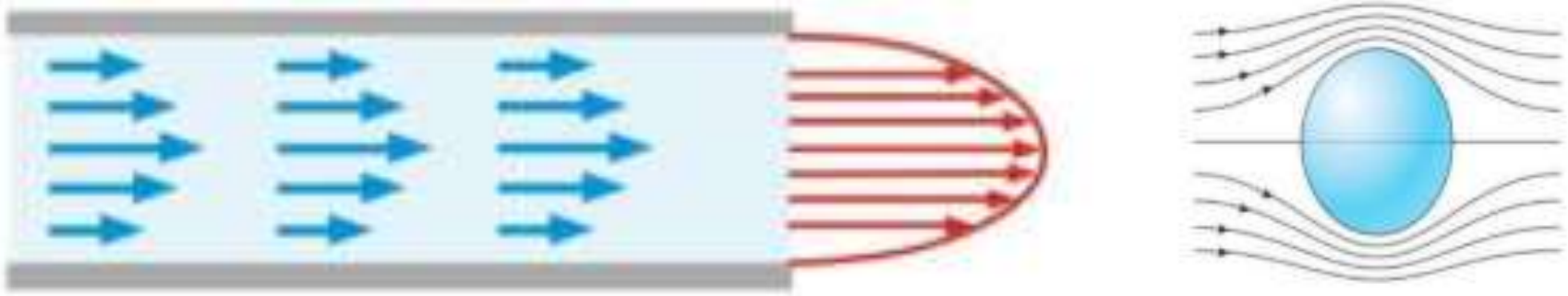


Mecánica de Fluidos

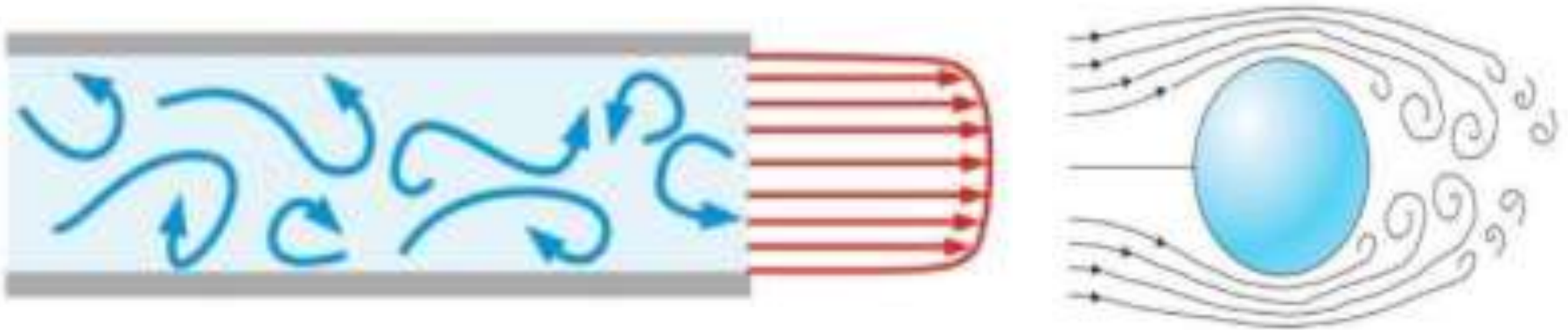
Flujo viscoso

Introducción

- Para flujos a velocidades bajas el movimiento se realiza en capas con gradientes de velocidad suaves



- Para flujos a velocidades mayores el movimiento es brusco con la presencia de remolinos



- El parámetro más importante para reconocer el tipo de flujo es el número de Reynolds Re . Para flujo en tuberías cerradas

$$0 < Re < 2100$$

Flujo Laminar

$$2100 \leq Re < 4000$$

Flujo de transición

$$4000 < Re$$

Flujo Turbulento

donde

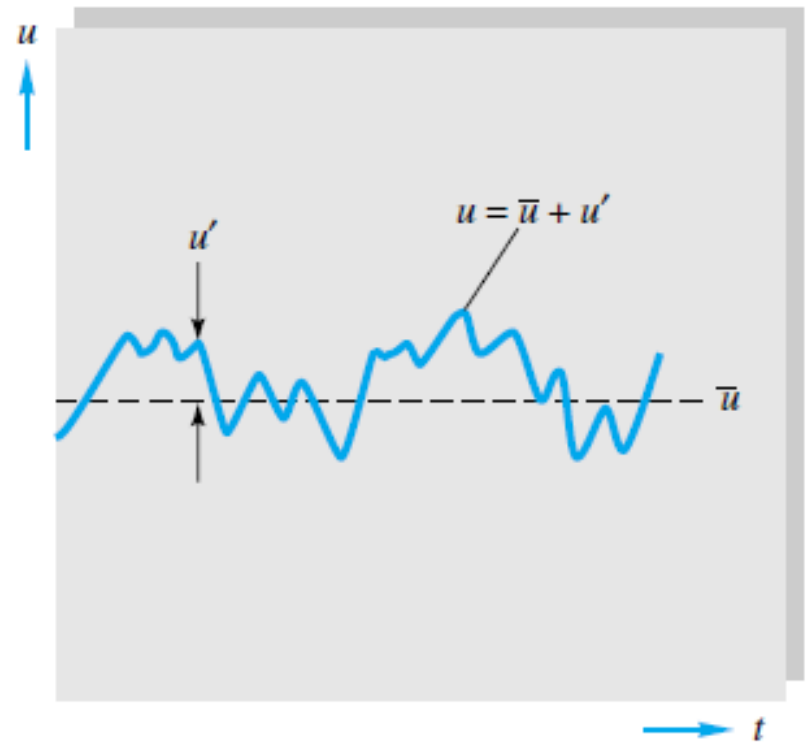
$$Re = \frac{VD\rho}{\mu}$$

- En un flujo turbulento las 3 componentes de la velocidad son distintas a 0 y exhiben un comportamiento aleatorio. Para describir las velocidades en un flujo turbulento se utilizan promedios y perturbaciones:

$$u = \underbrace{\bar{u}}_{\text{promedio}} + \underbrace{u'}_{\text{perturbación}}$$

donde

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$



y u' es la perturbación aleatoria

Notemos que: $\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u dt - \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$

