UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Evaluación 2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218)

PROBLEMA 1. (15 puntos) Resuelva el siguiente PVI

$$\begin{cases} x' = -x + y, & x(0) = 4, \\ y' = -x - y, & y(0) = 1, \end{cases}$$

Escribimos el sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos los valores propios de la matriz

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda + 1 = \pm i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm i$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. **(3 puntos)**

Ahora calculamos los vectores propios. El primer vector propio $\vec{v}_1$ se calcula como

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad -iv_1^1 + v_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1^2 = iv_1^1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Se sabe que el segundo vector propio es el conjugado del primero, es decir

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

Usando el primer valor y vector propio obtenemos la solución (compleja):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ i \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = e^{-t} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \right]$$

Las dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo se obtienen como las partes real e imaginaria de la solución anterior, es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Luego la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\left[A\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}\right],$$

para A, B constantes reales cualesquiera **(2 puntos)**

Para calcular los valores de las constantes usamos la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Luego $A = 4$ y $B = 1$. **(2 puntos)**

Por lo tanto, la solución del PVI es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\left[4\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}\right] = e^{-t}\begin{pmatrix} 4\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - 4\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

PROBLEMA 2.

(a) Encuentre un aniquilador para la función

$$f(x) = xe^x \cos(2x) + \operatorname{sen}(4x).$$

(5 puntos)

(b) Obtenga una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$\left(D^2+4\right)(D-3)\,Y(x) = 13e^{3x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

donde $D = \frac{d}{dx}$. (10 puntos)

Solución:

(a) Usando que $\left(D^2+4^2\right)\operatorname{sen}(4x) = 0$ y

$$\left(D^2 - 2\,D + 1^2 + 2^2\right)^2 xe^x \cos(2x) = 0$$

(2 puntos)

obtenemos

$$\begin{aligned}&\left(D^2+16\right)\left(D^2-2\,D+5\right)^2\left(\operatorname{sen}(4x) + xe^x\cos(2x)\right)\\ &= \left(D^2+16\right)\left(D^2-2\,D+5\right)^2 xe^x\cos(2x) + \left(D^2-2\,D+5\right)^2\left(D^2+16\right)\operatorname{sen}(4x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto el aniquilidador buscado es $\left(D^2+16\right)\left(D^2-2\,D+5\right)^2$.

(3 puntos)

(b) Ya que $(D-3)\,13e^{3x} = 0$, cualquier solución de (1) satisface

$$\left(D^2+4\right)(D-3)^2\,Y(x) = (D-3)\,13e^{3x} = 0.$$

(3 puntos)

Luego la solución particular buscada está en el núcleo del operador diferencial $\left(D^2+4\right)(D-3)^2$. Por lo que tiene la forma

$$Y(x) = a\,\cos(2x) + b\,\operatorname{sen}(2x) + c\,e^{3x} + d\,x\,e^{3x},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Como

$$\left(D^2+4\right)(D-3)\,Y(x) = 13e^{3x}$$

y

$$\left(D^2+4\right)(D-3)\left(a\,\cos(2x) + b\,\operatorname{sen}(2x) + c\,e^{3x}\right) = 0$$

para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$, tenemos que encontrar $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(D^2+4\right)(D-3)\left(d\,x\,e^{3x}\right) = 13e^{3x}.$$

(2 puntos)

Entonces

$$\left(D^2+4\right)\left(d\,e^{3x} + 3d\,x\,e^{3x} - 3d\,x\,e^{3x}\right) = 13e^{3x},$$

de donde

$$9d\,e^{3x} + 4d\,e^{3x} = 13e^{3x},$$

lo que implica que $d = 1$. Una solución particular es

$$Y\,(x) = x\,e^{3x}.$$

(3 puntos)

PROBLEMA 3. (15 puntos) Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}(t) + \begin{pmatrix} 5\,e^{-5t} \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Solución: Tenemos que

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + \vec{X}_p(t),$$

donde $\vec{X}_p(t)$ es una solución particular de (2) y $\vec{X}_h(t)$ es la solución general de

$$\frac{d}{dt}\vec{X}_h(t) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}_h(t). \tag{3}$$

(1 punto)

Como

$$0 = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda+5),$$

los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -5$. **(1 punto)**

Si

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

entonces $v_2 = 3v_1$. Haciendo $v_1 = 1$ obtenemos el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ correspondiente a $\lambda_1 = 0$.

(1 punto)

Si

$$\begin{pmatrix} -6+5 & 2 \\ -3 & 1+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

entonces $v_1 = 2v_2$. Haciendo $v_2 = 1$ obtenemos el vector propio $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondiente a $\lambda_2 = -5$.

