

Análisis Real II (525302)
Listado N°4 (Teorema de Fubini y producto de medidas)

Problemas a resolver en práctica

1. Recordatorio:

En el Listado de Ejercicios 1 a todo espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ le asociamos la σ -álgebra

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \text{existen } B, C \in \mathcal{F} \text{ tales que } B \subset A \subset C \text{ y } \mu(C \setminus B) = 0\}$$

unida a la medida positiva sobre $\overline{\mathcal{F}}$ dada por

$$\overline{\mu}(A) = \mu(B),$$

donde $B, C \in \mathcal{F}$ satisfacen $B \subset A \subset C$ y $\mu(C \setminus B) = 0$. Luego, se demostró que $\overline{\mu}$ es una medida completa sobre $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$.

Pregunta:

Considere los espacios de medidas positivas $(Y_1, \mathcal{U}_1, \lambda_1)$ y $(Y_2, \mathcal{U}_2, \lambda_2)$. Demuestre que $\overline{\mathcal{U}_1} \otimes \overline{\mathcal{U}_2} \subset \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}$.

2. Sean (X, \mathcal{F}, μ) y $(Y, \mathcal{U}, \lambda)$ dos espacios de medidas σ -finitas. Asuma que $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}$. Recordemos que para todo $x \in X$ se define

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

Demuestre que $\mu \otimes \lambda(E) = 0$ si y solo si $\lambda(E_x) = 0$ μ casi dondequiero.

3. Considere el espacio de medida positiva $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Suponga que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función medible no negativa. Demuestre que

$$\int_{\Omega} f d\mathbb{P} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}) \nu(dx),$$

donde ν es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, i.e., ν es la única medida sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ que satisface $\nu([a, b]) = b - a$ para todo $b > a$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida finita. Considere el espacio medible (Y, \mathcal{U}) y $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}$. Demuestre que la aplicación $y \mapsto \mu(E^y)$ es \mathcal{U} -medible, donde

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

2. Sea ν es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$
b) $\nu \otimes \nu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}) = 0$

3. Sean $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ y $(X_3, \mathcal{F}_3, \mu_3)$ espacios de medidas σ -finitas. Identifique los productos cartesianos $(X_1 \times X_2) \times X_3$ y $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ con $X_1 \times X_2 \times X_3$. Demuestre que $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes (\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3)$ y que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

CMG/cmg.