Sin embargo el cuadrado promedio de la fluctuación no es 0

$$\overline{(u')^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u})^2 dt > 0$$

Analicemos el efecto de esta modelación en las ecs. de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w} + w')}{\partial z} = 0$$

Tomemos el promedio

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w} + w')}{\partial z} \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int_0^T u' dt \right)}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \int_0^T v' dt \right)}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int_0^T w' dt \right)}_0 = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Veamos que pasa en la ecuación de momentum

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \vec{g} \cdot \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Los términos lineales se comportan análogamente a la ec. de continuidad.

Veamos el sgte término

$$\frac{\partial u}{\partial x} u = \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} (\bar{u} + u') = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x}$$

Tomemos el promedio en el tiempo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) dt \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' + \frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned}$$

Realizando lo mismo para todos los otros términos se llega a:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \bar{w} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \vec{g} \cdot \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \frac{\rho}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\rho}{T} \int_0^T v' \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\rho}{T} \int_0^T w' \frac{\partial u'}{\partial z} \end{aligned}$$

Notemos que:

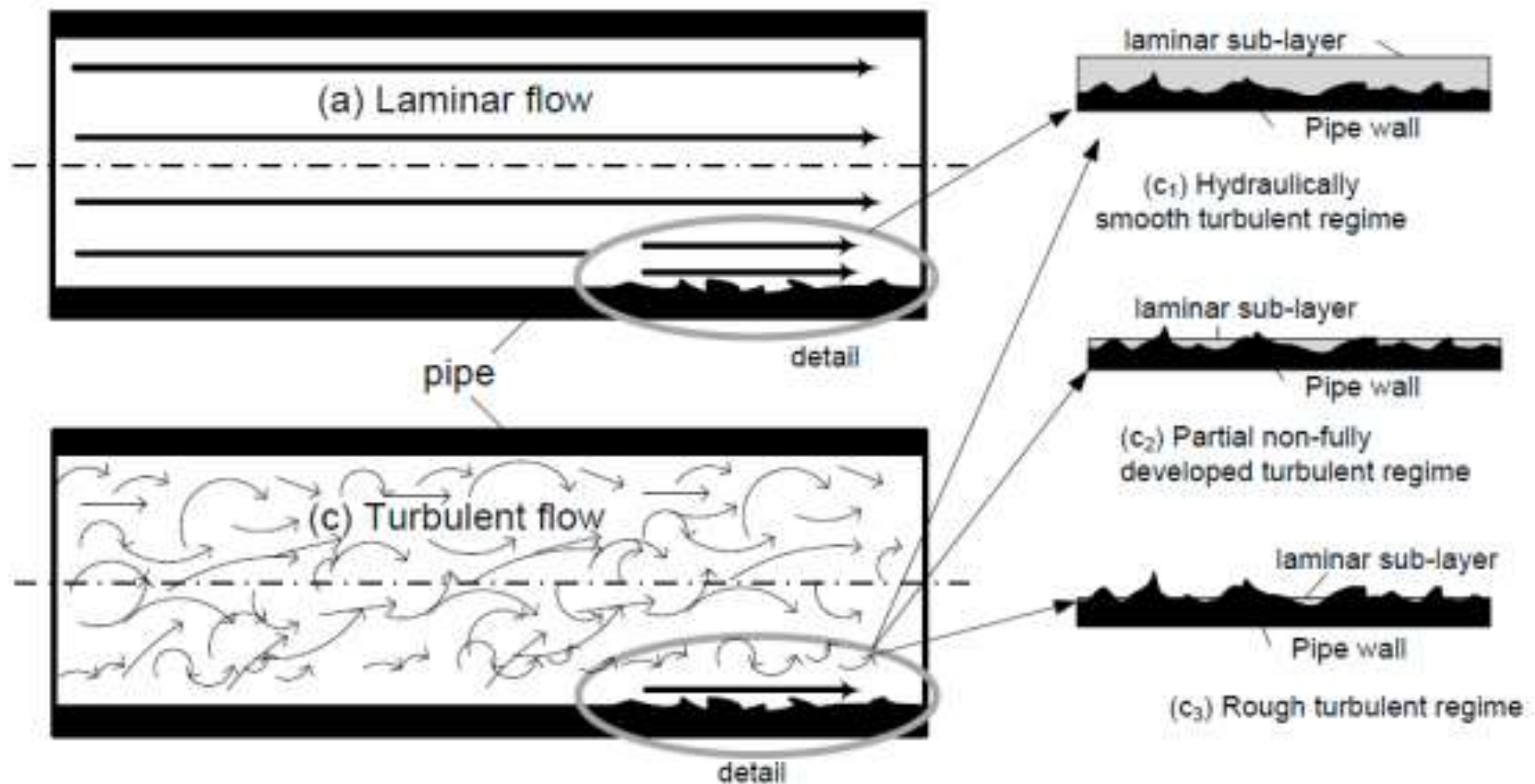
$$\begin{aligned}
 & -\frac{\rho}{T} \int_0^T \frac{\partial(u'^2)}{\partial x} - \frac{\rho}{T} \int_0^T \frac{\partial(v'u')}{\partial y} - \frac{\rho}{T} \int_0^T \frac{\partial(w'u')}{\partial z} \\
 &= -\frac{\rho}{T} \int_0^T \left(2u' \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial v'}{\partial y} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \\
 &= -\frac{\rho}{T} \int_0^T \left(u' \underbrace{\left[\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right]}_{0 \text{ por continuidad}} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \\
 &= -\frac{\rho}{T} \int_0^T \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación de movimiento

