

Análisis Numérico III  
Problemas de valores iniciales  
de ecuaciones diferenciales ordinarias (Parte I)  
Módulo 1, Presentación 3

Raimund Bürger

23 de marzo de 2022

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Métodos de paso simple: podemos aumentar el orden del método solamente si aumentamos el número de evaluaciones de  $f$  (o incluso de ciertas derivadas de  $f$ ) en cada paso, lo que significa que el orden del método general puede ser mejorado solamente por un gran esfuerzo computacional. (El orden del método debe ser alto para permitir la solución de un problema de valores iniciales de una ecuación diferencial ordinaria con tamaños de paso largos.)

Si en los puntos  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-p}$  ya hemos generado aproximaciones  $\mathbf{y}_i^h, \dots, \mathbf{y}_{i-p}^h$  de  $\mathbf{y}(x_i), \dots, \mathbf{y}(x_{i-p})$ , podemos aprovechar de toda esta información al calcular la aproximación asociada con  $x_{i+1}$ , es decir, el vector  $\mathbf{y}_{i+1}^h$ :

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

Claramente debemos usar un valor de  $p + 1$ , es decir, del número de evaluaciones requeridas para ejecutar el paso, **moderado**.

**1.3.1 Métodos de pasos múltiples basados en integración numérica** Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  una solución exacta de  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(x_{i+1}) &= \mathbf{y}(x_{i-j}) + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \mathbf{y}'(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{y}(x_{i-j}) + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.\end{aligned}$$

La función  $\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau))$  bajo la integral es reemplazada por el **polinomio de interpolación** del grado máximo  $p$  definido por los puntos

$$(x_i, \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h)), \dots, (x_{i-p}, \mathbf{f}(x_{i-p}, \mathbf{y}_{i-p}^h)),$$

luego calculamos la integral exacta.

Dibujo ad-hoc:

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Esto resulta en el método

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_{i-j}^h + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \left( \sum_{k=0}^p \mathbf{f}(x_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k}^h) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} \right) d\tau. \quad (1.35)$$

Si los nodos son equidistantes, podemos calcular a priori

$$\beta_{j,p,k} := \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} d\tau. \quad (1.36)$$

Así, el **método de pasos múltiples** es dado por

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_{i-j}^h + \sum_{k=0}^p \beta_{j,p,k} \mathbf{f}(x_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k}^h).$$

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Para  $x_{i+1} - x_i = h$  para todo  $i$  y  $p = j = 0$ , resulta el **método de Euler explícito**; para  $j = 0$ ,  $p$  arbitrario obtenemos los **métodos de Adams-Bashforth**. Valores de algunos de los coeficientes (1.36) para valores de  $p$  moderados:

$\frac{1}{h}\beta_{0,p,k}$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	orden
$p = 0$	1				1
$p = 1$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$			2
$p = 2$	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$		3
$p = 3$	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	4

Ejemplo ad-hoc:

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

En la práctica, **no se usan mucho** los métodos de Adams-Bashforth sólos, a pesar de simplicidad y del alto orden que se puede lograr (por ejemplo, para  $p = 3$  podemos alcanzar el orden 4, usando solamente una evaluación de  $\mathbf{f}$  por paso). El problema consiste en el pequeño dominio de **estabilidad** de estos métodos.

Una alternativa se puede generar si definimos **métodos implícitos** incluyendo el punto  $(x_{i+1}, \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}))$  en la interpolación de  $\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau))$ . El resultado es un método implícito que determina  $\mathbf{y}_{i+1}^h$  mediante un sistema de ecuaciones **habitualmente no lineal**.

