

Cap. 3: Principio de Inducción Matemática. Aritmética (divisibilidad)

Rommel Andrés Bustinza Pariona
e-mail: rbustinza at udec.cl

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

6 de junio de 2024



Sobre el conjunto de los números enteros \mathbb{Z}

Se recuerda que \mathbb{Z} está provisto de las operaciones binarias cerradas

- ADICIÓN $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tales que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \in \mathbb{Z}$.
- MULTIPLICACIÓN \cdot : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tales que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

Propiedades de $+$ y \cdot

- 1 $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x + (y + z) = (x + y) + z$, (asociatividad de $+$)
- 2 $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y = y + x$, (conmutatividad de $+$)
- 3 $\exists 0 \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : 0 + x = x$, (existencia del elemento neutro para $+$)
- 4 $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists (-x) \in \mathbb{Z} : x + (-x) = 0$, (existencia del elemento inverso para $+$)
- 5 $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, (\cdot es asociativa)
- 6 $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = y \cdot x$, (\cdot es conmutativa)
- 7 $\exists 1 \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : 1 \cdot x = x$, (existencia del elemento neutro para \cdot)
- 8 $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. (distributividad)
- 9 $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ (\mathbb{Z} no posee divisores de cero)

- DIFERENCIA $-$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tales que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a - b := a + (-b) \in \mathbb{Z}$.
- La DIVISIÓN en \mathbb{Z} no está definida (como operación binaria cerrada).
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a = b \Leftrightarrow a - b = 0$.



Relación de orden en \mathbb{Z}

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Se lee: “ a $\begin{cases} \text{es menor que} \\ \text{antecede a} \end{cases} b$ ”.

PROPIEDADES:

- 1 $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a < b \vee a = b \vee b < a$ (tricotomía).
- 2 $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a < b \rightarrow (\forall c \in \mathbb{Z} : a + c < b + c).$
- 3 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a < b \wedge 0 < c) \rightarrow ac < bc.$
- 4 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c.$

OTRAS RELACIONES DERIVADAS:

- $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leq b \Leftrightarrow (a < b \vee a = b).$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a > b \Leftrightarrow b < a.$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \geq b \Leftrightarrow (a > b \vee a = b).$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = b \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \geq b).$

El Principio del Buen Orden (Teorema de Zermelo)

“Todo subconjunto no vacío A de \mathbb{Z}_0^+ , posee un primer elemento”.

Es decir, si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}_0^+$, entonces $\exists x \in A : \forall y \in A : x \leq y.$

Aplicaciones de Principio del Buen Orden (PBO)

PROPIEDAD: El primer elemento de $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}_0^+$ es **ÚNICO**.

Proposición 1

$\forall m \in \mathbb{Z}^+ : m \geq 1$.

Demostración

Por reducción al absurdo. Supongamos que la PROPOSICIÓN ES FALSA, es decir $\exists m \in \mathbb{Z}^+ : 0 < m < 1$. Esto permite definir el conjunto no vacío (¿por qué?)

$$S := \{b \in \mathbb{Z}^+ : 0 < b < 1\} \subseteq \mathbb{Z}^+.$$

Invocando el PBO, S admite primer elemento $x \in S$, tal que $\forall y \in S : x \leq y$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 \cdot x < x \cdot x \quad \wedge \quad x \cdot x < x \cdot 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \quad \wedge \quad x^2 < x \\ &\Rightarrow 0 < x^2 < x < 1. \end{aligned}$$

De esta manera, resulta que $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{Z}^+$, pertenece a S , es distinto de x y antecede a x . Esto último contradice el hecho que x es primer elemento de S . En consecuencia, se cumple $\forall m \in \mathbb{Z}^+ : m \geq 1$, y concluye la demostración. \square

Principio de Inducción Matemática (PIM)

Herramienta que permite validar funciones proposicionales sobre $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ o algún subconjunto de éste, de cardinalidad infinita.

PROBLEMA TIPO 1: Demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} : q(m)$. Es recomendable definir el llamado CONJUNTO DE VALIDEZ de q , $S := \{m \in \mathbb{N} : q(m)\}$. Así, el objetivo es probar que S es un CONJUNTO INDUCTIVO, es decir $S = \mathbb{N}$.

Proposición 2 (PIM-primer forma)

Considerando el conjunto S anterior, si se verifica:

- $1 \in S$, es decir $q(1)$ es VERDADERO,
- $\ell \in S \Rightarrow \ell + 1 \in S$,

entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración

Por reducción al absurdo, suponemos que $S \neq \mathbb{N}$, lo cual significa que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Esto asegura $\exists a \in \mathbb{N} : a \notin S$. Así, $a \in S^c$, lo cual permite introducir

$T := S^c := \{m \in \mathbb{N} : \sim q(m)\} \subsetneq \mathbb{N}$, el cual es no vacío (¿por qué?). Luego, por el PBO, T admite primer elemento. Sea $x \in T$ su primer elemento. Como $1 \in S$, entonces $x \geq 2$. Luego, $x - 1 \geq 1$. En vista que $x - 1, x \in \mathbb{N}$ y $x - 1$ antecede a x , se debe cumplir $x - 1 \in S$ (¿por qué?). Por HIPÓTESIS, $x = (x - 1) + 1 \in S$ ($\rightarrow \leftarrow$). De esta forma, se concluye que $S = \mathbb{N}$, y concluye la demostración. \square

EJEMPLO 1: Demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} : 10^{m+1} - 9m - 10$ es divisible por 81.

Sea el conjunto de validez $S := \{m \in \mathbb{N} : q(m)\}$, donde $q(m) : 10^{m+1} - 9m - 10 \stackrel{\circ}{=} 81$.

Veamos que $1 \in S \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{N} \wedge q(1)$ es V.

Es claro que $1 \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que $q(1)$ es verdadero. En efecto

$$10^{1+1} - 9(1) - 10 = 100 - 19 = 81 = (1)(81), \text{ el cual es múltiplo de } 81 \Rightarrow q(1) \text{ es V.}$$

De esta manera, $1 \in S$.

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN (H.I.): $m \in S \Leftrightarrow m \in \mathbb{N} \wedge q(m)$ es V.

TESIS DE INDUCCIÓN: $m+1 \in S \Leftrightarrow m+1 \in \mathbb{N} \wedge q(m+1)$ es V.

En vista que $m \in \mathbb{N}$, se infiere que $m+1 \in \mathbb{N}$. Resta verificar que se cumple $q(m+1)$.

