

Tarea 3 521537

Elementos Finitos

Esteban Henríquez N.

Prof. Diego Paredes C.

Sea $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}^n$ acotado, considere los datos $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ tal que existe $\sigma_0 > 0$ que satisface $\sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.), y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, definimos la siguiente EDO: Encontrar $\psi \in H^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\epsilon\psi'' + \alpha\psi' + \sigma\psi = f, & \text{en } \Omega \\ \psi(0) = 0 \\ -\epsilon\psi'(1) + \frac{\alpha}{2}\psi(1) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide lo siguiente:

1. [5 puntos] Defina una formulación variacional para (1);

Demostración. Sea $H_D(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}$, luego testeando la EDO con $v \in H_D(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} & (-\epsilon\psi'', v)_{0,\Omega} + (\alpha\psi', v)_{0,\Omega} + (\sigma\psi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} \\ \Leftrightarrow & (\epsilon\psi', v')_{0,\Omega} - \langle \epsilon\psi' n, \gamma_0(v) \rangle_\Gamma + \left(\frac{\alpha}{2}\psi', v\right)_{0,\Omega} + \left(\frac{\alpha}{2}\psi', v\right)_{0,\Omega} + (\sigma\psi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} \\ \Leftrightarrow & (\epsilon\psi', v')_{0,\Omega} - \langle \epsilon\psi' n, \gamma_0(v) \rangle_\Gamma - \left(\frac{\alpha}{2}\psi, v'\right)_{0,\Omega} \\ & + \left(\frac{\alpha}{2}\psi n, \gamma_0(v)\right)_\Gamma + \left(\frac{\alpha}{2}\psi', v\right)_{0,\Omega} + (\sigma\psi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} \\ \Leftrightarrow & (\epsilon\psi', v')_{0,\Omega} - \left(\frac{\alpha}{2}\psi, v'\right)_{0,\Omega} + \left(\frac{\alpha}{2}\psi', v\right)_{0,\Omega} + (\sigma\psi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} - v(1). \end{aligned}$$

Luego, se define $a : H_D(\Omega) \times H_D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$a(u, v) := \epsilon(u', v')_{0,\Omega} - \frac{\alpha}{2}(u, v')_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}(u', v)_{0,\Omega} + (\sigma u, v)_{0,\Omega}.$$

A su vez, se define $F : H_D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(v) := (f, v)_{0,\Omega} - v(1).$$

Luego la formulación variacional de la EDO es encontrar un único $\psi \in H_D(\Omega)$ tal que satisfaga

$$a(\psi, v) = F(v) \quad \forall v \in H_D(\Omega).$$

□

2. [10 puntos] Analice la existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional de (1).

Demostración. Primero se analizará la continuidad del funcional F , notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |(f, v)_{0,\Omega} - v(1)| \\ &\leq |(f, v)_{0,\Omega}| + |v(1)| \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \left| \int_0^1 v'(x) dx \right| \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \|1\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} \\ &= (\|f\|_{0,\Omega} + \|1\|_{0,\Omega}) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_D(\Omega). \end{aligned}$$

Así se puede concluir que F es continua en $H_D(\Omega)$ y además

$$\|F\|_{H_D(\Omega)'} \leq (\|f\|_{0,\Omega} + \|1\|_{0,\Omega}) =: M$$

Por otra parte, analizando la continuidad de a notemos que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \epsilon(u', v')_{0,\Omega} - \frac{\alpha}{2}(u, v')_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}(u', v)_{0,\Omega} + (\sigma u, v)_{0,\Omega} \right| \\ &\leq \epsilon|(u', v')_{0,\Omega}| + \frac{\alpha}{2}|(u, v')_{0,\Omega}| + \frac{\alpha}{2}|(u', v)_{0,\Omega}| + |(\sigma u, v)_{0,\Omega}| \\ &\leq \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u'\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + |(\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}u, v)_{0,\Omega}| \\ &= \leq \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u'\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}|(\|u\|_{0,\Omega}, v)_{0,\Omega}| \\ &\leq \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{0,\Omega}\|v'\|_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u'\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \epsilon\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \\ &= (\epsilon + \alpha + \|\sigma\|_{L^\infty}) \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H_D(\Omega). \end{aligned}$$

definamos $\tilde{M} := (\epsilon + \alpha + \|\sigma\|_{L^\infty})$, así se tiene que a es una forma bilineal continua en $H_D(\Omega)$. Luego, analizando la coercividad de a , notemos

