

# Cálculo III

## Cálculo integral de funciones de varias variables I:

### Teoría de la integración $n$ -dimensional

### Módulo 4, Presentación 9

Raimund Bürger

4 de mayo de 2025

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Si  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  es un **intervalo cerrado**, entonces un conjunto de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  se llama una **partición por puntos** del intervalo  $I$ . Para

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, m$$

el conjunto  $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  de estos intervalos cerrados define una **partición por intervalos** de  $[a, b]$  con las propiedades

$$I = \bigcup_{k=1}^m I_k, \quad I_k^0 \cap I_l^0 = \emptyset \text{ si } k \neq l,$$

donde  $I_k^0$  denota el conjunto de los puntos interiores del intervalo  $I_k$ .

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

**Definición 4.1** Sean  $-\infty < a_i < b_i < \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y sea

$$I = [a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

un intervalo cerrado (ver Definición 1.3).

1. El siguiente número se llama **medida  $n$ -dimensional** o **contenido  $n$ -dimensional** de  $I$ :

$$\mu(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

2. Un conjunto  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  de intervalos cerrados se llama **partición de  $I$**  si

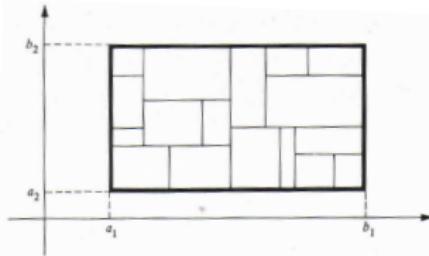
$$I = \bigcup_{k=1}^m I_k \quad \text{y} \quad I_k^0 \cap I_l^0 = \emptyset \text{ si } k \neq l,$$

donde  $I_k^0$  denota el conjunto de los puntos interiores de  $I_k$ .

3. Sea  $\delta(I_k)$  el diámetro de  $I_k$ , entonces  $\|P\| := \max_{1 \leq k \leq m} \delta(I_k)$  se llama la **norma de la partición  $P$** .

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Ejemplo de una partición de  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ :



**Teorema 4.1** Si  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  es una partición de  $I$ , entonces

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^m \mu(I_k).$$

**Demostración** Tarea. ■

**Definición 4.2** Se dice que una partición  $P' = \{I'_1, \dots, I'_{m'}\}$  de  $I$  es un **refinamiento** de la partición  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  de  $I$  si para cada  $I'_{k'}, k' = 1, \dots, m'$  existe un  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , tal que  $I'_{k'} \subset I_k$ .

Si  $P'$  es un refinamiento de  $P$ , entonces  $\|P'\| \leq \|P\|$ .

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

**Definición 4.3** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada sobre el intervalo cerrado  $I \subset D(f)$ , y sea  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  una partición de  $I$ .

1. Definimos las cantidades

$$m_k(f) := \inf_{I_k} f(x), \quad M_k(f) := \sup_{I_k} f(x),$$

$$m(f) := \inf_I f(x), \quad M(f) := \sup_I f(x).$$

2. Se define la suma inferior de  $f$  con respecto a  $P$

$$\underline{S}_P(f) := \sum_P m_k(f) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m m_k(f) \mu(I_k).$$

3. Se define la suma superior de  $f$  con respecto a  $P$ :

$$\bar{S}_P(f) := \sum_P M_k(f) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m M_k(f) \mu(I_k).$$

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

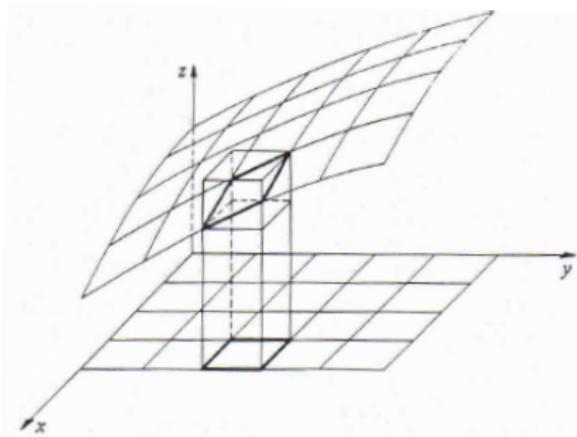


Figura: Sumas inferiores y superiores para una función  $f$  positiva,  $n = 2$ .

