Procesos Estocásticos : Proceso de Poisson

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

Principio de Superposición para procesos de Poisson

Supongamos que eventos ocurren con tasa λ y que además, a los eventos se les puede clasificar en eventos de "tipo 1" y eventos de "tipo 2", que ocurren con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Así, definimos

- $\{N_t : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos en el período t
- $\{N_t^{(i)} : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos del tipo $i, i = 1, 2$ en el período t.

Principio de Superposición para procesos de Poisson

- $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ y $\lambda = p\lambda + (1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)}$ es un proceso de Poisson de tasa $p\lambda$
- $N_t^{(2)}$ es un proceso de Poisson de tasa $(1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)} \perp\!\!\!\perp N_t^{(2)}$.
- Si $N_t^{(1)}, \ldots, N_t^{(k)}$ son procesos de Poisson independientes con tasas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, entonces $N_t := N_t^{(1)} + \ldots + N_t^{(k)}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Outline

Proceso de Poisson Compuesto

Asociamos una v.a. Y_i a cada evento de un proceso de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ con tasa λ.
Sean $Y_i, \ i \geq 1$ v.a. i.i.d. e independientes del proceso $\{N_t\}$. Con $S_t = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N_t}$, tenemos que :

$$\begin{cases} S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \\ S_t = 0, \ \text{si } N_t = 0. \end{cases}$$

- Si $\mathbb{E}[N_t] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Y_1] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1]$;
- $\text{Var}[S_t] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2]$.

Proceso de Poisson Compuesto. Ejemplo 1

- Supongamos que el número de clientes que entran en un restaurante de comida rápida durante un día tiene distribución de Poisson, de media 81 y que cada cliente gasta un promedio de \$6.000.- con una desviación estándar de \$1.000.-

- Calcule el monto esperado de la recaudación diaria y su desviación estándar.

Sea N_1 : número de los clientes durante un día e Y_i : el monto gastado por el i-ésimo cliente, entonces la recaudación diaria

$$\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[N_1]\,\mathbb{E}[Y_i] = 81 \times 6.000 = 486.000.-$$

Para poder calcular la desviación estándar necesitamos la varianza de S_1 :

$$Var[S_1] = \lambda \mathbb{E}\left[Y_1^2\right] = \lambda\left(Var[Y_1] + (\mathbb{E}[Y_1])^2\right)$$

$$= 81 \times (1.000^2 + 6.000^2) = 81 \times (1.000.000 + 6.000.000)$$

$$= 81 \times 7.000.000 = 567.000.000 = 567 \times 1.000^2$$

Luego, la desviación estándar es

$$\sigma_{S1} = \sqrt{Var\left[S_1\right]} = \sqrt{567} \times 1.000 = 23.811.$$

Entonces, con probabilidad alta, los gastos de un cliente se encuentran en los límites siguientes :

$$(6.000 - 2 \times 1.000;\ 6.000 + 2 \times 1.000) = (4.000;\ 8.000)$$

y el mónto diarío de recaudaciíon se encuentra en los límites

$$(486.000 - 2 \times 23.811;\ 486.000 + 2 \times 23.811) = (438.378;\ 533.622).$$

Proceso de Poisson Compuesto. Ejemplo 2

Suponga que familias migran en vehículos a una región según un proceso de Poisson de tasa 2 familias por semana.
Estadísticamente se sabe que el número de personas en casa familia es independiente y toma valores 1, 2, 3, 4 con probabilidad $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, respectivamente.

- ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de individuos que han migrado a esa área durante un período de 5 semanas.

Sea Y_i : Número de gente en cada familia.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & 1/6, \\ 2, & 1/3, \\ 3, & 1/3, \\ 4, & 1/6. \end{cases}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y_i\right] &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{6} \\ &= \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y_i^2\right] &= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{3} + 16\frac{1}{3} \\ &= \frac{43}{6} \approx 7,2. \end{aligned}$$

Sea N_t : Número de familias.
Entonces, $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 2$ y
$t = 1 \Leftrightarrow 1$ semana,
$t = 5 \Leftrightarrow 5$ semanas. Luego,

- M_t : Número total de individuos. Así, $M_t = \sum_{t=1}^{N_t} Y_i$ y

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}\left[N_t\right] \times \mathbb{E}\left[Y_i\right] \\
&= \lambda t \mathbb{E}\left[Y_i\right] \\
&= 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25.
\end{aligned}
$$

Finalmente, $Var\left[M_t\right] = \lambda t \mathbb{E}\left[Y_i^2\right] = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} \approx 72.$

Ejemplo 3

A un parque nacional llegan diariamente autos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ autos por hora.
La entrada al recinto se paga por persona que ingresa y el precio es de $5.000.- (por persona), esto es, si en el auto hay 2 personas, la entrada que paga el auto es de $10.000.-
Se sabe que el número de personas en cada auto es independiente de cualquier otra cosa y toma valores $1, 2, 3, 4, 5$ con probabilidad $0.1, 0.2, 0.3, 0.3$ y 0.1, respectivamente.
Si el parque abre sus puertas de $8:00$ a $16:00$ horas :

a) ¿Cuál es la recaudación diaria promedio del parque ?
b) Se está pensando en hacer un descuento a aquellos autos con más de 2 pasajeros. En este caso, se cobraría el 80% de la entrada regular por persona. ¿Cuál sería la recaudación diaria promedio en este caso ?

