Capitulo 1.

Resumen Certamen 1.

Proceso: Realidad física que conlleva un cambio de estado.

sistema: Una abstracción de una realidad física. (objetivos).

A un mismo proceso pueden asociarse variados sistemas.

Modelo: es una representación de un sistema

Clasificación de sistemas y Modelos.

Lineal: Cumplen con el principio de superposición (aditividad) y homogeneidad

No Lineal: No cumplen con el principio de superposición (aditividad) u homogeneidad

Si es lineal, la ecuación diferencial tiene sus derivadas con máxima potencia de 1 y no existen términos en donde haya productos entre la función desconocida y/o sus derivadas.

Continuos: sistemas cuyas variables independientes son continuas.

Discretos: sistema cuyas variables independientes son discretas.

Estático: Las entradas son fijas, no producen variación temporal

Dinámico: sistemas que están en evolución temporal

Causales: salida en consecuencia del valor actual y pasado de la entrada.

No causal: Salida es consecuencia del valor futuro de la entrada.

Tiempo invariante: Parámetros no cambian con el tiempo.

Tiempo variante: Parámetros cambian con el tiempo.

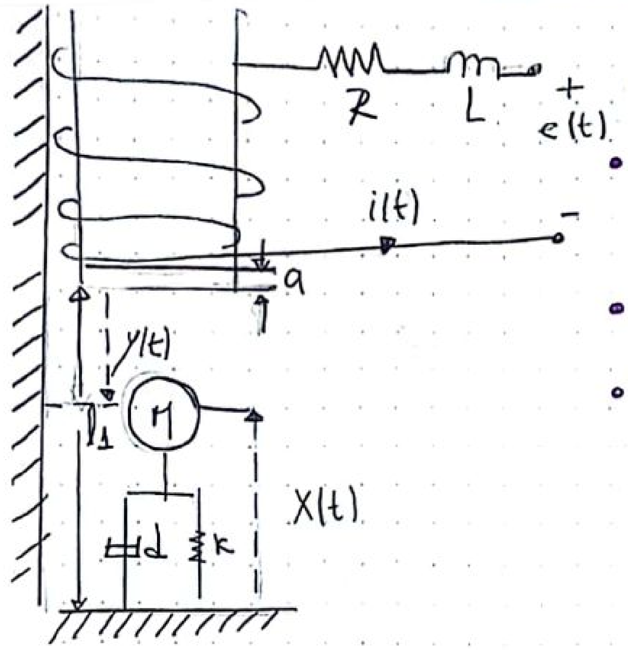
Concentrados: Parametros son independientes de su ubicación espacial.

Distribuidos: Parámetros dependen de la ubicación espacial

Ejercicio 1: Considere el sistema de un levitador magnético. el cual tiene por objetivo sostener una bola de acero a una distancia desde el suelo.

Identifique los parámetros, entradas, perturbaciones, salidas y variables de estado.

- Parte electrica del sistema $e(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$
- Parte mecanica del sistema : $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = -Mg + \dfrac{k\,i(t)^2}{l_1 - x + a} + k(l_0 - x) - d\dfrac{dx}{dt}$.



- Parametros: (constantes) R, L, M, k, d.
- Variables de entrada: (elementos externos) $e(t)$
- Variables de salida: (objetivo) $x(t)$.
- Variables de estado: (tienen derivados) $i(t), x(t), \frac{dx(t)}{dt} = v(t)$.

Ejercicio ②: Indique si el sistema descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)\frac{dy(t)}{dt} = u(t+5)$$

- No lineal
- No causal
- No tiene parametros entonces no es variante en el tiempo.

Modelo fenomenológicos: se obtienen mediante la aplicación de leyes.

Modelos empiricos: se determinan de la observación directa de los resultados.

Principios básicos de modelación de sistemas.

Ecuaciones de Estado.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ep$$
$$y = Cx + Du + Fp.$$

x = vector de los variables de estado.

u = vector de variables de entrada.

p = vector de perturbaciones.

$\dot{x}$ = vector de los primeros derivados de los variables de estado.

y = vector de variables de salida (según el objetivo)

Ejercicio ③: $e(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + V_c(t)$

$$i(t) = C\,\frac{dV_c(t)}{dt}$$

Variables de estado (las que tienen derivada) son $i(t)$, $V_c(t)$

$x_1(t) = V_c(t)$, $x_2(t) = i(t)$; $u = e(t)$; $y(t) = V_c(t)$

Reemplazamos en las ecuaciones

$$u(t) - R\,x_2(t) + L\,\dot{x}_2(t) + x_1(t)$$

$$x_2(t) = C\,\dot{x}_1(t)$$

$\Rightarrow$ Despejamos $\dot{x}_2(t)$ de la primera ecuación

$$\frac{u(t)}{L} - \frac{R\,x_2(t)}{L} - \frac{x_1(t)}{L} = \dot{x}_2(t)$$

Análogo con la segunda ecuación

$$\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t)}{C}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ep \quad ; \quad y = Cx + Du + Fp$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio ④: Para el sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0.3u(t)$$

Encuentre la representación en espacio de estados para un sistema con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \frac{dy(t)}{dt}.$$

$$x_1 = y(t) \quad ; \quad x_2 = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dy(t)}{dt} \quad , \quad \dot{x}_2 = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Reemplazamos en la ecuación original

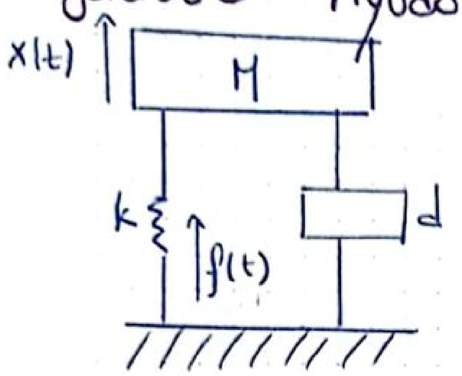
$$\dot{x}_2(t) + 3x_2(t) + 2x_1(t) = 0.3u(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0.3u(t) - 3x_2(t) - 2x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5: Ayudantia 1



$$\sum f(t) = m\, a(t)$$

$$M\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t) - d\dot{x}(t)$$

a) Defina cuales son las variables de entrada, de salida, de estado, perturbaciones y parámetros.

Variables de entrada $f(t)$

Variable de salida: $x(t)$, $\dot{x}(t)$, etc.

Variables de estado: $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

Perturbaciones: No hay.

Parametros: M, k, d.

b) Escriba las ecuaciones del sistema en variables de estado. tal que $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ep$; $y = Cx + Du + Fp$.

$x_1 = x(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}(t)$; $u = f(t)$; $y = x(t)$

$x_2 = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}(t)$

Reemplazamos en las ecuaciones

$$\sum u(t) = m\, a(t)$$

$$M\dot{x}_2(t) = u(t) - kx_1(t) - d\,x_2(t)$$

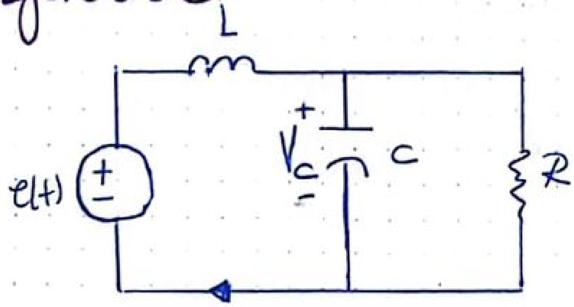
$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{u(t)}{M} - \frac{k}{M}x_1(t) - \frac{d}{M}x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/M & -d/M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/M\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

(c) ¿Es el sistema lineal o no lineal? Lineal
¿Continuo o discreto? Continuo
¿Dinamico o estatico? Dinámico.
¿Tiempo invariante o variante? Invariante.
¿Parametros concentrados o distribuidos? Concentrados.
¿Causal o no causal? Causal

Ejercicio (6):



$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t)$$
$$i(t) = C\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{R}V_c$$

(a) Defina las variables de entrada, salida, variables de estado, perturbaciones y parametros.
Variables de entrada: $e(t)$
Variables de salida: V_c
Perturbaciones: no hay
Variables de estado: $i(t)$, $V_c(t)$
Parametros: C, L, R

(b) Escriba las ecuaciones del sistema en variables de estado tal que $\dot{x}(t) = Ax + Bu + Ep$ y $y(t) = Cx + Du + Fp$.
$x_1(t) = V_c(t)$, $x_2(t) = i(t)$
$\dot{x}_1(t) = \frac{dV_c(t)}{dt}$; $\dot{x}_2(t) = \frac{di(t)}{dt}$; $u(t) = e(t)$; $y = V_c(t)$
Reemplazamos en las ecuaciones
$u(t) = L\dot{x}_2(t) + x_1(t)$
$x_2(t) = C\dot{x}_1(t) + \frac{1}{R}x_1(t)$

Escaneado con CamScanner

Despejamos $\dot{x}_2(t)$ de la ecuación 1.

$$\frac{u(t)}{L} - \frac{x_1(t)}{L} = \dot{x}_2(t)$$

Analogo con $\dot{x}_1(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t)}{C} - \frac{1}{RC} x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

c) ¿Es el sistema lineal o no lineal? Lineal

¿Continuo o discreto? Continuo

¿Dinamico o estatico?. Dinamico.

¿Variante o invariante? Invariante

¿Parámetros concentrados o distribuidos? Concentrado.

¿Causal no causal? Causal.

Transformaciones de similitud en Ecuaciones de estado.

Representan un cambio de coordenadas de las variables de estado originales x, por las variables de estado z tal que $z = Tx$. Luego

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ep \quad , \quad y = Cx + Du + Fp$$

$$T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z + Bu + Ep \quad ; \quad y = CT^{-1}z + Du + Fp$$

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu + TEp \quad ; \quad y = TCT^{-1}z + TDu + TFp$$

Escaneado con CamScanner

Lineolización:

Serie de Taylor en una dimensión en torno al punto x_0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^n$$

$$= f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \cdots$$

Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ $\quad y = Cx.$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

La aproximación de serie de Taylor de primer orden es válida si x_0 es punto de operación del sistema ($\dot{x}_0 = f(x_0) = 0$)
Luego se obtiene el sistema lineal

$$\dot{x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x = \Delta x$$

Para el caso general $\dot{x} = Ax + Bu + Ep$, $y = Cx + Du + Fp$.

