Clase 8: Función logaritmo, exponencial e hiperbólicas

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Función logaritmo natural
Construcción

Recordamos que

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \ , \ r \neq -1$$

A partir de esto, surge la pregunta

$$\text{¿Qué es } \int \frac{1}{x} dx?$$

Haciendo uso del 1er TFC, podemos ver que para $x > 0$, $f(x) = 1/x$ es continua y por lo tanto,

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

es una antiderivada de $f(x) = 1/x$.

Como la función

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \ , \text{ para } x > 0.$$

es derivable, se tiene que:

$$F'(x) = \frac{1}{x} > 0 \ ,$$

$$F''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Luego, F es estrictamente creciente (e inyectiva) y su gráfica es cóncava hacia abajo.

Función Logaritmo natural

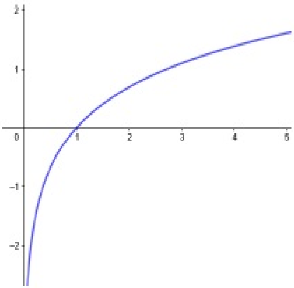
Construcción

Además, $F(1) = 0$ y se puede probar que:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$$

Luego, podemos afirmar que la gráfica de F es la siguiente:



Función Logaritmo natural

Definición

Todo lo anterior, nos conduce a la siguiente definición.

Definición 8.1

La función

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\ ,$$

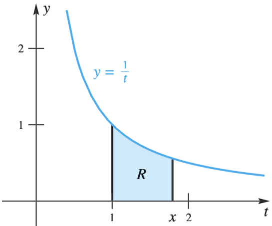
con $x > 0$ construida recientemente se llama **logaritmo natural** y se denota por $\ln(x)$, esto es,

$$\begin{aligned} \ln(x) :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) &= \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \end{aligned}$$

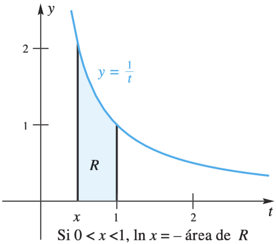
Función Logaritmo natural

Idea Geométrica

- Para $x > 1$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \dfrac{1}{t}$, desde $t = 1$ hasta $t = x$.
- Para $0 < x < 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$



Si $x > 1$, $\ln x =$ área de R



Si $0 < x < 1$, $\ln x = -$ área de R

Propiedades logaritmo natural

Teorema

Teorema 8.2

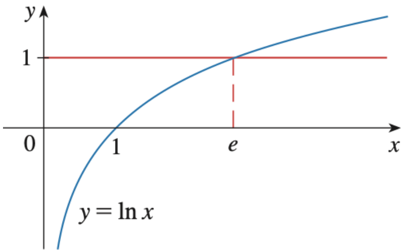
Dado $a, b > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

Propiedades logaritmo natural

Número de euler

Como la función $\ln(x)$ es continua y creciente, se garantiza las existencia de un número $c > 0$ tal que $\ln(c) = 1$. Este número c, se denota por e y es llamado **número de euler**.



Se puede probar que e es irracional y que además $e \approx 2,7183...$

Como

$$\ln(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

es biyectiva, posee inversa, que corresponde a la denominada **función exponencial natural**, esto es,

$$\exp(x) : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

Dado $r \in \mathbb{R}$, como

$$\ln(e^r) = r\ln(e) = r \iff \exp(\ln(e^r)) = \exp(r) \iff \exp(r) = e^r$$

Eso justifica, por qué denotar $\exp(x)$ como e^x.

Teorema 8.3

Para $b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que:

1. $e^b e^c = e^{b+c}$
2. $(e^b)^c = e^{bc}$
3. $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
4. $\dfrac{e^b}{e^c} = e^{b-c}$.

