Teorema de la convergencia monótona.

- Integral de Lebesgue de funciones medibles positivas (revisión).
- Teorema de la Convergencia Monótona (T.C.M.).
- Lema de Fatou.
- Corolarios del T.C.M.

Integral de Lebesgue de funciones medibles positivas.

Def.: • Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X})$. La **integral de f respecto de μ** es

$$\int f\, d\mu := \sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int \varphi\, d\mu,$$

donde

$$\Phi(f) := \left\{ \varphi \in M^+(X, \mathscr{X}),\ \textbf{simples: } \varphi \leq f \right\}.$$

• Sean $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $E \in \mathscr{X}$. La **integral de f en E respecto de μ** es

$$\int_E f\, d\mu := \int f \chi_E\, d\mu.$$

Lema: a) Si $f, g \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $f \leq g$, entonces $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

b) Si $f \in M^+(X, \mathscr{X})$, $E, F \in \mathscr{X}$ y $E \subset F$, entonces $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.

Dem.: **(a)** $f \leq g \implies \Phi(f) \subset \Phi(g) \implies$

$$\int f\, d\mu := \sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int \varphi\, d\mu \leq \sup_{\varphi \in \Phi(g)} \int \varphi\, d\mu =: \int g\, d\mu.$$

(b) $E \subset F \implies \chi_E \leq \chi_F \overset{f \geq 0}{\implies} f\chi_E \leq f\chi_F \implies$

$$\int_E f\, d\mu := \int f\chi_E\, d\mu \leq \int f\chi_F\, d\mu =: \int_F f\, d\mu. \quad \blacksquare$$

Teorema de la Convergencia Monótona (T.C.M.).

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida.

Teor. [de la Convergencia Monótona. (T.C.M.)]:
Sean $f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$: $f_n \nearrow f$. Entonces, $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.

Dem.: $f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$, $\Longrightarrow$ $f = \lim_n f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$.

$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \implies 0 \leq \int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Entonces, $\left\{\int f_n \, d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente en $\overline{\mathbb{R}}$,
acotada por $\int f \, d\mu \implies \exists \lim_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Queda por demostrar $\int f \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu$. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $\varphi \in \Phi(f)$.
Sean $A_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, $A_n \in \mathscr{X}$ y $X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Sea $\lambda : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) := \int_E \varphi \, d\mu$, que sabemos es una medida.
Entonces, $\int \varphi \, d\mu = \lambda(X) = \lim_n \lambda(A_n) = \lim_n \int_{A_n} \varphi \, d\mu$.

$$\implies \alpha \int \varphi \, d\mu = \lim_n \int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \overset{\text{def. } A_n}{\leq} \lim_n \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Como esta desigualdad vale $\forall \alpha \in (0, 1)$, entonces $\int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu$.
y, como ésta vale $\forall \varphi \in \Phi(f)$, $\int f \, d\mu := \sup_{\varphi\in\Phi(f)} \int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu$. ■

Lema de Fatou.

Lema [de Fatou]: Sean $f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\int (\liminf_n f_n)\, d\mu \le \liminf_n \left(\int f_n\, d\mu\right).$$

Dem.: Sean $g_m := \inf_{n \ge m} f_n \nearrow \liminf_n f_n$.

Entonces, $\forall n \ge m,\ g_m \le f_n$

$$\implies \int g_m\, d\mu \le \int f_n\, d\mu \quad \forall n \ge m$$

$$\implies \int g_m\, d\mu \le \inf_{n \ge m} \int f_n\, d\mu \le \liminf_n \left(\int f_n\, d\mu\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, $g_m \nearrow \liminf_n f_n \overset{\text{T.C.M.}}{\implies} \int g_m\, d\mu \nearrow \int (\liminf_n f_n)\, d\mu$.

Entonces, $\int (\liminf_n f_n)\, d\mu = \lim_m \int g_m\, d\mu \le \liminf_n \left(\int f_n\, d\mu\right)$. ■

Corolarios del T.C.M.

Recordemos que hemos demostrado que $\forall f \in M^+(X, \mathscr{X})$ hay una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples, medibles y positivas tales que $\varphi_n \nearrow f$.

Corol.: Sean $f,\ g \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $c \geq 0$. Entonces:

a) $(cf) \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $\int (cf)\, d\mu = c \int f\, d\mu$;

b) $(f+g) \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

Dem.: **(a)** Sean $\varphi_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$, simples, tales que $\varphi_n \nearrow f$.
Entonces, $(c\varphi_n) \nearrow (cf) \implies (cf) \in M^+(X, \mathscr{X})$ y

$$\int (cf)\, d\mu \overset{\text{T.C.M.}}{=} \lim_n \int (c\varphi_n)\, d\mu = c \lim_n \int \varphi_n\, d\mu \overset{\text{T.C.M.}}{=} c \int f\, d\mu.$$

(b) Sean $\varphi_n, \psi_n \in M^+(X, \mathscr{X})$ simples, tales que $\varphi_n \nearrow f$ y $\psi_n \nearrow g$.
Entonces $(\varphi_n + \psi_n) \nearrow (f+g) \implies (f+g) \in M^+(X, \mathscr{X})$ y

$$\int (f+g)\, d\mu \overset{\text{T.C.M.}}{=} \lim_n \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \lim_n \int \varphi_n\, d\mu + \lim_n \int \psi_n\, d\mu$$
$$\overset{\text{T.C.M.}}{=} \int f\, d\mu + \int g\, d\mu. \quad \blacksquare$$

Corol.: Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X})$. Entonces, $\lambda : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida $\forall E \in \mathscr{X}$ por $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu$ es una medida.

