UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la 1^{ra} Evaluación Recuperativa, E.D. II (525222), 2024-2

PROBLEMA 1. [10 puntos]

1. Sea $a > 0$. Determine la serie de Fourier de la función 2π-periódica definida por
$$f(t) = \sinh(at) \quad , \quad -\pi \le t < \pi \ .$$
Muestre que esta serie converge puntualmente y que su suma es igual a $f(t)$ para todo $t \in]-\pi, \pi[$.
¿ La serie converge uniformemente ? Justifique su respuesta.

2. Determine el valor de la suma $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)}{a^2 + (2m+1)^2}$.

Desarrollo: 1. Visto que $\sinh(at) = (\mathrm{e}^{at} + \mathrm{e}^{-at})/2$ es una suma de exponenciales, es más conveniente determinar los coeficientes de Fourier complejos c_n (ver Listado de ejercicios 2, Problema 5). Se tiene para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi} \int_{\pi}^{\pi} \Big(\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}n)t} - \mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}n)t} \Big) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}n)t}}{a - \mathrm{i}n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}n)t}}{-a - \mathrm{i}n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{(-1)^n}{4\pi} \big(\mathrm{e}^{a\pi} - \mathrm{e}^{-a\pi} \big) \left(\frac{1}{a - \mathrm{i}n} + \frac{1}{-a - \mathrm{i}n} \right) \\ &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n\, \mathrm{i}n}{a^2 + n^2} \ , \end{aligned}$$

donde usamos $\mathrm{e}^{(\pm a - \mathrm{i}n)t} = \mathrm{e}^{\pm at} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$ y $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}n\pi} = (-1)^n$ en la tercera igualdad. Así, la serie de Fourier de f esta dada por

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n\, \mathrm{i}n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{a^2 + n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \mathrm{i}n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{a^2 + n^2} \right) \\ &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \mathrm{i}n}{a^2 + n^2} \big(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \big) = -\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{a^2 + n^2} \sin(nt) \ . \end{aligned}$$

Notese que la serie es una serie de senos debido a la imparidad de f.

La serie de Fourier converge puntualmente y $S_f(t) = f(t)$ para todo $t \in]-\pi, \pi[$ por el (corrolario del) teorema de Dirichlet, ya que f es 2π-periódica, continua en $[-\pi, \pi]$, derivable en $]-\pi, \pi[$ y de derivada $f'(t) = a\cosh(at)$ CPT en $[-\pi, \pi]$.
Nota: Para $t = \pi$, el teorema de Dirichlet nos dice que $S_f(\pi) = (f(\pi-) + f(\pi+))/2 = 0$. Visto que f no es continua en $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deducimos que la serie de Fourier de f no converge uniformemente. **[8 puntos]**

2. Tomando $t = \pi/2$, sigue de la pregunta anterior que

$$f(\pi/2) = \sinh(a\pi/2) = S_f(\pi/2) = -\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2m+1}(2m+1)}{a^2+(2m+1)^2}(-1)^m$$

donde usamos

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = 2m+1 \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n = 2m \text{ es par.} \end{cases}$$

Por ende

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)}{a^2+(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\sinh(\pi a/2)}{\sinh(\pi a)} = \pi\coth(\pi a/2)\ .$$

[2 puntos]

PROBLEMA 2. [20 puntos]
Sea $a_2 \geq 0$ y $b_2 \geq 0$, $(a_2, b_2) \neq (0,0)$.

1. Muestre que los valores propios λ_n del problema de Sturm-Liouville

$$\text{(PSL)} \quad \begin{cases} x^2u''(x) + xu'(x) + \lambda u(x) = 0\ ,\ 1 < x < e \\ u'(1) = 0 \\ a_2u(e) + b_2u'(e) = 0 \end{cases}$$

   satisfacen $\lambda_n \geq 0$ y son soluciones de la ecuación

$$a_2\,\mathrm{e}\,\cos(\sqrt{\lambda}) = b_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})\ .$$

2. Determine las funciones propias de (PSL) asociadas a los λ_n.

3. Determine explicitamente los λ_n cuando (i) $b_2 = 0$ (ii) $a_2 = 0$.
   Proponga un método geométrico para determinar valores aproximados de λ_n si $a_2 > 0$, $b_2 > 0$.

