

Universidad de Concepción
 Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
 Departamento de Ingeniería Matemática
 Dr. Raimund Bürger
 Profesor Titular

Análisis Numérico III

(Código 525442)

Tarea no. 1 — lunes 11 de abril de 2022

Fecha de entrega: viernes 22 de abril de 2022, 12.00 horas
NO se aceptarán tareas entregadas fuera de plazo.

Problema 1. Aplicar el método de Euler explícito, el método de trazado poligonal mejorado y el método de trazado poligonal modificado al problema

$$y' = y + x^2 - 3, \quad y(0) = 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

para calcular tres diferentes aproximaciones a $y(1)$ usando (i) $h = 0.1$, (ii) $h = 0.025$. Comparar el resultado con la solución exacta.

Problema 2.

- a) Demostrar que el orden de consistencia del método de Heun

0	0	0	0
1/2	1/2	0	0
1	-1	2	0
	1/6	2/3	1/6

y del método clásico de Runge-Kutta

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

es $p = 3$ y $p = 4$, respectivamente.

- b) Verifique que los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton efectivamente poseen los ordenes de consistencia señalados en los marcos (páginas 23 y 24).

Problema 3. Supongamos que la función $f = f(x, y)$ satisface una condición de Lipschitz con respecto a y con la constante L . Demostrar que el método clásico de Runge-Kutta, aplicado al PVI de la EDO

$$y' = f(x, y), \quad x > 0; \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

satisface las suposiciones del Teorema 1.1. (Aviso: demostrar sucesivamente que las cantidades k_1, k_2, k_3 y k_4 son Lipschitz-continuas con respecto a y .)

Problema 4. Resolver numericamente el problema

$$y(x) + y''(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{(x + 2)^3}, \quad x \in [1, 5]; \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 3/4$$

utilizando el método de Euler implícito con $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.1$ y $h = 0.025$. Comparar con la solución exacta. ¿Los resultados numéricos confirman que el método es de primer orden?

Problema 5. Se considera el método de dos pasos

$$y_{j+2}^h = -4y_{j+1}^h + 5y_j^h + h(4f(x_{j+1}, y_{j+1}^h) + 2f(x_j, y_j^h)). \quad (3)$$

- a) Demostrar que este método es consistente de tercer orden.
- b) ¿El método satisface la condición de ceros?
- c) Aplicar el método (3) al problema

$$y'(x) = y(x) - 2 \sin x, \quad x \in [0, 4], \quad y(0) = 1, \quad (4)$$

con la solución $y(x) = \sin x + \cos x$, usando $y_0^h = 1$ y $y_1^h = \sin h + \cos h$, para $h = 1/4$, $h = 1/8$ y $h = 1/16$. Comparar los valores numéricos con la solución exacta en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. Interpretar el resultado.

- d) ¿El resultado es una contradicción al Teorema 1.1?

Problema 6. Resolver el problema de valores iniciales

$$y'(t) = \frac{1-t}{t}y(t), \quad y(1/2) = \frac{1}{2}e^{-1/2} \quad (5)$$

sobre el intervalo $[1/2, 3]$ usando el siguiente método:

- (1) Determinar los valores iniciales con el método de Runge-Kutta clásico con $m = 4$.
- (2) Utilizar el método predictor-corrector (1.39), (1.40) para los demás pasos.

Comparar las soluciones generadas por $h = 0.25$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con la solución exacta.

Problema 7. Se considera el sistema de EDOs

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= Ay_1(t) - AB(y_1(t) - R)y_2(t), & y_1(0) &= y_{1,0}, \\ y'_2(t) &= Cy_2(t)(D(y_1(t) - R) - 1), & y_2(0) &= y_{2,0}, \end{aligned} \quad (6)$$

con constantes $A, B, C, D, R > 0$. Este sistema se llama *modelo predador-presa de Lotka-Volterra con refugio para la presa*. La variable t denota el tiempo, $y_1(t)$ es el número de presas (por ejemplo, conejos) en el instante t , e $y_2(t)$ es el número de predadores (por ejemplo, zorros) en el instante t . En el caso de que hay sólo un tipo de predador y un tipo de presa este modelo es una aproximación razonable de la realidad.

- a) Resolver el modelo (6) utilizando los parámetros $A = 4$, $B = 1/2$, $C = 3$ y $D = 1/3$, $R = 0.5, 1, 2$ mediante el método de Euler explícito, para $0 \leq t \leq 5$, a partir de $x(0) := y_1(0) = 3$ y $y(0) := y_2(0) = 5$, utilizando $h = 0.001$ y $h = 0.0005$.
- b) Graficar los resultados $x(t) := y_1(t)$ e $y := y_2(t)$ como funciones de t (para cada valor de h) y como x versus y . Comentar los resultados (comparando con el Ejemplo 1.8).