

# Rotación en Torno a un Eje Fijo

## Física II - 510150

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física  
Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

Atención de Estudiantes:  
Jueves de 10:00 a 12:00 hrs.

## 1 Rotación en Torno a un Eje Fijo

- Introducción
- Posición, velocidad y aceleración angular

## 2 Cinemática rotacional

- Rotación con aceleración angular constante
- Cantidades angulares y traslacionales
- Energía cinética rotacional
- Cálculo de momentos de inercia
- Teorema de ejes paralelos
- Algunos momentos de inercia

## 3 Segunda ley de Newton en la Rotación

- El Producto Vectorial de Vectores
- Momento de torsión: Torque
- Objeto rígido bajo un torque neto
- Consideraciones energéticas

## Resultados de Aprendizaje

- RA1: *Resolver problemas aplicados de cuerpos en rotación en torno a un eje fijo con aceleración angular constante.*
- RA2: *Resolver problemas aplicados que implican trabajo físico y potencia mecánica para cuerpos en movimiento rotacional en torno de un eje fijo.*

El modelo particular no es aplicable a objetos extendidos, como por ejemplo, una rueda que gira en torno a un eje de rotación:

---

**En cualquier instante de tiempo diferentes partes del objeto tienen distintas velocidades y aceleraciones lineales.**

---

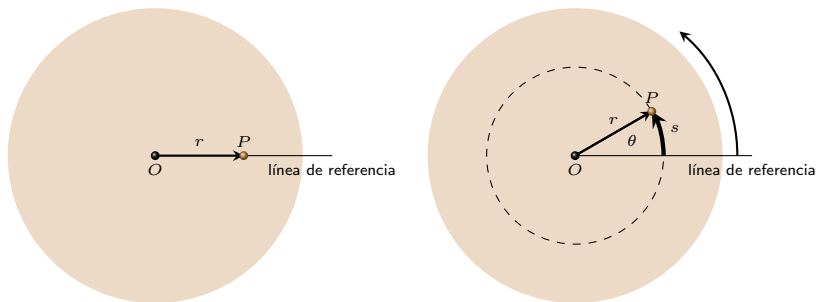
El movimiento se analiza en términos de un **conjunto de partículas**: Con sus velocidades y aceleraciones lineales propias.

---

**Objeto rígido (*no deformable*)**: *La posición relativa de todas las partículas es constante.*

- *Objetos reales son deformables, en algún grado: El modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones en las que la deformación es despreciable.*
-

La **Fig.1.1** muestra la vista superior de un disco, por ejemplo, un CD en rotación. El disco gira en torno a un eje fijo perpendicular al plano de la figura que pasa a través del centro del disco en  $O$ .



**Figura 1:** Vista superior de un disco girando. (Izq.) Elección de una línea de referencia fija y ubicación de una partícula en  $P$  a una distancia  $r$  desde el eje de rotación en  $O$ . (Der.) A medida que el disco gira, el punto  $P$  describe una longitud de arco  $s$  sobre una trayectoria circular de radio  $r$ .

En coordenadas polares  $(r, \theta)$ :  $r$ ; distancia  $\overline{OP}$ ;  $\theta$ , ángulo medido *en dirección anti-horaria* desde la línea de referencia.

El ángulo  $\theta$  cambia con el tiempo mientras que  $r$  permanece constante.

La partícula se mueve a lo largo de un círculo desde la línea de referencia ( $\theta = 0$ ) una longitud de arco  $s$  [vea **Fig.1**(Der.)]. La longitud del arco  $s$  y el ángulo  $\theta$  se relacionan a través de las expresiones

$$s = r\theta \quad (1a)$$

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (1b)$$

La unidad de medida de  $\theta$  es el **radián** (rad), [ $\theta = 1$  rad, si  $s = r$ ]. La circunferencia de un círculo es  $2\pi r$ , así de la Ec.(1b),  $360^\circ$  corresponde a un ángulo de

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev.} \quad (1c)$$

Luego,  $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$ . La siguiente conversión es usada

$$\theta \text{ rad} = \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right) \theta^\circ.$$

Como el disco de la **Fig.1** es rígido, cualquier otro punto sobre la línea de referencia gira el mismo ángulo  $\theta$ .

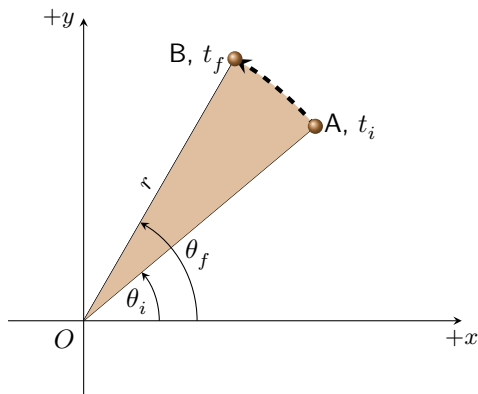
**El ángulo  $\theta$  se asocia a todo el objeto rígido, así como una partícula individual:** Permite definir la **posición angular** de un objeto rígido en su movimiento rotacional.

---

**Dada una línea de referencia sobre el objeto, la posición angular del objeto rígido es el ángulo  $\theta$  entre la línea de referencia sobre el objeto y la línea de referencia fija en el espacio la cual, frecuentemente coincide con el eje  $x$ .**

---

A medida que una dada partícula sobre el objeto rígido se mueve desde la posición A a la B en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  (**Fig.2**), la línea de referencia fija al objeto barre un ángulo  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ .



**Figura 2:** En el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_f - t_i$ , la línea radial de longitud  $r$  se mueve a través de un desplazamiento angular  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ .



$\Delta\theta$ : **Desplazamiento angular** del objeto rígido:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

La **rapidez angular promedio**,  $\omega_{\text{prom}}$ , se define como:

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}. \quad (2)$$

La **rapidez angular instantánea**  $\omega$  se define como el límite de la rapidez angular promedio cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

La rapidez angular en el SI se mide en radianes por segundo (rad/s), comúnmente escrita como  $\text{s}^{-1}$  debido a la adimensionalidad de los radianes. Si  $\theta$  aumenta (movimiento anti-horario);  $\omega > 0$ ;  $\omega < 0$  si  $\theta$  disminuye (movimiento horario).

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de  $\omega_i$  a  $\omega_f$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se define la **aceleración angular promedio**  $\alpha_{\text{prom}}$  como:

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}. \quad (4)$$

Similar al caso de la rapidez angular, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (5)$$

Las unidades de la aceleración angular en el SI son radianes por segundo al cuadrado ( $\text{rad/s}^2$ ), o simplemente  $\text{s}^{-2}$ .

$\alpha > 0$  si un objeto en movimiento anti-horario aumenta su rapidez angular o cuando un objeto en movimiento horario disminuye su rapidez angular en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Para un objeto rígido en rotación respecto a un eje fijo:

---

**cada partícula del objeto gira a través del mismo ángulo en un dado intervalo de tiempo y tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.**

---

Es decir, las cantidades  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  caracterizan el movimiento rotacional de todo el objeto rígido así como el de las partículas individuales en el objeto.

En el caso más general,  $\omega$  y  $\alpha$  son las **magnitudes** de los **vectores velocidad y aceleración angular**  $\vec{\omega}$  y  $\vec{\alpha}$ , respectivamente, y siempre deben ser positivos (son magnitudes).

Para rotación respecto a un eje fijo, la única dirección que especifica el movimiento rotacional es la dirección a lo largo del eje de rotación. Por lo tanto, las direcciones de  $\vec{\omega}$  y  $\vec{\alpha}$  son a lo largo de este eje.

Si una partícula gira en el plano  $xy$  como en la **Fig.2**, la dirección de  $\vec{\omega}$  para la partícula es hacia afuera del plano del diagrama cuando la rotación es anti-horaria y hacia adentro del plano del diagrama, cuando es horaria.

