Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 1 — miércoles 23 de mayo de 2018

Soluciones sugeridas

Problema 1 (15 puntos)**.**

a) Calcular una descomposición triangular $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LR}$, con búsqueda de pivote en la matriz restante, de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Indicar explícitamente las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$.

b) Resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{b} = (6, -2, -2)^{\mathrm{T}}$.

c) Sean $\boldsymbol{e} := (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E} := \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$, y $\boldsymbol{d} := \alpha \boldsymbol{e}$. Decidir si $\boldsymbol{x}_1 := (1.9, 1.1, -0.9)^{\mathrm{T}}$ es una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (i) para $\alpha = 0.05$, (ii) para $\alpha = 0.2$.

Solución sugerida.

a) Obtenemos la siguiente sucesión de esquemas, donde los elementos con $\boxed{\text{marco}}$ corresponden a multiplicadores:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 5 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 3 & 5 & 1 & 1 & -21 \\ 2 & \boxed{\frac{3}{5}} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & \boxed{-\frac{1}{5}} & \frac{6}{5} & \frac{11}{5} & \frac{28}{5} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 1 & 2 & \\ \hline 3 & 5 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\frac{1}{5}} & \frac{11}{5} & \frac{6}{5} & \frac{28}{5} \\ 2 & \boxed{\frac{3}{5}} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 1 & 2 & \\ \hline 3 & 5 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\frac{1}{5}} & \frac{11}{5} & \frac{6}{5} & \frac{28}{5} \\ 2 & \boxed{\frac{3}{5}} & \boxed{\frac{2}{11}} & -\frac{20}{11} & -\frac{20}{11} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{7 puntos}}$

lo que implica que

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{5} & 1 & 0 \\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{11}{5} & \dfrac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\dfrac{20}{11} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

b) Aprovechando la transformacion de la columna $\boldsymbol{b}$ realizada en los esquemas obtenemos facilmente

$$\boldsymbol{x} = (2, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

c) De acuerdo al criterio de Prager & Oettli, calculamos

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}| = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_1| + \boldsymbol{d} = \big(4.9; 4.9; 4.9\big)$$

Observamos que

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}| \leq \alpha\big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_i| + \boldsymbol{d}\big) \tag{2}$$

para $\alpha = 0.2$, pero

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}| > \alpha\big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_i| + \boldsymbol{d}\big) \tag{3}$$

para $\alpha = 0.05$, es decir sólo para $\alpha = 0.3$, el vector $\boldsymbol{x}_1$ es una solución aproximada compatibles (en el sentido del criterio de Prager & Oettli).

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Problema 2 (15 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es invertible sin calcular $\det \boldsymbol{A}$.
b) Determinar una cota superior para $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})$ en una norma $\|\cdot\|$ apropiada *sin* invertir $\boldsymbol{A}$ o calcular $\det \boldsymbol{A}$.
c) Además consideramos

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.8 \\ 4.7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 5.1 & -2.1 & 1.05 \\ 2.1 & 3.9 & 2.05 \\ 0.05 & 1 & 3.1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sean la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Determinar una cota superior (la mejor posible) para $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ sin calcular $\boldsymbol{x}$ o $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Solución sugerida.

a) Podemos escribir $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}(\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})$, donde

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_\infty = 1, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 = \frac{11}{15} = 0.7\bar{3} < 1.$$

Esto implica que $\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}$ es invertible (Teorema 3.7). Como también $\boldsymbol{D}$ es invertible, concluimos que $\boldsymbol{A}$ es invertible. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

b) Como

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{A}\|_1 = 7, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 = \frac{1}{3}, \\ &\|\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1} = \frac{1}{1 - \frac{11}{15}} = \frac{15}{4} = 3.75, \end{aligned}$$

donde utilizamos el Teorema 3.7, obtenemos

$$\begin{aligned} &\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 \|\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 \\ &\leq 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{35}{4} = 8.75. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

c) Aquí obtenemos

$$\|\boldsymbol{b}\|_1 = 19, \quad \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1 = 0.6, \quad \|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \right\|_1 = 0.25$$

y por lo tanto de acuerdo al Teorema 3.8

$$\begin{aligned}\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} &\leq \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A})\left(\frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1}+\frac{\|\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1}\right)\frac{1}{1-\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1}} \\ &\leq 8.75\cdot\left(\frac{0.6}{19}+\frac{0.25}{7}\right)\frac{1}{1-8.75\cdot\dfrac{0.25}{7}}=0.8565.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Problema 3 (10 puntos)**.**

a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$. Demostrar o refutar: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ es singular.

b) Calcular la descomposición en valores singulares

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^*, \quad \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \text{ unitarias,}$$

para

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Calcular la pseudo-inversa de Moore-Penrose $\boldsymbol{A}^+$ de $\boldsymbol{A}$.