**Teorema 4.2** Para cada partición se tiene que

$$m(f)\mu(I) \leq \underline{S}_P(f) \leq \bar{S}_P(f) \leq M(f)\mu(I).$$

**Demostración** Como  $m(f) \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M(f)$  para  $k = 1, \dots, m$ , obtenemos el enunciado después de multiplicar por  $\mu(I_k)$  y sumando los productos.

## 4.1. Notación, sumas superiores e inferiores

Los siguientes resultados son análogos a los enunciados para el cálculo de funciones de una variable. Presentamos estos teoremas sin demostración.

**Teorema 4.3** Sea  $P'$  un refinamiento de  $P$ . Entonces

1.  $\bar{S}_{P'}(f) \leq \bar{S}_P(f)$ ,
2.  $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$ .

**Teorema 4.4** Sean  $P_1$  y  $P_2$  particiones de  $I$ , entonces

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \bar{S}_{P_2}(f).$$

## 4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

Los Teoremas 4.2 y 4.3 implican la existencia de las integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores.

**Definición 4.4** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada sobre el intervalo cerrado  $I$ .

1. La siguiente expresión se llama **integral de Riemann-Darboux inferior** de la función  $f$  sobre el intervalo  $I$ :

$$\int\limits_I f(x) dx = \int\limits_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \sup_P \underline{S}_P(f).$$

2. La siguiente expresión se llama **integral de Riemann-Darboux superior** de la función  $f$  sobre el intervalo  $I$ :

$$\int\limits_I f(x) dx = \int\limits_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \inf_P \bar{S}_P(f).$$

## 4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

**Teorema 4.5** Se tiene que

$$\int\limits_{\overline{I}} f(x) dx \leqslant \int\limits_I f(x) dx.$$

**Demostración** Tarea (utilizar Teorema 4.4). ■

La Definición 4.3 tiene como consecuencia que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $P$  tal que

$$\underline{S}_P(f) > \int\limits_I f(x) dx - \varepsilon; \quad \bar{S}_P(f) < \int\limits_I f(x) dx + \varepsilon.$$

## 4.2. Integrales de Riemann-Darboux inferiores y superiores

Sin embargo no es obvio que esta relación también es válida también para **todas** las particiones que posean una norma suficientemente pequeña.

**Teorema 4.6** Para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que para todas las particiones  $P$  de  $I$  con  $\|P\| < \delta_\varepsilon$  se tiene que

$$\int_I f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}_P(f) \leq \int_I f(x) dx,$$

$$\int_I f(x) dx \leq \bar{S}_P(f) < \int_I f(x) dx + \varepsilon.$$

## 4.3. La integral de Riemann para intervalos

Mediante las integrales de Riemann-Darboux definiremos ahora la integral de Riemann para intervalos cerrados en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.5** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada sobre el intervalo cerrado  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Si se tiene que

$$\int_I f(x) dx = \bar{\int}_I f(x) dx,$$

entonces  $f$  se llama **Riemann-integrable** sobre  $I$ . El valor común de las integrales superior e inferior se llama **integral de Riemann de  $f$  sobre  $I$** , denotada

$$\int_I f(x) dx \quad o \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  también escribimos

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) \quad y \quad \iiint_I f(x, y, z) d(x, y, z).$$

## 4.3. La integral de Riemann para intervalos

**Ejemplo 4.1** Sea  $I \subset \mathbb{R}^n$  un intervalo cerrado. Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cada partición  $P$  de  $I$  se tiene entonces que

$$\underline{S}_P(f) = \sum_P \inf_{I_k} f(x) \mu(I_k) = 0,$$

$$\bar{S}_P(f) = \sum_P \sup_{I_k} f(x) \mu(I_k) = \sum_P \mu(I_k) = \mu(I) > 0,$$

por lo tanto  $f$  no puede ser Riemann-integrable.

