Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Tarea no. 3 — viernes 11 de mayo de 2018

Plazo de entrega: martes 22 de mayo de 2018, 10.15 horas

Problema 1. Se considera el sistema lineal $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$, la matriz $\boldsymbol{E}$ y el vector $\boldsymbol{d}$ dados por

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Visualizar $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$ como dos rectas en el plano (x_1, x_2) y dibujar el conjunto de los puntos $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ que satisface $|\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{A}_0\tilde{\boldsymbol{x}}| \leq \boldsymbol{E}|\tilde{\boldsymbol{x}}| + \boldsymbol{d}$. para (a) $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.5$, (b) $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.1$ y (c) $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.05$. Comparar los resultados.

Problema 2. Se considera el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b_0}$ con

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} -30 \\ 18 \\ -7 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{e} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E} = 0.25\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{d} = 0.25\boldsymbol{e}$.

a) Analice si los siguientes vectores son soluciones aproximadas compatibles con $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_0$ en el sentido del Teorema 3.10:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 4.01 \\ -3.02 \\ 1.99 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 3.95 \\ -3.1 \\ 2.05 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 4.2 \\ -2.9 \\ 1.8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_4 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.5 \\ -2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

b) Para cada uno de los vectores $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}_i$ que sea una solución compatible con $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_0$, determinar una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ y un vector $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$ (ver Teorema 3.10) tal que $\boldsymbol{x}$ es la solución exacta de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Problema 3. Para cada par $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, usar el método de Householder para determinar una descomposición $\boldsymbol{QR}$ de $\boldsymbol{A}$, determinar un vector $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ que minimiza $\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$, y calcular $\|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \\ 70 & -35 \\ -14 & 77 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Se considera el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

a) Preparar un dibujo que interpreta ambas ecuaciones del sistema lineal como rectas en el plano x_1-x_2.

b) Ejecutar desde $\mathbf{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ tres pasos de cada uno de los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, del método SOR con $\omega = 1.5$ y del método SOR con ω_{opt}. Agregar al dibujo las sucesiones

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix} \dots$$

en los casos de los métodos de Gauss-Seidel y SOR y la sucesión

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,2} \\ \xi_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1,3} \\ \xi_{2,3} \end{pmatrix} \dots$$

en el caso del método de Jacobi.

Problema 5. Resolver con cada uno de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, y SOR con $\omega = 1.5$ cada uno de los sistemas $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, partiendo desde $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Se deben calcular en cada caso cinco aproximaciones $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_5$, además la distancia $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_*\|$ en las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$. Calcular en cada caso, además, $r_{\|\cdot\|,i} := \|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_*\| / \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_*\|$ para $i = 0, \dots, 4$, y comparar con $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega))$, para

a) $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ -19 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix},$$

b) $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.

a) Analizar si las siguientes matrices poseen algunas de las siguientes propiedades: irreducible, irreduciblemente diagonal dominante, estrictamente diagonal dominante, L-matriz, M-matriz:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Demostrar que $\boldsymbol{A}_n$ es una M-matriz para todo $n \in \mathbb{N}$, y desarrollar una fórmula explícita de $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}_n)$.

Problema 7.

a) Analizar si (i) el método de Jacobi, (ii) el método de Gauss-Seidel y (iii) el método SOR con $\omega = \omega_{\text{opt}}$ convergen para el sistema $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$, para todo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, para las siguientes matrices (en el caso (iii), determinar ω_{opt} y $r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega_{\text{opt}}))$):

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) En todos los casos, dibujar la función $\omega \mapsto r_\sigma(\boldsymbol{B}(\omega))$ para $\omega \in (0,2)$.