La **regla de la mano derecha** es útil para aclarar esto. Cuando los cuatro dedos de la mano derecha se enrollan en la dirección de la rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de  $\vec{\omega}$ .

La dirección de  $\vec{\alpha}$  se sigue de su definición; es la misma dirección de  $\vec{\omega}$  si la rapidez angular aumenta en el tiempo, y es anti-paralela a  $\vec{\omega}$  si la rapidez angular disminuye en el tiempo.

Cuando un objeto rígido gira respecto a un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante.

El modelo de análisis para el movimiento rotacional es llamado **objeto rígido bajo aceleración angular constante**. Escribamos la Ec.(5) en la forma  $d\omega = \alpha dt$  e integremos desde  $t_i = 0$  a  $t_f = t$ , se tiene

$$\int_{\omega_i=\omega_0}^{\omega_f=\omega} d\omega = \int_{t_i=0}^{t_f=t} \alpha dt = \alpha \int_{t_i=0}^{t_f=t} dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}), \quad (6)$$

donde  $\omega_0$  es la rapidez angular del objeto en el instante  $t = 0$ . La Ec.(6) permite encontrar la rapidez angular  $\omega$  del objeto en cualquier instante posterior  $t$ .

Sustituyendo la Ec.(6) en la Ec.(3) e integrando una vez más, se obtiene

$$\int_{\theta_i=\theta_0}^{\theta_f=\theta} d\theta = \int_{t_i=0}^{t_f=t} (\omega_0 + \alpha t) dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}), \quad (7)$$

donde  $\theta_0$  es la posición angular del objeto rígido en el instante  $t = 0$ . La Ec.(7) permite encontrar la posición angular  $\theta$  del objeto en cualquier tiempo posterior  $t$ . Al eliminar  $t$  de las Ecs.(6) y (7) se obtiene

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha[\theta - \theta_0] \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}), \quad (8)$$

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular  $\omega$  del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular  $\theta$ .

Si se elimina  $\alpha$  entre las Ecs.(6) y (7) se obtiene

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} [\omega_0 + \omega] t \quad \text{para } \alpha \text{ constante} \quad (9)$$

Rotacional en torno a un eje fijo	Traslacional
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional (en torno de un eje fijo) y traslacional bajo aceleración constante

### Ejemplo

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de  $3.50 \text{ rad/s}^2$ .

- (a) Si la rapidez angular de la rueda es  $2.00 \text{ rad/s}$  en  $t_0 = 0.00$ , determine el desplazamiento angular de la rueda a los  $2.00 \text{ s}$ .
- (b) Determine las revoluciones que dió la rueda en ese intervalo de tiempo.
- (c) Determine la rapidez angular de la rueda en  $t = 2.00 \text{ s}$ .

### Solución

Se tiene  $t_0 = 0.00$ ,  $\omega_0 = 2.00 \text{ rad/s}$  y  $\alpha = 3.50 \text{ rad/s}^2$ :

- (a) En este caso  $t = 2.00 \text{ s}$ , de modo tal que

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$



## Continuación

$$\Delta\theta = \left(2.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) (2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(3.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) (2.00 \text{ s})^2$$

$$\Delta\theta = 11.0 \text{ rad}$$

(b) Las revoluciones son el número de vueltas: Para  $\Delta t = 2.00 \text{ s}$ ,

$$\Delta\theta = 11.0 \text{ rad} \left( \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 1.75 \text{ rev}$$

(c) Usando la Ec.(6) se obtiene

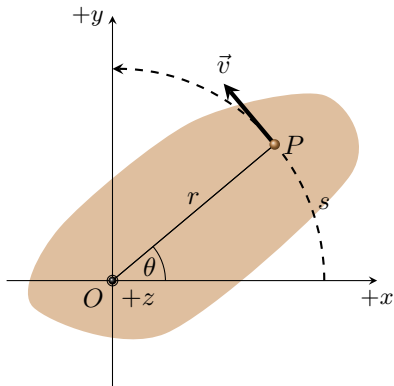
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 2.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left(3.50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) (2.00 \text{ s}) = 9.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Tarea

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante de  $3.50 \text{ m/s}^2$ . Si la velocidad de la partícula es  $2.00 \text{ m/s}$  en  $t_0 = 0$ , ¿a través de que desplazamiento se mueve la partícula en  $2.00 \text{ s}$ ?  
¿Cuál es la velocidad de la partícula en  $t = 2.00 \text{ s}$ ?

**Respuesta:**  $\Delta x(t) = 11.0 \text{ m}$ ;  $v_f(t) = 9.00 \text{ m/s}$ .

Recuerde que cuando un objeto rígido da vueltas respecto de un eje fijo, **todas las partículas del objeto se mueven en círculos cuyos centro están en el eje de rotación.**



**Figura 3:** Un punto  $P$  sobre un objeto rígido en rotación tiene una velocidad tangencial  $\vec{v}$ : tangente a la trayectoria circular de radio  $r$ .

Por definición, **la rapidez tangencial de la partícula** en el punto  $P$  es  $|\vec{v}| = v = ds/dt$ , donde  $s$  es la distancia (arco) recorrida por el punto. Como  $s = r\theta$  y notando que  $r = \text{cte.}$ , se tiene

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt}, \quad (r = \text{cte.})$$

Dado que  $\omega = d\theta/dt$ , se sigue que

$$v = r\omega.$$

(10)

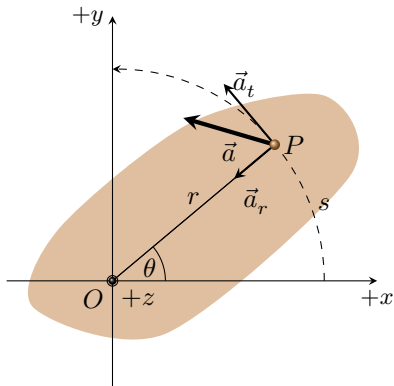
---

**La rapidez tangencial  $v$  de un punto sobre un objeto rígido en rotación en torno a un eje fijo es igual a la distancia  $r$ , medida desde el eje de rotación, multiplicada por la rapidez angular  $\omega$ .**

---

Cada punto sobre el cuerpo rígido tiene la misma **rapidez angular**. Sin embargo, no todos los puntos tienen la misma **rapidez tangencial**. De la Ec.(10), la rapidez tangencial de un punto es mayor si el punto está más lejos del eje de rotación.

La aceleración angular del objeto rígido girando se puede relacionar con la aceleración tangencial del punto  $P$ , como mostrado en la **Fig.4**.



**Figura 4:** La aceleración traslacional de un punto  $P$  sobre un objeto rígido en rotación en torno a un eje fijo es  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$ .

De la Ec.(10) y la **Fig.1.4** vemos que

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \boxed{a_t = r\alpha.} \quad (11)$$

---

**La componente tangencial de la aceleración traslacional ( $a_t$ ) de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia desde el punto al eje de rotación ( $r$ ), multiplicada por la aceleración angular ( $\alpha$ ).**

---

Recuerde que  $\vec{a}_r$  está dirigida hacia el centro de rotación y  $a_r = v^2/r$ . Dado que,  $v = r\omega$ , se tiene

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r} (r\omega)^2 = r\omega^2 \quad (12)$$

Luego,  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$ , así, en el punto  $P$ :

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (13)$$

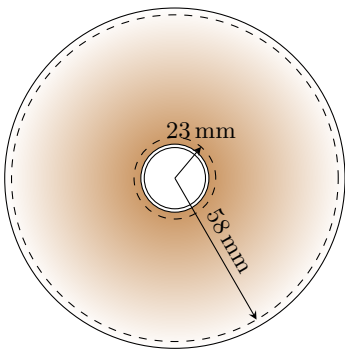
### Ejemplo

En un CD (ver figura adjunta), la rapidez angular varía a medida que el sistema láser-lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común, la rapidez tangencial constante de la superficie en el punto del sistema láser-lente es 1.3 m/s.

