<u>Ejercicio 1</u> Sea $\{Y_t, t > 0\}$ un proceso estocástico donde $Y_t \overset{d}{=} X e^{-t}$, ~~$\forall t > 0$~~ y $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Calcule:

1) La esperanza $m_Y(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[Y_t]$

2) La varianza $\sigma_Y^2(t) \overset{\text{def}}{=} Var[Y_t]$

3) La función de autocovarianza $R(t,s) \overset{\text{def}}{=} Cov(Y_t, Y_s)$

4) El coef. de correlación $corr(Y_t, Y_s)$.

5) ¿Es $\{Y_t, t > 0\}$ un proceso estacionario?

<u>Solución</u> 1) $m_Y(t) = \mathbb{E}[X e^{-t}] =$
$= e^{-t}\, \mathbb{E}[X] = \mu e^{-t}. \neq cte$

$\Rightarrow$ <u>no es estacionario</u> 5) ✓

(no es est. débil $\Rightarrow$ tampoco es est. estricto.)

2) $\sigma_Y^2(t) = Var[Xe^{-t}] = e^{-2t}\, Var[X]$

$$= \sigma^2 e^{-2t}$$

3) $Cov(Y_t, Y_s) \overset{def}{=} \mathbb{E}\left[(Y_t - m_Y(t))(Y_s - m_Y(s))\right]$

Definamos un proceso centrado

$$\mathring{Y}_t = Y_t - m_Y(t) \overset{(1)}{=} Xe^{-t} - \mu e^{-t} = \mathring{X} e^{-t}$$

donde $\mathring{X} = X - \mu$, esto es $\mathring{X} \sim N(0, \sigma^2)$.

$\Rightarrow Cov(Y_t, Y_s) = Cov(\mathring{Y}_t, \mathring{Y}_s) = \mathbb{E}[\mathring{Y}_t, \mathring{Y}_s]$

$= \mathbb{E}[\mathring{X} e^{-t} \mathring{X} e^{-s}] = e^{-(t+s)}\, \mathbb{E}[\mathring{X}^2]$

$= \underbrace{\sigma^2 e^{-(t+s)}}_{\boxed{\text{depende de } t \text{ y } s.}}$, pues $\mathbb{E}[\mathring{X}^2] = Var\, \mathring{X} = \sigma^2$.

!

4) $corr(Y_t, Y_s) = \dfrac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sigma_Y(t)\, \sigma_Y(s)} =$

$\overset{(2)}{=} \dfrac{\sigma^2 e^{-(t+s)}}{\sigma e^{-t} \cdot \sigma e^{-s}} = 1$ ∎

5) Ya respondimos: 1°: la esper. $\neq$ cte

2°: $Cov(Y_t, Y_s)$ depende de t y s.

Ejercicio 2 Sea $\{Y_t,\ t>0\}$ [redacted] dado por

$$Y(t) = e^{-Xt}, \quad t>0,$$

donde X es una v.a. con densidad $p_x = \lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, $\lambda>0$, esto es tiene distribución exponencial.

Calcule: $m_y(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\, Y_t$; $\operatorname{Var} Y_t$;

$\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)$, $\operatorname{corr}(Y_t, Y_s)$.

¿Es estacionario?

Solución: $\mathbb{E}\, Y_t = \mathbb{E}\, e^{-Xt} = \int_0^\infty e^{-xt} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-x(t+\lambda)} dx = \frac{\lambda}{t+\lambda} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x(t+\lambda)} d(x(t+\lambda))}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda}{t+\lambda} \Rightarrow \text{Obtuvimos: } \boxed{\mathbb{E}\, e^{-Xt} = \frac{\lambda}{t+\lambda} \quad \forall t>0} \quad (*)$$

$$Y_t \cdot Y_s = e^{-Xt} e^{-Xs} = e^{-X(t+s)}$$

$$\mathbb{E}[Y_t Y_s] = \mathbb{E}\, e^{-X(t+s)} \overset{(*)}{=} \frac{\lambda}{t+s+\lambda}.$$

$$\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathbb{E}\, Y_t Y_s - \mathbb{E}\, Y_t\, \mathbb{E}\, Y_s =$$

$$= \frac{\lambda}{t+s+\lambda} - \frac{\lambda^2}{(t+\lambda)(s+\lambda)} = \frac{\lambda s t}{(t+s+\lambda)(t+\lambda)(s+\lambda)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{corr}(Y_t, Y_s) = \frac{\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)}{\sqrt{\operatorname{Var} Y_t}\,\sqrt{\operatorname{Var} Y_s}} \overset{(**)}{=}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda s t}}{(t+s+\lambda)\cancel{(t+\lambda)}\cancel{(s+\lambda)}} \cdot \frac{\sqrt{2t+\lambda}\,\sqrt{2s+\lambda}\,\cancel{(t+\lambda)}\cancel{(s+\lambda)}}{\cancel{\sqrt{\lambda t}\,\sqrt{\lambda s}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2t+\lambda}\cdot\sqrt{2s+\lambda}}{(t+s+\lambda)}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} Y_t = \operatorname{Cov}(Y_t, Y_t) = \frac{\lambda t^2}{(2t+\lambda)(t+\lambda)^2} \quad (**)$$

Ejercicio 3. Sea $\{Y_t, t>0\}$ t.q.

$$Y_t = Xt + a$$, donde $a = cte$ y

$X \sim U((\alpha,\beta))$, tiene dist. uniforme en un intervalo (α, β).

Calcule: $\mathbb{E}Y_t$, $Var Y_t$, $Cov(Y_t, Y_s)$, $cor(Y_t, Y_s)$

Sol. $\mathbb{E}Y_t = t \cdot \mathbb{E}X + a = \underbrace{t m_x + a}$

donde $m_x = \frac{\beta - \alpha}{2}$ depende de t, $\neq cte$ $\Rightarrow$ no es estacionario.

$$\mathring{Y}(t) = Xt + a - (t m_x + a) = t(X - m_x) = t\mathring{X},$$

donde $\mathring{X} = X - m_x$.

$$Cov(Y_t, Y_s) = Cov(\mathring{Y}_t, \mathring{Y}_s) = Cov(t\mathring{X}, s\mathring{X}) =$$
$$= ts\, Cov(\mathring{X}, \mathring{X}) = ts \cdot Var[\mathring{X}] = ts\, \sigma_x^2$$

donde $\sigma_x^2 = Var[\mathring{X}] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$

$$Var[Y_t] = t^2 \sigma_x^2$$

$$cor[Y_t, Y_s] = \frac{ts\,\sigma_x^2}{t\sigma_x\, s\sigma_x} = 1, \quad t, s > 0.$$

Obtenemos que $Cov(Y_t, Y_s) = ts\,\sigma_x^2$, depende de t y s $\Rightarrow$ no es estacionario.