Tarea 2a Parte - Análisis Funcional -

Prof. Vicente Vergara

06.01.2020

1.- Demostrar el Teorema de Riesz-Fréchet, esto es: Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $f \in \mathcal{H}'$. Entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Más aún $|f|_{\mathcal{H}'} = |y|_{\mathcal{H}}$.

2.- Suponga que $1 \leq p < \infty$. Si $p > 1$, sea $q = p/(p-1)$, y si $p = 1$ sea $q = \infty$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a = (a_n) \in l_q$ entonces para cualquier $x = (x_n) \in l_p$ la sucesión $(a_n x_n) \in l_1$ y

$$f_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x \in l_p,$$

define un funcional lineal $f_a \in (l_p)'$, con $|f_a|_{(l_p)'} = |a|_{l_q}$.

(b) Si $f \in (l_p)'$ entonces existe un único $a \in l_q$ tal que $f = f_a$.

(c) Usando (a) y (b), muestre que la función $T_p : l_q \to (l_p)'$ definida por $T_p(a) = f_a$, $a \in l_q$, es un isomorfismo isométrico.

3.- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $\mathcal{M}$ un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$. Si $f \in \mathcal{M}'$ muestre que existe $g \in \mathcal{H}'$ tal que $g(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathcal{M}$ y $|f| = |g|$.

4.- Sea X un espacio de Banach. Suponga que $V \subset X$ es un subespacio vectorial y existe una proyección acotada de X sobre V. Muestre que V es cerrado.

5.- Sea X un espacio de Banach y sea $T : X \to X'$ un operador lineal tal que $(Tx, x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Muestre que $T \in B(X, X')$.

6.- Sea X un espacio normado y sea $(x_n) \subset X$ una sucesión de Cauchy en X tal que $x_n \rightharpoonup 0$ (convergencia débil) cuando $n \to \infty$. Muestre que $x_n \to 0$ (convergencia fuerte) en X cuando $n \to \infty$.

7.- Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ un subconjunto compacto no vacío. Suponga que $(x_n) \subset C$ es una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$ en X $(n \to \infty)$. Muestre que $x_n \to x$ en X $(n \to \infty)$.

8.- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea (e_n) una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Muestre que $e_n \rightharpoonup 0$ en $\mathcal{H}$.

Fecha de entrega: 1 día antes del primer certamen.