Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525140 – Álgebra 1 – Propuestas de solución a evaluación 1 (29.09.2023)

Problema 1. (15 puntos)

Considere la proposición

$$\mathbf{p} \,:\, (\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R}) \,:\, (xy > 0) \longrightarrow (x > 0 \,\wedge y > 0).$$

1.1) Niegue la proposición **p**.

1.2) Determine el valor de verdad de la proposición **p**. Justifique.

Solución:

1.1) (8 puntos)

$$\begin{aligned}
\sim \mathbf{p} &\Leftrightarrow \sim [(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R}) \,:\, (xy > 0) \longrightarrow (x > 0 \,\wedge y > 0)] \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \,:\sim [(xy > 0) \longrightarrow (x > 0 \,\wedge y > 0)] \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \,:\sim [\sim (xy > 0) \,\vee\, (x > 0 \,\wedge y > 0)] \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \,:\, (xy > 0) \wedge \sim (x > 0 \,\wedge y > 0) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \,:\, (xy > 0) \,\wedge\, (x \leq 0 \,\vee y \leq 0).
\end{aligned}$$

1.2) (7 puntos)

Los números reales $x = y = -1$ satisfacen que su producto $xy = (-1) \cdot (-1) = 1$ es mayor que cero, pero no es cierto que ambos sean mayores que cero, sino que $(-1 = x \leq 0 \vee -1 = y \leq 0)$, lo que permite concluir que la proposición

$$(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \,:\, (xy > 0) \,\wedge\, (x \leq 0 \,\vee y \leq 0) \,\Leftrightarrow \sim \mathbf{p}$$

es verdadera. Así, **p** es una proposición falsa.

Problema 2. (12 puntos)

Sean $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{x \in U \,:\, 4 \leq x + 3 < 9\}$$

2.1) Escriba los siguientes conjuntos por extensión: $A \cap B$, $A^{c} - B$ y $(A \cup C) - (B \cap C)$.

2.2) Determine $|\mathcal{P}(C)|$.

Observación: Recuerde que $A^{c} = U - A$.

Solución:

2.1) (9 puntos)

Primero escribimos el conjunto C por extensión

$$C = \{x \in U \,:\, 4 \leq x + 3 < 9\} = \{x \in U \,:\, 1 \leq x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

A continuación calculamos cada operación entre conjuntos

- $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \emptyset$.

- $A^c - B = \{1,3,5,7,9\}^c - \{2,4,6,8\} = \{0,2,4,6,8\} - \{2,4,6,8\} = \{0\}$.
- $(A \cup C) - (B \cap C) = (\{1,3,5,7,9\} \cup \{1,2,3,4,5\}) - (\{2,4,6,8\} \cap \{1,2,3,4,5\}) = \{1,2,3,4,5,7,9\} - \{2,4\} = \{1,3,5,7,9\} = A$.

2.2) (3 puntos)

Sabemos que $|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|}$ y de **2.1)** tenemos que

$$|C| = |\{1,2,3,4,5\}| = 5.$$

Luego,

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^5 = 32.$$

Problema 3. (18 puntos)

A una elección de centro de alumnos de Ingeniería asistieron a votar 703 estudiantes. Según los estatutos de la UdeC cada estudiante recibe una papeleta con los nombres de todos los candidatos y en donde el estudiante marcará, si lo desea, hasta dos preferencias.
De los resultados de la elección se determinó la siguiente información. El candidato A obtuvo 324 preferencias, 47 de los estudiantes sólo votaron por A, 203 votaron por A y no por B, 164 votaron por C y B, 358 votaron por C y 42 votaron sólo por B.

Llamemos

- $\mathcal{U}$, al conjunto de los estudiantes que votaron,
- $\mathcal{A}$, al conjunto de los estudiantes que votaron por el candidato A,
- $\mathcal{B}$, al conjunto de los estudiantes que votaron por el candidato B,
- $\mathcal{C}$, al conjunto de los estudiantes que votaron por el candidato C.

3.1) Construya un diagrama de Venn para este problema. Sombree en él:

- el conjunto de estudiantes que votó solo por un candidato
- el conjunto de estudiantes que votó por el candidato A o el candidato B, pero no C.

3.2) ¿Quién obtuvo la primera mayoría de votos?

3.3) ¿Cuántos estudiantes no votaron por ninguno de los candidatos?

3.4) ¿Cuántos estudiantes no votaron por el candidato C?

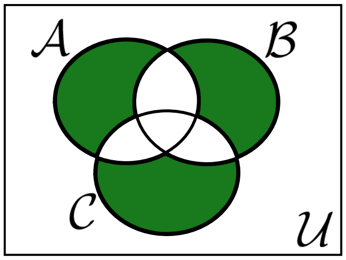
Observación: En las preguntas 3.2, 3.3 y 3.4 no basta con escribir la cardinalidad pedida, debe escribir la ecuación o las ecuaciones que le permitieron obtenerla.

