Módulos 5 y 6, Ejemplos

Raimund Bürger

13 de agosto de 2020

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 1 Calcular la siguiente integral, donde D es el disco circular $x^2 + y^2 \leqslant 4$, y $n > 0$:

$$I = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)^n \,\mathrm{d}(x, y).$$

Solución sugerida. Utilizando coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, tomando en cuenta que

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

y definiendo $D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, obtenemos

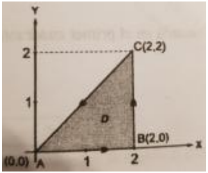
$$I = \iint\limits_{D^*} (r^{2n}) r \,\mathrm{d}(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^{2n+1} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2} \int_0^{2\pi} \left[r^{2n+2}\right]_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2^{2(n+1)}}{2(n+1)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{2^{2(n+1)}}{n+1} \pi.$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 2 Calcular la siguiente integral, donde D es la región cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(2{,}0)$ y $C(2,2)$:

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1}} \, \mathrm{d}(x,y).$$



Solución sugerida. Como la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1}}$$

no tiene primitiva, conviene hacer la transformación

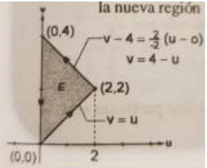
$$u = x - y, \quad v = x + y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}(v+u), \quad y = \frac{1}{2}(v-u).$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 2 (continuación) Considerando las coordenadas

$$A(u = 0, v = 0), \quad B(u = 2, v = 2), \quad C(u = 0, v = 4),$$

obtenemos como dominio de integración con respecto a u y v el siguiente triángulo E:



Considerando que

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

obtenemos lo siguiente:

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 2 (continuación)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_E f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_0^2 \int_u^{4-u} \frac{1}{\sqrt{u^2+2v+1}} \cdot \frac{1}{2} \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_u^{4-u} (u^2+2v+1)^{-1/2} \,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2(u^2+2v+1)^{1/2} \right]_{v=u}^{v=4-u} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\sqrt{u^2-2u+9} - (u+1) \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\sqrt{(u-1)^2+8} - (u+1) \right) \mathrm{d}u = \frac{3}{2} + 2\ln 2.
\end{aligned}
$$

donde utilizamos una tabla de integrales:

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 2 (continuación)

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \sqrt{(u-1)^2+8}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{w=-1}^{1} \sqrt{w^2+8}\,\mathrm{d}w \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(w\sqrt{w^2+8}+8\ln\left(w+\sqrt{w^2+8}\right)\right)\right]_{w=-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}(1\cdot 3+8\ln 4)-\frac{1}{2}(-3+8\ln 2)=\frac{3}{2}+8\ln 2-\frac{3}{2}-4\ln 2=4\ln 2.
\end{aligned}$$

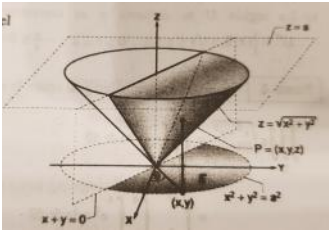
Entrada de tabla: si $X=x^2+a^2$, entonces

$$\int \sqrt{X}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{X}+a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right)+C.$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 3 Calcular I, donde U es el sólido interior a la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y limitado por los planos $x + y = 0$ y $z = a$, $a > 0$:

$$I = \iiint_U \exp\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}(x, y, z)$$



Solución sugerida. Aqui conviene utilizar coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, donde tomamos en cuenta que

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 3 (continuación) La ecuación $z^2 = x^2 + y^2 = a^2$ se convierte en $r^2 = a^2$, es decir $r = a$. El plano $z = a$ se convierte en $z = a$, y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $z = r$. Para el plano $x + y = 0$ obtenemos

$$r \cos\theta + r \sin\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta \in \{-\pi/4, 3\pi/4\},$$

entonces

$$U^* = \bigl\{(r, \theta, z) \mid r \leqslant z \leqslant a,\ 0 \leqslant r \leqslant a,\ -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4\bigr\}.$$

Ahora

$$I = \iiint\limits_{U^*} \exp(r) r \,\mathrm{d}(z, r, \theta) = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^a \int_r^a \exp(r) r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^a \left(r \exp(r) \int_r^a \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r = \pi \int_0^a r \exp(r)(a - r) \,\mathrm{d}r$$

Aplicando integraciones por partes, obtenemos

$$I = (\mathrm{e}^a (a - 1) + a + 1)\pi.$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 4 Calcular la siguiente integral, donde U es la región entre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b < a$:

$$I := \iiint_U \frac{\mathrm{d}(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Solución sugerida. Como en el integrando aparece la función $x^2 + y^2 + z^2$ y el dominio U está limitado por dos esferas, conviene usar coordenadas esféricas:

$$x = \varrho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \varrho \cos\phi,$$

donde el dominio de integración es

$$U^* = \bigl\{(\varrho, \theta, \phi) \mid b \leqslant \varrho \leqslant a,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\bigr\}.$$

Tomando en cuenta que $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ y

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \theta\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\varrho\sin\phi\sin\theta & \varrho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \varrho\sin\phi\cos\theta & \varrho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\varrho\sin\phi \end{vmatrix} = -\varrho^2 \sin\phi,$$

Regla de substitución para integrales

Ejemplo 4 (continuación)

obtenemos

$$I = \iiint\limits_{U^*} \frac{1}{\varrho^3} \varrho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}(\varrho, \phi, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^a \frac{\sin\phi}{\varrho} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_b^a \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = 2\pi \cdot [-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \cdot [\ln\varrho]_{\varrho=b}^{\varrho=a} = 4\pi \ln\frac{a}{b}.$$

Integrales de línea

Ejemplo 5 Calcular la siguiente integral de línea, donde C es un segmento de la recta desde el punto $P(1,1,1)$ hasta $Q(2,3,4)$:

$$I = \int_C x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y + (x+y-1) \,\mathrm{d}z.$$

Solución sugerida. Verifiquemos primero si el campo vectorial $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) = (x, y, x+y-1)$ es conservativo. Para ver que esto no es así, basta verificar que

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = 0, \quad \text{pero} \quad \frac{\partial V_3}{\partial y} = 1,$$

es decir como $\partial V_2/\partial z \neq \partial V_3/\partial y$ en todas partes, $\vec{V}$ no es conservativo. Hay que parametrizar el segmento, por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(t) &= (1,1,1) + t\big((2,3,4) - (1,1,1)\big) \\ &= (1+t, 1+2t, 1+3t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Integrales de línea

Ejemplo 5 (continuación)
Con esto obtenemos

$$f'(t) = (1, 2, 3),$$

luego

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \vec{V}\big(f(t)\big) \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big((1+t)\cdot 1 + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (14t+6)\,\mathrm{d}t = 13. \end{aligned}$$