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \bar{w} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \vec{g} \cdot \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \underbrace{\rho \left[\frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (v'u')}{\partial y} + \frac{\partial (w'u')}{\partial z} \right]}_{\text{ESFUERZOS TURBULENTOS}}$$

La mecánica de fluidos computacional propone ecuaciones constitutivas para estos esfuerzos y resuelve las ecuaciones resultantes

Otro aspecto relevante en el estudio del flujo en ductos es la “suavidad” de la pared. Para flujo laminar este efecto es despreciable, sin embargo debe ser considerado para flujo turbulento. Se caracteriza por la altura de la rugosidad ε



Perfil de velocidad turbulento

En una tubería en EE, régimen turbulento, el perfil de velocidad puede representarse por:

$$\frac{u(r)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(R-r)u^*}{\nu} \right] + B$$

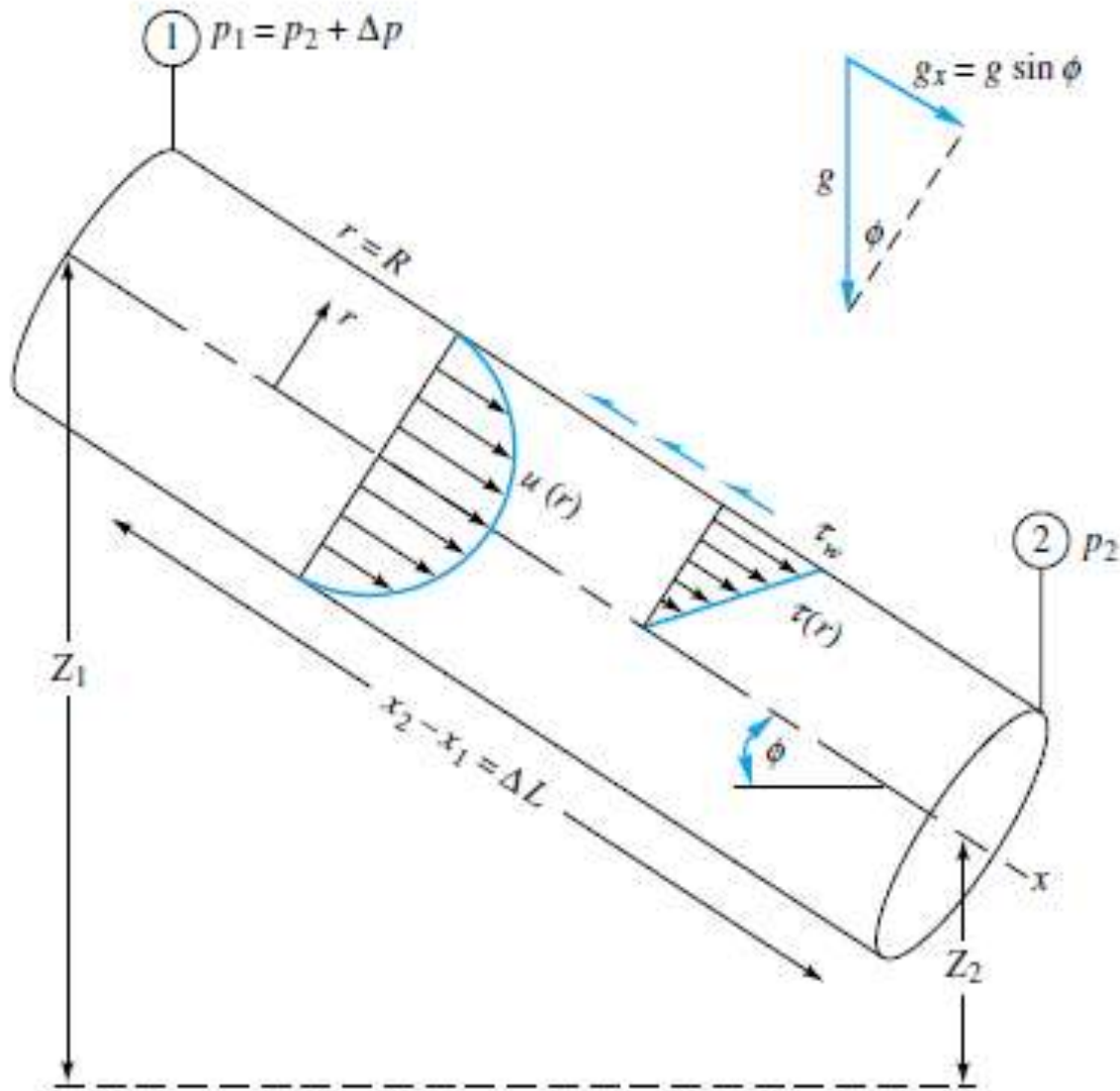
donde $\kappa = 0.41$, $B = 5$ y $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ se llama velocidad de fricción.

