UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION $N°1$.
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

Problema 1. Considere la EDO

$$y'(x) = \frac{x - 2\cos(y)}{x\sin(y)}, \qquad [\mathbf{1}]$$

I. Determine una expresión general para las regiones donde se puede asegurar existencia y unicidad para un PVI asociado a la EDO [**1**].

II. Considere el PVI

$$\begin{cases} y'(x) &= \frac{x-2\cos(y)}{x\sin(y)} \\ y(1) &= \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad [\mathbf{2}]$$

(2.1) Determine justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si $y(x)$ es solución de [**2**], entonces $\forall x > 0, y(x) < 4$.

ii) Si $y(x)$ es solución de [**2**], entonces $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

(2.2) Resuelva el PVI [**2**].

Solución:

I. Las funciones

$$f(x,y) = \frac{x - 2\cos(y)}{x\sin(y)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2 - x\cos(y)}{x\sin^2(y)}$$

son continuas en $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, las regiones donde se puede asegurar existencia y unicidad de soluciones para un PVI asociado a [**1**], vienen expresadas de manera general por:

$$R_{k,1} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, k\pi < y < (k+1)\pi\}$$
$$R_{k,2} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, k\pi < y < (k+1)\pi\}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. **[6 pts.]**

II. Notemos que el punto $(x_0, y_0) = (1, \pi/3) \in R_{0,1}$.

(2.1) i) Si $y(x)$ es solución de [**2**], entonces gracias al Teorema de Existencia y Unicidad, $\forall x > 0, y(x) \in]0,\pi[$ y luego $y(x) < 4$, por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

ii) Nuevamente gracias al Teorema de Existencia y Unicidad, $\forall x > 0, y(z) \in]0, \pi[$, por lo que es imposible que $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty$, por lo tanto tal afirmación es FALSA. **[6 pts.]**

(2.2) Notemos que la EDO **[1]** se puede expresar como la siguiente forma diferencial:

$$(2\cos(y) - x)dx + x\sin(y)dy = 0, \qquad [\mathbf{3}]$$

Denotando $M(x,y) = 2\cos(y) - x$, y $N(x,y) = x\sin(y)$, vemos que **[3]** no es exacta pues $\frac{\partial M}{\partial y} = -2\sin(y)$, y $\frac{\partial N}{\partial x} = \sin(y)$.

Por otro lado

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3\sin(y)}{x\sin(y)} = \frac{-3}{x},$$

de donde existe un factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{-3}{x}dx} = x^{-3}$. Multiplicando **[3]** por este factor, obtenemos:

$$(2\cos(y) - x)x^{-3}dx + x^{-2}\sin(y)dy = 0, \qquad [\mathbf{4}]$$

Llamando $\overline{M}(x,y) = (2\cos(y) - x)x^{-3}$, y $\overline{N}(x,y) = x^{-2}\sin(y)$, claramente se cumple que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = -2\sin(y)x^{-3} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, y en consecuencia existe función $g \in \mathcal{C}^2(R_{0,1})$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x} = \overline{M}$, y $\frac{\partial g}{\partial y} = \overline{N}$.

Integrando la ecuación $\frac{\partial g}{\partial x} = \overline{M}$ respecto a x, tenemos

$$g(x,y) = \int \overline{M}(x,y)dx = \int (2\cos(y) - x)x^{-3}dx = -\cos(y)x^{-2} + \frac{1}{x} + c(y)$$

Derivando esta expresión respecto a y, y usando la ecuación $\frac{\partial g}{\partial y} = \overline{N}$ se tiene:

$$\overline{N} = \sin(y)x^{-2} = \frac{\partial g}{\partial y} = \sin(y)x^{-2} + c'(y)$$

De donde $c'(y) = 0$ y en consecuencia $c(y) = C$ constante. La solución de **[4]** vendrá dada por

$$g(x,y) = K \Leftrightarrow -\cos(y)x^{-2} + \frac{1}{x} = K$$

Y como para el PVI **[2]**, $y(1) = \frac{\pi}{3}$, entonces $-\cos(\pi/3)1^{-2} + \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} + 1 = K$, lo que implica finalmente que la solución de **[2]** será:

$$-\cos(y)x^{-2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y(x) = \arccos\left[\frac{(2-x)x}{2}\right].$$

[8 pts.]

PROBLEMA 2 . A un tanque de 440 $[lt]$ de capacidad entran $8[lt/min]$ de salmuera (agua y sal) a una concentración de $0.8[kg/lt]$. El tanque contiene inicialmente $40[lt]$ de agua pura; además por una válvula de salida fluyen al exterior desde el tanque $4[lt/min]$ de mezcla de agua y sal.

Suponiendo que la mezcla al interior del tanque es siempre homogénea:

(i) Determine la cantidad de sal dentro del tanque, cuando (en el instante que) la concentración de sal llege a $0.6[kg/lt]$.