## 4.3.La integral de Riemann para intervalos

**Teorema 4.7** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre el intervalo cerrado  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $f$  es Riemann-integrable sobre  $I$ .

**Demostración** Como que  $I$  es compacto, la función  $f$  es uniformemente continua sobre  $I$ , por lo tanto para  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x', x'' \in I$  con  $d(x', x'') < \delta_\varepsilon$  se tiene que

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\mu(I)}.$$

## 4.3. La integral de Riemann para intervalos

### Demostración del Teorema 4.7 (continuación)

Sea ahora  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  una partición de  $I$  tal que  $\|P\| < \delta_\varepsilon$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_I f(x) dx - \int_{\overline{I}} f(x) dx \\ &\leqslant \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \\ &= \sum_{k=1}^m M_k(f) \mu(I_k) - \sum_{k=1}^m m_k(f) \mu(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \max_{I_k} f(x) - \min_{I_k} f(x) \right) \mu(I_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{\mu(I)} \sum_{k=1}^m \mu(I_k) < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 4.3. La integral de Riemann para intervalos

**Teorema 4.8** Sea  $I \subset \mathbb{R}^n$  un intervalo cerrado y sea  $c$  una constante.

Entonces

$$\int_I c \, dx = c \cdot \mu(I).$$

En particular, para  $c = 1$ ,

$$\mu(I) = \int_I dx.$$

**Demostración** Sea  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  una partición arbitraria de  $I$ .

Entonces

$$\bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^m c \cdot \mu(I_k) = c \sum_{k=1}^m \mu(I_k) = c \cdot \mu(I),$$

por lo tanto según el Teorema 4.7

$$\int_I c \, dx = c \cdot \mu(I). \quad \blacksquare$$

## 4.4. Sumas de Riemann

**Definición 4.6** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada sobre el intervalo cerrado  $I \subset \mathbb{R}^n$ , y sea  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  una partición de  $I$ ; además, sea  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  un conjunto de puntos tales que  $\xi_k \in I_k$  para  $k = 1, \dots, m$ . Entonces

$$S_P(f, \xi) = \sum_P f(\xi_k) \mu(I_k) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \mu(I_k)$$

se llama **suma de Riemann de  $f$  respecto a  $P$** .

Las sumas superiores e inferiores, en general, **no son sumas de Riemann** porque no necesariamente los valores  $M_k(f)$  y  $m_k(f)$  **deben ser asumidos** por  $f$  sobre  $I_k$ . Además, tal como en la teoría de funciones de una variable se tiene ahora que

$$\underline{S}_P(f) \leq S(f, \xi) \leq \bar{S}_P(f).$$

**La convergencia** de las sumas de Riemann se define de manera análoga al cálculo de las funciones de una variable.

## 4.4. Sumas de Riemann

**Definición 4.7** Sea la función  $f$  acotada sobre el intervalo cerrado  $I$ . Si existe un número  $J \in \mathbb{R}$  y para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que para cada partición  $P = \{I_1, \dots, I_m\}$  de  $I$  con  $\|P\| < \delta_\varepsilon$ , con  $\xi_k \in I_k$  elegido arbitrariamente, se tiene que

$$|S_P(f, \xi) - J| < \varepsilon,$$

entonces se dice que las sumas de Riemann **convergen a  $J$** :

$$J = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

## 4.4. Sumas de Riemann

El próximo teorema, cuya demostración es análoga al cálculo de funciones de una variable y por lo tanto omitida, muestra que la convergencia de las sumas de Riemann es **equivalente** con la **existencia de la integral de Riemann**.

