Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Laboratorio 8: Problemas de Valores Iniciales (Parte II)
Cálculo Numérico (521230)

Observaciones

- En esta guía se plantean dos problemas. El primero se resuelve en el video asociado al laboratorio. El segundo problema debes entregarlo.
- **Todos los archivos `.m` pueden ser descargados de Canvas.**
- Te recomendamos leer esta guía antes de ver el video de resolución del problema.

En este segundo laboratorio sobre Problemas de Valores Iniciales (PVI) trabajaremos con las siguientes funciones OCTAVE para la solución de este tipo de problemas:

- `ode45`: Basado en un método tipo Runge-Kutta. No apto para la solución de problemas stiff.
- `ode15s`: Basado en un tipo de métodos que no estudiaremos en el curso, denominados *métodos de paso múltiple*. Apto para la solución de problemas *stiff*.

Problema resuelto en video: La ecuación de van der Pol

$$x'' - \varepsilon\left(1 - x^2\right)x' + x = 0, \qquad t \in [0, T]$$

modela un oscilador con amortiguamiento no lineal. Fue propuesta por primera vez por Balthasar van der Pol alrededor de 1920 para describir el comportamiento de un circuito formado por un inductor, una resistencia y un capacitor, colocados en serie.
Estudiemos el comportamiento de este problema para distintos valores de ε.

1) Transforme la ecuación anterior a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1.
2) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 20, \qquad \varepsilon = 0, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t), donde x_t representa la aproximación a $x(t)$ obtenida con el esquema numérico. Note que en este caso la solución exacta del problema es una función sinusoidal.

3) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 20, \qquad \varepsilon = 4, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t). Note que en este caso la solución sigue siendo periódica, pero no tiene forma de función sinusoidal. ¿Cuántos pasos realiza `ode45` para resolver el problema con las tolerancias dadas?

4) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 200, \qquad \varepsilon = 40, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t). ¿Cuántos pasos realiza `ode45` para resolver el problema con las tolerancias dadas? Una particularidad de la ecuación de van der Pol es su comportamiento *stiff* para valores grandes de ε. Para estos valores es conveniente utilizar un método adecuado para problemas *stiff*, ellos podrán calcular una aproximación con la misma exactitud, pero en menos tiempo.

5) Resuelva el mismo problema anterior, pero utilice esta vez `ode15s`. ¿Cuántos pasos realiza `ode15s` para resolver el problema con las tolerancias dadas?

6) Si continuamos aumentando el valor de ε el problema es cada vez más difícil de resolver por `ode45`. Con $\varepsilon = 40$ la cantidad de pasos que realiza `ode45` es un poco más del doble de la cantidad de pasos que realiza `ode15s`. Pero, ¿qué ocurre si $\varepsilon = 100$?

Problema a entregar: La litotricia es un procedimiento médico en el que, mediante pulsos ultrasónicos, se busca romper, en pedazos suficientemente pequeños, piedras que se encuentran en el riñón del paciente. Estos pulsos ultrasónicos tienen como consecuencia la formación de burbujas. Las oscilaciones en el radio de estas burbujas juegan un papel importante en la ruptura de las piedras.

En un artículo en la revista *SIAM Review* Howle, Schaeffer, Shearer y Zhong proponen investigar las variaciones en el radio R de las burbujas con ayuda de la siguiente ecuación diferencial de orden 2

$$RR'' + \frac{3}{2}(R')^2 = a^2\left(\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - 1\right), \quad R(0) = AR_0,\ R'(0) = 0,$$

en la que $R_0 = 3 \times 10^{-6}$m es el radio de las burbujas en equilibrio, $\gamma = 1.4$ es el exponente adiabático y $a \approx 10$m/s. Dada la gran diferencia entre los valores de R_0 y a es aconsejable introducir el siguiente cambio de variables

$$r = \frac{R}{R_0}, \qquad \tau = \frac{a}{R_0}t$$

a la ecuación diferencial anterior, resultando en

$$rr'' + \frac{3}{2}(r')^2 = r^{-3\gamma} - 1, \qquad r(0) = A,\ r'(0) = 0. \tag{1.1}$$

donde ahora r es una función de τ.

1) Convierta el problema de valores iniciales (1.1) en un sistema de orden 1.
2) Escriba el rutero `litotricia.m` en el que
   - 2.1) resuelva el sistema de orden 1 resultante con $A = 2.5$ y $\tau \in [0, 20\text{s}]$ (note que esto significa que t varía entre 0 y $\frac{R_0}{a}20 = 6 \times 10^{-6}$s) con `ode45` y tolerancias, tanto absoluta como relativa, iguales a 10^{-6}. ¿Cuántos pasos realiza el método para resolver el problema? (La cantidad de pasos es la cantidad de puntos entre 0 y 20 donde `ode45` calcula aproximaciones a r).
   - 2.2) Grafique los pares (τ, r_τ) obtenidos con el llamado anterior, r_τ representa la aproximación a $r(\tau)$ calculada con `ode45`. Observe que r, y por tanto R, parece ser una función periódica.
   - 2.3) Estime el período de las oscilaciones de r. ¿Cuál es el período de las oscilaciones de R?
   - 2.4) Repita 2.1, pero utilice esta vez `ode15s`. ¿Cuántos pasos realiza este método para resolver el problema? Observe que, a diferencia del problema resuelto en video, el método `ode45` resuelve el problema en muchos menos pasos que `ode15s`.

Forma de entrega: `litotricia.m`.