Solución sugerida.

a) La afirmación es correcta. Sea $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$, y sean $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ las columnas de $\boldsymbol{A}$. Entonces la matriz $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$ está dada por

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{1,i}\boldsymbol{a}_i \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{2,i}\boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{m,i}\boldsymbol{a}_i \right]$$

Como cada una de las m columnas de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ es una combinación lineal de los $n < m$ vectores $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, las columnas de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ son linealmente dependientes, por lo tanto $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ es singular. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

b) Calculamos

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico $p(\lambda) = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4$ posee los ceros $\lambda_1 = 7 = \sigma_1^2$, $\lambda_2 = 2 = \sigma_2^2$. Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego la matriz $\boldsymbol{V}$ viene dada por

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular las primeras dos columnas $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ de $\boldsymbol{U}$ usamos que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \sigma_2\mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{7}\mathbf{u}_1 & \sqrt{2}\mathbf{u}_2 \end{bmatrix},$$

lo que implica

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar la tercera columna de $\boldsymbol{U}$ conviene calcular

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{35}} & -\dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{14}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{35}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} & -\dfrac{1}{\sqrt{14}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{35}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

o aproximadamente

$$\boldsymbol{U} \approx \begin{bmatrix} 0.5071 & -0.3162 & -0.8018 \\ 0.1690 & 0.9487 & -0.2673 \\ 0.8452 & 0 & 0.5345 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx \begin{bmatrix} 2.6458 & 0 \\ 0 & 1.4142 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} \approx \begin{bmatrix} 0.8944 & 0.4472 \\ -0.4472 & 0.8944 \end{bmatrix}.$$

4 puntos

c) A partir de una decomposición en valores singulares dada, podemos calcular la pseudo-inversa de Moore-Penrose como

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^*, \quad \boldsymbol{\Sigma}^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+), \quad \sigma_i^+ := \begin{cases} 1/\sigma_i & \text{si } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Con

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

y las matrices $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ definidas arriba obtenemos

$$\boldsymbol{A}^+ = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 8 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0714 & 0.3571 & 0.2857 \\ -0.2857 & 0.5714 & -0.1429 \end{bmatrix}.$$

3 puntos

Problema 4 (10 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Determinar la matriz $\boldsymbol{L}$ triangular inferior de la descomposición de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$.

b) Utilizando la descomposición de Cholesky determinar la solución exacta de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = (3, 4, 5)^{\mathrm{T}}$. Indicar todos los pasos intermedios.

Solución sugerida.

a) Suponiendo que $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, obtenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},$$

lo que nos permite calcular sucesivamente

$$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2; \quad l_{11}l_{21} = -2 \Rightarrow l_{21} = \frac{-2}{l_{11}} = -1; \quad l_{11}l_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{l_{11}} = \frac{1}{2};$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{5 - l_{21}^2} = 2; \quad l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = \frac{1 - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \frac{3}{4};$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{3 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4} \approx 1.4790,$$

es decir

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{35}}{4} \end{bmatrix}.$$

5 puntos

b) Para resolver $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se resuelve primero el sistema $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Si $\boldsymbol{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{\mathrm{T}}$, obtenemos entonces

$$\eta_1 = \frac{3}{2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(4 + \eta_1) = \frac{11}{4}, \quad \eta_3 = \frac{4}{\sqrt{35}}\left(5 - \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{3}{4}\eta_2\right) = \frac{\sqrt{35}}{4}.$$

Obtenemos la solución solicitada $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ resolviendo $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, obteniendo

$$\xi_1 = \frac{4}{\sqrt{35}}\eta_3 = 1, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\eta_2 - \frac{3}{4}\xi_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4}\right) = 1,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}\left(\eta_1 + \xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 1,$$

es decir $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

5 puntos

Problema 5 (10 puntos)**.**

a) Resolver el problema de aproximación

$$\begin{aligned} &\text{Determinar } \boldsymbol{x}^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^{\mathrm{T}} \text{ tal que} \\ &\sum_{i=1}^{m} \Big(y_i - (\alpha_0^* \varphi_0(t_i) + \alpha_1^* \varphi_1(t_i) + \alpha_2^* \varphi_2 t_i)\Big)^2 \\ &= \min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \sum_{i=1}^{m} \Big(y_i - (\alpha_0 \varphi_0(t_i) + \alpha_1 \varphi_1(t_i) + \alpha_2 \varphi_2 t_i)\Big)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

para los datos

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	2	3
y_i	2	-1	1	3

para $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$, transformando la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.

b) Resolver (4) para los datos

i	1	2	3	4	6	7	8
t_i	-1	0	2	3	4	6	9
y_i	-1	0	8	15	24	48	99

.

