El espacio $\mathbb{R}^n$, espacios métricos y espacios vectoriales (parte 1)
Módulo 1, Presentación 1

Raimund Bürger

10 de marzo de 2025

1.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

En este capítulo consideramos el espacio

$$\mathbb{R}^n = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

cuyos elementos son puntos x que pueden ser descritos mediante un sistema de coordenadas.
Convertimos $\mathbb{R}^n$ en un espacio métrico, donde recordamos la siguiente definición.

Definición 1.1 Un conjunto $M \neq \varnothing$ se llama espacio métrico si para cada par $x, y \in M$ existe un número $d(x, y) \in \mathbb{R}$ tal que:

i) Para todo $x, y \in M$, $d(x, y) \geqslant 0$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (no-negatividad).

ii) Para todo $x, y \in M$, $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría).

iii) Para todo $x, y, z \in M$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

1.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Para $n = 2$ y dos puntos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, según el Teorema de Pitagoras de la geometría euclidiana,

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Análogamente, para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 El espacio $\mathbb{R}^n$, equipado por la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por (1.1), es un espacio métrico.

Demostración Basta verificar que d satisface (i)–(iii) de la Definición 1.1. Para verificar (iii), recordamos que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2}$$

es el enunciado de la desigualdad de Minkowski. ∎

1.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Desigualdad de Minkowski. Para $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$ se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

Definición 1.2 La métrica d definida por (1.1) sobre $\mathbb{R}^n$ se llama métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$. En espacio $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ se llama espacio euclidiano n-dimensional.

Intervalos abiertos y cerrados. Consideremos la ε-vecindad

$$U_\varepsilon(x^0) := \{x \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\, d(x, x^0) < \varepsilon\}, \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Para $n = 1$, $U_\varepsilon(x^0)$ es el intervalo abierto $(x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon)$. Para $n = 2$, $U_\varepsilon(x^0)$ es el interior del disco con centro x^0 y radio ε. Para $n = 3$, $U_\varepsilon(x^0)$ es el interior de la bola con centro x^0 y radio ε.

1.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Definición 1.3

1. Sea $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para $i = 1, \ldots, n$. El conjunto

$$[a, b] := \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

se llama un intervalo cerrado de $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $-\infty \leqslant a_i < b_i \leqslant \infty$ para $i = 1, \ldots, n$. El conjunto

$$(a, b) := \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

se llama un intervalo abierto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2 Con respecto a la métrica euclidiana, cada intervalo (a, b) es abierto y cada intervalo $[a, b]$ es cerrado.

Demostración Tarea. ∎

1.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Definición 1.4 Sean $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para $i = 1, \ldots, n$ e $I = [a, b]$ o $I = (a, b)$ el intervalo correspondiente cerrado o abierto. En este caso

$$\delta(I) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

se llama el diámetro de I.

Definición 1.5 Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama acotado si existen un número $R > 0$ y un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $X \subset U_R(x^0)$.

Teorema 1.3 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. El conjunto X es acotado.
2. Existe un intervalo cerrado I tal que $X \subset I$.
3. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X \subset U_k((0, \ldots, 0))$.

Demostración Tarea.

1.2. La convergencia en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definición 1.6 Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ converge al límite $x \in M$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N_ε tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n > N_\varepsilon$.

Podemos reducir la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ a la convergencia de las n sucesiones dadas por cada una de sus coordenadas.

Teorema 1.4 Sea una sucesión en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$x^k = \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right), \quad k \in \mathbb{N};$$

además sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Entonces los dos siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$,
2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demostración del Teorema 1.4

1. Supongamos primero que $x^k \to x$, es decir,

$$d(x^k, x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j\right)^2} \to 0$$

para $k \to \infty$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un K_ε tal que

$$\forall k > K_\varepsilon : \quad \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j\right)^2 < \varepsilon^2.$$

Esto significa que para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\forall k > K_\varepsilon : \quad \left|x_i^k - x_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j\right)^2} < \varepsilon.$$

Luego para cada $i = 1, \ldots n$, $x_i^k \to x_i$ cuando $k \to \infty$.

1.2. La convergencia en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.4 (continuación)

2. Ahora supongamos que $x_i^k \to x_i$ para $k \to \infty$ y cada $i = 1, \ldots n$. Entonces para $\varepsilon > 0$ dado, existe un número $K_\varepsilon(i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ tal que

$$\forall k > K_\varepsilon(i) : \quad |x_i^k - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

de donde concluimos que para todo $k > \max\big\{K_\varepsilon(1), \ldots, K_\varepsilon(n)\big\}$,

$$d(x^k, x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^k - x_j\right)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon,$$

lo que significa que $x^k \to x$ cuando $k \to \infty$. ∎

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Definición 1.7 Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subset M$.

