UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218) 2022-1

PROBLEMA 1. (10 puntos) Considere la siguiente EDO

$$y^{(5)}(t) + 18\, y^{(\prime\prime\prime)}(t) + 81\, y^{(\prime)}(t) \,=\, 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

(a) ¿Cuántas soluciones linealmente independientes posee la EDO (1)? Justifique su respuesta. (3 puntos)

(b) Determine el polinomio característico asociado a la EDO (1) y sus raíces. (4 puntos)

(c) Encuentre la solución general homogénea de la EDO (1). (8 puntos)

Solución:

(a) *¿Cuántas soluciones linealmente independientes posee la EDO* (1)*? Justifique su respuesta.*

Tratándose de una EDO lineal, de orden 5, coeficientes constantes y homogénea sabemos que tiene 5 soluciones linealmente independientes. **(3 puntos)**

(b) *Determine el polinomio característico asociado a la EDO* (1) *y sus raíces.*

$$p(\lambda) \,=\, \lambda^5 \,+\, 18\,\lambda^3 \,+\, 81\,\lambda$$

(2 puntos)

$$p(\lambda) \,=\, \lambda\,\left(\lambda^4 \,+\, 18\,\lambda^2 \,+\, 81\right) \,=\, \lambda\,\left(\lambda^2 \,+\, 9\right)^2$$

Por lo tanto, $p(\lambda) = 0$ implica $\lambda_1 = 0$ $(m_1 = 1)$, $\lambda_2 = 3\,i$ $(m_2 = 2)$ y $\lambda_3 = -3\,i$ $(m_3 = 2)$.
(2 puntos)

(c) *Encuentre la solución general homogénea de la EDO* (1).

$$y_h(t) \,=\, C_1 \,+\, C_2\, \cos(3t) \,+\, C_3\, t\, \cos(3t) \,+\, C_4\, \sin(3t) \,+\, C_5\, t\, \sin(3t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

donde C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 son constantes reales. **(8 puntos)**

PROBLEMA 2. (15 puntos) Un tanque contiene inicialmente 100 [l] de una mezcla de agua y sal (salmuera) que contiene 90 [g] de sal por litro de mezcla. Al tanque entra agua pura a una tasa de 4 [l/min]. La mezcla sale del tanque por un grifo a 2 [l/min], y adicionalmente se evapora a 2 [l/min] (vapor de agua sin sal). En todo momento, la mezcla en el tanque se mantiene uniformemente homogénea. ¿En qué momento, la mezcla dentro del tanque tiene una concentración de sal igual a 30 [g/l]?

Solución:

La variable t representa el tiempo medido en minutos que ha transcurrido desde el instante inicial. La función $X(t)$ es igual a la cantidad de sal en [g] en el instante t. Además, la función $V(t)$ nos da el volumen de la mezcla dentro del tanque en litros en el instante t.

Primeramente,

$$V'(t) = 4 - 2 - 2 = 0$$

Lo que implica, $V(t) = V(0) = 100$. O sea, el volumen se mantiene constante. **(4 puntos)**

La ecuación que gobierna la cantidad de sal dentro del tanque es:

$$X'(t) = 4 * 0 - 2 * \frac{X(t)}{V(t)}.$$

Lo que implica

$$X'(t) = -\frac{X(t)}{50}.$$

(4 puntos)

Resolviendo la EDO se llega a

$$X(t) = X(0) \exp\left(-\frac{t}{50}\right) = 9000 * \exp\left(-\frac{t}{50}\right),$$

pues $X(0) = 90 * 100 = 9000$. **(4 puntos)**

Sea T el tiempo en que la mezcla dentro del tanque tiene una concentración de sal igual a 30 [g/l]. Luego

$$30 = \frac{X(T)}{V(T)} = \frac{9000}{100} \exp\left(-\frac{T}{50}\right).$$

De donde,

$$\frac{1}{3} = \exp\left(-\frac{T}{50}\right),$$

que lleva a

$$-\frac{T}{50} = ln(\frac{1}{3}) = -ln(3)$$

Entonces, $T = 50\, ln(3)$. A los $50\, ln(3)$ minutos la concentración de sal dentro del tanque será igual a 30 [g/l].

(3 puntos)

PROBLEMA 3. (15 puntos) Considere la siguiente EDO no-homogénea

$$a\, v^{('')}(t) - (a+1)\, v^{(')}(t) + v(t) \;=\; \exp(b\, t) \quad \forall t > 0\,. \tag{2}$$

siendo $a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $a \neq 1$.

(a) Determine el polinomio característico asociado a la EDO homogénea y sus raíces. (4 puntos)

(b) Encuentre la solución general homogénea de la EDO (2). (3 puntos)

(c) Determine bajo qué condiciones la función $v_p(t) = \exp(\alpha\, t),\; \alpha \in \mathbb{R}$, es una solución particular de la EDO no-homogénea definida en (2). (8 puntos)

Solución:

(a) *Determine el polinomio característico asociado a la EDO homogénea y sus raíces.*

$$p(\lambda) \;=\; a\, \lambda^2 \;-\; (a+1)\, \lambda \;+ 1$$

(2 puntos)

Las raíces de $p(\lambda)$, o sea $p(\lambda) = 0$, son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4\,a}}{2a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2a}$$

Luego

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+1 \pm |a-1|}{2a}$$

(1 punto)

Caso: $a - 1 > 0$

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 1/a.$$

Caso: $a - 1 < 0$

$$\lambda_1 = 1/a; \qquad \lambda_2 = 1.$$

(1 punto)