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \epsilon(u', u')_{0,\Omega} - \frac{\alpha}{2}(u, u')_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{2}(u', u)_{0,\Omega} + (\sigma u, u)_{0,\Omega} \\ &= \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}^2 + (\sigma u, u)_{0,\Omega} \\ &\geq \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}^2 + \sigma_0(u, u)_{0,\Omega} \\ &= \epsilon\|u'\|_{0,\Omega}^2 + \sigma_0\|u\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \min\{\epsilon, \sigma_0\} \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in H_D(\Omega). \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que a es coerciva en $H_D(\Omega)$ con constante de coercividad $\gamma := \min\{\epsilon, \sigma_0\}$. Luego como F es un funcional continuo en $H_D(\Omega)$ y la forma bilineal a es continua y coercitiva en $H_D(\Omega)$, a su vez, $(H_D, (\cdot, \cdot)_{1,\Omega})$ es Hilbert, por teorema de Lax-Milgram, se tiene que $\exists! \psi \in H_D(\Omega)$ tal que

$$a(\psi, v) = F(v) \quad \forall v \in H_D(\Omega).$$

Además

$$\|\psi\| \leq \frac{\|F\|_{H_D(\Omega)'} }{\gamma} \leq \frac{M}{\gamma}$$

□

3. [5 puntos] Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio V_h^1 ;

Demostración. Sea

$V_h^1 := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_I \in \mathbb{P}^1(I), \forall I \in \mathcal{T}_h, \text{ tal que } v_h(0) = 0\}$, por proposición vista en clases $V_h^1 \leq H_D(\Omega)$ entonces se tiene que $(V_h^1, (\cdot, \cdot)_{1,\Omega})$ es un espacio de Hilbert, luego se plantea el problema variacional como sigue; encontrar un único $\psi_h \in V_h^1$ tal que satisfaga

$$a(\psi_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1.$$

□

4. [5 puntos] Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional discreta de (1);

Demostración. Notemos que $\forall v, w \in H_D(\Omega)$ se tiene que

$$|a(v, w)| \leq \tilde{M} \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega},$$

como $V_h^1 \leq H_D(\Omega)$ también se cumple que

$$|a(v_h, w_h)| \leq \tilde{M} \|v_h\|_{1,\Omega} \|w_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h, w_h \in V_h^1,$$

así $a \in \mathcal{L}(V_h^1 \times V_h^1; \mathbb{R})$. Por otra parte

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_D(\Omega).$$

Luego, también se cumple que como $V_h^1 \leq H_D(\Omega)$

$$a(v_h, v_h) \geq \gamma \|v_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v_h \in V_h^1,$$

así a es coerciva en V_h^1 , a su vez se tiene que

$$|F(v)| \leq M \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_D(\Omega),$$

con $V_h^1 \leq H_D(\Omega)$ se tiene que

$$|F(v_h)| \leq M \|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h^1,$$

por lo tanto F es un funcional continuo en V_h^1 . Luego aplicando Teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert V_h^1 se tiene que existe un único $\psi_h \in V_h^1$ tal que

$$a(\psi_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1.$$

Además

$$\|\psi_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\gamma} \|F\|_{(V_h^1)'}. \leq \frac{M}{\gamma}.$$

□

5. [15 puntos] Estudie bajo que condiciones de ϵ , α y σ la solución discreta es la mejor aproximación de la solución continua;

Demostración. Sea $v_h \in V_h^1$, al ser a una forma bilineal coerciva, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq \frac{1}{\gamma} a(\psi - \psi_h, \psi - \psi_h) \\ &= \frac{1}{\gamma} a(\psi - \psi_h, \psi - v_h + v_h - \psi_h) \\ &= \frac{1}{\gamma} a(\psi - \psi_h, \psi - v_h) + \frac{1}{\gamma} a(\psi - \psi_h, v_h - \psi_h).\end{aligned}$$

