

Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales. Use el teorema de Fubini y la medida de conteo para probar que si:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m| < \infty$$

Entonces:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n b_m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_m$$

$$f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \rightsquigarrow f = f^+ - f^- , \quad f^+, f^- \in \mathcal{M}(X)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
*No negativa*

$$\phi_m \xrightarrow{\cong} f^+$$

$$\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$

$$\iint F d(\mu \times \nu) \leq \iint |F| d(\mu \times \nu)$$

TONELL  $|F|: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$

Dar: Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  sucesiones de Números reales. Luego se define

$$F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } F(n, m) = a_n b_m$$

$\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , Nuestra intención es probar

que  $F$  es integrable para aplicar el Teo. de Fubini. En efecto, por Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} |F| d(\mu \times \nu) &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_n b_m| d\mu(m) d\mu(n) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m| d\mu(m) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m| \\ &< \infty \end{aligned}$$

lo que significa que  $|F|$  es integrable en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Además

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} F d(\mu \times \nu) \leq \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} |F| d(\mu \times \nu) < \infty$$

lo que significa que  $F$  es INTÉGRABLE en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con la medida cartesiana.

Por lo tanto podemos utilizar

Teo. de Fubini:

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} F(m, n) d\mu(n) d\mu(m) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} F d(\mu \times \mu)$$
$$= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} F(n, m) d\mu(m) d\mu(n)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} a_m b_m d\mu(n) d\mu(m) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} a_m b_m d\mu(m) d\mu(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_m b_m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_m. \quad \square$$

Sean  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $g : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  funciones integrables. Muestre que  $h : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definida por:

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad h(x, y) = f(x)g(y)$$

es integrable y:

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$$

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios

de medida y sea  $h : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definida por

$$h(x, y) = \tilde{f}(x, y) \cdot \tilde{g}(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

donde  $\tilde{f}, \tilde{g} : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  tales que

$$\tilde{f}(x, y) = f(x), \quad \tilde{g}(x, y) = g(y)$$

$\forall (x, y) \in X \times Y$ . Vamos verificamos que  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  son  
medibles en el espacio producto  $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

Notamos que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\tilde{f}^{-1}(\alpha, \infty) = f^{-1}(\alpha, \infty) \times Y \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

porque  $f$  es medible, entonces

$$\tilde{f}^{-1}(E) \in \mathcal{A}, \quad \forall E \in \text{Sigma de Borel}$$

Análogamente.

$$\tilde{g}^{-1}((\alpha, \infty)) = X \times g^{-1}((\alpha, \infty))$$

y por lo tanto, como  $g$  es medible

$\tilde{g}$  es medible en el E.P.

Finalmente, como  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  son  
 $(\mu \times \nu)$ -medibles, entonces  $h$  es  $(\mu \times \nu)$ -medible.

Arí para Tonell.:

$$\int |h| d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y |h| d\nu dy$$

$$= \int_X \int_Y |\tilde{f} \cdot \tilde{g}| d\nu dy$$

$$= \int_X \int_Y |\tilde{f} \cdot \tilde{g}| d\nu dy$$

$$= \int_X \left( \int_Y |f(x)g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_X |f(x)| d\mu(x) \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y)$$

<  $\infty$

Es decir  $|h|$  es  $(\mu \times \nu)$ -integrable y

$$\iint h d(\mu \times \nu) < (\|h\| d(\mu \times \nu)) < \infty$$

Abs'  $h$  es  $(\mu \times \nu)$ -integrable. Ahora

usaremos Teorema de Fubini:

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y h d\nu d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x)g(y) d\nu \right) d\mu = \int_X f(x) \left( \int_Y g(y) d\nu \right) d\mu$$

Ya que  $\int_X g(y) d\mu = \alpha \in \mathbb{R}$  entonces se tiene:

$$\int_X f(x) \cdot \alpha d\mu = \left( \int_X f(x) d\mu \right) \cdot \alpha = \int_X f(x) d\mu \cdot \int_Y g(y) d\nu \quad \blacksquare$$

**Problema 3.** Sean  $f, g$  funciones Lebesgue integrables de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $\lambda$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathcal{B}$ , usa el teorema de Tonelli y el hecho que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x)$$

para mostrar que la función  $h$  definida por

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) d\lambda(y) \quad x \in \mathbb{R}$$

es finita casi en todas partes. Además, muestra que

$$\int |h| d\lambda \leq \left[ \int |f| d\lambda \right] \left[ \int |g| d\lambda \right]$$

La función  $h$  definida anteriormente se define como la **convolución** de  $f$  con  $g$  y se denota  $f * g$ .

**Hint:** Puedes usar, sin demostrar, el ejercicio 10.H del libro de Bartle para asumir que la función  $f(x-y)g(y)$  es  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ -medible.

$$\begin{aligned} \int |h(x)| d\lambda(x) &\leq \iint |f(x-y)g(y)| d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \iint |f(x-y)g(y)| d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int |g(y)| \left( \int |f(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int |g(y)| \left( \int |f(x)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \end{aligned}$$





