

ALGEBRA III (525201)
Listado 1

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Justifique.

- a) $(A \times B)^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times B)$.
- b) $\mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(A)^c$.
- c) $\{A - (B \cup C), B, C - B\}$ es una partición de $A \cup B \cup C$.

2. Pruebe, usando equivalencias lógicas, las siguientes proposiciones.

- a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
- c) $A \cup B = A \cap C \implies B \subseteq A \wedge A \subseteq C$.
- b) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.

3. Pruebe, usando propiedades de conjuntos, las siguientes proposiciones.

- a) $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - (A^c \cup C)$.
- c) $A \cap C = \emptyset \implies (A - B) - C = A - (B - C)$.
- b) $[A - (B - A)] \cup [(B - A) - A] = A \cup B$.

4. Demuestre las siguientes propiedades del producto Cartesiano de conjuntos.

- a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- e) $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$.
- b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- f) $B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$.
- c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
- d) $A \times B = \bigcup_{b \in B} (A \times \{b\})$.

5. Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos y B un conjunto no vacío. Pruebe que:

- a) $\left(\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq B\right) \implies \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$.
- c) $\left(\forall i \in \mathbb{N}, A_{i+1} \subseteq A_i\right) \implies \bigcup_{i \in I} A_i = A_1$.
- b) $\left(\forall i \in \mathbb{N}, B \subseteq A_i\right) \implies B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.
- d) $\left(\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq A_{i+1}\right) \implies \bigcap_{i \in I} A_i = A_1$.

6. Dada $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, A un conjunto no vacío tal que $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \cap A \neq \emptyset$. Se define la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por:

$$B_1 = A \cap A_1 \quad \wedge \quad \forall k \geq 2, B_k = A \cap \left(A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right).$$

Pruebe que :

- a) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.
 - b) $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$.
 - c) ¿Es $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una partición de A ?
7. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos en \mathbb{R} que verifica las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} i) \quad & \forall a \in \mathbb{R}, (a, +\infty) \in \mathcal{A}, \\ ii) \quad & \forall i \in I, A_i^c \in \mathcal{A}, \\ iii) \quad & \forall J \subseteq I, \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

- a) Muestre que $\forall b \in \mathbb{R}, [b, +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(b - \frac{1}{n}, +\infty \right)$.
 - b) Pruebe que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : (a, b) \in \mathcal{A}, [a, b] \in \mathcal{A}$.
 - c) ¿ $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$? Justifique su respuesta.
8. Para la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ encuentre $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ en cada caso. Justifique su respuesta.
- a) $A_i = \{2j+1 : j = 1, \dots, i\}, \forall i \in \mathbb{N}$. c) $A_i = (-i, i) \forall i \in \mathbb{N}$.
 - b) $A_i = \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right], \forall i \in \mathbb{N}$. d) $A_i = \mathbb{Q} \cap [0, i-1], \forall i \in \mathbb{N}$.
9. Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ todos distintos, tal que verifique las condiciones dadas en cada caso.
- a) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, +\infty), \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, 1)$. c) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R} - \{0\}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$.
 - b) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$. d) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$.