(1 punto)

Por lo tanto, la solución general de (3) es:

$$\vec{X}_h(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\,e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Aplicando el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular con la forma

$$\vec{X}_h(t) = a(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b(t)\; e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$a'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b'(t)\; e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,e^{-5t} \\ 10 \end{pmatrix}$$

(4 puntos)

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\,e^{-5t} \\ 3 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,e^{-5t} \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{-5\,e^{-5t}} \begin{pmatrix} e^{-5t} & -2\,e^{-5t} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\,e^{-5t} \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - e^{-5t} \\ 3 - 2\,e^{5t} \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Integrando, obtenemos

$$a\,(t) = \int \left(4 - e^{-5t}\right) dt = 4t + \frac{1}{5} e^{-5t} + c$$

y

$$b\,(t) = \int \left(3 - 2\,e^{5t}\right) dt = 3t - \frac{2}{5} e^{5t} + d$$

(2 puntos)

Lo que implica que

$$\vec{X}\,(t) = \vec{X}_h\,(t) + \vec{X}_p\,(t) = \left(a + 4\,t + \frac{1}{5} e^{-5t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(b + 3\,t - \frac{2}{5} e^{5t}\right)\; e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} \vec{X}\,(t) &= \left(a + 4\,t + \frac{1}{5} e^{-5t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(b\,e^{-5t} + 3\,t\,e^{-5t} - \frac{2}{5}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2b\,e^{-5t} + 4\,t + e^{-5t}/5 + 6\,t\,e^{-5t} - 4/5 \\ 3a + b\,e^{-5t} + 12\,t + 3\,e^{-5t}/5 + 3\,t\,e^{-5t} - 2/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(1 punto)

PROBLEMA 4. (15 puntos) Considere un sistema masa-resorte imbuido en un fluido y sin fuerza externa. Suponga que:

- $m = 1,0$ [kg] (masa)
- $k = 4,0$ [kg/s^2] (constante de rigidez)
- $c = 4,0$ [kg/s] (constante de roce).

Sea $X(t)$ el desplazamiento vertical en el tiempo. Sabiendo que $X(0) = 4 \ \wedge \ X'(0) = 2$, se pide determinar el máximo desplazamiento de la masa respecto de su punto de equilibrio.

Solución: La ecuación de movimiento es

$$(\mathrm{PVI}) \left\{ \begin{array}{ll} m\,X''(t) + c\,X'(t) + k\,X(t) = 0 & \forall t > 0, \\ X(0) = 4, \quad X'(0) = 2. & \end{array} \right.$$

Sabemos que (PVI) tiene dos soluciones linealmente independientes, las cuales se calculan mediante el polinomio característico y sus raíces.
La ecuación normalizada es:

$$X''(t) + \frac{c}{m}\,X'(t) + \frac{k}{m}\,X(t) = 0 \qquad \forall t > 0,$$

y luego el polinomio es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\,\lambda + \frac{k}{m},$$

de donde determinamos sus raíces.
Dado que: $m = 1$, $k = 4$, $c = 4$ entonces:

$$X''(t) + 4\,X'(t) + X(t) = 0 \qquad \forall t > 0,$$

(2 puntos)

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 4,$$

(2 puntos)

y las raíces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2,$$

(2 puntos)

por lo que la solución general homogénea es:

$$X_h(t) = C_1\,e^{-2t} + C_2\,t\,e^{-2t} \qquad \forall t > 0.$$

(2 puntos)

donde C_1, C_2 son constantes reales, las que determinamos mediante las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} X_h(0) = C_1 = 4, \\ X_h'(0) = -2\,C_1 + C_2 = 2 \end{array} \right\} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 4 \quad \wedge \quad C_2 = 10$$

Entonces

$$X_h(t) = 4\,e^{-2t} + 10\,t\,e^{-2t}.$$

(2 puntos)

Para calcular el desplazamiento máximo, derivamos la función e igualamos a cero:

$$X_h'(t) = (2 - 20\,t)e^{-2t}, \qquad X_h'(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{10},$$

(2 puntos)

y reemplazando en la expresión de $X_h(t)$ obtenemos:

$$X_h(t^*) = X_h\Big(\frac{1}{10}\Big) = 4 \cdot e^{-1/5} + 10 \cdot \frac{1}{10}\, e^{-1/5},$$

luego el desplazamiento máximo es igual a: $5\, e^{-1/5}$. **(3 puntos)**