UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2 - Análisis $\mathbb{R}$eal I

Instrucciones: Esta tarea debe ser resuelta en LaTeX a lo más en parejas. Debe subir su detallada resolución en un archivo .pdf a la parte de tareas de INFODA antes de las 23:59 horas del día 23 de junio del 2022. Recuerde que INFODA no deja subir archivos después de la hora de entrega y no se recibirán sus desarrollos por otra plataforma. Favor agregar sus correos institucionales junto a los nombres de los integrantes.

Atención: A una función $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la llamaremos ψ-continua en el punto $\hat{x} \in X$ si, para $k < g(\hat{x})$, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > k$ si $d_X(x, \hat{x}) < \delta$.

1. *(10 puntos)* Dados los puntos $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^k$ con $k \in \mathbb{N}$, para $r > 0$ sea $\Omega_r := \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_r[p_i]$ y sean $\Psi : \Omega_r \to \mathbb{R}$ una función continua y $\Phi : \mho_r \to \mathbb{R}$ una función, donde $\mho_r$ es el recorrido (imagen) de la función Ψ.

a) Demuestre que si para cualquier conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}$ se cumple que $\Phi^{-1}(C^c)$ es un conjunto abierto, entonces Ψ y Φ son uniformemente continuas.

b) Pruebe que $\exists m, M \in D$ tales que

$$\mathcal{F}(m) \leq \mathcal{F}(d) \leq \mathcal{F}(M), \quad \forall d \in D$$

Donde $\mathcal{F} := \Phi \circ \Psi$ y $D := \mathrm{Dom}(\mathcal{F})$.

2. *(20 puntos)* Sean las sucesiones de números reales no negativos $\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left\{a_n^{(m)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $m \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, m\}, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_n^{(i)}} \text{ converge.}$$

Sugerencia: Demostrar mediante inducción matemática.

b) Muestre un ejemplo en donde se cumpla que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ diverge para todo } i \in \{1, \ldots, 4\}, \text{ pero } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\prod_{i=1}^{4} a_n^{(i)}} \text{ converge.}$$

c) Muestre un ejemplo en donde se cumpla que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, 3\}, \text{ pero } \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\prod_{i=1}^{3} a_n^{(i)}} \text{ diverge.}$$

3. *(30 Puntos)* Pruebe que $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es ψ-continua en $\hat{x} \in X$ si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ se cumple que $g(\hat{x}) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$.

Pista:

$\Longrightarrow$) Recuerde que $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} x_m \right)$.

$\Longleftarrow$) Razone por reducción al absurdo. Escoja $\delta = 1/n$.