Clase 11: Aplicaciones geométricas de la integral definida: Área entre curvas

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Recordatorio.

Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, el área $A(R)$ de la región R encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A(R) = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

Observación.

Si f es negativa en $[a, b]$, para calcular el área de la región encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, basta considerar por simetría la función $-f$, esto es,

$$A(R) = \int_a^b -f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\ .$$

- Calcule el área de la región R delimitada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución. Notar que f es negativa en $[0, 1]$, luego el área A de la región R es

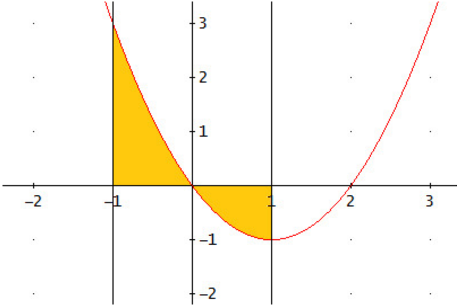
$$A(R) = \int_0^1 -(-x^2)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

Aplicaciones de la integral definida

Área bajo una curva

Puede darse el caso en que f tome valores positivos y negativos en un cierto intervalo I.

Por ejemplo, $f(x) = x^2 - 2x$ con $x \in [-1, 1]$ es positiva en $[-1, 0]$ y negativa en $[0, 1]$.



Lo que hacemos en estos casos, es calcular el área de las regiones asociadas a cada subintervalo, para luego sumarlas.

$$A(R) = \int_{-1}^{0} x^2 - 2x \, dx + \int_{0}^{1} 2x - x^2 \, dx = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Observación.

Si no nos hubiesemos percatado que f es negativa en $[0,1]$ y positiva en $[-1,0]$, procederiamos a calcular el área como sigue:

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2x \, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \, ,$$

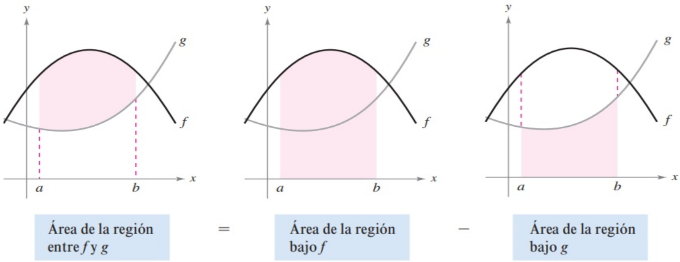
lo cual es incorrecto.

Área entre curvas

Sean f y g funciones continuas y no negativas sobre $[a,b]$, tales que para cada $x \in [a,b]$, $g(x) \leq f(x)$. El área de la región R limitada por las gráficas de f y g y las rectas $x = a$, $x = b$ está dada por:

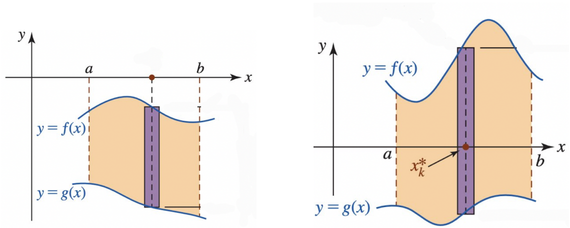
$$A(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Idea geométrica.



Área entre curvas

Podría darse el caso que una o ambas funciones f y g tomen valores negativos en $[a, b]$ como en las siguientes imágenes.



Luego, en ambos casos el área encerrada por dichas curvas sigue siendo

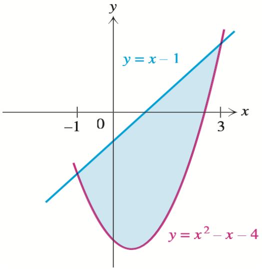
$$\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

¿Por qué?

Ejemplo 1

1. Calcule el valor del área de la región R encerrada por las curvas $y = x^2 - x - 4$ e $y = x - 1$.

Solución:

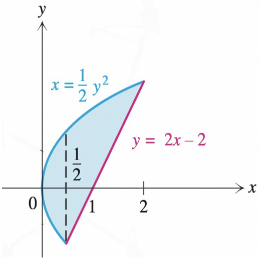


El área es $A(R) = \int_{-1}^{3} (x-1) - (x^2 - x - 4)\, dx = \dfrac{32}{3}$.

Ejemplo 2

2. Encontrar el área de la región R encerrada por la gráfica de las ecuaciones $2x - y = 2$ y $\frac{1}{2}y^2 - x = 0$.

Solución (Forma 1):



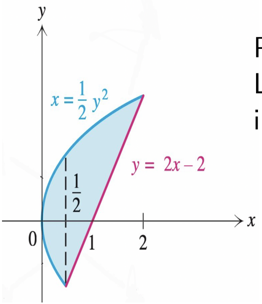
Observamos que la curvas se intersectan en los puntos $(\frac{1}{2}, -1)$ y $(2, 2)$. Luego,

$$A(R) = \int_0^{1/2} (\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x}))dx + \int_{1/2}^{2} (\sqrt{2x} - (2x - 2))dx = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 2

2. Encontrar el área de la región R encerrada por la gráfica de las ecuaciones $2x - y = 2$ y $\frac{1}{2}y^2 - x = 0$.

Solución (Forma 2):



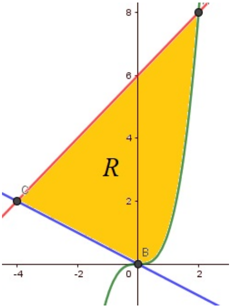
Podemos integrar en términos de la variable y. Luego, considerando a -1 y 2 como límites de integración, se tiene que:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}(y+2) - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 3

3. Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = x^3$, $y = x+6$ e $y = -\frac{x}{2}$.

Solución:



Notamos que los puntos de intersección entre las 3 curvas corresponden a:

$$A(2,8)\ ,\ B(0,0)\ ,\ C(-4,2)$$

Luego, el área de la región R es

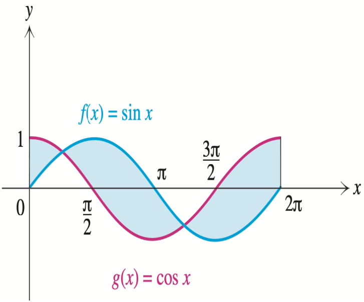
$$A(R) = \int_{-4}^{0} \left(\frac{3}{2}x + 6 \right) dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + x + 6) dx,$$

de donde sigue que $A(R) = 22$.

Ejemplo 4

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$. Encontrar el área de la región encerrada por f y g en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución:



El área es

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}(x) - \cos(x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)dx = 4\sqrt{2}$$

Ejercicios propuestos

1. En el primer cuadrante del plano coordenado considere la región R limitada por los ejes coordenados, la recta $y = e$, y las curvas $y = e^x$ e $y = \ln(x)$. Calcule el área de la región R.

2. Encuentre el área de la región acotada por las curvas de ecuaciones $h(x) = |x^2 - 6x + 5|$ y $g(x) = -x^2 + 6x + 5$.

3. Calcular el área de la región encerrada por las curvas de ecuación $y = 2x^2$, $y = x^2$ and $y = x + 2$ en el primer cuadrante.