

TAREA 2 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada problema tiene un puntaje máximo de **15 puntos**.

Recomiendo revisar con calma los desarrollos propuestos. Procurar usar las notaciones apropiadamente, y no dar por sentado algunas inferencias directas en sus desarrollos. Debieran justificarse como corresponde. Algunas de ellas, han sido dejadas de ejercicio al lector.

Problema 1. Sean S, T, U subespacios de un \mathbb{K} -espacio vectorial V , tales que

- a) $S \cap T = S \cap U$,
- b) $S + T = S + U$,
- c) $T \subseteq U$.

Demostrar que $T = U$.

Desarrollo: Resta probar $U \subseteq T$. Sea $x \in V$, tal que $x \in U$ (fijo pero arbitrario). Observamos que

$$\begin{aligned} x \in U \subseteq S + U &\xrightarrow{b)} x \in S + T \\ &\Rightarrow \exists(y, z) \in S \times T : x = y + z \\ &\Rightarrow y = x - z. \end{aligned}$$

Gracias a c), tenemos que $z \in U$, con lo cual $x - z \in U$. Pero $y \in S$. Luego, $y \in S \cap U = S \cap T$, por a). Como consecuencia, se deduce que $y \in T$ también. De esta manera, se concluye que $x = y + z \in T$. En vista que $x \in U$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $U \subseteq T$, lo cual junto con c), permite establecer que $T = U$.

OBSERVACIÓN: La mayoría ha establecido este resultado cuando V es de DIMENSIÓN FINITA, invocando el TEOREMA DE GRASSMANN. De esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} \dim(S + T) = \dim(S + U) &\Rightarrow \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(U) - \dim(S \cap U) \\ &\xrightarrow{a)} \dim(T) = \dim(U). \end{aligned}$$

Luego, en vista que T es subespacio vectorial de U (por c)), se concluye que $T = U$.

Problema 2. En los siguientes casos, indique si existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ que verifique: $\text{Im}(T) = A$ y $\text{Ker}(T) = B$. Justifique su respuesta. En caso afirmativo, determine cómo viene definida T .

- a) $A := \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}, B := \langle\{(1, 2, 1)\}\rangle$.
- b) $A := \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}, B := \langle\{(1, -2, 1)\}\rangle$.

Desarrollo:

- a) Primero deduzcamos un conjunto generador de A . Tenemos

$$\begin{aligned} A &:= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\} \\ &= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4\} \\ &= \{x := (-x_2 + x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle\{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}\rangle. \end{aligned}$$

De esta manera, $S := \{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ genera A . Veamos que es l.i. En efecto, sean $\{\alpha_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1(-1, 1, 0, 0) + \alpha_2(1, 0, 1, 0) + \alpha_3(-2, 0, 0, 1) = \theta = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Así, S es una base de A . Ahora veamos si es posible la existencia de T . En caso existiera, se tendría que $n(T) = 1$ y $r(T) = \dim(A) = 3$. Pero, invocando el TEOREMA DE NULIDAD Y RANGO, tenemos $n(T) + r(T) = 4 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. De esta forma, en este caso, no existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ que satisface lo pedido.

b) Como en el caso a), comenzaremos estableciendo un conjunto generador de A . Tenemos

$$\begin{aligned} A &:= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\} \\ &= \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2, x_3 = -x_4\} \\ &= \{x := (-x_2, x_2, -x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0 - 1, 1)\} \rangle. \end{aligned}$$

Así, $R := \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0 - 1, 1)\}$ es un conjunto generador de A . En vista que $(-1, 1, 0, 0)$ no es múltiplo de $(0, 0, -1, 1)$, se infiere que R es una base de A . Ahora veamos si es posible la existencia de T . En caso existiera, se tendría que $n(T) = 1$ y $r(T) = \dim(A) = 2$. Invocando el TEOREMA DE NULIDAD Y RANGO, tenemos $n(T) + r(T) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. De esta forma, en este caso, SÍ EXISTE $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ que satisface lo pedido.

