



## Listado 5: Problemas de valores iniciales

**Observación:** En la última sección de este listado puede encontrar las fórmulas de los esquemas numéricos que se mencionan en el listado.

### 1. Problemas con papel y lápiz

1. Escoja cuáles de los métodos en la sección 3 son métodos explícitos y con cada uno de ellos: calcule aproximaciones a la solución exacta del problema de valores iniciales siguiente en  $a + h$  y  $a + 2h$ , siendo  $a$  el extremo inferior del intervalo de integración y  $h$ , el valor dado en cada caso.

(a)

$$y'(x) = 1 + \frac{y(x)}{x}, \quad x \in [1, 6], \quad h = \frac{1}{2}.$$
$$y(1) = 1.$$

(c)

$$y'(t) = \frac{e^t}{y(t)}, \quad t \in [0, 2], \quad h = \frac{1}{4}.$$
$$y(0) = 1.$$

(b)

$$x'(t) = \frac{t}{x(t)}, \quad t \in [0, 5], \quad h = \frac{1}{2}.$$
$$x(0) = 1.$$

(d)

$$x'(t) = t - x(t), \quad t \in [0, 4], \quad h = 1.$$
$$x(0) = 1.$$

Sabiendo que las soluciones exactas de los problemas anteriores son las siguientes, determine el error de aproximación global en el nodo  $a + 2h$  para cada método empleado:

(a)  $y(x) = x(1 + \ln(x))$ .

(c)  $y(t) = \sqrt{2e^t - 1}$ .

(b)  $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ .

(d)  $x(t) = 2e^{-t} + t - 1$ .

2. Escoja cuáles de los métodos en la sección 3 son métodos implícitos y con cada uno de ellos: calcule aproximaciones a la solución exacta de los problemas de valores iniciales (1a) y (1d) en los nodos  $a + h$  y  $a + 2h$ , donde  $a$  es el extremo inferior del intervalo de integración y  $h$  es el valor dado en cada caso. Determine en cada caso el error de aproximación global en el nodo  $a + 2h$ .
3. Demuestre que los métodos 4 y 6 dados en la última sección de este listado, tienen orden de consistencia igual a 2.
4. Escriba el método de Runge-Kutta correspondiente a las siguientes tablas de Butcher.

(a)

0	
1/2	1/2
0	1

(b)

0	
1	1
1/2	1/2

(c)	$\begin{array}{c cc} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$
-----	---

(d)	$\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$
-----	---

¿Qué propiedad de los métodos anteriores le permite asegurar que son métodos consistentes? ¿Es el orden de consistencia de todos ellos mayor o igual que dos?

5. Escoja uno de los métodos de Runge-Kutta en ítem anterior y resuelva con él el problema 1 de este listado.

6. Escriba la tabla de Butcher correspondiente a los siguientes métodos de Runge-Kutta.

$$(a) y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))).$$

$$(b) y_{j+1} = y_j + \frac{h}{3} (2f(x_j, y_j) + f(x_j + \frac{3}{2}h, y_j + \frac{3}{2}hf(x_j, y_j))).$$

¿Son ambos métodos consistentes?

## 2. Experimentos computacionales

1. El siguiente modelo para describir la evolución de personas sanas, infectadas y fallecidas en una pandemia fue propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 (Proceedings of the Royal Society of London): si  $H(t)$  denota la cantidad de personas sanas  $t$  semanas después de comenzar una epidemia,  $I(t)$  es la cantidad de infectadas y  $D(t)$ , la cantidad de fallecidas, ellos proponen la siguiente relación entre ellas

$$H'(t) = -cH(t)I(t), \quad I'(t) = cH(t)I(t) - mI(t), \quad D'(t) = mI(t),$$

donde  $c$  y  $m$  son constantes que reflejan la rapidez de transmisión y la mortalidad de la enfermedad respectivamente.

(a) Demuestre que

$$\frac{dH}{dD} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{dD} = -\frac{c}{m} H(t),$$

y que, por tanto,  $H(t) = H(D(t)) = H_0 e^{-\frac{c}{m} D(t)}$ , siendo  $H_0$  la cantidad inicial de personas sanas.

(b) Muestre que

$$\frac{d}{dt}(H + I + D) = 0,$$

por tanto, el valor de  $(H + I + D)(t)$  es constante, es decir,

$$I(t) = N - H(t) - D(t) = N - H_0 e^{-\frac{c}{m} D(t)} - D(t)$$

si  $N$  es la cantidad inicial de personas.

(c) Escriba la ecuación diferencial para  $D(t)$  utilizando los dos resultados demostrados anteriormente.

(d) Resuelva el problema de valores iniciales para  $D(t)$ ,  $t \in [0, 10]$  considerando  $N = 3000$ ,  $I(0) = 150$ ,  $D(0) = 0$ ,  $m = 1.8$ ,  $c = 10^{-3}$ . Utilice para ello el método de Euler explícito con  $h = 0.1$  y con  $h = 0.01$ .

- (e) ¿Aproximadamente cuántas personas han fallecido 8 semanas después de haber comenzado la epidemia? Escriba las aproximaciones a esta cantidad que obtiene con cada valor de  $h$ .
2. La altura  $y$  (en metros) de líquido en el acumulador de un sistema de bombeado satisface el modelo

$$y'(t) + 0.002 \left( 52.1 y(t) + \frac{10.3}{10.3 + y(t)} \right) - 1.17 (1 + \sin(3t)) = 0.0308, \quad h(0) = 5,$$

siendo  $t$  el tiempo, medido en minutos. Resuelva el P.V.I. para  $t \in [0, 100]$ .

3. En el siguiente modelo

$$x'(t) = r x(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{(x(t))^2}{1 + (x(t))^2}$$

$x(t)$  describe el tamaño de una población en un instante de tiempo  $t$ . El modelo supone:

- para poblaciones de tamaño pequeño, el tamaño de la población crece de forma proporcional a la cantidad de habitantes. Para poblaciones de gran tamaño la ausencia de recursos para su sustento ocasiona que el radio de crecimiento de la población disminuya.
- El segundo término en la parte derecha de la ecuación diferencial representa que la población puede disminuir por la acción de un predador.

Las constantes reales  $r$  y  $k$  representan el radio de crecimiento y la capacidad del medio ambiente de proporcionar recursos para sustentar a la población respectivamente.

- Considere  $r = 0.4$ ,  $k = 20$  y  $x(0) = 2.44$ . ¿Cómo varía el tamaño de la población con el tiempo? ¿A partir de qué valor de  $t$  es el tamaño de la población casi constante?
- Repita el experimento con  $x(0) = 2.4$ . ¿Es el comportamiento de la población similar al del ítem anterior?

4. Sabiendo que la solución exacta del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(1 + t + t^2) - (2t + 1)x(t) - x(t)^2, \quad t \in [0, 3], \\ x(0) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

es  $x(t) = -t - 1/(e^t + 1)$ , diseñe experimentos computacionales para mostrar el orden de convergencia de cada uno de los métodos explícitos listados en sección 3 de este documento.

### 3. Métodos numéricicos para problemas de valores iniciales

1.  $y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$ .
2.  $y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1})$ .
3.  $y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j)\right)$ .
4.  $y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))$ .
5.  $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}))$ .
6.  $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j)))$ .