(a) Encuentre la rapidez angular del disco, en revoluciones por minuto, cuando la información se lee desde la primera pista más interna ( $r = 23 \text{ mm}$ ) a la pista final más externa ( $r = 58 \text{ mm}$ ).

(b) El máximo tiempo de reproducción de un CD estándar es de 4473 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco durante ese tiempo?

(c) ¿Cuál es la aceleración angular del CD en el intervalo de tiempo de 4473 s?



*Esquema del CD para el Ejemplo 2.*

## Solución

(a) Sabemos que la rapidez tangencial constante es  $v = 1.3 \text{ m/s}$ . Para leer la información desde la primera pista más interna la rapidez angular del CD debe ser

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{0.023 \text{ m}} = 57 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

y, en revoluciones por minuto

$$\omega_1 = 57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 5.4 \times 10^2 \frac{\text{rev}}{\text{min}}.$$

Para leer la información de la última pista más externa, a la misma rapidez tangencial, la rapidez angular del CD debe ser

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{0.058 \text{ m}} = 22 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

y, en revoluciones por minuto

$$\omega_1 = 22 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 2.1 \times 10^2 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$



## Continuación

(b) El desplazamiento angular del disco en el intervalo de tiempo  $\Delta t = 4473 \text{ s}$ , asumiendo que la aceleración angular es constante, es

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t = \frac{1}{2} \left[ 57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + 22 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] (4473 \text{ s})$$

de la cual se llega a

$$\Delta\theta = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}$$

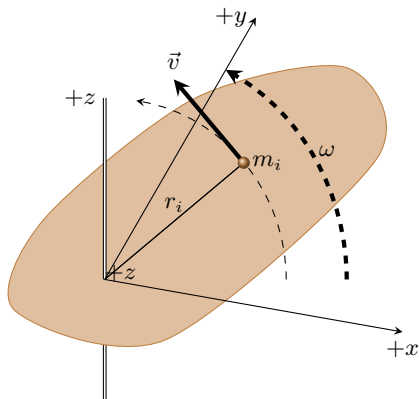
el que convertido a revoluciones nos lleva a

$$\Delta\theta = 1.8 \times 10^5 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = 2.9 \times 10^4 \text{ rev}$$

(c) La aceleración angular del disco en el intervalo de tiempo  $\Delta t = 4473 \text{ s}$  es

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{(22 - 57) \text{ rad/s}}{4473 \text{ s}} = -7.8 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Un objeto en rotación en torno a un eje fijo no tiene energía cinética traslacional. Pero, las partículas individuales que forman el objeto en rotación se mueven a través del espacio; siguen trayectorias circulares. O sea, en el movimiento rotacional hay energía cinética.



**Figura 5:** *Objeto rígido en rotación en torno del eje  $z$  con rapidez angular  $\omega$ .*

Sea un objeto rígido girando en torno de un eje fijo  $z$  con rapidez angular  $\omega$ . La **Fig.5** muestra un diagrama del objeto y se identifica una partícula de masa  $m_i$  a la distancia  $r_i$  del eje de rotación. La rapidez tangencial de esa partícula es  $v_i$ ; su energía cinética es

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

La energía cinética total del objeto en rotación es la suma de la energía cinética de las partículas individuales que lo conforman,

$$K_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2$$

la cual puede ser reescrita como

$$K_R = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2. \quad (14)$$

La cantidad entre paréntesis en la Ec.(14) se define como el **momento de inercia**,  $I$

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2. \quad (15)$$

El momento de inercia tiene dimensiones  $L^2 M^1 T^0$  y unidades de medida  $\text{kg m}^2$  en el SI de unidades. Luego, la Ec.(14) se reescribe como

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (16)$$

La cantidad  $\frac{1}{2} I \omega^2$  llamada, comúnmente, **energía cinética rotacional**; no es una forma nueva de energía. Es la suma de la energía cinética individual de las partículas formando un objeto.

La Ec.(16) es conveniente cuando el movimiento es rotacional, siempre y cuando se sepa como calcular el momento de inercia  $I$ .

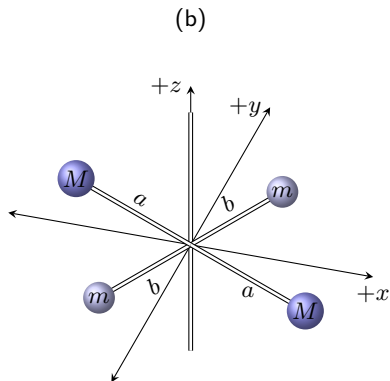
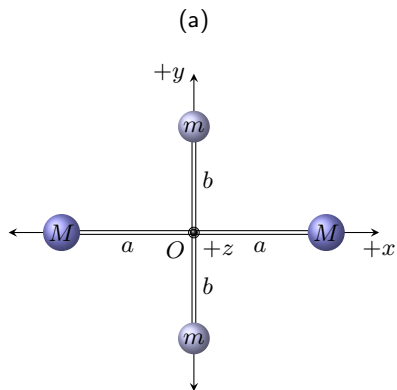
Las cantidades  $I$  y  $\omega$  (movimiento rotacional) son análogas a  $m$  y  $v$  (movimiento traslacional). El momento de inercia mide la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional.

### Ejemplo

Cuatro esferas se amarran a los extremos de dos barras rígidas de masas despreciables que yacen en el plano  $xy$  (ver figura adjunta). Suponga los radios de las esferas son pequeños en comparación con las longitudes de las barras.

(a) Si el sistema da vueltas en torno al eje  $y$  con una rapidez angular  $\omega$ , determine el momento de inercia y la energía rotacional del sistema en torno a ese eje.

(b) Suponga que el sistema da vueltas en el plano  $xy$  en torno a un eje (el eje  $z$ ) a través de  $O$ . Determine el momento de inercia rotacional y la energía cinética rotacional en torno a ese eje.



Cuatro esferas formando un bastón inusual. (a) El bastón rota en torno del eje  $y$ .  
 (b) El bastón rota en torno del eje  $z$ .

## Solución

(a) El bastón gira en torno de  $y$  con rapidez angular  $\omega$ :

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

y la energía cinética rotacional es

$$K_{R,y} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2.$$

(b) El bastón gira en torno del eje  $z$  con rapidez angular  $\omega$ :

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = mb^2 + mb^2 + Ma^2 + Ma^2 = 2(mb^2 + Ma^2)$$

y la energía cinética rotacional es

$$K_{R,z} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} [2(mb^2 + Ma^2)] \omega^2 = (mb^2 + Ma^2) \omega^2$$

¿**Tarea**? ¿Y si la masa  $M$  es mucho mayor que  $m$ , cómo se comparan las respuestas de los ítems (a) y (b)?

El momento de inercia de un objeto extendido se calcula considerando al objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno de ellos con masa  $\Delta m_i$ . Se usa la definición

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

y se toma el límite en esa sumatoria a medida que  $\Delta m_i$  tiende a cero. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad (17)$$

Generalmente, es más fácil calcular momentos de inercia en término del volumen de los elementos en lugar de sus masas.



Asuma que  $\rho \equiv m/V$ :  $V$  (volumen);  $\rho$  (**densidad de masa volumétrica**, o masa por unidad de volumen). Así,  $dm = \rho dV$ , y la Ec.17 se reescribe como

$$I = \int \rho r^2 dV$$

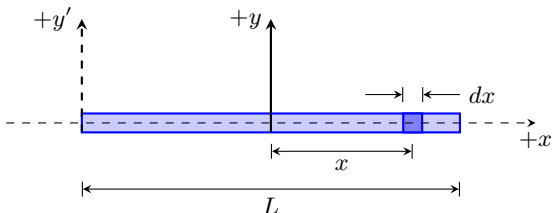
Si la masa está distribuida homogéneamente,  $\rho = \text{cte.}$ : La integral puede ser evaluada para una geometría conocida. Si  $\rho \neq \text{cte.}$ : Es necesario conocer su variación con la posición para evaluar la integral.

