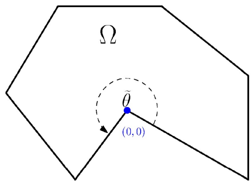
Problema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal cuyo mayor ángulo interior es $\tilde{\theta}$, como muestra la figura. Asuma que el vértice asociado a $\tilde{\theta}$ es el origen $(0,0)$. Considere la siguiente función en coordenadas polares: $u(\theta, r) = r^\gamma \alpha(\theta)$, donde $\gamma = \pi/\tilde{\theta}$ y $\alpha \in C^\infty(\Omega)$.*



a) *Demostrar que $\|D^m u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ si $\gamma + 1 > m$.*

b) *De $a)$ concluir que $u \in W_2^{\gamma+1-\varepsilon}(\Omega)$ $\forall \varepsilon \in [0, \gamma+1[$.*

c) *Si $\Omega =]-1,1[^2 \backslash [0,1]^2$, determine el espacio al cual pertenece u.*

d) *$\Omega =]0,1[^2$, determine el espacio al cual pertenece u.*

Demostración. *a)* Para $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\partial_r^m u(r,\theta) = r^{\gamma - m}\alpha(\theta)\xi(m)$$
$$\partial_\theta^m u(r,\theta) = r^\gamma \alpha^{(m)}(\theta)$$

donde $\xi(m) = \prod_{i=0}^{m-1}(\gamma - i)$. Considerando el cambio de variable $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, se tiene, por regla de la cadena

$$\partial_x u(x,y) = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}(\theta)\partial_\theta u + \cos(\theta)\partial_r u = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}(\theta) r^\gamma \alpha'(\theta) + \cos(\theta) r^{\gamma-1}\alpha(\theta)\xi(1) = \Lambda_{1,x}(\theta) r^{\gamma-1}$$
$$\partial_y u(x,y) = \frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta u + \mathrm{sen}(\theta)) r^\gamma \alpha'(\theta) = \frac{1}{r}\cos(\theta) r^\gamma \alpha'(\theta) + \mathrm{sen}(\theta) r^{\gamma-1}\alpha(\theta)\xi(1) = \Lambda_{1,y}(\theta) r^{\gamma-1}$$

Luego

$$\partial_{xx}^2 u(x,y) = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}(\theta)\partial_\theta\partial_x u + \cos(\theta)\partial_r\partial_x u = -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}(\theta)\Lambda_{1,x}'(\theta) r^{\gamma-1} + \cos(\theta)\Lambda_{1,x}(\theta)(\gamma-1) r^{\gamma-2} = \Lambda_{2,x}(\theta) r^{\gamma-2},$$
$$\partial_{yy}^2 u(x,y) = \frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta\partial_y u + \mathrm{sen}(\theta)\partial_r\partial_y u = \frac{1}{r}\cos(\theta)\Lambda_{1,y}'(\theta) r^{\gamma-1} + \mathrm{sen}(\theta)\Lambda_{1,y}(\theta)(\gamma-1) r^{\gamma-2} = \Lambda_{2,y}(\theta) r^{\gamma-2},$$
$$\partial_{xy}^2 u(x,y) = \frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta\partial_y u + \mathrm{sen}(\theta)\partial_r\partial_y u = \frac{1}{r}\cos(\theta)\Lambda_{1,y}'(\theta) r^{\gamma-1} + \mathrm{sen}(\theta)\Lambda_{1,y}(\theta)(\gamma-1) r^{\gamma-2} = \Lambda_{2,xy}(\theta) r^{\gamma-2}.$$

Derivando m veces, se obtiene

$$D^m u(x,y) = \Lambda_m(\theta) r^{\gamma - m}$$

donde $\Lambda_m \in C^\infty(0,\tilde{\theta})$, pues resulta del producto de funciones $C^\infty(0,\tilde{\theta})$. Por otro lado,

$$|J(r,\theta)| = \det\begin{bmatrix}\partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\,\mathrm{sen}^2(\theta) = r$$

Luego, por Teorema de Cambio de Variable

$$\begin{aligned}\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega D^m u(x,y) D^m u(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^R \int_0^{\tilde{\theta}} \Lambda^2(\theta) r^{2\gamma - 2m} r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_0^{\tilde{\theta}} \Lambda^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\int_0^R r^{2\gamma-2m+2}\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_0^{\tilde{\theta}} \Lambda^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\frac{R^{2(\gamma-m+1)}}{2(\gamma-m+1)}\end{aligned}$$

de lo anterior, se deduce que $\gamma - m + 1 > 0$, lo cual es equivalente a decir que $\gamma + 1 > m$.

b) Dado $\varepsilon \in [0, \gamma + 1[$, luego

$$0 \leq \varepsilon < \gamma + 1 \Longrightarrow -(\gamma + 1) < -\varepsilon \leq 0 \Longrightarrow 0 < \gamma + 1 - \varepsilon \leq \gamma + 1$$

Así, por lo visto en *a*) se tiene

$$\left\| D^{\gamma+1-\varepsilon} u \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty$$