Definiendo $\dot{x} = f(x,u,p)$, $y = h(x,u,p)$ se cumple.

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u + E\Delta p \quad , \quad \Delta y = C\Delta x + D\Delta u + F\Delta p.$$

donde:

$$A = \left. \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} , \quad B = \left. \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} , \quad E = \left. \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial p} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}}$$

$$C = \left. \frac{\partial h(x,u,p)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} , \quad D = \left. \frac{\partial h(x,u,p)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} , \quad F = \left. \frac{\partial h(x,u,p)}{\partial p} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}}$$

- El punto de operación (x_0, u_0, p_0, y_0) del sistema satisface $0 = f(x_0, y_0, p_0)$
- Al darnos valores para u_0 y p_0 se determina x_0.
- Los valores de y_0 se determinan de $y_0 = h(x_0, u_0, p_0)$

Ejercicio ⑦: Ejemplo linealizar el sistema de un estanque cilíndrico descrito por:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A_w} f_e(t) - \frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh(t)}$$

Donde:

$h(t)$: altura (nivel) del líquido en el estanque

$f_e(t)$: flujo de entrada al estanque.

A_w: area superior

A_h: apertura inferior.

Capitulo 2:

Perturbaciones: Variables que actuan desde el exterior y no son manejables

Las variables en sistemas son señales que evolucionan de acuerdo a la entrada

Señal: Representa la evolución de una magnitud de un proceso.

Soporte D: D es el soporte de $f(t)$ si $\{t \in D : f(t) \neq 0\}$.

$f(t)$ es de soporte positivo si: $\{t \in \mathbb{R}^+ : f(t) \neq 0\}$

$f(t)$ es de soporte negativo si $\{t \in \mathbb{R}^- : f(t) \neq 0\}$

$f(t)$ es de soporte compacto si tiene soporte en un rango determinado.

La señal $x_p(t)$ es par si $x_p(t) = x_p(-t)$

La señal $x_i(t)$ es impar si $x_i(t) = -x_i(-t)$

Simetria: Toda señal puede ser descompuesta en una señal par $x_p(t)$ y una impar $x_i(t)$.

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ donde $x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$; $x_i(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

Ejercicio ⑧: Determine la componente par e impar de la señal.
$x(t) = u(t)$

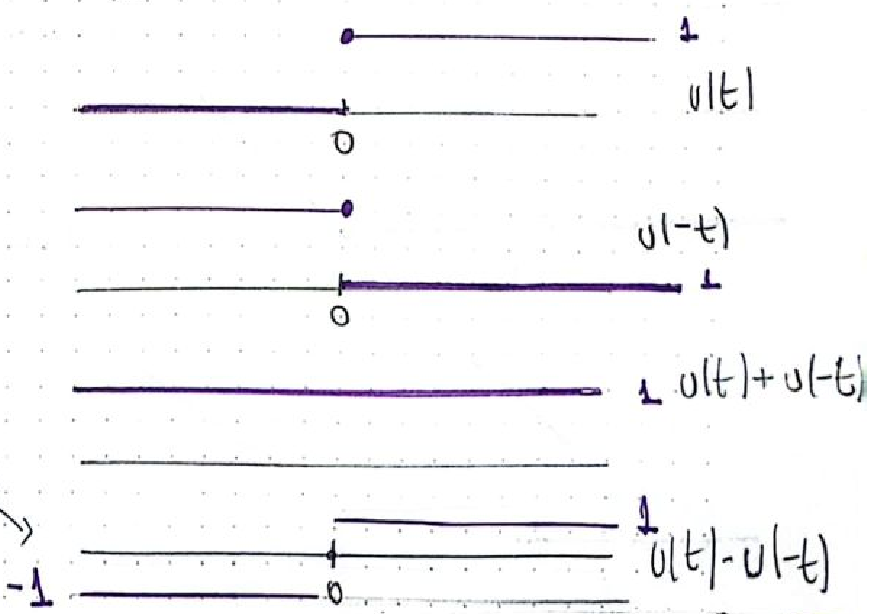
$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[u(t) + u(-t)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(1)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(-t) = \begin{cases} 1 & -t \geq 0 \\ 0 & -t < 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} t < 0 \\ t \geq 0 \end{matrix}$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left[u(t) - u(-t)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \text{ signo } t$$

función signo



Señal impulso: Función de valor no nulo en $t=0$ y area unitaria.

$$\boxed{\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}} \quad ; \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1.}$$

Señal escalón.

$$\boxed{u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}} \quad ; \quad \boxed{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt.}$$

Señal rampa:

$$\boxed{r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}} \quad ; \quad \boxed{r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)\,dt} \quad \boxed{;\ r(t)=t\,u(t).}$$

Exponencial: $f(t)=e^{(-a+jb)t}$. * Con $b=0$ se obtiene la exponencial real

- $a>0$ exponencial decreciente
- $a<0$ exponencial creciente.

