Clase 13: Volumen de sólidos (método del anillo), Longitud de arco y Área de una superficie de revolución.

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Volumen de un sólido de revolución

Método del anillo (o capas cilíndricas)

Los métodos estudiados hasta ahora, no son muy eficientes para calcular el volumen de sólidos que se generan luego de una rotar una región entorno al eje Y.

El método que permitirá enfrentar este tipo de situaciones se conoce como **método del anillo (o capas cilíndricas)**.

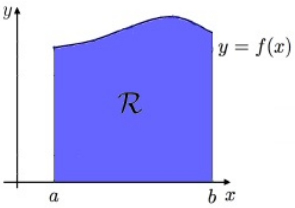
Volumen de un sólido de revolución

Método del anillo (o capas cilíndricas)

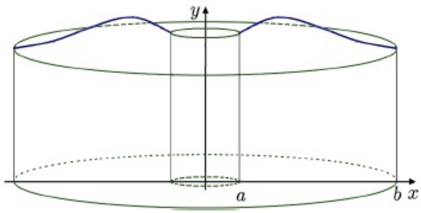
Teorema 13.1

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y no negativa. El sólido de revolución obtenido al girar entorno al eje Y la región acotada R limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X tiene volumen V dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$



$\Rightarrow$

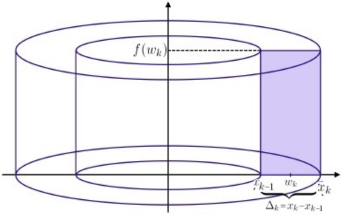


Método del anillo (o capas cilíndricas)

Demostración

Sea $P = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ partición de $[a, b]$ y sea $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ punto medio de este intervalo, es decir, $w_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

Se construye un rectángulo de base $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$ y altura $f(w_k)$. Luego al giralo entorno al eje Y se generan anillos cilíndricos, pero como $\triangle x_k$ es de tamaño pequeño estos anillos parecen *capas cilíndricas*.



Anillo circular de radio menor x_{k-1}, radio mayor x_k y altura $f(w_k)$.

Método del anillo (o capas cilíndricas)

Demostración

Luego, el volumen V_k de estas capas cilíndricas viene dado por:

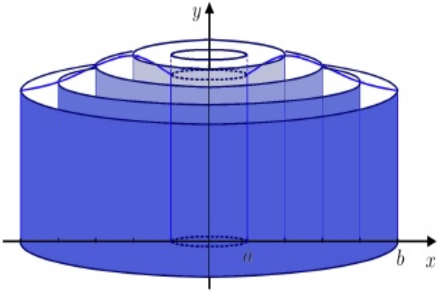
$$
\begin{aligned}
V_k &= \pi {x_k}^2 f(w_k) - \pi x_{k-1}^2 f(w_k) \\
&= \pi f(w_k)({x_k}^2 - x_{k-1}^2) \\
&= \pi f(w_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2\pi f(w_k)\frac{(x_k + x_{k-1})}{2}\triangle x_k \\
&= 2\pi w_k f(w_k)\triangle x_k
\end{aligned}
$$

Así,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi w_k f(w_k)\triangle x_k$$

Método del anillo (o capas cilíndricas)

Demostración

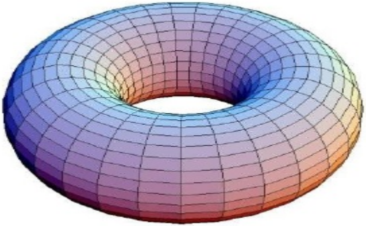


De donde sigue que

$$V = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi w_k f(w_k) \triangle x_k = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Método de las capas cilíndricas
Ejemplos

- Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar entorno al eje Y la región entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X.
- Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del círculo de ecuación $(x-5)^2 + y^2 = 4$, alrededor del eje Y.



Método de las capas cilíndricas

Caso general

Si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ con $x \in [a, b]$, entonces al girar la región R entre las gráficas de f y g alrededor del eje Y se genera un sólido de volumen

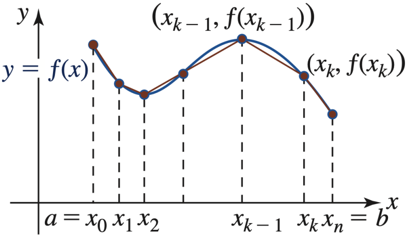
$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx$$

- Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y = x$ e $y = x^2$ alrededor del eje Y.
- Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 3$ la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Longitud de arco

Deducción de la fórmula

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y con derivada f' continua. Queremos determinar la longitud l de una curva C de ecuación $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$.



Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ partición de $[a, b]$ y construimos los segmentos cuyos extremos son los pares $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$, $\forall k = 1, ..., n$.

