UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Listado 1 - Análisis Funcional II (525402)

Ejercicio 1 (Ejercicio 4.2 [1]). Suponga $|\Omega| < \infty$ y sean $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Demuestre que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección continua. Más precisamente, demuestre que

$$|f|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |f|_q \qquad \forall f \in L^q(\Omega)$$

[**Hint:** Use la desigualdad de Hölder]

Ejercicio 2 (Ejercicio 4.3 [1]).

1. Sean $f, g \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Demuestre que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \in L^p(\Omega).$$

2. Sean (f_n) y (g_n) dos sucesiones en $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ y $g_n \to g$ en $L^p(\Omega)$. Defina $h_n = \max\{f_n, g_n\}$ y demuestre que $h_n \to h$ en $L^p(\Omega)$.

3. Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y sea (g_n) una sucesión acotada en $L^\infty(\Omega)$. Suponga que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$ y $g_n \to g$ c.t.p. Demuestre que $f_n g_n \to fg$ en $L^p(\Omega)$

Ejercicio 3 (Ejercicio 4.4 [1]).

1. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ k funciones tal que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\forall i$ con $1 \leq p_i \leq \infty$ y $\sum_{i=1}^k p_i \leq 1$.

   Defina

$$f(x) = \prod_{i=1}^k f_i(x).$$

   Demuestre que $f \in L^p(\Omega)$ con $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}$ y que

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\| p_i.$$

   [**Hint:** Considere $k = 2$ y proceda por inducción.]

2. Deduzca que si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo r entre p y q. Más precisamente, escriba

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad \text{con } \alpha \in [0,1]$$

   y pruebe que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

Ejercicio 4 (Ejercicio 4.5 [1]). Sea $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$.

1. Pruebe que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es un subconjunto denso de $L^p(\Omega)$.

2. Pruebe que el conjunto
$$\{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) : \|f\|_q \leq 1\}$$
es cerrado en $L^p(\Omega)$.

3. Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ y sea $f \in L^p(\Omega)$. Suponga que
$$f_n \to f \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } \|f_n\|_q \leq C.$$
Demuestre que $f \in L^r(\Omega)$ y que $f_n \to f$ en $L^r(\Omega)$ para todo r entre p y q, $r \neq q$.

Ejercicio 5 (Ejercicio 4.9 [1]: Desigualdad de Jensen)**.** Suponga $|\Omega| < \infty$. Sea $j : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ una función convexa semicontinua inferiormente, $j \not\equiv +\infty$. Sea $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f(x) \in D(j)$ c.t.p. y $j(f) \in L^1(\Omega)$. Demuestre que
$$j\left(\frac{1}{\Omega}\int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega j(f).$$

Ejercicio 6 (Ejercicio 4.13 [1])**.** 1. Verifique que
$$||a+b| - |a| - |b|| \leq 2\,|b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\Omega)$ tal que
   (i) $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p.
   (ii) (f_n) es acotada en $L_1(\Omega)$, i.e. $\|f_n\|_1 \leq M$, $\forall n$.

   Demuestre que $f \in L^1(\Omega)$ y que
$$\lim_{n\to\infty} \int \{|f_n| - |f_n - f|\} = \int |f|\,.$$
   [**Hint:** Use la pregunta 1 con $a = f_n - f$ y $b = f$, y considere la sucesión $\phi_n = ||f_n| - |f_n - f| - |f||$.]

3. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\Omega)$ y sea f una función en $L^1(\Omega)$ tal que
   (i) $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p.
   (ii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|$.
   Pruebe que $\|f_n - f\|_1 = 0$.

Ejercicio 7 (Ejercicio 4.14 [1])**.** Suponga $|\Omega| < \infty$. Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \to f$ c.t.p. (con $|f| < \infty$ c.t.p.)

1. Sea $\alpha > 0$ fijo. Pruebe que
$$\mu\left[|f_n - f| > \alpha\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. Más precisamente, sea
$$S_n(\alpha) = \bigcup_{k\geq n} \left[|f_k - f| > \alpha\right].$$
   Demuestre que $|S_n(\alpha)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. (*Egorov*). Demuestre que

$$\begin{cases} \forall \delta > 0 \quad \exists A \subset \Omega \text{ medible tal que} \\ |A| < \delta \text{ y } f_n \to f \text{ uniformemente en } \Omega \setminus A \end{cases}$$

[**Hint:** Dado un entero $m \geq 1$, pruebe, con la ayuda de 2., que existe $\Sigma_m \subset \Omega$ medible, tal que $|\Sigma_m| < \delta/2^m$ y que existe un entero N_m tal que

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k \geq N_m, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Sigma_m]$$

4. (*Vitali*). Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Suponga que

   (i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\int_A |f_n|^p < \varepsilon$, $\forall n$ y $\forall A \subset \Omega$ medible con $|A| < \delta$.

   (ii) $f_n \to f$ c.t.p.

   Demuestre que $f \in L^p(\Omega)$ y que $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$

Ejercicio 8 (Ejercicio 4.15 [1]). 1. Considere una sucesión (f_n) de funciones definidas por $f_n(x) = ne^{-nx}$. Demuestre que

   (i) $f_n \to 0$ c.t.p.

