Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 3 — jueves 19 de junio de 2025

Entrega: lunes 7 de julio de 2020, 23.00 horas

Problema 1. Se consideran las curvas

$$g_1 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0\bigr\}, \quad g_2 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = -1\bigr\}.$$

Determinar puntos $P = (x_1, y_1) \in g_1$ y $Q = (x_2, y_2) \in g_2$ tales que la distancia euclidiana $d(P,Q)$ es mínima.

Problema 2. ¿Cuál es el volúmen de cada uno de los siguientes cuerpos?

a) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \mathrm{e}^z)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi z)))^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$
b) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - \mathrm{e}^y| \leq y, |z - \cos(5\pi y)| \leq 2y, \quad 0 \leq y \leq 1\}$

Problema 3.

a) Determinar la masa del sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\delta(x,y,z) = (x^2 + z^2)^{1/2}$.
b) Calcular la masa del sólido limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ con $z \geq 0$ si su densidad en cada punto $P(x,y,z)$ es $\delta(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

Problema 4. Calcular el volumen y centro de masa del sólido limitado por el cilindro $z = y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

Problema 5.

a) Se considera la integral

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{9x+9}}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{15} \int_{x-3}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Dibujar el dominio de integración $\mathcal{R}$, representar la integral cono integral iterada única y calcular su valor para $f(x,y) = y^2$.

b) Sea $\mathcal{Q} := [1,4] \times [1,2]$. Calcular

$$\iint\limits_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y), \quad \text{donde} \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{(x+y)^2} & \text{si } y \leq x \leq 2y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

c) Calcular

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

d) Demostrar que para $a > 0$,

$$\int_0^a \left(\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 6. Se consideran los campos vectoriales $\vec{V}_1, \vec{V}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por

$$\vec{V}_1 := \{yz, xz, xy\}, \quad \vec{V}_2 := \{x^2 y, x-z, xyz\},$$

además las curvas

$$\mathcal{K}_1 : \ [0,1] \ni t \mapsto (t, t^2, 2) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{K}_2 : \ [0,1] \ni t \mapsto (t, t, 2) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcular $\operatorname{rot} \vec{V}_1$ y $\operatorname{rot} \vec{V}_2$ y las cuatro siguientes integrales de línea, donde $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$:

$$\int_{\mathcal{K}_i} \vec{V}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_{\mathcal{K}_i} V_{j,1}\,\mathrm{d}x + V_{j,2}\,\mathrm{d}y + V_{j,3}\,\mathrm{d}z, \quad i,j = 1,2.$$

Problema 7. Se considera el siguiente campo vectorial plano con el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{K}_\alpha(x,y) = \left\{ \alpha y + \tan x, \frac{\arctan y}{1+y^2} \right\}, \quad (x,y) \in \mathcal{G} := \bigl\{ (x,y) \mid |x| < \pi/2, \ y \in \mathbb{R} \bigr\}.$$

a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ una curva rectificable que conecte el punto inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{G}$ con el punto final $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{G}$. ¿Para qué valor de α la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_\alpha(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_{\mathcal{C}} K_{\alpha,1}\,\mathrm{d}x + K_{\alpha,2}\,\mathrm{d}y$$

depende solamente de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}_1$, pero no de $\mathcal{C}$?

b) Para el valor de α determinado en (a), hallar un potencial $\varphi(x,y)$ del campo vectorial $\vec{K}_\alpha(x,y)$.

c) Sean $\boldsymbol{x}_0 = (0, \pi/4)$, $\boldsymbol{x}_1 = (\pi/4, 0)$, y $\mathcal{C}$ el segmento recto que conecta ambos puntos. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_1(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Aviso: Escribir $\vec{K}_1$ como suma de dos campos vectoriales y aprovechar el resultado de (b).

Problema 8. Determinar las sigiuentes áreas de superficie:

a) de la parte del cilíndro $x^2 + z^2 = a^2$ interior a la superficie $y^2 = a(x+a)$, $a > 0$,

b) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por la superficie $z^2 = py$, $p > 0$,

c) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ recortada por $x^2 = 2\sqrt{2}y$ y el plano $z = 4$.