* con $b\neq 0$ $\quad e^{(-a+jb)t}=e^{-at}\,e^{jbt}=-a^{t}(\cos bt+j\,\mathrm{sen}\,bt)$

modulo es e^{-at} y fase bt.

Sinosoidal: $f(t)=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)=A\,\mathrm{sen}(2\pi f t+\phi)$ $\quad \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$

ϕ fase.

Ejercicio ⑨: Grafique la señal $f(t)=u(t)+u(t-5)\,r(t-5)$. Obtenga su parte par e impar.

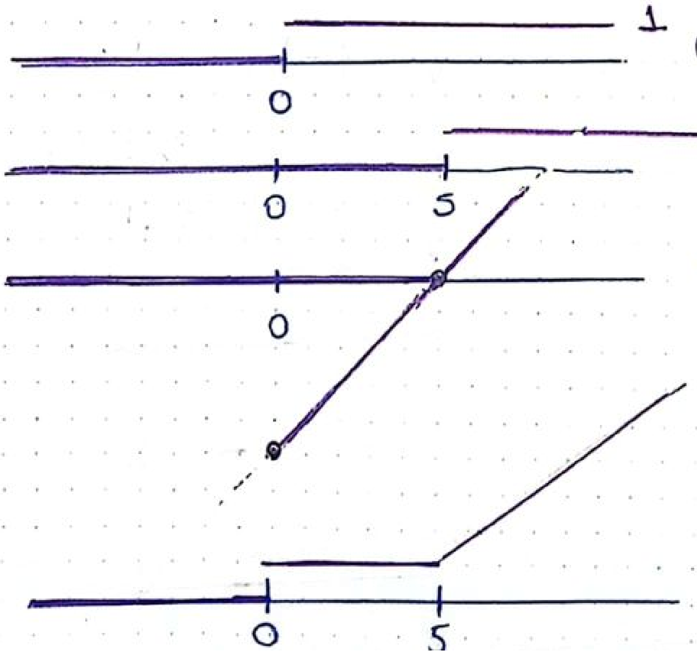
$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$; $u(t-5)=\begin{cases}1 & t-5\geq 0 \ ;\ t\geq 5\\ 0 & t-5<0 \ ;\ t<5\end{cases}$

$r(t-5)=\begin{cases}t-5 & t-5\geq 0 \ ;\ t\geq 5\\ 0 & t-5<0 \ ;\ t<5.\end{cases}$

$(5,0)$

$y=t-5 \quad y=0 \Rightarrow 0=t-5 \Rightarrow t=5$

$y=t-5 \quad t=0 \Rightarrow y=-5 \quad (0,-5)$



$u(t)$

$u(t-5)$ $\quad y=t-4 \quad y=0 \Rightarrow t=4 \quad (4,0)$

$r(t-5)$ $\quad t=0 \Rightarrow y=-4 \quad (0,-4)$

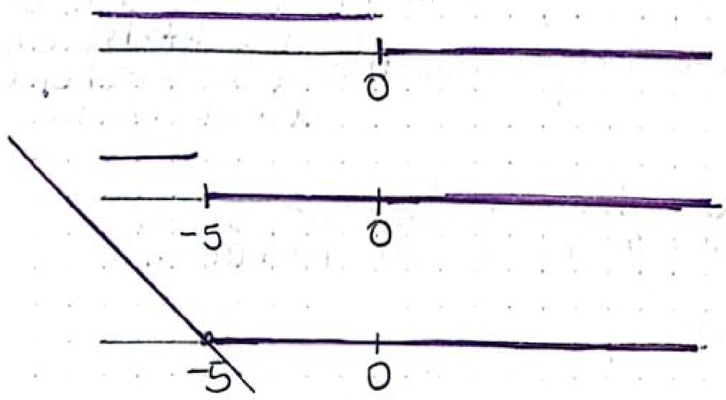
$$f(t)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0\leq x<5\\ t-5+1 & 5\leq x\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0\leq x<5\\ t-4 & x\geq 5\end{cases}$$

$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$ parte par

$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$ parte impar.

$\Rightarrow f(t) = u(t) + u(t-5)\,r(t-5)$

$y\ f(-t) = u(-t) + u(-t-5)\,r(-t-5)$.



$$u(-t) = \begin{cases} 1 & -t \geq 0 \ ; \quad t < 0 \\ 0 & -t < 0 \ , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

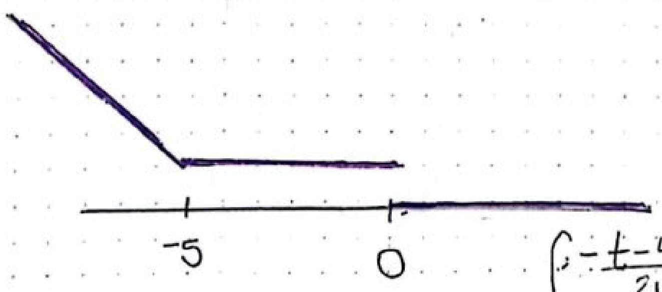
$$u(-t-5) = \begin{cases} 1 & -t-5 \geq 0 \ ; \quad t \leq -5 \\ 0 & -t-5 < 0 \ , \quad t > -5 \end{cases}$$

$$r(-t-5) = \begin{cases} -t-5 & -t-5 \geq 0 \ , \quad t \leq -5 \\ 0 & -t-5 < 0 \ , \quad t > -5 \end{cases}$$

