UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 1 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada.

Problema 1. Consideremos $\mathcal{U}$ el conjunto de todas las proposiciones lógicas. Se define la función $f : \mathcal{U} \to \{0,1\}$ como $\mathcal{U} \ni p \mapsto f(p) := \begin{cases} 1\,, & p\,\text{es}\,V\,, \\ 0\,, & p\,\text{es}\,F\,. \end{cases}$ Recordar que V denota el valor de verdad Verdadero, mientras que F el valor de verdad Falso. Justificando apropiadamente:

Comentarios: este ejercicio fue desarrollado en forma satisfactoria por la gran mayoría del curso. Hay algunos casos puntuales que ameritan mayor atención.

a) Pruebe que $\forall\, p \in \mathcal{U} \,:\, f(\sim p) \,=\, 1 \,-\, f(p)$. **(05 puntos)**

Desarrollo: Vemos que hay que establecer una igualdad de funciones. Es claro que ambas funciones tienen el mismo dominio: $\mathcal{U}$. Establezcamos ahora que tienen igual regla de correspondencia. Para esto, tomemos una proposición lógica $p \in \mathcal{U}$ (fija pero arbitraria). Por analizar dos casos:

- Caso p es V. Resulta así que $f(p) \,=\, 1$, y así $0 \,=\, f(\sim p) \,=\, 1 \,-\, f(p)$.
- Caso p es F. Resulta así que $f(p) \,=\, 0$, y así $1 \,=\, f(\sim p) \,=\, 1 \,-\, f(p)$.

De esta manera, queda establecido que $\forall\, p \in \mathcal{U} \,:\, f(\sim p) \,=\, 1 \,-\, f(p)$.

b) Pruebe que $\forall\, p, q \in \mathcal{U} \,:\, f(p \vee q) \,=\, f(p) \,+\, f(q) \,-\, f(p)\, f(q)$. **(05 puntos)**

Desarrollo: Aquí también establecemos una igualdad de funciones. En vista que las funciones en cuestión tienen el mismo dominio, $\mathcal{U}$, resta probar que tienen la misma regla de correspondencia. Para tal efecto, consideremos $p\,,\, q \in \mathcal{U}$ (fijas pero arbitrarias). Por analizar cuatro casos:

- Caso p y q son V: Tenemos que $f(p) \,+\, f(q) \,-\, f(p)\, f(q) \,=\, 1 \,+\, 1 \,-\, 1 \,=\, 1 \,=\, f(p \vee q)$.
- Caso p es V y q es F: Resulta $f(p) \,+\, f(q) \,-\, f(p)\, f(q) \,=\, 1 \,+\, 0 \,-\, 0 \,=\, 1 \,=\, f(p \vee q)$.
- Caso p es F y q es V: análogo al caso anterior.
- Caso p y q son F: En este caso, $f(p) \,+\, f(q) \,-\, f(p)\, f(q) \,=\, 0 \,+\, 0 \,-\, 0 \,=\, 0 \,=\, f(p \vee q)$.

De esta forma, se concluye que $\forall\, p, q \in \mathcal{U} \,:\, f(p \vee q) \,=\, f(p) \,+\, f(q) \,-\, f(p)\, f(q)$.

c) Deduzca, para $p, q \in \mathcal{U}$ cualesquiera, una expresión, lo más simplificada posible, en términos de $f(p)$ y $f(q)$ para $f(p \wedge q)$. **(10 puntos)**

Desarrollo: Como se pide deducir una expresión para $f(p \wedge q)$, la estrategia es utilizar lo que se ha establecido en los dos ítemes anteriores. Invocando la Ley de De Morgan, tenemos para $p, q \in \mathcal{U}$:

$$f(p \wedge q) \,=\, f(\sim (\sim p \vee \sim q)) \,=\, 1 \,-\, f(\sim p \vee \sim q)\,. \tag{1}$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} f(\sim p \vee \sim q) &= f(\sim p) \,+\, f(\sim q) \,-\, f(\sim p)\, f(\sim q) \\ &= \big(1 \,-\, f(p)\big) \,+\, \big(1 \,-\, f(q)\big) \,-\, \big(1 \,-\, f(p)\big)\big(1 \,-\, f(q)\big) \\ &= 1 \,-\, f(p)\, f(q)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, de (2) en (1), se deduce $f(p \wedge q) \,=\, f(p)\, f(q)$. De esta manera, dado que $p, q \in \mathcal{U}$ son fijas pero arbitrarias, se ha probado que $\forall\, p, q \in \mathcal{U} \,:\, f(p \wedge q) \,=\, f(p)\, f(q)$.

Problema 2. Sin usar TABLA DE VERDAD, determinar la validez del siguiente argumento lógico:
"Es falso que Juan está enfermo o se retiró de la universidad pero no ambos, puesto que la mamá de Juan le dijo a Mario que Juan estaba de viaje. Pero ayer lo vieron caminando en un parque (a Juan) no obstante estaba enfermo. En consecuencia, Juan no se retiró de la universidad o Mario no dice la verdad." **(20 puntos)**
COMENTARIOS: Algunos desarrollos no toman en cuenta todas las proposiciones simples contenidas en el enunciado. Unos pocos erraron al identificar los conectivos lógicos que relacionan las proposiciones simples. Asimismo, varios desarrollos plantean erróneamente el análisis de validación del argumento lógico, una vez se haya obtenido su representación usando elementos de lógica proposicional.
Desarrollo: Procedemos primero a identificar las proposiciones lógicas presentes en el enunciado y los conectivos lógicos que las relacionan. Sean

- p : Juan está enfermo.
- q : Juan se retiró de la universidad.
- r : (La mamá de Juan le dijo a Mario que) Juan estaba de viaje. (de aquí la información es: "Juan está de viaje")
- s : Juan caminó ayer en un parque.
- t : Mario no dice la verdad.