Para una lámina de espesor uniforme  $t$ , se puede definir una **densidad de masa superficial**, o masa por unidad de superficie,  $\sigma = M/A = \rho t$ .

Por último, para una barra de área de sección transversal uniforme,  $A$ , a veces se usa la **densidad de masa lineal** o masa por unidad de longitud,  $\lambda = M/L = \rho A$ .

## Ejemplo

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$ , en torno a un eje perpendicular a la barra y que pasa a través de su centro de masa (eje  $y$  en la figura adjunta).



*Barra rígida uniforme de longitud  $L$ .*

## Solución

El momento de inercia de la barra rígida, con densidad lineal de masa uniforme  $\lambda = M/L$  y  $dm = \lambda dx$ , es dada por

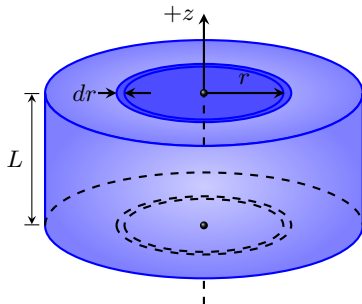
$$\begin{aligned} I_{\text{cdm}} &= \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 (\lambda dx) = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \lambda \left[ x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{3} \lambda \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( \frac{-L}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3} \lambda \left[ \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right] \end{aligned}$$

de la cual se obtiene, usando  $\lambda = M/L$ ,

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{3} \lambda \left( \frac{L^3}{4} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{M}{\cancel{L}} \right) \left( \frac{\overset{2}{L^3}}{4} \right) = \frac{1}{12} ML^2$$

### Ejemplo

Un cilindro sólido de masa uniforme tiene un radio  $R$ , masa  $M$  y longitud  $L$ . Calcule el momento de inercia del cilindro en torno a su eje central (el eje  $z$  en la figura anexa).



*Diagrama de un cilindro sólido.*

## Solución

Sabemos que  $\rho = M/V$  de modo tal que  $dm = \rho dV$ .

Consideremos un cascarón cilíndrico de radio central  $r$ , ancho  $dr$  y de altura  $L$ .

El elemento de área de ese cascarón es  $dA = 2\pi r dr$  y su elemento de volumen es  $dV = LdA = 2\pi Lr dr$ . El elemento de masa para ese cascarón es

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi Lr dr)$$

El momento de inercia es, entonces,

$$I_z = \rho(2\pi L) \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = \rho(2\pi L) \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r=0}^{r=R} = \rho(2\pi L) \frac{R^4}{4} = \rho \left( \frac{1}{2} \pi L R^4 \right)$$

## Continuación

Dado que  $\rho = M/V$ , y el volumen del cilindro es,

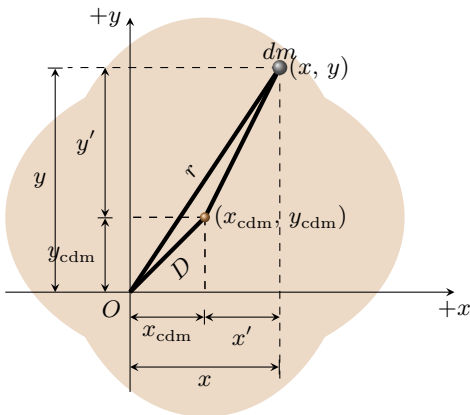
$$V = \pi R^2 L$$

se tiene

$$I_z = \left( \frac{M}{\cancel{\pi R^2} \cancel{L}} \right) \left( \frac{1}{2} \cancel{\pi R^2} \cancel{L} R^{\cancel{2}} \right) = \frac{1}{2} M R^2$$

**¿Tarea?** Suponga que la longitud del cilindro aumenta a  $2L$ , mientras que la masa  $M$  y el radio  $R$  se mantienen fijos. ¿Cómo cambia el momento de inercia del cilindro?

Cálculos de momentos de inercia en torno a un eje arbitrario pueden ser complicados (aún para objetos simétricos).



**Figura 6.** Si el momento de inercia en torno a un eje perpendicular a la figura a través del centro de masa es  $I_{cdm}$ , el momento de inercia en torno al eje  $z$  es  $I_z = I_{cm} + MD^2$ .

Imagine un objeto rotando en torno al eje  $z$ , como mostrado en la **Fig.6**.

---

**El momento de inercia de un objeto en rotación no depende de como se distribuye la masa a lo largo del eje de rotación; como se encontró en un ejemplo anterior.**

---

El objeto tridimensional colapsa en un objeto plano como en la **Fig.6**. Toda la masa se distribuye en el plano  $xy$ .

Las coordenadas del centro de masa del objeto ahora son  $x_{\text{cdm}}$ ,  $y_{\text{cdm}}$  y  $z_{\text{cdm}} = 0$ .

Sea  $dm$  el elemento de masa de coordenadas  $x, y, 0$ . Ese elemento está a una distancia  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  del eje  $z$ , así el momento de inercia en torno al eje  $z$  es

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

Es posible relacionar las coordenadas  $(x, y)$  de  $dm$  a las coordenadas del mismo elemento con el centro de masa del objeto como origen.



Si las coordenadas del centro de masa son  $x_{\text{cdm}}$ ,  $y_{\text{cdm}}$  y  $z_{\text{cdm}} = 0$ , en el sistema de coordenadas original con centro en  $O$ , se puede ver en la **Fig.6** que la correspondencia entre las coordenadas “no primas” y “primas” son  $x = x' + x_{\text{cdm}}$ ,  $y = y' + y_{\text{cdm}}$  y  $z = z' = 0$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ (x' + x_{\text{cdm}})^2 + (y' + y_{\text{cdm}})^2 \right] dm \\ &= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{\text{cdm}} \int x' dm + 2y_{\text{cdm}} \int y' dm \\ &\quad + [(x_{\text{cdm}})^2 + (y_{\text{cdm}})^2] \int dm \end{aligned}$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia  $I_{\text{cdm}}$  en torno a un eje que es paralelo al eje  $z$  que pasa a través del centro de masa.

Las siguientes dos integrales son cero, por definición del centro de masa,  $\int x' dm = \int y' dm = 0$ .

La última integral es simplemente  $MD^2$  porque  $\int dm = M$  y  $D^2 = x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2$ . En consecuencia, se concluye que

$$I = I_{\text{cdm}} + MD^2. \quad (18)$$

### Ejemplo

Considere, una vez más, la barra rígida de masa  $M$  y longitud  $L$  mostrada en el Ejemplo 4. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje  $y'$  en el Ejemplo 4).

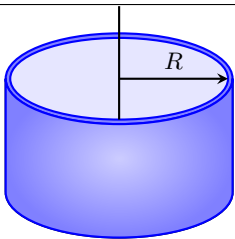
### Solución

En el Ejemplo 4 encontramos que el momento de inercia de la barra en torno a un eje que pasa por el centro de masa era

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

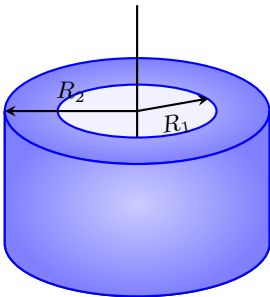
El nuevo eje de rotación está desplazado una distancia  $D = \frac{L}{2}$  de dicho centro de masa, así el momento de inercia de la barra en torno de ese eje de rotación es

$$I_{y'} = I_{\text{cdm}} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$



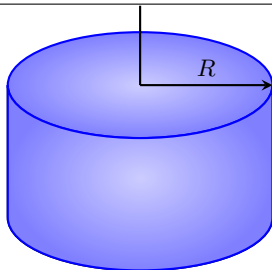
*Aro o cascarón cilíndrico delgado de radio  $R$ .*

$$I_{\text{cdm}} = MR^2$$



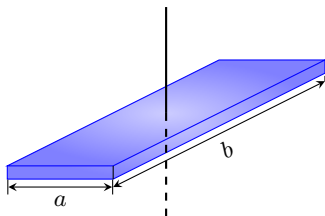
*Cilindro hueco de radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$ .*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}M (R_1^2 + R_2^2)$$



