UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Elementos Finitos 521237

Listado N°4

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Demostrar lo siguiente:

   a) El espacio $\left(W_p^k(\Omega), \|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}\right)$ es Banach.

   b) $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \le q \le p \le \infty$.

   c) Sea k entero no negativo. Entonces $W_p^k(\Omega) \subseteq W_q^k(\Omega)$ para $1 \le q \le p \le \infty$.

   d) Sean k y m enteros no negativos tales que $k \le m$. Entonces $W_p^m(\Omega) \subseteq W_p^k(\Omega)$.

2. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $D_w f = 0$. Demuestre que f es la función constante.

3. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(H, \|\cdot\|_H)$ dos espacios de Hilbert tales que la inclusión $V \hookrightarrow H$ es compacta y $|\cdot|_V$ una semi-norma en V tal que $\|v\|_V^2 = |v|_V^2 + \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V$. Sea V_0 un subespacio cerrado de V tal que $|\cdot|_V$ es norma en V_0. Demuestre que $\|\cdot\|_V$ y $|\cdot|_V$ son equivalentes en V_0. **Indicación:** Una desigualdad es trivial. Para la otra proceda por contradicción.

4. (**Desigualdad de Friedrichs-Poincaré**). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Considere el espacio $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$ donde γ es la aplicación traza y $\partial\Omega \supset \Gamma_0 \neq \emptyset$. Demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que

   $$\|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^n} \ge C\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

   Indicación: Utilizar el resultado del Problema 3 y el hecho (no demostrar) que la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta.

5. Sabemos que si un dominio Ω es Lipschitz, entonces existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^\infty(\Omega} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$ para todo $u \in W_p^1(\Omega)$. Considere el dominio no Lipschitz $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^2\}$ y la función $u(x,y) = x^{\epsilon/p}$, con $0 < \epsilon < 2$. Mostrar que

   a) $u \notin L^\infty(\Omega)$.

   b) $u \in W_p^1(\Omega)$ si $2 < p < 3 - \epsilon$.

MSP/msp Concepción 21 de abril de 2024.