UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Listado 1 (EDOs lineales escalares de orden 1)

Problemas con solución

Problema 1 Indique si las EDO que siguen son lineales o no lineales. Además, señale el orden de la EDO:

1. $x(y'(x))^2 - \mathrm{e}^x(y(x))^4 - x^3 = 0,$
2. $t\,x'(t) - \mathrm{e}^t x(t) - t^5 = 0,$
3. $x(y'(x))^2 + x^2\mathrm{e}^x\,(y(x))^4 = \mathrm{e}^x[y(x)]^{1/2}.$
4. Para $I \subset \mathbb{R}$, defina la función $\xi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \notin I. \end{cases}$
   Considere $\xi_{]0,1[}(t)x''(t) + \xi_{]2,5[}(t)x'(t) + tx(t) = e^{2t}$

Respuestas:

1. Debido a los términos $(y'(x))^2$ y $(y(x))^4$ la EDO no es lineal. Es de orden 1.
2. Es lineal y de orden 1.
3. Debido a los términos $(y'(x))^2$, $(y(x))^4$ y $[y(x)]^{1/2}$ la EDO es no lineal y de orden 1.
4. Note que tenemos EDO en los intervalos $(0,1)$ y $(2,5)$. Fuera de esos dos intervalos no hay EDO. Además, en el intervalo $(0,1)$ la EDO es de orden 2, en el intervalo $(2,5)$ la EDO es orden 1. Cuando hay EDO, esta es lineal.

Problema 2 Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.

(i) $v(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$; $y(t)\,y'(t) \;=\; t(1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}$.

(ii) $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$; $y' - 2xy = 1$.

(iii) $z(x) = x\,\mathrm{e}^x$; $y''(x) - x\,y'(x) + x\,y(x) \;= 2\,\mathrm{e}^x$.

Respuestas:

(i) Tenemos $v(t) = t\mathrm{e}^{-t}$, luego de esto $v'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$. Así

$$v(t)v'(t) = t(1-t)\mathrm{e}^{-2t}$$

Lo cual no muestra que se cumple la igualdad, es decir, v es solución de la EDO.

(*ii*) Tenemos $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$, de esto sacamos $y'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1$. Ahora

$$y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1 - 2x(\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt) = 1$$

Así y es solución de la EDO.

(*iii*) Tenemos $z(x) = x\mathrm{e}^x$, de esto obtenemos $z'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$ y $z''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$. Ahora

$$z''(x) - x\,z'(x) + x\,z(x) = (2+x)\mathrm{e}^x - x(1+x)\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

Y vemos que es solución de la EDO.

Problema 3 Resolver:

(*i*) $(x^2+1)y'(x) \;=\; x\,y(x)\,.$

(*ii*) $y'(x) \,+\, y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x}$ con $y(1) = 2$.

(*iii*) $(x^2+1)y'(x) \,+\, x\,y(x) = \frac{x}{x^2+1}$ con $y(0) = 1$.

Respuestas

(*i*) Normalizando la EDO se obtiene

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+1}y(x)$$

Como $x^2+1 \geq 1$, la función $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Primer paso: Calcular la integral $A(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx$. Haciendo el cambio de variable $u = x^2+1$, formalmente tenemos que $du = 2x\,dx$, así que

$$A(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\log(|u|) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) = \log\left(\sqrt{x^2+1}\right).$$

Segundo paso: Calcular la derivada $\frac{d}{dx}\exp\left(-A\left(x\right)\right)y\left(x\right)$

En nuestro ejercicio

$$\frac{d}{dx}\exp\left(-A\left(x\right)\right)y\left(x\right) = 0,$$

luego

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}y(x)\right) = 0.$$

Tercer paso: Integrando llegamos a

$$\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} y(x) = K,$$

con $K \in \mathbb{R}$. Despejando $y(x)$ obtenemos

$$y(x) = K\sqrt{x^2+1},$$

donde K es un número real arbitrario.

(ii) Reorganizando la EDO llegamos a

$$y'(x) = -y(x) + \mathrm{e}^{-x}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{x} y(x)\right) = e^{x}\mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Integrando se obtiene

$$e^{x} y(x) = x + C,$$

donde C es un número real. Despejar $y(x)$ produce

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} C + \mathrm{e}^{-x} x.$$

Ya que $y(1) = 2$,

$$2 = e^{-1} C + e^{-1},$$

de donde $C = 2\,e - 1$. Por lo tanto

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(2\,e - 1) + \mathrm{e}^{-x} x = 2\mathrm{e}^{-(x-1)} - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} x.$$

(iii) Resolver:

$$(x^2+1)y'(x) \;+\; xy(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad \text{con } y(0) = 1. \tag{1}$$

Normalizando la EDO (note que $x^2 + 1 > 0$), obtenemos

$$y'(x) + \frac{x}{x^2+1} y(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Primero se determina el Factor de Integración $\mu(x) = \exp[A(x)]$ donde en este caso $A'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Haciendo $u(x) = x^2 + 1$ e integrando, sigue que $A(x) = \ln[x^2 + 1]^{1/2}$. Por tanto $\mu(x) = \exp\{\ln|x^2 + 1|^{1/2}\} = (x^2 + 1)^{1/2}$.