$y = -t-5 \Rightarrow y = 0 \ ; \ t = -5 \quad (-5, 0)$

$t = 0 \Rightarrow y = -5 \quad (0, -5)$

$$f(-t) = \begin{cases} -t-4 & t < -5 \\ 1 & -5 \leq t < 0 \\ 0 & t \geq -5 \end{cases}$$



$$f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = \begin{cases} \frac{t+4}{2} & t \leq -5 \\ -1/2 & -5 \leq t < 0 \\ 1/2 & 0 \leq t < 5 \\ \frac{t-4}{2} & t \geq 5 \end{cases}$$

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \begin{cases} \frac{-t-4}{2} & t < -5 \\ 1/2 & 5 \leq t < 0 \\ 1/2 & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{t-4}{2} & t \geq 5 \end{cases}$$

Transformaciones simples:

Forma general $f(t) \rightarrow g(t) = \alpha f(at+b) + \beta$.

Sobre una variable dependiente: si $a=1$, $b=0$.

$f(t) \rightarrow g(t) = \alpha f(t) + \beta$.

- $|\alpha| > 1$ Amplificación
- $|\alpha| < 1$ Atenuación
- $\alpha = 0$ Anulación
- $\beta > 0$ Corriendo hacia arriba
- $\beta < 0$ Corriendo hacia abajo.

Caso particular: Normalizando (entre 0 y 1)
Se cumple:

$$\alpha = \frac{1}{\max\{f(t)\} - \min\{f(t)\}} \qquad \beta = \frac{-\min\{f(t)\}}{\max\{f(t)\} - \min\{f(t)\}}$$

Sobre una variable independiente: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

$f(t) \rightarrow g(t) = f(at+b)$

- $|a| < 1$ Dilatación
- $|a| > 1$ Compresión
- $b > 0$ Desplazamiento a la izq con $a > 0$, a la derecha con $a < 0$
- $b < 0$ Desplazamiento a la derecha con $a > 0$, a la izq con $a < 0$.

Ejercicio 10: Para el problema de la población de conejos se encuentra que la ecuación que rige su crecimiento está dada por:

$$y(KT+2T) - y(KT+T) - y(KT) = u(KT)$$

Determine una representación en variable de estado tal que:

$$x(KT+T) = Ax(KT) + Bu(KT) \quad ; \quad y(KT) = Cx(KT) + Du(KT)$$

con $x_1(KT) = y(KT)$; $x_2(KT) = y(KT+T)$.

$$\dot{x}_1(KT) = y(KT+T) \quad , \quad \dot{x}_2(KT) = y(KT+2T)$$

Reescribimos la ecuación

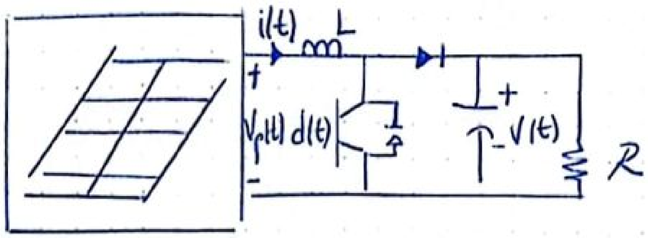
$$\dot{x}_2(KT) - x_2(KT) - x_1(KT) = u(KT)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(KT) \\ \dot{x}_2(KT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(KT) \\ x_2(KT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(KT)$$

$$x(KT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(KT) \\ x_2(KT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(KT)$$

$$y(KT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(KT) \\ x_2(KT) \end{bmatrix}$$

Ejercicio (11):



$$V_p\, v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + (1-d(t))\,V(t)$$

$$(1-d(t))\,i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$

$V_p v(t)$ depende de las condiciones ambientales y $d(t)$ controla el voltaje $v(t)$ de salida

ⓒ Determine el modelo en variables de estado tal que

$$\dot{X}(t) = f(x,u,p) \qquad y = h(x,u,p)$$

con $x_1 = v(t)$; $x_2 = i(t)$, $u(t) = dt$ y $p(t) = V_p\, v(t)$.

Reescribimos las ecuaciones como sigue:

$$p(t) = L\,\dot{x}_2(t) + (1-u(t))\,x_1$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{p(t)}{L} - \frac{(1-u(t))}{L}x_1$$

$$(1-u(t))\,x_2(t) = C\,\dot{x}_1(t) + \frac{x_1}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = -\frac{x_1}{RC} + \frac{(1-u(t))}{C}x_2(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

$$\dot{X} = f(x,u,p)$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} +\frac{(1-u(t))x_2(t)}{C} - \frac{x_1}{RC} \\ \frac{p(t)}{L} - \frac{(1-u(t))}{L}x_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} f_1(x,u,p) \\ f_2(x,u,p) \end{array}$$

ⓑ Encuentre el punto de operaciones considerando $u_0 = 0.5$, $p_0 = 6$
$L = 5 \cdot 10^{-3}$, $C = 200 \cdot 10^{-6}$; $R = 12$.

