{aligned} \tag{33}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *y* $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ *son las formas bilineales dadas por*

$$a(u,v) \,:=\, \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad y \quad b(v,\xi) \,:=\, \langle \xi, \gamma_0(v) \rangle_{\Gamma_D} \quad \forall\, u,\, v \in H,\;\; \forall\, \xi \in Q\,,$$

y los funcionales $F \in H'$ *y* $G \in Q'$ *dependen de* f *y* g, *respectivamente.*

ii) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de* (33), *la cual depende continuamente de los datos* f *y* g.

iii) *Sea* H_h *un subespacio arbitrario de dimensión finita de* H *y, dada una partición* $\Big\{e_1, e_2, ..., e_n\Big\}$ *de* Γ_D, *defina*

$$Q_h \,:=\, \Big\{ \xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \quad \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,.$$

Considere el sistema de Galerkin asociado a (33), *suponga que* b *satisface la condición inf-sup discreta con una constante* $\beta > 0$ *independiente de las dimensiones de* H_h *y* Q_h, *y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución* $(u_h, \lambda_h) \in H_h \times Q_h$. *Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error* $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ *depende o no de* $\mathrm{dist}(\lambda, Q_h)$.

4.34 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^N$ *con frontera suave* Γ, *y sean*

$$H = \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{N\times N} :\; \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, [L^2(\Omega)]^N \Big\} \;\; y \;\; Q := [L^2(\Omega)]^N\,,$$

los espacios de Hilbert con productos interiores y normas inducidas denotadas, respectivamente, por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{div},\Omega}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ *y* $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. *Considere el operador* $P : H \to H$ *que a cada* $\boldsymbol{\sigma} \in H$ *le asigna* $P(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$, *donde* $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}) \in H \times Q$ *es solución del problema*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau} \,+\, \int_\Omega \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &\;=\; 0 && \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}} &\;=\; \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} && \forall\, \mathbf{v} \in Q\,. \end{aligned} \tag{34}$$

a) *Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que* P *está bien definido y que* $P \in \mathcal{L}(X)$.

b) *Defina el subespacio cerrado de* H *dado por*

$$V := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in H : \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \textit{en} \quad \Omega \Big\},$$

y pruebe que $V = N(P)$, $P^2 = P$, *y* $H = V \oplus R(P)$.

c) *Deduzca a partir de b) que* $V^{\perp} = R(P)$ *(ortogonalidad en* H*), y muestre que existe una constante* $C \geq 1$ *tal que*

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div},\Omega} \leq C\, \|\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in V^{\perp},$$

concluyendo así que $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\Omega}$ *y* $\|\mathbf{div}\,\cdot\|_{0,\Omega}$ *son equivalentes en* $V^{\perp}$.

4.35 ([22]) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ *tal que* $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ *and* $|\Gamma_D| > 0$, *y sea* $\boldsymbol{\nu}$ *el vector normal a* Γ. *Dados* $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^n$ *y* $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, *el problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad consiste en encontrar la velocidad* $\mathbf{u}$ *y la presión* p *de un fluido, tales que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = p\,\mathbf{f} + \nabla p \quad \textit{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \textit{en} \quad \Omega\,,\\ p = g \quad \textit{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \textit{en} \quad \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{35}$$

a) *Demuestre que la formulación variacional mixta de* (35) *se reduce a: Hallar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},p) &= \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_D + \int_\Omega p\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H\,,\\ \mathbf{b}(\mathbf{u},q) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned} \tag{36}$$

donde $H := \Big\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \textit{en} \quad \Gamma_N \Big\}$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ *son las formas bilineales dadas por*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \textit{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v},q) := \int_\Omega q \operatorname{div}\mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in H\,, \quad \forall\, q \in Q\,,$$

y $\langle \cdot,\cdot \rangle_D$ *denota la paridad dual de* $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ *y* $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

b) *Demuestre que* (36) *puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma* $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{u}, p)$, *donde, gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi,* $T : H \times Q \to H \times Q$ *es un operador no-lineal bien definido. De hecho, utilice el principio de superposición para darse cuenta que en realidad* T *es una aplicación afín. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si* $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ *es suficientemente pequeño, entonces el problema* (36) *tiene una única solucion. Pruebe en tal caso que existe* $C > 0$, *dependiente de* $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega}$, *tal que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\operatorname{div},\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C\, \|g\|_{1/2,\Gamma_D}\,.$$

4.36 ([1], [8]) *Sea Ω un abierto suave de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{div}\,;\Omega}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Entonces, dados $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma)$, y constantes a, $b\in\mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},u,\phi)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega}+\langle u,v\rangle_{1,\Omega}-a\int_\Omega\phi\,v &= \int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\,,\\ \int_\Omega\nabla\phi\cdot\nabla\psi-b\int_\Omega\phi\,\psi-b\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\psi &= \int_\Gamma g\,\psi\,,\end{aligned}\tag{37}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},v,\psi)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$.

a) Introduzca operadores $S:=(S_1,S_2):H^1_0(\Omega)\longrightarrow H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\Omega)$ y $\widetilde{S}:H^1_0(\Omega)\times H^1(\Omega)\longrightarrow H^1_0(\Omega)$, bien definidos, tales que (37) se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar $\phi\in H^1_0(\Omega)$ tal que $T(\phi)=\phi$, donde $T(\phi):=\widetilde{S}(\phi,S_2(\phi))\quad\forall\,\phi\in H^1_0(\Omega)$.

b) Demuestre que existen constantes $C(a)$, $C(b)\geq 0$ tales que

$$\|S_1(\phi)-S_1(\varphi)\|_{\mathrm{div}\,;\Omega}+\|S_2(\phi)-S_2(\varphi)\|_{1,\Omega}\leq C(a)\,\|\phi-\varphi\|_{0,\Omega}\,,$$

$$\|\widetilde{S}(\phi,u)-\widetilde{S}(\varphi,w)\|_{1,\Omega}\leq C(b)\left\{\|\phi-\varphi\|_{0,\Omega}+|u-w|_{1,\Omega}\right\},$$

para todo ϕ, $\varphi\in H^1_0(\Omega)$, u, $w\in H^1(\Omega)$.

c) Deduzca a partir de a) y b) que existe una constante $C(a,b)\geq 0$ tal que

$$\|T(\phi)-T(\varphi)\|_{1,\Omega}\leq C(a,b)\,\|\phi-\varphi\|_{0,\Omega}\quad\forall\,\phi,\,\varphi\in H^1_0(\Omega)\,,$$

pruebe luego que T es compacto, y concluya finalmente que para a y b suficientemente pequeños, el problema original (37) posee una única solución.

4.37 *Utilice una fórmula de integración por partes adecuada, y luego aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:*

$$\Delta u+k\,u=f\quad\text{en}\quad\Omega:=]0,1[^2\,,\qquad\frac{\partial u}{\partial\nu}=g\quad\text{en}\quad\Gamma:=\partial\Omega\,,$$

donde $k\in[-1,+\infty[$, $f\in L^2(\Omega)$, ν es el vector normal en Γ, y $g\in H^{-1/2}(\Gamma)$.

4.38 ([1], [8]) *Sea Ω un abierto suave de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, y denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{div}\,;\Omega}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\Omega}$ los productos escalares usuales de $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. A su vez, sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$. Entonces, dados $f\in L^2(\Omega)$, $g\in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes a, $b\in\mathbb{R}$, considere el problema variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},u,\phi)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega}+\langle u,v\rangle_{1,\Omega}-a\int_\Omega\phi\,v &= \int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\,,\\ \int_\Omega\nabla\phi\cdot\nabla\psi-b\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left\{\phi-u+\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} &= \langle g,\psi\rangle_\Gamma\,,\end{aligned}\tag{38}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau},v,\psi)\in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$.

i) *Introduzca operadores* $S := (S_1, S_2) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H(\mathrm{div}\,;\Omega) \times H^1(\Omega)$ *y* $\widetilde{S} : H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$*, bien definidos, tales que* (38) *se reduzca equivalentemente a la ecuación de punto fijo: Hallar* $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $T(\phi) = \phi$*, donde* $T(\phi) := \widetilde{S}(\phi, S_2(\phi)) \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega)$.

ii) *Demuestre que existen constantes* $C(a)$, $C(b) \geq 0$ *tales que*

$$\|S_1(\phi) - S_1(\varphi)\|_{\mathrm{div}\,;\Omega} + \|S_2(\phi) - S_2(\varphi)\|_{1,\Omega} \leq C(a)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega}\,,$$

$$\|\widetilde{S}(\phi, u) - \widetilde{S}(\varphi, w)\|_{1,\Omega} \leq C(b) \Big\{ \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} + \|u - w\|_{1,\Omega} \Big\}\,,$$

para todo $\phi,\, \varphi \in H_0^1(\Omega),\ u,\, w \in H^1(\Omega)$.

iii) *Deduzca a partir de i) y ii) que existe una constante* $C(a, b) \geq 0$ *tal que*

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\|_{1,\Omega} \leq C(a, b)\, \|\phi - \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall\, \phi,\, \varphi \in H_0^1(\Omega)\,,$$

pruebe luego que T *es compacto, y concluya finalmente que para* a *y* b *suficientemente pequeños, el problema original* (38) *posee una única solución.*

4.39 *Utilice una fórmula de integración por partes adecuada, y luego aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:*

$$\Delta u + k\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0, 1[^2\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = g \quad \text{en} \quad \Gamma := \partial\Omega\,,$$

donde $k \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$, ν *es el vector normal en* Γ, *y* $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

4.40 ([6]) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera suave* Γ, *y sean*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) := \Big\{ \mathrm{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \ \mathrm{v} = 0 \,\mathrm{en}\, \Gamma \Big\}\,,\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) := [\mathrm{H}_0^1(\Omega)]^n\,,\ \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n\,,$$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^{n \times n}\,, \quad \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Big\}\,,$$

cuyas normas respectivas son $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ *y* $\|\cdot\|_{\mathbf{div};\Omega}$. *Entonces, dados* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *y parámetros* κ_1 *y* κ_2 *a ser elegidos convenientemente, una formulación mixta simplificada del problema de Navier-Stokes consiste en: Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathrm{H} := \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) + B(\mathbf{u}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) = F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathrm{H}\,, \tag{39}$$

donde A, B, *y* F *están definidos por*

$$A((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \kappa_1 \int_\Omega \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau}$$
$$- \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \kappa_2 \int_\Omega \big\{ \nabla\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \big\} : \nabla\mathbf{v}\,,$$

$$B(\mathbf{w}; (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \int_\Omega (\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) : \big\{ \boldsymbol{\tau} - \kappa_2 \nabla\mathbf{v} \big\}\,,$$

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := -\kappa_1 \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\,,$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$, $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathrm{H}$. *Notar aquí que, dados vectores* $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ *y tensores* $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\tau}$, *se definen* $\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} := (w_i\, u_j)_{i,j=1}^n$ *y* $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}\, \tau_{ij}$.

a) *Demuestre que para* $\kappa_1 > 0$ *y* $\kappa_2 \in (0,2)$, *la forma bilineal* A *es elíptica en* H *con una constante* α *dependiente de ambos parámetros.*

b) *Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de* $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *en* $\mathbf{L}^4(\Omega) := [\mathrm{L}^4(\Omega)]^n$ *para deducir la existencia de* $c(\Omega,\kappa_2) > 0$ *tal que*

$$\big|B(\mathbf{w};(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}))\big| \,\leq\, c(\Omega,\kappa_2)\,\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|_{\mathrm{H}}\,.$$

c) *Pruebe que existe* $r > 0$ *tal que para cada* $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(r) := \Big\{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) :\ \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq r\Big\}$, *existe un único* $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathrm{H}$ *tal que*

$$A((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,+\, B(\mathbf{w};(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,=\, F(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \qquad \forall\,(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathrm{H}\,. \tag{40}$$

En tal caso defina el operador $\mathbf{S} : \mathbf{V}(r) \longrightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *por* $\mathbf{S}(\mathbf{w}) := \mathbf{u}$, *y deduzca la dependencia continua de* (40) *(según el Lema de Lax-Milgram).*

d) *Observe que* (39) *puede reformularse equivalentemente como la ecuación de punto fijo: Hallar* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$ *tal que* $\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, *y luego aplique la elipticidad de la forma bilineal* $A(\cdot,\cdot) + B(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ *y el Teorema de Banach, para concluir que, bajo adecuadas hipótesis sobre* $\mathbf{f}$, *el problema* (39) *tiene una única solución* $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathrm{H}$ *con* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(r)$.

4.41 ([13], [14]) *Sean* $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *y* $(Q,\langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ *espacios de Hilbert tales que* $H \subseteq Q$, *y suponga que existe* $A \in \mathcal{L}(H,Q)$ *such that*

$$\langle\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau}\rangle_H \,=\, \langle\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau}\rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\zeta}),A(\boldsymbol{\tau})\rangle_Q \qquad \forall\,\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

A su vez, dados $\boldsymbol{\sigma} \in H$ *y* $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de subespacios de dimension finita de* H, *considere para cada* $n \in \mathbb{N}$ *una aproximación* $\boldsymbol{\sigma}_n \in H_n$ *de* $\boldsymbol{\sigma}$ *tal que* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q < +\infty$. *Luego, asuma que* $A(\boldsymbol{\sigma})$ *es conocido explícitamente, y defina una* **aproximación postprocesada** *de* $\boldsymbol{\sigma}$ *como el único elemento* $\boldsymbol{\sigma}_n^* \in H_n$ *(si es que existe) tal que*

$$\langle\boldsymbol{\sigma}_n^*,\boldsymbol{\tau}_n\rangle_H \,=\, \langle\boldsymbol{\sigma}_n,\boldsymbol{\tau}_n\rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\sigma}),A(\boldsymbol{\tau}_n)\rangle_Q \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}_n \in H_n\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma}_n^*$ *está efectivamente bien definido y concluya que*

$$\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_n^*\|_H \,\leq\, \|\boldsymbol{\sigma}-\Pi_n(\boldsymbol{\sigma})\|_H \,+\, \|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_Q\,,$$

donde $\Pi_n : H \longrightarrow H_n$ *es el proyector ortogonal.*

4.42 *Sean* H *y* Q *espacios de Hilbert reales, y sean* $a : H\times H \to \mathbb{R}$ *y* $b : H\times Q \to \mathbb{R}$ *formas bilineales que verifican las hipótesis del Teorema de* Babuška-Brezzi Continuo.

a) *Considere el operador* $T : H\times Q \to (H\times Q)' \equiv H'\times Q'$ *que a cada* $(\zeta,w) \in H\times Q$ *le asigna* $T(\zeta,w) := (F_{\zeta,w},G_\zeta)$, *donde* $F_{\zeta,w} : H \to \mathbb{R}$ *y* $G_\zeta : Q \to \mathbb{R}$ *son los funcionales definidos por*

$$F_{\zeta,w}(\tau) \,:=\, a(\zeta,\tau) \,+\, b(\tau,w) \quad \forall\,\tau \in H \quad \text{y} \quad G_\zeta(v) \,:=\, b(\zeta,v) \quad \forall\,v \in Q\,.$$

Demuestre que T *está bien definido, y luego aplique el* Teorema de la Inversa Acotada *para deducir la existencia de una constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $(\zeta,w) \in H\times Q$ *se tiene*

$$C\,\|(\zeta,w)\|_{H\times Q} \,\leq\, \sup_{\substack{(\tau,v)\in H\times Q\\(\tau,v)\neq(0,0)}} \frac{\big|a(\zeta,\tau) \,+\, b(\tau,w) \,+\, b(\zeta,v)\big|}{\|(\tau,v)\|_{H\times Q}}\,. \tag{41}$$

b) *Dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, denote por $(\sigma, u) \in H \times Q$ a la única solución de*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) &\;=\; F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,v) &\;=\; G(v) \qquad \forall\, v \in Q\,, \end{aligned} \tag{42}$$

y sea $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ una solución de Galerkin asociada, donde H_h y Q_h son subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, que satisfacen las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto. Aplique entonces lo obtenido en a), y deduzca la estimación de error a posteriori

$$\|(\sigma,u) - (\sigma_h,u_h)\|_{H\times Q} \;\le\; c\Big\{\|\mathcal{R}_h\|_{H'} \,+\, \|\mathcal{S}_h\|_{Q'}\Big\}\,,$$

donde $c > 0$ es independiente de h, y $\mathcal{R}_h \in H'$ y $\mathcal{S}_h \in Q'$ están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\tau) &:= F(\tau) - a(\sigma_h,\tau) - b(\tau,u_h) \qquad \forall\, \tau \,\in\, H\,, \\ \mathcal{S}_h(v) &:= G(v) - b(\sigma_h,v) \qquad \forall\, v \,\in\, Q\,. \end{aligned}$$