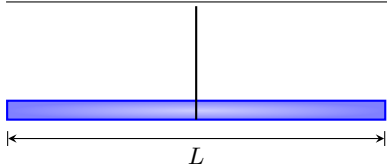
*Cilindro sólido o disco de radio  $R$ .*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}MR^2$$



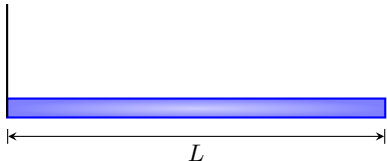
*Placa sólida rectangular delgada de ancho  $a$  y largo  $b$ .*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



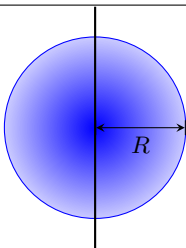
*Barra larga delgada de longitud  $L$  con eje de rotación a través del centro.*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{1}{12}ML^2$$



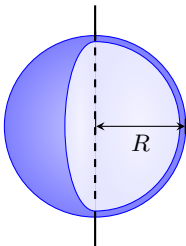
*Barra larga delgada de longitud  $L$  con eje de rotación a través de un extremo.*

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



*Esfera sólida de radio  $R$ .*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{2}{5}MR^2$$



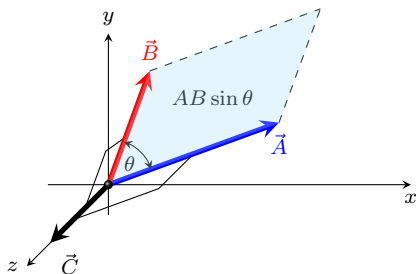
*Cascarón esférico delgado de radio  $R$ .*

$$I_{\text{cdm}} = \frac{2}{3}MR^2$$

Antes de proseguir con la aplicación de las leyes de Newton en la rotación de un objeto en torno de un eje fijo, considere, el segundo producto entre vectore; el producto *vectorial*.

Dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , el producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  es definido como un tercer vector  $\vec{C}$ , cuya magnitud es dada por el producto de las magnitudes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y el seno del ángulo formado entre ellos. Matemáticamente, se tiene

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}; \text{ con } |\vec{C}| = C = |\vec{A} \times \vec{B}| \equiv AB \sin \theta. \quad (19)$$



**Figura 7.** El producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  es un tercer vector  $\vec{C}$  de magnitud  $AB \sin \theta$  igual al área del paralelogramo formado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

Como mostrado en la **Fig.7**,  $AB \sin \theta$  es igual al área del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

La **dirección** de  $\vec{C}$  es perpendicular al plano formado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , esto es, el vector  $\vec{C}$  es perpendicular a ambos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

La **dirección** del vector  $\vec{C}$  se determina usando la regla de la mano derecha como mostrado en la **Fig.7**.

**Regla de la mano derecha.** *Los cuatro dedos de la mano derecha son alineados a lo largo del vector  $\vec{A}$  (el primer vector del producto) y se giran hacia el vector  $\vec{B}$  (el segundo vector del producto) a través del ángulo  $\theta$ . La dirección en la que apunta el dedo "pulgar" es la dirección del vector  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ .*

Debido a la notación  $\vec{A} \times \vec{B}$ , se lee " $\vec{A}$  cruz  $\vec{B}$ ", de lo que se deriva el término *producto cruz*.

### Algunas propiedades del producto vectorial

①. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no* es conmutativo. El orden en el que se multiplican los vectores es importante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}). \quad (20)$$



- ②. Si  $\vec{A}$  es paralelo a  $\vec{B}$  ( $\theta = 0^\circ$ ) o,  $\vec{A}$  es antiparalelo a  $\vec{B}$  ( $\theta = 180^\circ$ ), entonces  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ . Se sigue que  $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = \vec{0}$ .
- ③. Si  $\vec{A}$  es perpendicular a  $\vec{B}$ , entonces,  $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ .
- ④. El producto vectorial *obedece* la ley de distributividad de la multiplicación:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \quad (21)$$

De las Ec.(19) y (20) y de las definiciones de los vectores unitarios, se tiene:

$$|\hat{i} \times \hat{i}| = (1)(1)\sin^{\overset{0}{\nearrow}} = 0 \quad \rightarrow \quad |\hat{j} \times \hat{j}| = |\hat{k} \times \hat{k}| = 0.$$

de la cual se sigue que

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0} \quad (22a)$$

y

$$\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}, \quad |\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{j} \times \hat{i}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1 \quad (22b)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}, \quad |\hat{j} \times \hat{k}| = |\hat{k} \times \hat{j}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1 \quad (22c)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}, \quad |\hat{k} \times \hat{i}| = |\hat{i} \times \hat{k}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1. \quad (22d)$$

Los signos son intercambiables en los productos vectoriales. Por ejemplo:

$$\vec{A} \times (-\vec{B}) = (-\vec{A}) \times \vec{B}; \quad \text{e} \quad \hat{i} \times (-\hat{j}) = (-\hat{i}) \times \hat{j} = -\hat{k}.$$

El producto vectorial entre los vectores

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

puede ser expresado en la siguiente forma de un determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (23)$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) \xrightarrow{0} + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) \xrightarrow{\hat{k}} + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \xrightarrow{-\hat{j}} \\ & + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) \xrightarrow{-\hat{k}} + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) \xrightarrow{0} + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \xrightarrow{\hat{i}} \\ & + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) \xrightarrow{\hat{j}} + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) \xrightarrow{-\hat{i}} + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \xrightarrow{0} \end{aligned}$$

de la que resulta

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}.$$

### Ejemplo

Los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son dados por  $\vec{A} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$  y  $\vec{B} = -1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ :

- a) Calcule el producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$ .
- b) Verifique que  $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ .

### Solución

a) Tenemos:  $A_x = 2.0$ ,  $A_y = 3.0$ ,  $B_x = -1.0$ ,  $B_y = 2.0$  y  $A_z = B_z = 0$ .  
Usando la Ec.(23), encontramos:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \\ &= [(3.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{i} - [(2.0)(0) - (0)(-1.0)]\hat{j} \\ &\quad + [(2.0)(2.0) - (3.0)(-1.0)]\hat{k} = 7.0\hat{k}.\end{aligned}$$

Dado que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  yacen en el plano  $xy$ ,  $\vec{A} \times \vec{B}$  apunta en la dirección del eje- $z$ .

## Continuación

b) Sabemos que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \therefore \quad \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} = -(7.0\hat{k}) = -7.0\hat{k}.$$

La comprobación de eso es como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{B} \times \vec{A} &= (B_y A_z - B_z A_y)\hat{i} - (B_x A_z - B_z A_x)\hat{j} + (B_x A_y - B_y A_x)\hat{k} \\ &= [(2.0)(0) - (0)(3.0)]\hat{i} - [(-1.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{j} \\ &\quad + [(-1.0)(3.0) - (2.0)(2.0)]\hat{k} \\ &= -7.0\hat{k}.\end{aligned}$$

### Ejemplo

Una fuerza  $\vec{F} = (2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$  N es aplicada a un objeto que puede girar en torno de un punto fijo a lo largo del eje- $z$ . Si la fuerza es aplicada en un punto colocado en  $\vec{r} = (4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})$  m, calcule el vector torque, definido como,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ .

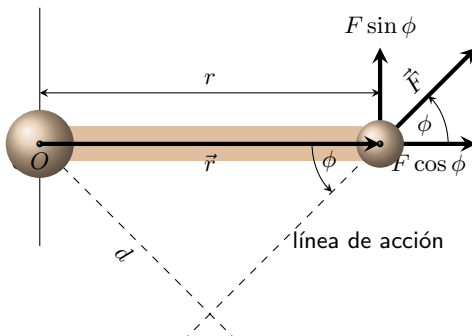
### Solución

Tenemos:  $x = 4.00$  m,  $y = 5.00$  m,  $F_x = 2.00$  N,  $F_y = 3.00$  N y  $z = F_z = 0$ .  
Aplicando la Ec.(23), se encuentra

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\&= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \\&= [(5.00\text{ m})(0) - (0)(3.00\text{ N})]\hat{i} - [(4.00\text{ m})(0) - (0)(2.00\text{ N})]\hat{j} \\&\quad + [(4.00\text{ m})(3.00\text{ N}) - (5.00\text{ m})(2.00\text{ N})]\hat{k} = [(12.0 - 10.0)\hat{k}]\text{ mN} \\&= 2.0\hat{k}\text{ mN}.\end{aligned}$$

El torque apunta en la dirección positiva del eje  $z$ , perpendicular al plano  $xy$ .

Cuando una fuerza actúa en algún punto sobre un objeto rígido que puede rotar en torno a un eje, el objeto tiende a girar en torno de dicho eje.



**Figura 8:** La componente  $F \sin \phi$  de la fuerza tiende a hacer girar el objeto en torno de un eje que pasa a través  $O$ .

La tendencia de una fuerza a hacer girar un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **momento de torsión (torque)**  $\vec{\tau}$ .

El **torque** producido por una fuerza es un vector, pero en este capítulo sólo consideraremos su magnitud.

Sea el objeto rígido mostrado en la **Fig.8** que se quiere hacer girar en torno a un eje perpendicular a la página y a través del centro del punto de giro  $O$ .

La fuerza aplicada  $\vec{F}$  actúa a un ángulo  $\phi$  con la horizontal. La magnitud del torque asociado a la fuerza  $\vec{F}$  se define como

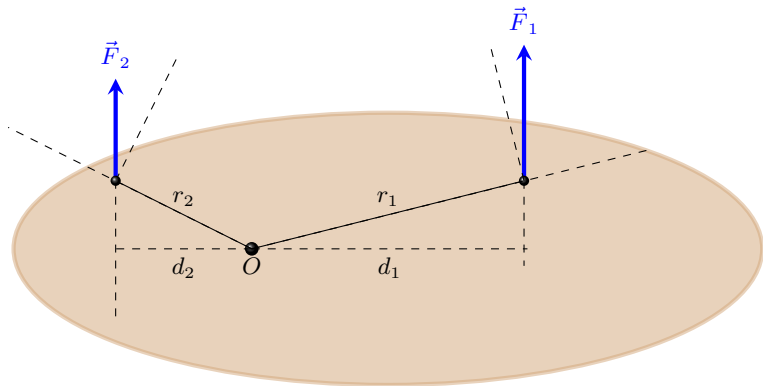
$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd, \quad (24)$$

donde  $r$  es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de  $\vec{F}$  (la **línea de acción de una fuerza** es una línea imaginaria que se extiende hacia ambos extremos del vector que representa la fuerza).

La línea discontinua que se extiende desde la cola de  $\vec{F}$  en la **Fig.8** es parte de la línea de acción de  $\vec{F}$ .

A partir del triángulo recto de la **Fig.8**, que tiene a la distancia  $r$  como su hipotenusa, se ve que  $d = r \sin \phi$ . La cantidad  $d$  se llama **brazo del momento** o **brazo de la palanca** de la fuerza  $\vec{F}$ .

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la **Fig.9**, cada una de ellas tiende a hacer rotar el objeto en torno del eje  $O$ .



**Figura 9:** La fuerza  $\vec{F}_1$  tiende a hacer girar al objeto en la dirección anti-horaria en torno al eje a través de  $O$ , y  $\vec{F}_2$  tiende a hacer girar el objeto en la dirección horaria. ¡Las fuerzas son coplanares con el objeto!



En la **Fig.9**,  $\vec{F}_2$  tiende a hacer girar el objeto en la dirección horaria y  $\vec{F}_1$ , en la anti-horaria.

Convencionalmente,  $\tau > 0$  si la fuerza tiende a hacer girar en la dirección anti-horaria, y  $\tau < 0$ ; caso contrario. Por ejemplo, en la **Fig.9**,  $\tau_1 = +F_1d_1$  y  $\tau_2 = -F_2d_2$ . Así, el **torque neto** en torno a un eje a través de  $O$  es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = +F_1d_1 - F_2d_2.$$

---

**No confundir el momento de torsión con fuerza:**

**Fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento traslacional y rotacional.**

**En el caso rotacional la efectividad de la fuerza para causar la rotación depende tanto de su magnitud como de la longitud del brazo del momento; combinación que se llama torque.**

---

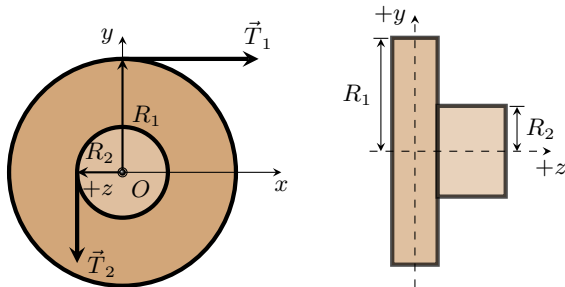
El torque tiene unidades SI (Nm). **No confunda torque y trabajo**, ambos tienen las mismas unidades pero son conceptos muy diferentes.

## Ejemplo

Un cilindro es libre de girar en torno del eje central  $z$ . Una cuerda enrollada en torno al tambor, de radio  $R_1$ , ejerce una fuerza  $\vec{T}_1$  hacia la derecha. Una cuerda enrollada en torno a la parte central, de radio  $R_2$ , ejerce una fuerza  $\vec{T}_2$  hacia abajo.

(a) ¿Cuál es el torque neto que actúa en el cilindro?

(b) Si  $T_1 = 5.0 \text{ N}$ ,  $R_1 = 1.0 \text{ m}$ ,  $T_2 = 15.0 \text{ N}$  y  $R_2 = 0.50 \text{ m}$ . ¿Cuál es el torque y de que forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?



## Solución

(a) El torque debido a  $\vec{T}_1$  es horario, esto es

$$\tau_1 = -R_1 T_1$$

y el torque debido a  $\vec{T}_2$  es anti-horario, esto es

$$\tau_2 = +R_2 T_2$$

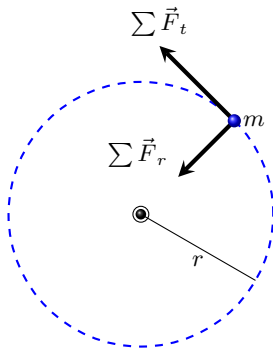
El torque neto sobre el cilindro es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = +R_2 T_2 - R_1 T_1$$

(b) Usando los datos para el ítem (b), se tiene

$$\sum \tau = +(0.50 \text{ m})(15.0 \text{ N}) - (1.0 \text{ m})(5.0 \text{ N}) = +2.5 \text{ N m}$$

Una partícula se mueve en una trayectoria circular en torno de un punto fijo bajo una fuerza externa.



**Figura 10:** Partícula girando en una trayectoria circular bajo la influencia de una fuerza tangencial neta  $\sum \vec{F}_t$ . La fuerza neta  $\sum \vec{F}$  no es mostrada.

La componente radial de la fuerza neta hace que la partícula se mueva sobre la trayectoria circular con una aceleración centrípeta de magnitud  $a_r$ .

