UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION DE LA EVALUACION DE RECUPERACION

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521.128)

Problema 1 (15 Ptos) Usando coeficientes indeterminados o variación de parámetros, determine la solución general de la EDO:

$$y'' - 2y' - 3y = xe^{2x}.$$

Solucion: La solución de la EDO homogénea asociada es

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

Se propone la solución particular $y_p(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x}$. Además resulta que el wronskiano es $W = -4e^{2x}$, $c_1'(x) = -xe^{x}$, $c_2'(x) = xe^{5x}$.
Así,se obtiene:

$$c_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(x+1), \quad c_1(x) = -\frac{1}{12}e^{3x}(x - \frac{1}{3}).$$

Por lo tanto, la solución general, es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + (-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9})e^{2x}$$

Problema 2 (15 Ptos) Resuelva el siguiente PVI, usando el método de valores propios.

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} X(t); \qquad X(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:
Los autovalores resultan ser:

$$\lambda_1 = 1 \ ; \ \lambda_2 = 2 \ ; \ \lambda_3 = 3.$$

y los correspondientes autovectores son:

$$v_1 = (-2, 0, 1) \ ; \ v_2 = (0, 1, 0) \ ; \ v_3 = (0, 0, 1).$$

Así, obtenemos:

$$X_h(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\boldsymbol{X(0) = (-2,2,4)}$ sigue que $\boldsymbol{c_1 = 1}$, $\boldsymbol{c_2 = 2}$ y $\boldsymbol{c_3 = 3}$, finalmente:

$$X_h(t) = e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3 (15 Ptos) Resolver usando Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} 4y'' + 4y' + y &= e^{-t/2} + \delta(t-5), \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$

Solución:

Aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la EDO dada, y usando propiedad para la segunda derivada, obtenemos:

$$4s^2\mathcal{L}[y(t)](s) + 4s\mathcal{L}[y(t)](s) + \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})} + e^{-5s}.$$

$$(2s+1)^2\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})} + e^{-5s}, \quad \text{de donde}$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{4(s+\frac{1}{2})^3} + \frac{e^{-5s}}{4(s+\frac{1}{2})^2}. \quad \text{Así, obtenemos:}$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{2}} \cdot t^2 + \frac{u_5(t)}{4}e^{-\frac{1}{2}(t-5)}(t-5).$$

Problema 4 (15 Ptos) Considere la EDO:

$$x\,y'' - y' - xy = 0.$$

Utilice la mayor raíz de la ecuación índicial del método de Frobenius, para encontrar los cinco primeros términos de la solución correspondiente.

Solución: La ec. indicial es: $\alpha(\alpha-2) = 0$. Para $\alpha = 2$, obtenemos:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

de donde sigue que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+1} \text{ y además } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^n.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4} = 0.$$

De otra parte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+2};$$

y reeplazando en la igualdad anterior , obtenemos:

$$(2a_0x^2+6a_1x^3)-(2a_0x^2+3a_1x^3)+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^{n+2}=0.$$

De donde $a_1 = 0$ y además $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n(n+2)}$ (para $n2$).

Finalmente: $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0$, y $a_2 = \dfrac{a_0}{4\cdot 2}$, $a_4 = \dfrac{a_0}{6\cdot 4^2\cdot 2}$, $a_6 = \dfrac{a_0}{8\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2}$, $a_8 = \dfrac{a_0}{10\cdot 8^2\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2}$, $a_{10} = \dfrac{a_0}{12\cdot 10^2\cdot 8^2\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2}$.

Por lo tanto los cinco primeros terminos de la solución son:

$$a_0(x^2 + \frac{x^4}{4\cdot 2} + \frac{x^6}{6\cdot 4^2\cdot 2} + \frac{x^8}{10\cdot 8^2\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2} + \frac{x^{10}}{12\cdot 10^2\cdot 8^2\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2} + \cdots +$$

Finalmente $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$ con a_0 arbitrario.