UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Listado 1 - Análisis Real II (525302)

Ejercicio 1. Suponga que f es una función no negativa y continua en $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Ejercicio 2. Suponga que f es una función real acotada en $[a, b]$ tal que f^2 es Riemann-integrable en $[a, b]$. Decida si f es Riemann-integrable o no.

Ejercicio 3. Suponga que f es una función no negativa y monotonamente decreciente en $[1, +\infty)$. Demuestre que

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

converge si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge.

Ejercicio 4. Sea X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Si A consiste de todos los $x \in X$ que pertenecen a una cantidad infinita de conjuntos A_n, demuestre que

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right]$$

Usualmente se dice que el conjunto A es el **límite superior** de los conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se denota $\limsup A_n$.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Si B consiste de todos los $x \in X$ que pertenecen todos los A_n salvo una cantidad finita de ellos, demuestre que

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right]$$

Usualmente se dice que el conjunto B es el **límite inferior** de los conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se denota $\liminf A_n$.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X monótona creciente (i.e., $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$). Demuestre que

$$\limsup E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \liminf E_n$$

Ejercicio 7. Demuestre que para cualquier sucesión $\{A_n\}_{\{}n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de X, se verifica que

$$\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X$$

Concepción, August 13, 2018
RRA/SCH/JMR/jmr