Perfil de velocidad laminar

En una tubería en EE, régimen laminar, el perfil de velocidad puede representarse por:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{d}{dx} (p + \rho g z) \right] (R^2 - r^2)$$

Balance de Masa, Momentum y Energía en una tubería



C. Masa: $Q \text{ cte} \Rightarrow V_1 = V_2$

C. Momentum:

$$\Delta p \pi R^2 + \rho g \pi R^2 \Delta L \sin \phi - \tau_w 2\pi R \Delta L = \dot{m}(V_2 - V_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta z = \tau_w \frac{2\Delta L}{\rho g R}, \text{ donde se usó } \Delta L \sin \phi = \Delta z$$

C. Energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta z = h_f = \tau_w \frac{2\Delta L}{\rho g R}$$

Notemos que no se ha supuesto ningún tipo de régimen.

Supondremos que $\tau_w = \tau_w(\rho, V, \mu, d, \varepsilon)$

Realicemos un AD.

$$\tau_w = \tau_w(\rho, V, \mu, d, \varepsilon) \Rightarrow n = 6$$

ρ	V	μ	D	ε	τ_w
ML^{-3}	LT^{-1}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	L	$ML^{-1}T^{-2}$

(D, V, ρ) no forman un adimensional

$$\Pi_1 = V^a \rho^b D^c \varepsilon = \frac{\varepsilon}{D} := \varepsilon^*$$

$$\Pi_2 = V^a \rho^b D^c \mu = \frac{\mu}{VD\rho} = \frac{1}{\text{Re}}$$

$$\Pi_3 = V^a \rho^b D^c \tau_w = \frac{\tau_w}{V^2 \rho}$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = \Pi_3(\Pi_1, \Pi_2)$$

$$\frac{\tau_w}{V^2 \rho} = \text{función}\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Históricamente esta relación se ha escrito:

$$\frac{8\tau_w}{V^2\rho} := f(\text{Re}, \varepsilon^*) \quad \text{donde } \varepsilon^* \text{ se denomina } \underline{\text{rugosidad relativa}}$$

y f factor de fricción de Darcy. Notemos que:

$$h_f = \tau_w \frac{2\Delta L}{\rho g R} = f(\text{Re}, \varepsilon^*) \frac{V^2 \rho}{8} \cdot \frac{2\Delta L}{\rho g R} = f(\text{Re}, \varepsilon^*) \frac{V^2 \Delta L}{2gD}$$

ec. Darcy-Weissbach. Ahora necesitamos encontrar $f(\text{Re}, \varepsilon^*)$

$f(\text{Re}, \varepsilon^*)$ para régimen laminar

Sabemos que el perfil de velocidad está dado por:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{d}{dx}(p + \rho g z) \right] (R^2 - r^2)$$

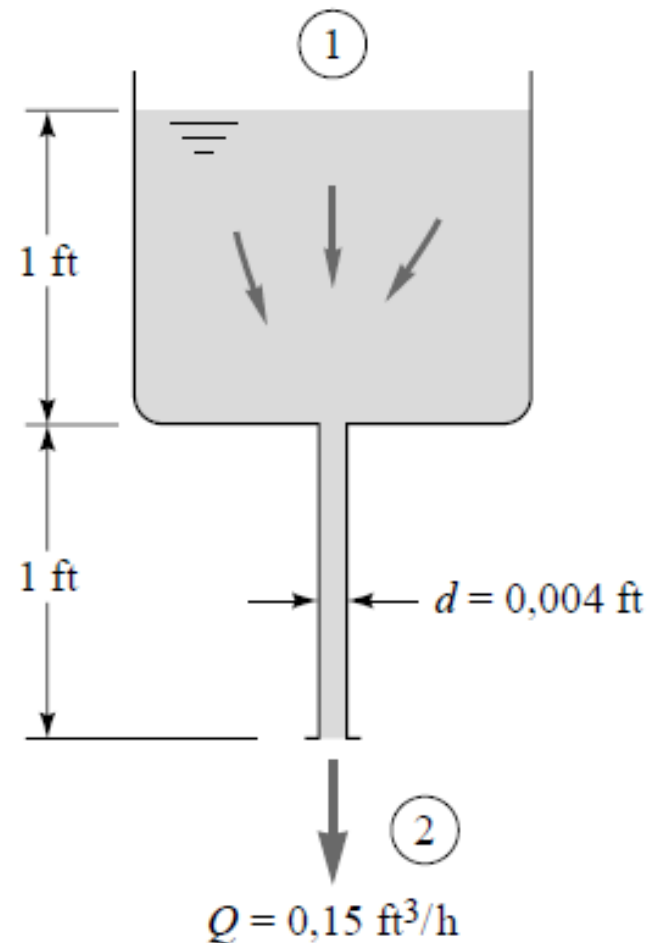
$$y \quad V = \frac{Q}{A} = \frac{R^2}{8\mu} \left[-\frac{d}{dx}(p + \rho g z) \right] \Rightarrow u(r) = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\text{Por otro lado, } \tau_w = -\mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = \left(4\mu V \frac{r}{R^2} \right) \bigg|_{r=R} = 4 \frac{\mu V}{R}$$

$$\text{pero } \tau_w = f(\text{Re}, \varepsilon^*) \frac{V^2 \rho}{8} \Rightarrow 4 \frac{\mu V}{R} = f(\text{Re}, \varepsilon^*) \frac{V^2 \rho}{8}$$

$$\Rightarrow f = \frac{64}{\text{Re}}$$

Ejemplo: Un líquido de peso específico $\gamma = 58 \text{ lb}_f/\text{ft}^3$ fluye por gravedad desde un depósito de 1 ft a través de un capilar de 1 ft de longitud con un caudal de $0,15 \text{ ft}^3/\text{h}$. La entrada y la salida están a presión atmosférica. Despreciando los efectos de la entrada, calcule la viscosidad del líquido.



