Introducción al Método de los Elementos Finitos (III)

Rodolfo Araya

Departamento de Ingeniería Matemática & CI^{2}MA
Universidad de Concepción, Chile

XXX Jornadas de Matemática de la Zona Sur
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Concepción, 26–28 de Abril, 2017

Descripción del curso

- Introducción
- Resultados Teóricos
- Implementación

Implementación

Problema modelo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, un abierto, acotado con frontera poligonal $\partial\Omega$

Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde f es una función conocida dada

Formulación variacional

El problema variacional asociado a (P):

Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *con* $u = 0$ *en* $\partial\Omega$, *tal que*

$$(PV) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \qquad \forall v$$

Formulación variacional

Recordar que (PV) se puede escribir de la siguiente forma:

Hallar $u \in H$ *tal que*

$$a(u,v) = F(v), \qquad \forall v \in H$$

donde $a : H \times H \to \mathbb{R}$ and $F : H \to \mathbb{R}$ están dados por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \text{y} \qquad F(v) := \int_\Omega f \, v \, dx$$

Formulación de Galerkin

Sea H_h un subespacio de dimensión finita de H. Recordar que el problema discreto (PD) está dado por:

Hallar $u_h \in H_h$ *tal que*

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \qquad \forall v_h \in H_h$$

Elementos Finitos

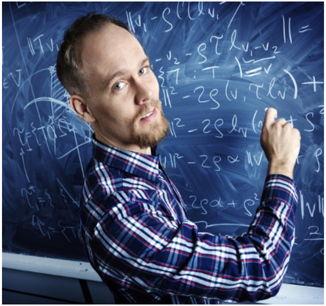

Figura: Frédéric Hecht (1954 –) y Anders Logg (1976 –)

- M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes and G. N. Wells (2015), The FEniCS Project Version 1.5, Archive of Numerical Software, **3**
- Hecht, F. (2012), New development in FreeFem++, Journal of Numerical Mathematics, **20** (3-4), pp. 251–265

Elementos Finitos

Software libre

- FreeFem++ (`http://www.freefem.org`): C++
- FeniCS (`https://fenicsproject.org`): C++ / Python

Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \qquad\qquad \text{en } \Omega :=]0,1[\times]0,1[\\ u &= u_D \qquad\quad\; \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Poisson: Formulación Variacional

Sea $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $\hat{u} = u_D$ en $\partial\Omega$. Consideremos el siguiente problema variacional:

Hallar $\tilde{u} \in H := H_0^1(\Omega)$, *tal que*

$$a(\tilde{u}, v) = F(v) \qquad \forall v \in H$$

donde

$$a : H \times H \to \mathbb{R} \qquad\qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$F : H \to \mathbb{R} \qquad\qquad F(v) = \int_\Omega f\, v\, dx - a(\hat{u}, v)$$

Entonces $u := \tilde{u} + \hat{u}$

Poisson: Solución Numérica

Sea H_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_1$, tenemos el siguiente programa, escrito en `FreeFem++`, que calcula la solución discreta:

¡¡¡Haga click aquí!!!

Transporte

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{a} \cdot \nabla u &= f \qquad && \text{en } \Omega :=]0,1[\times]0,1[\\
u &= u_D \qquad && \text{en } \partial\Omega
\end{aligned}
\right.
$$

Transporte: Formulación Variacional

Sea $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $\hat{u} = u_D$ en $\partial\Omega$. Consideremos el siguiente problema variacional:

Hallar $\tilde{u} \in H := H_0^1(\Omega)$, *tal que*

$$a(\tilde{u}, v) = F(v) \qquad \forall v \in H$$

donde

$$a : H \times H \to \mathbb{R} \qquad a(u, v) = \int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{a} \cdot \nabla u \, v \, dx$$

$$F : H \to \mathbb{R} \qquad F(v) = \int_\Omega f \, v \, dx - a(\hat{u}, v)$$

Entonces $u := \tilde{u} + \hat{u}$

Transporte: Solución Numérica

Sea H_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_1$, tenemos el siguiente programa, escrito en `FreeFem++`, que calcula la solución discreta:

¡¡¡Haga click aquí!!!

Elasticidad

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) & = \boldsymbol{f} \qquad \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{u} & = \mathbf{0} \qquad \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})n & = \mathbf{0} \qquad \text{en } \Gamma_N \end{cases}$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \quad \text{(stress)}$$

con

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^t\right) \quad \text{(strain)}$$

Elasticidad: Formulación Variacional

Consideremos el siguiente problema variacional:

Hallar $\boldsymbol{u} \in H := H_0^1(\Omega)^d$, *tal que*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in H$$

donde

$$a : H \times H \to \mathbb{R} \qquad\qquad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, dx$$

$$F : H \to \mathbb{R} \qquad\qquad F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx$$

Elasticidad: Solución Numérica

Sea H_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_1^d$, tenemos el siguiente programa, escrito en `FreeFem++`, que calcula la solución discreta:

¡¡¡Haga click aquí!!!

Stokes

$$\left\{\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}\right.$$

Stokes: Formulación Variacional

Hallar $u \in H := H_0^1(\Omega)^d$ *y* $p \in Q := L_0^2(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) &= F(\boldsymbol{v}) && \forall \boldsymbol{v} \in H \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= 0 && \forall q \in Q \end{aligned}$$

donde

$$a : H \times H \to \mathbb{R} \qquad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega \nu \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} \, dx$$

$$b : H \times Q \to \mathbb{R} \qquad b(\boldsymbol{v}, q) := -\int_\Omega q \, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dx$$

$$F : H \to \mathbb{R} \qquad F(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, dx$$

Stokes: Solución Numérica

Sea H_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_2^d$, y sea Q_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_1$ (Taylor-Hood), tenemos el siguiente programa, escrito en `FreeFem++`, que calcula la solución discreta:

¡¡¡Haga click aquí!!!

Navier–Stokes

$$\left\{\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}\right.$$

Navier–Stokes: Formulación Variacional

Hallar $u \in H := H_0^1(\Omega)^d$ *y* $p \in Q := L_0^2(\Omega)$ *tal que*

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) + c(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= F(\boldsymbol{v}) && \forall \boldsymbol{v} \in H \\
b(\boldsymbol{u},q) &= 0 && \forall q \in Q
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&a : H \times H \to \mathbb{R} && a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \nu \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, dx \\
&b : H \times Q \to \mathbb{R} && b(\boldsymbol{v},q) := -\int_\Omega q\, \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, dx \\
&c : H \times H \times H \to \mathbb{R} && c(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, dx \\
&F : H \to \mathbb{R} && F(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx
\end{aligned}
$$

Navier–Stokes: Solución Numérica

Sea H_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_2^d$, y sea Q_h el subespacio de las funciones continuas y seccionalmente $\mathbb{P}_1$ (Taylor-Hood), tenemos el siguiente programa, escrito en `FreeFem++`, que calcula la solución discreta:

¡¡¡Haga click aquí!!!

¡¡¡muchísimas gracias por la paciencia!!!

¡¡¡muchísimas gracias por la paciencia!!!

¡¡¡por fin terminó!!!