El punto de operación (x_0, u_0, p_0, y_0) del sistema satisface
$0 = f(x_0, u_0, p_0)$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1-u(t))}{C} x_2(t) - \frac{x_1(t)}{CR} \quad ; \quad \dot{x}_2(t) = \frac{p(t)}{L} - \frac{1-u(t)}{L} x_1(t).$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{(1-0.5) x_{20}}{200 \cdot 10^{-6}} & \frac{-x_{10}}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 12} \\ \frac{6}{5 \cdot 10^{-3}} & -\frac{(1-0.5) x_{10}}{5 \cdot 10^{-3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones se obtiene que.
$x_{10} = 12$ y $x_{20} = 2$.

ⓒ Linealice el modelo de a) considerando el punto de operación de b). y encuentre las matrices de la representación lineal:

$$A = \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{-1}{CR} & \frac{1-u(t)}{C} \\ -\frac{(1-u(t))}{L} & 0 \end{bmatrix}\right|_{\substack{x_0 \\ u_0 \\ p_0}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{CR} & \frac{1-u_0}{C} \\ -\frac{(1-u_0)}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \frac{-x_{20}}{C} \\ \frac{x_{10}}{L} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x_0 \\ u_0 \\ p_0}}$$

$$E = \frac{\partial f(x,u,p)}{\partial p} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x_0 \\ u_0 \\ p_0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$y(t) = x_1(t)$ $\quad\quad$ $y(t) = h(x, u, p)$

$$C = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right]\Bigg|_{\substack{x_0\\u_0\\p_0}} = [1 \; 0]$$

$$D = \left[\frac{\partial h_1}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{x_0\\u_0\\p_0}} = [0]$$

$$F = \left[\frac{\partial h_1}{\partial p}\right]\Bigg|_{\substack{x_0\\u_0\\p_0}} = [0].$$

Ejercicio (13). Dada la señal

$x(t) = u(t-1) + r(t-3) - r(t-5) - 2u(t-5) - r(t-7) + r(t-8)$

se pide graficar $x(t/2+5)$.

$$u(t-1) = \begin{cases} 1 & t-1 \geq 0, \; t \geq 1 \\ 0 & t-1 < 0; \; t < 1 \end{cases}$$

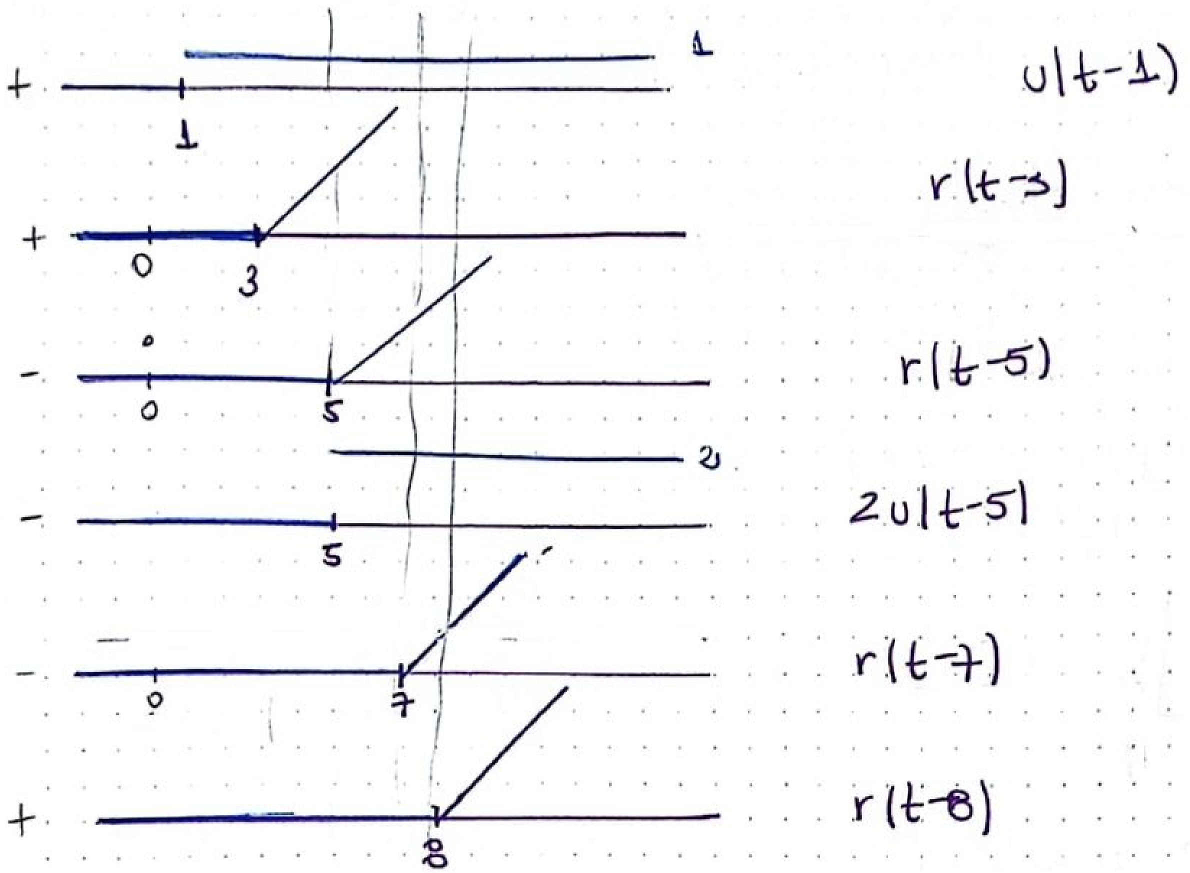
$$r(t-3) = \begin{cases} t-3 & t-3 \geq 0; \; t \geq 3 \\ 0 & t-3 < 0; \; t < 3 \end{cases}$$