El argumento lógico se expresa entonces como:

$$\big[\big(r \to\sim (p\,\Delta\, q)\big) \wedge \big(s \wedge p\big)\big] \to \big(\sim q \vee t\big)\,. \tag{3}$$

Ahora procedemos a validar el argumento lógico (3). Suponemos verdaderas las PREMISAS y falsa la CONCLUSIÓN. Esto nos permite deducir lo siguiente:

- Como $\sim q \vee t$ es F, se desprende que q es V y t es F.
- Siendo $s \wedge p$ VERDADERO, tenemos que s es V y p también es V.
- En vista que $\sim (p\,\Delta\, q)$ es V para los valores de verdad de p y q determinados, se deduce que $r \to\sim (p\,\Delta\, q)$ será siempre V, cualquiera sea el valor de verdad de r.

En consecuencia, dado que la tabla de verdad de (3) contendrá valores de verdad F, el argumento lógico es una FALACIA.

Problema 3. Considere la proposición $p\,:\,(\exists\, x \in [0,3])\,(\forall\, y \in [0,3])\,(x^2 + 2y > 10)$.

a) Expresar $\sim p$ usando los cuantificadores discutidos en clases. **(05 puntos)**
COMENTARIO: casi todos desarrolló esta parte correctamente.

Desarrollo: $\sim p\,:\,(\forall\, x \in [0,3])\,(\exists\, y \in [0,3])\,(x^2 + 2y \leq 10)$.

b) Determinar el valor de verdad de p. Justificar apropiadamente. **(15 puntos)**
COMENTARIO: El desarrollo de este ejercicio en su mayoría ha sido desordenada. En algunos casos se desarrolla alguna cuenta auxiliar, pero falta un orden de ideas para explicar el razonamiento correcto para dar respuesta a lo que se pide. Tal como lo tienen expresado, dan a entender que están validando una proposición que no conduce a la respuesta que se pide. Recordamos

- Una proposición del tipo $(\exists\, x \in A)(q(x))$ es VERDADERA si se puede determinar al menos un valor $x \in A$ para el cual se cumple $q(x)$. Será FALSA si se demuestra que para cualquier $x \in A$, no se cumple $q(x)$. Es decir, la proposición $(\forall\, x \in A)(\sim q(x))$ es VERDADERA.
- La proposición del tipo $(\forall x \in A)(q(x))$ es VERDADERA si se demuestra que para cualquier $x \in A$, se cumple $q(x)$. En cambio, si uno es capaz de determinar al menos un valor de $x \in A$ para el cual no se cumple $q(x)$, la proposición resultará ser FALSA. Es decir, la proposición $(\exists\, x \in A)(\sim q(x))$ es VERDADERA.

En este caso, la proposición es formulada con el uso de dos cuantificadores. Para validarlo entonces, hay que respetar el orden de los cuantificadores involucrados.

Desarrollo: rápidamente, notamos que para $x = 3$, la proposición a validar nos queda: $(\forall\, y \in [0,3])(9 + 2y > 10)$, la cual es Falsa pues para $y = 0 \in [0,3]$, resulta $9 > 10$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Esto sólo nos exhibe que $x = 3$ no es el elemento en $[0,3]$ que hace Verdadera p. Hay que seguir con la búsqueda, hasta determinar al menos un $x \in [0,3]$ que hace cierto p. He ahí la eventual debilidad de la validación del cuantificador existencial. Testeando con otros valores de x como $0, 1, 2$, se puede determinar que p no es cierta. Sospechamos entonces que p es Falsa.

Acorde a lo descrito anteriormente, probaremos que $\sim p$ es Verdadera. En efecto, sea $x_0 \in [0,3]$. Veamos que se cumple:

$$(\exists\, y \in [0,3])\,(x_0^2 + 2y \leq 10)\,. \tag{4}$$

Despejando y de la inecuación, resulta

$$y \leq 5 - \frac{x_0^2}{2}\,. \tag{5}$$

Observación: (5) indica que los valores admisibles para y pueden depender de x_0.

Como $x_0 \in [0,3]$, tenemos $0 \leq x_0^2 \leq 9$, de donde se infiere que $\frac{1}{2} \leq 5 - \frac{x_0^2}{2} \leq 5$. Luego, $y_0 = 0$ será una solución de (5). Así, $y_0 = 0$ valida (4). En vista que $x_0 \in [0,3]$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $\sim p : (\forall\, x \in [0,3])\,(\exists\, y = 0 \in [0,3])\,(x^2 + 2y \leq 10)$ es Verdadera. En consecuencia, p es Falsa.

Otra forma: (5) puede resolverse considerando dos casos:

- Caso 1: $3 \leq 5 - \frac{x_0^2}{2}$, lo cual sucede si y sólo si $|x_0| \leq 2$. De esta manera, si $x_0 \in [0,2]$, entonces $3 \leq 5 - \frac{x_0^2}{2} \leq 5$, y por consiguiente cualquier $y \in [0,3]$ valida (4).
- Caso 2: $x_0 \in (2,3]$. Aquí se tiene que $\frac{1}{2} \leq 5 - \frac{x_0^2}{2} < 3$. Luego, $y_0 = \frac{1}{2} \in [0,3]$ hace verdadera la proposición (4).

De esta forma, como $x_0 \in [0,3]$ es fijo pero arbitrario, queda establecido que la proposición $\sim p : (\forall\, x \in [0,3])\,(\exists\, y = 0 \in [0,3])\,(x^2 + 2y \leq 10)$ es Verdadera. En consecuencia, p es Falsa.

RBP/rbp 12.04.2021