Elementos Finitos – 521537
Cápsula 05 - Problemas variacionales para EDP (PARTE II)

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Contenidos

1. Los espacios $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ y $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$
2. Los espacios $L^2_0(\Omega)$ y $H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$
3. Problemas con frontera mixta

Sea $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$, recordemos la notación

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = \nabla\cdot\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u_i$$

Definición

Sea Ω un abierto limitado, introducimos el espacio

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega) := \left\{\mathbf{v}\in[L^2(\Omega)]^d : \nabla\cdot\mathbf{v}\in L^2(\Omega)\right\}$$

que dotamos con el producto interior

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{div},\Omega} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_{0,\Omega} + (\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{v})_{0,\Omega}$$

Proposición

$\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ es un espacio de Hilbert

Demostración: Similar a $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. (Ejercicio)

Teorema (integración por partes)

Sea $\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ entonces se satisface

$$(\nabla\cdot\mathbf{u}, v)_{0,\Omega} = -(\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega}\,, \forall v\in H_0^1(\Omega)\,.$$

Demostración: Sea $v\in H_0^1(\Omega)$, sabemos que existe $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\psi_n = v$, además, como $\partial_{x_i}u_i$ existe para cada $i=1,\ldots,d$, entonces se satiface

$$\int_\Omega \partial_{x_i} u_i(\mathbf{x})\,\psi_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega u_i(\mathbf{x})\,\partial_{x_i}\psi_n(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

al sumar sobre i y notar que $\nabla\cdot\mathbf{u}\in L^2(\Omega)$ obtenemos

$$(\nabla\cdot\mathbf{u},\psi_n)_{0,\Omega} = -(\mathbf{u},\nabla\psi_n)_{0,\Omega} \qquad (1)$$

podemos demostrar que (Ejercicio) $(\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega} = \lim\limits_{n\to\infty}(\nabla\cdot\mathbf{u},\psi_n)_{0,\Omega}$, y también $(\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega} = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathbf{u},\nabla\psi_n)_{0,\Omega}$. Luego, de (1)

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega} &= \lim_{n\to\infty}(\nabla\cdot\mathbf{u},\psi_n)_{0,\Omega}\\ &= -\lim_{n\to\infty}(\mathbf{u},\nabla\psi_n)_{0,\Omega}\\ &= -(\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega}\,. \quad \square\end{aligned}$$

<u>Construcción:</u> Consideremos la forma bilineal $T:\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definida por

$$T(\mathbf{u},v) = (\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega} + (\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega}\,,$$

es una forma bilineal continua, además para $\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$, $T(\mathbf{u},\cdot)|_{H_0^1(\Omega)} = 0$. En efecto, sean $\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ y $v\in H^1(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned}|T(\mathbf{u},v)| &\le \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}\,\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|\nabla\cdot\mathbf{u}\|_{0,\Omega}\,\|v\|_{0,\Omega}\\ &\le \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega}\\ &= 2\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

sea ahora $v\in H_0^1(\Omega)$, y usando i.p.p

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u},v) &= (\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega} + (\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega}\\ &= (\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega} - (\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega} = 0\,.\end{aligned}$$

Considere ahora $v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$ diferentes pero satisfaciendo $\gamma_0(v_1) = \gamma_0(v_2)$, luego $v_2 - v_1 \in H_0^1(\Omega)$, así

$$T(\mathbf{u}, v_2) - T(\mathbf{u}, v_1) = T(\mathbf{u}, v_2 - v_1) = 0$$

por lo tanto, $v \mapsto T(\mathbf{u}, v)$ actúa solo sobre $v|_\Gamma$. Defina $t : \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to \mathbb{R}$, a través de $t(\mathbf{u}, \mu) = T(\mathbf{u}, \tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu))$, con $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ y $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, note ahora

$$\begin{aligned} |t(\mathbf{u}, \mu)| &= |T(\mathbf{u}, \tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu))| \\ &\leq 2\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}\,\|\tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu))\|_{1,\Omega} \\ &= 2\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}\,\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \end{aligned}$$

luego, $t(\mathbf{u}, \cdot) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)' =: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Teorema (de la divergencia)

Sea Ω un abierto, limitado con frontera Lipchitz Γ y $\mathbf{u} \in [\mathcal{C}^1(\Omega)]^d$, entonces

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Gamma (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{n})(\mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Demostración: ver *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations*, F. Sayas, T.S. Brown M. E. Hassell. pág. 61.

Construcción: Sea $\mathbf{u} \in [\mathcal{C}^1(\Omega)]^d$ y $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$t(\mathbf{u}, \gamma_0(v)) = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{u}(x)\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \nabla\cdot(\mathbf{u}\,v)(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \int_\Gamma ((\gamma_0(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{n})\,\gamma_0(v))(\mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}s\\
&= (\gamma_0(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{n},\gamma_0(v))_{0,\Gamma}\,,
\end{aligned}
$$

esto justifica denotar por $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n}$ al funcional en $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definido a través de

$$\langle\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n},\mu\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = t(\mathbf{u},\mu)\,,$$

para cada $\mu\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Denotaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma := \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$, así

$$(\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega} = -(\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega}+\langle\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n},\gamma_0(v)\rangle_\Gamma\,.$$

Notemos ahora que $u\in H^2(\Omega)$ implica $\nabla u\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ y además es directo verificar que $\Delta u = \nabla\cdot(\nabla u)$, luego la expresión anterior se transforma en

$$(\Delta u,v)_{0,\Omega} = -(\nabla u,\nabla v)_{0,\Omega}+\langle\nabla u\cdot\boldsymbol{n},\gamma_0(v)\rangle_\Gamma\,.$$

Teorema (integración por partes)

Sean $\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$, $u\in H^2(\Omega)$ y $v\in H^1(\Omega)$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\mathbf{u},v)_{0,\Omega} &= -(\mathbf{u},\nabla v)_{0,\Omega}+\langle\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n},\gamma_0(v)\rangle_\Gamma\,,\\
(\Delta u,v)_{0,\Omega} &= -(\nabla u,\nabla v)_{0,\Omega}+\langle\nabla u\cdot\boldsymbol{n},\gamma_0(v)\rangle_\Gamma\,.
\end{aligned}
$$

<u>Demostración:</u> Por construcción previa. $\square$

Un problema de Neumann

Sea $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Considere la siguiente EDP: *Encontrar* $\psi \in H^2(\Omega)$ *tal que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\psi + \psi & = & f\,, \ \ en\ \Omega \\ -\nabla\psi \cdot \boldsymbol{n} & = & g\,, \ \ en\ \Gamma\,. \end{array} \right. \tag{2}$$

Sea $v \in H^1(\Omega)$, integrando por partes y usando la condicion de Neumann obtenemos

$$\begin{aligned} -(\Delta\psi, v)_{0,\Omega} &= (\nabla\psi, \nabla v)_{0,\Omega} - \langle \nabla\psi \cdot \boldsymbol{n}, \gamma_0(v)\rangle_\Gamma \\ &= (\nabla\psi, \nabla v)_{0,\Omega} + \langle g, \gamma_0(v)\rangle_\Gamma \end{aligned}$$

esto induce la definción del problema variacional:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$a(u,v) = F(v)\,, \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde definimos $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + (u,v)_{0,\Omega}$$

para cada u, $v \in H^1(\Omega)$ y $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$F(v) = (f,v)_{0,\Omega} - \langle g, \gamma_0(v)\rangle_\Gamma\,.$$

Sabemos que $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal y coerciva en $H^1(\Omega)$, por otro lado $F(\cdot)$ claramente es lineal, resta probar su continuidad.

Un problema de Neumann

Conocemos la continuidad del término $v \mapsto (f, v)_{0,\Omega}$, por lo tanto nos centraremos en probar la continuidad del término $v \mapsto \langle g, \gamma_0(v)\rangle_\Gamma$. Para ello formalizaremos una norma para $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a través de

$$\|\lambda\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} := \sup_{0\neq\mu\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{\langle \lambda, \mu\rangle_\Gamma}{\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma}}, \forall\, \lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Sea $v \in H^1(\Omega)$, usamos la definición de la norma $\|\cdot\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$ y la continuidad de $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, para obtener

$$\begin{aligned} |\langle g, \gamma_0(v)\rangle_\Gamma| &\leq \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \|\gamma_0(v)\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq C\, \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \|v\|_{1,\Omega}\,. \end{aligned}$$

Así el Teorema de Lax-Milgram asegura la existencia y unicidad de una solución débil $u \in H^1(\Omega)$ para el problema de Neumann (2).
Observación: Si asumimos $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (consecuencia de $u \in H^2(\Omega)$), tendremos que $-\nabla u \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ y $-\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = g$, por lo tanto la aplicación $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{n}$ es sobreyectiva i.e. podemos caracterizar $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n} : \mathbf{v} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)\}$.

Definición

Definimos el espacio

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \right\}$$

y además denotamos $\tilde{H}(\Omega) := H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$.

Teorema

$\tilde{H}(\Omega) \leq H^1(\Omega)$ y $(\tilde{H}(\Omega), (\cdot,\cdot)_{1,\Omega})$ es Hilbert.

Demostración: Ejercicio.

Corolario

$H^1(\Omega) = \tilde{H}(\Omega) \oplus \mathbb{P}^0(\Omega)$

Demostración: Ejercicio.

Teorema (desigualdad de Poincaré)

Sea Ω abierto, acotado, conectado y con frontera Lipchitz. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\,\|\nabla u\|_{0,\Omega}\,, \forall\, u \in \tilde{H}(\Omega)\,.$$

Demostración: Basta aplicar el Teorema de Deny-Lions para $f \in H^1(\Omega)'$ definida por $f(v) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ para obtener la existencia de $C > 0$ que satisface

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\,(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)|)\,, \forall u \in H^1(\Omega)\,,$$

como $f(u) = 0$ para todo $u \in \tilde{H}(\Omega)$, se obtiene lo desado. □

Otro problema de Neumann

Sea $f\in L^2(\Omega)$, $g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ que satisfacen la condición de compatibilidad $\langle g,1\rangle_\Gamma=(f,1)_{0,\Omega}$. Considere la siguiente EDP: *Encontrar* $\psi\in H^2(\Omega)\cap L^2_0(\Omega)$ *tal que*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta\psi & = & f\,,\ \textit{en}\ \Omega \\ -\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} & = & g\,,\ \textit{en}\ \Gamma\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

El problema anterior se puede representar variacionalmente como (integración por partes sobre $\tilde{H}(\Omega)$): *Encontrar* $u\in\tilde{H}(\Omega)$ *tal que*

$$(\nabla u,\nabla v)_{0,\Omega}=(f,v)_{0,\Omega}-\langle g,\gamma_0(v)\rangle_\Gamma \tag{4}$$

para todo $v\in\tilde{H}(\Omega)$.

Note que la forma bilineal definida por $\tilde{H}(\Omega)\times\tilde{H}(\Omega)\ni(u,v)\mapsto(\nabla u,\nabla v)_{0,\Omega}$, es coerciva, en efecto, sea $v\in\tilde{H}(\Omega)$, luego $(\nabla v,\nabla v)_{0,\Omega}=\|\nabla v\|^2_{0,\Omega}\geq\frac{1}{c_P^2}\|v\|^2_{1,\Omega}$.

El lado derecho del P.V. (4) está definido por una funcional lineal, asi el Tma. de L.M. asegura la existencia y unicidad de una solución débil para (3).

Ejercicio: Modifique (3) para buscar ψ en $H^2(\Omega)$ y muestre que la condición de compatibilidad es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de solución débil *excepto una constante aditiva*.

Sea Ω un abierto, acotado, conectado y con frontera Lipchitz Γ. Considere ahora $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ abierto respecto a Γ tal que $|\Gamma_D| > 0$ y definimos $\Gamma_N := \Gamma \setminus \overline{\Gamma_D}$, con esto podemos definir los espacios

$$H_D(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v)|_{\Gamma_D} = 0\},$$

podemos mostrar que $H_D(\Omega) \leq H^1(\Omega)$ (Ejercicio), luego $(H_D(\Omega), (\cdot,\cdot)_{1,\Omega})$ es un espacio de Hilbert. Definimos los espacios (Lions-Magenes)

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N) := \{\mu|_{\Gamma_N} : \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$$

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N) := \{\gamma_0(v)|_{\Gamma_N} : v \in H_D(\Omega)\},$$

note que $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N) \subseteq H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Además, podemos definir

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N) = \{\mu|_{\Gamma_N} : \mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

y se puede demostrar (fuera de los alcances del curso) que $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Con estas definiciones podemos escribir

$$\langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N}, \gamma_0(v)|_{\Gamma_N}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)} = \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}, v\rangle_\Gamma$$

para todo $\mathbf{v} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ y $v \in H_D(\Omega)$. Por simplicidad escribiremos

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_N} := \langle \cdot,\cdot\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)}.$$

Ejercicios

Sea $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$, $g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$, $\epsilon > 0$, $\sigma > 0$ $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ y $c \in \mathbb{R}$. Obtenga los desarrollos teóricos necesarios (ya discutidos en cátedra) para analizar la existencia, uncidad y estabilidad de solución débil para las siguientes EDP: *Encontrar* $\psi \in H^2(\Omega)$ *tal que*

$$\left\{\begin{aligned} -\epsilon\,\Delta\psi + \sigma\,\psi &= f\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &= 0\,, \text{ en } \Gamma_D \\ -\epsilon\,\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} &= g_N\,, \text{ en } \Gamma_N \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} -\epsilon\,\Delta\psi &= f\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &= 0\,, \text{ en } \Gamma_D \\ -\epsilon\,\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} &= g_N\,, \text{ en } \Gamma_N \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} -\epsilon\,\Delta\psi &= 0\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &= g_D\,, \text{ en } \Gamma_D \\ -\epsilon\,\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} &= g_N\,, \text{ en } \Gamma_N \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} -\epsilon\,\Delta\psi + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi &= 0\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &= 0\,, \text{ en } \Gamma_D \\ -\epsilon\,\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} &= g_N\,, \text{ en } \Gamma_N \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} -\epsilon\,\Delta\psi + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi &= 0\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &= 0\,, \text{ en } \Gamma_D \\ -\epsilon\,\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} + c\,\psi &= g_N\,, \text{ en } \Gamma_N\,. \end{aligned}\right.$$