Tenemos

$$\begin{aligned} 10^{(m+1)+1} - 9(m+1) - 10 &= 10(10^{m+1}) - 9(m+1) - 10 \\ &= 10(10^{m+1} - 9m - 10 + 9m + 10) - 9(m+1) - 10 \\ &= 10(10^{m+1} - 9m - 10) + 10(9m + 10) - 9m - 19 \\ &= 10(10^{m+1} - 9m - 10) + 81m + 81. \end{aligned}$$

Ahora por H.I., $q(m)$ es V, lo cual implica que $10^{m+1} - 9m - 10 \stackrel{\circ}{=} 81$. Así,

$\exists k \in \mathbb{Z} : 10^{m+1} - 9m - 10 = 81k$. De esta manera, resulta

$$10^{(m+1)+1} - 9(m+1) - 10 = 10(81k) + 81m + 81 = 81 \overbrace{(10k + m + 1)}^{\in \mathbb{Z}} \stackrel{\circ}{=} 81.$$

Así, $q(m+1)$ es V, con lo cual $m+1 \in S$. Finalmente, aplicando el PIM (primera

forma), se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir $\forall m \in \mathbb{N} : 10^{m+1} - 9m - 10 \stackrel{\circ}{=} 81$.



EJEMPLO 2: Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ impar. Demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} : 2^{m+1}$ divide a $p^{2^m} - 1$.
 Sea el conjunto de validez $S := \{m \in \mathbb{N} : q(m)\}$, donde $q(m) : 2^{m+1}$ divide a $p^{2^m} - 1$.
 Otra forma equivalente de definir la proposición abierta es
 $q(m) : p^{2^m} - 1$ es múltiplo de 2^{m+1} .

Veamos que $1 \in S \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{N} \wedge q(1)$ es V.

Es claro que $1 \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que $q(1)$ es verdadero. En efecto

$$p^{2^1} - 1 = p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1). \quad (1)$$

Como $p \in \mathbb{N}$ es impar, $\exists k \in \mathbb{Z}^+ : p = 2k - 1$. Así, (1) conduce a

$$p^{2^1} - 1 = (2k)((2k - 1) - 1) = 2^2 k(k - 1) = \underbrace{k(k - 1)}_{\in \mathbb{Z}} 2^{1+1} \Rightarrow q(1) \text{ es V} \Rightarrow 1 \in S$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN (H.I.): $m \in S \Leftrightarrow m \in \mathbb{N} \wedge q(m)$ es V.

TESIS DE INDUCCIÓN: $m + 1 \in S \Leftrightarrow m + 1 \in \mathbb{N} \wedge q(m + 1)$ es V.

En vista que $m \in \mathbb{N}$, se infiere que $m + 1 \in \mathbb{N}$. Resta verificar que se cumple $q(m + 1)$.

Tenemos

$$p^{2^{m+1}} - 1 = p^{2^m \cdot 2} - 1 = (p^{2^m})^2 - 1^2 = (p^{2^m} + 1)(p^{2^m} - 1) \quad (2)$$

Ahora por H.I., $q(m)$ es V, lo cual implica que $p^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot k$. Así,
 $\exists k \in \mathbb{Z} : p^{2^m} - 1 = k \cdot 2^{m+1}$.



De esta manera, de (2) resulta

$$\begin{aligned} p^{2^{m+1}} - 1 &= (k \cdot 2^{m+1} + 1 + 1)k \cdot 2^{m+1} = k \cdot 2^{m+1} \cdot 2 \cdot (k \cdot 2^m + 1) \\ &= \underbrace{k(k \cdot 2^m + 1)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 2^{(m+1)+1} \Rightarrow q(m+1) \text{ es } V \Rightarrow m+1 \in S. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el PIM (primera forma), se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir

$\forall m \in \mathbb{N} : p^{2^m} - 1$ es múltiplo de 2^{m+1} , el cual es equivalente a decir

$\forall m \in \mathbb{N} : 2^{m+1}$ divide a $p^{2^m} - 1$. □

Proposición 3 (PIM-segunda forma) \Leftrightarrow (PIM-primera forma)

Considerando el conjunto S anterior, si se verifica:

- $1 \in S$, es decir $q(1)$ es VERDADERO,
- Si $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es tal que $\forall m \in \mathbb{N} \cap [1, \ell) : m \in S$, entonces $\ell \in S$,

se concluye que $S = \mathbb{N}$.

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, lo cual nos dice que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Definimos ahora el complemento de S , $T := S^c := \{m \in \mathbb{N} : \sim q(m)\} \subsetneq \mathbb{N}$, el cual es no vacío (¿por qué?). Luego, por el PBO, T admite primer elemento. Sea $x \in T$ su primer elemento. Como $1 \in S$, entonces $x > 1$. Esto implica que $\forall m \in \mathbb{N} \cap [1, x) : m \in S$. Luego, por HIPÓTESIS, $x \in S$ ($\rightarrow \leftarrow$). De esta forma, se concluye que $S = \mathbb{N}$, y concluye la demostración. □

EJEMPLO 3: Demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} : m^2 - 2m - 1$ no es divisible por 3.

Sea el conjunto de validez $S := \{m \in \mathbb{N} : q(m)\}$, donde $q(m) : m^2 - 2m - 1 \neq 3$.

Veamos que $1 \in S \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{N} \wedge q(1)$ es V. Tenemos

$$1 \in \mathbb{N} \wedge 1^2 - 2(1) - 1 = -2 \neq 3 \Rightarrow q(1) \text{ es V} \Rightarrow 1 \in S,$$

$$2 \in \mathbb{N} \wedge 2^2 - 2(2) - 1 = -1 \neq 3 \Rightarrow q(2) \text{ es V} \Rightarrow 2 \in S,$$

$$3 \in \mathbb{N} \wedge 3^2 - 2(3) - 1 = 2 \neq 3 \Rightarrow q(3) \text{ es V} \Rightarrow 3 \in S.$$

Sea ahora $\ell \in \mathbb{N}$, con $\ell > 3$. **HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN (H.I.): $\forall m \in \mathbb{N} \cap [1, \ell) : m \in S$.**

TESIS DE INDUCCIÓN: $\ell \in S$. POR REDUCCIÓN AL ABSURDO, suponemos que $\ell \notin S$, es

decir $q(\ell)$ es F. En otras palabras: $\ell^2 - 2\ell - 1 = 3$.