Dibujo ad-hoc:

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

En este caso, la ecuación que reemplaza (1.35) es

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_{i-j}^h + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \left( \sum_{k=-1}^p \mathbf{f}(x_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k}^h) \prod_{\substack{l=-1 \\ l \neq k}}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} \right) d\tau.$$

Para  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $j = 0$  y todo  $p = -1, 0, 1, \dots$ , obtenemos los métodos de Adams-Moulton. Podemos calcular a priori

$$\tilde{\beta}_{j,p,k} := \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \prod_{\substack{l=-1 \\ l \neq k}}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} d\tau;$$

así, el método final es de la forma

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_{i-j}^h + \sum_{k=-1}^p \tilde{\beta}_{j,p,k} \mathbf{f}(x_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k}^h).$$

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

para  $j = 0$  y valores de  $p$  moderados resultan los siguientes valores:

$\frac{1}{h} \tilde{\beta}_{0,p,k}$	$k = -1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	orden
$p = -1$	1				1
$p = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			2
$p = 1$	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$		3
$p = 2$	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	4

Los métodos de Adams-Moulton incluyen para  $p = -1$  el **método de Euler implícito**

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + h\mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h) \quad (1.37)$$

y la **regla trapezoidal**

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{2} \left( \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h) + \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h) \right). \quad (1.38)$$

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Los métodos implícitos **se usan poco** en la práctica. Pero si usamos un método de Adams-Moulton y reemplazamos el valor  $\mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h)$  por una aproximación  $\mathbf{f}(x_{i+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{i+1}^h)$ , donde  $\tilde{\mathbf{y}}_{i+1}^h$  es generado por un método explícito, obtenemos un método del tipo **predictor-corrector**.

Combinando el método de Adams-Moulton con 3 pasos y orden 4 con un método de Adams-Bashforth con 3 pasos y del orden 3 (como predictor), resulta un **método explícito** de 3 pasos y del orden 4 que requiere sólo **dos evaluaciones de  $\mathbf{f}$  por paso**, y que es esencialmente equivalente en sus características al método de Runge-Kutta clásico del orden 4, y que requiere 4 evaluaciones de  $\mathbf{f}$  por paso:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{12} & \left( 23\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h) - 16\mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}^h) \right. \\ & \left. + 5\mathbf{f}(x_{i-2}, \mathbf{y}_{i-2}^h) \right),\end{aligned}\tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{24} & \left( 9\mathbf{f}(x_{i+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{i+1}^h) + 19\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h) \right. \\ & \left. - 5\mathbf{f}(x_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}^h) + \mathbf{f}(x_{i-2}, \mathbf{y}_{i-2}^h) \right).\end{aligned}\tag{1.40}$$

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

### 1.3.2 Métodos implícitos de pasos múltiples basados en derivación numérica

**Recordatorio** Deseamos calcular los coeficientes del **polinomio de interpolación**  $P_n \in \Pi_n$  en la forma de Newton para  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , tales que  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$  y  $P_n(x_i) = y_i$  para  $i = 0, \dots, n$ . Para tal efecto calculamos sucesivamente las **diferencias divididas**:

$$y_{[x_i]} = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$y_{[x_{i+1}, x_i]} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{[x_{i+1}]} - y_{[x_i]}}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

⋮

$$y_{[x_{i+k}, \dots, x_i]} = \frac{y_{[x_{i+k}, x_{i+k-1}, \dots, x_{i+1}]} - y_{[x_{i+k-1}, x_{i+k-2}, \dots, x_i]}}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-k,$$

⋮

$$y_{[x_n, \dots, x_0]} = \frac{y_{[x_n, \dots, x_1]} - y_{[x_{n-1}, \dots, x_0]}}{x_n - x_0}.$$

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Recordatorio (continuación)** Entonces el polinomio de interpolación (en forma) de Newton es

$$\begin{aligned}P_n(x) &= y_{[x_0]} + y_{[x_1, x_0]}(x - x_0) + y_{[x_2, x_1, x_0]}(x - x_0)(x - x_1) \\&\quad + \cdots + y_{[x_n, \dots, x_0]}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\&= \sum_{i=0}^n y_{[x_i, x_{i-1}, \dots, x_0]} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).\end{aligned}$$

Usamos la identidad

$$\mathbf{y}'(x_{i+1}) = \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}(x_{i+1}))$$

y aproximamos  $\mathbf{y}(x)$  por el polinomio de interpolación  $\mathbf{P}(x; i)$  del grado máximo  $k + 1$  para los datos

$$(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h), \dots, (x_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k}^h), \quad k \geq 0, \quad (1.41)$$

donde  $\mathbf{y}_{i+1}^h$  aún es una incógnita, y definimos  $\mathbf{y}_{i+1}^h$  por la ecuación

$$\left. \frac{d}{dx} \mathbf{P}(x; i) \right|_{x=x_{i+1}} = \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h).$$

