Álgebra 1 (525140)
Listado 10
Problemas sobre *Capítulo 6: Números Complejos*
Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 10: Números Complejos

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Represente los siguientes números en el Plano de Argand:

   (a) $-1+i$.
   (b) -17.
   (c) $(2+3i)^{-1}$.
   (d) $\overline{-1+i}$.
   (e) $(1+i)^2$.
   (f) $1-i$.

2. Exprese los siguientes números complejos en forma binomial.

   (a) $z_1 = (2+3i)^2$.
   (b) $z_2 = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i}$.
   (c) $z_3 = \dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{1+i} + i$.
   (d) $z_4 = \left(1 + \dfrac{3}{1+i}\right)^2$.
   (e) $z_5 = \left(1 + \dfrac{1}{2i}\right) \cdot (-2+i)$.

   Calcule, de cada uno de ellos, parte real, parte imaginaria, módulo, conjugado, inverso aditivo e inverso multiplicativo, si lo tiene.

3. Calcule el módulo de los siguientes números complejos:

   (a) $z_1 = \sqrt{3} + i$
   (b) $z_2 = (1-2i)^3$
   (c) $z_3 = (-1+\sqrt{3}i)(-3i)$
   (d) $z_4 = i(2+3i)(1-2i)(2+i)^{-1}$
   (e) $z_5 = \dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$

4. Si $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, escriba los siguientes números en términos de x e y.

   (a) $\mathrm{Re}(iz)$.
   (b) $\mathrm{Im}((1+i)z)$.
   (c) $\mathrm{Im}(\bar{z}z)$.
   (d) $\mathrm{Re}(z^2)$.
   (e) $\mathrm{Re}(\frac{z\bar{z}}{1+3i})$.
   (f) **(A)** $\mathrm{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$.

2. Problemas intermedios

1. **(A)** Sea $z = -4+ai$, con $a \in \mathbb{R}$, determine para que valores de a se cumple que $z + 2\bar{z}$ es un complejo real.

2. Determine qué números complejos pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos y grafique cada conjunto en el plano de Argand.

(a) **(A)** $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)\}$.
(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1|^2 = 4\}$.
(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + (\mathrm{Im}(z))^2\}$.
(d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 6\}$.
(e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z+i) < \mathrm{Re}(z+10)\}$.
(f) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2|^2 \leq |z-3|^2\}$.
(g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) > 0\}$.
(h) **(A)** $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + \mathrm{Re}(z^2 + 2iz) = 0\}$.
(i) $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{z+i}\right) = 0\right\}$.
(j) $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| = z\}$.
(k) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} + 1 = 2|z|\}$.
(l) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1 \wedge |z-2| \leq 2\}$.
(m) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z-2i| = 1\}$.
(n) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Re}(z) \leq 1 \wedge |z| \geq 1\}$.
(ñ) $\left\{z \in \mathbb{C} - \{1\} \, : \, \dfrac{z+1}{z-1} \text{ es complejo real}\right\}$.
(o) $\left\{z \in \mathbb{C} - \{1\} \, : \, \dfrac{z+1}{z-1} \text{ es imaginario puro}\right\}$

3. Calcule:
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1041}, \qquad i + \frac{1}{i^{11}}.$$
Observación: Puede utilizar la siguiente propiedad de las potencias de i: para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que
$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$$

4. Demuestre que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que:
   (a) **(A)** $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
   (b) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se cumple que $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
   (c) $\overline{z + \dfrac{1}{z}} - \overline{\left(\dfrac{1+z}{z}\right)} = \overline{z} - 1$, con $z \neq 0$.

5. Demuestre que si $z, w \in \mathbb{C}$ son tales que $|z| = |w| = 1$, entonces, $\dfrac{z+w}{1+zw}$ es un complejo real.

6. Pruebe que para todo número complejo z se cumple que $(z - \overline{z})^2$ es un complejo real menor o igual que cero.

7. **(A)** Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumple que el número complejo $z = \dfrac{2+i}{a+i}$ es un complejo real.

8. Repita el problema anterior, pero considerando $a \in \mathbb{C}$.

3. Problemas avanzados

1. Calcule $\sum_{k=1}^{n} i^k$ para $n \in \mathbb{N}$.
Observación: Puede utilizar la siguiente propiedad de las potencias de i: para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que
$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$$

2. **(A)** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tales que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Pruebe que $\dfrac{z_1}{z_2}$ es un número imaginario puro.

3. Demuestre que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que $|1 - z\overline{w}|^2 - |z-w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.