Desarrollo: 1. (PSL) tiene una EDO del tipo Euler-Cauchy, la cual se resuelve mediante el cambio de variables $x = \mathrm{e}^s$ (ver curso de EDO). Sea $v(s) = u(\mathrm{e}^s)$. Luego

$$v'(s) = \mathrm{e}^s u'(\mathrm{e}^s) = xu'(x) \quad , \quad v''(s) = \mathrm{e}^{2s}u''(\mathrm{e}^s) + \mathrm{e}^s u'(\mathrm{e}^s) = x^2u''(x) + xu'(x)\ .$$

Así, (PSL) se re-escribe para $v(s)$ como

$$\text{(PSL2)} \quad \begin{cases} v''(s) + \lambda v(s) = 0\ ,\ 0 < s < 1 \\ v'(0) = 0 \\ a_2\,\mathrm{e}\,v(1) + b_2v'(1) = 0\ . \end{cases}$$

El factor e en la segunda condición de frontera proviene de $u'(e) = v'(1)/\mathrm{e}^1$.

- Si $\lambda < 0$, la solución general de (PSL2) es $v(s) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,s} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,s}$. Por la primera CF se tiene $\sqrt{-\lambda}(A-B) = 0$, por tanto $A = B$. La segunda CF implica

$$A\big(a_2\,\mathrm{e}\,\cosh(\sqrt{-\lambda}) + b_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda})\big) = 0\ .$$

  Como los factores multiplicando a_2 y b_2 son estrictamente positivos y por hipótesis $a_2 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ y $(a_2, b_2) \neq (0,0)$, sigue que el número entre parenteses es estrictamente positivo. Por lo tanto $A = 0 \Rightarrow$ (PSL2) y luego (PSL) solamente tiene la solución trivial. **[4 puntos]**

- Si $\lambda = 0$, la solución general de la EDO es $v(s) = As + B$. Por la primera CF, $A = 0$. Si $a_2 > 0$, se deduce de la segunda CF que $B = 0$, por tanto (PSL2) solamente tiene la solución trivial. Si $a_2 = 0$, (PSL2) tiene una solución constante $v(s) = B$. En este caso $\lambda = 0$ es un valor propio, asociado a funciones propias constantes. **[3 puntos]**

- Si $\lambda > 0$, la solución general de (PSL2) es $v(s) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,s) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,s)$. Por la primera CF se tiene $B = 0$. Se deduce de la segunda CF que

$$A\big(a_2\,\mathrm{e}\,\cos(\sqrt{\lambda}) - b_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})\big) = 0\ .$$

  Así, (PSL2) tiene una solución no trivial ssi $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, con $\lambda_n > 0$ solución de

$$a_2\,\mathrm{e}\,\cos(\sqrt{\lambda}) = b_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})\ . \tag{1}$$

[5 puntos]

2. Las funciones propias de (PSL2) asociadas a $\lambda_n > 0$ estan dadas por $v_n(s) = A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}s)$, $0 \leq s \leq 1$, con $A_n \in \mathbb{R}$, $A_n \neq 0$. Por lo tanto, las funciones propias de (PSL) asociadas a los valores propios $\lambda_n > 0$ soluciones de (1) estan dadas por

$$u_n(x) = v_n(\ln x) = A_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln x\right) \quad , \quad 1 \leq x \leq \mathrm{e}\ .$$

Si $a_2 = 0$, en adición a los valores propios descritos arriba, hay otro valor propio $\lambda_1 = 0$ con funciones propias $u_1(x) = A = \text{const.}$ **[3 puntos]**

3(i). Si $a_2 = 0$, la ecuación (1) se reduce a $\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ (en este caso $b_2 > 0$ por hipótesis). Por ende, los valores propios son

$$\lambda_n = (n-1)^2\pi^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star\ .$$

3(ii) Si $b_2 = 0$, la ecuación (1) se reduce a $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ (en este caso $a_2 > 0$ por hipótesis). Por ende, los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star\ .$$

[2 puntos]

3(iii). Un método geométrico para determinar valores aproximados de los λ_n cuando a_2 y b_2 no se anulan consiste en representar las curvas gráficas de las funciones $r \mapsto \tan(r)$ y $r \mapsto a_2\,\mathrm{e}/(b_2 r)$ para $r = \sqrt{\lambda} > 0$. Denotamos por $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ las abscisas de los puntos de intersección de estas curvas. Puesto que las soluciones de (1) satisfacen $\tan(\sqrt{\lambda}) = a_2\,\mathrm{e}/(b_2\sqrt{\lambda})$, se tiene $\lambda_n = r_n^2$. **[2 puntos]**

PROBLEMA 3. [30 puntos] La pregunta B.1 es independiente de la parte A.

