Clase 18: Representación de funciones mediante series de potencias

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Serie de potencias como una función

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

Comenzamos observando que una serie de potencias puede ser interpretada como una función que depende de x dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

cuyo dominio son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie converge, es decir, el dominio de f es el intervalo de convergencia de la serie.

Derivada e integral de una serie de potencias

Teorema

Teorema 18.1

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es una serie de potencias convergente sobre $]a-R, a+R[$ con radio de convergencia $R > 0$ o $R = +\infty$, entonces para cada $x \in]a-R, a+R[$ se tiene que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C.$$

Y además, el radio de convergencia de f' y $\int f(x)dx$ es el mismo que de f.

Derivada e integral de una serie de potencias

Ejemplo 1

Observación. Aunque el Teorema establece que el radio de convergencia de f' y $\int f(x)dx$ es el mismo que de f, esto NO quiere decir que el intervalo de convergencia sea el mismo.

Por ejemplo, dada la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)^2}$ convergente para $x \in [-2, 2]$ se tiene que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n(n+1)^2} \text{ y } \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{2^n(n+1)^3} + C$$

y sus intervalos de convergencia son $]-2, 2[$ y $[-2, 2[$, respectivamente.

Derivada e integral de una serie de potencias

Ejemplo 2

Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

se puede mostrar que su intervalo de convergencia es $[-1,1[$. Sin embargo, el intervalo de convergencia de

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{y} \quad \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + C$$

es $]-1,1[$ y $[-1,1]$, respectivamente.

Exponencial como serie de potencias

Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Notar que f es derivable y $R = +\infty$ (clase 17).
Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Por otro lado, al definir $h(x) = f(x)e^{-x}$ se tiene que

$$h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \Rightarrow h(x) = C$$

O sea, $f(x)e^{-x} = C$ y así $f(x) = Ce^x$. Pero como $f(0) = C = 1$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exponencial como serie de potencias

Observación

Con lo realizado previamente, podemos afirmar por ejemplo que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Haciendo uso de la serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + \quad \text{para } |x| < 1$$

1. Muestre que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| < 1$.

2. Muestre que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, con $-1 < x < 1$.

3. Encuentre una representación de series de potencias centrada en cero de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}$.

Solución 1.

Reemplazando x por $-x$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 ... + \quad \text{para } |-x| = |x| < 1$$

Y ahora, reemplazando x por x^2

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 ... + \quad \text{para } |x^2| < 1$$

donde $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Podemos integrar la expresión anterior para obtener:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

De donde sigue que:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\ , \ |x| < 1$$

Solución 3.

Tenemos que

$$f(x) = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x}$$

Luego, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ con $|x| < 1$ y además,

$$\frac{3}{3+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^n \quad , \; -3 < x < 3$$

Finalmente,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} - 1 \right) x^n \quad , \; x \in]-1, 1[$$

Terminamos este curso enfrentando el siguiente problema:

Dada una función f infinitamente diferenciable sobre un intervalo abierto $I = (a - R, a + R)$ con $R > 0$ o $R = +\infty$, queremos encontrar (si es posible) una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ que represente a f sobre I.

Como veremos, este problema se resuelve con las llamadas series de Taylor. Tales series, pueden brindar útiles aproximaciones polinomiales de las funciones que las generaron.

Series de Taylor

Construcción

Supongamos que f es cualquier función infinitamente diferenciable que se puede representar mediante una serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + .. + a_n(x-a)^n + .. +$$

Luego,

$$\begin{gathered} f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots \\ f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \ldots \\ f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \ldots \end{gathered}$$

y así sucesivamente. Luego, evaluando en $x = a$, tenemos

$$f(a) = a_0,\ f'(a) = 1!a_1,\ f''(a) = 2!a_2,\ f'''(a) = 3!a_3\ \ldots$$

y en general,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ ,\ n \geq 0$$

Serie de Taylor

Definición

De lo anterior, hemos concluido lo siguiente:

Teorema 18.2

Si f es una función infinitamente diferenciable que posee una representación en series de potencias $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ sobre un abierto $(a-R, a+R)$, entonces debe ser de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \quad (**)$$

La serie $(**)$ se llama Serie de Taylor de f en a. Si $a = 0$, entonces la serie se denomina **Serie de Maclaurin** de f.