Solución: Se aplica la conservación de energía entre 1 y 2

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

se supone que $V_1 = 0$. Por otro lado $Q = V_2 A \Rightarrow V_2 = 3,32 \text{ ft} / \text{s}$

$$h_f = z_1 - z_2 - \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = 1,66 \text{ ft}$$

Como es un tubo capilar suponemos que el régimen es laminar

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \Rightarrow h_f = f \frac{V^2 \Delta L}{2gD} = \frac{64\mu}{\rho V D} \frac{V^2 \Delta L}{2gD} = \mu \frac{32V \Delta L}{\rho D^2 g}$$

Desde donde es posible despejar $\mu = 1,45 \cdot 10^{-5} \frac{\text{slug}}{\text{ft} \cdot \text{s}}$

Verificamos que $\text{Re} < 2100$, en efecto $\text{Re} = 1650$.

$f(\text{Re}, \varepsilon^*)$ para régimen turbulento: pared suave

Sabemos que el perfil de velocidad está dado por:

$$\frac{u(r)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(R-r)u^*}{\nu} \right] + B,$$

donde $\kappa = 0.41$, $B = 5$ y $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$. Notemos que:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(R-r)u^*}{\nu} \right] + B \right) r dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2} u^* \left(\frac{2}{\kappa} \ln \left[\frac{Ru^*}{\nu} \right] + 2B - \frac{3}{\kappa} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{V}{u^*} = 2.44 \ln \left(\frac{Ru^*}{\nu} \right) + 1.34$$

Notemos que: $\frac{V}{u^*} = \sqrt{\frac{\rho V^2}{\tau_w}} = \sqrt{\frac{8}{f}}$ y

$$\frac{Ru^*}{\nu} = \frac{VR}{\nu} \frac{u^*}{V} = \frac{VD}{2\nu} \frac{u^*}{V} = \frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

Reemplazamos para obtener:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 2.44 \ln \left(\frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{f}{8}} \right) + 1.34$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\text{Re} \sqrt{f} \right) - 0.8$$

Ecuación válida para paredes suaves y régimen turbulento

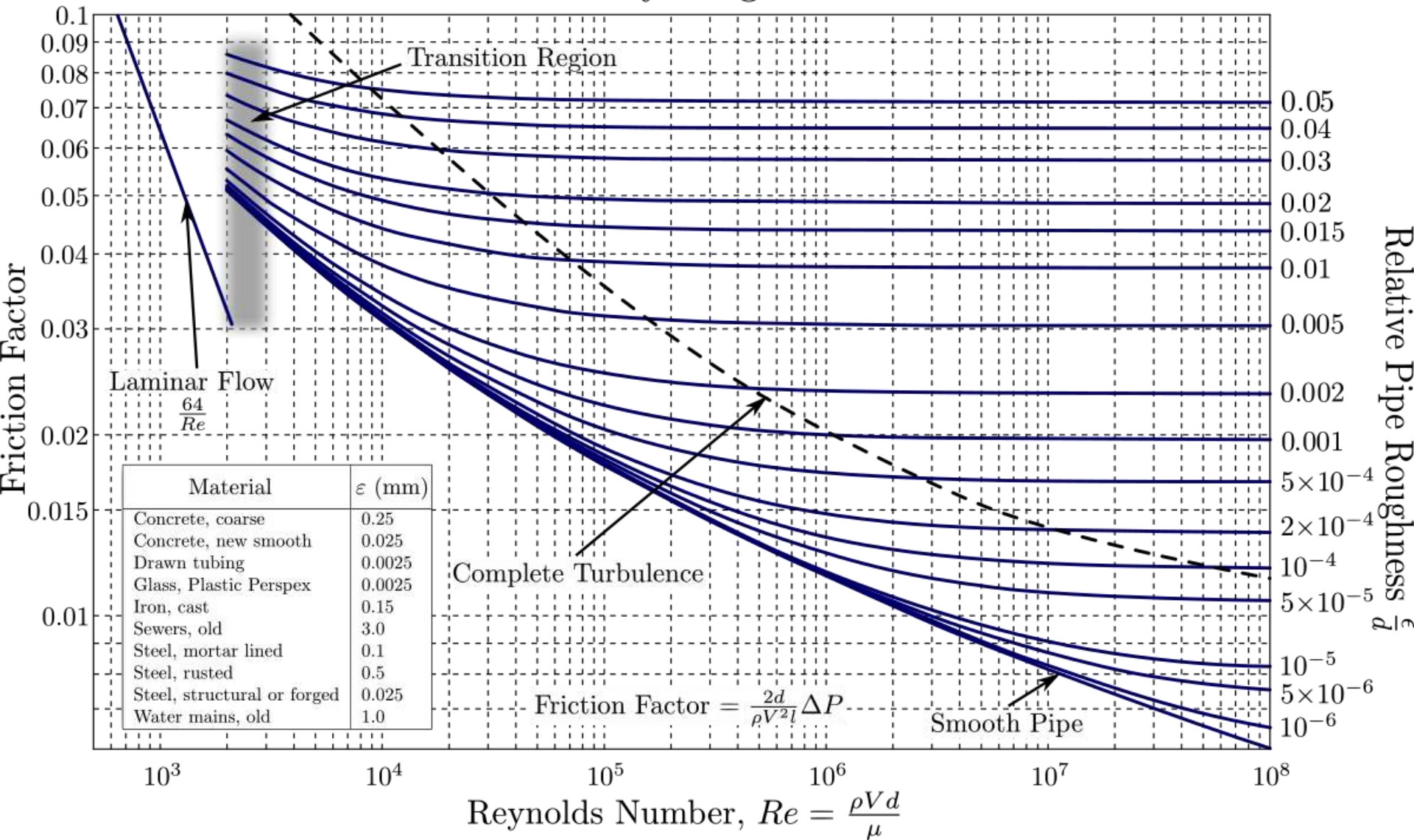
$f(\text{Re}, \varepsilon^*)$ para régimen turbulento: pared rugosa