A. Para $L > 0$, $\ell > 0$ y $0 < x_0 < L$, considere la función definida sobre $[0, L]$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ell\, x}{x_0} & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\ell(L-x)}{L-x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{2}$$

1. Determine la serie de senos de g.
2. Muestre que esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y que su suma $S(x)$ es igual a $g(x)$ para todo $x \in [0, L]$.
   ¿ Como se relaciona $S(x)$ con los valores de la función g cuando $x \notin [0, L]$?

B. Considere el problema de la cuerda vibrante modelado por el siguiente Problema de Valores Iniciales y de Frontera

$$\text{(PVIF)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = 0 & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ y(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(L,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq L \\ \partial_t y(x,0) = g(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \, , \end{cases}$$

donde $c > 0$ es un parámetro, $L > 0$ es la longitud de la cuerda y la velocidad inicial de la cuerda está dada por la función $g(x)$ definida en (2).

1. Sea $\tilde{g}_I(x)$ la extensión $2L$-periódica impar de g. Muestre explicitamente que

$$y(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_I(x') \mathrm{d}x'$$

   es una solución generalizada de (PVIF) en el siguiente sentido: $y(x,t)$ satisface las condiciones de frontera e iniciales y $y(x,t)$ satisface la ecuación de ondas en

$$D_{\text{reg}} = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, t > 0, x \pm ct - x_0 \notin 2L\mathbb{Z}, x \pm ct + x_0 \notin 2L\mathbb{Z} \right\} .$$

2. Usando los resultados de la parte A., exprese la solución $y(x,t)$ como una serie uniformemente convergente en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ (justifique que la serie converge uniformemente en $\overline{D}$).
3. Halle los valores de x_0 tales que las armónicas $n = kn_0$ se anulan para todo $k \in \mathbb{N}^\star$, donde n_0 es un entero positivo dado.

Desarrollo: A.1. Por definición, la serie de senos de g es la serie de Fourier de la extensión $2L$-periódica impar $\tilde{g}_I$ de g. Sus coeficientes de Fourier son $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, y

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star \, ,$$

donde $T = 2L$ es el periódo de $\tilde{g}_I$. Separando la integral en sus partes sobre $[0, x_0]$ y $[x_0, L]$, substituyendo las expresiones de $g(x)$ en los dos tramos e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2}\, b_n &= \frac{\ell}{x_0}\Big[-\frac{Lx}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big]_0^{x_0} \\
&\quad + \frac{\ell}{L - x_0}\Big[-\frac{(L-x)L}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big]_{x_0}^{L} \\
&= \frac{\ell L^2}{n^2\pi^2}\Big(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{L - x_0}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big) = \frac{\ell\, L^3}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big) .
\end{aligned}$$

Así, la serie de senos de g es

$$S_{\tilde{g}_I}(x) = \frac{2\ell\, L^2}{x_0(L-x_0)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) . \tag{3}$$

[5 puntos]

2. Como $g(0) = g(L) = 0$, sigue que $\tilde{g}_I$ es continua en $\mathbb{R}$. Además $\tilde{g}_I$ es derivable en $]-L, L[\setminus\{x_0\}$, de derivada $\tilde{g}_I'$ CPT en $[-L, L]$. Deducimos de un teorema visto en clase que la serie de Fourier de $\tilde{g}_I$ converge uniformemente y que su suma es igual a $\tilde{g}_I(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular,

$$S_{\tilde{g}_I}(x) = g(x) \quad , \quad x \in [0, L] .$$

Mas generalmente,

$$S_{\tilde{g}_I}(x) = \tilde{g}_I(x) = \begin{cases} g(x - 2kL) & \text{si } 2kL \le x \le (2k+1)L \\ -g(2k + 2 - x) & \text{si } (2k+1)L \le x \le (2k+2)L. \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. **[5 puntos]**

B.1. Cabe notar que el teorema visto en clase sobre la solución del PVIF para la cuerda vibrante no se aplica aquí ya que $\tilde{g}_I$ **no es de clase** C^1 en $\mathbb{R}$ (de hecho, $\tilde{g}_I$ es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{\pm x_0 + 2kL\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$). Como $f = 0$ (la cuerda está inicialmente en reposo), al poder aplicar este teorema la solución sería la forma

$$y(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' . \tag{4}$$

Podemos chequear directamente que (4) es una solución generalizada de (PVIF) en el sentido dado en el enunciado. Sea $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < L, t > 0\}$ y D_{reg} como definido en el enunicado. Luego