Función exponencial

Función exponencial en base $a > 0$

Para $a > 0$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

Luego, como $e^{x\ln(a)}$ está bien definida cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, podemos definir la **función exponencial de base** a por

$$a^x = e^{x\ln(a)} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 8.4

Sean $a > 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$. Luego,

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
2. $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$
3. $(a^b)^c = a^{bc}$

Como $a^x : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ es biyectiva, tiene inversa que es la llamada **función logaritmo en base** a, esto es

$$\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \log_a(x)$$

Notar que siempre podemos escribir

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Luego, en el caso especial que $a = e$ se justifica la escritura

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Propiedades $\log_a b$

Teorema 8.5

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{R}$. Las siguientes con ciertas:

1. $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
2. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b)$
3. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
4. $\log_a(b^r) = r\log_a(b)$

A continuación analizaremos una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**.

Consideremos las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Notar que

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

Luego, f y g satisfacen la ecuación de la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1$$

Por tal razón las funciones definidas recientemente reciben el nombre de funciones hiperbólicas y las denotaremos como sigue:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tales funciones $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ definidas previamente reciben el nombre de coseno hiperbólico y seno hiperbólico, respectivamente.

Las funciones $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$ satisfacen propiedades similares a las trigonometricas $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, de ahí el nombre.

Propiedades:

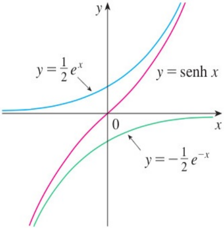
1. Satisfacen la denominada **identidad fundamental**, esto es:

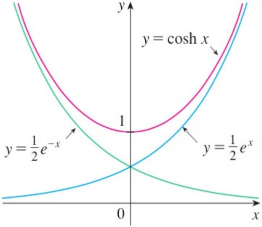
$$\cosh(x)^2 - \operatorname{senh}(x)^2 = 1$$

2. $\operatorname{senh}(0) = 0$ y $\cosh(0) = 1$
3. $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$ y $\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. La función $\cosh$ es *par*, es decir, $\cosh(-x) = \cosh(x)$, mientras que senh es *impar*, osea, $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$.

Funciones hiperbólicas

Gráfica de senh y $\cosh(x)$





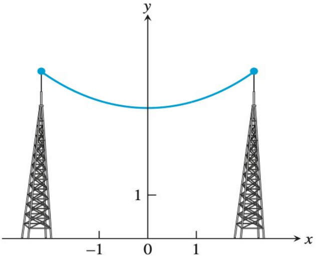
Funciones Hiperbólicas

Aplicación

Es posible demostrar que la forma que asumen un alambre flexible, una cadena o un cable suspendidos en dos puntos a la misma altura, es la gráfica de una función de la forma

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \ , \ a \neq 0$$

que se denomina **catenaria**.



Funciones Hiperbólicas

Dato curioso

Inspirados en la *catenaria* (en particular en una catenaria invertida), en 1947 el arquitecto estadounidense de Eero Saarinen y el ingeniero alemán Hannskarl Bandel diseñaron el denominado *Arco Gateway, o la Puerta hacia el Oeste* (San Luis - EE.UU).

Al igual que en el caso de las funciones trigonométricas, definimos otras 4 funciones hiperbólicas en términos de $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$:

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}$$

$$\mathsf{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \mathsf{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

Identidades hiperbólicas

Algunas identidades hiperbólicas importantes son las siguientes:

1. $\tanh^2(x) + \mathrm{sech}^2(x) = 1$
2. $\coth^2(x) - \mathrm{csch}^2(x) = 1$
3. $\mathrm{senh}(x \pm y) = \mathrm{senh}(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y)$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \mathrm{senh}(x)\,\mathrm{senh}(y)$
5. $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$

Ejercicio: Demostrar dichas propiedades.

Funciones Hiperbólicas

Derivadas

Se pueden definir **hiperbólicas inversas**, como sigue:

$$\text{arcsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

$$\text{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \ x \geq 1$$

$$\text{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , \ -1 < x < 1$$

Con derivadas:

$$\frac{d}{dx}\text{arcsenh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arctanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Luego, tenemos las siguientes fórmulas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{arcsenh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arcosh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{arctanh}(x) + C$$