Por otro lado, sea $\tilde{m} := \ell - 3 \in \mathbb{Z}$, el cual satisface: $\tilde{m} \geq 1 \wedge \tilde{m} < \ell$. Luego, como

$\tilde{m} \in \mathbb{N} \cap [1, \ell)$, se debe cumplir (por H.I.) que $q(\tilde{m})$ es V. Es decir $\tilde{m}^2 - 2\tilde{m} - 1 \neq 3$. Pero

$$\begin{aligned}\tilde{m}^2 - 2\tilde{m} - 1 &= (\ell - 3)^2 - 2(\ell - 3) - 1 = (\ell^2 - 6\ell + 9) - 2\ell + 6 - 1 \\ &= (\ell^2 - 2\ell - 1) - 6\ell + 15 = (\ell^2 - 2\ell - 1) - 3(2\ell - 5).\end{aligned}$$

Como $\ell^2 - 2\ell - 1 = 3$, $\exists a \in \mathbb{Z} : \ell^2 - 2\ell - 1 = 3a$. De esta manera, se tiene

$$\tilde{m}^2 - 2\tilde{m} - 1 = 3a - 3(2\ell - 5) = 3\underbrace{(a - 2\ell + 5)}_{\in \mathbb{Z}} = 3 \Rightarrow q(\tilde{m}) \text{ es F } (\rightarrow \leftarrow)$$

De esta forma $\ell \in S$, y se valida la **TESIS DE INDUCCIÓN**. Luego, aplicando el PIM (segunda forma), se concluye $S = \mathbb{N}$, es decir $\forall m \in \mathbb{N} : m^2 - 2m - 1 \neq 3$.



PIM Generalizado

Sea $m_0 \in \mathbb{N}$. Se desea probar ahora: $\forall m \in \mathbb{N} : m \geq m_0 \rightarrow q(m)$. Para este fin definimos $\mathbb{A} := \mathbb{N} \cap [m_0, +\infty)$, y el conjunto de validez $S := \{m \in \mathbb{A} : q(m)\}$. El objetivo es probar que $S = \mathbb{A}$.

Proposición 4: (PIM-tercera forma)

Considerando el conjunto S anterior, si se verifica:

- $m_0 \in S$,
- $\forall \ell \in \mathbb{A} : \ell \in S \rightarrow \ell + 1 \in S$,

entonces $S = \mathbb{N} \cap [m_0, +\infty)$.

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que $S \neq \mathbb{A}$. Esto asegura que $\exists y_0 \in \mathbb{A}$ tal que $y_0 \notin S$. Esto permite definir $T := \{m \in \mathbb{A} : \sim q(m)\} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, el cual es no vacío (¿por qué?). Por el PBO, T posee primer elemento, al cual denotamos por $x \in T$. Como $m_0 \in S$, se tiene que $x > m_0$. De esta manera, resulta $m_0 \leq x - 1 < x$, de donde se infiere que $x - 1 \in S$ (¿por qué?). Por HIPÓTESIS, se deduce que $x = (x - 1) + 1 \in S$ ($\rightarrow \leftarrow$). De esta forma, se concluye que $S = \mathbb{A}$, y concluye la demostración. \square

EJEMPLO 4: Demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} \cap [5, +\infty) : 2^m > m^2$.

HINT: Primero demostrar que $\forall m \in \mathbb{N} \cap [3, +\infty) : 2m + 1 < m^2$.



Proposición 5 (PIM-cuarta forma) \Leftrightarrow (PIM-tercera forma)

Considerando los conjuntos \mathbb{A} , S anteriores, si se verifica:

- $m_0 \in S$, es decir $q(m_0)$ es VERDADERO,
- Si $\ell \in \mathbb{A} \setminus \{m_0\}$ es tal que $\forall m \in \mathbb{A} \cap [m_0, \ell) : m \in S$, entonces $\ell \in S$,

se infiere que $S = \mathbb{A}$.

EJEMPLO 5: Demostrar que todo entero $m > 7$, se puede expresar de la forma $m = 3a + 5b$, siendo a, b números enteros no negativos. Es decir:

$$\forall m \in \mathbb{N} \cap [8, +\infty) : \exists (a, b) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ : m = 3a + 5b.$$



Sumatoria

Sea $\{a_j\}_{j=r}^m \subseteq \mathbb{K}$, siendo \mathbb{K} un conjunto de escalares (reales, ... complejos ...), $r, m \in \mathbb{Z}$, con $r \leq m$. Para abreviar la expresión de la adición de estos escalares, se suele emplear el símbolo SUMATORIA, como sigue

$$\sum_{j=r}^m a_j := a_r + \cdots + a_m \quad (\text{Usualmente: } r = 0 \quad \vee \quad r = 1).$$

Se lee: “La sumatoria de los a_j , desde $j = r$ hasta $j = m$.”

EJEMPLOS:

- ① La suma de los $m \in \mathbb{N}$ primeros números naturales se puede denotar como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \sum_{j=1}^m j \quad (\text{aquí } a_j := j).$$

- ② La suma de los cuadrados de los $m \in \mathbb{N}$ primeros números naturales se denota como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \sum_{j=1}^m j^2 \quad (\text{aquí } a_j := j^2).$$

- ③ Para la suma de los $m \in \mathbb{N}$ primeros términos de una progresión geométrica de razón $q \neq 0$ y primer elemento $b \in \mathbb{R}$, resulta

$$b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{m-1} = \sum_{j=1}^m bq^{j-1} \quad (\text{aquí } a_j := bq^{j-1}).$$



PROPIEDADES (SALVO LA PRIMERA, SE DEMUESTRAN POR PIM):

- ① En una sumatoria, el índice es una “variable muda”: $\sum_{j=1}^m a_j = \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{\ell=1}^m a_\ell$.
- ② Una suma se puede expresar de diversas formas, usando para ello “sumas parciales”

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m a_j &= \sum_{j=1}^{m-1} a_j + a_m = a_1 + \sum_{j=2}^m a_j = \sum_{j=1}^{\ell} a_j + \sum_{\ell+1}^m a_j, \quad \text{donde } 1 < \ell < m \\ &= \sum_{j=1}^{\ell-1} a_j + a_\ell + \sum_{j=\ell+1}^m a_j, \quad \text{donde } 1 < \ell < m.\end{aligned}$$

- ③ $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=1}^m b_j$.
- ④ $\forall c \in \mathbb{K} : \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m c = c m$. Se recalca que la constante c no depende de j .
- ⑤ $\forall c \in \mathbb{K} : \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m c a_j = c \sum_{j=1}^m a_j$. De nuevo, la constante c no depende de j .
- ⑥ PROPIEDAD TELESCÓPICA: $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m (a_j - a_{j-1}) = a_m - a_0$.

$$\text{SEGUNDA FORMA: } \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m (a_{j+1} - a_j) = a_{m+1} - a_1.$$



$$\textcircled{1} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

$$\textcircled{3} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^m k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2.$$



Sea $\{a_j\}_{j=r}^m \subseteq \mathbb{K}$, siendo \mathbb{K} un conjunto de escalares (reales, ... complejos ...), $r, m \in \mathbb{Z}$, con $r \leq m$. Para abreviar la expresión del producto de estos escalares, se suele emplear el símbolo PRODUCTORIA, como sigue

$$\prod_{j=r}^m a_j := a_r \cdots a_m \quad (\text{Usualmente: } r = 0 \quad \vee \quad r = 1).$$

Se lee: “La productoria de los a_j , desde $j = r$ hasta $j = m$.”

