Medidas producto.

- σ-álgebra producto.
- Medida producto.
- Secciones de conjuntos y funciones medibles.

σ-álgebra producto.

A lo largo de esta sección, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ son dos espacios de medidas y $Z := X \times Y,$ el producto cartesiano de X e Y.

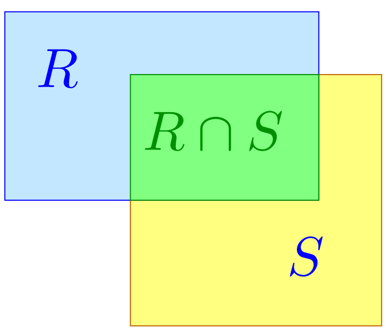
Vamos a dotar a Z de una σ-álgebra $\mathscr{Z}$ y de una medida π tales que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A \in \mathscr{X}, \quad \forall B \in \mathscr{Y}.$$

Luego relacionaremos la integral en Z respecto de π con las integrales iteradas en X e Y, respecto de μ y de ν, respectivamente.

Def.: Un conjunto $R \subset Z$ es un **rectángulo medible** si $R = A \times B$ con $A \in \mathscr{X}$ y $B \in \mathscr{Y}$.

Denotamos $\mathscr{Z}_0$ a la familia de uniones finitas de recángulos medibles.



Notemos que la intersección de rectángulos medibles es un rectángulo medible. **Ej. 10.E.**

En cambio, la unión, en general no. Sin embargo, es **unión finita de rectángulos medibles disjuntos.**

Lema: $\boxed{\text{Ej. 10.D.}}$ Todo elemento de $\mathscr{Z}_0$ puede escribirse como unión finita de rectángulos medibles **disjuntos**.

Dem.: Sea $E \in \mathscr{Z}_0$. Entonces, $E = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ con R_j rectángulos medibles. Demostremos el lema por inducción en n. Si $n = 1$, no hay nada que demostrar.

Hipótesis inductiva: Supongamos que

$$\bigcup_{j=1}^{n} R_j = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} R'_k, \text{ con } R'_k \text{ rectángulos medibles disjuntos.}$$

Veamos que $\bigcup_{j=1}^{n+1} R_j$ también es unión de rectángulos medibles disjuntos:

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} R_j = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} R'_k \cup R_{n+1} \overset{\boxed{\text{Ej.}}}{=} \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} (R'_k \setminus R_{n+1}) \,\dot{\cup}\, R_{n+1}$$

y, a su vez, cada $R'_k \setminus R_{n+1}$ es unión de rectángulos medibles disjuntos. $\boxed{\text{Ej. 10.E.}}$

Entonces, $\bigcup_{j=1}^{n+1} R_j$ también es unión de rectángulos medibles disjuntos. ■

Lema: $\mathscr{Z}_0$ es un álgebra.

Dem.: **(a)** $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathscr{Z}_0$.

(b) Sea $E = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \times B_j) \in \mathscr{Z}_0 \implies E^{\mathrm{c}} = \bigcap_{j=1}^{n} (A_j \times B_j)^{\mathrm{c}}$.

$\boxed{\textbf{Ej. 10.E.}} \implies E^{\mathrm{c}} = \bigcap_{j=1}^{n} \big((A_j \times B_j^{\mathrm{c}}) \cup (A_j^{\mathrm{c}} \times Y) \big)$.

Distributividad $\implies E^{\mathrm{c}}$ es unión de intersecciones de rectángulos medibles.

$\boxed{\textbf{Ej. 10.E.}} \implies$ la intersección de rectángulos medibles es un rectángulo medible $\implies E^{\mathrm{c}}$ es unión de rectángulos medibles $\implies E^{\mathrm{c}} \in \mathscr{Z}_0$.

(c) La unión finita de uniones finitas de rectángulos medibles es una unión finita de rectángulos medibles. ■

Def.: La σ-álgebra $\mathscr{Z}$ generada por $\mathscr{Z}_0$ se denomina la ***σ*-álgebra producto**.

Notemos que $\mathscr{Z}$ es la menor σ-álgebra que contiene a los rectángulos medibles.

Nuestro próximo paso es definir una **medida producto** $\pi : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B) \quad \forall A \in \mathscr{X}, \quad \forall B \in \mathscr{Y}.$$

Medida producto.

Teor.: Existe una medida $\pi : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A \in \mathscr{X}, \quad \forall B \in \mathscr{Y}.$$

Además, si μ y ν son σ-finitas, π es única.

Dem.: Sea $E \in \mathscr{Z}_0 \overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} E = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n}(A_j \times B_j),\ Aj \in \mathscr{X},\ B_j \in \mathscr{Y}$.

Definimos $\pi_0 : \mathscr{Z}_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ como $\pi_0(E) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\,\nu(B_j)$.

Veamos que π_0 es una medida en el álgebra $\mathscr{Z}_0$.

(a) $\pi_0(\emptyset) = \mu(\emptyset)\,\nu(\emptyset) = 0$. **(b)** $\pi_0(E) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\,\nu(B_j) \geq 0$.

(c) Sea $A \times B = \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}}(A_j \times B_j)$. Debemos demostrar que

$$\pi_0(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_0(A_j \times B_j) \iff \mu(A)\,\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,\nu(B_j).$$

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \chi_A(x)\,\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y).$$

Integramos respecto de ν y después respecto de μ y obtenemos sucesivamente:

$$\chi_A(x)\,\nu(B) = \int \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)\Big)\,d\nu(y) \overset{\text{T.C.M.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\,\nu(B_j);$$

$$\mu(A)\,\nu(B) = \int \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\,\nu(B_j)\Big)\,d\mu(x) \overset{\text{T.C.M.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,\nu(B_j) \implies$$

π_0 medida en el álgebra $\mathscr{Z}_0 \overset{\text{T.E.C.}}{\Longrightarrow} \exists \pi : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}}$ medida tal que $\pi|_{\mathscr{Z}_0} = \pi_0$.