Solución sugerida.

a) Se esta buscando la solución $\boldsymbol{x}^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^{\mathrm{T}}$ del problema

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2,$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Aquí calculamos sucesivamente

(1)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \big|\alpha_{11}^{(1)}\big| = 1, \quad \big\|\boldsymbol{a}_2^{(1)}\big\|_2 = 2, \quad \beta = \frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2^{(1)} = 2, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_3^{(1)} = 16, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}^{(1)} = 9,$$

$$\boldsymbol{a}_2^{(2)} = \boldsymbol{a}_2^{(1)} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 2 \cdot \hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1/3 \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 16 \cdot \hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8/3 \\ 4/3 \\ 19/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(1)} - \frac{1}{6}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(1)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

2 puntos

(2)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}, \quad \big\|\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)}\big\| = \sqrt{10} \approx 3.1623,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{10}\left(\frac{1}{3}+\sqrt{10}\right)} = \frac{9}{89} - \frac{3\sqrt{10}}{890} \approx 0.0905,$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\sqrt{10} \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3.4956 \\ 1.6667 \\ 2.6667 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.1623 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3^{(2)} = 20 + \frac{8}{3}\sqrt{10} \approx 28.4327, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(2)} = 4 + \frac{5}{2}\sqrt{10} \approx 11.9057,$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_3^{(3)} &= \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)} - \left(\frac{9}{89} - \frac{3\sqrt{10}}{890}\right)\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 \\
&= \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \\ 19/3 \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{89} - \frac{3\sqrt{10}}{890}\right)\left(20 + \frac{8}{3}\sqrt{10}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\sqrt{10} \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \\ 19/3 \end{pmatrix} - \left(\frac{172}{89} + \frac{18}{89}\sqrt{10}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\sqrt{10} \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} \\ -\dfrac{168}{89} - \dfrac{30}{89}\sqrt{10} \\ \dfrac{105}{89} - \dfrac{48}{89}\sqrt{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6.3246 \\ -2.9536 \\ -0.5257 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)} - \left(\frac{9}{89} - \frac{3\sqrt{10}}{890}\right)\left(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)}\right)\hat{\boldsymbol{w}}_2$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{89} - \frac{3\sqrt{10}}{890}\right)\left(4 + \frac{5}{2}\sqrt{10}\right)\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} - \sqrt{10} \\ \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{57}{178} + \frac{213}{890}\sqrt{10}\right)\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} - \sqrt{10} \\ 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}\sqrt{10} \\ -\dfrac{92}{89} - \dfrac{71}{178}\sqrt{10} \\ \dfrac{115}{178} - \dfrac{284}{445}\sqrt{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.2649 \\ -2.2951 \\ -1.3721 \end{pmatrix}.$$

2 puntos

(3)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{168}{89} - \dfrac{30}{89}\sqrt{10} \\ \dfrac{105}{89} - \dfrac{48}{89}\sqrt{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.9536 \\ -0.5257 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)}\|_2 = 3,$$

$$\beta = \frac{89}{1305 + 90\sqrt{10}} \approx 0.0560, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{435}{89} - \dfrac{30}{89}\sqrt{10} \\ \dfrac{105}{89} - \dfrac{48}{89}\sqrt{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5.9536 \\ -0.5257 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_3^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)} = \frac{1887}{178} + \frac{213}{178}\sqrt{10} \approx 14.3852,$$

$$\beta \hat{\boldsymbol{w}}_3^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)} = \frac{89}{1305 + 90\sqrt{10}} \left(\frac{1887}{178} + \frac{213}{178}\sqrt{10} \right) = \frac{7}{10} + \frac{1}{30}\sqrt{10} \approx 0.8054,$$

$$\boldsymbol{b}^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)} - \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{30}\sqrt{10} \right) \hat{\boldsymbol{w}}_3 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ * \end{pmatrix}.$$

2 puntos

De acuerdo a la información generada, el vector $\boldsymbol{x}^*$ es la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -7 \\ 0 & \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ \frac{2}{5}\sqrt{10} \\ 5/2 \end{pmatrix},$$

con la solución

$$\alpha_2^* = \frac{5}{6} \approx 0.8333, \quad \alpha_1^* = \frac{2}{5} - 2\alpha_2^* = -\frac{19}{15} \approx -1.2667,$$

$$\alpha_0^* = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - 2\alpha_1^* - 7\alpha_2^* \right) = -\frac{2}{5} = -0.4.$$

2 puntos

b) Los datos corresponden a la función $y(t) = (t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t$. Esta función interpola los datos. Como la solución del problema de cuadrados mínimos es única, se tiene entonces $\alpha_0^* = 0$, $\alpha_1^* = -2$ y $\alpha_2^* = 1$. **1 punto**