Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 1 — jueves 12 de mayo de 2022

Fundamentar la respuesta a cualquier sub-problema puesto en forma de pregunta.

Problema 1. (10 puntos) Sea la altitud de una montaña descrita por

$$h(x,y) = 1 - 0{,}04(x-1)^2 - 0{,}03(y-2)^2$$

(por ejemplo, pensado en distancias expresadas en kilómetros).

a) Supongamos que una montañista se encuentra en el punto $(x^0, y^0) = (3,0)$. ¿En qué dirección debe caminar si desea acceder a la cima por camino directo?

b) ¿En qué dirección debe caminar si desea descender con la mayor rapidez posible? ¿Y en qué dirección si desea mantener su altitud?

Problema 2. (10 puntos) Se considera el operador de Laplace en n dimensiones para una función $g = g(x_1, \dots, x_n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \in C^2$, denotado por

$$\Delta_n g = \sum_{i=1}^{n} g_{x_i x_i}.$$

Sea la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x_1, \dots, x_n) := (a_1 + b_1 x_1)(a_2 + b_2 x_2) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n x_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i x_i),$$

con constantes $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Demostrar que $\Delta_n h = 0$.

Problema 3. (10 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin y & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$?

Problema 4. (10 puntos) Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+xy+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}$ es un parámetro.

a) Demostrar que existen constantes $m<0$ y $M>0$ tales que $m\leq f(x,y)\leq M$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si $\alpha\in[m,M]$.

b) ¿Se puede elegir α en tal forma que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$?

c) Calcular la derivada direccional de f en la dirección $\vec{d}:=(1/\sqrt{2})(1,-1)$ en el punto $(x^0,y^0)=(1,1)$.

Problema 5. (10 puntos) Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+3y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) ¿La función f es acotada sobre $\mathbb{R}^2$?

b) Demostrar que la función f es continua en $(0,0)$.

c) Calcular las derivadas parciales de f.

d) Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.

e) ¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz en $(x^0,y^0)=(0,0)$?

Problema 6. (10 puntos)

a) Se consideran las funciones

$$f_1(x,y,u,v)=x+y\mathrm{e}-\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v,\quad f_2(x,y,u,v)=xy\mathrm{e}-u\mathrm{e}^u-v\mathrm{e}^v.$$

Sea $P_0:=(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,1,0,1)$. Calcular el polynomio de Taylor $T_2=T_2(x,y,u,v)$ del grado $m=2$ de la función f_1 con respecto a $x^0=P_0$.

b) Analizar si cerca de P_0 las ecuaciones

$$f_i(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\quad i=1,2$$

definen funciones $u=\varphi_1(x,y)$ y $v=\varphi_2(x,y)$ tales que en una vecindad de P_0,

$$f_i\bigl(x,y,\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)\bigr)=0,\quad i=1,2.$$

c) Calcular las derivadas parciales $\partial\varphi_k/\partial x$ y $\partial\varphi_k/\partial y$, $k=1,2$, en (x_0,y_0) si existen.