Método de Galerkin Discontinuo: Teoría y Aplicaciones

Manuel Solano

Terea 1 (5 de abril de 2023)

Fecha de entrega: 19 de abril de 2023

1. **[Desigualdad de Poincaré].** Demostrar que existe $C_P > 0$ tal que $\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C_P \|v'\|_{L^2(a,b)}$ para todo $v \in H^1(a,b)$ que se anula en a o en b. **Indicación:** En una dimensión las funciones en $H^1(a,b)$ se identifican con una función contínua en $[a,b]$ (inclusiones de Sobolev).

2. **[Desigualdad de trazas discreta].**
   (a) Demostrar que existe $C > 0$, tal que $|v(0)| \leq C\,\|v\|_{H^1(0,1)}$ para todo $v \in H^1([0,1])$. **Indicación:** Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
   (b) Demostrar que existe $C > 0$, tal que $|v(0)| \leq C\,\|v\|_{L^2(0,1)}$ para todo $v \in \mathbb{P}_k([0,1])$. **Indicación:** Notar que en dimensión finita las normas son equivalentes.
   (c) Considere un intervalo $[c,d]$ de longitud h. Demostrar que existe $C_{tr} > 0$, independiente de h, tal que $|v(c)| \leq C_{tr}\, h^{-1/2} \|v\|_{L^2(c,d)}$ para todo $v \in \mathbb{P}_k(c,d)$. **Indicación:** Utilizar un "argumento de escala", es decir, llevar el intervalo $[c,d]$ al $[0,1]$ para utilizar el resultado del item anterior.

3. Sean $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ tal que $a = x_0 < x_1 < ... < n_{n+1} = b$. Consideremos las siguientes definiciones de los operadores salto y promedio en una dimensión.
$$[\![v(x_i)]\!] := \begin{cases} v(x_i^-) - v(x_i^+) & , i = 1,2,...,n, \\ -v(a) & , i = 0, \\ v(b) & , i = n+1 \end{cases}$$
y
$$\{\!\{v(x_i)\}\!\} := \begin{cases} \dfrac{v(x_i^+) + v(x_i^-)}{2} & , i = 1,2,...,n, \\ v(a) & , i = 0, \\ v(b) & , i = n+1 \end{cases}$$
Sean $v, w \in H^1(\mathcal{T}_h)$, donde $\mathcal{T}_h := \cup_{i=1}^{n+1}(x_{i-1}, x_i)$. Mostrar que
$$\sum_{i=0}^{n+1} [\![(vw)(x_i)]\!] = \sum_{i=1}^{n} \left([\![v(x_i)]\!]\,\{\!\{w(x_i)\}\!\} + \{\!\{v(x_i)\}\!\}\,[\![w(x_i)]\!] \right) + v(b)w(b) - v(a)w(a).$$

4. Mostrar que $\|v\|_{\mathrm{DG}} := \left(\|v'\|^2_{L^2(a,b)} + \sum_{i=0}^{n+1} h^{-1} |\,[\![v(x_i)]\!]|^2 \right)^{1/2}$ es una norma en $V_h := \{v \in L^2(a,b) : v \in \mathbb{P}_k(x_{i-1}, x_i), i = 1,...,n+1\}$, donde v' se entiende como la derivada a trozos de v.

5. Considere la forma bilineal del método de penalización simétrico
$$a_h(u_h, v_h) := \int_a^b u_h'(x) v_h'(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \left([\![u_h(x_i)]\!]\,\{\!\{v_h'(x_i)\}\!\} + \{\!\{u_h'(x_i)\}\!\}\,[\![v_h(x_i)]\!] \right)$$
$$- u_h'(b)v_h(b) + u_h'(a)v_h(a) - u_h(b)v_h'(b) + u_h(a)v_h'(a) + \sum_{i=0}^{n+1} \alpha h^{-1}\,[\![u_h(x_i)]\!]\,[\![v_h(x_i)]\!],$$
donde $u_h'(x)$ y $v_h'(x)$ corresponden a las derivadas a trozos de u_h y v_h, respectivamente. Proviene de aproximar la solución de la ecuación
$$\begin{cases} -u''(x) = f, & x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$
Mostrar que:

(a) existe una constante $M > 0$, independiente de h, tal que $|a_h(u_h, v_h)| \leq M\|u_h\|_{\mathrm{DG}}\|v_h\|_{\mathrm{DG}}$, $\forall u_h, v_h \in V_h$.

(b) existe una constante $M > 0$, independiente de h, tal que $|a_h(u, v_h)| \leq M\|u\|_{\mathrm{DG},*}\|v_h\|_{\mathrm{DG}}$, $\forall u \in H_0^1(a,b) \cup H^2(\mathcal{T}_h), v_h \in V_h$, donde

$$\|u\|_{\mathrm{DG},*} := \left(\|u\|_{\mathrm{DG}}^2 + \sum_{i=0}^{n+1} h | \{\!\{ u'(x_i) \}\!\} |^2 \right)^{1/2}.$$