

Medidas.

- Definición de medida.
- Ejemplos de medidas.
- Propiedades de medidas.
- Medidas con signo.
- C.T.P. (casi todo punto).

Definición de medida.

Los elementos de una familia de conjuntos $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ son **mutuamente disjuntos** (o **disjuntos dos a dos**), si $\forall \alpha, \beta \in A : \alpha \neq \beta, E_\alpha$ y E_β son disjuntos.

En tal caso, la unión de los E_α se suele denotar así: $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$.

Def.: Sea (X, \mathcal{X}) un espacio medible. $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una **medida**, si:

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) $\forall E \in \mathcal{X}, \mu(E) \geq 0$ y

c) dados $E_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}$, mutuamente disjuntos, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

En tal caso, a (X, \mathcal{X}, μ) se le denomina un **espacio de medida**.

Notemos que puede ocurrir que $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$, bien sea porque para algún $n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) = \infty$ o bien porque la serie diverja.

Def.: • Una medida μ es **finita**, si $\mu(X) < \infty$.
• Una medida μ es **σ -finita**, si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ con $\mu(E_n) < \infty$.

Ejemplos de medidas.

Sea (X, \mathcal{X}) un espacio medible. Las siguientes μ son medidas.

Ej.

- $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\mu(E) := 0 \ \forall E \in \mathcal{X}$ es la **medida nula**.
- $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\mu(\emptyset) := 0$ y $\mu(E) := +\infty \ \forall E \in \mathcal{X} : E \neq \emptyset$, es una medida.
- Dado $p \in X$, $\mu_p : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida $\forall E \in \mathcal{X}$ por
$$\mu_p(E) := \begin{cases} 1, & \text{si } p \in E, \\ 0, & \text{si } p \notin E, \end{cases}$$
es la **medida concentrada en p** .

- Sean $X := \mathbb{N}$ y $\mathcal{X} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida $\forall E \subset \mathbb{N}$ por

$$\mu(E) := \begin{cases} \#E, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ +\infty, & \text{si } E \text{ es infinito,} \end{cases}$$

donde $\#E$ denota la cantidad de elementos de E , es la **medida de contar**.

- Sean $X := \mathbb{R}$ y $\mathcal{X} := \mathcal{B}$. En el Cap. 9 veremos que hay una única medida $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\lambda((a, b)) := b - a$, vale decir, la longitud de (a, b) . Esta medida λ se denomina la **medida de Lebesgue**.

Propiedades de medidas.

A lo largo de esta sección, (X, \mathcal{X}, μ) es un espacio de medida.

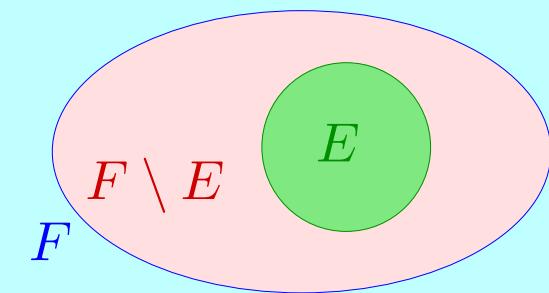
Lema.: Sean $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{X}$ mutuamente disjuntos. Entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n).$$

Dem.: Sean $E_n := \emptyset \ \forall n > N$. Entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n). \blacksquare$$

Lema.: Sean $E, F \in \mathcal{X}$ tales que $E \subset F$. Entonces, $\mu(E) \leq \mu(F)$ y, si $\mu(E) < \infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.



