UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra III
525201
26 de junio de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Operadores lineales (parte 2)

Núcleos iterados

Definición 1 *Dado T un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ se define el* núcleo iterado asociado a λ de orden *j por $E_\lambda^{(j)}(T) = Ker(T - \lambda id)^j$, y su dimensión la llamamos $n_j(\lambda) = \dim(E_\lambda^{(j)}(T))$.*
De lo visto previamente, sabemos que

$$0 = n_0(\lambda) < n_1(\lambda) \leq \cdots \leq n_l(\lambda) = n_{l+1}(\lambda),$$

de donde l se define como el exponente estabilizador *de los núcleos iterados de λ, y lo denotamos l_λ.*
Los elementos de $E_\lambda^{(l_\lambda)}(T) \setminus \{\theta\}$ se llaman vectores propios generalizados de T asociados a λ.

Lema 1 *Dado T un operador lineal, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $j \geq 1$, si $E_\lambda^{(j+1)}(T) = E_\lambda^{(j)}(T) \oplus \langle\{v_1, .., v_k\}\rangle$, entonces*

$$E_\lambda^{(j)}(T) \supseteq E_\lambda^{(j-1)}(T) \oplus \langle\{(T - \lambda id)(v_1), .., (T - \lambda id)(v_k)\}\rangle.$$

Corolario 1 *Dado T un operador lineal, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $j \geq 1$, se cumple:*

$$\dim(E_\lambda^{(j+1)}(T)) - \dim(E_\lambda^{(j)}(T)) \leq \dim(E_\lambda^{(j)}(T)) - \dim(E_\lambda^{(j-1)}(T)).$$

Es decir, los núcleos iterados crecen cada vez más lento. Así, si definimos:

$$p_1(\lambda) = n_1(\lambda), p_{j+1}(\lambda) = n_{j+1}(\lambda) - n_j(\lambda), \text{ para cada } j \in \{1, ..., l_\lambda\},$$

tendremos que:

$$p_1(\lambda) = n_1(\lambda) \geq p_2(\lambda) \geq \cdots \geq p_{l_\lambda+1}(\lambda) = 0.$$

Dado que los núcleos iterados son núcleos de los operadores $(T - \lambda id)^j$ los cuales son los polinomios $(x - \lambda)^j$ evaluados en T, tenemos que los núcleos iterados son espacios T-invariantes, y la siguiente propiedad establece que están también en suma directa.

Propiedad 1 *Dado un operador lineal T y λ_1 , λ_2, ... λ_k valores propios distintos de T, entonces los espacios $E_{\lambda_1}^{(l_{\lambda_1})}(T)$, $E_{\lambda_2}^{(l_{\lambda_2})}(T)$, ... $E_{\lambda_k}^{(l_{\lambda_k})}(T)$ están en suma directa, y por lo tanto*

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}^{(l_{\lambda_i})}(T)\right) = \sum_{i=1}^{k} n_{l_{\lambda_i}}(\lambda_i).$$

Esto en particular nos dice que dentro de los núcleos iterados de un valor propio, no podemos encontrar vectores propios asociados a otro valor propio.
También nos dice que si unimos las bases de cada $E_{\lambda_i}^{(l_{\lambda_i})}(T)$, obtenemos un conjunto l.i., que luego podemos completar a una base de V. Al ser cada núcleo iterado T-invariante, resultará que la matriz representante de T respecto a esta base tiene sus primeras $\sum_{i=1}^{k} n_{l_{\lambda_i}}(\lambda_i)$ columnas en forma diagonal por bloques. Si además se escoge adecuadamente esta base, es posible hacer que cada bloque sea triangular superior y que la matriz completa sea triangular superior.

Teorema 1 (Teorema de triangularización) *Dado un operador lineal T en un espacio de dimensión finita V, cuyo polinomio característico $p(x)$ se puede descomponer en producto de factores lineales, se cumple que existe una base de V que hace que la matriz representante de T sea triangular superior.*

Este teorema aplica en particular a todo operador en un espacio V sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Cuando tenemos las hipótesis de este teorema, podemos observar que la matriz triangular superior, tendrá todos los valores propios de T en la diagonal, repetidos tantas veces como sea su multiplicidad algebraica.
Esto en particular implica que la base formada por las bases de los núcleos iterados debe ser base del espacio completo, de otra forma, habría vectores propios generalizados fuera de los núcleos iterados, lo cual es imposible. Se concluye entonces el siguiente teorema.

Teorema 2 (Teorema de descomposición prima) *Dado un operador lineal T en un espacio de dimensión finita V, cuyo polinomio característico es $p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{r_{\lambda_i}}$, se cumple que:*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}^{(l_{\lambda_i})}(T)$$

y la multiplicidad algebraica de λ_i es $r_{\lambda_i} = n_{l_{\lambda_i}}(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i}^{(l_{\lambda_i})}(T))$.