4.43 *Sean H y Q espacios de Banach, y sea $b : H \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada, es decir b es lineal en cada componente y existe una constante $M > 0$ tal que $|b(\tau,v)| \le M\,\|\tau\|\,\|v\|\;\; \forall\,(\tau,v) \in H \times Q$. A su vez, sean $B : H \longrightarrow Q'$ y $\widetilde{B} : Q \longrightarrow H'$ los operadores lineales inducidos por b, esto es*

$$B(\tau)(v) \,:=\, b(\tau,v) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{B}(v)(\tau) \,:=\, b(\tau,v) \qquad \forall\,(\tau,v) \in H \times Q\,.$$

a) *Pruebe que $B \in \mathcal{L}\big(H,Q'\big)$, $\widetilde{B} \in \mathcal{L}\big(Q,H'\big)$ y $\|B\| \,=\, \|\widetilde{B}\|$.*

b) *Defina explícitamente los operadores $B' \in \mathcal{L}\big(Q'',H'\big)$ y $\widetilde{B}' \in \mathcal{L}\big(H'',Q'\big)$, y demuestre que $\widetilde{B} \,=\, B' \circ \mathcal{J}_Q$ y $B \,=\, \widetilde{B}' \circ \mathcal{J}_H$, donde $\mathcal{J}_H : H \longrightarrow H''$ y $\mathcal{J}_Q : Q \longrightarrow Q''$ son las inyecciones respectivas (ver problema 3.66).*

4.44 *Además de las definiciones y notaciones del problema 4.43, se introduce ahora una forma bilineal y acotada $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ con operadores inducidos $A,\, \widetilde{A} \,\in\, \mathcal{L}\big(H,H'\big)$. Entonces, dados $(F,G) \in H' \times Q'$, se considera el problema variacional: Hallar $(\sigma,u) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) \,+\, b(\tau,u) &\;=\; F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,v) &\;=\; G(v) \qquad \forall\, v \in Q\,. \end{aligned} \tag{43}$$

a) *Defina los operadores A y $\widetilde{A}$, y luego pruebe que $\widetilde{A} = A' \circ \mathcal{J}_H$ y $A = \widetilde{A}' \circ \mathcal{J}_H$.*

b) *Demuestre que (43) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $(\sigma, U) \in H \times \mathcal{J}_Q(Q)$ tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma) \,+\, B'(U) &\;=\; F\,, \\ B(\sigma) &\;=\; G\,. \end{aligned}$$

4.45 *Sean H un espacio de Hilbert real y $\big\{H_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H. A su vez, sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram generalizado, y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere un funcional $F_n \in H_n'$ y una forma bilineal $A_n : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$ que verifica los supuestos de la versión discreta del Teorema de Lax-Milgram generalizado con constante inf-sup α_n. De acuerdo a lo anterior, denote por $u \in H$ y $u_n \in H_n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) las únicas soluciones de los problemas*

$$A(u,v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in H\,, \quad \text{y} \quad A_n(u_n,v) \,=\, F_n(v) \qquad \forall\, v \in H_n\,. \tag{44}$$

i) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H)$ *el operador inducido por* A*, suponga que existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\alpha_n \geq \alpha$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$*, y demuestre que*

$$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C_1 \,\text{dist}(u; H_n, A_n) \,+\, C_2 \,\, \|F|_{H_n} \,-\, F_n\|_{H_n'} \,,$$

donde C_1 *y* C_2 *son constantes positivas que dependen sólo de* $\|\mathbf{A}\|$ *y* α*, y*

$$\text{dist}(u; H_n, A_n) \,:=\, \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)}{\|w_n\|_H} \right\} .$$

ii) *Deduzca a partir de i) las cotas de error respectivas en los casos en que el problema discreto de (44) se reemplaza por* $A_n(u_n, v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \,\in\, H_n$ *o por* $A(u_n, v) \,=\, F_n(v) \quad \forall\, v \in H_n$.

4.46 *Sean* H *un espacio de Hilbert real y* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal que verifica las hipótesis del Teorema de* LAX-MILGRAM *generalizado. Luego, dado* $F \in H'$*, denote por* $\sigma \in H$ *a la única solución de*

$$a(\sigma, \tau) \,=\, F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H \,, \tag{45}$$

y sea $\sigma_h \in H_h$ *una solución de Galerkin asociada, donde* H_h *es un subespacio de dimensión finita de* H *que satisface las hipótesis de la versión discreta del Teorema de* LAX-MILGRAM *generalizado. Demuestre que existe una constante* $c > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_H \,\leq\, c\, \|\mathcal{R}_h\|_{H'} \,,$$

donde $\mathcal{R}_h \in H'$ *está dado por*

$$\mathcal{R}_h(\tau) \,:=\, F(\tau) - a(\sigma_h, \tau) \quad \forall\, \tau \,\in\, H \,.$$

4.47 *Dados* X_1*,* X_2*,* M_1*, y* M_2 *espacios de Banach reales reflexivos, considere formas bilineales acotadas* $a : X_2 \times X_1 \to \mathbb{R}$ *y* $b_i : X_i \times M_i \to \mathbb{R}$*,* $i \in \{1, 2\}$*, cuyos operadores inducidos se denotan por* $A \in \mathcal{L}(X_2, X_1')$ *y* $B_i \in \mathcal{L}(X_i, M_i')$*, respectivamente, esto es*

$$A(w)(v) := a(w, v) \qquad \forall\, (w, v) \in X_2 \times X_1$$

y

$$B_i(w)(q) := b_i(w, q) \qquad \forall\, (w, q) \in X_i \times M_i \,.$$

Además, para cada $i \in \{1, 2\}$ *denote por* K_i *el espacio nulo de* B_i *y por* $B_i^{\mathtt{t}} \in \mathcal{L}(M_i, X_i')$ *su “adjuntorespectivo, esto es*

$$B_i^{\mathtt{t}}(q)(w) := b_i(w, q) \qquad \forall\, (q, w) \in M_i \times X_i \,.$$

A su vez, sea $\Pi : X_1' \to K_1'$ *el operador definido por* $\Pi(f)(v) := f(v) \;\; \forall\, (f, v) \in X_1' \times K_1$*, y suponga que se verifican las siguientes hipótesis*

i) $\Pi\, A|_{K_2} : K_2 \to K_1'$ *es un isomorfismo (biyección acotada).*

ii) *para cada* $i \in \{1, 2\}$ *existe* $\beta_i > 0$ *tal que* $\|B_i^{\mathtt{t}}(q)\|_{X_i'} \,\geq\, \beta_i \,\|q\|_{M_i} \;\; \forall\, q \in M_i$.