Podemos notar que $v_h - \psi_h \in V_h^1$, ya que V_h^1 es un subespacio cerrado de $H_D(\Omega)$, por otra parte, como la formulación variacional tiene solución única se deduce que

$$a(\psi, w_h) = a(\psi_h, w_h) \Leftrightarrow a(\psi - \psi_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h^1.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq \frac{1}{\gamma} a(\psi - \psi_h, \psi - v_h) \\ &\leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} \|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} \|\psi - v_h\|_{1,\Omega} \\ \Rightarrow \|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} &\leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} \|\psi - v_h\|_{1,\Omega} \\ \Rightarrow \|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} &\leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h^1} \|\psi - v_h\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

□

6. [10 puntos] Construya las tasas de convergencia para el error entre solución discreta y continua en norma $L^2(\Omega)$ y la semi-norma de $H^1(\Omega)$;

Demostración. Notemos que al ser V_h^1 de dimensión finita entonces tiene una base donde $V_h^1 = \langle \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \rangle$, donde se define

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & , \quad x \in]x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Aplicando el operador de interpolación a ψ (solución única de la formulación variacional continua) con elementos de la base de V_h^1 se obtiene

$$\mathcal{I}_h^1(\psi) = \sum_{i=1}^n \psi(x_i) \phi_i$$

Por el problema anterior se tiene que

$$\|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h^1} \|\psi - v_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} \|\psi - \mathcal{I}_h^1\|_{1,\Omega},$$

la ultima desigualdad es correcta debido a que $\mathcal{I}_h^1 \in V_h^1$, por otra parte, por propiedad vista en clases se tiene que

$$\|\psi - \mathcal{I}_h^1\|_{1,\Omega} \leq h|\psi|_{2,\Omega},$$

por lo tanto, podemos concluir que

$$\|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\tilde{M}}{\gamma} h \|\psi\|_{2,\Omega}.$$

De esto se puede decir que el error en norma $H^1(\Omega)$ tiene a cero con orden h .

□

7. Considere $\epsilon = 1$, $\alpha = 6$, $\sigma = 9$ y $f = 1$. Defina una malla sobre Ω tal que $h = 1/3$. Construya el sistema lineal que determina la solución discreta, resuélvalo y grafique los resultados.

Demostación. Se define una malla unidimensional para $\Omega =]0, 1[$ como la unión de los intervalos $\{I_j\}_{j=1}^3 = \{(i-1)h, ih\}_{j=1}^3$. Luego, siendo ψ la solución única de la formulación variacional continua, notemos que al ser $\dim(V_h^1) < \infty$, $\exists \beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$, tales que

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j(x) \quad \forall x \in]0, 1[,$$

luego, reemplazando en la formulación variacional discreta se obtiene

$$a\left(\sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j, v_h\right) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1,$$

fijando $v_h = \phi_i$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, luego

$$\sum_{j=1}^N \beta_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i).$$

Definimos $A_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ y $b_i = F(\phi_i)$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, así el problema ahora es encontrar $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} \beta_j = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

en este caso, se considerarán 3 intervalos por lo que $N = 3$. Considerando $\epsilon = 1$, $\alpha = 6$, $\sigma = 9$ y $f = 1$ se calcula los siguiente

