Procesos Estocásticos :
Tasas de saltos
Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Tasas de saltos

- Sea p_{ij} la probabilidad de transición del estado i al estado j.
- Sea ν_i la tasa a la cual el proceso deja el estado i.
- Por tanto, el tiempo promedio de permanencia en i es $\frac{1}{\nu_i}$).
- Se define la *tasa instantánea de transición* (o tasa de saltos) como

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij} \qquad \forall i \neq j.$$

Tasas de saltos

- La tasa de saltos tiene el significado de una velocidad de salto de un estado a otro.

- En CTC se describe el sistema determinando previamente las tasas instantáneas de transición q_{ij}, $i \neq j$, que determinan el ritmo al que se salta de i a j.

Tasas de saltos. Ejemplos

- Proceso de Poisson,

$$q_{n,n+1} = \lambda.$$

- Proceso de Yule,

$$q_{n,n+1} = n\lambda.$$

Tasas de saltos. Ejemplos

- Proceso de nacimiento y muerte,

$$q_{n,n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} = \lambda_n$$
$$q_{n,n-1} = (\lambda_n + \mu_n)\frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} = \mu_n$$

y otros $q_{ij} = 0$.

Tasas de saltos. Ejemplos

- Para la cola M|M|S,

$$
\begin{aligned}
q_{n,n+1} &= \lambda \\
q_{n,n-1} &= \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n < s \\ s\mu, & n \geq s. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Función de probabilidad de transición

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_j q_{ij} &= \sum_j \nu_i p_{ij} \\
\sum_j q_{ij} &= \nu_i \sum_j p_{ij}.
\end{aligned}
$$

Entonces, puesto que $\sum_j p_{ij} = 1$.

$$\sum_j q_{ij} = \nu_i.$$

Teniendo en cuenta que $q_{ij} = \nu_i p_{ij}$, legamos a

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

lo que demuestra que especificando las tasas de saltos quedan definidas las probabilidades de transición.

Función de probabilidad de transición

- Definimos la Función de probabilidad de transición

$$P_{ij}(h) = P(X_h = j | X_0 = i).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} &= \nu_i \\ \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} &= q_{ij}. \end{aligned}$$

Outline

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov Backward

$$\frac{\mathrm{d}P_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k \neq i} q_{ij} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t) \ \ \forall i, j, \forall t \geq 0.$$

Por ejemplo, para los procesos de nacimiento puro (Poisson, Yule, etc.), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}P_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - \lambda_i P_{ij}(t).$$

Ec. de Chapman-Kolmogorov Backward para el proceso de nacimiento y muerte

Puesto que $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \nu_i p_{ij} \\ q_{i,i+1} &= \nu_i p_{i,i+1} = \nu_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = \lambda_i \\ q_{i,i-1} &= \nu_i p_{i,i-1} = \nu_i \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} = \mu_i. \end{aligned}$$

Ec. de Chapman-Kolmogorov Backward para el proceso de nacimiento y muerte

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P_{0j}(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda_0(P_{1,j}(t) - P_{0j}(t)) \\
\frac{\mathrm{d}P_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t).
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov Forward

$$\frac{\mathrm{d}P_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t) \quad \forall i, j, \forall t \geq 0.$$

Para los procesos de nacimiento puro, puesto que $P_{ij}(t) = 0, j < i$ ("no mueren") tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P_{ii}(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_i P_{ii}(t) \\ \frac{\mathrm{d}P_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda_{j-1} P_{i,i-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t), \; j \geq i+1. \end{aligned}$$