De acuerdo a lo anterior, se pide lo siguiente:

a) *Muestre que i) y ii) se pueden re-escribir, equivalentemente, como condiciones inf-sup continuas para a, b_1 y b_2.*

b) *Pruebe que para cada $(f,g) \in X_1' \times M_2'$ existe un único $(u,p) \in X_2 \times M_1$ tal que*

$$A(u) + B_1^{\mathbf{t}}(p) = f \quad y \quad B_2(u) = g\,. \tag{46}$$

c) *Deduzca la existencia de constantes explícitas C_1, $C_2 > 0$, que dependen sólo de A, $\Pi A|_{K_2}$, β_1 y β_2, tales que*

$$\|u\|_{X_2} + \|p\|_{M_1} \le C_1 \|f\|_{X_1'} + C_2 \|g\|_{M_2'}\,.$$

d) *Demuestre que i) y ii) son también condiciones necesarias para la solubilidad única de (46) ante cualquier par $(f,g) \in X_1' \times M_2'$.*

4.48 *Sea X un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $b : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y X-elíptica (con constante α). El propósito de este ejercicio es hacer una demostración directa del Teorema de Lax-Milgram clásico, esto es, sin usar el Teorema de Lax-Milgram Generalizado, probando que el operador B inducido por b es acotado y biyectivo. Para ello, se pide proceder como se indica a continuación:*

a) *Defina explícitamente el operador $B : X \to X$ y muestre que es lineal y acotado.*

b) *Demuestre a partir de la hipótesis de elipticidad que B es inyectivo y de rango cerrado.*

c) *Pruebe que $R(B)^\perp = \{0\}$ y aplique el Teorema de Descomposición Ortogonal para deducir que B es sobreyectivo.*

d) *Concluya que para todo $f \in X$ existe un único $u \in X$ tal que $B(u) = f$, y pruebe que*

$$\|u\| \le \frac{1}{\alpha} \|f\|\,.$$

4.49 *Dados $r \in (1, +\infty)$ y Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, se define el espacio vectorial real*

$$\mathrm{L}^r(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \quad v \text{ es medible}\,, \quad \int_\Omega |v|^r < +\infty \right\},$$

el cual, provisto de la norma

$$\|v\|_r := \left\{ \int_\Omega |v|^r \right\}^{1/r} \qquad \forall\, v \in \mathrm{L}^r(\Omega)\,,$$

es un Banach reflexivo. En lo que sigue considere p, $q \in (1, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y recuerde (no lo pruebe) que la desigualdad de Hölder establece que

$$\left| \int_\Omega w v \right| \le \|w\|_p \, \|v\|_q \qquad \forall\, w \in \mathrm{L}^p(\Omega)\,, \quad \forall\, v \in \mathrm{L}^q(\Omega)\,.$$

a) *Dado* $w \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, *defina* $w_q := \begin{cases} |w|^{p-2}\, w & \textit{si } w \neq 0 \\ 0 & \textit{si } w = 0 \end{cases}$, *deduzca que* $w_q \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, *y pruebe que* $\displaystyle\int_\Omega w\, w_q \,=\, \|w\|_p^p \,=\, \|w_q\|_q^q \,=\, \|w\|_p \, \|w_q\|_q \,.$

b) *Demuestre, utilizando el Teorema de Lax-Milgram Generalizado, que para todo* $F \in \mathrm{L}^q(\Omega)'$ *existe un único* $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *tal que* $F(v) \,=\, \displaystyle\int_\Omega uv$ *para todo* $v \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, *y concluya, además, que* $\|F\| \,=\, \|u\|_p$.

4.50 *Sean* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $\kappa \in C(\Omega)$, *y suponga que existen constantes* κ_0, $\kappa_1 > 0$ *tales que* $\kappa_0 \,\leq\, \kappa(\mathbf{x}) \,\leq\, \kappa_1$ *para todo* $\mathbf{x} \in \Omega$. *A su vez, sean* r, $s \in (1, +\infty)$ *tales que* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, *y defina los espacios*

$$\mathbf{X}_r \,:=\, \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,;\Omega) \times \mathrm{L}^r(\Omega) \quad \textit{y} \quad \mathbf{X}_s \,:=\, \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,;\Omega) \times \mathrm{L}^s(\Omega)\,,$$

donde

$$\mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,;\Omega) \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,;\Omega) : \quad \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \textit{en} \quad \Omega \Big\}\,.$$

Demuestre que para cada $\mathbf{F} \in \mathbf{X}_s'$ *existe un único* $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{X}_r$ *tal que*

$$\int_\Omega \kappa\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega u\, v \,=\, \mathbf{F}\big((\boldsymbol{\tau}, v)\big) \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{X}_s\,.$$

Pruebe, además, que existe una constante $c > 0$, *que depende de* κ_0, *tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, u)\|_{\mathbf{X}_r} \,\leq\, c\, \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}_s'}\,.$$

4.51 *Sean* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$, $\kappa \in C(\Omega)$, *y suponga que existen constantes* κ_0, $\kappa_1 > 0$ *tales que* $\kappa_0 \,\leq\, \kappa(\mathbf{x}) \,\leq\, \kappa_1$ *para todo* $\mathbf{x} \in \Omega$. *A su vez, sean* r, $s \in (1, +\infty)$ *tales que* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, *y defina los espacios*

$$\mathbf{U}_r \,:=\, \mathrm{L}^r(\Omega) \times \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \quad \textit{y} \quad \mathbf{U}_s \,:=\, \mathrm{L}^s(\Omega) \times \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\,,$$

donde

$$\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}) \,:=\, \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in \mathrm{L}^2(\Omega \Big\}\,.$$

Demuestre que para cada $\mathbf{F} \in \mathbf{U}_s'$ *existe un único* $(u, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{U}_r$ *tal que*

$$\int_\Omega u\, v \,-\, \int_\Omega \Big\{ \kappa\, \mathrm{rot}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{rot}(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \Big\} \,=\, \mathbf{F}\big((v, \boldsymbol{\tau})\big) \qquad \forall\, (v, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{U}_s\,.$$

Pruebe, además, que existe una constante $c > 0$, *que depende de* κ_0, *tal que*

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, u)\|_{\mathbf{U}_r} \,\leq\, c\, \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{U}_s'}\,.$$

[NOTAR QUE ESTE EJERCICIO ES UNA VARIANTE DEL EJERCICIO 4.50]

5. Operadores Compactos

5.1 *Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados u_1, u_2, $y \in X$, considere la ecuación integral: Hallar $u \in X$ tal que*

$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\,(1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds = y(t) \quad \forall\, t \in \bar{\Omega}\,. \tag{47}$$

i) *Si $u_1(t) = 4t$ y $u_2(t) = 1\ \forall\, t \in \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (47) tenga al menos una solución.*

ii) *Pruebe que si $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 1$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación integral (47) tiene una única solución.*

5.2 *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.*

i) *Pruebe que si $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es de rango finito, entonces K es compacto.*

ii) *Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $K \in K(Y,Z)$, entonces KA también es compacto.*

5.3 *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión* INFINITA *y sea $K \in K(X,X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X,X)$.*

5.4 *Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Suponga que existen sucesiones $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||F_n||_{X'} < +\infty \quad , \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} ||y_n||_Y < +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty\,,$$

y además

$$A\,x = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n\, F_n(x)\, y_n \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Demuestre que A es compacto.

5.5 *Sea $p > 1$ y considere el operador $K : l_p \to l_p$ definido por*

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p\,.$$

Demuestre que K es compacto.

5.6 ([19]) *Sean H y V dos espacios de Hilbert tales que $H \subseteq V$ y la inyección $i : H \to V$ es compacta.*

a) *Se dice que una forma bilineal acotada A definida sobre $H \times H$ satisface la* Desigualdad de Gårding *si existen $\alpha > 0$ y una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbb{R}$ tales que*

$$A(v,v) \geq \alpha\, ||v||_H^2 - K(v,v) \qquad \forall\, v \in H\,.$$

Dado $F \in H'$, considere el siguiente problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{48}$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Gårding, entonces (48) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SÓLO SI *$u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.*

b) *Se dice que A satisface la* DESIGUALDAD DE GÅRDING GENERALIZADA *si existen $\alpha > 0$, una forma bilineal acotada $K : H \times V \to \mathbb{R}$, y un isomorfismo $S : H \to H$ tales que*

$$A(v, Sv) \;\geq\; \alpha\,||v||_H^2 \,-\, K(v, Sv) \qquad \forall\, v \,\in\, H\,.$$

Demuestre que si A satisface la desigualdad de Garding generalizada, entonces (48) tiene solución para cada $F \in H'$ SI Y SÓLO SI *$u = 0$ es la única solución del correspondiente problema homogéneo.*

5.7 *Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0,1] \to C[0,1]$ por*

$$\mathbf{K}(u)(t) \,:=\, \int_0^1 K(t,s)\,u(s)\,ds \qquad \forall\, t \,\in\, [0,1]\,, \quad \forall\, u \,\in\, C[0,1]\,.$$

Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

5.8 ([20], [21]) *Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:*

$$\Delta u \,+\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{49}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (49) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{50}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla\, z$, donde $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es la única solución del problema:

$$\Delta\, z \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad z \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Pruebe que P es un proyector compacto, y concluya que (cf. Ejercicio 3.21)

$$H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I-P)(H(\mathrm{div};\Omega))\,.$$

