UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Laboratorio 5: Mínimos Cuadrados.

Cálculo Numérico 521230/525240

Ejercicio 1 (ejercicio guiado por el/la ayudante). La Tabla 1 relaciona la cantidad de cierto aditivo a un barniz con el tiempo de secado del mismo.

Aditivo (en gramos)	**Tiempo de secado (en horas)**
0.0	12.0
1.0	10.5
2.0	10.0
3.0	8.0
4.0	7.0
5.0	8.0
6.0	7.5
7.0	8.5
8.0	9.0

Tabla 1: Aditivo y tiempo de secado

1. Escriba el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema de encontrar el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos en la tabla.

2. Escriba un rutero Matlab en el que haga lo siguiente:

   a) Construya la matriz $\mathbf{A}$ y parte derecha $\boldsymbol{y}$ del sistema escrito por usted en el ítem anterior.

   b) Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ en el sentido de los mínimos cuadrados.

   c) Grafique en un mismo gráfico los pares en la tabla y el polinomio obtenido (evaluado en 100 puntos entre 0 y 8 con ayuda de `polyval`).

   d) Basados en el polinomio resultante, ¿aproximadamente qué cantidad de aditivo resulta en tiempo mínimo de secado? ¿Cuál es, aproximadamente, el tiempo mínimo de secado?

Ejercicio 2 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Las cifras de la Tabla 3 son datos sobre el porcentaje de llantas radiales producidas por cierto fabricante que aún pueden usarse después de recorrer cierto número de millas.
Se desea ajustar los datos de dicha tabla a los siguientes modelos en el sentido de los mínimos cuadrados:

$$y_a(x) = \alpha\beta^x \qquad \text{e} \qquad y_b(x) = \alpha(100 - x)10^{\beta x}$$

Escriba un rutero en Matlab que ejecute las siguientes tareas:

1. Determine los parámetros α y β que ajustan ambos modelos a los datos de la tabla en el sentido de los mínimos cuadrados. Su programa debe mostrar estos parámetros.

Miles de Millas recorridas (x)	1	2	5	15	25	30	35	40
Porcentaje útil (y)	99	95	85	55	30	24	20	15

Tabla 2: Porcentaje de llantas útiles de acuerdo a las millas recorridas.

2. Para ambos modelos, muestre $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}||_2$ del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ que su programa resuelve.
3. Dibuje en un mismo gráfico los datos de la tabla y ambos modelos ajustados.
4. Con el mejor modelo, estime qué porcentaje de las llantas radiales del fabricante durarán 45000 millas y 50000 millas. Su programa debe mostrar estas estimaciones.

Ejercicio 3 (ejercicio para resolver en Matlab Grader). Considere los datos de la siguiente tabla:

t	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-0.25	-0.2	-0.07	-0.09	-0.01	-0.01	-0.08	-0.01	-0.01

El modelo propuesto para ajustar los datos está dado por

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

siendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ parámetros a determinar.

1. Encuentre el valor de los parámetros c_1 y c_2 de modo que el modelo ajuste a los datos en el sentido de los Mínimos Cuadrados. Para ello, construya el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ asociado y resuelva según lo visto en clase. Almacene la solución de este sistema (en el sentido de los mínimos cuadrados) en la variable `x`, y almacene el valor de las constantes c_1 y c_2 encontradas en las variables `c_1` y `c_2`, respectivamente.
2. Calcule la norma del residuo $r = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$ y almacene este resultado en la variable `r`.
3. Utilice el modelo obtenido para predecir el valor de y en $t = 4.25$, y almacene este resultado en la variable `y_pred`.

Ejercicio 4 (ejercicio para resolver en Matlab Grader). Considere los datos de la siguiente tabla:

t	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-0.25	-0.2	-0.07	-0.09	-0.01	-0.01	-0.08	-0.01	-0.01

El modelo propuesto para ajustar los datos está dado por

$$f(t) = \frac{1}{1 - \alpha e^{\beta t}},$$

siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parámetros a determinar.