Ahora multiplicando la EDO (1) por el F.I. $\mu(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$, sigue

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{1/2} y(x)\right) = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}. \tag{2}$$

Ahora en (2) podemos integrar de forma indefinida, o de modo definido en $[0, x]$. En efecto:

(a) Integrando en (2) de modo indefinido, sigue:

$$(x^2+1)^{1/2}y(x) \;=\; \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx \;+\; C \tag{3}$$
$$\;=\; \frac{(-1)}{(x^2+1)^{(1/2)}} + C. \tag{4}$$

Sigue que

$$y(x) = \frac{(-1)}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x^2+1)^{(1/2)}}$$

Puesto que $y(0) = 1$ sigue que $C = 2$. Finalmente,

$$y(x) = -\frac{1}{(x^2+1)} + \frac{2}{(x^2+1)^{1/2}} \tag{5}$$

(b) Si en (2) decidimos integrar en $[0, x]$, sigue

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\Big((t^2+1)^{1/2}y(t)dt\Big) = \int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt. \tag{6}$$

Esto es,

$$(x^2+1)^{1/2}y(x) \;+\; C_1 \;=\; \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx \;+\; C_2 \tag{7}$$

que es la misma expresión en (3) Luego de integrar en (7) se debe evaluar $y(x)$ nuevamente en $x = 0$, para obtener (5), esto es:

$$y(x) = \frac{2}{(x^2+1)^{1/2}} \;-\; \frac{1}{(x^2+1)}.$$

Problema 4 Resuelva el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{x}{x^2+1}y(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} + x \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Respuesta:
Primero calculamos el factor integrante $\mu(x)$ de la EDO lineal de primer orden dada en el PVI. Sabemos que $\mu(x) = e^{A(x)}$, donde $A'(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Integrando se obtiene

$$A(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln(\sqrt{x^2+1}) + C.$$

Con este fin, usamos el cambio de variable $u = x^2 + 1$.
Con $C = 0$, se obtiene que $\mu(x) = e^{\ln(\sqrt{x^2+1})} = \sqrt{x^2+1}$, multiplicando el factor integrante a la EDO dada se llega a que

$$
\begin{aligned}
& y'(x)\sqrt{x^2+1} + y(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2 + x\sqrt{x^2+1} \\
& \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\right) = 2 + x\sqrt{x^2+1} \\
& \Rightarrow y(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = \int \left(2 + x\sqrt{x^2+1}\right) dx + C \\
& \Rightarrow y(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = 2x + \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C \\
& \Rightarrow y(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

Dado que $y(0) = 1$, $y(0) = \dfrac{1}{3} + C = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2}{3}$.
Por lo tanto la solución del PVI dado es

$$
y(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{2}{3\sqrt{x^2+1}}.
$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.
   (a) $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $y'(x) = -2x\, y(x)$,
   (b) $y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$, $y''(x) + 10y'(x) + 25y(x) = 0$,
   (c) $y(x) = \ln(x)$, $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}$.
   (d) $u(t) = \cos(t)$; $z'''(t) + z'(t) + z(t) = \cos(t)$.

2. Verifique que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada.
   (a) $\begin{cases} y(t) := \dfrac{-1}{(t+c)}, c \in \mathbb{R} \text{ constante} \\ y'(t) = y^2(t) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} y(x) := x\,\mathrm{e}^{-x}, \\ x\, y''(x) - 2y'(x) - xy(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

3. Resolver el PVI: $t(t^2+1)y'(t) - (t^2+1)y(t) = t$, $y(1) = 0$.

4. Resolver: $(t + |t|)\, y'(t) - t\, y(t) = t + t^2$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:
   (a) $t\, y'(t) - y(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-3t}, t > 0$,

(b) $\cos(x)\,y'(x) \,+\, \operatorname{sen}(x)\,y(x) = \,1\,, |x| \,<\, \pi/2\,.$

(c) $xy'(x) \,+\, 4y(x) \,=\, x^3 - x\,,\; x > 0.$

(d) $y'(x) = -2y(x) + sen(x).$

(e) $(x^2+1)\,y'(x) + xy(x) = \frac{x}{x^2+1}$ con $y(0) = 1.$

(f) $y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + 4x - x^2$ con $y(1) = 3.$

Marzo, 2025.
KMR/JMS/CMG//jms/cmg