UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Ayudantía 12: Soluciones Parciales

1. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean invariantes para las transformaciones lineales

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 2y, -3x + 11y)$

   b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (-y, x)$.

   Solución. Primero recordemos que dada una transformación lineal $L : V \to V$, un subespacio $S \subseteq V$ es L-invariante si $T(S) \subseteq S$. Para toda transformación lineal L hay dos subespacios L-invariantes triviales:

   - El nulo $\{\theta_V\}$, pues $L(\{\theta_V\}) = \{\theta_V\}$.
   - Todo el espacio V, pues $T(V) \subseteq V$

   Además,

   - $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)(= L(V))$ son espacios $L-$invariantes. Esto pues si $v \in \mathrm{Ker}(L)$, entonces $L(v) \in \mathrm{Ker}(L)$, pues $L(L(v)) = L(\theta_V) = \theta_V$, y para la imagen $L(L(V)) \subseteq L(V)$.
   - SI $W \subseteq V$ es invariante, entonces $L(W) \subseteq W$, luego $L(L(W)) \subseteq L(W)$, por lo que $L(W)$ también es $L-$invariantes. Podemos seguir así sucesivamente, obteniendo una cadena de espacios invariantes

     $$W \supseteq L(W) \supseteq L^2(W) \supseteq \cdots \supseteq L^n(W) \supseteq \cdots$$

     dado que W es de dimensión finita, esta cadena eventualmente se estabiliza (en el caso general no necesariamente).
   - Es fácil chequear que $\mathrm{Ker}(L^k)$ es $L-$invariante para todo $k \in \mathbb{N}$.
   - Si $\lambda \in \sigma(L)$, entonces $L(S_\lambda) \subseteq S_\lambda$, luego S_λ es $L-$invariante.
   - Los únicos espacios invariantes de dimensión uno son espacios propios.

   a) Sabemos que $\{\theta_{\mathbb{R}^2}\}$ es el espacio $T-$invariante de dimensión cero, y que $\mathbb{R}^2$ es el espacio $T-$invariante de dimensión 2. Además, sabemos que los únicos espacios $T-$invariantes de dimensión 1 son los espacios propios. Entonces, determinemos $\sigma(T)$.

   Sea $B = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, luego

   $$[T]_{BB} = \big([T(e_1)] \quad [T(e_2)]\big) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Además,

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \sigma([T]_{BB}) &\iff \det([T]_{BB} - \lambda I) = 0\\ &\iff (4-\lambda)(11-\lambda)+6 = 0\\ &\iff 50 - 15\lambda + \lambda^2 = 0\\ &\iff \lambda = \lambda_1 = 5 \quad \vee \quad \lambda = \lambda_2 = 10\end{aligned}$$

donde definimos $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 10$, y calculamos los subespacios propios respectivos

$$\begin{aligned}S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}([T]_{BB} - \lambda_1 I) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : v_1 = 2v_2 \right\}\\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}([T]_{BB} - \lambda_2 I) &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : 3v_1 = v_2 \right\}\\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle\end{aligned}$$

De donde concluimos que los espacios invariantes de dimensión 1 son S_{λ_1} y S_{λ_2}.

b) De manera análoga, calculamos los valores propios de S.

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(S) &\iff \lambda \in \sigma([S]_{BB})\\ &\iff \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I \right) = 0\\ &\iff \lambda^2 + 1 = 0\end{aligned}$$

Pero como la transformación S va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y el polinomio característico no tiene ceros sobre el cuerpo respectivo ($\mathbb{R}$), se concluye que S no tiene valores propios, y por lo tanto no existen espacios S-invariantes de dimensión uno.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ tal que su forma de Jordan asociada es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre el polinomio característico de A.

b) Encuentre los valores propios de A.

c) ¿Cuál es la multiplicidad geométrica y algebraica de estos valores propios?

d) ¿Cuántos espacios A-invariantes de dimensión 1 existen?

e) Encuentre la dimensión de todos los núcleos iterados de A.

Solución.

a) Notamos que J se compone de las siguientes cajas de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{-1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_2(0) & & & \\ & J_1(-1) & & \\ & & J_2(2) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

Luego, $p_\lambda(A) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

b) Del polinomio característico obtenemos que $\sigma(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

c) De las cajas de Jordan podemos inferir que

λ	Mult. algebraica	Mult. geométrica
-1	1	1
0	2	1
1	1	1
2	2	1

Mult.algebraica: Número de veces que aparece en la diagonal cada valor
Mult.geométrica: Cantidad de cajas de Jordan asociadas a ese valor

d) Existen 4 subespacios propios de dimensión 1, los cuales a su vez son los invariantes de dimensión 1.

e) La dimensión de los nucleos iterados están dados por el orden de las cajas de Jordan. En este caso tenemos que los nucleos iterados son 2, 1, 2 y 1 respectivamente.

3. Determine todas las formas posibles de Jordan para una matriz A cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (-1-\lambda)(3-\lambda)^2$

   Solución. Como el polinomio característico (minimal) tiene grado 3, las matrices deben ser de 3×3. Solo hay una caja de Jordan posible asociada al factor $(-1-\lambda)$, que es
   $$J_1(-1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$
   De manera similar, los bloques de Jordan posibles asociados al factor $(3-\lambda)$ son
   $$J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   $$J_1(3) = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$
   Pero la forma de Jordan debe tener los mismos valores propios (con sus respectivas multiplicidades algebraicas) que la matriz A, por lo que necesitamos que en la diagonal haya un -1 y dos 3. Así, tenemos
   $$J = \begin{pmatrix} J_1(-1) & \\ & J_2(3) \end{pmatrix}$$
   $$J = \begin{pmatrix} J_2(3) & \\ & J_1(-1) \end{pmatrix}$$
   $$J = \begin{pmatrix} J_1(-1) & & \\ & J_1(3) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix}$$
   $$J = \begin{pmatrix} J_1(3) & & \\ & J_1(-1) & \\ & & J_1(3) \end{pmatrix}$$
   $$J = \begin{pmatrix} J_1(3) & & \\ & J_1(3) & \\ & & J_1(-1) \end{pmatrix}$$

4. Encuentre la descomposición de Jordan de la siguiente matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución vista en la clase práctica.