(i) Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned}
2c\,\partial_t y(x,t) &= c\,\tilde{g}_I(x+ct) - (-c)\,\tilde{g}_I(x-ct) \quad , \quad (x,t) \in D \\
2c\,\partial_t^2 y(x,t) &= c^2\,\tilde{g}_I'(x+ct) - (-c)^2\,\tilde{g}_I'(x-ct) \quad , \quad (x,t) \in D_{\mathrm{reg}} \\
2c\,\partial_x y(x,t) &= \tilde{g}_I(x+ct) - \tilde{g}_I(x-ct) \quad , \quad (x,t) \in D \\
2c\,\partial_x^2 y(x,t) &= \tilde{g}_I'(x+ct) - \tilde{g}_I'(x-ct) \quad , \quad (x,t) \in D_{\mathrm{reg}} .
\end{aligned}$$

Sigue que $\partial_t^2 y(x,t) = c^2\partial_x^2 y(x,t)\ \forall\ (x,t) \in D_{\mathrm{reg}}$, eso es, $y(x,t)$ satisface la ecuación de ondas en D_{reg}. **[5 puntos]**

(ii) Como $\tilde{g}_I$ es impar, tenemos $y(0,t) = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' = 0$ para todo $t > 0$.**[2 puntos]**

Como $\tilde{g}_I$ es $2L$-periódica,

$$
\begin{aligned}
y(L,t) &= \frac{1}{2c}\left(\int_{L-ct}^{L} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' + \int_{L}^{L+ct} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x'\right) \\
&= \frac{1}{2c}\left(\int_{-L-ct}^{-L} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' + \int_{L}^{L+ct} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x'\right) \\
&= \frac{1}{2c}\left(\int_{L}^{L+ct} \tilde{g}_I(-x'')\,\mathrm{d}x'' + \int_{L}^{L+ct} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x'\right) \quad = \quad 0\,,
\end{aligned}
$$

donde en la tercera linea hizimos el cambio de variable $x'' = -x'$ y usamos $\tilde{g}_I(-x'') = -\tilde{g}_I(x'')$. Concluimos que $y(x,t)$ satisface las CF de (PVIF). **[3 puntos]**

(iii) Es claro que $y(x,0) = \frac{1}{2c}\int_x^x \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' = 0$. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$
\partial_t \tilde{g}_I(x,0) = \frac{1}{2c}\big(c\,\tilde{g}_I(x) - (-c)\tilde{g}_I(x)\big) = \tilde{g}_I(x) = g(x) \quad , \quad 0 < x < L\,.
$$

Deducimos que $y(x,t)$ satisface las CI de (PVIF). **[2 puntos]**

B.2. Sigue de un resultado visto en clase que la SF de $\tilde{g}_I$ puede ser integrada término a término ya que $\tilde{g}_I$ es CPT en $[-L,L]$ (también se puede usar el teorema que asegura que una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término). Usando $S_{\tilde{g}_I}(x) = \tilde{g}_I(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pregunta A.2.), la ecuación (3) y la identidad trigonométrica $-\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\sin a \sin b$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{\ell\,L^2}{x_0(L-x_0)\pi^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\Big(\frac{n\pi x'}{L}\Big)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{\ell\,L^3}{x_0(L-x_0)\pi^3 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\left(-\cos\Big(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\Big) + \cos\Big(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\Big)\right) \\
&= \frac{2\ell\,L^3}{x_0(L-x_0)\pi^3 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi ct}{L}\Big) \quad , \quad (x,t) \in \overline{D}\,.
\end{aligned}
$$

La serie converge normalmente y por tanto uniformemente en $\overline{D}$ ya que

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{(x,t)\in\overline{D}}\left|\frac{1}{n^3}\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi ct}{L}\Big)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left|\sin\Big(\frac{n\pi x_0}{L}\Big)\right| \;<\; \infty
$$

por el criterio de comparación ($0 \leq |\sin(\frac{n\pi x_0}{L})|/n^3 \leq 1/n^3$ y $\sum_{n\geq 1} 1/n^3$ converge). **[6 puntos]**

B.3. Para que las armónicas $n = kn_0$ se anulen para todo $k \in \mathbb{N}^\star$, es necesario y suficiente que

$$
\sin\Big(\frac{kn_0\pi x_0}{L}\Big) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{L}{n_0}j \quad \text{con } j \in \mathbb{Z}\,.
$$

Visto que $0 < x_0 < L$, sigue que $x_0 \in \left\{\frac{L}{n_0}, \frac{2L}{n_0}, \ldots, \frac{(n_0-1)L}{n_0}\right\}$. **[2 puntos]**