En lo que sigue procedemos a definir T , explicitando su regla de correspondencia. Por lo discutido en clases, es suficiente con conocer las imágenes via T de una base cualquiera del ESPACIO DE PARTIDA, \mathbb{R}^3 en nuestro caso. Como $\text{Ker}(T) = \langle \{(1, -2, 1)\} \rangle$, se infiere que $T(1, -2, 1) = \theta_{\mathbb{R}^4}$. Completamos ahora $\{(1, -2, 1)\}$ hasta obtener una BASE DE \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, consideremos el conjunto $U := \{(1, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, el cual es l.i. En efecto, sean $\{\beta_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_1(1, -2, 1) + \beta_2(1, 0, 0) + \beta_3(0, 1, 0) = \theta_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -2\beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

De esta manera, U es una base de \mathbb{R}^3 . Recordando ahora lo discutido en clases, $T(U)$ es un conjunto generador de $\text{Im}(T) = A$, resulta que $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0)\}$ genera A . Esto sugiere, por ejemplo, que $T(1, 0, 0) = (-1, 1, 0, 0)$ y $T(0, 1, 0) = (0, 0 - 1, 1)$. Con estos datos, ya podemos definir T . Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, y sean $\{\beta_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_1(1, -2, 1) + \beta_2(1, 0, 0) + \beta_3(0, 1, 0) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = x \\ -2\beta_1 + \beta_3 = y \\ \beta_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = z, \beta_2 = x - z, \beta_3 = y + 2z.$$

Así, $(x, y, z) = z(1, -2, 1) + (x - z)(1, 0, 0) + (y + 2z)(0, 1, 0)$, de donde resulta

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= zT(1, -2, 1) + (x - z)T(1, 0, 0) + (y + 2z)T(0, 1, 0) \\ &= (x - z)(-1, 1, 0, 0) + (y + 2z)(0, 0, -1, 1) = (z - x, x - z, -y - 2z, y + 2z). \end{aligned}$$

Finalmente, como $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es fijo pero arbitrario, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ viene dada por

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) := (z - x, x - z, -y - 2z, y + 2z).$$

Problema 3. Sean V y W \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que $\forall T \in \mathcal{L}(V, W) : \exists U \subseteq V$ subespacio vectorial, tal que $U \cap \text{Ker}(T) = \{\theta_V\} \wedge \text{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\}$.

Desarrollo: Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Tenemos tres casos posibles:

- a) $\text{Ker}(T) = V$. Esto implica que $T := \Theta \in \mathcal{L}(V, W)$ (TRANSFORMACIÓN NULA). Entonces con $U := \{\theta\}$ se obtiene lo pedido.
- b) $\text{Ker}(T) = \{\theta\}$. Aquí, considerando $U := V$, también se obtiene lo pedido.
- c) $\text{Ker}(T)$ subespacio vectorial, no trivial, de V de dimensión $m \in \mathbb{N}$. Sea $n(T) = s \in \{1, \dots, m - 1\}$, y $\{z_j\}_{j=1}^s \subseteq V$ una base de $\text{Ker}(T)$. Luego, invocando el TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA, $\exists \{z_j\}_{j=s+1}^m \subseteq V$ tal que $B := \{z_j\}_{j=1}^m$ es una BASE de V . El candidato a ser el subespacio vectorial buscado es $U := \langle \{z_j\}_{j=s+1}^m \rangle$. Por su definición, U es subespacio vectorial de V . Verifiquemos que satisface las dos condiciones requeridas.

– Sea $w \in U \cap \text{Ker}(T)$, entonces $w \in U$ y $w \in \text{Ker}(T)$. Esto nos dice que $\exists \{\alpha_j\}_{j=s+1}^m, \{\beta_k\}_{k=1}^s \subseteq \mathbb{K}$ tales que

$$w = \sum_{j=s+1}^m \alpha_j z_j = \sum_{k=1}^s \beta_k z_k \Rightarrow \sum_{k=1}^s \beta_k z_k - \sum_{j=s+1}^m \alpha_j z_j = \theta_V.$$

La última relación nos muestra una combinación lineal de elementos de $\{z_j\}_{j=1}^m$ para expresar el vector nulo. Pero $\{z_j\}_{j=1}^m$ es l.i., por ser una base de V , por lo cual se debe tener que $\forall k \in \{1, \dots, s\} : \beta_k = 0$ y $\forall j \in \{s+1, \dots, m\} : \alpha_j = 0$. De esta forma, se tiene que $w = \theta_V$. Así, $U \cap \text{Ker}(T) \subseteq \{\theta_V\}$. En vista que $\{\theta_V\} \subseteq U \cap \text{Ker}(T)$ siempre se cumple, se CONCLUYE que $U \cap \text{Ker}(T) = \{\theta_V\}$.

