UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra III
525201
14 de abril de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Operadores lineales (parte 1)

Definición 1 *Un* Operador Lineal *es una función $T : V \to V$, con V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $(\forall u, v \in V)\ T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $(\forall u \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{K})\ T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

A partir de este punto se les invita a recordar la materia de Álgebra II sobre el tema. Ahora continuamos con la materia del presente curso.

Propiedad 1 *Dado T un operador lineal en el e.v. V se cumple:*

- $\{0\} \subseteq Ker(T) \subseteq Ker(T^2) \subseteq ...Ker(T^k) \subseteq Ker(T^{k+1})$
- $V \supseteq Im(T) \supseteq Im(T^2) \supseteq ...Im(T^k) \supseteq Im(T^{k+1})$
- *Si $Ker(T^k) = Ker(T^{k+1})$, entonces $Im(T^k) = Im(T^{k+1})$.*
- *Si $Ker(T^k) = Ker(T^{k+1})$, entonces $Ker(T^k) = Ker(T^l)$, para todo $l \geq k$.*
- *Si $Im(T^k) = Im(T^{k+1})$, entonces $Im(T^k) = Im(T^l)$, para todo $l \geq k$.*

Polinomio evaluado en un operador

Definición 2 *Dado un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y un operador lineal T se define el operador $p(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$, donde T^i representa a la composición de T consigo mismo i veces.*

Propiedad 2 *Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, un operador lineal T y un escalar α se cumplen las siguientes propiedades.*

- *$p(T)$ es un operador lineal.*
- *Si $p(x) = 1$, entonces $p(T) = id$*
- *Si $p(x) = 0$, entonces $p(T) = \Theta$*
- $(\alpha p)(T) = \alpha p(T)$
- $(p + q)(T) = p(T) + q(T)$
- $(pq)(T) = p(T) \circ q(T) = q(T) \circ q(T)$

Por su simpleza, son particularmente importantes las potencias de polinomios mónicos de grado 1, es decir aquellos de la forma $(x-\lambda)^i$, nos interesaremos entonces en los operadores del tipo $(T-\lambda id)^i$.

Espacios T-invariantes

Definición 3 *Dado un operador lineal T, un s.e.v. $S \subseteq V$ se dice* T-invariante *si cumple $T(S) \subseteq S$, o en otras palabras, si cumple:*

$$(\forall s \in S)\ T(s) \in S.$$

Observamos que si S es T-invariante, es posible definir la restricción de T a S: $T|_S : S \to S$. Ésta es una propiedad interesante y por lo tanto identificar espacios T invariantes será uno de nuestros objetivos.

Propiedad 3 *Dado $p(x)$ un polinomio y T un operador lineal, los espacios $Ker(p(T))$ y $Im(p(T))$ son T-invariantes.*

Suma directa

Entendiendo que la suma de espacios vectoriales consiste en el conjunto de vectores que se escriben como suma de elementos de los espacios sumandos, es decir, dados n s.e.v $\{U_i\}_{i=1}^n$ se define el espacio suma como:

$$U_1 + U_2 + ... + U_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i \ : \ (\forall i \in \{1,..,n\})\ u_i \in U_i \right\}.$$

La noción de suma directa también tiene sentido cuando se suman varios espacios, pero su definición difiere del caso en que sólo se suman dos espacios.

Definición 4 *Decimos que n s.e.v $\{U_i\}_{i=1}^n$ están en* suma directa *si cumplen:*

$$(\forall u \in U_1 + U_2 + ... + U_n)(\exists! u_1 \in U_1)(\exists! u_2 \in U_2)...(\exists! u_n \in U_n)\ u = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

En el contexto de operadores lineales, la suma directa es importante si los espacios son además T-invariantes.

Propiedad 4 *Dado un operador lineal T en un e.v. de dimensión finita V y $\{U_i\}_{i=1}^n$ s.e.v T-invariantes que además están en* suma directa*, se tiene que $S = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ es también T-invariante y la matriz representante de $T|_S$ respecto a una base consistente en la unión de las bases de cada U_i es una matriz diagonal por bloques, cada bloque correspondiente a un espacio U_i.*