La componente tangencial de la fuerza neta proporciona una aceleración tangencial de magnitud  $\vec{a}_t$  y

$$\sum F_t = ma_t$$

La magnitud del torque neto debido a  $\sum \vec{F}_t$  en la partícula en torno a un eje a través del centro del círculo es

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r.$$

Ya que  $a_t = r\alpha$ , el torque neto se expresa como

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha.$$

Recuerde que  $mr^2$  es el momento de inercia de la partícula en torno al eje de rotación que pasa a través del origen, de modo que

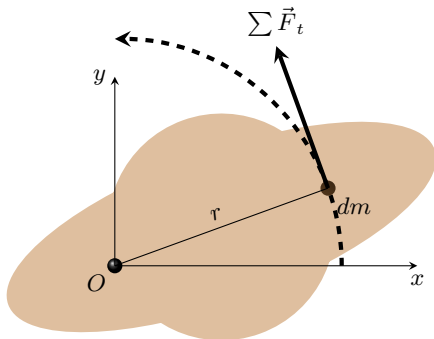
$$\boxed{\sum \tau = I\alpha.} \quad (25)$$

---

**El torque neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Note que  $\sum \tau = I\alpha$  tiene la misma forma matemática que la segunda ley de movimiento de Newton  $\sum F = ma$ .**

---

Sea un objeto rígido de forma arbitraria girando en torno de un eje fijo, como mostrado en la **Fig.11**. Considere al objeto como un conjunto de elementos infinitesimales de masa  $dm$ .



**Figura 11:** Objeto rígido girando en torno a un eje a través de  $O$ . Cada elemento de masa  $dm$  gira en torno de  $O$  con la misma aceleración angular.

Usemos coordenadas Cartesianas. Cada elemento de masa  $dm$  gira en un círculo en torno al origen y con una aceleración tangencial  $\vec{a}_t$  producida por una fuerza tangencial infinitesimal externa  $\sum d\vec{F}_t$ . Se tiene

$$dF_t = (dm)a_t.$$

El torque infinitesimal  $d\tau$  asociado a la fuerza  $d\vec{F}_t$  es

$$d\tau = r dF_t = a_t r dm$$

Dado que  $a_t = r\alpha$ , la expresión para  $d\tau$  se convierte a

$$d\tau = \alpha r^2 dm$$

Cada elemento de masa  $dm$  tiene una aceleración traslacional  $\vec{a}_t$  diferente, pero todos ellos tienen la *misma* aceleración angular  $\alpha$ .

Integrando la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto nos da

$$\sum \tau = \alpha \int r^2 dm.$$

Sabemos que  $\int r^2 dm$  es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación a través de  $O$  y, consecuentemente, se tiene

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha.} \quad (26)$$

representación matemática del modelo de análisis de un **objeto rígido bajo un torque neto**.

Por último, note que el resultado  $\sum \tau = I\alpha$  también se aplica cuando las fuerzas que actúan sobre los elementos de masa tienen componentes radiales así como componentes tangenciales:

---

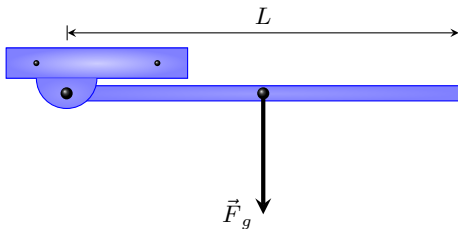
**La línea de acción de todas las componentes radiales debe pasar a través del eje de rotación; en consecuencia, todas las componentes radiales producen un momento de torsión cero en torno de dicho eje.**

---



## Ejemplo

Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de girar en torno al pivote en el plano vertical, como se muestra en la figura adjunta. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido libre?



*Esquema de una barra que puede girar en torno de un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa sobre el centro de masa de la barra.*

## Solución

La única fuerza que actúa sobre la barra es la gravitacional y actúa sobre el centro de masa de la barra. El torque sobre la barra es

$$\sum \tau = \sum F_t r = -\frac{L}{2} F_g = -Mg \frac{L}{2}$$

(el signo negativo es porque la fuerza produce un momento de torsión horario).

Por otro lado, sabemos que,  $\sum \tau = I\alpha$ , y que el momento de inercia de la barra en torno de un eje que pasa por uno de sus extremos es  $I = \frac{1}{3}ML^2$ , de modo tal que

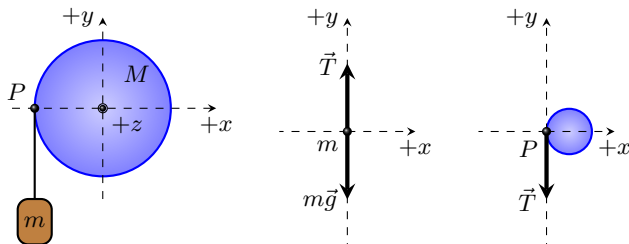
$$I\alpha = -Mg \frac{L}{2}, \quad \alpha = -\frac{MLg}{2I} = -\frac{3MLg}{2ML^2} = -\frac{3g}{2L}$$

Ahora, la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración angular a través de  $a_t = r\alpha$ , de modo que para el extremo rígido libre

$$a_t = L\alpha = -L \left( \frac{3g}{2L} \right) = -\frac{3}{2}g$$

## Ejemplo

Una rueda de radio  $R$ , masa  $M$  y momento de inercia  $I$  se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como mostrado en la figura adjunta. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa  $m$ . Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión en la cuerda.



*Objeto de masa  $m$  que cuelga de una cuerda que pasa por un extremo de una rueda de radio  $R$ . Diagramas de cuerpo libre para el objeto de masa  $m$  y el punto de aplicación de la tensión  $P$  en la rueda.*

## Solución

Aplicando la segunda ley de Newton al objeto de masa  $m$ , se tiene

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = T - mg = ma_y = -ma, \quad T = m(g - a)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al punto  $P$  sobre la rueda, se tiene

$$\sum F_t = -T.$$

De la definición del momento de torsión neto se tiene

$$\sum \tau = \sum F_t r = -TR$$

Pero  $\sum \tau = -I\alpha$  de modo tal que

$$TR = I\alpha, \quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

Igualando las expresiones para  $T$ , se tiene

$$\frac{I\alpha}{R} = m(g - a) \quad \rightarrow \quad ma = mg - \frac{I}{R}\alpha$$

## Continuación

Dado que la aceleración del objeto es igual a la aceleración tangencial del punto sobre la rueda y  $\alpha = a/R$ , se tiene

$$ma = mg - \frac{I}{R} \left( \frac{a}{R} \right), \quad a \left( m + \frac{I}{R^2} \right) = mg, \quad a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Sustituyendo esa expresión en  $T$ , la tensión en la cuerda es

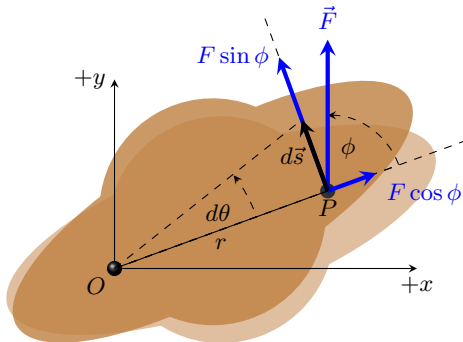
$$T = m(g - a) = mg \left( 1 - \frac{mR^2}{mR^2 + I} \right) = mg \left( \frac{I}{mR^2 + I} \right)$$

Finalmente, la aceleración angular de la rueda es

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R \left( 1 + \frac{I}{mR^2} \right)} = \frac{g}{R + \frac{I}{mR}}$$

**Tarea.** Y si la rueda se volviese tan pesada de modo que  $I$  fuera muy grande, ¿qué sucedería con la aceleración  $a$  del objeto y la tensión  $T$  en la cuerda?

Anteriormente estudiamos la energía cinética de un objeto rígido. Extenderemos la explicación de dicha energía y veremos como una aproximación energética es útil para resolver problemas de cuerpos en rotación.



**Figura 12:** Un objeto rígido que gira en torno a un eje a través de  $O$  bajo la acción de una fuerza externa aplicada en el punto  $P$ .