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Usando para la representación del polinomio la **fórmula de Newton**,

$$P(x; i) = \sum_{j=0}^{k+1} y_{[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}]}^h \prod_{l=0}^{j-1} (x - x_{i+1-l}),$$

donde  $y_{[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}]}^h$  es una  **$j$ -ésima diferencia dividida** con respecto a los datos (1.41), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} P(x; i) \Big|_{x=x_{i+1}} &= \sum_{j=1}^{k+1} y_{[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}]}^h \prod_{l=1}^{j-1} (x_{i+1} - x_{i+1-l}) \\ &= f(x_{i+1}, y_{i+1}^h),\end{aligned}$$

es decir, un **sistema de ecuaciones** para determinar  $y_{i+1}^h$ .

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Para el **caso equidistante** podemos calcular explícitamente los coeficientes de estas fórmulas. Tal procedimiento entrega las fórmulas

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \sum_{l=0}^k \alpha_{kl} \mathbf{y}_{i-l}^h + h\beta_0 \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^h) \quad (1.42)$$

con los coeficientes

$k$	0	1	2	3	4	5
$\beta_0$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{60}{137}$	$\frac{60}{147}$
$\alpha_{k0}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{300}{137}$	$\frac{360}{147}$
$\alpha_{k1}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{36}{25}$	$-\frac{300}{137}$	$-\frac{450}{147}$
$\alpha_{k2}$			$\frac{2}{11}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{200}{137}$	$\frac{400}{147}$
$\alpha_{k3}$				$-\frac{3}{25}$	$-\frac{75}{137}$	$-\frac{225}{147}$
$\alpha_{k4}$					$\frac{12}{137}$	$\frac{72}{147}$
$\alpha_{k5}$						$-\frac{10}{147}$

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

Veremos que estas fórmulas son interesantes solamente para  $k \leq 5$ . Para  $k = 0$ , obtenemos nuevamente el método de Euler implícito. Las fórmulas (1.42) son conocidas como **fórmulas BDF** (backward differentiation formula) o **método de Gear**.

**1.3.3 Breve teoría de métodos de pasos múltiples** En lo siguiente, consideraremos sólo **métodos lineales de  $k$  pasos**, que pueden ser representados como

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}_{m+i}^h = h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(x_{m+i}, \mathbf{y}_{m+i}^h), \quad m = 0, \dots, N_h - k,$$
(1.43)

donde  $h = x_{j+1} - x_j$  para todo  $j$ . Eso incluye los métodos de **Adams-Bashforth**, **Adams-Moulton** y **BDF**, pero **no** incluye el método predictor-corrector.

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Las propiedades de (1.43) pueden ser caracterizadas por los **polinomios**

$$\varrho(\xi) := \sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^i, \quad \sigma(\xi) := \sum_{i=0}^k \beta_i \xi^i.$$

Los conceptos del error de truncación local y del error de discretización global son introducidos en forma análoga a los métodos de paso simple, es decir, definimos

$$\tau(x, \mathbf{y}(x); h) := \frac{1}{h} \left( \sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}(x + ih) - h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(x + ih, \mathbf{y}(x + ih)) \right),$$

$$\varepsilon(x; h) := \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_{N_h}^h, \quad \text{donde } N_h h = x - x_0.$$

El método se llama **consistente al menos del orden  $p$**  si

$$\tau(x, \mathbf{y}(x); h) = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{para } h \rightarrow 0,$$

y **convergente del orden  $p$**  si

$$\varepsilon(x; h) = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{para } h \rightarrow 0.$$