   (ii) f_n es acotada en $L^1(\Omega)$.

   (iii) $f_n \nrightarrow 0$ en $L^1(\Omega)$ fuertemente.

   (iv) $f_n \not\rightharpoonup 0$ débilmente $\sigma(L^1, L^\infty)$.

   Más precisamente, que no hay una subsucesión que converja débil en $\sigma(L^1, L^\infty)$.

2. Sea $1 < p < \infty$ y considere la sucesión (g_n) de funciones definidas por $g_n(x) = n^{1/p}e^{-nx}$. Demuestre que

   (i) $g_n \to 0$ c.t.p.

   (ii) (g_n) es acotada en $L^p(\Omega)$.

   (iii) $g_n \nrightarrow 0$ en $L^p(\Omega)$ fuertemente.

   (iv) $g_n \rightharpoonup 0$ débilmente $\sigma(L^p, L^{p'})$.

Ejercicio 9 (Ejercicio 4.16 [1]). Sea $1 < p < \infty$. Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que

(i) f_n es acotada en $L^p(\Omega)$.

(ii) $f_n \to f$ c.t.p. en Ω.

1. Pruebe que $f_n \rightharpoonup f$ débilmente $\sigma(L^p, L^{p'})$. [**Hint:** Primero muestre que si $f_n \rightharpoonup \tilde{f}$ débilmente $\sigma(L^p, L^{p'})$ y $f_n \to f$ c.t.p., entonces$f = \tilde{f}$ c.t.p. (use el Ejercicio 3.4 [1])]

2. La misma conclusión si (ii) es reemplazado por

   (ii′) $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

3. Asuma (i), (ii), y $|\Omega| < \infty$. Pruebe que $\|f_n - f\|_q \to 0$ para todo q con $1 \leq q < p$.

   [**Hint:** Introduzca las funciones truncadas $T_k f_n$ o, alternativamente, use el teorema de Ergorov.]

Ejercicio 10 (Ejercicio 4.17 [1], Lema de Brezis-Lieb). Sea $1 < p < \infty$.

1. Pruebe que existe una constante C (dependiente de p) tal que

$$||a+b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq C\left(|a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1}\right) \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Sea (f_n) una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ c.t.p. en Ω. Pruebe que $f \in L^p(\Omega)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \{|f_n|^p - |f_n - f|^p\} = \int_\Omega |f|^p$$

[**Hint:** Use 1. con $a = f_n - f$ y $b = f$. Note que por el Ejercicio 9, $|f_n - f| \rightharpoonup 0$ débilmente en L^p y $|f_n - f|^{p-1} \rightharpoonup 0$ débilmente en $L^{p'}$.]

3. Deduzca que si (f_n) es una sucesión en $L^p(\Omega)$ que satisface

   (i) $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p.,

   (ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$,

   entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. Encuentre un método alternativo para la pregunta 3.

Ejercicio 11 (Ejercicio 4.18 [1]: Funciones de Rademacher)**.** Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $f \in L^p_{\text{loc}}$. Asuma que f es T-periódica, i.e. $f(x+T) = f(x)$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

Defina

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Considere la sucesión (u_n) en $L^p(0,1)$ definida por

$$u_n(x) = f(nx), \qquad x \in (0,1).$$

1. Pruebe que $u_n \rightharpoonup \overline{f}$ en $L^p(0,1)$ con respecto a la topología $\sigma(L^p, L^{p'})$.

2. Determine $\lim_{n\to\infty} \left\|u - \overline{f}\right\|_p$.

3. Analice los siguientes ejemplos:

   (i) $u_n(x) = \sin(nx)$,

   (ii) $u_n(x) = f(nx)$ donde f es 1-periódica y

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{para } x \in (0,1/2) \\ \beta & \text{para } x \in (1/2,1) \end{cases}$$

   Las funciones del ejemplo (ii) se llaman *funciones de Rademacher*.

Ejercicio 12 (Ejercicio 4.19 [1])**.** 1. Sea (f_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$ y sea $f \in L^p(\Omega)$. Suponga que

   (i) $f_n \rightharpoonup f$ débilmente $\sigma(L^p, L^{p'})$.

   (ii) $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

   Pruebe que $f_n \to f$ fuertemente en $L^p(\Omega)$.

2. Construya una sucesión (f_n) en $L^1(0,1)$, $f_n \geq 0$ tal que:

   (i) $f_n \rightharpoonup f$ débilmente $\sigma(L^1, L^\Omega)$.

   (ii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.

   (iii) $\|f_n - f\|_1 \nrightarrow 0$.

   Compare con los resultados del ejercicio 6 y la Proposición 3.32 ([1]).

