UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 6 - Álgebra III (525201)

Ejercicio 1. Sean U y W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y B_U y B_W bases de U y W respectivamente. Sea además $T : V \to V$ un automorfismo.

a) Pruebe que $V = U \oplus W$ si y sólo si $B_U \sqcup B_W$ es base de V, donde $\sqcup$ denota unión disjunta.

b) Demuestre que si $V = U \oplus W$, entonces $V = T(U) \oplus T(W)$.

Ejercicio 2. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T = Id$. Pruebe que:

a) T es automorfismo.

b) $V = Ker(T + Id) \oplus Ker(T - Id)$

Ejercicio 3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = 1$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = Ax$. Determine explícitamente $Ker(T)$ e $Im(T)$.

Ejercicio 4. Sean V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal.

a) Sea M un s.e.v. de V. Se define la siguiente relación en V:

$$v \sim_M w \iff v - w \in M$$

Demuestre que $\sim_M$ es relación de equivalencia en V.

b) Adoptando la notación $V/M = V/\sim_M$, demuestre que $\tilde{T} : V/Ker(T) \to W$ definida por

$$\tilde{T}([v]) = T(v), \qquad \forall [v] \in V/Ker(T)$$

está bien definida y es una transformación lineal inyectiva.

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr