UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Geometría Diferencial (525582)
Tarea $N°4$.

Fecha de entrega: (Antes de mediodía del jueves 3 de Noviembre)

Problema 1.
Sea M una variedad suave de dimensión m. Considere el sistema local de coordenadas $\{u^1, \cdots, u^m\}$ dado por una carta (U, φ). Muestre que para todo $i, j \in \{1, \cdots, m\}$ resulta $[\partial_i, \partial_j] = 0$, donde ∂_i significa $\dfrac{\partial}{\partial u^i}$.

Problema 2.
Para E y F dos espacios vectoriales, escribimos $\mathrm{Hom}(E, F)$ como el conjunto de todas las transformaciones lineales de E en F.
Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente, $\phi : M \to N$ una aplicación diferenciable. Muestre que para $p \in M$,

$$\mathrm{Hom}(T_pM, T_{\phi(p)}N) \cong T_p^*M \otimes T_{\phi(p)}N.$$

Observación: Aquí $A \cong B$ significa isomorfismo lineal.

Problema 3.

(i) Sea M una variedad diferenciable a dimensión m. Sean $\{u^1, \cdots, u^m\}$ y $\{w^1, \cdots, w^m\}$ dos sistemas de coordenadas locales en $p \in M$.Muestre que:

$$\begin{cases} du^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial w^k}\, dw^k \\ \dfrac{\partial}{\partial u^i} = \dfrac{\partial w^k}{\partial u^i}\, \dfrac{\partial}{\partial w^k} \end{cases}$$

(ii) Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente, $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Para $p \in M$ y cartas (U, φ), $(V; \Psi)$ tales que $p \in U \subset \Psi$, muestre que

$$F^*(dv^\alpha) = \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i} du^i.$$

14/10/22.
JMS//jms