**Teorema 4.9** Sea  $I \subset \mathbb{R}^n$  un intervalo cerrado.

1. Si  $f$  es Riemann-integrable sobre  $I$ , entonces existe el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi)$ , y se tiene que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi) = \int_I f(x) dx.$$

2. Por otro lado, si existe el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi)$ , entonces  $f$  es Riemann-integrable sobre  $I$  y se tiene que

$$\int_I f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

## 4.5. Integrales iteradas

Ahora introduciremos un **método práctico** para la computación de una integral  $n$ -dimensional. Basicamente reemplazaremos la integración  $n$ -dimensional por  $n$  integraciones unidimensionales.

**Teorema 4.10** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrable sobre el rectángulo  $I := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

1. Supongamos que para cada  $x \in [a, b]$  existe la integral

$$\int_c^d f(x, y) dy.$$

Entonces existe la integral iterada

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

y se tiene que

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

## 4.5. Integrales iteradas

### Teorema 4.10 (continuación)

2. Supongamos que para cada  $y \in [c, d]$  existe la integral

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

Entonces existe la integral iterada

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

y se tiene que

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

## 4.5. Integrales iteradas

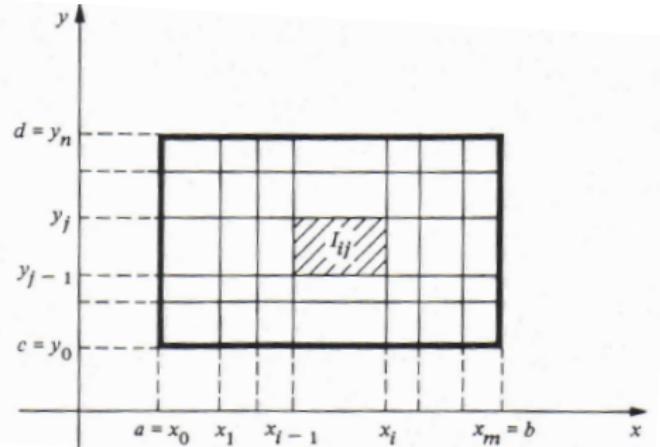
**Demostración del Teorema 4.10** Consideremos las siguientes particiones por puntos de los intervalos respectivos  $[a, b]$  y  $[c, d]$ :

$$P_x = \{x_0, \dots, x_m\}, \quad P_y = \{y_0, \dots, y_n\}.$$

Así, el conjunto de los rectángulos

$$I_{ij} := \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

forma una partición  $P = \{I_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  del rectángulo  $I$ :



## 4.5. Integrales iteradas

**Demostración del Teorema 4.10 (continuación)** Como siempre,

$$m_{ij} := \inf_{I_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} := \sup_{I_{ij}} f(x, y).$$

Según el Teorema 4.6 podemos elegir para  $\varepsilon > 0$  dado  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que para todas particiones  $P_x$  y  $P_y$  tales que  $\|P_x\| < \delta_\varepsilon$  y  $\|P_y\| < \delta_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}\underline{S}_P(f) &> \iint_I f(x, y) d(x, y) - \varepsilon, \\ \bar{S}_P(f) &< \iint_I f(x, y) d(x, y) + \varepsilon.\end{aligned}\tag{4.1}$$

1. Consideraremos sobre el intervalo  $[a, b]$  la función

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_c^d f(x, y) dy.$$

## 4.5. Integrales iteradas

### Demostración del Teorema 4.10 (continuación)

1. Esta función es acotada sobre  $[a, b]$ , y podemos formar la suma de Riemann (en el sentido de funciones de una variable)

$$S_{P_x}(F, \xi) = \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Evidentemente se tiene que

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \quad \text{para todo } y \in [y_{j-1}, y_j].$$

Ahora, integrando sobre  $[y_{j-1}, y_j]$  obtenemos

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

## 4.5. Integrales iteradas

### Demostración del Teorema 4.10 (continuación)

1. Multiplicando por  $(x_i - x_{i-1})$ , sumando sobre  $j$  y luego sobre  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned}\underline{S}_P(f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \mu(I_{ij}) \leq \sum_{i=1}^m \left[ \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right] (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \mu(I_{ij}) = \bar{S}_P(f).\end{aligned}$$

Concluimos que en virtud de (4.1) para cada  $P_x$  tal que  $\|P_x\| < \delta_\varepsilon$  y cada selección de los  $\xi_i$

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) - \varepsilon \leq S_{P_x}(F, \xi) \leq \iint_I f(x, y) d(x, y) + \varepsilon,$$

es decir la afirmación (1) del teorema es válida.

