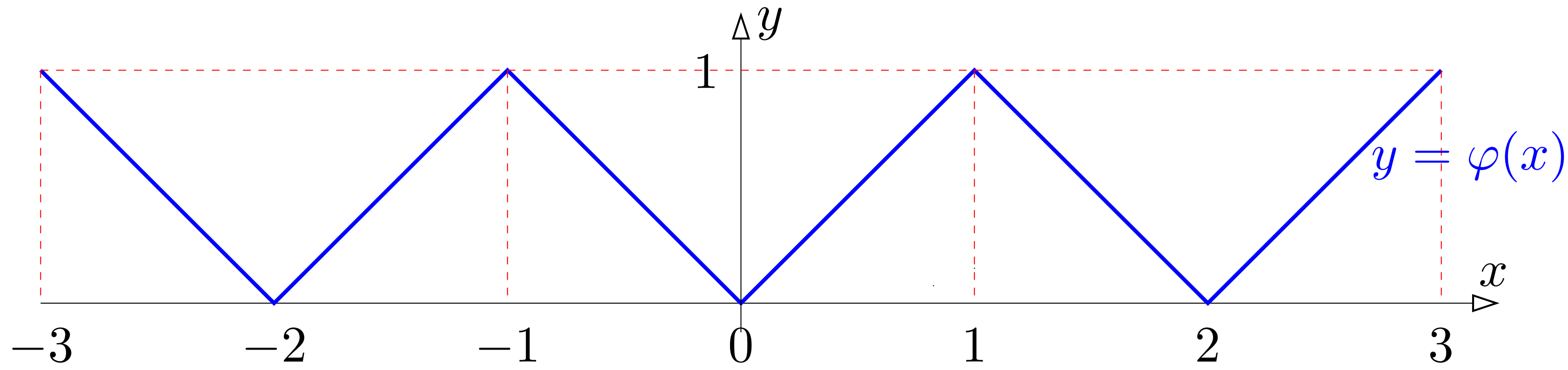
Funciones continuas no derivables.

- **Funciones continuas no derivables en ningún punto.**

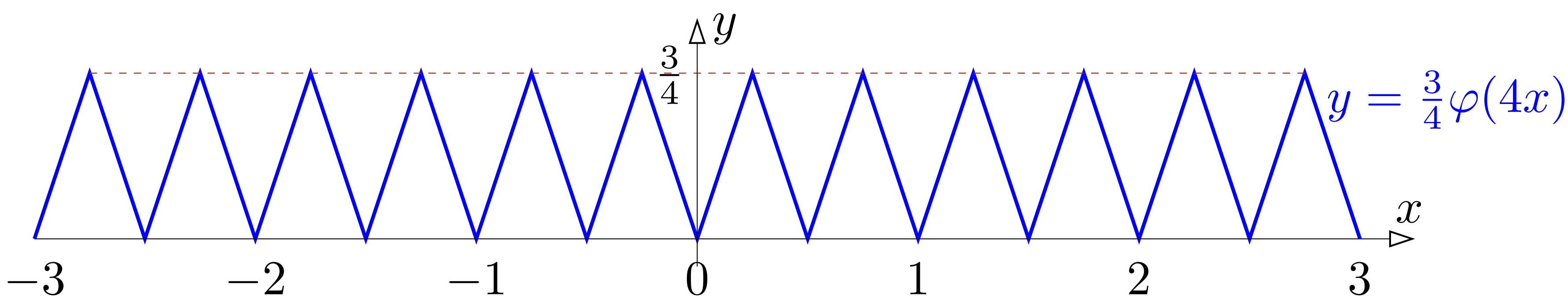
Funciones continuas no derivables en ningún punto.