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Teorema 1.3** El método de  $k$  pasos (1.43) es consistente al menos del orden  $p$  si

$$\varrho_1(1) = 0, \quad \varrho_{j+1}(1) = j\sigma_j(1), \quad j = 1, \dots, p,$$

donde los polinomios  $\varrho_j$  y  $\sigma_j$  son definidos por la recursión

$$\varrho_1(\xi) \equiv \varrho(\xi), \quad \sigma_1(\xi) \equiv \sigma(\xi), \quad \varrho_{j+1}(\xi) \equiv \xi\varrho'_j(\xi), \quad \sigma_{j+1}(\xi) \equiv \xi\sigma'_j(\xi).$$

El método es convergente del orden  $p$  si además tenemos:

1. Todos los ceros de  $\varrho$  están localizados en el interior o en el borde del círculo unitario, y los ceros del borde son simples, es decir,

$$\begin{aligned} (\varrho(\xi) = 0 \Rightarrow |\xi| \leq 1) \\ \wedge (\varrho(\xi) = 0 \wedge |\xi| = 1 \Rightarrow \varrho'(\xi) \neq 0). \end{aligned} \tag{1.44}$$

2. Los errores iniciales son del orden  $p$ :

$$\mathbf{y}_i^h - \mathbf{y}(x_i) = \mathcal{O}(h^p), \quad i = 0, \dots, k-1.$$

**Demostración** Ver, por ejemplo, Deuflhard & Bornemann.

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

Las raíces diferentes de 1 se llaman **raíces parasitarias**. Ellas afectan decisivamente el uso práctico del método. La condición (1.44) es conocida como **condición de ceros** o **condición de estabilidad asintótica**.

Existen métodos razonables que **no** satisfacen la condición (1.44). Los métodos de Adams-Moulton y Adams-Bashforth **satisfacen la condición**, pero las fórmulas (1.42) **no satisfacen** (1.44) para  $k \geq 6$ .

**Ejemplo** Método implícito de Adams-Moulton para  $y' = f(x, y)$ :

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}^h) + 19f(x_i, y_i^h) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}^h) + f(x_{i-2}, y_{i-2}^h)).$$

Deseamos determinar el **orden de consistencia** del método.

1. El método numérico puede ser escrito en la forma

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i y_{-2+i}^h = h \sum_{i=0}^3 \beta_i f_{-2+i}, \quad f_j := f(x_j, y_j^h); \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1; \quad \beta_0 = \frac{1}{24}, \quad \beta_1 = -\frac{5}{24}, \quad \beta_2 = \frac{19}{24}, \quad \beta_3 = \frac{3}{8}.$$

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

### Ejemplo (continuación)

1. A este método le corresponden los polinomios

$$\varrho(\xi) = \xi^3 - \xi^2, \quad \sigma(\xi) = \frac{3}{8}\xi^3 + \frac{19}{24}\xi^2 - \frac{5}{24}\xi + \frac{1}{24}.$$

2. El test del Teorema 1.3 ( $\checkmark$ ) entrega la siguiente información:

$$\varrho_1(1) = 0;$$

$$\varrho_2(\xi) = 3\xi^3 - 2\xi^2, \quad \varrho_2(1) = 1 = \sigma_1(1)\checkmark;$$

$$\sigma_2(\xi) = \frac{9}{8}\xi^3 + \frac{19}{12}\xi^2 - \frac{5}{24}\xi, \quad \varrho_3(\xi) = 9\xi^3 - 4\xi^2,$$

$$\varrho_3(1) = 5 = 2\sigma_1(1)\checkmark;$$

$$\sigma_3(\xi) = \frac{27}{8}\xi^3 + \frac{19}{6}\xi^2 - \frac{5}{24}\xi, \quad \varrho_4(\xi) = 27\xi^3 - 8\xi^2,$$

$$\varrho_4(1) = 19 = 3\sigma_3(1)\checkmark;$$

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

### Ejemplo (continuación)

2.

$$\sigma_4(\xi) = \frac{81}{8}\xi^3 + \frac{19}{3}\xi^2 - \frac{5}{24}\xi, \quad \varrho_5(\xi) = 81\xi^3 - 16\xi^2,$$

$$\varrho_5(1) = 65 = 4\sigma_4(1)\checkmark;$$

$$\sigma_5(\xi) = \frac{243}{8}\xi^3 + \frac{38}{3}\xi^2 - \frac{5}{24}\xi, \quad \varrho_6(\xi) = 243\xi^3 - 32\xi^2,$$

$$\varrho_6(1) = 211 \neq 5\sigma_5(1) = \frac{1285}{6}.$$

Concluimos que el método es del orden de consistencia 4.