Ejemplo 1
Serie de Taylor

A modo de ejemplo, consideremos la función $f(x) = e^x$ que ya sabemos que se puede expresar para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante una serie de potencias (visto en la página 6). Las derivadas de f están dadas por $f^{(n)}(x) = e^x$ y luego $f^{(n)}(0) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Serie de Taylor
Pregunta

Sabemos que dada una función f infinitamente diferenciable sobre un abierto, siempre podemos construir la serie de Taylor de f entorno a algún punto a. La pregunta que surje es la siguiente

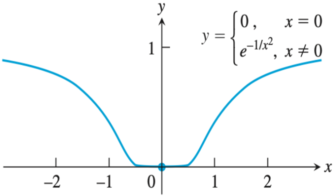
¿Siempre la serie de Taylor converge a la función que la genera?

Ejemplo 2
Serie de Taylor

Lamentablemente, NO. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ y $f^{(n)}(0) = 0$ para cada n. Así, su serie de Taylor es la función nula $g(x) = 0$ que no coincide con la f original.



Ejemplo 3

Serie de Taylor

- Verifique que las series de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

respectivamente y son convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Verifique que la serie de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ centrada en $a = 1$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

y que su intervalo de convergencia es $]0, 2]$.

La pregunta fundamental de si una serie de Taylor representa la función que la generó puede resolverse por medio del teorema de Taylor.

Teorema 18.3

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I que contiene al punto a, entonces para cada $x \in I$ existe z entre x y a tal que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

La función $R_n(x)$ se llama **residuo de orden** n y $T_n(x)$ se llama **polinomio de Taylor de orden** n.

Teorema de Taylor

Observación

A partir del Teorema de Taylor tenemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para cada $x \in]a-R, a+R[$ con $R > 0$ o $R = \infty$.

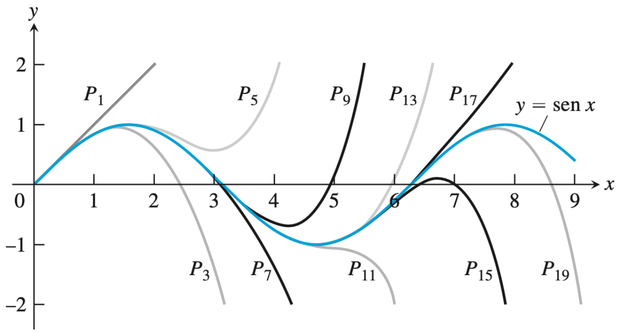
Por lo tanto, si logra mostrar de algún modo que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ ,$$

entonces la serie de Taylor converge a la función que la generó.

Ejemplo

La siguiente imagen permite visualizar como se aproximan los polinomios de Taylor asociados a la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ a medida que aumenta el orden.



Para una mejor visión de esto, presione el siguiente enlace

`https://www.geogebra.org/m/CFsbxMfx`

Ejemplo

Aplicación Teorema de Taylor

Hemos visto que la serie de Taylor asociada a $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entorno a $a = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Para mostrar que esta serie converge a $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ basta ver que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Notamos que

$$f^{n+1}(x) = \pm \operatorname{sen}(x) \quad f^{n+1}(x) = \pm \cos(x)$$

y luego, $|f^{n+1}(z)| \leq 1$ cualquiera sea $z \in \mathbb{R}$. Así, para cualquier x fijo (pero arbitrario),

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejemplo

Aplicación Teorema de Taylor

Y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0$$

dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ es convergente, se tiene por el Teorema del Sandwich que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y por consiguiente $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Así,

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Ejercicios

1. Calcular la serie de Mclaurin de la función $f(x) = \ln(x+1)$
2. Encontrar el polinomio de taylor de orden 3 de $h(x) = e^{3x}$ en el punto $x = -1$.
3. Exprese el polinomio definido por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ en potencias de $(x-2)$.
4. Si $f(x) = x^6 - x^3$. ¿Cual es el coeficiente para el término que contiene a $(x+2)^4$ en el polinomio de taylor de f centrado en $x = -2$?

Soluciones

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

2. $p_3(x) = \dfrac{1}{e^3} + \dfrac{3(x+1)}{e^3} + \dfrac{9(x+1)^2}{e^3} + \dfrac{27(x+1)^3}{e^3}$

3. Para solucionar esto, basta encontrar el polinomio de taylor de f entorno a 2, así:

$$f(x) = -(x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

4. Basta construir el polinomio de taylor de f entorno a -2, así:

$$72 - 204\,(x+2) + 246\,(x+2)^2 - 161\,(x+2)^3 + 60\,(x+2)^4$$

de donde sigue que 60 es el coeficiente que buscábamos.