UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**Pauta de Evaluación 1. Análisis Real II (525302)**

1. Suponga que $\mu$ es una medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa. Para todo $A \in \mathcal{F}$ definimos

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu.$$

*a*) (10 puntos) Demuestre que $\lambda$ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

**Solución:**
Sean $A_1, A_2, \ldots$ elementos disjuntos de $\mathcal{F}$. Ya que los conjuntos $A_n$ son disjuntos, $I_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} I_{A_n}$. Luego

$$\sum_{n=1}^{N} I_{A_n} f \nearrow_{N \to +\infty} I_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f$$

pues $f \geq 0$. Aplicando el teorema de convergencia monótona llegamos a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega I_{A_n} f d\mu &= \lim_{N \to +\infty} \int_\Omega \left( \sum_{n=1}^{N} I_{A_n} f \right) d\mu \\ &= \int_\Omega I_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu.\end{aligned}$$

De acuerdo a la definición de $\lambda$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Además,

$$\lambda(\phi) = \int_\Omega I_\phi f \, d\mu = \int_\Omega 0 \, d\mu = 0.$$

Quedando probado que $\lambda$ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

*b*) (15 puntos) Demuestre que

$$\int_{\Omega} g\, d\lambda = \int_{\Omega} g \cdot f\, d\mu, \tag{1}$$

donde $g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa.

**Sugerencia:** Aproxime la función $g$ con funciones simples.

**Solución:**
De la definición de $\lambda$ deducimos que para todo $A \in \mathcal{F}$,

$$\lambda\left(A\right) = \int_{A} f\, d\mu = \int_{\Omega} I_A f\, d\mu.$$

Ya que $\int_{\Omega} I_A\, d\lambda = \lambda\left(A\right)$,

$$\int_{\Omega} I_A\, d\lambda = \int_{\Omega} I_A f\, d\mu.$$

Así que (1) se cumple para $g = I_A$.

Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Usando que la integral es lineal obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_{A_n}\right) d\lambda &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{\Omega} I_{A_n}\, d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{\Omega} I_{A_n} f\, d\mu = \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_{A_n}\right) f\, d\mu.\end{aligned}$$

Entonces, (1) se cumple en caso que $g$ sea una función simple no negativa.

Finalmente, asumimos que $g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa. Luego, existe una sucesión $s_n$ de funciones simples tales que

$$s_n \nearrow_{n\to+\infty} g.$$

Como $f \geq 0$,

$$s_n\, f \nearrow_{n\to+\infty} g\, f.$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona llegamos a

$$\int_\Omega g\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega s_n\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega s_n \cdot f\, d\mu = \int_\Omega g \cdot f\, d\mu.$$

2. Sea $\mathbb{P}$ una medida positiva definida en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Considere la función medible $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

   *a*) (10 puntos) Demuestre que para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $\omega \mapsto cos\,(t\,X(\omega))$ pertenece a $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

   **Solución:**
   Fijemos $t \in \mathbb{R}$. Luego la función

   $$\phi(x) = cos\,(t\,x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

   es continua. Por lo tanto, $\phi : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible. Lo que implica que

   $$cos\,(t\,X) = \phi \circ X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

   es medible, pues $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible.
   Usando que la función coseno es acotada por 1 deducimos que

   $$\int_\Omega |cos\,(t\,X(\omega))|\, \mathbb{P}(d\omega) \le \int_\Omega 1\, \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(\Omega) < +\infty.$$

   *b*) (15 puntos) Asuma que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que la función

   $$f(t) = \int cos\,(t\,X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   es derivable y encuentre $f'(t)$.

   **Solución:**
   Sea $t \in \mathbb{R}$. Consideremos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que satisfacen $t_n \neq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_n \to_n t$. Elegimos

   $$g_n(\omega) = (cos\,(t_n\,X(\omega)) - cos\,(t\,X(\omega)))\,/\,(t_n - t) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

De acuerdo a la definición de derivada tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(\omega) = \frac{d}{dt} cos\left(t\, X(\omega)\right) = -X(\omega)\ sen\left(t\, X(\omega)\right).$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial deducimos

$$g_n(\omega) = -X(\omega)\ sen\left(\xi_n\, X(\omega)\right),$$

donde $\xi_n$ está entre $t$ y $t_n$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(\omega)| \leq |X(\omega)|.$$

Ya que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \\ &= -\int_\Omega X(\omega)\ sen\left(t\, X(\omega)\right) \mathbb{P}(d\omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f(t_n) - f(t)\right) / (t_n - t) = -\int_\Omega X(\omega)\ sen\left(t\, X(\omega)\right) \mathbb{P}(d\omega).$$

Lo que implica que $f$ es derivable y

$$f'(x) = -\int_\Omega X(\omega)\ sen\left(t\, X(\omega)\right) \mathbb{P}(d\omega).$$

3. Suponga que $\mu$ es una medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible estrictamente positiva que satisface $\int_\Omega f\, d\mu < +\infty$.

   *a*) (10 puntos) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

   $$\mu\left(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq 1/n\}\right) < +\infty.$$

   **Solución:**
   Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $C_n = \{w \in \Omega : f(w) \geq 1/n\}$. Entonces

   $$\int_\Omega I_{C_n} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \int_\Omega I_{C_n}\, d\mu = \frac{1}{n} \mu(C_n).$$

Como $f$ es no negativa,

$$\int_\Omega I_{C_n} f \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu < +\infty.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{n}\mu\left(C_n\right) \leq \int_\Omega f \, d\mu < +\infty.$$

$b$) (10 puntos) Demuestre que para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu\left(A\right) < +\infty$ y

$$\int_\Omega f \, d\mu < \int_A f \, d\mu + \epsilon.$$

**Aclaración:** Puede responder el inciso (b) suponiendo que la afirmación del inciso (a) es cierta.

**Solución:**
Considere los conjuntos $C_n$ definidos en el inciso (a). Luego $I_{C_n}$ es una sucesión creciente de funciones. Sea $\omega$ un elemento cualquiera de $\Omega$. Ya que $f\left(w\right) > 0$, existe $n_\omega \in \mathbb{N}$ tal que $f\left(w\right) > 1/n_\omega$. Luego $\omega \in C_n$ para todo $n \geq n_\omega$, así que

$$I_{C_n}\left(w\right) \nearrow_{n\to+\infty} 1.$$

Entonces

$$I_{C_n}\left(w\right)\, f\left(w\right) \nearrow_{n\to+\infty} f\left(w\right).$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona obtenemos que

$$\int_\Omega I_{C_n}\left(w\right)\, f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right) \nearrow_{n\to+\infty} \int_\Omega f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right).$$

De acuerdo a la definición de límite tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right) - \int_\Omega I_{C_n}\left(w\right)\, f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right) < \epsilon$$

para todo $n \geq n_\epsilon$. De donde se llega que

$$\int_\Omega f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right) < \int_{C_{n_\epsilon}} f\left(w\right)\, d\mu\left(w\right) + \epsilon.$$