Vibraciones mecánicas forzadas y amortiguadas

Sistemas masa/resorte

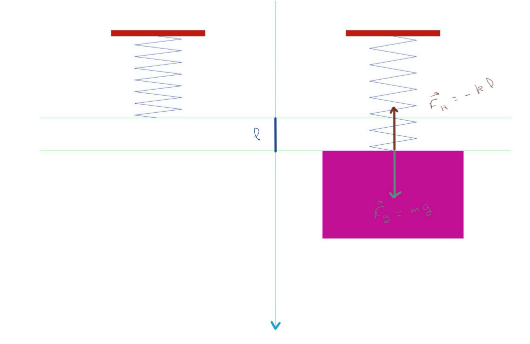
Carlos M. Mora

Ley de Hooke

Un resorte ejerce una fuerza opuesta a la dirección del alargamiento con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento.

x : valor del alargamiento
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez)

$$\overrightarrow{F}_H = -k\,x$$



$$\overrightarrow{F}_H + \overrightarrow{F}_g = 0$$

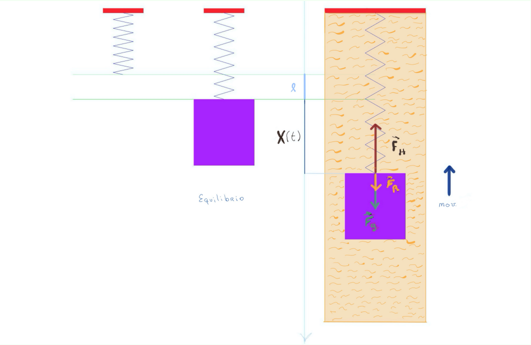
$$-k\,\ell + m\,g = 0 \Rightarrow \boxed{k\,\ell = m\,g}$$

m : masa del cuerpo
ℓ : alargamiento del resorte hasta la posición de equilibrio

Fuerza de amortiguamiento

La viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del cuerpo con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo.

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
$c > 0$: constante de rozamiento



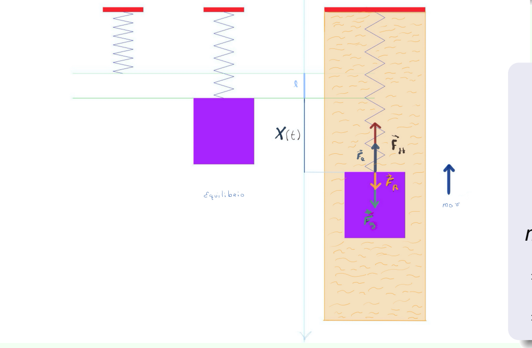
$$\vec{F}_R = -c\,X'(t)$$

Segunda ley de Newton

La suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a su masa multiplicada por la aceleración del cuerpo.

$$\text{Fuerza}_{neta} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
ℓ : alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio, m : masa del cuerpo
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez), $c > 0$: constante de rozamiento



$$m X''(t) = \vec{F}_H + \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_e(t)$$

$$\begin{aligned} m X''(t) & \\ &= -k(\ell + X(t)) + m g - c X'(t) + \vec{F}_e(t) \\ &= -k\ell - k X(t) + m g - c X'(t) + \vec{F}_e(t) \end{aligned}$$

Ecuación del movimiento:

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = \vec{F}_e(t)$$

Vibraciones amortiguadas no forzadas

Ecuación del movimiento:

$$m\,X''(t) + c\,X'(t) + k\,X(t) = 0 \Leftrightarrow X''(t) + \frac{c}{m}X'(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}$

Raíces:

$$\lambda_{1,2} = \left(-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{k}{m}}\right)/2 = -\frac{c}{2\,m} \pm \frac{1}{2\,m}\sqrt{c^2 - 4\,k\,m}$$

Caso $c^2 > 4\,k\,m$: Vibraciones sobreamortiguadas

$$X(t) = C_1\,\exp\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4\,k\,m}}{2\,m}\,t\right) + C_2\,\exp\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4\,k\,m}}{2\,m}\,t\right)$$

Caso $c^2 = 4\,k\,m$: Vibraciones críticamente amortiguadas

$$X(t) = (C_1 + C_2\,t)\,\exp\left(-\frac{c}{2\,m}\,t\right)$$

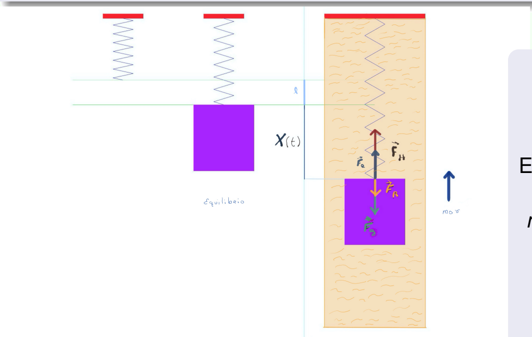
Caso $c^2 < 4\,k\,m$: Vibraciones subamortiguadas

$$X(t) = \exp\left(-\frac{c}{2\,m}\,t\right)\left(C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{4\,k\,m-c^2}}{2\,m}t\right) + C_2\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\,k\,m-c^2}}{2\,m}t\right)\right)$$

Vibraciones amortiguadas y forzadas

Una masa de *m Kg* se sujeta a un resorte suspendido de un techo. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, es desplazado en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo cierta velocidad. Asumimos que la viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo ejerce una fuerza opuesta a la dirección del movimiento del cuerpo con una magnitud directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo. Describa el movimiento del cuerpo si sobre él actúa la fuerza externa $\overrightarrow{F}_e(t) = F_0 \cos(\omega t)$, donde $F_0, \omega \in \mathbb{R}$, el tiempo t está dado en segundos y el sistema de referencia lo da la dirección y el sentido del campo gravitatorio.

