UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525214)
Listado Nº 2 (Series de Fourier)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. Considere la función 2π-periódica definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

   a) Halle la serie de Fourier de f.

   b) Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma $S_f(t)$ es igual a $f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   ¿ Que es el valor de $S_f(t)$ si $t = (2k+1)\pi$?

2. Sea $\alpha > 1$ un número real tal que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Halle la serie de Fourier de la función 2π-periódica definida en el intervalo $[-\pi, \pi[$ por $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$, $t \in [-\pi, \pi[$.
Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f_\alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Indicación: use la formula $2\cos(\alpha t)\cos(nt) = \cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)$.

3. Halle las series de cosenos y de senos de la función definida en $[0,1]$ por $f(t) = 1$, $0 \leq t \leq 1$. Muestre que estas series convergen puntualmente y que sus sumas son iguales a $f(t)$ para todo $t \in]0,1[$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = |\,\text{sen} t|$.

   a) ¿ Cual es el periódo de f? Muestre que f es la extensión 2π-periódica *par* de una función g definida en $[0, \pi]$ por determinar.

   b) Halle la serie de Fourier de f y la serie de coseno de g.
   ¿ Que se puede decir de estas dos series?

   c) Muestre que la serie de Fourier de f converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

   d) Deduzca de las preguntas anteriores los valores $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1}$ y $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}$.

5. Sea $T > 0$. Halle las series de Fourier (i) en su forma exponencial y (ii) en su forma de cosenos y senos de las funciones T-periódicas definidas por:

$$(a)\ f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\ ; \quad (b)\ f(t) = e^t\ ,\ -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}\ .$$

En cada caso, justifique que la serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ si $-T/2 < t < T/2$ ¿ Que es el valor de la suma si $t = T/2$?

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de periodo $T = 2$ definida en el intervalo $[-1, 1]$ por

$$f(t) = t - t^3 \ , \quad t \in [-1, 1] \ .$$

   Determine la serie de Fourier de f. Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ para todo $t \in]-1, 1[$.

7. Encuentre la serie de Fourier de la función 2π-periódica f definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

   Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ para todo $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Sea la función f definida en el intervalo $[0, 1]$ por $f(t) = t \operatorname{sen}(\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$.

   a) Halle la serie de cosenos y la serie de senos de f. Dibuje en cada caso la curva representativa de la extensión periódica de f que corresponde.

   (a) Muestre que estas series convergen puntualmente y que sus sumas son iguales a $f(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

   (b) Deduzca los valores de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

9. Sea la función f definida en el intervalo $[0, 1]$ por $f(t) = 1 + t$.

   a) Halle y dibuje la curva representativa de la extensión 2-periódica impar de f.

   b) Determine la serie de senos de f.

   c) Muestre que esta serie converge puntualmente en $[0, 1]$ y que su suma $S_f(t)$ es igual a $f(t)$ para cada $t \in]0, 1[$. ¿ Que son los valores de $S_f(t)$ en $t = 0$ y 1 ?

10. Para $T > 0$, sea f la función definida en $[0, T/2]$ por

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \ .$$

   a) Encuentre la extensión T-periódica *par* de f.

   b) Determine la serie de cosenos de f usando el resultado del Problema 4.
   Indicación: observe que

      (i) la serie de Fourier $S_{f_1+f_2}(t)$ de la suma de dos funciones T-periódicas f_1 y f_2 es la suma $S_{f_1}(t) + S_{f_2}(t)$ de las series de Fourier de f_1 y de f_2;

      (ii) los coeficientes de Fourier de una función T-periódica $f_2(t)$ son los mismos que los coeficientes de Fourier de la función 2π-periódica $g_2(s) = f_2(\frac{Ts}{2\pi})$.

   c) Muestre que la serie de cosenos de f converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Agosto 30, 2025.
DS/ds