- Tenemos $\text{Ker}(T) + U = V$ (*?POR QUÉ?*) Sea $z \in \text{Im}(T)$ (fijo pero arbitrario). Esto implica que $\exists w \in V : T(w) = z$. A su vez, $\exists (a, b) \in \text{Ker}(T) \times U : z = a + b$. Luego, $z = T(w) = T(a) + T(b) = \theta + T(b) = T(b)$. Así, $z \in \{T(u) : u \in U\}$. En vista que $z \in \text{Im}(T)$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $\text{Im}(T) \subseteq \{T(u) : u \in U\}$. En vista que $\{T(u) : u \in U\} \subseteq \text{Im}(T)$ siempre, concluimos que $\text{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\}$.

Problema 4. Sea la función $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto T(p)$, donde $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$.

- Pruebe que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$.
- Determine si T es un isomorfismo. En tal caso, defina explícitamente T^{-1} .

Desarrollo: Primero, notemos que para cualquier $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p)$ está definido en $x = 0$, dado que

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} T(p)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt \stackrel{(\text{L'HÔPITAL})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} p(x) = p(0).$$

Por otro lado, considerando $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, para algunos $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$, resulta

$$\begin{aligned} T(p)(x) &:= \frac{1}{x} \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt = \dots = a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 \\ &\Rightarrow T(p)(0) = a_0 = p(0). \end{aligned} \quad (1)$$

- Sean $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$T(p+q)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (p+q)(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x q(t) dt = T(p)(x) + T(q)(x) = (T(p) + T(q))(x).$$

Como $x \in \mathbb{R}$ es fijo pero arbitrario, se infiere que $\forall x \in \mathbb{R} : T(p+q)(x) = (T(p) + T(q))(x)$, es decir $T(p+q) = T(p) + T(q)$. Asimismo, siendo $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, fijos pero arbitrarios, tenemos $\forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : T(p+q) = T(p) + T(q)$.

A su vez, si consideramos $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, resulta para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha p)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha p(t) dt = \alpha \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt = \alpha T(p)(x) = (\alpha T(p))(x).$$

Siendo $x \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario, se deduce que $\forall x \in \mathbb{R} : T(\alpha p)(x) = (\alpha T(p))(x)$, i.e. $T(\alpha p) = \alpha T(p)$. Como $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, son fijos pero arbitrarios, se tiene que $\forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha p) = \alpha T(p)$.

De esta manera, se concluye que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$.

- Como estamos trabajando en DIMENSIÓN FINITA, es suficiente con probar la inyectividad o la sobreyectividad de T para concluir que ella es biyectiva. Para $\text{Ker}(T)$. Sea $p \in \text{Ker}(T)$, entonces $T(p) = \theta$ (POLINOMIO NULO). Luego, $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_0^x p(t) dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = 0 \Rightarrow p = \theta$.

ALTERNATIVAMENTE, si consideramos $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, para algunos $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$, y teniendo en cuenta (1), resulta

$$\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow p = \theta.$$

Así, tenemos que $\text{Ker}(T) \subseteq \{\theta\}$. Como $\{\theta\} \subseteq \text{Ker}(T)$ siempre, se infiere que $\text{Ker}(T) = \{\theta\}$, es decir T es inyectiva. Por tanto, T es biyectiva, y por ende $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ es un ISOMORFISMO.

Esto asegura la existencia de $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$. Ahora pasamos a definir su regla de correspondencia. Sean $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tales que $T(p) = q \Leftrightarrow T^{-1}(q) = p$. Esto conduce a afirmar que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = q(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_0^x p(t) dt = x q(x) \\ \stackrel{(T.F.C.)}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R} : T^{-1}(q)(x) &= p(x) = (x q(x))' = q(x) + x q'(x). \end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE, dado $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\forall x \in \mathbb{R} : q(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, para algunos $\{b_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$, buscamos $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, para algunos $\{a_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$, de modo que $T(p) = q$. Luego, teniendo en cuenta (1), nos queda

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) = q(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = 2b_1, a_2 = 3b_2. \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : T^{-1}(q)(x) &= p(x) = b_0 + 2b_1 x + 3b_2 x^2 = q(x) + x q'(x). \end{aligned}$$