¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden?

Cambio de función incógnita

Carlos M. Mora

Ecuación de Bernoulli

$$\frac{1}{1-n} z'(x) + p(x)\, z(x) = f(x)$$

$$Y'(x) + p(x)\, Y(x) = f(x)\, Y(x)^n \qquad \text{con } n \neq 1,$$

donde p y f son funciones conocidas

$$\frac{1}{Y(x)^n} Y'(x) + p(x) \frac{Y(x)}{Y(x)^n} = f(x)$$

Cambio de variable

$$\underline{Y(x)^{-n}\, Y'(x)} + p(x)\, Y(x)^{1-n} = f(x)$$

$$Z(x) = Y(x)^{1-n}$$

Solución

$$Z'(x) = (1-n)\, \underline{Y(x)^{-n}\, Y'(x)}$$

$$Z'(x) + (1-n)\, p(x)\, Z(x) = (1-n)\, f(x)$$

$$= p(x) \qquad n = \frac{1}{2}$$

$$y'(x) - \frac{4}{x} y(x) = x\, y(x)^{1/2}$$

$$\frac{1}{y(x)^{1/2}} y'(x) - \frac{4}{x} \frac{y(x)}{y(x)^{1/2}} = x$$

$$\underline{y(x)^{-1/2}\, y'(x)} - \frac{4}{x} y(x)^{1/2} = x$$

$$y(x)^{1/2} = z(x)$$

$$z'(x) = \frac{1}{2} y(x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot y'(x)$$

$$= \frac{1}{2} \underline{y(x)^{-\frac{1}{2}}\, y'(x)}$$

$$2 z'(x) - \frac{4}{x} z(x) = x \qquad \text{EDO lineal}$$

$$z'(x) - \frac{2}{x} z(x) = \frac{x}{2}$$

$$x^{-2} z'(x) - 2x^{-3} z(x) = \frac{x}{2} \cdot x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-2} z(x)\right) = \frac{1}{2x}$$

$$x > 0$$

$$x^{-2} z(x) = \frac{1}{2} \ln(|x|) + K = \frac{1}{2} \ln(x) + K$$

$$z(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) + K x^2 \Rightarrow y(x) = z(x)^2$$

Ecuación de Bernoulli

$$Y'(x) - \frac{4}{x} Y(x) = x\, Y(x)^{1/2}$$

Ejemplo: $Y'(x) = \frac{4}{x} Y(x) + x\sqrt{Y(x)}$ para todo $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{Y(x)}} Y'(x) = \frac{4}{x}\sqrt{Y(x)} + x$$

$$Z(x) = \sqrt{Y(x)} \Rightarrow Z'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{Y(x)}} Y'(x)$$

$$Z'(x) = \frac{2}{x} Z(x) + \frac{x}{2}$$

$$x^{-2} Z'(x) - \frac{2}{x^{-3}} Z(x) = \frac{x^{-1}}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x^{-2} Z(x)\right) = \frac{x^{-1}}{2} \Rightarrow x^{-2} Z(x) = \frac{1}{2} ln(x) + K$$

$$Z(x) = \left(\frac{1}{2} ln(x) + K\right) x^2$$

$$Y(x) = \sqrt{Z(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(x)^2 = Z(x)$$

$$Y(x) = \left(\frac{1}{2} ln(x) + K\right)^2 x^4$$

$$y'(x) - \frac{4}{x} y(x) = x\, y(x)^{1/2}$$

$$y'(x) = \frac{4}{x} y(x) + x\, y(x)^{1/2}$$

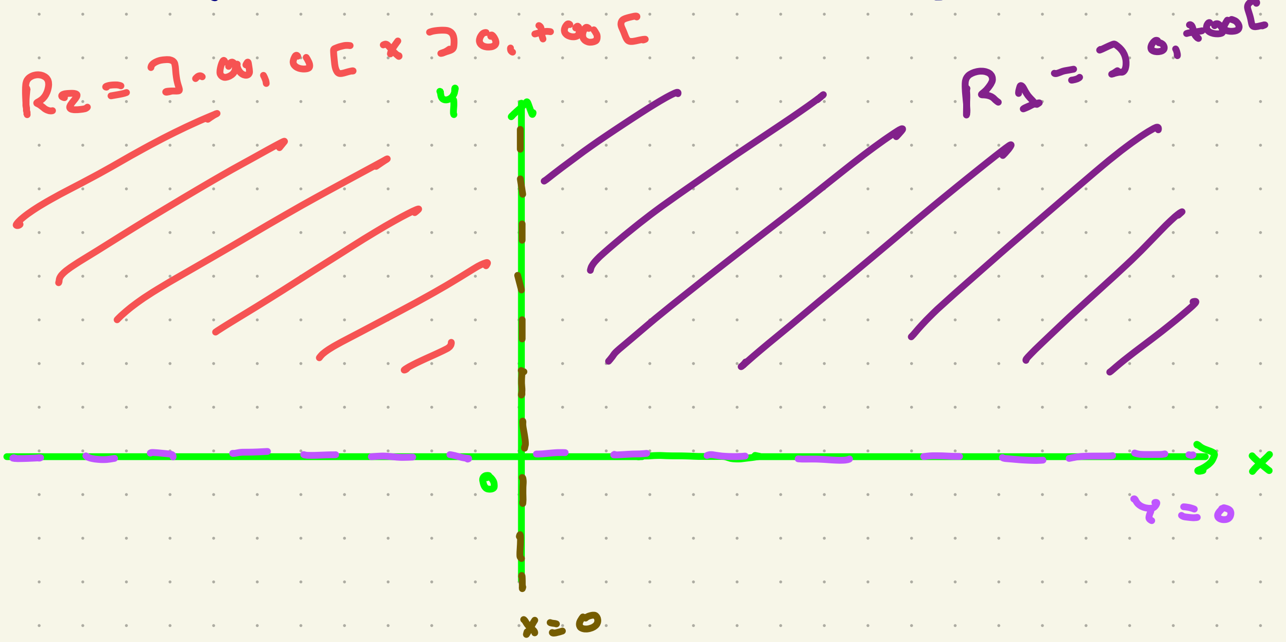
$$\text{PVI} \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) \rightsquigarrow y$$

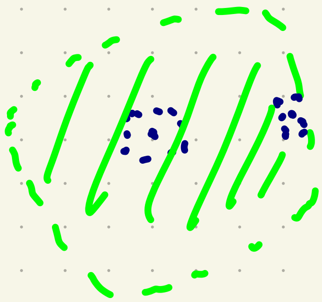
$$f(x,y) = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$$

$$\text{Dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \text{ está bien definida} \}$$

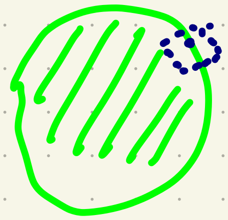
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 ,\ x \neq 0 \}$$



Buscamos un conjunto abierto A que contega a (x_0, y_0) tal que f y $\frac{\partial}{\partial y} f$ sean continuas en A



es abierto



no es abierto

Puntos de continuidad de f : $x \neq 0$, $y \geq 0$

$$f(x,y) = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$$

f es continua en su dominio

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{4}{x} + x \, \frac{1}{2} \, y^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{4}{x} + \frac{1}{2} \, x \, \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ es continua para todo $x \neq 0$ y $y > 0$.

El TEyU nos asegura que para todo $(x_0,y_0) \in R_1$ ó $(x_0,y_0) \in R_2$ existe una única solución al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{4}{x} y(x) + x\sqrt{y(x)} & \forall x \in I_{x_0} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$