El efecto de la pared en el factor de fricción ha sido ampliamente estudiado. La expresión más usada corresponde a la ecuación de Colebrook (1939):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7} \right)$$

Que fue resuelta numéricamente y graficada por Moody (1944)

Moody Diagram



Notemos que el diagrama de Moody incluye una zona laminar donde $f = \frac{64}{\text{Re}}$ seguida de una zona de transición. Posteriormente hay una zona curva para luego terminar en la zona de completa turbulencia donde Re es muy grande luego

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon^*}{3.7} \right)$$

Tabla 6.1. Valores recomendados de rugosidad para conductos comerciales.

ϵ				
Material	Condición	ft	mm	Incertidumbre, %
Acero	Lámina metálica, nueva	0,00016	0,05	±60
	Inoxidable	0,000007	0,02	±50
	Comercial, nuevo	0,00015	0,046	±30
	Estriado	0,01	3,0	±70
	Oxidado	0,007	2,0	±50
Hierro	Fundido, nuevo	0,00085	0,26	±50
	Forjado, nuevo	0,00015	0,046	±20
	Galvanizado, nuevo	0,0005	0,15	±40
	Fundido asfáltico	0,0004	0,12	±50
Latón	Laminado	0,000007	0,002	±50
Plástico	Tubo laminado	0,000005	0,0015	±60
Vidrio	—	Liso	Liso	
Hormigón	Liso	0,00013	0,04	±60
	Rugoso	0,007	2,0	±50
Caucho	Liso	0,000033	0,01	±60
Madera	En duelas	0,0016	0,5	±40

Ejemplo: Determine h_f para una tubería horizontal ($D=6\text{in}$, $L=200\text{ft}$, $\varepsilon=0.0004\text{ft}$) que transporta agua con una velocidad media de 6ft/s .

Solución:

Se aplica ec. energía.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

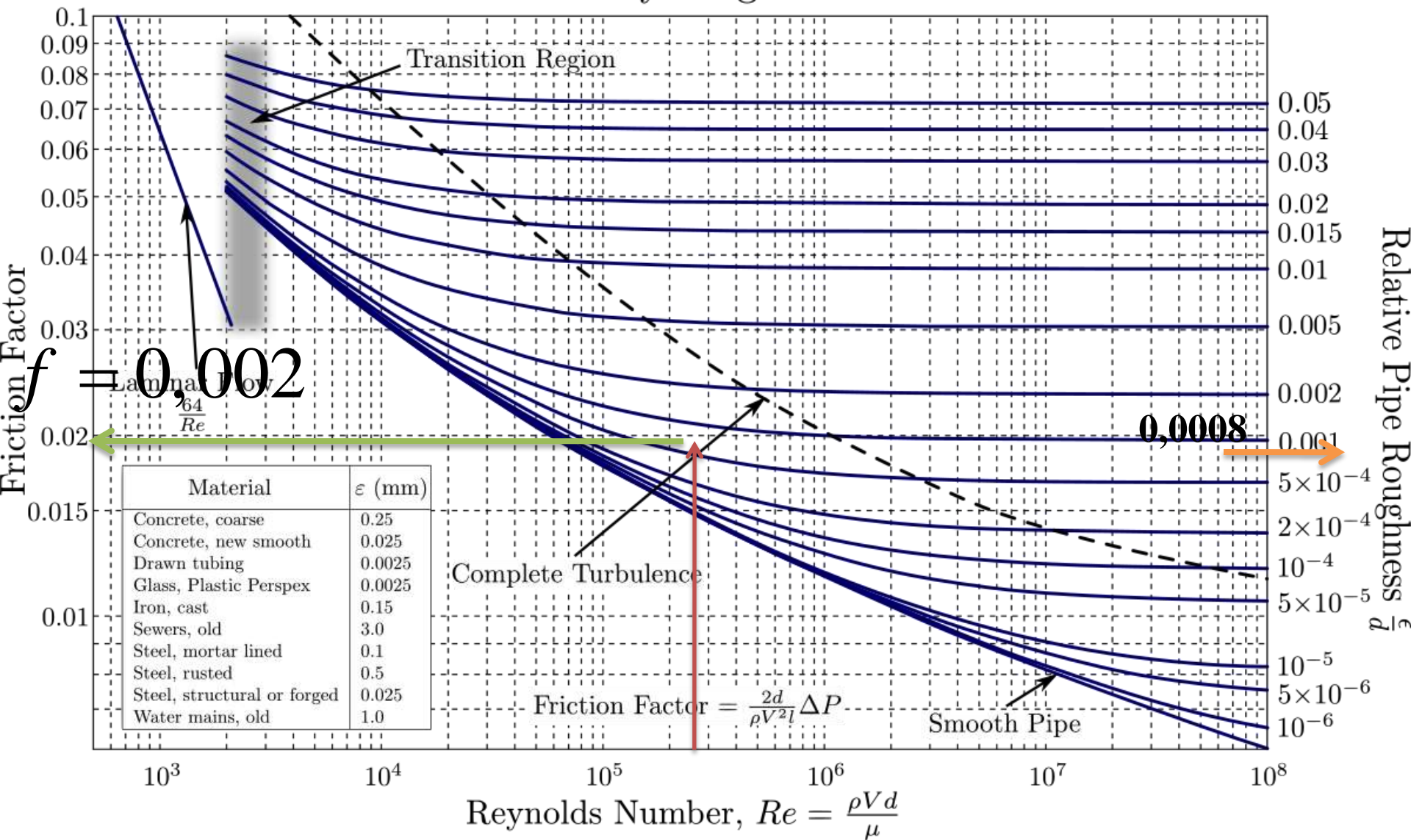
$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{LV^2}{2gD}$$