Lo cual implica que $\|u\|_{W_2^{\gamma+1-\varepsilon}} < \infty$. Por tanto $u \in W_2^{\gamma+1-\varepsilon}$.

c) Si $\Omega =]-1, 1[^2 \backslash [0, 1]^2$ se tiene que $\tilde{\theta} = 2\pi$, luego $\gamma = \frac{1}{2}$. Con lo anterior y gracias a *b*) se tiene que $u \in W_2^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, donde $\varepsilon \in [0, 3/2[$.

c) Si $\Omega =]0, 1[^2$ se tiene que $\tilde{\theta} = \pi/2$, luego $\gamma = 2$. Con lo anterior y gracias a *b*) se tiene que $u \in W_2^{3-\varepsilon}(\Omega)$, donde $\varepsilon \in [0, 3[$.

□

Problema 2. *Considere un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera Lipschitz. Para $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, sea u_ψ la solución de la siguiente ecuación*

$$\begin{cases} -\Delta u_\psi + u_\psi = 0 \text{ en } \Omega \\ u_\psi = \psi \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

a) *Convierta (1) en un problema con condiciones de contorno homogéneas.*

b) *Establecer una formulación variacional del problema obtenido en a) y demostrar que posee solución única.*

c) *Mostrar que $\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ y concluir que $\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} = \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Recordar que*

$$\|u_\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{\{v \in H^1(\Omega):\ v|_{\partial\Omega} = \psi\}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demostración. *a*) Testeando la EDP en (1) con $v \in H^1(\Omega)$, se obtiene

$$-\int_\Omega \Delta u_\psi v + \int_\Omega u_\psi v = 0 \tag{2}$$

Haciendo integración por partes al primer termino que esta a la izquierda de a igualdad planteada en (2), se obtiene

$$-\int_\Omega \Delta u_\psi v = \int_\Omega \nabla u_\psi \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v. \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2)

$$\int_\Omega \nabla u_\psi \cdot \nabla v + \int_\Omega u_\psi v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v.$$

Con lo anterior, se deduce el problema débil

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_\psi \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \quad a(u_\psi, v) = G(v) \\ \text{para todo } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{4}$$

Donde $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ son una forma bilineal y un funcional definidos por:

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv \text{ y } G(v) = \int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v$$

respectivamente. Luego por teorema de descomposición ortogonal, al ser $H_0^1(\Omega)$ un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, se tiene que

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \left(H_0^1(\Omega)\right)^\perp \tag{5}$$

con esto la solución del problema débil (4), tiene la descomposición $u_\psi = u + u^\perp$, de aquí $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u^\perp \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^\perp$. De esta forma, el problema se reduce a encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que satisfaga un problema variacional, con esto en mente y notando que cuando $v \in H_0^1(\Omega)$

$$0 = G(v) = a(u_\psi, v) = a(u, v) + a(u^\perp, v)$$

se obtiene el problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \qquad a(u,v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{6}$$

donde $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal definido por

$$F(v) = -a(u^\perp, v) = -\langle u^\perp, v\rangle_{H^1(\Omega)} = 0$$

b) En lo que sigue se probará que (6) posee única solución. Para lograr esto, primero se observa que la forma bilineal a no es mas que el producto interior usual en $H^1(\Omega)$, ademas, dado que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, se tiene que es un espacio de Hilbert dotado con el producto interior inducido por $H^1(\Omega)$. Por otro lado F es un funcional lineal acotado, pues F es el funcional nulo. De esta forma, por teorema de representación de Riesz se deduce que existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = a(u,v) = F(v) = 0$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Con esto se concluye la existencia y unicidad de (6) y también que $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|F\| = 0$, por lo que $u = \theta$. Por tanto $u_\psi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^\perp$.

c) Sea $\Xi := \{v \in H^1(\Omega) : \ v|_{\partial\Omega} = \psi\}$. Dado $w \in \Xi$, por lo hecho en *b)* se deduce que $w = w_0 + u_\psi$ donde $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, esta descomposición es única gracias a (5). Luego,

$$\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w_0 + u_\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

como esto es valido para cualquier elemento de Ξ, se deduce que

$$\|u_\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{7}$$

Por otro lado, como $u_\psi \in \Xi$ se tiene por propiedad del ínfimo

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|u_\psi\|_{H^1(\Omega)}. \tag{8}$$

Finalmente, dado que (7) y (8) se cumplen, se concluye que

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|u_\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

□

Problema 3. *Mostrar que el espacio $\left(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$ es completo.*

Demostración. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ se existe un $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que $u_n|_{\partial\Omega} = \psi_n$. Con lo anterior se tiene que

$$\|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)} = \|\psi_n - \psi_m\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \xrightarrow{n,m} 0$$

Es decir, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior usual, se tiene que existe un $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n} 0$$

Luego por Teorema de Traza, existe un $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \psi$, de esta forma

$$\|\psi - \psi_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n} 0$$

Por lo que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en el espacio $\left(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$, concluyendo así que dicho espacio es completo. □