

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 2. Más ejercicios adicionales.

Distancia a un conjunto y entre conjuntos.

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $p \in X$ y $E, F \subset X$ se define la distancia de p a F como

$$d(p, F) := \inf_{q \in F} d(p, q)$$

y la distancia entre E y F como

$$d(E, F) := \inf_{p \in E, q \in F} d(p, q).$$

1. Dados $E, F \subset X$ y $p, q \in X$, demuestra las siguientes propiedades:
 - (a) Si $E \subset F$, entonces $d(p, F) \leq d(p, E)$.
 - (b) $|d(p, E) - d(q, E)| \leq d(p, q)$.
 - (c) $p \in \overline{E}$ si y sólo si $d(p, E) = 0$.
2. Da un ejemplo de dos subconjuntos $E, F \subset \mathbb{R}^2$ abiertos, disjuntos, no vacíos y tales que $d(E, F) = 0$.
3. Da un ejemplo de dos subconjuntos $E, F \subset \mathbb{R}^2$ cerrados, disjuntos, no vacíos y tales que $d(E, F) = 0$.

Compacidad.

1. Demuestra que la intersección de un conjunto cerrado con un conjunto compacto es un conjunto compacto.
2. Demuestra que la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
3. Demuestra que todo conjunto compacto es acotado.
4. Sean K un conjunto compacto y $\varepsilon > 0$.
 - (a) Demuestra que hay un cubrimiento finito de K formado por bolas de radio ε .
 - (b) Demuestra que hay finitos $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que todo punto de K dista de alguno de los x_i en menos que ε .

5. Dados K y L subconjuntos compactos de X , demuestra que $K \cup L$ es compacto. Da un ejemplo de un conjunto no compacto que sea unión numerable de compactos.

Puntos de acumulación de conjuntos numerables.

Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $x_* \in X$, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, y $S := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si $d(x_n, x_*) \geq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces S es un conjunto infinito que no tiene puntos de acumulación (es decir, $S' = \emptyset$).
2. Si $d(x_n, x_*) \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces S es un conjunto infinito y x_* es su único punto de acumulación (es decir, $S' = \{x_*\}$).

Intervalos encajados.

1. Sean $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, intervalos cerrados, acotados, no vacíos, encajados (es decir, tales que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$). Demuestra que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b] \neq \emptyset,$$

donde $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ y $b := \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$.