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= a(\phi_i, \phi_i) \\
&= \int_0^1 (\phi'_i(x))^2 dx - 3 \int_0^1 \phi_i(x) \phi'_i(x) dx + 3 \int_0^1 \phi'_i(x) \phi_i(x) dx + 9 \int_0^1 \phi_i^2(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi'_i(x))^2 dx + 9 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi'_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi'_i(x))^2 dx + 9 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^2(x) dx + 9 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)' \right]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)' \right]^2 dx + 9 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx \\
&\quad + 9 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right)^2 dx \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Para el caso $i = 3$ queda $A_{ii} = 4$. Entonces $A_{i,i} = 8 \quad \forall i \in \{1, 2\}$, luego calculando

$$\begin{aligned}
A_{i,i+1} &= a(\phi_i, \phi_{i+1}) \\
&= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx - 3 \int_0^1 \phi_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx + 3 \int_0^1 \phi'_i(x) \phi_{i+1}(x) dx \\
&\quad + 9 \int_0^1 \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx - 3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx + 3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_i(x) \phi_{i+1}(x) dx \\
&\quad + 9 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces $A_{i,i+1} = \frac{1}{2}$. De manera similar, calculando $A_{i+1,i} = -\frac{11}{2}$. Por su parte

$$\begin{aligned}
b_i &= F(\phi_i) \\
&= (f, \phi_i)_{0,\Omega} - 1 \cdot \phi_i(1) \\
&= \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx - 1 \cdot \phi_i(1) \\
&= \int_0^1 \phi_i(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, con $i = 3$ se tiene $b_i = -\frac{5}{6}$. Con esto se obtiene el siguiente sistema lineal $A\beta = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1/2 & 0 \\ -11/2 & 8 & 1/2 \\ 0 & -11/2 & 4 \end{bmatrix},$$

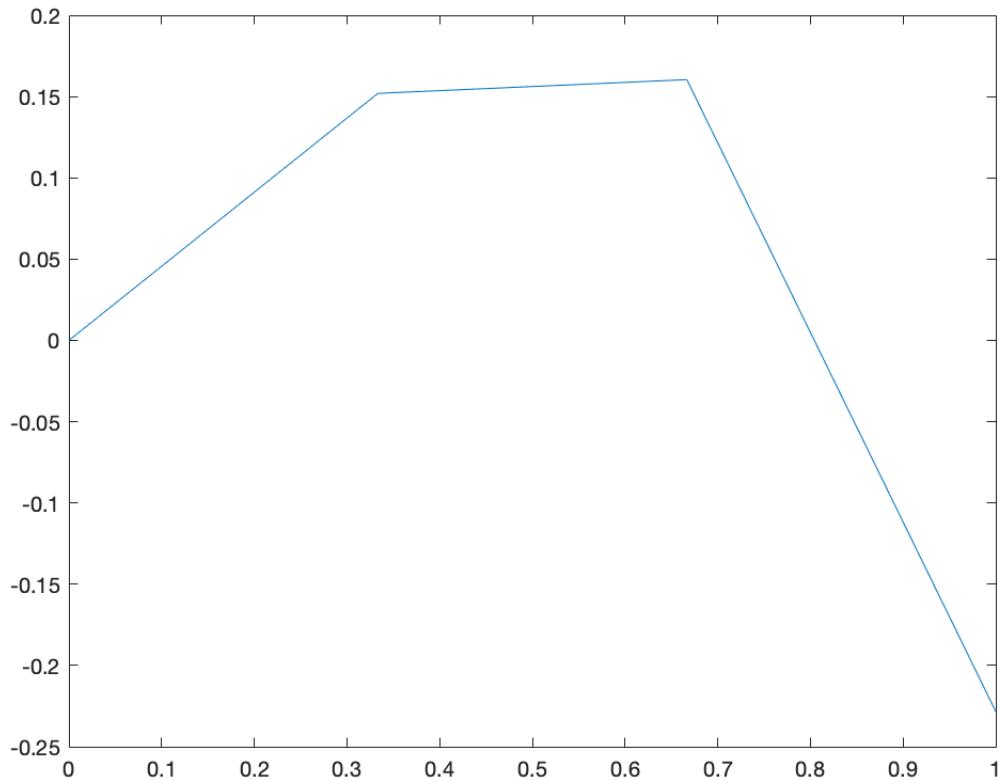
$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/6 \end{bmatrix}.$$

Luego resolviendo el sistema se obtiene que

$$\beta = \begin{bmatrix} 0,1278 \\ 0,1253 \\ 0,0677 \end{bmatrix},$$

luego graficando la solución discreta se obtiene la siguiente gráfica



□