Uno podría tratar de **maximizar el orden de un método** eligiendo los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  de forma óptima para un valor dado de  $k$ . Este procedimiento permite alcanzar un **orden de consistencia  $2k$** . Sin embargo, los métodos que resultan son inútiles para las aplicaciones.

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Teorema 1.4 (Primera cota de orden de Dahlquist)** El orden máximo de un método estable y consistente de  $k$  pasos es

$$p = \begin{cases} k + 1 & \text{para } k \text{ impar,} \\ k + 2 & \text{para } k \text{ par.} \end{cases}$$

**Demostración** Ver Hairer, Nørsett & Wanner, 1993. ■

El orden  $k + 1$  ya se alcanza por las fórmulas de  $k$  pasos del tipo predictor-corrector usando las fórmulas de Adams-Bashforth y Adams-Moulton. Lo único que aún aparece interesante son las fórmulas del orden  $k + 2$  para  $k$  par.

La discusión de un ejemplo, el método de Milne-Simpson, requiere la presentación del siguiente teorema. (Sin embargo, el ejemplo ilustra el poco interés práctico para este tipo de métodos.)

### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Teorema 1.5** Consideremos la ecuación de diferencias

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i \eta_{i+m} = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma_0 \gamma_k \neq 0. \quad (1.45)$$

Entonces la solución de (1.45) es dada por

$$\eta_j = \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{v_l} C_{li} j^{i-1} \xi_l^j, \quad j > 0,$$

donde  $\xi_1, \dots, \xi_s$ ,  $\xi_i \neq \xi_j$  para  $i \neq j$ , son los ceros del polinomio

$$P(\xi) := \sum_{i=0}^k \gamma_i \xi^i$$

con las multiplicidades  $v_1, \dots, v_s$ , o sea

$$\sum_{l=1}^s v_l = k, \quad v_l \in \mathbb{N},$$

y las constantes  $C_{li}$  son determinadas únicamente por  $\eta_0, \dots, \eta_{k-1}$ .

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5** El **método de Milne-Simpson**

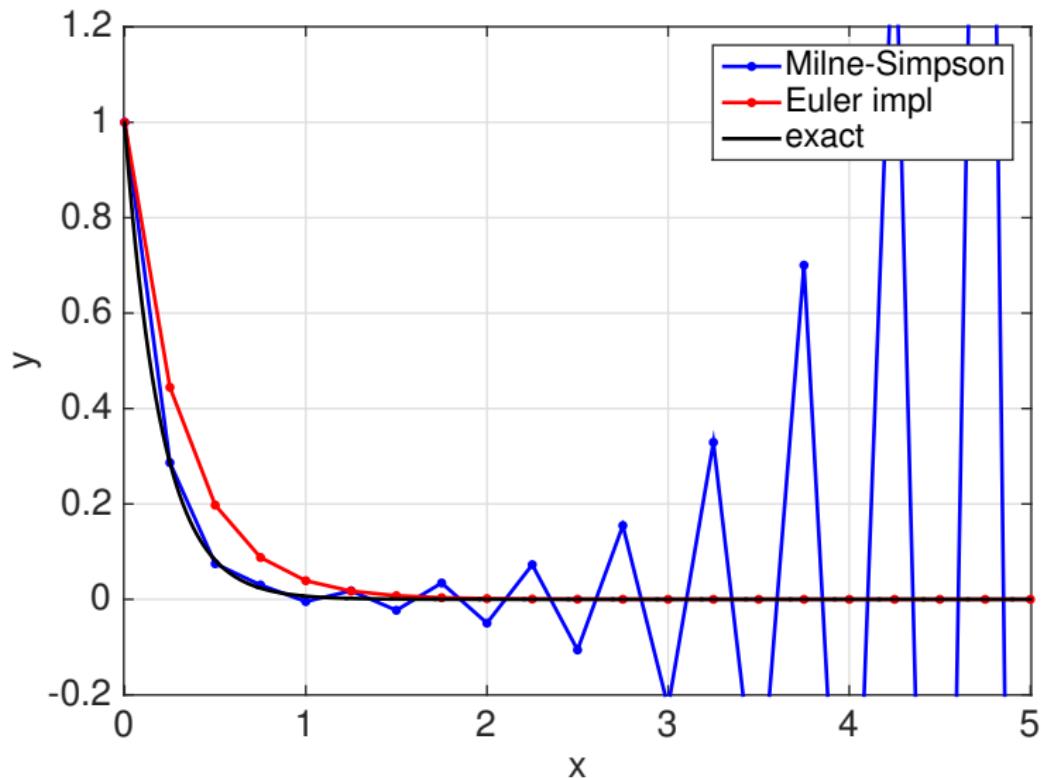
$$y_{i+1}^h = y_{i-1}^h + \frac{h}{3} \left( f(x_{i+1}, y_{i+1}^h) + 4f(x_i, y_i^h) + f(x_{i-1}, y_{i-1}^h) \right)$$

(considerado aquí para  $n = 1$ ) es un método de dos pasos del orden 4. Lo aplicamos al problema  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = 1$  con la solución  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Resulta la ecuación de diferencias lineal

$$(1 - q)y_{i+1}^h - 4qy_i^h - (1 + q)y_{i-1}^h = 0, \quad y_0^h = 1, \quad q = \frac{h\lambda}{3}. \quad (1.46)$$

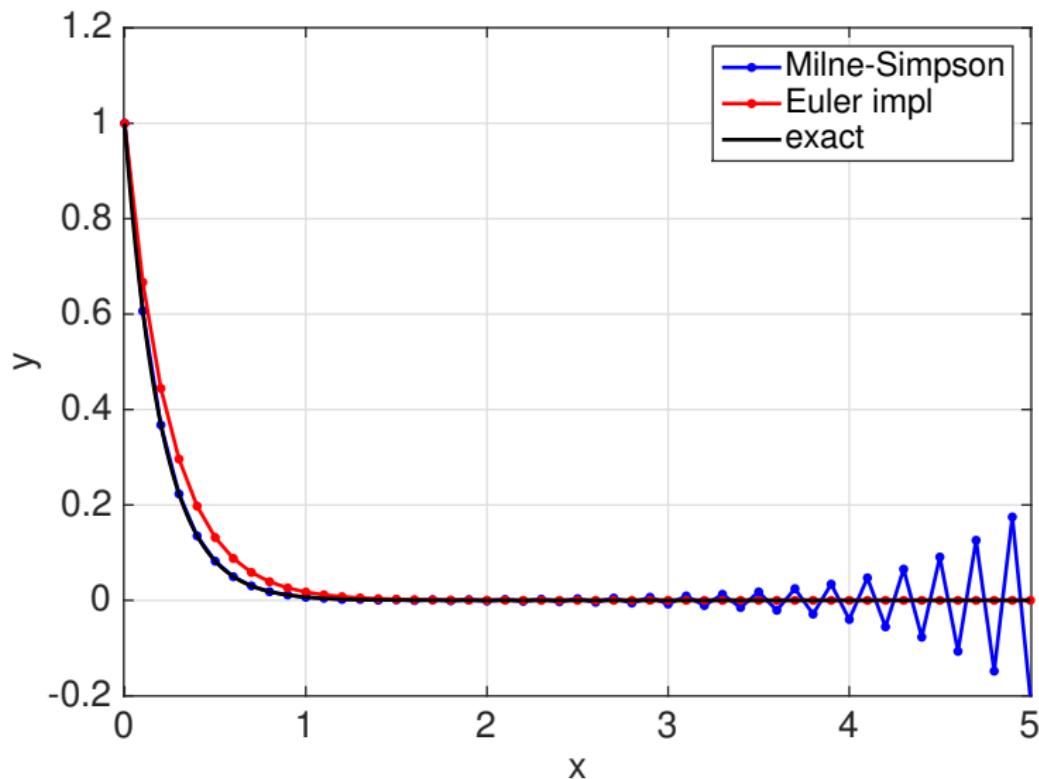
### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5 (continuación)** Métodos de Euler implícito y de Milne-Simpson,  $\lambda = -5$ ,  $y_0^h = 1$ ,  $y_1^h = \exp(\lambda h)$  (MS),  $h = 0,25$