EJEMPLO NOTABLE: La productoria de los $m \in \mathbb{N}$ primeros números naturales, se expresa como

$$\prod_{k=1}^m k = 1 \cdot 2 \cdots m.$$

Este producto se conoce como **FACTORIAL DE m** , y tiene notación propia: $m!$
Por convención $0! = 1$.



PROPIEDADES (SALVO LA PRIMERA, SE DEMUESTRAN POR PIM):

- ① En una productoria, el índice de la productoria es una “variable muda”, es decir puede cambiarse por cualquier “letra” donde aparezca.

$$\prod_{j=1}^m a_j = \prod_{k=1}^m a_k = \prod_{\ell=1}^m a_\ell = a_1 \cdots a_m.$$

- ② Una productoria se puede expresar de diversas formas, usando para ello “productos parciales”

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m a_j &= \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_j \right) \cdot a_m = a_1 \cdot \left(\prod_{j=2}^m a_j \right) = \left(\prod_{j=1}^{\ell} a_j \right) \cdot \left(\prod_{j=\ell+1}^m a_j \right), \quad \text{donde } 1 < \ell < m \\ &= \left(\prod_{j=1}^{\ell-1} a_j \right) \cdot a_\ell \cdot \left(\prod_{j=\ell+1}^m a_j \right), \quad \text{donde } 1 < \ell < m. \end{aligned}$$

- ③ $\forall c \in \mathbb{K} : \forall m \in \mathbb{N} : \prod_{j=1}^m c = c^m$. Se recalca que la constante c no depende de j .

- ④ $\forall c \in \mathbb{K} : \forall m \in \mathbb{N} : \prod_{j=1}^m (c a_j) = c^m \prod_{j=1}^m a_j$. La constante c no depende de j .

- ⑤ PROPIEDAD TELESCÓPICA: $\forall m \in \mathbb{N} : \prod_{j=1}^m \left(\frac{a_j}{a_{j-1}} \right) = \frac{a_m}{a_0}$, siendo $\{a_j\} \subseteq \mathbb{K} \setminus \{0\}$.



El algoritmo de división de Euclides

Proposición 6 (Algoritmo de la división de Euclides - versión clásica)

$\forall (a, d) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}^+ : \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = dq + r, \text{ con } 0 \leq r < d.$

Demostración (Existencia)

Sean $a \in \mathbb{Z}_0^+, d \in \mathbb{Z}^+$ fijos, pero arbitrarios. Consideremos los casos:

CASO 1: $a = 0$. Aquí consideramos $q = 0, r = 0 < d$.

CASO 2: $a = d = 1$. Tomamos $q = 1$ y $r = 0 < d$.

CASO 3: $ad > 1$. Definimos el conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{Z}_0^+ \mid \exists m \in \mathbb{Z}_0^+ : x = a - dm\} \subseteq \mathbb{Z}_0^+,$$

el cual es no vacío, pues $a = a - d \cdot 0 \in S$. Luego, por el Principio del Buen Orden, S tiene un primer elemento, al cual denotaremos por r . Dado que $r \in S$, $\exists q \in \mathbb{Z}_0^+ : r = a - dq$. Así, $a = dq + r$, con $r \geq 0$.

Resta probar que $r < d$: Por REDUCCIÓN AL ABSURDO, suponemos que $r \geq d$. Luego, $\tilde{r} := r - d \geq 0$. Además, en vista que $d > 0$, resulta $\tilde{r} < r$. Por otro lado,

$$\tilde{r} = a - dq - d = a - d(q+1) < r \stackrel{(\tilde{m}:=q+1 \in \mathbb{Z}_0^+)}{\Rightarrow} \tilde{r} \in S \quad \wedge \quad \tilde{r} < r.$$

De esta forma, $\tilde{r} \in S$ antecede (en forma estricta) al primer elemento de S ($\rightarrow \leftarrow$). Así, se concluye que $r < d$. □

... Demostración (Unicidad)

Por REDUCCIÓN AL ABSURDO, supongamos que $\exists q, \tilde{q}, r, \tilde{r} \in \mathbb{Z}^+$, con $0 \leq r, \tilde{r} < d$, tales que $a = dq + r = d\tilde{q} + \tilde{r}$. Esto conduce a

$$dq + r = d\tilde{q} + \tilde{r} \Rightarrow d(q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r. \quad (3)$$

Por la TRICOTOMÍA EN \mathbb{Z} , puede suceder: $\tilde{r} > r \quad \vee \quad r > \tilde{r} \quad \vee \quad \tilde{r} = r$.

Analizando cada caso (para concluir que $\tilde{r} = r$):

- Caso $\tilde{r} > r$. De (3), se tiene $d(q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r > 0$. Como $d > 0$, resulta $q - \tilde{q} \in \mathbb{N}$. Luego, $q - \tilde{q} \geq 1$, y por tanto $d = d \cdot 1 \leq d(q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r \stackrel{(r \geq 0)}{\leq} \tilde{r} < d$. Se infiere así que $d < d$ ($\rightarrow \leftarrow$).
- Caso $\tilde{r} < r$. De (3), se tiene (luego de multiplicar por -1): $d(\tilde{q} - q) = r - \tilde{r} > 0$. Razonando como en el caso anterior, se llega también a una contradicción ($d < d$).
- Luego, por Descartes (gracias a la tricotomía de los números enteros), se concluye que $\tilde{r} = r$.

Así, de (3) se infiere que $q = \tilde{q}$, y concluimos la unicidad. □

El resultado anterior puede generalizarse a todo \mathbb{Z}

Proposición 7 (Algoritmo de la división de Euclides - versión generalizada)

$\forall (a, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a = dq + r, \text{ con } 0 \leq r < |d|.$

Definición:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. Se dice que $\begin{cases} b \text{ divide a } a \\ b \text{ es un factor/divisor de } a \end{cases}$ si $\exists c \in \mathbb{Z}$ (necesariamente único) tal que $a = bc$.

NOTACIÓN: $b \mid a$.

OBSERVACIÓN: $b \mid a$ también se puede leer como: “ a es divisible por b ”, o “ a es un múltiplo de b ”.

Por ejemplo: $3 \mid 6$, pero $3 \nmid 7$. También, $-2 \mid 6$, $5 \mid -45$, $-4 \mid -48$.

Proposición 8 (Primeras propiedades)

- 1 $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a \mid a$, pues $\exists 1 \in \mathbb{Z} : a = a \cdot 1$ (factor único).
- 2 $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a \mid 0$.
- 3 $\forall a \in \mathbb{Z} : 1 \mid a \wedge -1 \mid a$, pues $a = 1 \cdot a = (-1) \cdot (-a)$. Se dice que 1 y -1 son divisores universales.
- 4 $\forall (a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 : \forall c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$.
- 5 $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : \forall d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (d \mid (a + b) \wedge d \mid a) \Rightarrow d \mid b$.
- 6 $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : b \mid a \Leftrightarrow (-b) \mid a \Leftrightarrow b \mid (-a) \Leftrightarrow (-b) \mid (-a)$.

OBSERVACIÓN: La última propiedad nos dice que para cuestiones de divisibilidad, podemos ignorar el signo de los números involucrados.

Proposición 9 (Más propiedades)

- 7 $\forall (a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 : b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|.$
- 8 $\forall (a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 : b \mid a \wedge a \mid b \Rightarrow |b| = |a|.$
- 9 $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow (c \mid (a + b) \wedge c \mid (a - b)).$

Definición: Máximo Común Divisor (MCD)

Considere el conjunto $C := \{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z}$. Se dice que $d \in \mathbb{Z}^+$ es **MÁXIMO COMÚN DIVISOR** de a_1, \dots, a_m , si verifica las condiciones:

- $\forall j \in \{1, \dots, m\} : d \mid a_j,$
- Si $\tilde{d} \in \mathbb{Z}^+$ es otro número tal que $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \tilde{d} \mid a_j$, entonces $\tilde{d} \mid d$.

Es decir, el MCD de $\{a_j\}_{j=1}^m$ es el mayor entero positivo que divide a todos los números $\{a_j\}_{j=1}^m$.

NOTACIÓN: $d := \text{mcd}(a_1, \dots, a_m).$

OBSERVACIÓN: El MCD de un conjunto de números es único.

En efecto, si d, \tilde{d} son $\text{mcd}(a_1, \dots, a_m)$, resulta $\tilde{d} \mid d \wedge d \mid \tilde{d}$. Luego, por **PROPOSICIÓN 9**

(**PROPIEDAD 8**): $|d| = |\tilde{d}|$. Como el mcd es positivo, se concluye $\tilde{d} = d$.

EJEMPLO: $\text{mcd}(12, 18, 30) = 6$; $\text{mcd}(7, 13, 27, 100) = 1$.



Lema de Bézout (Identidad de Bézout) (versión clásica)

Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y sea $d := \text{mcd}(a, b)$. Entonces $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = d$.

Demostración

Definimos el conjunto de las combinaciones lineales enteras de a y b :

$$S := \{z \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : z = ax + by\} \subseteq \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}_0^+,$$

el cual es no vacío pues $z = |a| \in S$ (para $x = 1, y = 0$, si $a > 0$; $x = -1, y = 0$, si $a < 0$). Por el PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN, S posee primer elemento, al que denotaremos por d . Como $d \in S$, $\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 : d = ax_0 + by_0$.

RESTA PROBAR QUE $d = \text{mcd}(a, b)$. Para ello:

- Veamos que $d \mid a$. En efecto, por el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN DE EUCLIDES, $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$, con $0 \leq r < d$, tales que $a = qd + r$. Notamos que $0 \leq r = a - qd = a - q(ax_0 + by_0) = (1 - qx_0)a + (-qy_0)b$. En vista que $1 - qx_0, -qy_0 \in \mathbb{Z}$, se infiere que $r \in S \cup \{0\}$. Pero, $r \notin S$, pues sino r sería el primer elemento de S ($r < d$). En consecuencia, $r = 0$ y así, $d \mid a$.
- Veamos que $d \mid b$. (invocar argumentos análogos a los dados en el caso anterior).
- Sea $\tilde{d} \in \mathbb{Z}^+$ otro divisor común de a y de b . Esto asegura la existencia de $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} : a = \alpha\tilde{d}$ y $b = \beta\tilde{d}$. Luego, $d = ax_0 + by_0 = \alpha\tilde{d}x_0 + \beta\tilde{d}y_0 = \tilde{d}(\alpha x_0 + \beta y_0)$. En vista que $\alpha x_0 + \beta y_0 \in \mathbb{Z}$, se infiere que $\tilde{d} \mid d$.

Finalmente, se concluye que $d = \text{mcd}(a, b)$. □

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(12, 42) &= 6 = 12(-3) + 42(2) \\ &= 12(4) + 42(-1) \\ &= 12(11) + 42(-3) \\ &= 12(18) + 42(-5) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Lema de Bézout (Identidad de Bézout) (versión generalizada)

Sean $\{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y $d := \text{mcd}(a_1, \dots, a_m)$. Entonces $\exists \{x_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z} : \sum_{j=1}^m a_j x_j = d$.

Proposición 10

$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z}^+ : b \mid a \Rightarrow b = \text{mcd}(a, b)$.

Proposición 11

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. Considere $q, r \in \mathbb{Z}$ el cociente y resto (respectivamente) que resulta de aplicar el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN DE EUCLIDES a a y b : $a = bq + r$. Entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.

Demostración

Sea $d = \text{mcd}(a, b)$. Probaremos que $d = \text{mcd}(b, r)$. Tenemos

- $d \mid a \wedge d \mid b$. Luego, $d \mid (a - bq)$, es decir $d \mid r$. Recordar también que $d \mid b$.
- Sea $\tilde{d} \in \mathbb{Z}^+$ con $\tilde{d} \mid b \wedge \tilde{d} \mid r$. Así, $\tilde{d} \mid (bq + r)$, es decir $\tilde{d} \mid a$. Como $\tilde{d} \mid b$, resulta $\tilde{d} \mid d$.

De esta manera, se concluye que $d = \text{mcd}(b, r)$. \square

Proposición 12 (Algoritmo del MCD) (Algoritmo de Euclides)

Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, con $a > b$ y b no es factor de a . Sean

$$(q_1, r_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+ : a = bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < b$$

$$(q_2, r_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+ : b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$(q_3, r_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+ : r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

.....

$$(q_m, r_m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+ : r_{m-2} = r_{m-1}q_m + r_m, \quad 0 < r_m < r_{m-1}$$

$$(q_{m+1}, r_{m+1}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+ : r_{m-1} = r_mq_{m+1}, \quad (r_{m+1} = 0).$$

Entonces $r_m = \text{mcd}(a, b)$.

PROOF: Invocando la Proposición 11 reiteradamente, y la Proposición 10 al final, resulta $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r_1) = \text{mcd}(r_1, r_2) = \cdots = \text{mcd}(r_{m-1}, r_m) = r_m$. \square



OBSERVACIÓN: Del ALGORITMO DEL MCD, se desprende que los residuos inducidos $\{r_j\}$ forman una sucesión estrictamente decreciente en \mathbb{Z}_0^+ , por lo que su último término es CERO. Esto asegura que este algoritmo siempre termina en un número finito de pasos.

Ejemplo: Determinar $mcd(2024, 1972)$.

Aplicando el ALGORITMO DEL MCD resulta

$$2024 = (1972)(1) + 52 \quad (4)$$

$$1972 = (52)(37) + 48 \quad (5)$$

$$52 = (48)(1) + 4 \quad (6)$$

$$48 = (4)(12) + 0 \quad (7)$$

De donde se deduce que $mcd(2024, 1972) = 4$.

