UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

521230 Cálculo Numérico y 525240 Análisis Numérico I (2024-2)
Pauta Evaluación 1

30 de Septiembre de 2024

Nombre: ____

Número de matrícula: ____________________________________

Sección: ☐ 1 (Prof. Rommel Bustinza) ☐ 2 (Prof. Mónica Selva) ☐ 3 (Prof. Álvaro Guzmán)

Esta evaluación consta de **4** preguntas con los puntajes que se indican. No se permite el uso de calculadoras u otros dispositivos electrónicos. Duración: 100 minutos.

Pregunta A. Sobre el conjunto $\mathbb{F}(10, 7, -9, 10)$:

A.I Determinar cuántos elementos posee dicho conjunto. **05 puntos**

DESARROLLO: Los elementos de $\mathbb{F}(10, 7, -9, 10)$ son expresados en notación científica normalizada, están en base 10, tienen mantisa de longitud 7, y el exponente varía entre -9 y 10. Por ello, requieren:

- 1 celda (bit) para almacenar el signo del número: 2 opciones,
- 1 celda para almacenar el primer dígito significativo: 9 opciones,
- 6 celdas para almacenar los siguientes dígitos de la parte fraccionaria: 10 opciones por celda,
- para el exponente de la base: 10+9+1=20 opciones.

Así, $\text{card}(\mathbb{F}(10, 7, -9, 10)) = (2)(9)(10^6)(20) = 36 \times 10^7$.

A.II Determinar el mayor y el menor elemento positivo. **04 puntos**

DESARROLLO:

- MAYOR ELEMENTO DE $\mathbb{F}(10, 7, -9, 10)$: 0.9999999×10^{10}.
- MENOR ELEMENTO DE $\mathbb{F}(10, 7, -9, 10)$: 0.1000000×10^{-9}.

A.III Dado $z \in \mathbb{R}$, denotemos por $\text{fl}(z) \in \mathbb{F}(10, 7, -9, 10)$, la representación en punto flotante normalizado (con redondeo si corresponde), de z.
Considerando $x = 3,141592653589$, $y = 2,7182818284590$, calcular a mano:

A.III.1 $\text{fl}(x + y)$. **03 puntos**

DESARROLLO: Tenemos $x + y = 5.859874482048 = 0.5859874482048 \times 10^1$, de donde $\text{fl}(x + y) = 0.5859874 \times 10^1$.

A.III.2 $\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y)$. **03 puntos**

DESARROLLO: Tenemos

- $x = 0.3141592653589 \times 10^1$. Luego, $\mathrm{fl}(x) = 0.3141593 \times 10^1$,
- $y = 0.2718281828459 \times 10^1$. Luego, $\mathrm{fl}(y) = 0.2718282 \times 10^1$.

Finalmente, $\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y) = 0.5859875 \times 10^1$.

Pregunta B. Considere los puntos del plano $(0,0)$, $(3,72)$ y $(5,110)$.

B.I Determinar los polinomios de Lagrange asociados a las abscisas de cada punto dado. **06 puntos**

DESARROLLO: Denotamos $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_1,y_1)=(3,72)$ y $(x_2,y_2)=(5,110)$. Luego

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in\mathbb{R} \,:\, \ell_0(x) &= \frac{(x-3)(x-5)}{(0-3)(0-5)} = \frac{(x-3)(x-5)}{15}\,,\\
\forall\, x\in\mathbb{R} \,:\, \ell_1(x) &= \frac{(x-0)(x-5)}{(3-0)(3-5)} = -\frac{x(x-5)}{6}\,,\\
\forall\, x\in\mathbb{R} \,:\, \ell_2(x) &= \frac{(x-0)(x-3)}{(5-0)(5-3)} = \frac{x(x-3)}{10}\,.
\end{aligned}$$

B.II Determinar el polinomio del menor grado posible, que interpola los puntos dados. Debe expresar dicho polinomio en términos de la base canónica correspondiente. **05 puntos**

DESARROLLO: Aplicando el TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE POLINOMIO INTERPOLANTE, sabemos que existe un único polinomio interpolante $p\in\mathcal{P}_2$ (de menor grado posible), el cual viene dado por

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in\mathbb{R} \,:\, p(x) &= \sum_{j=0}^{2} y_j \ell_j(x)\\
&= 72\ell_1(x) + 110\ell_2(x)\\
&= -12x(x-5) + 11x(x-3) = 27x - x^2\,.
\end{aligned}$$

