UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 3 ALGEBRA III 525201-1 (Desarrollo / Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada.

Problema 1.

1.1) Demostrar que toda matriz cuadrada nilpotente, tiene al 0 como único elemento de su espectro. **(10 puntos)**

PROOF: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz nilpotente. Supongamos que su índice de nilpotencia es $m \in \mathbb{N}$, i.e. $\forall\, k \geq m : A^k = \Theta$ y $A^{m-1} \neq \Theta$.

PROBEMOS QUE $\{0\} \subseteq \sigma(A)$.
Como $|A^m| = 0$, entonces $|A|^m = 0$, de donde se infiere que $|A| = 0$. Esto implica que $0 \in \sigma(A)$.

ESTABLEZCAMOS AHORA QUE $\sigma(A) \subseteq \{0\}$.
Sea $\lambda \in \sigma(A)$, y $z \in \mathbb{K}^n \backslash \{\theta\}$ un vector propio de A asociado a λ. Tenemos, invocando una propiedad discutida en clases:

$$A\,z = \lambda\,z \quad \Rightarrow \quad A^m\,z = \lambda^m\,z\,.$$

En vista que $A^m = \Theta$, se infiere $\lambda^m\,z = \theta$, y dado que $z \neq \theta$, se deduce que $\lambda^m = 0$, y así $\lambda = 0$. De esta manera se ha demostrado que $\sigma(A) \subseteq \{0\}$.

FINALMENTE, concluimos que $\sigma(A) = \{0\}$.

COMENTARIOS:

- Algunos desarrollos argumentan que toda matriz nilpotente es triangular superior con elementos nulos en su diagonal principal. Esto no es cierto. Por ejemplo, la matriz $A := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \neq \Theta$ no es triangular superior, no obstante $A^2 = \Theta$.
- Otros argumentan que si $0 \in \sigma(A)$, entonces A es NILPOTENTE. Esto tampoco es cierto. Basta con considerar la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, la cual verifica $0 \in \sigma(A)$, pero A no es nilpotente.

1.2) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^6)$ tal que

- T no es inyectiva.
- $5 \in \sigma(T)$ de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2.
- $\{4, 7\} \subseteq \sigma(T)$.

Considerando la matriz representante de T (respecto de la base canónica por ejemplo), ¿admite forma canónica de Jordan? ¿Por qué? En caso afirmativo, determinar la forma canónica de Jordan J, indicando cómo construye la base de $\mathbb{K}^6$ con respecto a la cual J se obtiene. **(10 puntos)**

PROOF: Denotemos por $[T]$ la matriz asociada a T con respecto a la base canónica B de $\mathbb{K}^6$. De los datos tenemos

- Como T no es inyectiva, entonces $\lambda_1 := 0 \in \sigma([T])$, con $m_{\lambda_1} \geq 1$.
- $\lambda_2 := 5 \in \sigma([T])$, con $m_{\lambda_2} = 3$ y $d_{\lambda_2} = 2$.
- $\lambda_3 := 4 \in \sigma([T])$, con $m_{\lambda_3} \geq 1$.

- $\lambda_4 := 7 \in \sigma([T])$, con $m_{\lambda_4} \geq 1$.

En vista que $6 \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{4} m_{\lambda_j} \leq 6$, se desprende que $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} m_{\lambda_j} = 6$, lo cual implica que $3 \leq m_{\lambda_1} + m_{\lambda_3} + m_{\lambda_4} = 3$. En consecuencia, se deduce que $m_{\lambda_1} = 1 = d_{\lambda_1}$, $m_{\lambda_3} = 1 = d_{\lambda_3}$ y $m_{\lambda_4} = 1 = d_{\lambda_4}$. Esto nos asegura que $[T]$ admite FORMA CANÓNICA DE JORDAN J. Por otro lado, en vista que $m_{\lambda_2} > d_{\lambda_2}$, $[T]$ es NO DIAGONALIZABLE.