Veremos que existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continuas, que no son derivables en ningún punto de su dominio.**

Para ello comenzaremos con la función $\varphi(x) := |x|\,,\ -1 \le x \le 1,$ extendida periódicamente a todo $\mathbb{R}$:

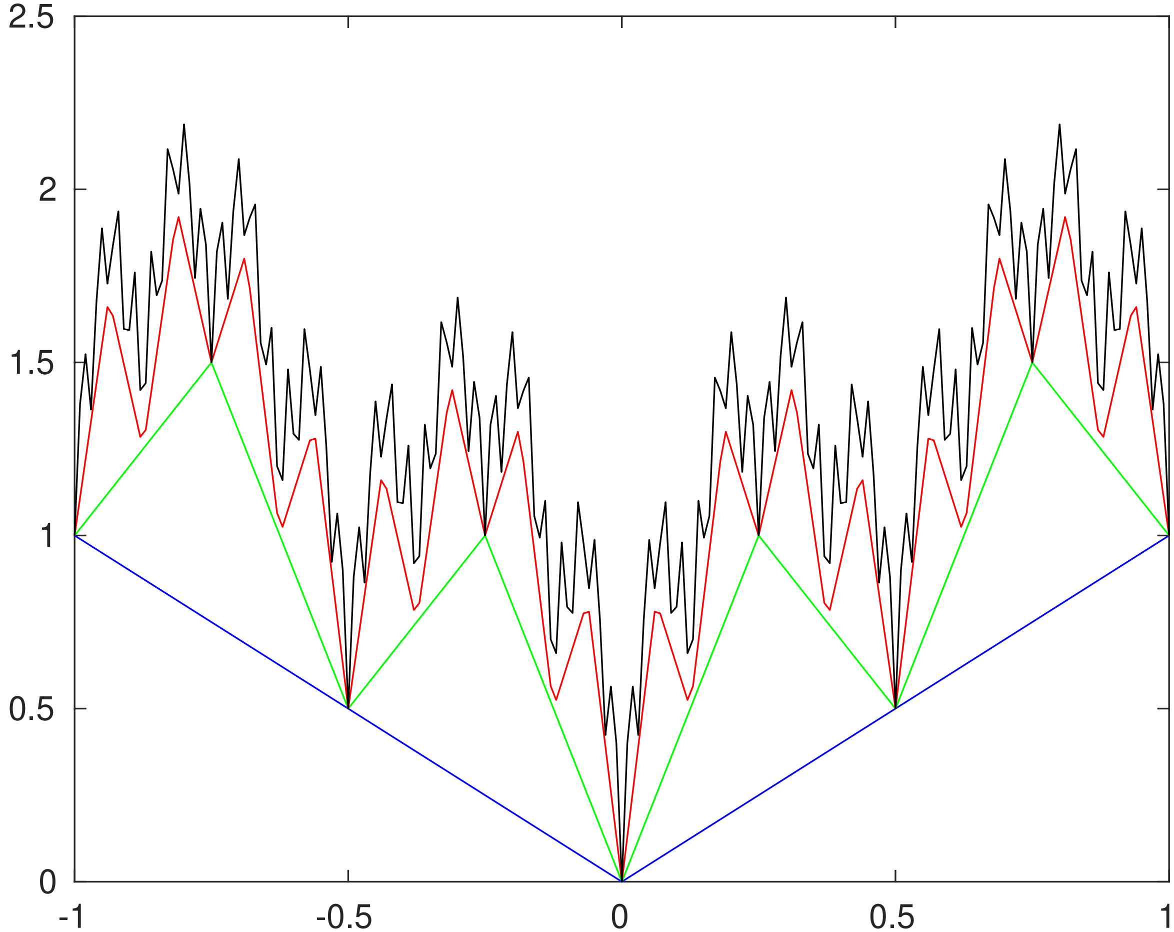


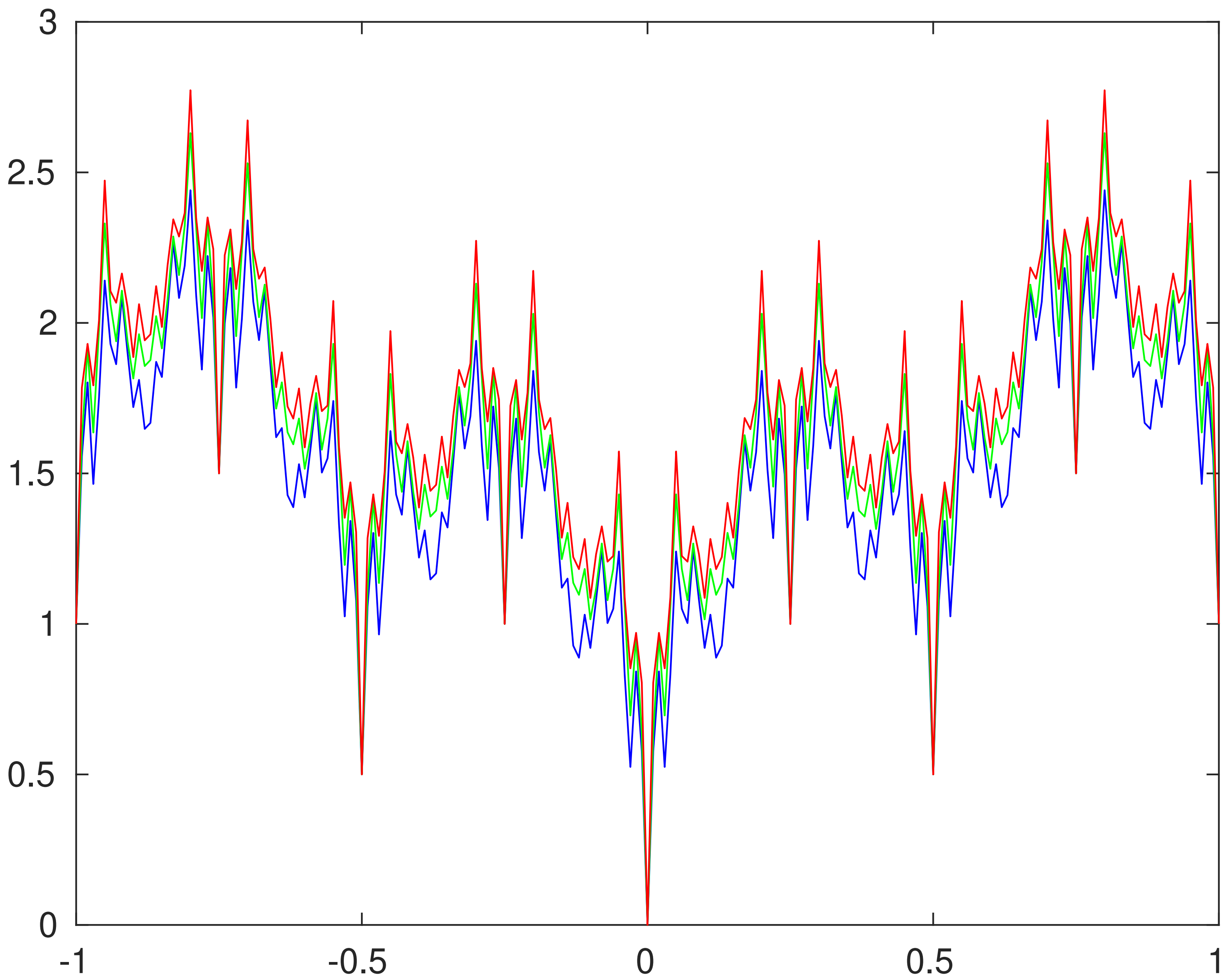
A esta función se le suma la función $\frac{3}{4}\varphi(4x)$:



Luego se suma $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(4^2 x)$, luego $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \varphi(4^3 x)$ y así sucesivamente.

La siguiente figura muestra las primeras cuatro sumas y la siguiente muestra la quinta, la sexta y la septima, en ambos casos restringidas al intervalo $[-1, 1]$.:




3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1

Notemos que según se añaden más términos de la forma $\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x),\ n \in \mathbb{N},$ en las gráficas de las funciones resultantes (que siempre son continuas) se observa más y más puntos en los que esas funciones no son derivables.

Consideremos la función que resulta al sumar todos los términos de de esta forma:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

Como $|\varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$ entonces $\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \ \forall x \in \mathbb{R},$

Por lo tanto, como $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge, por el criterio de Weierstass la serie que define $f(x)$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.

En consecuencia, como las funciones de la serie que define f son continuas en $\mathbb{R},$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, f **no es derivable en ningún punto de su dominio.**

La demostración de esto puede verse en el Teor. 7.18 de libro de Rudin.