Analisemos el objeto rígido articulado en  $O$  en la **Fig.12**. Suponga que una sola fuerza externa  $\vec{F}$  se aplica en  $P$ , donde  $\vec{F}$  yace en el plano de la página.

El trabajo realizado por  $\vec{F}$  sobre el objeto a medida que su punto de aplicación da vuelta a través de una distancia infinitesimal  $ds = r d\theta$  es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

donde  $F \sin \phi$  es la componente tangencial de  $\vec{F}$ , es decir, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

Note que el vector componente radial de  $\vec{F}$  no realiza trabajo sobre el objeto porque es perpendicular al desplazamiento en el punto de aplicación de  $\vec{F}$ .

Dado que la magnitud del torque debido a  $\vec{F}$  en torno a un eje a través de  $O$  es definido como  $rF \sin \phi$ , el trabajo realizado en la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$\boxed{dW = \tau d\theta.} \quad (27)$$

La rapidez a la que la fuerza  $\vec{F}$  realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo  $d\theta$  en un intervalo de tiempo  $dt$  es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Dado que  $dW/dt$  es la potencia instantánea  $\mathcal{P}$  entregada por la fuerza y  $d\theta/dt = \omega$ , esa expresión se reduce a

$$\boxed{\mathcal{P} = \tau\omega.} \quad (28)$$

Esta ecuación es análoga a  $\mathcal{P} = Fv$  en el caso del movimiento traslacional y la Ec.(27) es análoga a  $dW = F_x dx$

En el estudio del movimiento traslacional, los modelos de acuerdo con la aproximación energética pueden ser extremadamente útiles para describir el comportamiento de un sistema.

Se espera, de ese estudio, que cuando un objeto simétrico gira en torno de un eje fijo, el trabajo invertido por fuerza externas sea igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto.



Comencemos con la expresión  $\sum \tau = I\alpha$ . Usando la regla de la cadena del cálculo diferencial, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

Reordenando esa expresión y recordando que  $\sum \tau d\theta = dW$ , se obtiene

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema rotativo,

$$W = \int_{\omega=\omega_i}^{\omega=\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \Delta K_R. \quad (29)$$

---

**Teorema trabajo-energía cinética para el movimiento rotacional:**

*El trabajo neto realizado por fuerzas externas en un objeto rígido en rotación en torno de un eje fijo es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto.*

---

Este teorema es una forma del modelo de sistema no aislado visto en un curso anterior. En el sistema del objeto rígido se invierte trabajo, el cual representa una transferencia de energía a través de las fronteras del sistema y que aparece como un aumento en la energía cinética rotacional del objeto.

En general, es posible combinar este teorema con la forma traslacional del teorema trabajo-energía cinética visto en el curso anterior. Se sigue que, el trabajo neto realizado por fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional.

Además del teorema trabajo-energía cinética, también se aplican otros principios de energía a situaciones rotacionales. Por ejemplo, si un sistema que involucra objetos rotativos se aísla y dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se puede usar el modelo de sistema aislado y el principio de conservación de la energía mecánica para analizar el sistema como en el siguiente ejemplo.

Finalmente, en algunas situaciones una aproximación energética no proporciona suficiente información para resolver problemas y se debe combinar con un planteamiento de cantidad de movimiento.

## Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

## Movimiento rotacional en torno a un eje fijo

Rapidez angular  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Aceleración angular  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Momento de torsión neto  $\sum \tau = I\alpha$

Si  $\alpha = \text{cte.}$  
$$\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$$

Trabajo  $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$

Energía cinética rotacional  $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

Potencia  $\mathcal{P} = \tau\omega$

Momentum angular  $L = I\omega$

Momento de torsión neto  $\sum \tau = \frac{dL}{dt}$

## Movimiento traslacional

Rapidez traslacional  $v = \frac{dx}{dt}$

Aceleración traslacional  $a = \frac{dv}{dt}$

Fuerza neta  $\sum F = ma$

Si  $a = \text{cte.}$  
$$\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$$

Trabajo  $W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$

Energía cinética traslacional  $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potencia  $\mathcal{P} = Fv$

Momentum lineal  $p = mv$

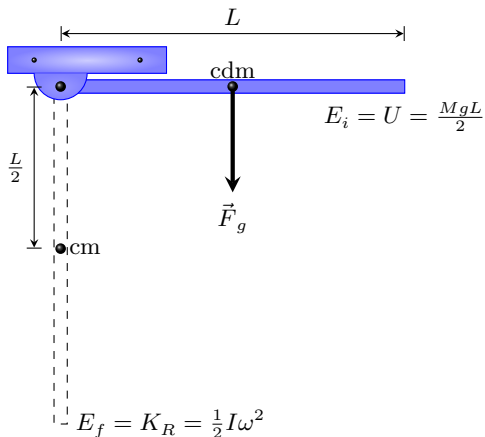
Fuerza neta  $\sum F = \frac{dp}{dt}$

## Ejemplo

Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  tiene la libertad de girar en torno de un pivote sin fricción que pasa a través de uno de sus extremos (ver figura adjunta). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.



*Barra rígida uniforme con centro de giro en O que puede girar en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.*

## Solución

A) La masa de la barra está concentrada en su centro de masa. Para la barra horizontal, antes de soltarla, la energía mecánica inicial del sistema es igual a la energía potencial gravitacional de la barra

$$E_i = U = Mg \left( \frac{L}{2} \right)$$

En la posición vertical, la energía mecánica del sistema es igual a la energía cinética rotacional de la barra

$$E_f = K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Por conservación de la energía mecánica del sistema se tiene

$$E_f = E_i, \quad Mg \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad \omega^2 = \frac{MgL}{I}$$

El  $I$  de una barra que gira en torno de uno de sus extremos, es  $I = \frac{1}{3} ML^2$ , luego

$$\omega = \sqrt{\frac{3MgL}{ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

### Continuación

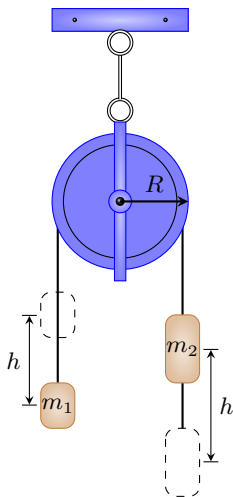
B) Como visto anteriormente, la rapidez angular  $\omega$  se relaciona con la rapidez tangencial  $v$  a través de  $\omega = v/r$  donde  $r$  es el radio de la trayectoria circular. Así, la rapidez tangencial del centro de masa y del extremo de la barra en la posición vertical son, respectivamente

$$v_{\text{cm}} = r_{\text{cm}}\omega = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3}{4}gL}$$

$$v_{\text{ext}} = r_{\text{ext}}\omega = L\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL}$$

## Ejemplo

Dos cilindros que tienen masas diferentes  $m_1$  y  $m_2$  están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea, como mostrado en la figura. La polea tiene un radio  $R$  y un momento de inercia  $I$  en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza sobre la polea y el sistema se libera desde el reposo. Encuentre las magnitudes de velocidades traslacionales de los cilindros después de que el cilindro 2 desciende una distancia  $h$ , y encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.



*Máquina de Atwood con una polea pesada.*

## Solución

Considere el reposo como el estado de configuración cero para la energía mecánica del sistema, esto es,

$$E_i = K_1 + U_1 + K_2 + U_2 + K_R = 0$$

Una vez liberado, la energía mecánica del sistema es,

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + gh(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

La rapidez traslacional de ambos cilindros es la misma  $v_1 = v_2 = v$ . Usando conservación de la energía, da

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = hg(m_2 - m_1)$$

La rapidez tangencial de la polea en el punto de contacto con la cuerda es igual a la rapidez de los cilindros: Usando  $\omega = v/R$ , se tiene,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = hg(m_2 - m_1),$$



### Continuación

De la expresión anterior se obtiene

$$v^2 = \frac{2hg(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

o, explícitamente

$$v = \sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

La rapidez angular de la polea es

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$