1. Encuentre el valor de los parámetros α y β de modo que el modelo ajuste a los datos en el sentido de los Mínimos Cuadrados. Para ello, construya el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ asociado y resuelva según lo visto en clase. Almacene la solución de este sistema (en el sentido de los mínimos cuadrados) en la variable `x`, y almacene el valor de las constantes α y β encontradas en las variables `alpha` y `beta`, respectivamente.
   Indicación: si necesita usar un logaritmo en su desarrollo, utilice logaritmo natural.

2. Calcule la norma del residuo $r = \|\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$ y almacene este resultado en la variable `r`.

3. Utilice el modelo obtenido para predecir el valor de y en $t = 4.25$, y almacene este resultado en la variable `y_pred`.

Ejercicio 5 (ejercicio para trabajo autónomo). En las aguas de un lago hay tres clases de microorganismos provocadores de enfermedades. Se sabe que, en respuesta a un tratamiento aplicado a las aguas, los microorganismos están disminuyendo en forma exponencial de acuerdo al modelo:

$$p(t) = c_1 e^{-1.5t} + c_2 e^{-0.3t} + c_3 e^{-0.05t}, \qquad t \geq 0,$$

donde $p(t)$ da el número (en miles) de microorganismos. De una muestra de las aguas, en un laboratorio se obtuvieron los datos que se muestran en la Tabla 4:

t (horas)	0.5	1	2	3	4
$p(t)$ (miles)	7	5.2	3.8	3.2	2.5

Tabla 3: Número de microorganismos de la muestra (en miles)

1. Escriba el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema de encontrar la función exponencial $p(t)$ que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos en la tabla.

2. Escriba un rutero en MATLAB que haga lo siguiente:

   a) Construya la matriz $\boldsymbol{A}$ y parte derecha $\boldsymbol{y}$ del sistema escrito por usted en .

   b) Resuelva el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ en el sentido de los mínimos cuadrados.

   c) Grafique en un mismo gráfico los pares en la tabla y la función $p(t)$ obtenida.

   d) En base a la función obtenida, ¿cuál es el número de microorganismos que había en la muestra inicialmente? ¿y después de una hora y media? ¿y después de 5 horas y media?

Ejercicio 6 (ejercicio guiado por el ayudante). Para estimar la cantidad de vitamina A requerida para mantener el peso se dió a ratas de laboratorio una dieta básica exenta de vitamina A y se les administró raciones controladas de vitamina A en forma de tabletas. La Tabla 2 muestra la relación entre la cantidad de vitamina A administrada y el aumento de peso de las ratas.

Dosis de vitamina A (mg)	**Aumento de peso (g)**
0.25	-10.8
1.0	13.5
1.5	16.4
2.5	28.7
7.5	51.3

Tabla 4: Aumento de peso de las ratas al administrar vitamina A.

Escriba un rutero MATLAB que:

1. Encuentre la función de la forma

$$\textit{Aumento de peso} = a + b\log_{10}(\textit{dosis de vitamina A}),\ a, b \in \mathbb{R}$$

   que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos dados.

2. Grafique en un mismo gráfico los pares en la tabla y la función obtenida (evaluada en 100 puntos entre 0.25 y 7.5).

3. Basado en la función obtenida, ¿qué cantidad de vitamina A es requerida para no aumentar de peso?

Ejercicio 7 (ejercicio para trabajo autónomo). La Tabla 5 muestra la concentración de iones n como una función del tiempo transcurrido después de haber apagado a un agente de ionización.

Tiempo (seg)	$\boldsymbol{n(\times 10^{-4})}$
0	5.03
1	4.71
2	4.40
3	3.97
4	3.88
5	3.62
6	3.30
7	3.15
8	3.08
9	2.92
10	2.70

Tabla 5: Concentración de iones a través del tiempo

Se sabe que se cumple la siguiente relación entre la concentración de iones y el tiempo

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0\,\alpha\, t}, \tag{1}$$

donde n_0 es la concentración inicial de iones, y α el coeficiente de recombinación.

1. Muestre que existe una relación lineal entre n^{-1} y t.

2. Encuentre la función (1) que mejor ajusta por cuadrados mínimos a los datos en la tabla. Escriba las aproximaciones a n_0 y α obtenidas.

3. Grafique los pares ordenados en la tabla y la función n obtenida (evaluada en 110 puntos entre 0 y 10).