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (50) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,+\, K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,,$$

donde

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := -\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) - \int_\Omega \mathrm{div}\; P(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\; P(\boldsymbol{\tau}) + \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau})\,,$$

$$K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := 2\int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \int_\Omega P(\boldsymbol{\sigma})\cdot(I-P)(\boldsymbol{\tau}) \,+\, \int_\Omega (I-P)(\boldsymbol{\sigma})\cdot P(\boldsymbol{\tau})\,,$$

y F es el funcional definido por el lado derecho de (50).

iv) *Sean $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbb{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ los operadores lineales y acotados asociados a las formas bilineales A y K, respectivamente. Demuestre que $\mathbf{A}$ es biyectivo y que $\mathbb{K}$ es compacto.*

Ind. *Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I - 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface la condición inf-sup continua.*

5.9

a) *Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.*

b) *Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.*

c) *Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.*

5.10 ([18]) *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador* NOLINEAL. *Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que*

$$x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x \quad y \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \,-\, (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\,,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$. Ahora, sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbb{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) *existe $C_0 > 0$ tal que*

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \,\geq\, C_0\,||\lambda|_Q^2 \quad \forall\,(u,\lambda) \,\in\, X\,.$$

ii) *existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$*

$$(A(u))\,(u - v) \,-\, (A(v))\,(u - v) \,\geq\, C_1\,||u - v||_H^2 \,+\, R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \,\leq\, C_2\,\{\,1 \,+\, ||u||_H \,+\, ||v||_H\,\}\,||u - v||_V\,.$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \,:=\, (A(u))\,(v) \,+\, B((u,\lambda),(v,\mu))\,,$$

satisface la propiedad (S).

5.11 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \geq 2$.*

5.12 ([30], [31]) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\Omega)}$, norma inducida $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$, y semi-norma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$. Además, sea $P_1(\Omega)$ el espacio de polinomios sobre Ω de grado ≤ 1 con base $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ donde $p_0(x) = 1$ y $p_i(x) = x_i \;\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $\forall\, x := (x_1, ..., x_n)^{\mathtt{t}} \in \Omega$.*

a) [DESIGUALDAD DE POINCARÉ GENERALIZADA]. *Defina la aplicación*

$$|||v||| \;:=\; \left\{ |v|^2_{H^2(\Omega)} \;+\; \sum_{i=0}^{n} |\,\langle v, p_i\rangle_{H^2(\Omega)}\,|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ *tales que*

$$C_1\, |||v||| \;\le\; \|v\|_{H^2(\Omega)} \;\le\; C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,.$$

IND.: *Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *existe* $v_n \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \;>\; n\, |||v_n|||$. *Luego, defina* $w_n := \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{H^2(\Omega)}}$, *observe que* $\|w_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, *note que* $|||w_n||| < \frac{1}{n}$, *y aplique el hecho que la inclusión de* $H^2(\Omega)$ *en* $H^1(\Omega)$ *es compacta.*

b) [LEMA DE DENY-LIONS]. *Considere el espacio cuociente* $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ *con norma*

$$\|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; \inf_{p\in P_1(\Omega)} \|v - p\|_{H^2(\Omega)}\,,$$

y defina

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;:=\; |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

Demuestre que $|\cdot|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$ *está bien definida y que existe* $C > 0$ *tal que*

$$|[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \;\le\; \|[v]\|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)}$$

$$\le\;\; C\; |[v]|_{H^2(\Omega)/P_1(\Omega)} \qquad \forall\, [v] \,\in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)\,.$$

IND.: *Note que para todo* $p \in P_1(\Omega)$ *y para todo* α *con* $|\alpha| = 2$ *se tiene* $\partial^\alpha p = 0$. *Aplique la desigualdad de Poincaré generalizada.*

c) [LEMA DE BRAMBLE-HILBERT]. *Sea* $\Pi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^1(\Omega))$ *tal que* $\Pi(p) = p\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$. *Demuestre que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|v - \Pi(v)\|_{H^1(\Omega)} \;\le\; C\, |v|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \,\in\, H^2(\Omega)\,.$$

IND.: *Note que* $v - \Pi(v) = v - p - \Pi(v - p)\ \forall\, p \in P_1(\Omega)$, *y luego aplique el Lema de Deny-Lions.*

5.13 *Aplique el análisis sobre alternativa de Fredholm y método de Galerkin para estudiar la solubilidad discreta del problema de valores de contorno:*

$$u'' \,+\, k\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0,1[\,, \quad u'(0) = a\,, \quad u'(1) = b\,,$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{R}^+$ *y* a, $b \in \mathbb{R}$.

5.14 *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio de Hilbert real y* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada cuyo operador inducido* $A \in \mathcal{L}(H)$ *es biyectivo. Dados un conjunto de vectores* $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ *y* $F \in H'$, *considere la formulación variacional: Hallar* $u \in H$ *tal que*

$$a(u, v) \,-\, \sum_{j=1}^{N} \langle u, u_j\rangle\, \langle v, u_j\rangle \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{51}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ *que garantice que para cada* $F \in H'$ *el problema (51) tiene una única solución.*

5.15 *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times H \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas tales que a es H-elíptica y b es simétrica. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) \,+\, \sum_{j=1}^{N} a(u,u_j)\, b(v,u_j) \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{52}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (52) tiene una única solución. En particular, qué ocurre si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $b(u_i, u_j) = c\,\delta_{ij} \quad \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}$? Por otro lado, qué podría concluir si $a = b$?

5.16 *Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ converge débilmente a $x \in X$, y se escribe $x_n \xrightarrow{w} x$, si*

$$F(x_n) \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} F(x) \qquad \forall\, F \in X'\,.$$

a) *Demuestre que el límite débil x es único, y luego aplique el* Teorema de Banach-Steinhaus *para deducir que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

b) *Dados $(Y, \|\cdot\|_Y)$ otro espacio vectorial normado y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, demuestre que K transforma convergencia débil en convergencia fuerte, esto es,*

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \Longrightarrow \qquad \|K(x_n) - K(x)\|_Y \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Para ello, pruebe primero que $K(x_n) \xrightarrow{w} K(x)$, y luego razone por contradicción observando que, si una determinada sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a z, entonces existen $\delta > 0$ y una subsucesión $\{z_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z_n^{(1)} - z\| \,\geq\, \delta \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

5.17 *Sean X, Y y Z espacios vectoriales normados y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{A\} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a A, esto es*

$$A_n(y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A(y) \qquad \forall\, y \in Y\,.$$

a) *Suponga que existe $M > 0$ tal que $\|A_n\| \,\leq\, M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, y razone por contradicción para demostrar que*

$$\|A_n\, K \,-\, A\, K\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(X,Y).$$

b) *En vez del supuesto en a) suponga ahora que Y es Banach. Aplique entonces el* Teorema de Banach-Steinhaus *y obtenga la misma conclusión de a).*

c) *Sean $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ tales que $B_n'(G) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B'(G) \quad \forall\, G \in Y'$. Use el hecho que el adjunto de un operador compacto tambien es compacto para demostrar que*

$$\|KB_n - KB\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\, K \,\in\, \mathcal{K}(Y,Z)\,.$$

5.18 *Sean X e Y espacios de Hilbert, y sea $B \in \mathcal{L}(Y', X')$.*

i) *Demuestre que existe un único $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $A' \,=\, B$.*

ii) *Use el hecho que el adjunto de Hilbert de un operador compacto es también compacto, para probar que* $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ *cada vez que* $B \in \mathcal{K}(Y', X')$.

5.19 *Se dice que una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de un espacio de Hilbert* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *converge débilmente a* $x \in X$, *lo cual se denota* $x_n \overset{w}{\to} x$, *si* $\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle \ \ \forall\, z \in X$. *En particular, se sabe que toda sucesión acotada en un Hilbert posee una subsucesión que converge débil.*

a) *Sean* X *e* Y *espacios de Hilbert y sea* $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ *tal que* K *transforma sucesiones débilmente convergentes de* X *en sucesiones convergentes de* Y. *Pruebe que* K *es compacto.*

b) *Sea* X *un espacio de Hilbert y sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, *tales que* $x_n \overset{w}{\to} x$ *y* $\|x_n\| \to \|x\|$. *Pruebe que* $x_n \to x$.

c) *Sean* X *e* Y *espacios de Hilbert y sea* $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ *un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que* $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ *también es compacto.*

d) *Demuestre el recíproco de a), esto es que todo operador compacto transforma convergencia débil en convergencia en norma (lo cual también se conoce como convergencia fuerte).*

6. Reflexividad y Separabilidad

6.1 *Dado un espacio vectorial normado X, demuestre que existen un espacio vectorial normado $\widetilde{X}$ y un espacio de Banach Y, tales que X es isomorfo a $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \subseteq Y$, $\|x\|_Y = \|x\|_{\widetilde{X}} \quad \forall\, x \in \widetilde{X}$, y $\widetilde{X}$ es denso en Y.*

6.2

a) *Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ biyectivo. Demuestre que X es reflexivo (separable) si y sólo si Y es reflexivo (separable).*

b) *Sean X, Y espacios de Banach separables (reflexivos). Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable (reflexivo).*

c) *Dado un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ y $p \in \mathbb{R}$, $2 \le p < \infty$, se define*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ medible } y \, ||f||_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega |f|^p \, dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Puede probarse que $(L^p(\Omega), ||\cdot||_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach separable. Por otra parte, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \quad \text{existe } g_i \in L^p(\Omega)\,, i = \overline{1,N} \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega g_i \phi \, dx \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}$$

En tal caso se escribe $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se define la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

Puede probarse que $(W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)})$ también es Banach. Demuestre que el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

6.3 *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es* débilmente compacto *si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en Y. Pruebe que si X o Y es reflexivo, entonces todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto.*

6.4 *Sean a, $b \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.*

6.5 *Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es separable.*
Ind.: *Escriba $X = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in X : \ ||x|| \le n\}$, y luego use que todo subconjunto relativamente compacto de un espacio métrico es separable.*

6.6 *Un importante resultado establece que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. En lo que sigue suponga que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y que $p \in \mathbb{R}$ es tal que $p \ge 2$.*

a) *A partir del hecho que* $\alpha^p + \beta^p \le (\alpha^2+\beta^2)^{p/2}\ \forall\,\alpha,\beta \ge 0$, *demuestre la desigualdad de Clarkson:*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{2}\left\{||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)}\right\} \quad \forall\, f,g \in L^p(\Omega).$$

b) *Utilice la desigualdad anterior para probar que* $L^p(\Omega)$, $2 \le p < \infty$, *es uniformemente convexo y por lo tanto reflexivo. Además, deduzca que* $W^{1,p}(\Omega)$ *también es reflexivo.*

6.7 *Dado* $p \ge 1$, *considere el espacio vectorial normado*

$$\ell_p(\mathbb{C}) := \{\, \mathbf{x} := \{x_n\}_{n\in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad y \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \,\},$$

provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\|\mathbf{x}\| := \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right\}^{1/p}$. *Demuestre que* $\ell_p(\mathbb{C})$ *es separable.*

6.8 *Dado un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, *considere el espacio de Hilbert* $(H(\mathrm{div};\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, *donde*

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \right\},$$

y

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \int_\Omega \left\{ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \right\} \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega).$$

Asuma que $L^2(\Omega)$ *es separable y demuestre que* $H(\mathrm{div};\Omega)$ *también lo es.*

6.9 *Dados* X *e* Y *espacios de Banach reales y* $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada, defina los operadores* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(X, Y')$ *y* $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(Y, X')$ *por*

$$\mathbf{A}(x)(y) := \mathcal{A}(x,y) \quad y \quad \mathbf{B}(y)(x) := \mathcal{A}(x,y) \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

a) *Defina explícitamente los operadores adjuntos* $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{B}'$, *y demuestre que* $\mathbf{B} = \mathbf{A}' \circ J_Y$ *y* $\mathbf{A} = \mathbf{B}' \circ J_X$, *donde* $J_Y : Y \to Y''$ *y* $J_X : X \to X''$ *son las inyecciones respectivas.*

b) *Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis* i)-ii) *o* iii)-iv) *dados a continuación, y asumiendo que* Y *es reflexivo, se tiene que* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{B}$ *son biyectivos.*

i) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \ge \alpha\,\|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

ii) $\displaystyle\sup_{y\in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

iii) *existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\displaystyle\sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|y\|} \ge \alpha\,\|x\| \quad \forall\, x \in X,$

iv) $\displaystyle\sup_{x\in X} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, y \in Y,\ y \neq \mathbf{0},$

c) *Demuestre que considerando cualquiera de los pares de hipótesis* i)-ii) *o* iii)-iv) *dados en* b), *y asumiendo que* X *es reflexivo, se tiene que* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ *y* $\mathbf{A}$ *son biyectivos.*

6.10 *Sea M un subespacio cerrado propio de un Banach reflexivo X y sea $x_0 \in X - M$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existe $F \in M^o$ tal que $\|F\| = 1$ y $|F(x_0)| \leq \operatorname{dist}(x_0, M)$.*

6.11 *Pruebe que si X e Y son Banach y $A : X \to (Y, \boldsymbol{\sigma}(Y, Y'))$ es lineal y continuo, entonces $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

6.12 *Dados X un espacio de Banach, $G \in X'$, $\delta > 0$ y un conjunto finito $\mathcal{S} \subseteq X$, se define*

$$V(G, \delta; \mathcal{S}) := \Big\{ F \in X' : \quad |(F - G)(x)| < \delta \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \Big\}.$$

Demuestre que todos los conjuntos $V(G, \delta; \mathcal{S})$, con δ y $\mathcal{S}$ variables, constituyen una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil $\boldsymbol{\sigma}(X', X)$. A su vez, describa una base de vecindades de $\{G\}$ para la topología débil $\boldsymbol{\sigma}(X', X'')$.*

6.13 *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de X'. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

i) $f_n \stackrel{\omega^*}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow J(x)(f_n) = f_n(x) \longrightarrow J(x)(f) = f(x) \quad \forall\, x \in X.$

ii) $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \stackrel{\omega^*}{\longrightarrow} f.$

iii) $f_n \stackrel{\omega}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \stackrel{\omega^*}{\longrightarrow} f.$

iv) $\Big\{ f_n \stackrel{\omega^*}{\longrightarrow} f \quad \text{y} \quad x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Big\} \Rightarrow f_n(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$

6.14 *Probar que si Z es un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X, entonces*

$$\boldsymbol{\sigma}(Z, Z') = \boldsymbol{\sigma}(X, X')|_Z := \Big\{ A \cap Z : \quad A \in \boldsymbol{\sigma}(X, X') \Big\}.$$

6.15 *Sea X un Banach tal que X' es separable. Entonces $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable con respecto a $\boldsymbol{\sigma}(X, X')$. Recíprocamente, si $\bar{B}_X(\mathbf{0}, 1)$ es metrizable para $\boldsymbol{\sigma}(X, X')$, entonces X' es separable.*

6.16 *El objetivo de este problema es demostrar el* LEMA DE BREZIS-LIEB, *cuyas hipótesis y tesis respectivas están dadas más abajo en el comienzo de ii) y en iii). Para este efecto, se sugiere proceder como se indica a continuación.*

i) Dado $p \in (1, +\infty)$, pruebe que

$$C_p := \sup_{|t| \leqslant 1} \left\{ \frac{\big|\, |t+1|^p - |t|^p - 1 \,\big|}{|t|^{p-1} + |t|} \right\} < \infty\,,$$

y a partir de ello, tomando $t = a/b$ o $t = b/a$ cuando $a\,b \neq 0$, muestre que

$$\Big| |a+b|^p - |a|^p - |b|^p \Big| \leqslant C_p \Big\{ |a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1} \Big\} \qquad \forall\, a, b \in \mathrm{R}. \tag{53}$$

ii) Sean $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}} \subseteq \mathrm{L}^p(\Omega)$ y $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ tales que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p. en Ω y $\|f_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \longrightarrow \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$. Recuerde que si $q \in (1, +\infty)$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, el dual de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ se identifica con $\mathrm{L}^q(\Omega)$. Demuestre entonces que $|f_n - f| \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$ en $\mathrm{L}^p(\Omega)$ y $|f_n - f|^{p-1} \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$ en $\mathrm{L}^q(\Omega)$. Aplique luego (53) con $a = (f_n - f)(x)$ y $b = f(x)$, integre sobre Ω, y deduzca que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big\{ |f_n|^p - |f_n - f|^p \Big\} = \int_\Omega |f|^p\,. \tag{54}$$

iii) Concluya finalmente de (54) que

$$\|f_n - f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \longrightarrow 0 \,.$$

