UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°8

Álgebra 2 - 525150

Considere la siguiente definición:

Definición:

Sean U, W subespacios vectoriales del espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que U y W son suplementarios (o complementarios) si $U \oplus W = V$. En tal caso, se dice que un subespacio es suplemento (o complemento) del otro.

1. Considere los siguientes subconjuntos de $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \{A \in V : A = A^*\} \qquad \text{y} \qquad W = \{A \in V : A = -A^*\}$$

   (a) Determine una matriz $C \in U$ y $D \in W$, distintas de la matriz nula.

   (b) Describa las matrices que pertenecen a cada uno de los conjuntos.

   (c) Decida si U y W son subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-e.v. V, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. Sean $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y S_1, S_2 los subconjuntos de V definidos por

$$S_1 = \{p \in V : p(0) = p(1)\} \qquad \text{y} \qquad S_2 = \{p \in V : p'(0) = 0 \wedge p''(1) = 0\}.$$

   Si se sabe que S_1 es subespacio vectorial de V,

   (a) demuestre que S_2 es subespacio vectorial de V.

   (b) Determine, si es posible, $p \in V$ de modo que $p \in S_1 \cap S_2$.

   (c) ¿Es $S_1 \cup S_2$ un subespacio vectorial de V? Justifique su respuesta.

3. Considera el espacio vectorial real $V := C([0,1], \mathbb{R})$, de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, y los subespacios

$$S = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \right\} \quad \text{y} \quad T = \{f \in V : f \text{ es constante en } [0,1]\}.$$

   Analizar si S y T son subespacios complementarios (suplementarios) de V. Justifique apropiadamente.

4. Demuestre las siguientes proposiciones:

   (a) Si $A = \{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente en un $\mathbb{K}$-e.v. V, entonces el conjunto $B = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n\}$ es linealmente independiente.

   (b) Si $A = \{p_0, p_1, ..., p_n\} \subseteq \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de modo que cada vector de A cumple que $p_i(1) = 0$, con $i \in \{1, ..., n\}$, entonces A es un conjunto linealmente independiente.