Dem.: **(a)** Si $E = \emptyset$, entonces $\chi_E = 0 \implies \lambda(E) := \int f \chi_E \, d\mu = 0$.

(b) Como $f \geq 0$, $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu \geq 0 \quad \forall E \in \mathscr{X}$.

(c) Sean E_n, $n \in \mathbb{N}$, mutuamente disjuntos y $E := \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Sean $f_n := \sum_{k=1}^n f\chi_{E_k}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $f_n \nearrow f\chi_E$ $\boxed{\textbf{Ej.}}$
$\overset{\text{T.C.M.}}{\Longrightarrow} \int f_n \, d\mu \nearrow \int f\chi_E \, d\mu =: \lambda(E)$.

Por otra parte, $\int f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^n \int \left(f\chi_{E_k}\right) d\mu = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k)$.

Entonces, $\lambda(E) = \lim_n \int f_n \, d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^n \lambda(E_k) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(E_k)$. ■

Corol.: Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X})$. Entonces, $\int f\, d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.t.p.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X}) :\ \int f\, d\mu = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, sean $E_n := \left\{x \in X :\ f(x) > \frac{1}{n}\right\} \implies f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$

$\implies 0 = \int f\, d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n}\, d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \implies \mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $E := \{x \in X :\ f(x) > 0\} = \uparrow \bigcup E_n$. $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Entonces, $\mu(E) = \lim_n \mu(E_n) = 0$ y $\forall x \notin E,\ f(x) = 0 \implies f = 0$ c.t.p.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $f \in M^+(X, \mathscr{X}) :\ f = 0$ c.t.p.

$\implies \exists N \in \mathscr{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = 0\ \forall x \in X \setminus N$.

Sea $E := \{x \in X :\ f(x) > 0\} \in \mathscr{X}$.

$\forall x \in E,\ f(x) > 0 \implies x \notin X \setminus N \implies x \in N \implies E \subset N$.

Entonces, como $\mu(N) = 0$, $\mu(E) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, sea $f_n := n\chi_E \nearrow +\infty\chi_E$.

$\implies \int +\infty\chi_E\, d\mu \overset{\text{T.C.M.}}{=} \lim_n \int n\chi_E\, d\mu = \lim_n n\mu(E) = 0$.

Entonces, como $f \leq +\infty\chi_E$, se tiene que $0 \leq \int f\, d\mu \leq \int +\infty\chi_E\, d\mu = 0$

$\implies \int f\, d\mu = 0$. ∎

Def.: Dadas dos medidas λ y μ definidas en $\mathscr{X}$, λ es **absolutamente continua** respecto a μ si $\forall E \in \mathscr{X}$ con $\mu(E) = 0$, se tiene que $\lambda(E) = 0$.

Corol.: Sean $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $\lambda : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida definida $\forall E \in \mathscr{X}$ por $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu$. Entonces, λ es absolutamente continua respecto a μ

Dem.: Sea $E \in \mathscr{X}$: $\mu(E) = 0$. Entonces, $f\chi_E = 0$ μ-c.t.p.
Entonces, por el corolario anterior, $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0$.
Por lo tanto, λ es absolutamente continua respecto a μ. ■

Corol.: Sean $f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n\, d\mu\right).$$

Dem.: Como $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=1}^{N} f_n \overset{N}{\nearrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n\, d\mu\right) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \left(\int f_n\, d\mu\right) = \lim_N \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu$$

$$\overset{\text{T.C.M.}}{=} \int \lim_N \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu. \quad ■$$

Corol. [T.C.M.-c.t.p.]: Sean $f_n \in M^+(X, \mathscr{X})$, $n \in \mathbb{N}$, y $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ tales que $f_n \nearrow f$ c.t.p. Entonces, $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.

Dem.: Como $f_n \nearrow f$ c.t.p., $\exists N \in \mathscr{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que

$f_n(x) \nearrow f(x) \quad \forall x \in M := X \setminus N$

$\Longrightarrow \; f_n \chi_M \nearrow f \chi_M \overset{\text{T.C.M.}}{\Longrightarrow} \int f_n \chi_M \, d\mu \nearrow \int f \chi_M \, d\mu.$

Por otra parte, como $\mu(N) = 0$, $f \chi_N = 0$ c.t.p. y $f_n \chi_N = 0$ c.t.p. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \; \int f \chi_N \, d\mu = 0$ y $\int f_n \chi_N \, d\mu = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, como $f = f\chi_N + f\chi_M$ y $f_n = f_n\chi_N + f_n\chi_M$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int f_n \, d\mu = \underbrace{\int f_n \chi_N \, d\mu}_{=0} + \int f_n \chi_M \, d\mu \nearrow \int f \chi_M \, d\mu$$

$$= \underbrace{\int f \chi_N \, d\mu}_{=0} + \int f \chi_M \, d\mu = \int f \, d\mu. \quad \blacksquare$$