UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 1. Ejercicios adicionales.

1. Sean $X \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que $c \leq \sup X$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.

2. Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Demuestra que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in A\ \forall y \in B,\ x \leq y$. Demuestra que $\sup A \leq \inf B$. Demuestra también que $\sup A = \inf B$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A,\ y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

4. Dados $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado y $c > 0$, sea $c \cdot A := \{cx,\ x \in A\}$. Demuestra que $c \cdot A$ es acotado, que $\sup (c \cdot A) = c \sup A$ y que $\inf (c \cdot A) = c \inf A$. Enuncia y demuestra lo que ocurre con $c < 0$.

5. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados, sea $A + B := \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$. Demuestra que $A+B$ es acotado, que $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$ y que $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$. Enuncia y demuestra los resultados que valen cuando A y B son sólo acotados superiormente o sólo acotados inferiormente.

6. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^+$ no vacíos y acotados, sea $A \cdot B := \{xy,\ x \in A,\ y \in B\}$. Demuestra que $A \cdot B$ es acotado, que $\sup (A \cdot B) = \sup A \sup B$ y que $\inf (A \cdot B) = \inf A \inf B$.

7. Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente, tales que $\forall x \in A\ \exists y \in B$ tal que $x \leq y$. Demuestra que $\sup B = \sup A$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.