Observamos además que, dado que $E_\lambda^{(1)}(T) = S_\lambda(T)$, se tiene $p_1(\lambda) = n_1(\lambda) = g_\lambda$ y podemos concluir con el siguiente teorema.

Teorema 3 *Dado T un operador lineal sobre un espacio de dimensión finita, un valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$, si llamamos g_λ su multiplicidad geométrica y r_λ su multiplicidad algebraica, y si l_λ es su exponente de estabilización, entonces se cumple:*

$$g_\lambda = \dim(E_\lambda^{(1)}(T)) \leq \dim(E_\lambda^{(l_\lambda)}(T)) = r_\lambda.$$

Este importante teorema provee la demostración que acota la multiplicidad geométrica por la algebraica visto en Algebra II, pero además nos da una nueva forma de determinar cuando se ha alcanzado el mayor núcleo iterado: será cuando éste tenga dimensión r_λ. Un corolario directo es que $l_\lambda \leq r_\lambda$, pues la dimensión de los núcleos iterados crece en al menos una unidad cada vez.
Por otra parte, cada vector perteneciente a $E_\lambda^{(l_\lambda)}(T)$ es anulado por el operador $(T - \lambda id)^{r_i}$, entonces, si el espacio completo es suma directa de este tipo de vectores, el operador $p(T)$ anula a todos los vectores del espacio, es decir, es el operador nulo. Este resultado se conoce como el Teorema de Cayley-Hamilton.

Corolario 2 (Cayley-Hamilton) *Dado un operador lineal T en un espacio de dimensión finita V, cuyo polinomio característico es $p(x)$, se cumple que $p(T) = 0$.*

Observación 1 *Este resultado puede ser útil para calcular el operador inverso de T (cuando existe) ya que en este caso 0 no es raíz de $p(x)$, y entonces éste se puede escribir como $p(x) = a_0 + q(x)x$, para algún polinomio $q(x)$, así $id = -a_0^{-1}q(T) \circ T$ y entonces $-a_0^{-1}q(T)$ es el inverso de T. También será útil para calcular potencias grandes de T en función de las primeras $n-1$ de manera recursiva.*

Polinomio minimal

Propiedad 2 *Dado un operador lineal T, el conjunto de polinomios mónicos que lo anula:*

$$I = \{q(x) \mid q(T) = 0\}$$

tiene un máximo común divisor.

Tal divisor común se llama *polinomio minimal* y lo denotamos $m(x)$. El Teorema de Cayley-Hamilton muestra que $m(x)$ divide a $p(x)$. Por otra parte, el Teorema de Descomposición Prima muestra que $m(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{l_i}$.

Forma canónica de Jordan

Teorema 4 *Dado un e.v. V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y $T : V \to V$ un operador lineal con un sólo valor propio λ, entonces existe una base de vectores de la forma $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{g_\lambda}\{(T - \lambda id)^j(v^{(i)})\}_{j=0}^{J_i-1}$, tales que $v^{(i)} \in E_\lambda^{J_i}(T)$, de manera que su matríz representante respecto a esta base es una matriz por bloques con g_λ bloques, cada uno correspondiente a una* caja de Jordan de orden J_i *y con q_j cajas de Jordan de tamaño j, donde q_j se obtiene como:*

$$\begin{array}{rcl} q_j & = & p_j(\lambda) - p_{j+1}(\lambda) \quad j \in \{1, .., l_\lambda - 1\} \\ q_l & = & p_{l_\lambda}(\lambda) \end{array}$$

Cada caja de Jordan de orden j es una matriz de $j \times j$ de la siguiente forma.

$$J_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Los primeros vectores $v^{(i)}$, asociados a $J_i = l_\lambda$, se obtienen completando la base de $E_\lambda^{l_\lambda - 1}(T)$ a una base de $E_\lambda^{l_\lambda}(T)$. Luego se agregan sus iteradas: $\{(T - \lambda id)^j (v^{(i)})\}_{j=0}^{l_\lambda - 1}$.
Los siguientes $v^{(i)}$, asociados a J_i menores, se buscan primero en los J_i mayores que cumplan $q_{J_i} > 0$, completando la base de $E_\lambda^{J_i - 1}(T)$ unida a los demás vectores ya obtenidos en $E_\lambda^{J_i}(T)$, con los q_{J_i} vectores de $E_\lambda^{J_i}(T)$ que sean necesarios. Se repite esto hasta los $J_i = 1$.

Teorema 5 (Jordan) *Dado un operador lineal T en un espacio de dimensión finita V, cuyo polinomio característico $p(x)$ se puede descomponer en producto de factores lineales, se cumple que existe una base de V que hace que la matriz representante de T sea triangular superior y tridiagonal.*