Sean

- $u \in \mathbb{K}^{6\times 1}\backslash\{\theta\}$ tal que $S_{\lambda_1} = \langle\{u\}\rangle$. Esto implica que $[T]\,u = \lambda_1\,u$.
- $v \in \mathbb{K}^{6\times 1}\backslash\{\theta\}$ tal que $S_{\lambda_3} = \langle\{v\}\rangle$. Esto implica que $[T]\,v = \lambda_3\,v$.
- $w \in \mathbb{K}^{6\times 1}\backslash\{\theta\}$ tal que $S_{\lambda_4} = \langle\{w\}\rangle$. Esto implica que $[T]\,w = \lambda_4\,w$.
- $\{z_1, z_2\} \subseteq \mathbb{K}^{6\times 1}$ una base de S_{λ_2}, lo cual significa que $S_{\lambda_2} = \langle\{z_1, z_2\}\rangle$. Esto implica que $[T]\,z_1 = \lambda_2\,z_1$ y $[T]\,z_2 = \lambda_2\,z_2$.

De esta forma, tenemos cinco vectores l.i. de $\mathbb{K}^{6\times 1}$. Por determinar un vector adecuado que complete la base de $\mathbb{K}^{6\times 1}$. Para esto, consideramos el NÚCLEO ITERADO ASOCIADO A λ_2 DE ÍNDICE 2

$$E_2(\lambda_2) = \mathrm{Ker}(([T] - \lambda_2\,I)^2)\,,$$

el cual será de dimensión $3 = m_{\lambda_2}$, pues $E_1(\lambda_2) = S_{\lambda_2}$ es de dimensión $2 < m_{\lambda_2}$.
Luego, tomamos $z_3 \in E_2(\lambda_2) \setminus E_1(\lambda_2)$. Esto implica que

$$([T] - \lambda_2\,I)^2\,z_3 = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ([T] - \lambda_2\,I)\,z_3 = z_2 \\ ([T] - \lambda_2\,I)\,z_2 = \theta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} [T]\,z_2 = \lambda_2\,z_2 \\ [T]\,z_3 = z_2 + \lambda_2\,z_3 \end{cases}$$

Así, se obtiene $C := \{u, v, w, z_1, z_2, z_3\}$, una base de $\mathbb{K}^{6\times 1}$, con el cual se construye la matriz (de semejanza) $P := \Big(u\,|\,v\,|\,w\,|\,z_1\,|\,z_2\,|\,z_3\Big)$, tal que $P^{-1}[T]P = J = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 7 & & & \\ & & & 5 & & \\ & & & & 5 & 1 \\ & & & & & 5 \end{pmatrix}$.

Finalmente, $\tilde{B} := \{u^{\mathtt{t}}, v^{\mathtt{t}}, w^{\mathtt{t}}, z_1^{\mathtt{t}}, z_2^{\mathtt{t}}, z_3^{\mathtt{t}}\}$ es una base de $\mathbb{K}^6$ tal que $[T]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = J$.

Problema 2. Considere la matriz $A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. **(20 puntos)**

2.1) Determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de no serlo, determine su forma canónica de Jordan, si existe. Caso contrario, determine la forma de Jordan real asociada.

DESARROLLO: Primero, calculamos el polinomio característico de A. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$p_A(\lambda) := \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \tag{1}$$

Calculamos ahora el determinante de la matriz de orden 4. Para ello, aplicamos la propiedad $|B| = |B^{\mathrm{t}}|$. Así

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{f_1+f_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{f_3-2f_1}{\overset{f_2+3f_1}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{f_2+f_3}{\overset{f_4+5f_1}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{f_3-3f_1}{\overset{f_2+f_1}{=}} (2-\lambda)\,(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(3-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda) + 2\big) = (2-\lambda)^2\,(3-\lambda)^2\,.$$

De esta manera, reemplazando en (1), se tiene que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3\,(3-\lambda)^2$. Esto nos permite inferir que los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 3$ y $\lambda_2 = 3$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