Sea

- Y_i : número de personas en cada auto;
- ε_i : precio de la entrada por un auto,
- $\varepsilon_i = \text{M\$}5Y_i$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varepsilon_i] &= 5[1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.1] \\ &= \text{M\$ } 15.5;\end{aligned}$$

A cambio, con descuento tenemos :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varepsilon_i^{desc.}] &= 5\,[1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 0.8[3 \times 0.3 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.1]] \\ &= \text{M\$ } 12.9.\end{aligned}$$

Sea N_t la cantidad de autos que llegan durante t horas.

Definimos :

- $R_t = \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon_i$, la recaudación por t horas.
- $R_t^{desc.} \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon_i^{desc.}$, la recaudación por t horas, cuando se aplica el descuento.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_t] &= \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[\varepsilon_i] \\ &= \lambda t \mathbb{E}[\varepsilon_i].\end{aligned}$$

Con $t = 8$ tenemos que $\mathbb{E}[R_t] = 8 \times 15.5\lambda$. De misma manera,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_t^{desc.}] &= \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[\varepsilon_i^{desc.}] \\ &= \lambda t = \mathbb{E}[\varepsilon_i^{desc.}]\end{aligned}$$

y $\mathbb{E}[R_t^{desc.}] = 8 \times 12.9\lambda$.

Outline

Computación de las esperanzas por condicionamiento

Teniendo presente que $\mathbb{E}[X|Y]$ es una función aleatoria y que $\mathbb{E}[X|Y=y]$ cuando $Y=y$, es claro que para todas v.a. X e Y

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]. \tag{1}$$

Cuando Y es una v.a. discreta, (1) se escribe como :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{y} \mathbb{E}[X|Y=y]P(Y=y).$$

Cuando Y es una v.a. continua, (1) se escribe como :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y=y] f_Y(y) dy.$$

- Sea X e Y v.a. discretas. Entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y = y]P(Y = y).$$

$$\begin{aligned}
\sum_y \mathbb{E}[X|Y = y]P(Y = y) &= \sum_y \sum_x xP(X = x|Y = y)P(Y = y) \\
&= \sum_x x \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y) \\
&= \sum_x x \sum_y P(X = x; Y = y) \\
&= \sum_x xP(X = x) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

La esperanza de la suma de un número aleatorio de v.a.

Sea N una v.a. independiente de $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$, las cuales son v.a. i.i.d., entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].$$

Demo.

Notamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n\right] &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= n\mathbb{E}[X] \ \ \forall n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right] = N\mathbb{E}[X].$$

Demo. cont.

A partir de (1), se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[N\mathbb{E}[X]\right] \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

Observación

Una v.a. $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ que es igual a una suma de una cantidad aleatoria N de las v.a. i.i.d. X_i, cada una independiente de N, se llama una *v.a. compuesta* y del resultado anterior se tiene que

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].$$

Computación de la varianza por condicionamiento

Sabemos que

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Se puede usar el método de cálculo de la esperanza condicionando con respecto a otra v.a., de modo que se tendría

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X^2|Y\right]\right], \\ \mathbb{E}[X]^2 &= \left(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right]\right)^2. \end{aligned}$$

Sin embargo, existe una fórmula para la varianza condicionl.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X|Y=y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y=y))^2|Y=y] \\ &= \mathbb{E}[X^2|Y=y] - (\mathbb{E}[X|Y=y])^2. \end{aligned}$$

- Sean X e Y variables aleatorias. Entonces, se tiene que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y)).$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathsf{Var}(X|Y)) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[X^2|Y=y] - (\mathbb{E}[X|Y=y])^2\right) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|Y)) - \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|Y])^2\right] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|Y])^2\right]; \\
\mathsf{Var}(\mathbb{E}[X|Y]) &= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|Y])^2\right] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2 \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|Y])^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 .
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\mathbb{E}(\mathsf{Var}(X|Y)) + \mathsf{Var}(\mathbb{E}[X|Y]) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathsf{Var}(X).
$$

La varianza de una v.a. compuesta

Sean $X_1, X_2, \ldots$, i.i.d. con $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, todas independientes de N.
Sea $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Entonces se tiene que

$$\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\sigma^2 + \mathrm{Var}[N]\mu^2.$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S|N=n) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i | N=n\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= n\sigma^2;\ \forall n.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\mathrm{Var}(S|N) = N\sigma^2$.

Recordando que $\mathbb{E}[S|N] = N\mu$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathbb{E}[\mathrm{Var}(S|N)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[S|N]) \\
&= \mathbb{E}[N\sigma^2] + \mathrm{Var}\left(N\mu\right) \\
&= \mathbb{E}[N]\sigma^2 + \mathrm{Var}(N)\mu^2.
\end{aligned}$$