Notar que los residuos generados son: $52 > 48 > 4 > 0$.

Ahora determinemos una combinación lineal entera de $\{2024, 1972\}$, que nos de su MCD.

Del paso (6), tenemos $4 = 52 - (48)(1)$.

Ahora, eliminamos 48 del paso (5), y reemplazamos en la expresión anterior. Nos queda

$$4 = 52 - (1972 - (52)(37))(1) = (1972)(-1) + (52)(38) \quad (8)$$

Ahora eliminamos 52 del paso (4). Resulta

$$4 = (1972)(-1) + (2024 - (1972)(1))(38) = (2024)(38) + (1972)(-39)$$

$$\Rightarrow 2024(38) + 1972(-39) = 4.$$

Proposición 13

$\forall c \in \mathbb{N} : \forall a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \text{mcd}(ca, cb) = c \cdot \text{mcd}(a, b).$

PROOF: Consecuencia inmediata de la PROPOSICIÓN 12 (multiplicar todo por c). \square

Proposición 14

Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si $\tilde{d} \in \mathbb{Z}^+$ es un divisor común de a y de b , entonces

$$\text{mcd}\left(\frac{a}{\tilde{d}}, \frac{b}{\tilde{d}}\right) = \frac{\text{mcd}(a, b)}{\tilde{d}}.$$

Demostración

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}\left(\frac{a}{\tilde{d}}\tilde{d}, \frac{b}{\tilde{d}}\tilde{d}\right) = \tilde{d} \text{mcd}\left(\frac{a}{\tilde{d}}, \frac{b}{\tilde{d}}\right) \Rightarrow \text{mcd}\left(\frac{a}{\tilde{d}}, \frac{b}{\tilde{d}}\right) = \frac{\text{mcd}(a, b)}{\tilde{d}}. \quad \square$$

Proposición 15

Sea $\{a_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{Z}$. Si $d_2 := \text{mcd}(a_1, a_2)$ y $d_3 := \text{mcd}(d_2, a_3)$, entonces $d_3 = \text{mcd}(a_1, a_2, a_3)$.

Demostración

De la definición de d_3 , tenemos que $d_3|d_2$ y $d_3|a_3$. Como $d_3|d_2$, se infiere que $d_3|a_1$ y $d_3|a_2$. Ahora sea $\tilde{d} \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall j \in \{1, 2, 3\} : \tilde{d}|a_j$. Resulta $\tilde{d}|d_2$, y como $\tilde{d}|a_3$, entonces $\tilde{d}|d_3$. En consecuencia, $d_3 = \text{mcd}(a_1, a_2, a_3)$. \square

La generalización de la propiedad anterior (cuya demostración requiere invocar PIM), se enuncia a continuación:

Proposición 16 (Estrategia para determinar MCD de un conjunto de más de dos enteros)

Para cualquier $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, consideremos $\{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z}$. Si $d_2 := \text{mcd}(a_1, a_2)$, $d_3 := \text{mcd}(d_2, a_3)$, ..., y $d_m := \text{mcd}(d_{m-1}, a_m)$, entonces $d_m = \text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Ejemplo: Determinar $\text{mcd}(40, 60, 100)$

Tenemos: $d_2 = \text{mcd}(40, 60) = 20$, $d_3 := \text{mcd}(d_2, 100) = \text{mcd}(20, 100) = 20$. Luego, invocando la Proposición 15, se concluye que $\text{mcd}(40, 60, 100) = d_3 = 20$.

Definición: Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Considere el conjunto $C := \{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se dice que $k \in \mathbb{Z}^+$ es MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO de a_1, \dots, a_m , si verifica las condiciones:

- $\forall j \in \{1, \dots, m\} : a_j \mid k$,
- Si $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^+$ es otro número tal que $\forall j \in \{1, \dots, m\} : a_j \mid \tilde{k}$, entonces $k \mid \tilde{k}$.

Es decir, el MCM de $\{a_j\}_{j=1}^m$ es el menor entero positivo que es múltiplo de todos los números $\{a_j\}_{j=1}^m$.

NOTACIÓN: $k := \text{mcm}(a_1, \dots, a_m)$.

EJEMPLOS: $\text{mcm}(40, 60, 100) = 600$, $\text{mcm}(-150, 625) = 3750$.



Proposición 17: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) = a \cdot b$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ fijo, pero arbitrario. Como $a \mid mcm(a, b)$, $\exists c \in \mathbb{Z}^+ : mcm(a, b) = ac$. Por otro lado, $b \mid mcm(a, b)$. En consecuencia, la división entre ac y b es EXACTA.

Consideremos ahora $d := mcd(a, b)$. Esto implica que $\exists (a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : a = a_1 d \wedge b = b_1 d$. Además, $mcd(a_1, b_1) = 1$ (*¿por qué?*). Tenemos así: $\frac{ac}{b} = \frac{a_1 dc}{b_1 d} = \frac{a_1 c}{b_1} \in \mathbb{Z}^+$. De esta manera, se infiere que $b_1 \mid c$, con lo cual $\exists k \in \mathbb{Z}^+ : c = b_1 k = \frac{b}{d} k$. Esto conduce a $mcm(a, b) = ac = \frac{ab}{d} k$, con $\frac{ab}{d} \in \mathbb{Z}^+$. Notamos que $\frac{ab}{d}$ es un múltiplo de a y de b . Por definición de MCM, $mcm(a, b) \mid \frac{ab}{d}$. Esto asegura que $\exists \ell \in \mathbb{Z}^+ : \frac{ab}{d} = mcm(a, b) \ell = \frac{ab}{d} k \ell$. De aquí se desprende que $k \ell = 1$. Siendo $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$, la única posibilidad es: $k = \ell = 1$. De esta forma, resulta $\frac{ab}{d} = mcm(a, b)$, es decir $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) = a \cdot b$.

FINALMENTE, como $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es fijo pero arbitrario, queda establecida la validez de la propiedad. □

Corolario 18: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : mcd(a, b) = 1 \Rightarrow mcm(a, b) = a \cdot b$.

EN GENERAL: $\forall (a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) = |ab|$.

Definición (Números coprimos)

Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se dice que a y b son PRIMOS RELATIVOS, COPRIMOS O PRIMOS ENTRE SÍ (PESI), si $mcd(a, b) = 1$.

Proposición 19

Sea $\{a_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{Z}^+$. Si $k_2 := \text{mcm}(a_1, a_2)$ y $k_3 := \text{mcm}(k_2, a_3)$, entonces $k_3 = \text{mcm}(a_1, a_2, a_3)$.