Ahora procedemos a determinar los Espacios Propios asociados a cada valor propio de A.
Para $\lambda_1 = 2$: Sabemos que

$$S_{\lambda_1} := \left\{ z \in \mathbb{R}^{5\times 1} \,:\, (A - \lambda_1 I)\, z = \theta \right\}\,.$$

Escalonando $A - \lambda_1 I$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{3f_5}{\overset{f_3-f_5}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{f_4+f_3}{\overset{f_5-f_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_5-f_4}{\overset{f_5+2f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_3\leftarrow f_4}{\overset{f_2\leftarrow f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $\mathrm{r}(A - \lambda_1 I) = 3$, por lo tanto $d_{\lambda_1} = 5 - 3 = 2 < 3 = m_{\lambda_1}$. Esto nos permite concluir que A es No Diagonalizable. Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} m_{\lambda_j} = 5 = \mathrm{gr}(p_A)$ (= orden de A), sabemos que A admite Forma Canónica de Jordan.
Continuaremos con el cálculo de los espacios propios, para extraer bases de vectores propios.

Resolviendo ahora el Sistema Homogéneo equivalente

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\,a - b - 3\,c + 2\,d - 5\,e = 0 \\ b - e = 0 \\ d = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\,a - 6\,b - 3c = 0 \\ b = e \\ d = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2\,s + t \\ b = s \\ c = t \\ d = 0 \\ e = s \\ s, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De esta manera,

$$S_{\lambda_1} = \left\{ z = \begin{pmatrix} 2\,s + t \\ s \\ t \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \; : \; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Definiendo

$$z_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se concluye que $\{z_1, z_2\}$ es una base de S_{λ_1}.

Para $\lambda_2 = 3$: Sabemos que

$$S_{\lambda_2} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{5\times 1} \; : \; (A - \lambda_2\, I)\, x = \theta \right\} .$$

Escalonando $A - \lambda_2\, I$, tenemos

$$A - \lambda_1\, I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{2f_3}{\overset{f_5 - f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_4 - f_2}{\overset{f_3 - f_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + f_2}{\overset{f_5 + f_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_5 - f_4}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $\mathrm{r}(A - \lambda_2\, I) = 4$, por lo tanto $d_{\lambda_2} = 5 - 4 = 1 < 2 = m_{\lambda_2}$. Resolviendo ahora el Sistema Homogéneo equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,a - b - 3\,c + 2\,d - 5\,e = 0 \\ -b = 0 \\ -c + e = 0 \\ e = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,a + 2\,d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ e = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -s \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = s \\ e = 0 \\ s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De esta manera,

$$S_{\lambda_2} = \left\{ z = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Definiendo

$$x_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

se concluye que $\{x_1\}$ es una base de S_{λ_2}.

Ahora procederemos a determinar la matriz de semejanza que nos permitirá construir la Forma Canónica de Jordan J pedida. Para esto, necesitamos determinar los Núcleos Iterados asociados a cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 2$. Sabemos que $E_1(\lambda_1) = S_{\lambda_1}$, el cual es de dimensión $2 < 3 = m_{\lambda_1}$. Esto nos asegura que $\dim(E_2(\lambda_1)) = 3 = m_{\lambda_1}$, con lo cual sólo requerimos calcular $E_2(\lambda_1)$.

$$E_2(\lambda_1) := \mathrm{Ker}((A - \lambda_1\, I)^2) = \{z \in \mathbb{R}^{5\times 1} : (A - \lambda_1\, I)^2\, z = \theta\} .$$

Escalonando $(A - \lambda_1\, I)^2$ resulta

$$(A - \lambda_1\, I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_5 - f_1}{\overset{f_4 - f_5}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_5}{\overset{f_4 - f_5}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Resolviendo el Sistema Homogéneo Equivalente,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a - c - 2e = 0\\ -b + d + e = 0\\ 0 = 0\\ 0 = 0\\ 0 = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = c + 2b - 2d\\ e = b - d\\ b, c, d \in \mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = s + 2t - 2u\\ b = t\\ c = s\\ d = u\\ e = t - u\\ s, t, u \in \mathbb{R}\,.\end{cases}$$