Longitud de arco

Deducción de la fórmula

Luego, la longitud de los segmentos l_k que une los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ es:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \; .$$

Por TVM existe $x_k{}^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k{}^*)(x_k - x_{k-1})$$

De donde sigue que

$$l_k = \sqrt{1 + f'(x_k{}^*)^2} \triangle x_k \; .$$

Entonces la longitud total de la curva es aproximadamente

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'({x_k}^*)^2} \triangle x_k$$

Por lo tanto, $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

Teorema 13.2

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, derivable en $[a, b[$ con derivada f' continua en $]a, b[$. La longitud l de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Longitud de arco

Ejemplos

- Considere la catenaria definida por

$$y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)$$

  con $x \in [-20, 20]$ y determine la longitud de la curva en el intervalo dado.
- Sea

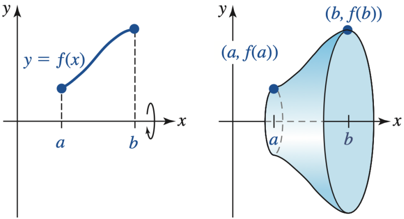
$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{8}x^2$$

  con $x \in [1, 2]$. Hallar la longitud de dicha curva.

Área de una superficie de revolución

Objetivo

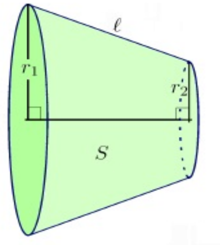
Hemos visto que el rotar una región limitada por la gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$, genera un sólido de revolución. En esta sección, tenemos interés en encontrar el área de la superficie correspondiente.



Área de una superficie de revolución

Preliminar

Con el fin de obtener una fórmula que nos permita calcular el área de estas superficies de revolución, recordamos que



el área de la superficie lateral curva de un cono circular recto truncado es

$$A(S) = l(r_1 + r_2)\pi \ .$$

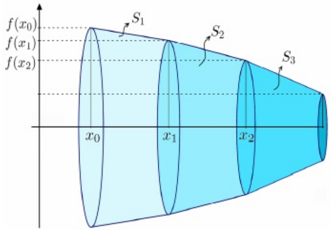
Área de una superficie de revolución

Deducción de la fórmula

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $f \geq 0$. Notar que al girar entorno al eje X la curva $y = f(x)$ ubicada entre las rectas $x = a$ y $x = b$ se obtiene una superficie de revolución.

Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ partición regular de $[a, b]$. Luego,

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \forall i = 1, ..., n$$



Área de una superficie de revolución

Deducción de la fórmula

Si consideramos el $k-$ésimo cono truncado correspondiente a los radios $r_1 = f(x_i)$ y $r_2 = f(x_{i-1})$, entonces su longitud lateral l_i asociada está dada por:

$$l_i = d((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Luego, por TVM obtenemos:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(w_i))^2(x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \triangle x_i$$

Asi, $A(S_i) = l_i(f(x_i) + f(x_{i-1})\pi$. De donde sigue que:

$$A \approx \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \triangle x_i$$

$$\approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \sqrt{1 + (f'(w_i))^2} \triangle x_i$$

Y usando la idea de aproximación de Riemann tenemos que:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Teorema 13.3

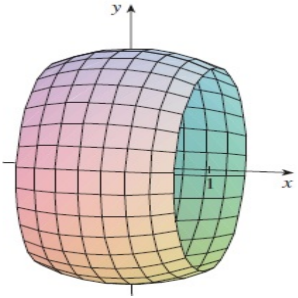
Sea f continua en $[a,b]$ con derivada f' continua en (a,b). Si S es la superficie de revolución obtenida al girar en torno al eje X la curva $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, entonces el área A de S es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\ .$$

Ejemplo 1

Área de una superficie de revolución

Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la región acotada por la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ con $x \in [-1, 1]$.

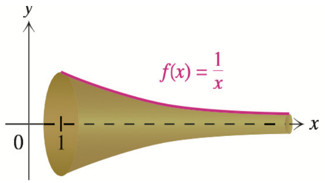


Ejemplo 2

Trompeta de Gabriel

Sean $f(x) = 1/x$, $b > 1$ y denotemos por D_b el sólido generado al girar entorno al eje X la región comprendida entre la gráfica de f y el eje X en $[1, b]$.

1. Denotando por V_b el volumen de D_b, muestre que $\lim\limits_{b \to +\infty} V_b = \pi$.
2. Si S_b es la superficie de D_b, demuestre que $\lim\limits_{b \to +\infty} S_b = +\infty$.



La superficie infinita que resulta cuando b se acerca a $+\infty$ se llama **Trompeta de Gabriel**.

.