1. Un punto $h \in M$ se llama punto de acumulación de X si en cada vecindad de h existe un número infinito de elementos de X.
2. $H(X) := \{h \,|\, h \textit{ es punto de acumulación de } X\}$.

Un punto de acumulación de un conjunto no necesariamente debe ser elemento del conjunto, es decir $h \in H(X)$ no implica $h \in X$.

Ejemplo 1.1

1. Consideremos para $M = \mathbb{R}$ el subconjunto $X \subset M$ dado por

$$X = \{x \,|\, x \in \mathbb{Q},\, 0 < x < 1\} \cup \{2\}.$$

   Entonces $H(X) = [0, 1]$. El conjunto de los puntos de acumulación no es contable (incontable).
2. Para $M = \mathbb{R}$, sea $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Aquí $H(X) = \{0\}$.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Teorema 1.5 Sea $X \subset M$. Entonces un punto $h \in M$ es un punto de acumulación de X si en cada vecindad de h existe un elemento $x \in X$ tal que $x \neq h$.

Demostración Tarea. ■

Frecuentamente se utiliza el enunciado del siguiente teorema como definición de un punto de acumulación:

Teorema 1.6 Sea $X \subset M$. Un punto $h \in M$ es un punto de acumulación de X si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in X$ y $x_n \neq h$ para $n \in \mathbb{N}$, y $x_n \to h$.

Demostración Tarea. ■

Definición Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subset M$. El conjunto X se dice cerrado si el complemento de X con respecto a M, es decir $\complement_M(X) = M \backslash X$, es abierto en (M, d).

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Definición Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subset M$. Sea F una familia de subconjuntos abiertos $S \subset M$. Se dice que F es un recubrimiento abierto de X si

$$X \subset \bigcup_{S \in F} S.$$

Definición Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subset M$. Sea dice que X es compacto si cada recubrimiento abierto F de X posee un subrecubrimiento finito $S_1, \ldots, S_n$ de X, es decir

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Teorema 1.7 Un conjunto $X \subset M$ es cerrado si y sólo si $H(X) \subset X$.

Demostración Tarea.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Teorema 1.8 Sea $X \subset M$ y X compacto. Entonces cada conjunto infinito $X_0 \subset X$ posee por lo menos un punto de acumulación en X.

Demostración Tarea. ∎

Definición 1.8 Sea (M, d) un espacio métrico y $\{x_n\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $x_n \in M$ para $n \in \mathbb{N}$.

1. Un punto $v \in M$ se llama punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ si en cada vecindad de v se encuentra un número infinito de elementos de la sucesión.
2. $V\big(\{x_n\}\big) := \{v \,|\, v \textit{ es punto de acumulación de } \{x_n\}\ \}$.

El punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ es diferente del punto de acumulación del conjunto

$$X(\{x_n\}) := \{x \,|\, x = x_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} :$$

un punto de acumulación de $\{x_n\}$ puede ser generado por la repetición infinita de un número.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1.2 Sea $M = \mathbb{R}$ y la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = (-1)^n$. Aquí $X(\{x_n\}) = \{-1, 1\}$ y $V(\{x_n\}) = \{-1, 1\}$, pero ningún de los puntos de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ es un punto de acumulación del conjunto $X(\{x_n\})$, dado que este conjunto consiste en solamente dos elementos.

Teorema 1.9 Una sucesión acotada $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ posee por lo menos un punto de acumulación.

Demostración Tarea. $\blacksquare$

Teorema 1.10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^n$) Cada conjunto infinito y acotado $X \subset \mathbb{R}^n$ posee por lo menos un punto de acumulación.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.10

1. Según el Teorema 1.6, $h \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de X si y sólo si existe una sucesión $\{\xi^k\} = \{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi^k \in X$ y $\xi^k \neq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\xi^k \to h$ cuando $k \to \infty$. Construiremos ahora una tal sucesión y un tal elemento h.
2. Dado que X tiene un número infinito de elementos, existe una sucesión $\{xk\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in X$, donde $x^k \neq x^j$ si $k \neq j$. Aquí para cada $i = 1, \ldots, n$ la sucesión $\{x_i^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada. Concluimos que en virtud del Teorema 1.9, existen una subsucesión

$$\{x_1^{k_l^{(1)}}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{x_1^k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

y un número $h_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{l\to\infty} x_1^{k_l^{(1)}} = h_1.$$

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.10 (continuación)

3. Dado que $\{x_2^{k_l^{(1)}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ es acotada, existen una subsucesión $\{k_l^{(2)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{k_l^{(1)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ y un número $h_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{l\to\infty} x_2^{k_l^{(2)}} = h_2, \quad \text{etc.}$$