B.III Suponga que el polinomio determinado en B.II interpola a cierta función suficientemente derivable y continua f en los tres puntos dados del plano. Además, se sabe que esta función satisface la propiedad:

$$\forall\, m\in\mathbb{Z}^+ \,:\, \forall\, x\in[0,5] \,:\, |f^{(m)}(x)| \le \left(\frac{2^{m+1}}{2m+1}\right)\left(10^{-m}\right).$$

Determinar una cota, lo más simplificada posible, del error de interpolación cometido en el nodo 1.5 **04 puntos**

DESARROLLO: Aplicando el TEOREMA DE ERROR DE INTERPOLACIÓN POLINOMIAL visto en clases, $\exists\,\xi\in(0,5)$ tal que

$$f(1.5)-p(1.5) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(1.5-0)(1.5-3)(1.5-5)\,.$$

Luego, tomando en cuenta la propiedad (con $m=3$), resulta

$$|f(1.5)-p(1.5)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(1.5)(-1.5)(-3.5)\right| \le \frac{1}{6}\left(\frac{2^4}{7}\right)\left(10^{-3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = 3\cdot 10^{-3}\,.$$

Pregunta C. Sean $\{A_1, A_2\} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $x_2 \in (0,1)$ parámetros con los cuales se define la REGLA DE CUADRATURA

$$J(f) := A_1\, f(0) \,+\, A_2\, f(x_2)\,,$$

que aproxima el valor exacto de $I(f) := \int_0^1 f(x)dx$. Determinar valores de los parámetros indicados, tales que la regla de cuadratura $J(f)$ tenga grado de exactitud el mayor posible. Debe deducir además cuál es dicho grado de exactitud. **15 puntos**

DESARROLLO: Imponemos la exactitud de la regla de cuadratura propuesta con los primeros elementos de la base canónica de $\mathcal{P} = \langle \{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0^+}\rangle$, hasta obtener sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas y de ecuaciones.

$$J(e_0) = I(e_0) \quad \Rightarrow \quad A_1 + A_2 = 1 \tag{C.1}$$

$$J(e_1) = I(e_1) \quad \Rightarrow \quad A_2 x_2 = \frac{1}{2} \tag{C.2}$$

$$J(e_2) = I(e_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 x_2^2 = \frac{1}{3} \tag{C.3}$$

De (C.3) y (C.2) se deduce que $x_2 = 2/3$. Así, de (C.2) se obtiene $A_2 = 3/4$. De esta manera, de (C.1) resulta $A_1 = 1/4$. La regla de cuadratura obtenida es entonces

$$J(f) := \frac{1}{4}\, f(0) \,+\, \frac{3}{4}\, f(2/3)\,.$$

GRADO DE EXACTITUD DE $J(f)$: Como

$$J(e_3) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4} = I(e_3)\,,$$

se concluye que la regla $J(f)$ tiene grado de exactitud 2.

Pregunta D.

Un automóvil realiza un recorrido por una carretera prácticamente rectilínea, cronometrándose su velocidad v en varios instantes, según la tabla adjunta.

t [seg]	0	5	10	15	20
$v(t)$ [Km/seg]	30	60	50	70	40

Interesa estimar la distancia recorrida por el automóvil en el intervalo de tiempo $[0,20]$, es decir, el valor de $\int_0^{20} v(t)dt$. Para este fin aproxime el valor de la integral planteada:

D.I aplicando la REGLA DE SIMPSON SIMPLE. **05 puntos**

DESARROLLO: Tenemos

$$\int_0^{20} v(t)dt \approx \frac{20-0}{6}\,(v(0)+4v(10)+v(20)) = \frac{10}{3}(30+200+40) = 900\,[\text{Km}]\,.$$

D.II aplicando la REGLA DEL PUNTO MEDIO COMPUESTA, con 2 subintervalos, cada uno de longitud $h = 10$. **05 puntos**

DESARROLLO: Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{20} v(t)dt &= \int_0^{10} v(t)dt + \int_{10}^{20} v(t)dt\\ &\approx (10)v(5) + (10)v(15) = 600 + 700 = 1300\,[\text{Km}]\,.\end{aligned}$$

D.III aplicando la REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTA, con 4 subintervalos, cada uno de longitud $h = 5$. **05 puntos**

DESARROLLO: Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{20} v(t)dt &= \int_0^{5} v(t)dt + \int_5^{10} v(t)dt + \int_{10}^{15} v(t)dt + \int_{15}^{20} v(t)dt\\ &\approx \frac{5}{2}(v(0)+v(5)) + \frac{5}{2}(v(5)+v(10)) + \frac{5}{2}(v(10)+v(15)) + \frac{5}{2}(v(15)+v(10))\\ &= \frac{5}{2}(90+110+120+110) = \frac{5}{2}(430) = 1075\,[\text{Km}]\,.\end{aligned}$$