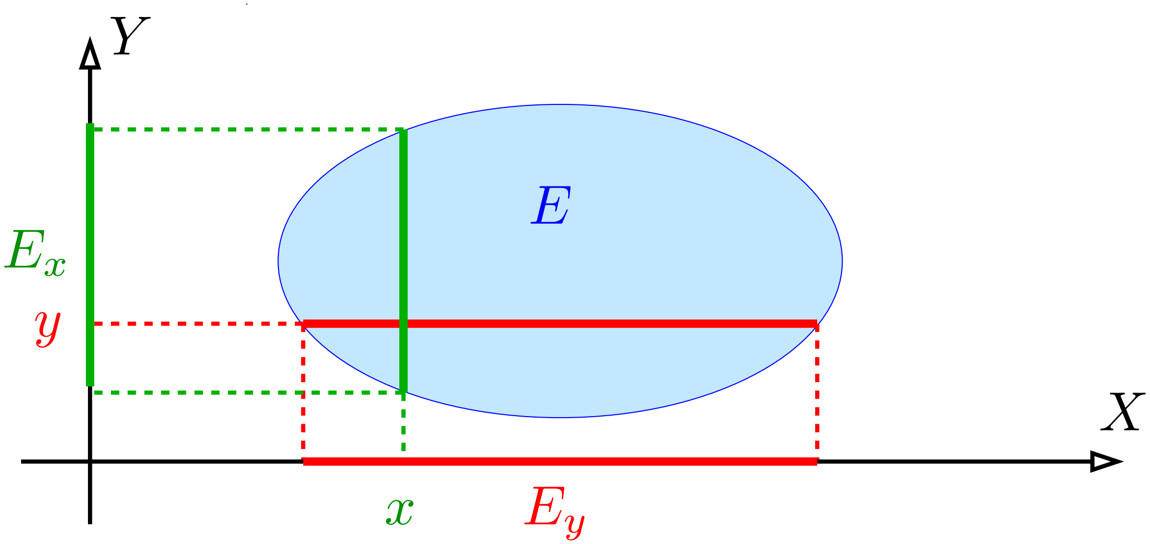
Además, si μ y ν σ-finitas $\implies \pi_0$ σ-finita $\overset{\text{T.E.H.}}{\Longrightarrow} \pi$ es única. ■

Secciones de conjuntos y funciones medibles.

Def.: Sea $E \subset X \times Y$.

Dado $x \in X$, la **sección-x de** E es el conjunto $E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\}$.

Dado $y \in Y$, la **sección-y de** E es el conjunto $E^y := \{x \in X : (x,y) \in E\}$.



Def.: Sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$.

Dado $x \in X$, la **sección-x de** f es la función $f_x := f(x,\cdot) : Y \to \overline{\mathbb{R}},$
$y \mapsto f(x,y).$

Dado $y \in Y$, la **sección-y de** f es la función $f^y := f(\cdot,y) : X \to \overline{\mathbb{R}},$
$x \mapsto f(x,y).$

Lema: **(a)** $E \in \mathscr{Z} \implies E_x \in \mathscr{Y}\ \forall x \in X$ y $E^y \in \mathscr{X}\ \forall y \in Y.$

(b) $f \in M(Z, \mathscr{Z}) \implies f_x \in M(Y, \mathscr{Y})\ \forall x \in X$ y $f^y \in M(X, \mathscr{X})\ \forall y \in Y.$

Dem.: **(a)** Sea $\mathscr{E} := \{E \in \mathscr{Z} : E_x \in \mathscr{Y}\ \forall x \in X$ y $E^y \in \mathscr{X}\ \forall y \in Y\}.$

Sea $E = A \times B$ un rectángulo medible. Entonces,

$$E_x = \left\{ \begin{array}{ll} B, & \text{si } x \in A, \\ \emptyset, & \text{si } x \notin A, \end{array} \right\} \in \mathscr{Y} \qquad \text{y} \qquad E^y = \left\{ \begin{array}{ll} A, & \text{si } y \in B, \\ \emptyset, & \text{si } y \notin B, \end{array} \right\} \in \mathscr{X}$$

$\implies E \in \mathscr{E} \implies \mathscr{E}$ contiene los rectángulos medibles.

Por otra parte, $\mathscr{E}$ es una σ-álgebra **Ej. 10.I.**

Como $\mathscr{Z}$ es la menor σ-álgebra que contiene los rectángulos medibles, $\mathscr{Z} \subset \mathscr{E}$ y, como por definición $\mathscr{E} \subset \mathscr{Z}$, entonces $\mathscr{Z} = \mathscr{E} \implies$

$$\forall E \in \mathscr{Z}, \quad E_x \in \mathscr{Y} \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad E^y \in \mathscr{X} \quad \forall y \in Y.$$

(b) Sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} &= \{y \in Y : f(x,y) > \alpha\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > \alpha\}_x \end{aligned}$$

Entonces, $f \in M(Z, \mathscr{Z}) \overset{\text{(a)}}{\implies} f_x \in M(Y, \mathscr{Y}).$

La demostración de que $f^y \in M(X, \mathscr{X})$ es similar. ■