(ii) Si en el instante en que la concentración de sal dentro del tanque llega a $0.6[kg/lt]$, el flujo de entrada al tanque se reduca a $4[lt/min]$ (manteniendose el mismo flujo de salida), Escriba (**sin resolver**) el PVI que modela, ahora, la cantidad de contaminante dentro del tanque.

Solución: Sea $x(t)$ la cantidad de contaminante (en Kg) presente en el tanque, en el instante t (en minutos). Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = f_{E}\, c_{E} - f_{S}\, c_{S}\,,$$

donde $f_{E} = 8$, $c_{E} = 0.8$, $f_{S} = 4$, $c_{S} = \dfrac{x(t)}{V(t)}$.

Siendo $V(t)$ el volumen de mezcla en el tanque en el instante t, se deduce que

$$V(t) = 4\,t + 40 \quad \text{ para } 0 \le t \le t_*, \text{ para}$$

$$t_* = \text{mínimo}\{t_1, t_2\}$$

donde

$$\begin{cases} t_1 & \text{es el tiempo de llenado del tanque (que resulta ser igual a 100 minutos)} \\ t_2 & \text{es el tiempo en que la concentración de sal dentro del tanque llega a } 0.6[kg/lt] \end{cases}$$

De esta manera, el PVI a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 6.4 - \left(\dfrac{x(t)}{t+10}\right) \quad \text{para } 0 \le t \le t_* \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

[4 pts.]

Resolviendo la EDO, el factor integrante asociado es

$$\mu(t) = t + 10.$$

Luego de multiplicar la EDO por $\mu(t)$, nos queda

$$\frac{d}{dt}\Big[(t+10)x(t)\Big] = 6.4(t+10); \qquad \text{y al integrar obtenemos}$$

$$x(t) = 6.4(1/2t^2 + 10)\frac{1}{t+10} + C\frac{1}{t+10}, \qquad \text{con } C \text{ constante en } \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = 0$, resulta $C = 0$, de donde la cantidad de contaminante presente en el tanque en todo instante t con $0 \leq t \leq t_*$, es

$$x(t) = 6.4(1/2t^2 + 10)\frac{1}{t+10}$$

y su concentración correspondiente es

$$c(t) = 6.4(1/2t^2 + 10)\frac{1}{4(t+10)^2} \quad \text{para} t < t_*$$

[7 pts.]

Veamos si la concentración de $0.6[kg/lt]$ se alcanza antes del tiempo de llenado ($t = t_1$).

Debe tenerse que $c(t_2) = 0.6$, esto es,

$6.4(1/2t^2 + 10)\dfrac{1}{4(t+10)^2} = 0.6.$

De donde $t \geq 0$ debe verificar

$$t^2 + 20t - 300 = 0,$$

esto es, $t = 10$ minutos.

[4 pts.]

(ii) Como el flujo de entrada y salida son iguales, luego de $t = t_* = 10$ minutos, el volumen es constante e igual a $V(10) = 4\,t_* + 40 = 80$ litros. Por tanto, si $z(t)$ indica ahora la cantidad de sal dentro del tanque (cuando $t \geq 10$), la EDO que modela ahora el problema, es:

$$z'(t) = 3.2 - 4\frac{z(t)}{80}, \qquad \text{para } t \geq 10.$$

Ahora el correspondiente PVI, es:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} &= 3.2 - \dfrac{z(t)}{20} \quad \text{para } 10 \leq t \\ z(10) &= x(10). \end{cases}$$

[5 pts.]

PROBLEMA 3.

(i) Sean L un operador diferencial lineal, normal, de orden 1 y a **coeficientes constantes**. Si la función z definida por $z(x) = \mathrm{e}^{3x}$ pertenece al Ker(L), resuelva completamente la EDO lineal de segundo orden dada por:

$$L^2(y) = \mathrm{e}^{3x}$$

(ii) Determine la solución general de $x\,y''(x) - 2y'(x) + \left(\frac{2}{x} - x\right)y(x) = 0$, sabiendo que la función y definida por $y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ es una solución.

(iii) Determine la solución general de

$$\Big(y''(x) - 4y'(x) + 8y(x)\Big)^2 = 0.$$

Solución Problema 3:

Recordemos que toda solución y de $L(y) = \mathrm{e}^{3x}$, se ecribe como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x)$ es solución general del problema homogéneo asociado, e
$y_p(x)$ es una solución particular de $L(y) = \mathrm{e}^{3x}$.