INDICACIÓN*: Para la primera convergencia débil pedida en ii) puede utilizar una variante del Lema de Mazur, la cual establece que para toda sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ que converge débil en un Banach X, existe una sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ que converge fuerte al mismo límite, donde cada v_n es una combinación convexa de elementos en $\{u_k\}_{k\geq n}$. A su vez, tenga presente que toda sucesión convergente en $\mathrm{L}^p(\Omega)$ posee una subsucesión que converge puntualmente c.t.p. en Ω. Por último, recuerde que al ser $\mathrm{L}^q(\Omega)$ separable, la bola unitaria de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ es metrizable con respecto a la topología débil.*

6.17 *Sean H un espacio de Hilbert real y $\mathcal{R} : H' \longrightarrow H$ su operador de Riesz asociado. Demuestre que A es abierto débil* de H' si y sólo si $\mathcal{R}(A)$ es abierto débil de H, esto es: $A \in \sigma(H',H) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{R}(A) \in \sigma(H,H')$.*

6.18 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sean $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H(\mathrm{rot};\Omega)$ y $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{rot};\Omega} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{rot};\Omega} \;\; \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$. Demuestre que para cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ se tiene que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\sigma} \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau} \,.$$

IND*: Recuerde que el espacio $H(\mathrm{rot};\Omega)$, dado por*

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\zeta} := (\zeta_1,\zeta_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\zeta} := \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

y provisto del producto escalar

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{rot};\Omega} := \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\zeta}\; \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau}\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,,$$

es un espacio de Hilbert.

6.19 *El propósito de este ejercicio es establecer algunas propiedades de la convergencia débil* y su relación con compacidad.*

i) *Se dice que una sucesión $\big\{F_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el dual X' de un Banach X converge débil* a $F \in X'$, y se escribe $F_n \xrightarrow{w^*} F$, si*

$$F_n(x) \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} F(x) \qquad \forall\, x \in X \,.$$

Pruebe en tal caso que el límite débil F es único, y luego use el* TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS *para deducir que la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

ii) *Sean X e Y espacios de Banach, y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que su adjunto K' es compacto. Pruebe que si $\big\{G_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y'$ converge débil* a $G \in Y'$, entonces*

$$\|K'(G_n) - K'(G)\|_{X'} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

iii) *Sean X e Y espacios de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{K}(Y', X')$. Pruebe que si $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y'$ converge débil* a $G \in Y'$, entonces*

$$\|T(G_n) - T(G)\|_{X'} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

6.20 *Sean X e Y espacios de Banach y $T : \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{L}(Y',X')$ el operador definido por $T(A) = A' \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Demuestre que si Y es reflexivo, entonces T es biyectivo. En tal caso, utilice alguna propiedad adicional de operadores compactos para probar que $T^{-1}(B) \in \mathcal{K}(X,Y) \quad \forall\, B \in \mathcal{K}(Y',X')$.*

7. Espacios de Sobolev

7.1 *Probar que la norma usual de $H^m(\Omega)$ y la norma de $H^s(\Omega)$ dada en términos de la transformada de Fourier son equivalentes para $s = m \in \mathbb{N}$.*

7.2 *Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.*

a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

$$v \in L^2(\Omega)\,,\ v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,,\ v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,,\ \text{ y } \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

$$\begin{gathered}
-\Delta u^- = f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+, \\
\gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma, \\
\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0,
\end{gathered} \tag{55}$$

donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\mathrm{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\mathrm{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (55) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.

c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.

d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}(v, V_h) = 0 \ \forall\, v \in V$.

e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

7.3 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1 y defina*

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{\, v|_\Gamma : \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \,\}\,.$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ y $H^{1/2}(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

7.4 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* Γ *de clase* C^1*, y considere la aplicación* $|||\cdot|||: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$|||v||| := \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ *es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ *y* $|||\cdot|||$ *son equivalentes en* $H^1(\Omega)$.

7.5 *Demuestre que* $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *es denso en* $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

7.6 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *con frontera* Γ *de clase* C^1*. El objetivo de este problema es demostrar que*

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;\geq\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \,\in\, [H^1_0(\Omega)]^2\,, \tag{56}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) := \dfrac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\right\}$*. Para tal efecto, proceda como sigue.*

i) *Dados* $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_{ij})$ *y* $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})$ *en* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*, se define el producto tensorial* $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ *y se introducen los subespacios*

$$\mathbb{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad y \quad \mathbb{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) *Note que* $\nabla\mathbf{v} = \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v})\,,$ *con* $\mathbf{w}(\mathbf{v}) := \dfrac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\right\}$*, y recuerde que* $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}$*, para probar que*

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} - \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} + \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} = \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) *Deduzca la identidad* $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} = \mathrm{div}\left\{ \nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} - \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,\mathbf{v} \right\} + (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ *y concluya la desigualdad (56).*

7.7 ([26]) *Este problema constituye una versión particular del Lema de Peetre-Tartar.*

a) *Sean* $(X_1, \|\cdot\|_1)$*,* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *y* $(X_3, \|\cdot\|_3)$*, espacios de Banach, y considere operadores* $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *y* $B \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$*, tales que* B *es compacto. Además, suponga que existe* $c > 0$ *tal que*

$$\|x\|_1 \,\leq\, c\left\{ \|A(x)\|_2 + \|B(x)\|_3 \right\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ *es de dimensión finita, y luego razone por contradicción para probar que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \,\leq\, C\,\|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

b) *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera suave* Γ *y considere la descomposición:* $H^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)$, *donde* $\mathbb{P}_0(\Omega)$ *es el espacio de las funciones constantes sobre* Ω *y*

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v = 0 \right\}.$$

Pruebe que existe $\alpha > 0$ *tal que*

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \tilde{H}^1(\Omega). \tag{57}$$

c) *Aplique* a), *(57), y el teorema de trazas, para demostrar que existen constantes* C_1, $C_2 > 0$, *tales que*

$$C_1 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq |v|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C_2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{58}$$

Indicación: *para la desigualdad (58) inferior defina operadores* A *y* B *apropiados utilizando los espacios* $X_1 := H^1(\Omega)$, $X_2 := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Gamma)$ *y* $X_3 := \mathbb{P}_0(\Omega)$.

7.8 ([26]) *Sea* Ω *un abierto acotado y conexo de* $\mathbb{R}^n$ *de clase* C^1, *y sea* $H^{-1}(\Omega)$ *(resp.* $[H^{-1}(\Omega)]^n$*) el dual de* $H_0^1(\Omega)$ *(resp.* $[H_0^1(\Omega)]^n$*). Utilizando que* $C_0^\infty(\Omega)$ *(resp.* $[C_0^\infty(\Omega)]^n$*) es denso en* $H_0^1(\Omega)$ *(resp.* $[H_0^1(\Omega)]^n$*), las aplicaciones identidad* $i : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *y gradiente* $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ *se extienden por densidad a operadores* $i : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *y* $\nabla : L^2(\Omega) \to [H^{-1}(\Omega)]^n$, *respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe* $c_1 > 0$, *que depende sólo de* Ω, *tal que*

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq c_1 \left\{ \|p\|_{-1,\Omega} + \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \right\} \quad \forall\, p \in L^2(\Omega).$$

a) *Considere el operador* $B := \mathcal{R}\,\nabla$, *donde* $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ *es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de* B *es cerrado en* $[H_0^1(\Omega)]^n$.