De esta manera,

$$E_2(\lambda_1) = \left\{ z = \begin{pmatrix} s + 2t - 2u\\ t\\ s\\ u\\ t - u\end{pmatrix} : s, t, u \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle .$$

Notamos que $z_3 := \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \in E_2(\lambda_1) \setminus E_1(\lambda_1)$. Además, se verifica $(A - \lambda_1)\, z_3 = z_2$ lo cual nos dice que $A\, z_3 = z_2 + 2\, z_3$.

Para $\lambda_2 = 3$. Sabemos que $E_1(\lambda_2) = S_{\lambda_2}$, el cual es de dimensión $1 < 2 = m_{\lambda_2}$. Esto nos asegura que $\dim(E_2(\lambda_2)) = 2 = m_{\lambda_2}$, con lo cual sólo requerimos calcular $E_2(\lambda_2)$.

$$E_2(\lambda_2) := \operatorname{Ker}((A - \lambda_2\, I)^2) = \{x \in \mathbb{R}^{5\times 1} : (A - \lambda_2\, I)^2\, x = \theta\}\,.$$

Escalonando $(A - \lambda_2\, I)^2$ resulta

$$(A - \lambda_2\, I)^2 = \begin{pmatrix}-4 & 2 & 5 & -4 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \underset{f_3+2f_4}{\overset{f_5+f_4}{\sim}} \begin{pmatrix}-4 & 2 & 5 & -4 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{f_1, \leftarrow f_4}{\overset{f_1+4f_4}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{f_4-2f_2}{\overset{f_5-f_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \overset{f_4-f_3}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Resolviendo el Sistema Homogéneo Equivalente,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - c + d - 2e = 0\\ b = 0\\ c = 0\\ 0 = 0\\ 0 = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -d + 2e\\ b = 0\\ c = 0\\ d, e \in \mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -s + 2t\\ b = 0\\ c = 0\\ d = s\\ e = t\\ s, t \in \mathbb{R}\,.\end{cases}$$

De esta manera,

$$E_2(\lambda_2) = \left\{ x = \begin{pmatrix}-s + 2t\\ 0\\ 0\\ s\\ t\end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle .$$

Notamos que $x_2 := \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \in E_2(\lambda_2) \setminus E_1(\lambda_2)$. Además, se verifica $(A - \lambda_2)\, x_2 = x_1$ lo cual nos dice que $A\, x_2 = x_1 + 3\, x_2$.

Finalmente, hemos deducido el conjunto de vectores $C := \{z_1, z_2, z_3, x_1, x_2\}$, el cual resulta ser una base de $\mathbb{R}^{5\times 1}$. Esto permite construir la matriz $P := \Big(z_1 \,|\, z_2 \,|\, z_3 \,|\, x_1 \,|\, x_2\Big)$, con el cual se obtiene $J = P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix}2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1\\ & & & & 3\end{pmatrix}$, que es lo pedido.

2.2) Determine la dimensión de todos los núcleos iterados de A. Identificar el polinomio minimal de A en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, indicando sus factores primos irreducibles.

Desarrollo: esto ya ha sido descrito en la parte 2.1) Resumiendo, tenemos que

- $\dim(E_1(\lambda_1)) = 2$, $\forall\, \ell \geq 2 : \dim(E_\ell(\lambda_1)) = 3$,
- $\dim(E_1(\lambda_2)) = 1$, $\forall\, k \geq 2 : \dim(E_k(\lambda_2)) = 2$,

Como consecuencia, se deduce que el Polinomio Minimal de A, $q_A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es dado por $\mathbb{R} \ni x \mapsto q_A(x) := (x-2)^2\,(x-3)^2$. Los factores irreducibles de q_A en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ son los polinomios $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - 2$ y $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - 3$.