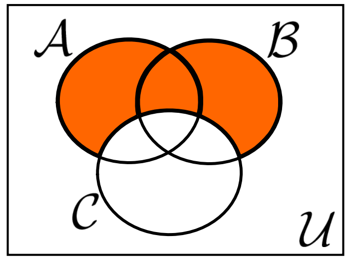
Solución:

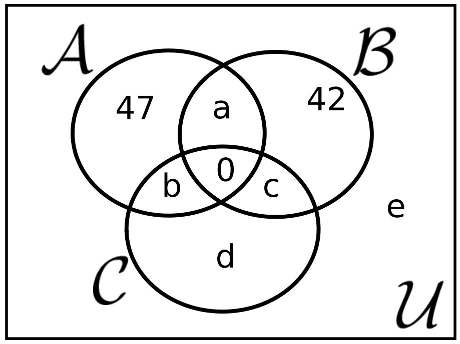
3.1) (3 puntos)

En los siguientes diagramas se observa, en el de la izquierda y de color verde, el conjunto de estudiantes que votaron solo por un candidato y en el diagrama de la derecha y en naranjo al conjunto de estudiantes que votaron por A o B, pero no por C.

Para poder responder las otras preguntas, consideremos el siguiente diagrama de Venn:







En el ya hemos incluido que

$$|\mathcal{A} \setminus (B \cup C)| = 47, \ |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}| = 0, \ |\mathcal{B} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})| = 42.$$

Además hemos llamado a a la cardinalidad de $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus \mathcal{C}$, b, a la cardinalidad de $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \setminus \mathcal{B}$, c, a la de $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \setminus \mathcal{A}$ y e, a la de $\mathcal{U} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

Ahora bien, si consideramos la información entregada en el problema se obtiene:

$$|\mathcal{U}| = 703, \tag{1a}$$
$$|\mathcal{A}| = 324 \Leftrightarrow a + b + 47 + 0 = a + b + 47 = 324, \tag{1b}$$
$$|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}| = 203 \Leftrightarrow b + 47 = 203, \tag{1c}$$
$$|\mathcal{C} \cap \mathcal{B}| = 164 \Leftrightarrow c + 0 = c = 164, \tag{1d}$$
$$|\mathcal{C}| = 358 \Leftrightarrow b + c + d + 0 = b + c + d = 358. \tag{1e}$$

La cantidad de estudiantes que no votó por ninguno de los estudiantes puede representarse como $\mathcal{U} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$. Su cardinalidad se ha representado con e en el diagrama de Venn,

$$e = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = 703 - (47 + 42 + a + \underbrace{b + c + d}_{358}) = 256 - a.$$

Resolviendo las ecuaciones en (1) se tiene que $b = 203 - 47 = 156$, $c = 164$, por tanto, $a = 324 - 47 - b = 121$, $d = 358 - b - c = 38$ y $e = 256 - a = 256 - 121 = 135$.

3.2) (5 puntos)

De la información entregada en el enunciado se tiene que $|\mathcal{A}| = 324$, $|\mathcal{B}| = a + c + 42 = 121 + 164 + 42 = 327$ y $|\mathcal{C}| = 358$, por lo que el candidato C obtuvo la primera mayoría.

3.3) (5 puntos)

La cantidad de de estudiantes que no votó por ninguno de los candidatos está dada por $|\mathcal{U} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})| = e = 135$.

3.4) (5 puntos)

La cantidad de de estudiantes que no votó por el candidato C está dada por la cardinalidad de $\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$, esto es

$$|\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{C}| = 703 - 358 = 345.$$

Problema 4. (15 puntos)

4.1) Demuestre, usando el **principio de de inducción matemática**, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n! \leq n^n.$$

4.2) Calcule la siguiente suma

$$\sum_{j=5}^{20}(3j+1).$$

Solución:

4.1) (10 puntos)

Sea S el conjunto de validez asociado a la proposición, dado por

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n! \leq n^n\}.$$

i) ¿$1 \in S$? En efecto, $1! \leq 1^1 \Leftrightarrow 1 \leq 1$, por lo tanto $1 \in S$.

ii) Sea n un número natural. Por demostrar $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.
Hipótesis: $n! \leq n^n$.
Tesis: $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$.
Supongamos que la hipótesis es verdadera, ahora

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n \qquad \text{(por hipótesis).} \tag{2}$$

Además, dado que $n < n+1$,

$$(n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}. \tag{3}$$

De las inecuaciones (2) y (3) se tiene que $(n+1)! \leq (n+1)^n \leq (n+1)^{n+1}$, es decir, $n+1 \in S$.

Finalmente, de i), ii) y por principio de inducción se tiene que $S = \mathbb{N}$, lo que demuestra la proposición.

4.2) (5 puntos)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=5}^{20}(3j+1) &= \sum_{j=1}^{16}(3(j+4)+1), \\
&= \sum_{j=1}^{16}(3j+13) = 3\sum_{j=1}^{16} j + 13\sum_{j=1}^{16} 1 \\
&= 3\frac{16(16+1)}{2} + 13 \cdot 16 \\
&= 24 \cdot 17 + 13 \cdot 16 = 616.
\end{aligned}$$