

ALGEBRA III (525201)

Evaluación 1.

14 de abril de 2008.

Tiempo: 100 min.

- P1.** Sea E un conjunto no vacío y \mathcal{R} una relación refleja y transitiva. Se define la relación \sim por:

$$\forall a, b \in E, a \sim b \iff a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$$

- Probar que \sim es relación de equivalencia.
- Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$ entonces $a\mathcal{R}b \iff a'\mathcal{R}b'$
- Probar que la relación \leq sobre E/\sim definida por:

$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \iff a\mathcal{R}b$$

es una relación de orden.

- P2.** Sean u_n, v_n y w_n sucesiones en \mathbb{R} definidas por:

$$u_{n+1} = u_n + 2w_n$$

$$v_{n+1} = v_n$$

$$w_{n+1} = 2u_n + w_n$$

Encuentre una fórmula para u_n, v_n y w_n en función de n y u_0, v_0 y w_0 .

- P3.** Sea $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) = \{e^{cx}p(x) : p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n multiplicados por la función e^{cx} . Sea $\varphi : \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$ la transformación lineal. $\varphi(u) = \frac{du}{dx}$.

- Demuestre que $\beta = \{e^{cx}, e^{cx}x, \dots, e^{cx}x^{n-1}, e^{cx}x^n\}$ es una base para $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$
- Calcule la matriz representante de la transformación lineal $\varphi - bI$ usando la base β en el espacio de partida y de llegada.
- Encuentre los valores propios de φ . Concluya si φ es o no diagonalizable.