UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación de Recuperación. 9–Ago.–2021; 19:00.

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales que converge a x, tal que $x_n \leq x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$.

2. Sean X e Y espacios métricos. Demuestra que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la preimagen por f de bolas abiertas en Y son conjuntos abiertos en X.

   Sugerencia. Puedes usar el Ej. 7 del listado T.P.2.

3. Demuestra que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la imagen de f es un intervalo cerrado y acotado.

4. Dada $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, considera la sucesión de funciones $g_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_n(x) := f(x + n), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Demuestra que $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función constante $g(x) := L$.

5. Considera la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Demuestra que f_n converge puntualmente y determina el límite.

   (b) Demuestra que f_n no converge uniformemente.