b) *Identifique el operador adjunto* $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$ *y utilice el Ejercicio 7.7 para probar que* $\mathrm{div} : W^\perp \to L_0^2(\Omega)$ *es un isomorfismo, donde*

$$W := \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \right\}, \qquad [H_0^1(\Omega)]^n = W \oplus W^\perp,$$

y

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0 \right\}.$$

7.9 *Sea* Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^N$ *con frontera suave* Γ *y sea* $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *una función que satisface las hipótesis:*

i) $w > 0$ *casi en todas partes.*

ii) $1/w \in L^1_{loc}(\Omega)$; *esto es, dado cualquier abierto* Ω_0 *tal que* $\overline{\Omega}_0$ *es un compacto contenido en* Ω, $1/w \in L^1(\Omega_0)$.

a) *Demuestre que* $L_w^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \quad u \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^2 w < \infty \right\}$ *equipado con el producto interior*

$$\langle u, v \rangle_{L_w^2(\Omega)} := \int_\Omega u\, v\, w$$

es un espacio de Hilbert.

b) *Demuestre que* $H^1_w(\Omega) := \left\{ u \in L^2_w(\Omega) : \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2_w(\Omega) \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., N\} \right\}$ *equipado con la norma*

$$\|u\|_{H^1_w(\Omega)} := \left\{ \|u\|^2_{L^2_w(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2_w(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

7.10 *Sean* Ω, w, $L^2_w(\Omega)$ *y* $H^1_w(\Omega)$ *como en el Ejercicio 7.9 y sea* $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de abiertos de* $\mathbb{R}^N$ *tal que* $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ *y* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. *Asuma además la siguiente hipótesis adicional para* w:

iii) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *la inyección de* $H^1_w(\Omega_n)$ *en* $L^2_w(\Omega_n)$ *es compacta.*

Demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

a) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|u\|^2_{L^2_w(\Omega)} \le \varepsilon \|u\|^2_{H^1_w(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2_w(\Omega_m)} \quad \forall\, u \in H^1_w(\Omega)\,.$$

b) *La inyección de* $H^1_w(\Omega)$ *en* $L^2_w(\Omega)$ *es compacta.*

7.11 *Dados* $\Omega :=]0,1[$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *introduzca el espacio de Sobolev de orden* m:

$$H^m(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \right\},$$

el cual es Hilbert con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,\Omega}$ *y norma inducida* $\| \cdot \|_{m,\Omega}$, *donde:*

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} := \sum_{j=0}^{m} \int_0^1 u^{(j)}\, v^{(j)} \quad y \quad \|v\|^2_{m,\Omega} = \sum_{j=0}^{m} \|v^{(j)}\|^2_{0,\Omega} \qquad \forall\, u,\, v \in H^m(\Omega)\,.$$

Luego, defina $H^m_0(\Omega) := \overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,\Omega}}$, $|v|_{m,\Omega} := \|v^{(m)}\|_{0,\Omega} \;\; \forall\, v \in H^m(\Omega)$, *y pruebe que*

$$\|v\|^2_{m,\Omega} \le \left\{ 2 - \frac{1}{2^m} \right\} |v|^2_{m,\Omega} \qquad \forall\, v \in H^m_0(\Omega)\,.$$

Referencias

[1] Alvarez, M., Gatica, G.N. and Ruiz-Baier, R., *An augmented mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 49, 5, pp. 1399-1427, (2015).

[2] Babuška, I. and Aziz, A.K., *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method.* In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (Proc. Sympos., University of Maryland, Baltimore, USA, 1972), pp. 1-359. Academic Press, New York, 1972.

[3] Bernardi, C., Canuto, C. and Maday, Y., *Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 25, 6, pp. 1237-1271, (1998).

[4] Brezzi, F. and Fortin, M., Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1991.

[5] Buffa, A., *Remarks on the discretization of some non-coercive operator with applications to heterogeneous Maxwell equations.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 43, 1, pp. 1-18, (2005).

[6] Camaño, J., Oyarzúa, R. and Tierra, G., *Analysis of an augmented mixed-FEM for the Navier-Stokes problem.* Preprint 2014-33, Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI^2MA), Universidad de Concepción, Chile, (2014). Mathematics of Computation, to appear.

[7] Ciarlet, P., The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.

[8] Colmenares, E., Gatica, G.N. and Oyarzúa, R., *Analysis of an augmented mixed-primal formulation for the stationary Boussinesq problem.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 32, 2, pp. 445-478, (2016).

[9] Galvis, J. and Sarkis, M., *Non-matching mortar discretization analysis for the coupling Stokes-Darcy equations.* Electronic Transactions on Numerical Analysis, vol. 26, pp. 350-384, (2007).

[10] Gatica, G.N., *On the coerciveness property of the biharmonic operator.* Proyecciones, vol. 10, 17, pp. 27-34, (1991).

[11] Gatica, G.N., *Analysis of a new augmented mixed finite element method for linear elasticity allowing RT_0-P_1-P_0 approximations.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, 1, pp. 1-28, (2006).

[12] Gatica, G.N. and Gatica, L.F., *On the a-priori and a-posteriori error analysis of a two-fold saddle point approach for nonlinear incompressible elasticity.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 68, 8, pp. 861-892, (2006).

[13] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Sequeira, F., *A* RT_k - P_k *approximation for linear elasticity yielding a broken* $H(\mathrm{div})$ *convergent postprocessed stress*. Applied Mathematics Letters, vol. 49, pp. 133-140, (2015).

[14] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Sequeira, F., *A priori and a posteriori error analyses of a pseudostress-based mixed formulation for linear elasticity*. Computers & Mathematics with Applications, vol. 71, 2, pp. 585-614, (2016).

[15] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Stephan, E.P., *A dual-mixed finite element method for nonlinear incompressible elasticity with mixed boundary conditions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, 35-36, pp. 3348-3369, (2007).

[16] Gatica, G.N. and Heuer, N., *A dual-dual formulation for the coupling of mixed-FEM and BEM in hyperelasticity*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, 2, pp. 380-400, (2000).

[17] Gatica, G.N., Heuer, N. and Meddahi, S., *On the numerical analysis of nonlinear two-fold saddle point problems*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, (2003).

[18] Gatica, G.N. and Hsiao, G.C., *The coupling of boundary integral and finite element methods for nonmonotone nonlinear problems*. Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 13, 5&6, pp. 431-447, (1992).

[19] Gatica, G.N. and Hsiao, G.C., *A Gårding's inequality for variational problems with constraints*. Applicable Analysis, vol. 54, 1-2, pp. 73-90, (1994).

[20] Gatica, G.N., Márquez, A. and Meddahi, S., *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, 5, pp. 2072-2097, (2007).

[21] Gatica, G.N., Márquez, A. and Meddahi, S., *A new coupling of mixed finite element and boundary element methods for an exterior Helmholtz problem in the plane*. Advances in Computational Mathematics, vol. 30, 3, pp, 281-301, (2009).

[22] Gatica, G.N., Ruiz-Baier, R. and Tierra, G., *A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity*. Mathematics of Computation, vol. 85, 297, pp. 1-33, (2016).

[23] Gatica, G.N. and Sayas, F.-J., *Characterizing the inf-sup condition on product spaces*. Numerische Mathematik, vol. 109, 2, pp. 209-231, (2008).

[24] Gatica, G.N. and Wendland, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for linear and nonlinear elliptic problems*. Applicable Analysis, vol. 63, pp. 39-75, (1996).

[25] Gatica, G.N. and Wendland, W.L., *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyperelastic interface problem.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 34, 6, pp. 2335-2356, (1997).

[26] Girault, V. and Raviart, P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer-Verlag, 1986.

[27] Howell, J.S. and Walkington, N.J., *Inf-sup conditions for twofold saddle point problems.* Numerische Mathematik, vol. 118, 4, pp. 663-693, (2011).

[28] Hsiao, G.C., *A modified Galerkin scheme for elliptic equations with natural boundary conditions.* Numerical Mathematics and Applications (Oslo, 1985), 193-197, IMACS Trans. Sci. Comput.-85, I, North Holland, Amsterdam, 1986.

[29] Johnson, C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[30] Kufner, A., John, O. and Fučík, S., Function Spaces. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977. xv+454 pp.

[31] Quarteroni, A. and Valli, A., Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1994.

[32] Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M., Introduction á L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. Masson, 1983.

[33] Xu, J. and Zikatanov, L., *Some observations on Babuška and Brezzi theories.* Numerische Mathematik, vol. 94, 1, pp. 195202, (2003).