2. La demostración de (2) es análoga. ■

## 4.5. Integrales iteradas

Comentamos que la existencia de las integrales iteradas

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad y \quad \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (4.2)$$

no necesariamente implica la existencia de

$$\iint_I f(x, y) d(x, y). \quad (4.3)$$

Vice versa, la existencia de (4.3) no necesariamente implica la existencia de las integrales iteradas (4.2).

Si  $f$  es continua sobre  $I := \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces para cada  $x \in [a, b]$  y cada  $y \in [c, d]$  existen las respectivas integrales

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad y \quad \int_a^b f(x, y) dx,$$

además  $f$  es Riemann-integrable (según el Teorema 4.7) sobre  $I$ .

## 4.5. Integrales iteradas

Entonces, en virtud del Teorema 4.10,

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

es decir podemos **intercambiar el orden de las integraciones de las integrales iteradas (Teorema de Fubini)**.

Finalmente, comentamos que si la función  $f$  tiene la forma

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y),$$

donde  $f_1$  es continua sobre  $[a, b]$  y  $f_2$  es continua sobre  $[c, d]$ , entonces

$$\iint_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

## 4.5. Integrales iteradas

**Ejemplo 4.2** Sea  $I := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ , y sea  $f$  definida sobre  $I$  por  $f(x, y) = x^y$ . Como  $f$  es continua sobre  $I$ , el Teorema 4.10 nos permite concluir que

$$\iint_I x^y d(x, y) = \int_1^2 \left[ \int_0^1 x^y dx \right] dy.$$

Aquí obtenemos

$$\int_0^1 x^y dx = \left[ \frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$$

y por lo tanto

$$\iint_I x^y d(x, y) = \int_1^2 \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{3}{2}.$$

## 4.5. Integrales iteradas

**Teorema 4.11** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrable sobre el intervalo  $I := \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ , además definimos para cada  $\nu$ ,  $1 \leq \nu \leq n$

$$I_{x_\nu} := \{(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, i \neq \nu\}.$$

- Si para cada  $x_\nu \in [a_\nu, b_\nu]$  existe la integral

$$\int_{I_{x_\nu}} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n),$$

también existe la integral iterada

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} \left[ \int_{I_{x_\nu}} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \right] dx_\nu,$$

y esta integral posee el valor  $\int_I f(x) dx$ .

## 4.5. Integrales iteradas

### Teorema 4.11 (continuación)

2. Si para cada  $(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in I_{x_\nu}$  existe la integral

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) dx_\nu,$$

también existe la integral iterada

$$\int_{I_{x_\nu}} \left[ \int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) dx_\nu \right] d(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)$$

y esta integral posee el valor  $\int_I f(x) dx$ .

**Demostración** La demostración es análoga a la del Teorema 4.10.



## 4.5. Integrales iteradas

**Ejemplo 4.3** Sea  $I := \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$ , y sea  $f$  definida sobre  $I$  por  $f(x, y, z) = x + y + z$ . Como  $f$  es continua sobre  $I$ , según el Teorema 4.11 para  $I_z := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  se tiene que

$$\mathcal{I} := \iiint_I (x + y + z) d(x, y, z) = \int_2^4 \left[ \iint_{I_z} (x + y + z) d(x, y) \right] dz.$$

La integral interior puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$\iint_{I_z} (x + y + z) d(x, y) = \int_0^1 \left[ \int_0^2 (x + y + z) dx \right] dy, \quad \text{así que}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^4 \left[ \int_0^1 \left( \int_0^2 (x + y + z) dx \right) dy \right] dz \\ &= \int_2^4 \left[ \int_0^1 (2 + 2y + 2z) dy \right] dz = \int_2^4 (3 + 2z) dz = 18.\end{aligned}$$