

ALGEBRA III (525201)

Listado 1

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Justifique.

a)  $(A \times B)^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times B)$ .

b)  $\mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(A)^c$ .

c)  $\{A - (B \cup C), B, C - B\}$  es una partición de  $A \cup B \cup C$ .

2. Pruebe, usando equivalencias lógicas, las siguientes proposiciones.

a)  $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ .

c)  $A \cup B = A \cap C \implies B \subseteq A \wedge A \subseteq C$ .

b)  $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$ .

3. Pruebe, usando propiedades de conjuntos, las siguientes proposiciones.

a)  $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - (A^c \cup C)$ .

c)  $A \cap C = \emptyset \implies (A - B) - C = A - (B - C)$ .

b)  $[A - (B - A)] \cup [(B - A) - A] = A \cup B$ .

4. Demuestre las siguientes propiedades del producto Cartesiano de conjuntos.

a)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

e)  $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$ .

b)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

f)  $B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$ .

c)  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ .

d)  $A \times B = \bigcup_{b \in B} (A \times \{b\})$ .

5. Sea  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos no vacíos y  $B$  un conjunto no vacío. Pruebe que:

a)  $(\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq B) \implies \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$ .

c)  $(\forall i \in \mathbb{N}, A_{i+1} \subseteq A_i) \implies \bigcup_{i \in I} A_i = A_1$ .

b)  $(\forall i \in \mathbb{N}, B \subseteq A_i) \implies B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ .

d)  $(\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq A_{i+1}) \implies \bigcap_{i \in I} A_i = A_1$ .

6. Dada  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos no vacíos,  $A$  un conjunto no vacío tal que  $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \cap A \neq \emptyset$ . Se define la familia  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  por:

$$B_1 = A \cap A_1 \quad \wedge \quad \forall k \geq 2, B_k = A \cap \left( A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right).$$

Pruebe que :

- a)  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .
- b)  $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$ .
- c) ¿Es  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una partición de  $A$ ?

7. Sea  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos en  $\mathbb{R}$  que verifica las siguientes condiciones:

- i)  $\forall a \in \mathbb{R}, (a, +\infty) \in \mathcal{A}$ ,
- ii)  $\forall i \in I, A_i^c \in \mathcal{A}$ ,
- iii)  $\forall J \subseteq I, \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}$ .

- a) Muestre que  $\forall b \in \mathbb{R}, [b, +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( b - \frac{1}{n}, +\infty \right)$ .
- b) Pruebe que  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : (a, b) \in \mathcal{A}, [a, b] \in \mathcal{A}$ .
- c) ¿  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ ? Justifique su respuesta.

8. Para la familia de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  encuentre  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  y  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$  en cada caso. Justifique su respuesta.

- a)  $A_i = \{2j + 1 : j = 1, \dots, i\}, \forall i \in \mathbb{N}$ .
- b)  $A_i = \left[ -1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right], \forall i \in \mathbb{N}$ .
- c)  $A_i = (-i, i) \forall i \in \mathbb{N}$ .
- d)  $A_i = \mathbb{Q} \cap [0, i - 1], \forall i \in \mathbb{N}$ .

9. Defina una familia de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  todos distintos, tal que verifique las condiciones dadas en cada caso.

- a)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, +\infty), \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, 1)$ .
- b)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ .
- c)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R} - \{0\}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$ .
- d)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ .