

## Elementos Finitos 521537

### Tarea 4

Sea  $\Omega = ]0, 1[$ , considere los datos  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\sigma \geq 0$ . Considere la siguiente EDO:  
*Encontrar  $\psi \in H^2(\Omega)$  tal que:*

$$\begin{cases} -\epsilon \psi'' + \alpha \psi' + \sigma \psi &= 1, \text{ en } \Omega \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi(1) &= b. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide lo siguiente:

1. **[5 puntos]** Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio  $V_h^k$ ;
2. **[5 puntos]** Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional discreta de (1);
3. **[10 puntos]** Considere el caso  $\alpha = \sigma = b = 0$ , encuentre una estimación de error óptima para  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ . **Indicación:** Investigue sobre el *truco de Aubin-Nitsche* o *argumento de dualidad*. Comente si es posible generalizar a casos menos restrictivos.
4. **[10 puntos]** Encuentre una estimación de error óptima para  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ .
5. **[10 puntos]** Implemente un código de elementos finitos para la formulación discreta anteriormente definida (presente el código implementado);
6. **[20 puntos]** Presente curvas de convergencia (con al menos 5 puntos) y soluciones (con un  $h > 0$  fijo de su elección) para  $b = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ , considerando los siguientes casos:
  - a)  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\epsilon \in \{1, 1e-1, 1e-3, 1e-6\}$ ;
  - b)  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\epsilon \in \{1, 1e-1, 1e-2, 1e-3\}$ ;
  - c)  $\alpha = 1e-1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\epsilon \in \{1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4\}$ ;comente los resultado obtenidos a la luz del análisis de error de los puntos 4 y 5.
7. **[BONUS: 30 puntos]** Presente e implemente alguna solución a los problemas numéricos eventualmente detectados en los puntos anteriores.