Problema 3. (Condiciones para que la matriz asociada de un endomorfismo lineal sea triangular superior) **(20 puntos)**
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B := \{z_j\}_{j=1}^n$ una base de V. Considerando $T \in \mathcal{L}(V)$, demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La matriz $[T]_B^B$ es triangular superior.

(b) $\forall\, j \in \{1, ..., n\} : T(z_j) \in \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle$.

(c) $\forall\, j \in \{1, ..., n\} : \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle$ es T-invariante.

Hint: Pruebe que (a) $\Leftrightarrow$ (b) y luego que (b) $\Leftrightarrow$ (c).
Proof:
(a) $\Rightarrow$ (b): Sea $A := [T]_B^B$. Como A es triangular superior, se verifica que
$\forall\, j, k \in \{1, ..., n\} : j > k \Rightarrow a_{jk} = 0$.
Consideremos $\ell \in \{1, ..., n\}$. Por analizar dos casos posibles:

- $\ell = n$. En este caso, la n-ésima columna de $A := [T]_B^B$ corresponderá al vector de coordenadas $[T(z_n)]_B$. Esto implica que $T(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{kn}\, z_k \in \langle \{z_k\}_{k=1}^n \rangle$.

- $\ell \in \{1, ..., n-1\}$. Luego la ℓ-ésima columna de $A := [T]_B^B$ corresponderá al vector de coordenadas $[T(z_\ell)]_B$, donde todas sus componentes a partir de la posición $\ell + 1$ son Nulas,
  i.e. $\forall\, j \in \{\ell + 1, ..., n\} : a_{j\ell} = 0$. De esta forma resulta $T(z_\ell) = \displaystyle\sum_{k=1}^\ell a_{k\ell}\, z_k \in \langle \{z_k\}_{k=1}^\ell \rangle$.

Así, concluimos la validez de la proposición (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Introducimos $A := [T]_B^B$, y sea $\ell \in \{1, ..., n\}$. Considerando la Hipótesis, se observa que si $\ell < n$, entonces $\forall\, j \in \{\ell + 1, ..., n\} : \Big([T(z_\ell)]_B\Big)_j = 0$. Como consecuencia, y recordando cómo se construye $[T]_B^B$, se deduce que $\forall\, j, k \in \{1, ..., n\} : j > k \Rightarrow a_{jk} = 0$. Se establece así que $A := [T]_B^B$ es triangular superior.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $j \in \{1, ..., n\}$ fija pero arbitraria. Notamos que $\{z_\ell\}_{\ell=1}^j$ es una base de $U := \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle$.
Se distinguen dos casos:
Caso 1: $j = 1$. Gracias a (b), resulta que $T(z_1) \in \langle \{z_1\} \rangle$ y se concluye el resultado.
Caso 2: $j > 1$. En virtud a la Hipótesis, se desprende que

$$\begin{aligned} &T(z_1) \in \langle \{z_1\} \rangle \subseteq \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle\,, \\ &T(z_2) \in \langle \{z_1, z_2\} \rangle \subseteq \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle\,, \\ &\vdots \\ &T(z_j) \in \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle\,. \end{aligned}$$

Luego, invocando un resultado discutido en clases, se concluye que U es T-invariante. De esta forma se establece (c).

Otra forma: De la Hipótesis de donde se deduce que (c) $\Rightarrow$ (b): Sea $j \in \{1, ..., n\}$ fija pero arbitraria.

Como $z_j \in U := \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle$ y U es T-invariante (por Hipótesis), se infiere que $T(z_j) \in U$. En vista que $j \in \{1, ..., n\}$ es fija pero arbitraria, se tiene
$\forall\, j \in \{1, ..., n\} : T(z_j) \in \langle \{z_k\}_{k=1}^j \rangle$. Así concluye la demostración.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 10.07.2021

RBP/rbp 02.07.2021