UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Álgebra I - 525140
junio de 2022
Duración: 90 min

Solución Evaluación 2

Problema 1. Considere las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x)=\ln(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=\ln(x)+2 \end{array}$$

Considere la función $f : Dom(f) \to Rec(f)$ definida por $f(x) = (h \circ g)(x)$ para cada $x \in Dom(f)$, y responda las siguientes preguntas, detallando en cada caso los pasos y argumentos que le llevan a sus conclusiones.

a) **(3 puntos)** Escriba la expresión algebraica que determina la función f.

b) **(5 puntos)** Determine el dominio de f.

c) **(4 puntos)** Considerando que el recorrido de f es $\mathbb{R}$, argumente por qué la función f es invertible.

d) **(8 puntos)** Encuentre la función inversa f^{-1}, escribiendo explícitamente su dominio, conjunto de llegada y expresión algebraica.

Solución:

a) La expresión algebraica que determina f es: $y = \ln(\ln(x) + 2)$.

b) Para determinar el dominio de f la primera restricción es $x > 0$, además se tiene que cumplir la siguiente inecuación:

$$\ln(x) + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > \mathrm{e}^{-2}.$$

Por lo tanto, como $\mathrm{e}^{-2} > 0$ tenemos que $\mathrm{Dom}(f) = (\mathrm{e}^{-2}, +\infty)$.

c) La función f es una composición de las funciones $h(x) = \ln(x)$ y $g(x) = \ln(x) + 2$, es decir, $f = h \circ g$, ambas funciones son invertibles en sus respectivos dominios, por lo tanto, f es invertible en su dominio.

d) Determinamos la expresión algebraica de la función f:

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\ln(x) + 2\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{y} = \ln(x) + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{y}-2} = \exp_{\mathrm{e}}(\exp_{\mathrm{e}}(y) - 2) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to (e^{-2}, +\infty) \\ y &\mapsto x = \exp_{\mathrm{e}}(\exp_{\mathrm{e}}(y) - 2) \end{aligned}$$

Problema 2. Demostrar, utilizando el principio de inducción, la siguiente igualdad para todo natural $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Solución: La función proposicional con la que trabajaremos el P.I. es,

$$P(n): \sum_{j=1}^{n} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

I) Probaremos que $P(1)$ es verdad, es decir, $\displaystyle\sum_{j=1}^{1} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}(1)(1+1)(1+2)$.

Es fácil ver que, $\displaystyle\sum_{j=1}^{1} j(j+1) = 1(1+1) = 2$ y $\frac{1}{3}(1)(1+1)(1+2) = 2$. Por lo tanto, $P(1)$ es verdadera.

II) Sea $k \in \mathbb{N}$. Se asume,

$$P(k): \sum_{j=1}^{k} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

como una proposición verdadera. Probaremos que

$$P(k+1): \sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+2),$$

es verdad. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) &= \sum_{j=1}^{k} j(j+1) + (k+1)(k+1+1) \quad \text{(Usamos propiedad de sumatoria)} \\
&= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+1+1) \quad \text{(Utilizamos que } P(n) \text{ es V)} \\
&= \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3). \quad \text{(Suma de fracciones)}
\end{aligned}$$

De lo anterior, afirmamos que $P(k+1)$ es verdadera.

Por lo tanto, por el principio de inducción, hemos demostrado que, para todo natural $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) \;=\; \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Problema 3. En cada una de las siguientes preguntas, responda teniendo en cuenta que la justificación y el desarrollo es lo que tiene valor.

a) Determine si el desarrollo del binomio $\left(7x^4 - \dfrac{14}{x}\right)^{16}$ tiene o no un término constante, es decir que no depende de x.

b) Determine los valores de a, $k \in \mathbb{R}$, de modo que la secuencia a, 8, k está en progresión aritmética y la secuencia a, 8, $k+4$ está en progresión geométrica.

Solución:

a) Sabemos que dado el binomio $(a+b)^n$ un término general de este está dado por $t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Luego en el desarrollo del binomio, se tiene:

$$t_{k+1} = \binom{16}{k} (7x^4)^{16-k} \cdot \left(-\frac{14}{x}\right)^k = \binom{16}{k} (7)^{16-k} \cdot (-14)^k \cdot x^{64-5k}$$

luego, para que el desarrollo del binomio tenga un término independiente de x, se debe cumplir:

$$x^{64-5k} = x^0 \Leftrightarrow 64 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{64}{5} \notin \{0, ..., 16\}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que no existe un término independiente de x.

b) Sabemos que $a, 8, k$ están en P.A., por ende $8 = a + d$ y $k = 8 + d$, siendo d la diferencia común. Por otro lado, $a, 8, k + 4$ están en P.G. por ende $8 = ar$ y $k + 4 = 8r$, siendo r la razón común. Dado lo anterior, podemos notar que:

$$r = \frac{8}{a} = \frac{k+4}{8} \Leftrightarrow 64 = a(k+4) \qquad (1)$$

Luego, reemplazando en (1) los valores de $a = 8 - d$ y $k = 8 + d$, se obtiene:

$$64 = a(k+4) \Leftrightarrow 64 = (8-d)(d+12) \Leftrightarrow d^2 + 4d - 32 = 0 \Leftrightarrow d = -8 \vee d = 4$$

Así, sí $d = -8$, se tiene que $a = 16$ y $k = 0$ y si $d = 4$, se tiene que $a = 4$ y $k = 12$; en ambos casos se obtiene una solución al problema. Finalmente, las progresiones son:

$$\text{para } a = 16 \text{ y } k = 0\text{: (P. A.) } 16, 8, 0 \text{ y (P. G.) } 16, 8, 4$$
$$\text{para } a = 4 \text{ y } k = 12\text{: (P. A.) } 4, 8, 12 \text{ y (P. G.) } 4, 8, 16$$