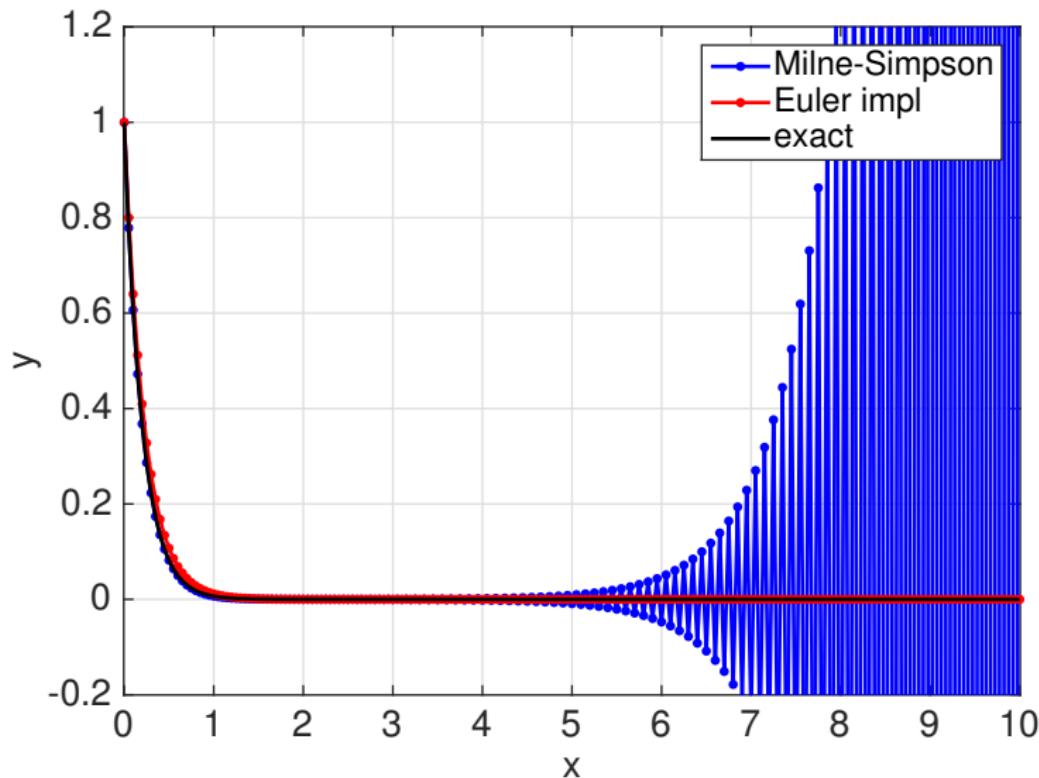
### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5 (continuación)** Métodos de Euler implícito y de Milne-Simpson,  $\lambda = -5$ ,  $y_0^h = 1$ ,  $y_1^h = \exp(\lambda h)$  (MS),  $h = 0,1$