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
ℓ : alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez) $\qquad c > 0$: constante de rozamiento



$$m X''(t) = \overrightarrow{F}_H + \overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_R + \overrightarrow{F}_e(t)$$

Ecuación del movimiento:

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Ecuación del movimiento

$$X''(t) + \frac{c}{m} X'(t) + \frac{k}{m} X(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

$$X_h(t) = \begin{cases} C_1 \exp\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4\,k\,m}}{2\,m}\,t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4\,k\,m}}{2\,m}\,t\right) & \text{si } c^2 > 4\,k\,m \\ e^{-\frac{c}{2\,m}\,t}\,(C_1 + C_2\,t) & \text{si } c^2 = 4\,k\,m \\ e^{-\frac{c}{2\,m}\,t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\,k\,m-c^2}}{2\,m}\,t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\,k\,m-c^2}}{2\,m}\,t\right)\right) & \text{si } c^2 < 4\,k\,m \end{cases}$$

$X_h(t)$ es una solución transiente, pues

$$lim_{t\to+\infty} X_h(t) = 0.$$

Entonces,

$$lim_{t\to+\infty} |X(t) - X_p(t)| = 0$$

$$X_p''(t) + \frac{c}{m} X_p'(t) + \frac{k}{m} X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{k}{m}} \right) /2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,k\,m}}{2\,m}$$

Aniquilador

$$\hat{L}\, \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = 0 \Leftrightarrow \hat{L} \cos(\omega t) = 0$$

$$(D - i\omega)(D + i\omega) \cos(\omega t) = 0$$

Solución particular

$$(D - i\omega)(D + i\omega)(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) X_p(t) = 0$$

$$X_p(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$X_p''(t) + \frac{c}{m} X_p'(t) + \frac{k}{m} X_p(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$X_p(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

$X_p'(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$
$X_p''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$

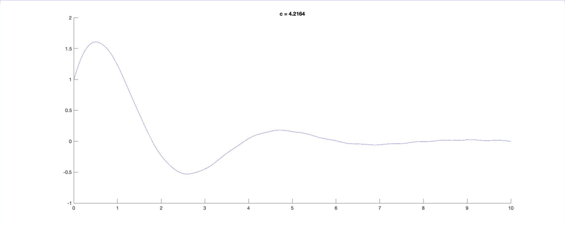
$$\frac{F_0}{m} \cos(\omega t) + 0 \operatorname{sen}(\omega t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{c}{m} A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{c}{m} B\omega \cos(\omega t)$$
$$+ \frac{k}{m} A \cos(\omega t) + \frac{k}{m} B \operatorname{sen}(\omega t)$$

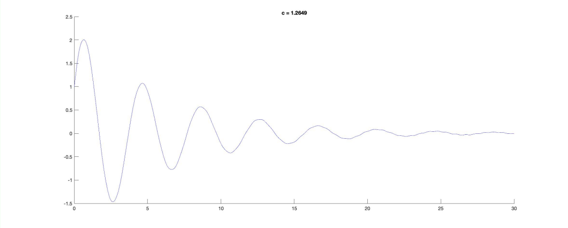
$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A + \frac{c\,\omega}{m} B = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{c\,\omega}{m} A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & c\,\omega \\ -c\,\omega & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

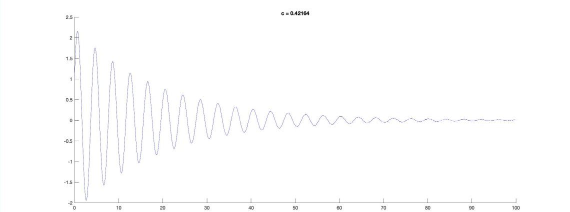
$$A = \frac{F_0\,(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}, \qquad B = \frac{c\,\omega\,F_0}{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}$$

Solución estacionaria = solución particular

$$X_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}} F_0 \cos(\omega t - \theta)$$


c = 4.2164
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


c = 1.2649
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 5 10 15 20 25 30


c = 0.42164
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Solución estacionaria = solución particular

$$X_p\,(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(k - \omega^2\, m\right)^2 + c^2\,\omega^2}} F_0 \cos\left(\omega\, t - \theta\right)$$

$$(k - x\, m)^2 + c^2\, x = m^2\, x^2 + \left(c^2 - 2\, m\, k\right) x + k^2 = m^2 \left(x + \frac{c^2 - 2\, m\, k}{2m^2}\right)^2 + k^2 - \left(\frac{c^2 - 2\, m\, k}{2m}\right)^2$$

Mínimo en $[0, +\infty[$

Si $2\, m\, k > c^2$, $x_{min} = \dfrac{2\, m\, k - c^2}{2m^2}$.

Si $2\, m\, k \leq c^2$, $x_{min} = 0$.

Máxima ganancia (resonancia práctica) cuando $2\, m\, k > c^2 (> 0)$

$$\omega_R = \pm \frac{1}{2m} \sqrt{4\, m\, k - 2\, c^2}$$

$$X_p\,(t) = \frac{2\, m}{\sqrt{c\,\left(4\, m\, k - c^2\right)}} F_0 \cos\left(\omega_R\, t - \theta_R\right)$$

Tres sistemas en resonancia práctica