Dem.: $F = E \cup (F \setminus E)$

$$\implies \mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$$

Entonces $\mu(F) \geq \mu(E)$ y

$$\text{si } \mu(E) < \infty, \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E). \blacksquare$$

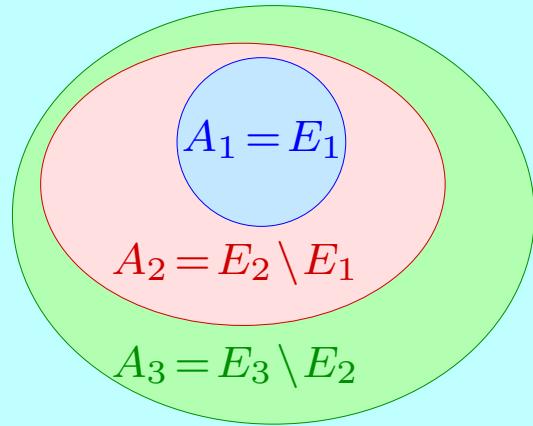
- Notemos que si $\mu(E) = +\infty$, entonces $\mu(F) = +\infty$ y $\mu(F \setminus E)$ puede tomar cualquier valor.

Notación:

- Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos (es decir, tal que $E_n \subset E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$), entonces su unión se denota $\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
- Si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos (es decir, tal que $E_n \supset E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$), entonces su intersección se denota $\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Lema.: Sean $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ sucesiones creciente y decreciente, resp.

- $\mu(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.
- Si $\mu(F_1) < \infty$, entonces $\mu(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \lim_n \mu(F_n)$.



Dem.: (a) Sean $A_n := \begin{cases} E_1, & \text{si } n = 1, \\ E_n \setminus E_{n-1}, & \text{si } n > 1. \end{cases}$

- $A_n, n \in \mathbb{N}$, son mutuamente disjuntos,
- $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Ej.
- $\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Ej.

Entonces, $\mu(E_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\mu(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_n \mu(E_n).$$

(b) Sean $E_n := F_1 \setminus F_n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots \implies \emptyset = E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

$$\begin{aligned} \implies \mu(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) &\stackrel{(a)}{=} \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(F_1 \setminus F_n) \\ &= \lim_n [\mu(F_1) - \mu(F_n)] = \mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n), \end{aligned}$$

donde, en la anteúltima igualdad, hemos usado que $\mu(F_1) < \infty$ y por lo tanto $\mu(F_n) < \infty$, para aplicar el lema anterior.

Por otra parte, $\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_1 \setminus F_n) = F_1 \setminus \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$

$$\implies \mu(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(F_1) - \mu(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n).$$

donde hemos vuelto a usar que $\mu(F_1) < \infty$ y por lo tanto $\mu(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) < \infty$, para aplicar el lema anterior.

Entonces, $\mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n)$,

por lo que usando una vez más que $\mu(F_1) < \infty$,

$$\mu(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \lim_n \mu(F_n). \quad \blacksquare$$

Medidas con signo.

Def.: Sea (X, \mathcal{X}) un espacio medible. $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **medida con signo** o **medida signada**, si:

- $\lambda(\emptyset) = 0$ y
- dados $E_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, mutuamente disjuntos, se tiene que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

- Notemos que en la definición anterior, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ **converge absolutamente**. En efecto, como la unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ no depende del orden de los E_n , entonces todos los reordenamientos de la serie convergen al mismo número real. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ converge absolutamente.

Ej.

Demuestra que las medidas con signo conforman un espacio vectorial.

C.T.P. (casi todo punto).

Def.: Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida.

Una propiedad se cumple **c.t.p.** (o **en casi todo punto** o **μ -c.t.p.**),

si $\exists N \in \mathcal{X}$ con $\mu(N) = 0$ tal que la propiedad se cumple $\forall x \in X \setminus N$.

Ejemplo: Considera el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

La función característica de los racionales, $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ c.t.p.

Dem.: Ej. • Demuestra que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$.
• Usa el resultado anterior para demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = 0$.
• Usa que \mathbb{Q} es numerable para demostrar que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ y concluye que

$$\chi_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Ejemplo: Considera el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, sea $f_n := (-1)^n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ con $\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ la función característica de $[0, \frac{1}{n}]$.

Demuestra que $\{f_n\}$ no convergen puntualmente, pero $f_n \xrightarrow{n} 0$ c.t.p.

Dem.: Ej.