Obtenemos en el n-ésimo paso que existen una subsucesión $\{k_l^{(n)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{k_l^{(n-1)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ y un número $h_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{l\to\infty} x_n^{k_l^{(n)}} = h_n.$$

4. Sea $h = (h_1, \dots, h_n)$. Sea la sucesión $\{\xi^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\xi^l = \left(x_1^{k_l^{(n)}}, x_2^{k_l^{(n)}}, \dots, x_n^{k_l^{(n)}}\right).$$

Note que los elementos $\xi^l \in X$ satisfacen $\xi^{l_1} \neq \xi^{l_2}$ si $l_1 \neq l_2$.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.10 (continuación)

5. Según el Teorema 1.4,

$$\xi^l \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} (h_1, h_2, \ldots, h_n) = h.$$

   Como $\xi^{l_0} = h$ puede ser válido para a lo más un l_0, sabemos que h es un punto de acumulación de X. ∎

Teorema 1.11 Una sucesión $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de sub-intervalos de $\mathbb{R}^n$ tales que $I_{k+1} \subset I_k$ para $k \in \mathbb{N}$ tiene una intersección no vacía, es decir existe un x^0 tal que $x^0 \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.11

Definimos

$$I_k := [a^k, b^k] = \left\{x \,|\, x = (x_1, \dots, x_n),\, a_i^k \leqslant x_i \leqslant b_i^k, \quad i = 1, \dots, n\right\}.$$

1. Primero fijemos i. Puesto que $I_k \supset I_{k+1}$, sabemos que

$$a_i^k \leqslant a_i^{k+1} \leqslant b_i^{k+1} \leqslant b_i^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

   Entonces la sucesión $\{a_i^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona, creciente y acotada. Si definimos

$$x_i^0 = \lim_{k\to\infty} a_i^k,$$

   se tiene que $a_i^k \leqslant x_i^0 \leqslant b_i^k$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $k \in \mathbb{N}$.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.11 (continuación)

2. Determinamos de esta manera x_i^0 para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces el punto $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ está contenido en cada uno de los intervalos I_k para $k \in \mathbb{N}$, luego

$$x^0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.12 (Teorema de Heine-Borel para $\mathbb{R}^n$) Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es acotado y cerrado.

Demostración

1. Sea X compacto. Entonces X es cerrado y acotado (resultado del Cálculo I).

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.12 (continuación)

2. Sea X acotado y cerrado. Supongamos que X no fuera compacto. Entonces existe un cubrimiento abierto F de X que no contiene un sub-cubrimiento finito de X.
   a) Dado que X es acotado, existe un intervalo cerrado I_1 tal que $X \subset I_1$. Subdividimos I_1 en 2^n sub-intervalos cerrados dividiendo los n intervalos de coordenadas en dos mitades. Para por lo menos uno de estos sub-intervalos, el cual llamaremos I_2, el conjunto $X \cap I_2$ *no* puede ser cubierto por un sub-cubrimiento finito de F.

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Demostración del Teorema 1.12 (continuación)

2. (continuación)
   a) (continuación) Evidentemente, $\delta(I_2) = \delta(I_1)/2$. Continuando la subdivisión obtenemos una sucesión de intervalos cerrados I_k tal que $I_k \supset I_{k+1}$; además, $X \cap I_k$ no puede ser cubierto por un sub-cubrimiento finito de F, y finalmente $\delta(I_k) = \delta(I_1)/2^{k-1}$. Según el Teorema 1.10 existe un punto $x^0 \in I_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Dado que cada I_k contiene un número infinito de elementos de X, x^0 tambien es un punto de acumulación de X, y dado que X es cerrado, $x^0 \in X$.

   b) El recubrimiento F contiene por lo menos un conjunto abierto S tal que $x^0 \in S$. Como S es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ con $U_\varepsilon(x^0) \subset S$. Sea k tan grande que $\delta(I_k) = \delta(I_1)/2^{k-1} < \varepsilon$; en este caso $I_k \subset U_\varepsilon(x^0) \subset S$, dado que para todo $x \in I_k$, $d(x, x^0) \leqslant \delta(I_k) < \varepsilon$. Entonces I_k y por lo tanto $X \cap I_k$ puede ser cubierto por un conjunto abierto de$F$, en contradicción con la construcción. ∎

1.3. Los Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel para el espacio $\mathbb{R}^n$

Teorema 1.13 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \varnothing$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Cada sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \in X$ posee un punto de acumulación en X.
3. Cada subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación en X.

Demostración Tarea. ■