UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 1
Cálculo Numérico 521230

1. Considere la función
$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 94x + 24.$$
Se desea determinar un número real c tal que $f(c) = 0$.

   a) Verifique que el intervalo $[-1, 1]$ es adecuado para iniciar el Método de Bisección.

   b) Aplique el Método de Bisección a partir del intervalo anterior y determine el nuevo intervalo. Luego, calcule el punto medio del intervalo cuya longitud es 1 y denótelo c_M.

   c) Utilizando $x_0 = c_M$, realice una iteración del Método de Newton–Raphson para obtener una mejor aproximación de la raíz.

Solución:

a) **(5 puntos)** Para poder aplicar el Método de Bisección necesitamos una función continua que cambie de signo en un intervalo. En este caso, f es un polinomio, y entonces es continua en todo $\mathbb{R}$. Además,
$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 94 \cdot (-1) + 24 = -4 - 9 + 94 + 24 = 118 - 13 > 0.$$
y
$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 94 \cdot 1 + 24 = 4 - 9 - 94 + 24 = 28 - 103 < 0.$$
Por lo tanto, el intervalo $[-1, 1]$ es adecuado para inicializar el Método de Bisección.

b) **(5 puntos)** Calculamos el primer punto medio, que es $\dfrac{-1+1}{2} = 0$, y calculamos $f(0) = 24 > 0$, con lo cual el siguiente intervalo es $[0, 1]$, que es de longitud 1. Así, $c_M = \dfrac{1}{2}$.

c) **(5 puntos)** Para Newton–Raphson necesitamos la derivada:
$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 94.$$
Luego, realizamos una iteración a partir de $x_0 = c_M = \dfrac{1}{2}$:
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
Calculamos:
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 94 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 24 = \frac{4}{8} - \frac{9}{4} - \frac{94}{2} + 24 = \frac{2 - 9 - 188 + 96}{4} = -\frac{99}{4},$$
y
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 18 \cdot \frac{1}{2} - 94 = 3 - 9 - 94 = -100.$$
Así,
$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{99}{4}}{-100} = \frac{1}{2} - \frac{99}{400} = \frac{101}{400}.$$

2. Considere el siguiente problema de interpolación. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sin(\pi x)$.

   a) Utilizando los polinomios de Lagrange, determine el polinomio $p(x)$ de menor grado que interpola f en los puntos $x = 0$, $x = \dfrac{1}{6}$ y $x = \dfrac{1}{2}$ (ayuda: $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ es la mitad de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$);

   b) Suponga que $\left|x\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right| \leq 10^{-2}$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Estime el error de interpolación entre $f(x)$ y $p(x)$ (ayuda: $\pi \approx 3{,}1416$, $\pi^2 \approx 9{,}87$, $\pi^3 \approx 31{,}00$);

   c) Calcule $p(1)$ y compare con $f(1)$; ¿es esto contradictorio con la estimación del error encontrada en (b)?

Solución:

a) **(7 puntos)** Como $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= 0\frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} + 1\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} \\ &= -9x\left(x-\frac{1}{2}\right) + 6x\left(x-\frac{1}{6}\right) = -3x^2 + \frac{7}{2}x \end{aligned}$$

b) **(5 puntos)**

$$|E(x)| \leq \left|\sin'''(\pi\xi)\frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3!}\right| \leq \pi^3\frac{\left|x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|}{6} \leq \frac{31}{600} \approx 0{,}05167,$$

para todo $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

c) **(3 puntos)** $p(1) = \frac{1}{2}$ y $f(1) = 0$, con lo que $|p(1) - f(1)| = \frac{1}{2} \geq \frac{31}{600}$. No es contradictorio porque el error es válido solo en el intervalo de interpolación: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Considere los datos de la siguiente tabla:

x	0	1	3
y	2	8	256

El propósito del ejercicio es ajustar los datos, en el sentido de mínimos cuadrados, a la función $f(x) = 2^{\alpha+\beta x}$.

a) Linealice la función empleando un adecuado cambio de variable y establezca el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{z}$ que resuelve el problema linealizado. (Recuerde usar la propiedad $\log_b(b^n) = n$).

b) Determine los valores de α y β.

c) Prediga el valor de y para $x = \frac{50}{33}$ utilizando el modelo obtenido.

Solución:

a) **(7 puntos)** Comenzamos transformando el modelo no lineal $f(x) = 2^{\alpha+\beta x}$, aplicando logaritmo en base dos en ambos lados, por tanto

$$\log_2(f(x)) = \alpha + \beta x \implies p(x) = \alpha + \beta x,$$

donde $p(x) = \log_2(y)$. De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{z}$, donde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} \log_2(2) \\ \log_2(8) \\ \log_2(256) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) **(5 puntos)** Calculamos la matriz transpuesta

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, establecemos el sistema normal es $\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^t\mathbf{z}$, donde

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^t\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 12 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

Luego, resolvemos el sistema y obtenemos los valores $\alpha = \frac{6}{7}$ y $\beta = \frac{33}{14}$.

c) **(3 puntos)** La predición según el modelo para el valor $x = \frac{50}{33}$ es

$$f(\tfrac{50}{33}) = 2^{6/7+33/14\cdot 50/33} = 2^{31/7}$$

4. Considere la siguiente integral

$$\int_0^3 (x^2+1)dx$$

a) Aproxime el valor de la integral utilizando la regla del trapecio compuesta con $n = 3$ subintervalos.

b) Estime una cota para el error de aproximación obtenido en el ítem anterior.

c) Verifique que la regla de Simpson entrega el valor exacto de la integral, mostrando que el error de aproximación es nulo.

Solución:

a) **(5 puntos)** Comencemos recordando que la fórmula del trapecio compuesto para $n = 3$ esta dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\right].$$

Además, como $a = 0$, $b = 3$, se tiene que $h = \dfrac{b-a}{n} = 1$, por lo que tenemos la siguiente partición

$$P = \{0, 1, 2, 3\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

Evaluando la función en cada nodo, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ f(x_1) &= f(1) = 1^2 + 1 = 2 \\ f(x_2) &= f(2) = 2^2 + 1 = 5 \\ f(x_3) &= f(3) = 3^2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en la fórmula, se tiene que

$$\int_0^3 (x^2+1)dx \approx \frac{1}{2}\left[1 + 2(2) + 2(5) + 10\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 4 + 10 + 10\right] = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

b) **(5 puntos)** Recordemos que la fórmula del error es

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

donde $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Derivando f, obtenemos que

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad f'(x) = 2x, \qquad f''(x) = 2.$$

por lo tanto $M_2 = 2$.

Finalmente, sustituyendo en la fórmula

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2 = \frac{2}{12}(3-0)(1)^2 = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

c) **(5 puntos)** Recordemos que la regla de Simpson compuesto es

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4,$$

donde $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$. Del ítem anterior, tenemos f' y f'', por lo que solo resta calcular f''' y $f^{(4)}$. En efecto,

$$f'''(x) = 0, \qquad f^{(4)}(x) = 0.$$

Por lo cual se obtiene que $M_4 = 0$.
Así, al sustituir en la fórmula del error

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4 = \frac{0}{180}(3-0)h^4 = 0$$

Lo cual corrobora que la regla de Simpson es exacta para polinomios de grado 3 o menor.