

Evaluación 2

1. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) **(5 puntos)** Determine su polinomio característico, polinomio minimal y espectro.
 b) **(5 puntos)** Calcule A^{-1} .
 c) **(10 puntos)** Encuentre un vector $v \in \mathbb{R}^6$ tal que $m_v(x) = m(x)$.
2. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre \mathbb{K} , $B : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal no degenerada y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal.
- a) Demuestre que $Im(T)^\circ = Ker(T')$.
 b) Suponga ahora que $V = W$ y que la matriz representante de B respecto a una base dada \mathcal{B} es antisimétrica. Demuestre que entonces para todo $v \in V$, $B(v, v) = 0$.
3. Considere el siguiente producto interno en el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 4 con coeficientes reales $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

$$\langle p(x); q(x) \rangle = \sum_{i=0}^4 p(i)q(i)$$

- a) **(4 puntos)** Considere la siguiente base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$: $\{q_0(x), q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$, donde.

$$q_j(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-j)}$$

Demuestre que esta base es ortogonal.

- b) **(6 puntos)** Considere el operador $U : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ definido por $U(p(x)) = p(4-x)$. Calcule la matriz representante de U respecto a la base de la parte a) ¿cuál es el operador adjunto de U ? ¿es U unitario?
 c) **(10 puntos)** Diagonalice U indicando la base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ que logra la forma diagonal.