Demostración:

De la definición de k_3 , tenemos que $k_2|k_3$ y $a_3|k_3$. Como $k_2|k_3$, se infiere que $a_1|k_3$ y $a_2|k_3$. Ahora sea $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall j \in \{1, 2, 3\} : a_j|\tilde{k}$. Resulta $k_2|\tilde{k}$, y como $a_3|\tilde{k}$, entonces $k_3|\tilde{k}$. En consecuencia, $k_3 = \text{mcm}(a_1, a_2, a_3)$. □

La generalización de la propiedad anterior (cuya demostración requiere invocar PIM), se enuncia a continuación:

Proposición 20: (Estrategia para determinar MCM de un conjunto de más de dos enteros)

Para cualquier $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, consideremos $\{a_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{Z}^+$. Si $k_2 := \text{mcm}(a_1, a_2)$, $k_3 := \text{mcm}(k_2, a_3)$, ..., y $k_m := \text{mcm}(k_{m-1}, a_m)$, entonces $k_m = \text{mcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)$.



... hacia el Teorema Fundamental de la Aritmética

Definición: Número primo y número compuesto

Decimos que $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es NÚMERO PRIMO, cuando sus únicos divisores (en \mathbb{N}) son 1 y p . Por otro lado, los números naturales mayores que 1, que no son primos, se llaman NÚMEROS COMPUESTOS. Dicho de otra manera, $m \in \mathbb{N}$ es NÚMERO COMPUESTO si $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1, m\} : m = m_1 m_2$.

Ejemplos

Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

Números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, ...

Proposición 21: Caracterización de números primos

$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : p$ es primo si y sólo si $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : p|ab \Rightarrow (p|a \vee p|b)$.

Demostración:

Sea $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fijo, pero arbitrario.

(\Rightarrow) HIPÓTESIS: p es primo.

Ahora, consideremos $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ fijo, pero arbitrario, tal que $p|ab$.

- Caso: $p|a$ o $p|b$, no hay más nada que probar.

Demostración (continuación)

- Caso: $p \nmid a$. Se infiere que $\text{mcd}(p, a) = 1$. Luego, invocando el Lema de Bézout, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} : \alpha p + \beta a = 1$. Multiplicando por b , resulta $\alpha pb + \beta ab = b$. Como $p \mid \alpha pb$ y $p \mid \beta ab$, se deduce que $p \mid (\alpha pb + \beta ab)$, es decir $p \mid b$.
- Caso: $p \nmid b$. Se procede de manera similar al caso anterior. Por tanto, se concluye que $p \mid a$.

En vista que $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es fijo pero arbitrario, se establece

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : p \mid ab \Rightarrow (p \mid a \vee p \mid b)$.

(\Leftarrow) HIPÓTESIS: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : p \mid ab \Rightarrow (p \mid a \vee p \mid b)$.

Sea $a \in \mathbb{Z}^+$ un factor de p . Luego, $\exists b \in \mathbb{Z}^+ : p = ab$. Como $p \mid ab$, resulta (por hipótesis) que $p \mid a \vee p \mid b$.

- Caso: $p \mid a$. Como $a \mid p$, resulta $|p| = |a|$, es decir $a = p$. De esta manera, se deduce que $b = 1$. Es decir, los únicos factores enteros positivos de p son 1 y p . Por tanto, p es un número primo.
- Caso: $p \mid b$. Luego, $\exists c \in \mathbb{Z}^+ : b = pc$. De esta manera,

$$p = ab = apc \quad \Leftrightarrow \quad ac = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 = c.$$

Así, se deduce que $b = p$. Es decir, los únicos factores enteros positivos de p son 1 y p . Por tanto, p es un número primo.

Finalmente, como ambos casos conducen a la misma conclusión, se completa la demostración. □

La importancia de los números primos radica en que de alguna forma se pueden ver como los “átomos” o “bloques” con los que se generan los demás números.

Teorema 22 (Teorema Fundamental de la Aritmética)

$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: m es primo ó m se puede descomponer como multiplicación de números primos (con posibles repeticiones de algunos de ellos como factores).

Ejemplos

- 2, 3 son números primos.
- $60 = 4 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Luego 60, que no es primo, se descompone como multiplicación de números primos (2, 2, 3 y 5 en este caso).



Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos los enunciados abiertos:

- $p(m)$: m es número primo,
- $q(m)$: m se puede descomponer como multiplicación de números primos.

Definimos ahora $\mathbb{A} := \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y el conjunto de validez

$$S := \{m \in \mathbb{A} : p(m) \vee q(m)\}.$$

Notamos que $2, 3 \in S$, por ser ambos números primos. También, $4 \in S$, pues $4 > 1$ y $4 = 2 \cdot 2$, lo cual indica que $q(4)$ es \vee . Esto exhibe que $S \neq \emptyset$.

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN (H.I.): Sea $\ell \in \mathbb{A}$, con $\ell > 4$ tal que $\forall k \in \mathbb{A} \cap (1, \ell) : k \in S$.

VEAMOS QUE $\ell \in S$.

- Caso 1: ℓ es número primo. Automáticamente, $\ell \in S$.
- Caso 2: ℓ es número compuesto. Esto implica que $\exists a, b \in \mathbb{N} \cap (1, \ell) : \ell = ab$. Por H.I., $(p(a) \vee q(a)) \wedge (p(b) \vee q(b))$.

Si $q(a) \wedge q(b)$, entonces $\exists \{a_i\}_{i=1}^r, \{b_j\}_{j=1}^s$ (todos ellos números primos, con posible repetición), tales que $a = \prod_{i=1}^r a_i$ y $b = \prod_{j=1}^s b_j$. Esto implica que $\ell = ab = \prod_{i=1}^r a_i \prod_{j=1}^s b_j$,

y se concluye que $q(\ell)$ es \vee , es decir $\ell \in S$.

Cualquiera de las otras tres opciones posibles, permite concluir también (VERIFICARLO) que $\ell \in S$.

Luego, por el PIM generalizado (4ta forma), $S = \mathbb{A}$, y concluye la demostración. □

$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: Si m no es primo, entonces m es divisible por un número primo.

Teorema 24 (Euclides)

Existen infinitos números primos.

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que hay una cantidad finita de números primos, digamos $m_0 \in \mathbb{N}$. Sean éstos los elementos del conjunto $\{p_j\}_{j=1}^{m_0}$. En seguida, generamos

el número natural $z := \prod_{j=1}^{m_0} p_j + 1$. Siendo $z > 1$, e invocando el **TEOREMA 22** y

COROLARIO 23 anterior, se tiene que z es un número primo o z es divisible por un número primo. Analizando cada caso ahora:

- Caso 1: z es un número primo. Como $z > \prod_{j=1}^{m_0} p_j$, se desprende que $\forall j \in \{1, \dots, m_0\} : z > p_j$. Ello implica que $z \notin \{p_j\}_{j=1}^{m_0}$ (z no pertenece al conjunto de todos los primos) ($\rightarrow \leftarrow$).
- Caso 2: z es divisible por un número primo, del conjunto de todos los primos $\{p_j\}_{j=1}^{m_0}$.

