UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 5 (OPCIONAL) ALGEBRA III 525201-0

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada problema tiene un puntaje máximo de **15 puntos**.

Problema I. Sea $X \neq \emptyset$. Se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ por

$$\forall\, A, B, C, D \subseteq X : (A, B)\, \mathcal{R}\, (C, D) \quad \Leftrightarrow \quad \big(A \subseteq C \quad \wedge \quad D \subseteq B \big)\,.$$

1. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$.
2. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden parcial o total? Justifique su respuesta apropiadamente.
3. Determine si esta relación de orden admite elemento(s) minimal(es) maximal(es), mínimo, máximo. Indique cuáles son éstos en cada caso, si existen.

Problema II. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{Z}^+$, y $T \in \mathcal{L}(V)$.

1. Demostrar que:
   (a) $\forall\, k \in \mathbb{N} : \mathrm{Ker}(T^k) \subseteq \mathrm{Ker}(T^{k+1})$,
   (b) $\forall\, k \in \mathbb{N} : \mathrm{Im}(T^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(T^k)$.
2. Si T no es inyectivo, demuestre que
   (a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq n_0 : \mathrm{Ker}(T^k) = \mathrm{Ker}(T^{n_0})$,
   (b) $\exists\, m_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq m_0 : \mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T^{m_0})$.

   ¿Qué se puede decir en el caso T es monomorfismo?
3. Si n_0 y m_0 son los **menores enteros positivos** que verifican las propiedades (2a) y (2b), entonces $n_0 = m_0$.

   Hint: Tenga en cuenta el Teorema de la dimensión.

Problema III. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, y sea f una forma bilineal en V.

1. Sea $z \in V$. Demuestre que la aplicación L_z, definida por $V \ni w \mapsto L_z(w) := f(w, z)$, es un elemento de V'.
2. Si se denota por $L : V \to V'$ la aplicación definida por $V \ni z \mapsto L(z) := L_z$, demuestre que L es lineal.
3. Demuestre que f es no degenerada si y sólo si L es un isomorfismo.

Problema IV. Se desea identificar la superficie cuadrática de ecuación:

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0\,.$$

Para ello, primero exprese esta forma cuadrática matricialmente, identificando su matriz asociada A. Luego, determine la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A. Luego, efectúe el cambio de variables que induce P (ecuaciones de rotación) y escribir la ecuación en los nuevos ejes. En caso sea necesario, indique las ecuaciones de traslación que permitan identificar la superficie cuadrática, precisando su nombre.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 28.08.2020

RBP/rbp 14.08.2020