

525043 - Taller de Razonamiento Matemático II

Listado 12

Ejercicio 1. En tu casa tienes una fila bi-infinita de cajas (una caja por cada número entero). Inicialmente, tienes n piedras en la caja 0. Una jugada consiste en tomar una caja i con al menos dos piedras, quitar dos piedras de la caja i , y agregar una piedra en la caja $i - 1$ y otra en la caja $i + 1$. Tu vecino llegó y accidentalmente realizó una jugada. ¿Puedes volver a la configuración inicial realizando algún número de jugadas?

Ejercicio 2. Un tablero de $n \times n$ tiene una persona en cada casilla. Inicialmente, $n - 1$ de esas personas tienen COVID. Cada segundo ocurre lo siguiente: si una persona está al lado de al menos dos personas infectadas, se contagia. Muestre que existe una persona que nunca se contagia, sin importar cuánto tiempo pase.

Ejercicio 3. Tienes un tablero de ajedrez de $m \times n$ y en cada casilla hay escrito un número real. En un paso, puedes cambiar los signos de todos los números de una fila o de una columna. Muestre que, partiendo desde cualquier tablero, existe una serie de pasos que hace que la suma de toda fila y casilla no sea negativa.

Ejercicio 4. Tienes un tablero de ajedrez de 8×8 , con casillas coloreadas negras y blancas, de la manera usual. En cada paso, puedes elegir una fila, una columna, o un subcuadrado de 2×2 ; y cambiar todos los colores de esas casillas por el color opuesto. ¿Puedes terminar con exactamente 1 casilla negra?

Ejercicio 5. Tienes los números enteros del 1 al 100 escritos en el pizarrón. Una jugada consiste en elegir dos números a, b escritos en la pizarra, borrarlos, y agregar el número $a + b - 1$. Después de realizar 99 jugadas, solo queda un número en el pizarrón. ¿Puedes hacer que ese número sea 5000?

Canción de la semana: Miguel Bosé - Teorema (1980)