$$r(t-5) = \begin{cases} t-5 & t-5 \geq 0; \; t \geq 5 \\ 0 & t-5 < 0; \; t < 5 \end{cases}$$

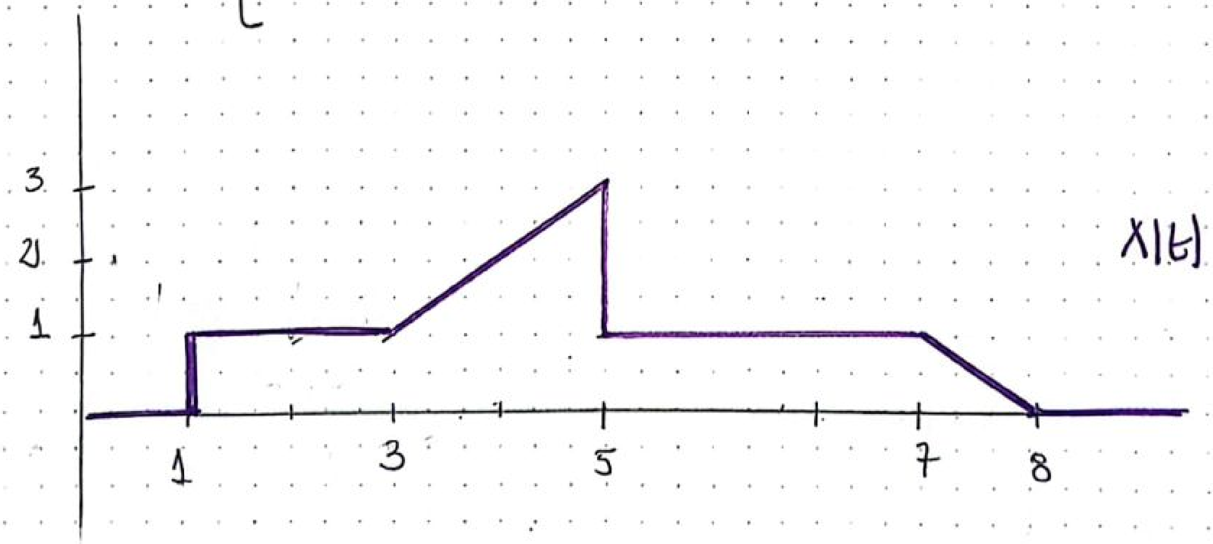
$$2u(t-5) = \begin{cases} 2 & t-5 \geq 0, \; t \geq 5 \\ 0 & t-5 < 0; \; t < 5. \end{cases}$$

$$r(t-7) = \begin{cases} t-7 & t-7 \geq 0, \; t \geq 7 \\ 0 & t-7 < 0; \; t < 7. \end{cases}$$

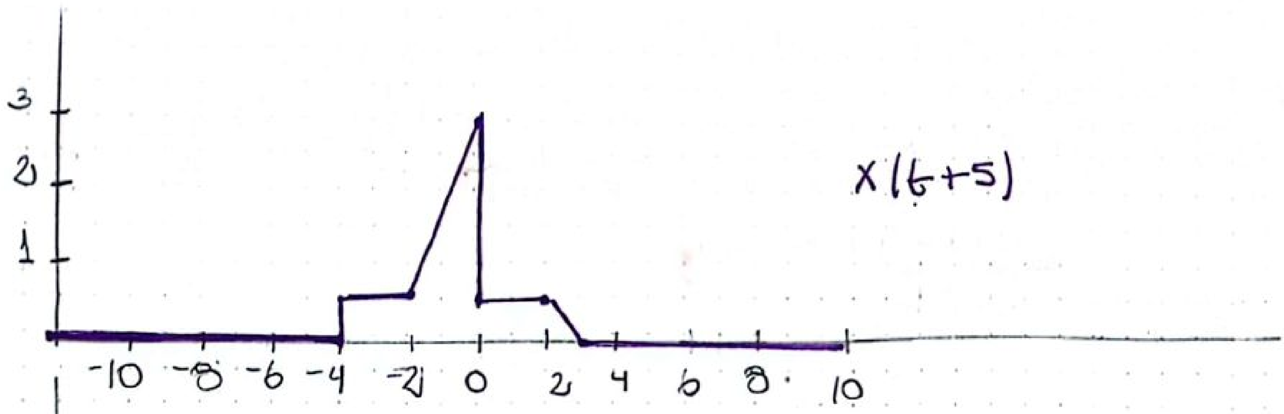
$$r(t-8) = \begin{cases} t-8 & t-8 \geq 0; \; t \geq 8 \\ 0 & t-8 < 0; \; t < 8 \end{cases}$$