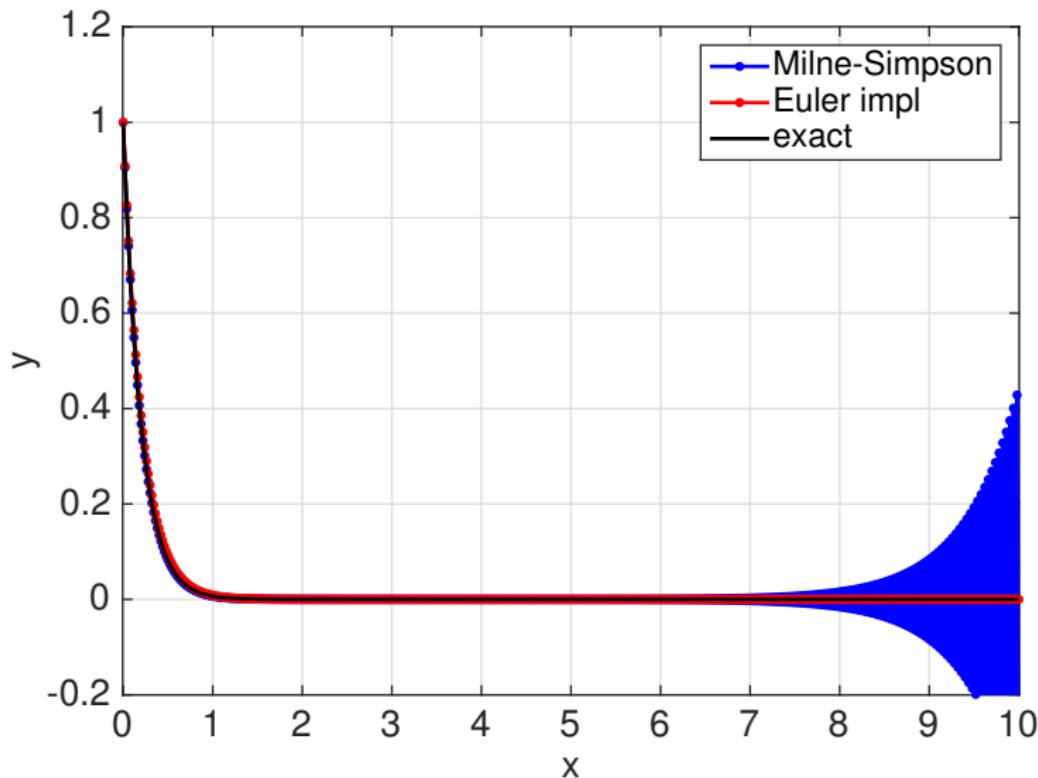
### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5 (continuación)** Métodos de Euler implícito y de Milne-Simpson,  $\lambda = -5$ ,  $y_0^h = 1$ ,  $y_1^h = \exp(\lambda h)$  (MS),  $h = 0,05$



### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5 (continuación)** Métodos de Euler implícito y de Milne-Simpson,  $\lambda = -5$ ,  $y_0^h = 1$ ,  $y_1^h = \exp(\lambda h)$  (MS),  $h = 0,02$



### 1.3. Métodos de pasos múltiples

**Ejemplo 1.5 (continuación)** Aplicando el Teorema 1.5 a la ecuación (1.45), llegamos a la representación

$$y_j^h = C\mu_1^j + (1 - C)\mu_2^j,$$

donde  $C = C(y_1^h)$  y

$$\mu_1 = \frac{1}{1-q} \left( 2q + \sqrt{1+3q^2} \right), \quad \mu_2 = \frac{1}{1-q} \left( 2q - \sqrt{1+3q^2} \right).$$

Para  $\lambda < 0$  tenemos

$$\mu_1 = \frac{1}{1+|q|} \left( \sqrt{1+3q^2} - 2|q| \right) = 1 - \mathcal{O}(h),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1+|q|} \left( -\sqrt{1+3q^2} - 2|q| \right) = -1 - \mathcal{O}(h) < -1.$$

Entonces para  $C \neq 1$  la solución siempre tiene una contribución osculatoria  $\mu_2$  que crece con  $x = jh$ . (El efecto de error de redondeo causa que en la práctica, siempre  $C \neq 1$ ).

## 1.3. Métodos de pasos múltiples

Para

$$y_1^h - e^{\lambda h} = \mathcal{O}(h^4),$$

$j \leq N$  y  $Nh = x$  fijo esta contribución es sólo del orden  $\mathcal{O}(h^4)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , o sea el método es convergente del orden 4. Pero para la computación práctica uno no puede elegir  $h$  arbitrariamente pequeño, y la contribución oscilatoria es muy molesta.

Este efecto es común de todos los métodos de  $k$  pasos del orden  $k + 2$ .