Es decir, $\exists j_0 \in \{1, \dots, m_0\} : p_{j_0} \mid z$. Luego, $p_{j_0} \mid \left(z - \prod_{j=1}^{m_0} p_j\right)$, es decir $p_{j_0} \mid 1$. Como

$1 \mid p_{j_0}$, entonces (**Propos. 9, propiedad 8**) $|p_{j_0}| = |1|$. Por tanto, $p_{j_0} = 1$ ($\rightarrow \leftarrow$)

De esta manera, se concluye que existe una cantidad infinita de números primos. □

El griego Eratóstenes dió una sencilla pero eficaz regla para determinar los primos comprendidos entre 2 y un número positivo $n > 1$. En lo que sigue introducimos $\mathbb{P} := \{q \in \mathbb{Z}^+ : q \text{ es primo}\}$. Recordar $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \in \mathbb{P}$.

Proposición 25 (Criba de Eratóstenes)

$\forall : n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} : n$ es un número compuesto si y sólo si $\exists p \in \mathbb{P} \cap (1, \sqrt{n}] : p|n$.

Demostración:

Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fijo, pero arbitrario.

(\Rightarrow) HIPÓTESIS: n es compuesto. Invocando el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA, n puede descomponerse como multiplicación de factores primos. Sea $p \in \mathbb{P}$ el menor factor primo de n . Luego, $\exists q \in \mathbb{Z}^+ : n = pq \wedge p \leq q$.

Relación de orden en \mathbb{R} : $\sqrt{n} < p \vee p \leq \sqrt{n}$.

- Caso: $\sqrt{n} < p$. Tenemos: $n < p^2 = p \cdot p \leq p \cdot q = n$. Esto implica que $n < n$, lo que es una contradicción.
- Por Descartes, se debe cumplir $p \leq \sqrt{n}$, y se concluye la TESIS.

(\Leftarrow) HIPÓTESIS: $\exists p \in \mathbb{P} \cap (1, \sqrt{n}] : p|n$.

Se infiere en forma inmediata que n admite un factor primo $p < n$. Esto conduce a decir que n es un número compuesto.

Finalmente, como $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ es fijo pero arbitrario, se concluye la validez de la propiedad.



A continuación, unos ejemplos de aplicación:

- Veamos si $n = 31$ es un número primo o no. Tenemos $\{p \in \mathbb{P} : p \leq \sqrt{31} < \sqrt{36} = 6\} = \{2, 3, 5\}$. Resulta

$$31 = (2)(15) + 1$$

$$31 = (3)(10) + 1$$

$$31 = (5)(6) + 1.$$

En consecuencia, $n = 31$ no es número compuesto, es decir 31 es un número primo.

- Veamos si $n = 313$ es un número primo o no. Tenemos $\{p \in \mathbb{P} : p \leq \sqrt{313} < \sqrt{324} = 18\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$. Resulta

$$313 = (2)(156) + 1$$

$$313 = (3)(104) + 1$$

$$313 = (5)(62) + 3$$

$$313 = (7)(44) + 5$$

$$313 = (11)(28) + 5$$

$$313 = (13)(24) + 1$$

$$313 = (17)(18) + 7.$$

En consecuencia, $n = 313$ no es número compuesto, es decir 313 es un número primo.



Determinando mcd y mcm de dos números (regla práctica)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Por el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA, tenemos que $\exists \{p_j\}_{j=1}^r \subseteq \mathbb{P}$ (subconjunto de números primos todos distintos entre sí) tales que

$$\exists \{m_j\}_{j=1}^r \subseteq \mathbb{Z}_0^+ : a = \prod_{j=1}^r p_j^{m_j},$$

$$\exists \{n_j\}_{j=1}^r \subseteq \mathbb{Z}_0^+ : b = \prod_{j=1}^r p_j^{n_j}.$$

Entonces

$$\text{mcd}(a, b) = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j}, \text{ donde } \forall j \in \{1, \dots, r\} : \alpha_j := \min(m_j, n_j),$$

$$\text{mcm}(a, b) = \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j}, \text{ donde } \forall j \in \{1, \dots, r\} : \beta_j := \max(m_j, n_j).$$

Ejemplo

$$\begin{cases} 600 = \dots = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \\ 315 = \dots = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{mcd}(600, 315) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15 \\ \text{mcm}(600, 315) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 12600 \end{cases}$$

Problemas de aplicación de MCD y MCM

- ① En la tienda de Manuel hay una caja con 12 naranjas y otra con 18 peras. Manuel quiere distribuir las frutas en cajas más pequeñas de forma que:
 - todas las cajas tienen el mismo número de frutas,
 - cada caja sólo puede tener peras o naranjas y
 - las cajas deben ser lo mas grande posible.

¿Cuántas frutas deben haber en cada caja? ¿Cuántas cajas se requerirán?
- ② Carolina quiere coser una colcha collage con retales de tela cuadrados del mayor tamaño posible y que tengan el mismo tamaño. Si la colcha tiene que medir 180 cm. de alto y 100 cm. de ancho, ¿cuánto deben medir los retales? ¿Cuántos retales se tienen que recortar para coser la colcha?
- ③ En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez se conectan los semáforos en simultáneo, ¿cada cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo?
- ④ Juan y Marta van a correr alrededor de una urbanización de su ciudad. Juan tarda 16 minutos en dar una vuelta completa y Marta tarda 24 minutos. Cuando coincidan en la salida por primera vez, ¿cuántas vueltas habrá dado cada uno?



Ecuaciones Diofánticas Lineales

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dados. Interesa estudiar la ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL:
Determinar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$.

Proposición 26

La ecuación diofántica planteada tiene soluciones enteras si y sólo si $\text{mcd}(a, b) \mid c$.

Resolviendo Ecuaciones Diofánticas Lineales Homogéneas

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos a la vez, con los cuales se plantea la ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL HOMOGÉNEA: Determinar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = 0$.

Considerando $d := \text{mcd}(a, b)$, se puede deducir que el conjunto solución de esta ecuación viene dado por $C.S. = \left\{ (x, y) = \left(\frac{b}{d}m, -\frac{a}{d}m \right) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$.

Resolviendo Ecuaciones Diofánticas Lineales No Homogéneas

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos a la vez, y $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, con los cuales se plantea la ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL NO HOMOGÉNEA: Determinar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$.

Supongamos que la ecuación diofántica planteada es soluble, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ es una solución de ésta. Considerando $d := \text{mcd}(a, b)$, se puede deducir que el conjunto solución de esta ecuación viene dado por $C.S. = \left\{ (x, y) = \left(x_0 + \frac{b}{d}m, y_0 - \frac{a}{d}m \right) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$.