Solución Alternativa (EDO normalizada)

$$p(\lambda) \,= \lambda^2 \,-\, \frac{a+1}{a}\,\lambda \,+\, \frac{1}{a}$$

(2 puntos)

Las raíces de $p(\lambda)$, o sea $p(\lambda) = 0$, son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4a^2} - \frac{1}{a}} = \frac{a+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a^2}}$$

Luego

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4a^2} - \frac{1}{a}} = \frac{a+1}{2a} \pm \frac{|a-1|}{2\,|a|}$$

(1 punto)

Caso: $\frac{a-1}{a} > 0$

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 1/a.$$

Caso: $\frac{a-1}{a} < 0$

$$\lambda_1 = 1/a; \qquad \lambda_2 = 1.$$

(1 punto)

(b) *Encuentre la solución general homogénea de la EDO* (2).

$$v_h(t) \,=\, C_1\, \exp{(t)} \,+\, C_2\, \exp{(\frac{t}{a})} \qquad \forall t > 0\,,$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. **(3 puntos)**

(c) *Determine bajo qué condiciones la función* $v_p(t) = \exp(\alpha\, t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *es una solución particular de la EDO no-homogénea definida en* (2).

Reemplazando $v_p(t) = \exp(\alpha\, t)$ en la ecuación obtenemos:

$$e^{\alpha\, t}\left(a\,\alpha^2 \,-\, (a+1)\,\alpha \,+\, 1\right) = e^{b\, t} \qquad \forall t > 0$$

así que

$$a\,\alpha^2 \,-\, (a+1)\,\alpha \,+\, 1 \,=\, \exp\,(b-\alpha)\,t \;\; \forall t > 0\,.$$

(2 puntos)

De donde se deducen las condiciones:

$$\alpha \,=\, b \,\wedge\, \alpha \,=\, \frac{a+1}{a}\,,$$

unido a

$$b = \frac{a+1}{a}.$$

(2 puntos)

PROBLEMA 4. (20 puntos) Considere el siguiente problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} (1+2\,x)\,\frac{d}{dx}y\,(x) = x\,y\,(x) + (-1-2\,x)^{3/4} \\ y\left(-\frac{17}{2}\right) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

(a) ¿Cuántas soluciones tiene el PVI (3)? Justifique su respuesta. (5 puntos)

(b) Encuentre una solución del PVI (3). (15 puntos)

Solución:

(a) *¿Cuántas soluciones tiene el PVI* (3)*? Justifique su respuesta.*

Normalizando la EDO llegamos a

$$\frac{d}{dx}y\,(x) = \frac{x}{1+2\,x}\,y\,(x) + \frac{1}{1+2\,x}\,(-1-2\,x)^{3/4}\,.$$

Las funciones $x \mapsto x/\,(1+2\,x)$ y $x \mapsto -\,(-1-2\,x)^{-1/4}$ son continuas para todo $x \in \mathbb{R}$ diferente de $-1/2$. Luego, estas funciones son continuas simultáneamente en los intervalos $]-\infty, -1/2[$ y $]-1/2, +\infty[$. Ya que $-17/2 \in\,]-\infty, -1/2[$, aplicando el teorema de existencia y unicidad obtenemos que el PVI dado tiene una única solución definida en todo el intervalo $]-\infty, -1/2[$. **(5 puntos)**

(b) *Encuentre una solución del PVI* (3).

Re-escribimos la EDO como

$$\frac{d}{dx}y\,(x) - \frac{x}{1+2\,x}\,y\,(x) = -\frac{1}{(-1-2\,x)^{1/4}}. \tag{4}$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1+2\,x$ obtenemos

$$A\,(x) := \int \frac{x}{1+2\,x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u}du = \frac{1}{4}\,(u - ln\,(|u|)) = \frac{1}{4}\,(1+2\,x - ln\,(|1+2\,x|))$$

(3 puntos)

Como la solución que buscamos está definida en $]-\infty, -1/2[$ tenemos que $1+2\,x<0$. De donde se obtiene

$$A\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\,x-ln\left(-1-2\,x\right)\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\exp\left(-A\left(x\right)\right) &= \exp\left(-\frac{1}{4}\left(1+2\,x\right)\right)\exp\left(ln\left(\sqrt[4]{-1-2\,x}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{4}\left(1+2\,x\right)\right)\sqrt[4]{-1-2\,x}\end{aligned}$$

(3 puntos)

Multiplicando (4) por $\exp\left(-A\left(x\right)\right)$ llegamos a

$$e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}\sqrt[4]{-1-2\,x}\frac{d}{dx}y\left(x\right)-e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}\sqrt[4]{-1-2\,x}\frac{x}{1+2\,x}\,y\left(x\right)=-e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}.$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}\sqrt[4]{-1-2\,x}\,y\left(x\right)\right)=-e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}.$$

(4 puntos)

Integrando se obtiene

$$e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}\sqrt[4]{-1-2\,x}\,y\left(x\right)=-\int e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}dx=2\,e^{-\frac{1}{4}(1+2\,x)}+C$$

Por lo tanto,

$$y\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt[4]{-1-2\,x}}+\frac{C}{\sqrt[4]{-1-2\,x}}e^{\frac{1}{4}(1+2\,x)}$$

(3 puntos)

Usando la condición inicial $y\left(-\frac{17}{2}\right)=1$ llegamos a

$$1=y\left(-\frac{17}{2}\right)=1+\frac{C}{2}e^{-4}$$

Por lo tanto $C=0$. De donde se deduce

$$y\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt[4]{-1-2\,x}}\qquad\forall x\in\left]-\infty,-1/2\right[$$

(2 puntos)