(i) Como L está normalizado y es a coeficientes constante resulta que $z \in \mathrm{Ker}(L)$ implica $z \in \mathrm{Ker}(L^2)$; y, además la función g definida por $g(x) = xz(x)$ pertenece también a $\mathrm{Ker}(L^2)$. Esto es, el conjunto de funciones definidas por

$$\{\mathrm{e}^{3x}, x\,\mathrm{e}^{3x}\}$$

pertenecen al $\mathrm{Ker}(L)$. Como las dos funciones mencionadas (z y g) son linealmente independientes (ejercicio) y $\dim(\mathrm{Ker}) = 2$. Resulta que toda solución y_h de

$$L^2(y) = 0$$

se ecribe como

$$y_h = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{3x}.$$

$\boxed{\textbf{02 Ptos.}}$

Para buscar una solución particular $y_p(x)$. Existen al menos dos formas:
(a) Variación de parámetros:

Buscamos y_p como $y_p(x) = A(x)\mathrm{e}^{3x} + B(x)x\,\mathrm{e}^{3x}$. Entonces las incógnitas A y B se determinan del sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\mathrm{e}^{3x} & + & B'(x)x\,\mathrm{e}^{3x} & = 0 \\ 3A'(x)\mathrm{e}^{3x} & + & B'(x)(1+3x)\,\mathrm{e}^{3x} & = \mathrm{e}^{3x} \end{cases}$$

resolviendo el sistema anterior se obtiene

$$\begin{cases} A(x) & = & -\frac{1}{2}\,x^2 \\ & & \\ B(x) & = & x \end{cases}$$

04 Ptos.

Así, la solución particular buscada es

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x} + x^2\,\mathrm{e}^{3x} = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x}$$

(b) Usando Aniquiladores:

Buscamos una solución del tipo $y_p(x) = cx^2\,\mathrm{e}^{3x}$.
Entonces de $L^2(cx^2\,\mathrm{e}^{3x}) = \mathrm{e}^{3x}$, o equivalentemente de

$$D^2(cx^2\,\mathrm{e}^{3x}) - 6D(cx^2\,\mathrm{e}^{3x}) + 9x^2\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x},$$

sigue que:

$$\Big[(2+12x+9x^2) - 6c(2x+3x^2) + 9x^2\Big]c\,\mathrm{e}^{3x}) = \mathrm{e}^{3x},$$

de donde $c = 1/2$. Se obtiene la misma solución particular, esto es;

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x}$$

Por tanto, toda solución general del problema es de la forma:

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2x\,\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x}$$

02 Ptos.

(ii) Para $x > 0$, la solución general es de la forma

$$y_h(x) = c_1x\mathrm{e}^{-x} + c_2y(x)$$

donde y viene definida por $y(x) = x\mathrm{e}^{-x}\,z(x)$ con $z(x)$ de modo que y verifique la EDO dada , esto es,

$$y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \Big(\frac{2}{x^2} - 1\Big)y(x) = 0.$$

Tenemos:

$$\begin{cases} y'(x) &= (1-x)\mathrm{e}^{-x}z(x) + x\mathrm{e}^{-x}z'(x) \\ y''(x) &= (-2+x)\mathrm{e}^{-x}z(x) + 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}z'(x) + x\mathrm{e}^{-x}z''(x) \end{cases}$$

Por tanto, la EDO a resolver, es:

$$x^2 z''(x) - 2x^2 z'(x) = 0,$$

$\boxed{\textbf{04 Ptos.}}$

de donde dividiendo por x^2 y poniendo $u(x) = z'(x)$, resolvemos:

$$u'(x) - 2u(x) = 0$$

de donde $z(x) = \frac{1}{2}K\mathrm{e}^{2x}$.

Así, la solución general de la EDO dada, es:

$$y_h(x) = c_1 x\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{x}$$

. $\boxed{\textbf{02 Ptos.}}$

Alternativamente, la segunda solución puede ser encontrada usando la fórmula dada por;

$$y(x) = y_1(x)\int \frac{\exp\left[\int \frac{2}{x}dx\right]}{x^2\,\mathrm{e}^{-2x}}\,dx$$

donde y_1 es la solución dada, esto es, $y_1(x) = x\,e^{-x}$. Resulta:

$$y(x) = x\mathrm{e}^{-x}\int e^{2x}dx = 1/2\,x\,\mathrm{e}^{x} + cx\,\mathrm{e}^{-x}$$

Así, se obtiene la misma solución general como

$$y_h(x) = c_1 x\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{x}.$$

(iii) La EDO dada correspone a $L^2(y) = 0$, donde L es el operador diferencial lineal a coeficientes constantes dado por:

$$L := D^2 - 4D + 8.$$

El polinomio asociado a la $L(y) = 0$, es $p(u) = u^2 - 4u + 8$, cuyas raíces vienen dadas por $u_1 = 2 - 2\,i$ (y su correspondiente conjugado).

Por tanto, el $\mathrm{Ker}(L^2)$ tiene base dada por:

$$B = \{\mathrm{e}^{2x}\cos(2x), \mathrm{e}^{2x}\mathrm{sen}(2x), x\,\mathrm{e}^{2x}\cos(2x), x\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{sen}(2x)\},$$

de este modo, la solución general de $L^2(y) = 0$, viene dada por

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x}\cos(2x) + c_2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{sen}(2x) + c_3x\,\mathrm{e}^{2x}\cos(2x) + c_4x\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{sen}(2x)$$

$\boxed{\textbf{06 Ptos.}}$

FMC/JMS//fmc/jms 02/10/2014.