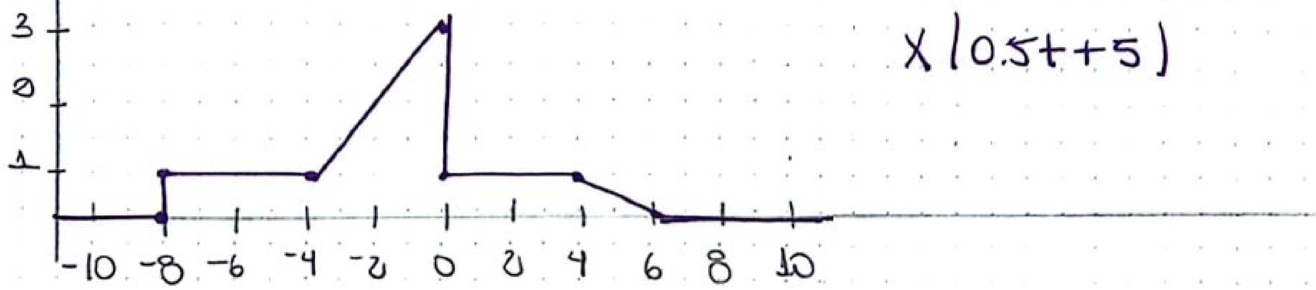
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1 & 1\le t<3 \\ 1+t-3 = t-2 & 3\le t<5 \\ 1+(t-3)-(t-5)-2 = 1 & 5\le t<7 \\ 1+(t-3)-[t-5]-2-[t-7] = -t+8 & 7\le t<8 \\ 1+(t-3)-[t-5]-2-[t-7]+[t-8] = 0 & t\ge 8 \end{cases}$$



Escaneado con CamScanner

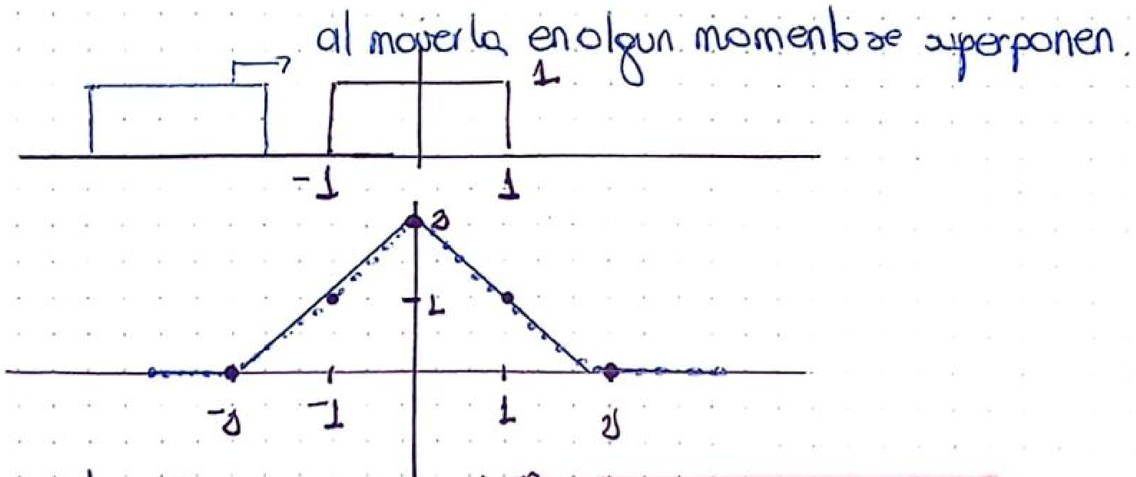


$x(t+5)$



$x(0.5t+5)$

Visualizando la convolución en señales continuas.



Convolución: $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,dt = h(t)$

Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen soporte positivo $f(t)*g(t)=\int_{0}^{t} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

Propiedades de la convolución:

Conmutatividad: $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$.

Distributividad c/r a la suma: $f(t)*[g(t)+h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$.

Asociatividad $f(t)*[g(t)*h(t)]=[f(t)*g(t)]*h(t)$.

Convolución con el impulso: $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

Convolución con el escalón: $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$.

Importancia de la convolución (y de entrada impulso)

Si se conoce su salida a entrada impulso $\delta(t)$ la cual llamaremos $h(t)$, entonces se puede conocer la salida $y(t)$ del sistema a cualquier entrada arbitraria $u(t)$ mediante

$$\boxed{y(t) = h(t) * u(t)}$$

Análogo caso discreto.