Equivalencia entre Autómatas Finitos Deterministas y No Deterministas Aunque pueda parecer que existen muchos más lenguajes que son aceptados por autómatas no deterministas, es sorprendente entender que no es así. Ahora veremos que para todo lenguajes que es aceptado por un autómata no determinista existe un autómata determinista que lo acepta. Para ver esto haremos una construcción de un DFA a partir de un NFA, de tal forma que el DFA resultante acepta el mismo lenguaje que el NFA inicial.

Llamaremos *construcción de subconjuntos* a la siguiente construcción que crea un DFA a partir de un NFA.

Sea $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ un autómata finito no determinista. El objetivo de la construcción de subconjuntos es crear un DFA a partir de N. Sea $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ el DFA que construiremos. Para completar esta construcción debemos especificar cada una de las componentes de D. Como pueden ver, ya hay dos componentes especificadas. El alfabeto de D es Σ, el mismo alfabeto que tiene N. Además, el estado inicial de D, $\{q_0\}$, es el conjunto que contiene únicamente al estado inicial de N. El resto de los elementos de D se definen como sigue:

- Definiremos como Q_D al conjunto de potencia de Q_N, es decir, cada subconjunto de estados del conjunto de estados de N define un estado para D:
  $$Q_D := \{S : \ S \subseteq Q_N\}.$$
  Con esto, el estado inicial de D está bien definido ya que es un elemento del conjunto de estados de Q_D.

- El conjunto F_D de estados de aceptación para D será el conjunto de todos los subconjuntos de Q_N que contienen al menos un estado de aceptación de N. De esta forma:
  $$F_D := \{S \subseteq Q_N : \ S \cap F_N \neq \emptyset\}.$$

- La función de transición para D se define como sigue. Para cada $S \subseteq Q_N$ y para cada $a \in \Sigma$ definimos:
  $$\delta_D(S, a) := \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$
  Esto es, para calcular $\delta_D(S, a)$, debemos mirar todos los estados p en S de N, ver a qué conjunto de estados los lleva δ_N al ser evaluada en p y a, y tomar la unión de todos esos conjuntos.

Ejemplo Veamos un ejemplo de esta construcción aplicada al DFA que vimos en los apuntes pasados. La tabla de transición de este autómata (N en este ejemplo de la construcción) es la Tabla 5. La transformación nos da los siguientes elementos para D:

- $Q_D = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$.

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$->\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Table 6: Tabla de transición del DFA que se obtiene al aplicar la construcción de subconjuntos al NFA descrito en la Tabla 5.

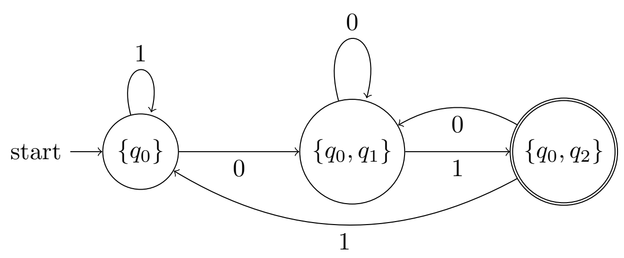

Figure 16: Grafo de transición del DFA que se obtiene mediante la construcción de subconjuntos a partir del NFA descrito en la Tabla 5.

- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- δ_D está descrito en la Tabla 6.
- El estado inicial de D es $\{q_0\}$.
- $F_D = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$.

Es importante que no todos los estados son alcanzables a partir del estado inicial de D. Al dibujar el grafo de transición de D podemos obviar esos estados. De esta forma el dibujo de D se muestra en la Figura 16.

Teorema 2.10. *Sea $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ el DFA que se obtiene a partir del NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, entonces $L(D) = L(N)$.*

Proof. Primero demostraremos que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w).$$

Para esto usaremos inducción en el largo de w. Notemos que cada una de estas dos funciones entrega como resultado un conjunto de estados en Q_N. Sin embargo $\hat{\delta}_D$ interpreta este conjunto como un estad0 de D (un elemento de Q_D), mientras que $\hat{\delta}_N$ lo interpreta simplemente como un subconjunto de Q_N.

La base de la inducción es el caso $|w| = 0$, es decir, el caso cuando la $w = \epsilon$. Por la definición de $\hat{\delta}$ para DFA y NFA tenemos que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}_N(q_0, \epsilon).$$

La hipótesis de inducción es entonces la siguiente. Para todo w tal que $|w| = n$ se cumple que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w).$$

El paso inductivo es el siguiente. Sea w una palabra de largo $n+1$. Podemos describir w como la concatenación de x, la palabra que contiene sus n primeros símbolos, con a, el último símbolo de w. De esta forma, $w = xa$. Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x).$$

Digamos que son iguales al conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

La definición de $\hat{\delta}$ para un NFA nos dice que:

$$\hat{\delta}_N(\{q_0\}, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a). \tag{2.1}$$

Por otro lado, la construcción de subconjuntos nos dice que:

$$\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a).$$

Ahora usemos esta última igualdad y el hecho que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ en la parte inductiva de la definición de $\hat{\delta}$ para DFA, lo que nos da

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x), a) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a). \tag{2.2}$$

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 demuestran que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$. Al observar que D y N aceptan una palabra w si y sólo si $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$ y $\hat{\delta}_N(q_0, w)$, respectivamente, contienen un estado en F_N, vemos que $L(D) = L(N)$ $\square$

Finalmente, podemos enunciar el siguiente teorema en términos de lenguajes.

Teorema 2.11. *Un lenguaje L es aceptado por un DFA si y sólo si L es aceptado por un NFA.*