Ejercicio 13 (Ejercicio 4.24 [1])**.** Sea $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sea (ρ_n) una sucesión de mollifiers. Sea (ζ_n) una sucesión en $L^\infty(\mathbb{R}^N$ tal que

$$\|\zeta_n\|_\infty \leq 1 \quad \forall n \quad \text{y} \quad \zeta_n \to z \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^N.$$

Defina

$$v_n = \rho_n \star (\zeta_n u) \quad \text{y} \quad v = \zeta u.$$

1. Pruebe que $v_n \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ débilmente* $\sigma(L^\infty, L^1)$.

2. Pruebe que $\int_B |v_n - v| \to 0$ para toda bola B.

Ejercicio 14 (Ejercicio 4.25 [1]: Regularización de funciones en $L^\infty(\Omega)$)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto.

1. Sea $u \in L^\infty(\Omega)$. Pruebe que existe una sucesión (u_n) en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que

   (a) $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, $\forall n$,

   (b) $u_n \to u$ c.tp. en Ω,

   (c) $u_n \overset{\star}{\rightharpoonup}$ en $L^\infty(\Omega)$ débilmente* en $\sigma(L^\infty, L^1)$.

2. Si $u \geq 0$ c.t.p. en Ω, muestre que uno también puede tomar

   (d) $u_n \geq 0$ en Ω, $\forall n$.

3. Deduzca que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^\infty(\Omega)$ con respecto a la topología $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Ejercicio 15 (Ejercicio 4.30 [1]: Desigualdad de Young)**.** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Defina $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ tal que $1 \leq r \leq \infty$.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

1. Pruebe que para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^N$.

   [**Hint:** Tome $\alpha = p/q'$, $\beta = q/p'$ y escriba

   $$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^\alpha |g(y)|^\beta \left(|f(x-y)|^{1-\alpha} |g(y)|^{1-\beta}\right).]$$

2. Defina

   $$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

   Pruebe que $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ y que $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

3. Suponga que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pruebe que

$$f \star g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

y, más aún, si $1 < p < \infty$, entonces $(f \star g)(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.

Ejercicio 16 (Ejercicio 4.33 [1])**.** Fije una función $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \not\equiv 0$, y considere la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n\},$$

donde $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Suponga $1 \leq p < \infty$. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\tau_h f - f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ y } \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ con } |h| < \delta.$$

2. Pruebe que $\mathcal{F}$ *no tiene* clausura compacta en $L^p(\mathbb{R})$.

Ejercicio 17 (Ejercicio 4.34 [1])**.** Sea $1 \leq p < \infty$ y $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ un subconjunto compacto de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1. Pruebe que $\mathcal{F}$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

2. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ y } \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ con } |h| < \infty.$$

3. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado tal que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Compare con Corolario 4.27 ([1]).

Ejercicio 18 (Ejercicio 4.35 [1])**.** Fije una función $G \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$ y sea $\mathcal{F} = G \star \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es un conjunto acotado en $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Pruebe que $\mathcal{F}|_\Omega$ tiene clausura compacta en $L^p(\Omega)$ para todo conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con medida finita. Compare con Corolario 4.28 ([1]).

Ejercicio 19. [2] Demuestre que la transformada de Fourier verifica:

- $f \mapsto \widehat{f}$ es lineal en f,
- $\widehat{\tau_h f}(k) = e^{-2\pi i(k,h)} \widehat{f}(k), \qquad h \in \mathbb{R}^n,$
- $\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k), \qquad \lambda > 0$

  donde τ_h es el operador de traslación, i.e. $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$, y δ_λ es el operador de escalamiento, i.e. $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$.

Ejercicio 20 (Ejercicio 5.1 [2])**.** Demuestre que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\widehat{f}(k) \to 0$ cuando $|k| \to \infty$.

► *Hint.* $\widehat{\tau_h f}(k) = e^{-2\pi i(k,h)} \widehat{f}(k)$ es útil.

Ejercicio 21 (Ejercicio 5.2 [2])**.** Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y (f^j), (h^j) sucesiones en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\left\| f - f^j \right\|_2 \xrightarrow{j \to \infty} 0 \text{ y } \left\| f - h^j \right\| \xrightarrow{j \to \infty} 0$$

.

Demuestre que $(\widehat{f^j})$ y $(\widehat{h^j})$ convergen al mismo límite $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (i.e. la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es independiente de la sucesión que se use para aproximar).

Ejercicio 22 (Ejercicio 5.3 [2])**.** Demuestre que la definición de transformada de Fourier para funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ produce una transformación lineal $f \mapsto \widehat{f}$.

Ejercicio 23 (Ejercicio 5.4 [2])**.** Complete la demostración del Teorema 5.8 ([2]), i.e. desarrolle el argumento de aproximación mencionado al final de la Sección 5.8 ([2]).

Ejercicio 24 (Ejercicio 5.5 [2])**.** Demuestre que para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ su transformada de Fourier $\widehat{f}$ también está en $\mathcal{C}^\infty$ (más aún, $\widehat{f}$ es analítica). Demuestre, además, que $g_a(k) := \left| |k|^a \, \widehat{f}(k) \right|$ es una función acotada para todo $a > 0$.

Referencias

[1] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London (2011) ISBN 978-0-387-70913-0

[2] Lieb, E., Loss, M. *Analysis*, Second Edition, Graduate studies in mathematics; v. 14 ISBN 0-8218-2783-9

Concepción, 9 de abril de 2019
MSC/fcg/fqm/sch/jmr