Hay que calcular f .

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = 2,7 \cdot 10^5; \varepsilon^* = 0,0008$$

$$\text{Resolvemos} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7} \right) \Rightarrow f = 0,0197$$

Moody Diagram



$$\Rightarrow h_f = 4,5 \text{ ft}$$

Ejemplo: Aceite (950 kg/m^3 , $\nu=2\text{E-}5 \text{ m}^2/\text{s}$) fluye por una tubería ($L=100\text{m}$, $D=30\text{cm}$, $\varepsilon^*=0.0002$) con una pérdida de carga de 8m . Determine Q .

Solución:

$$\left. \begin{aligned} h_f &= \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{LV^2}{2gD} \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7} \right) \end{aligned} \right\} 2 \text{ ecs, 2 incógnitas } f \text{ y } V$$

$$8 = f \frac{100V^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,3} \Rightarrow 0,47 = fV^2$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{V \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow V = 6,66 \cdot 10^{-5} \text{ Re}$$

Hay que iterar con el diagrama de Moody

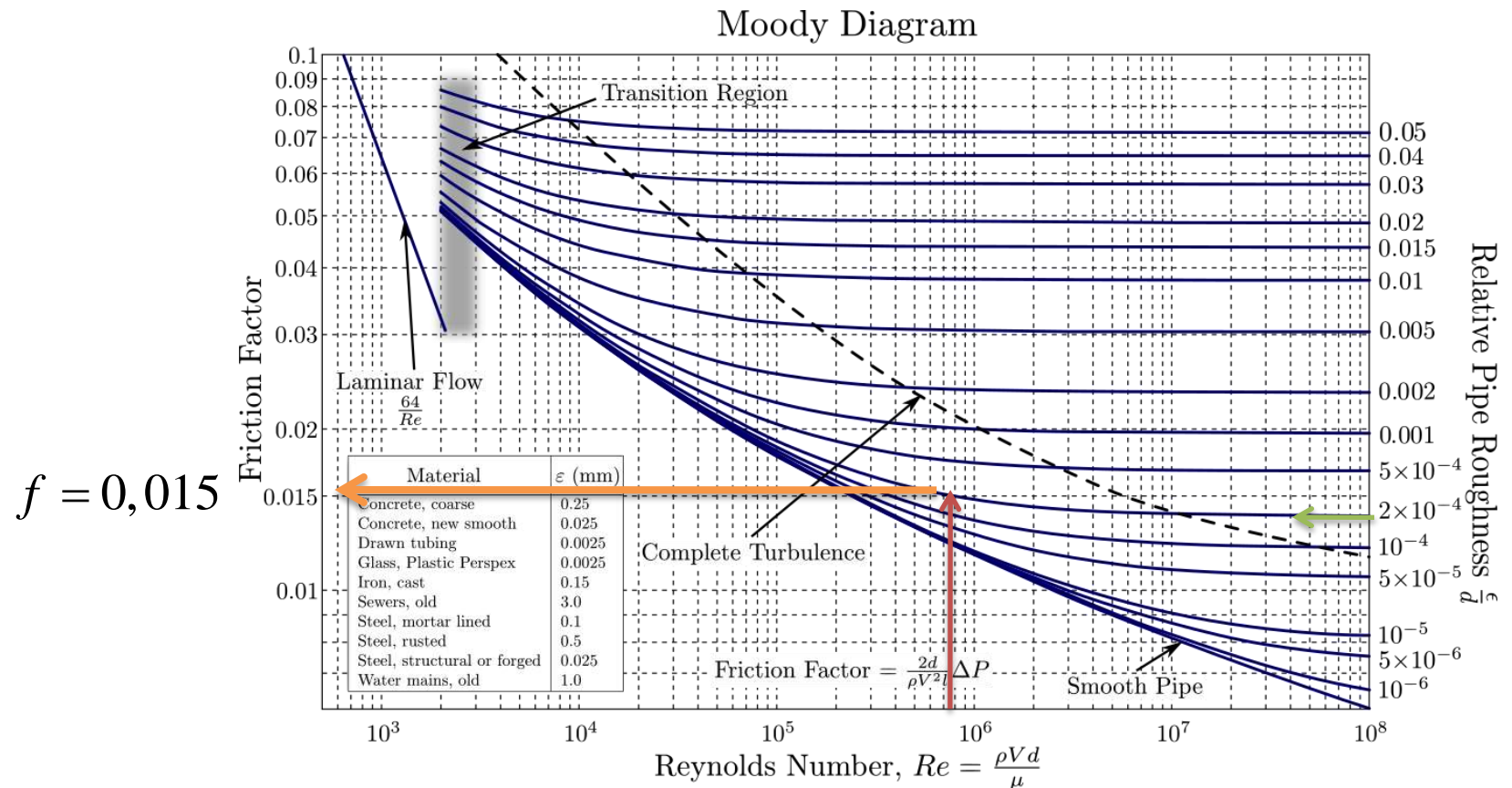
Hay dos estrategias para comenzar la iteración:

1.- partir de la mitad del gráfico, p.e., $f=0,02$

$$0,47 = fV^2 = 0,02V^2 \Rightarrow V = 4,85 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = 15000V \Rightarrow \text{Re} = 7,3 \cdot 10^5$$

Ahora se busca en el diagrama de Moody $f = f(7,3 \times 10^5; 0.0002)$



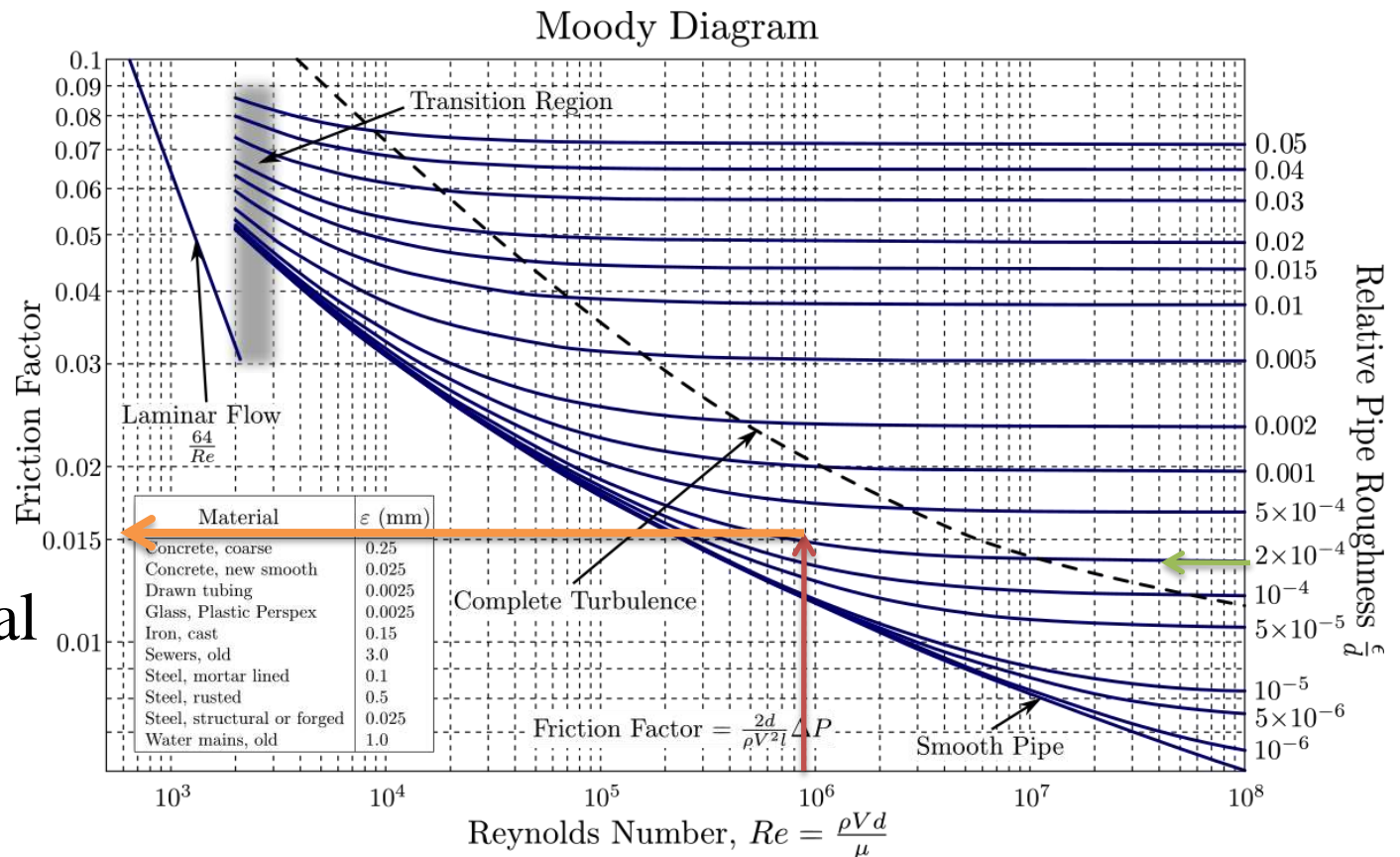
$$f = 0,015$$

$$0,47 = fV^2 = 0,015V^2 \Rightarrow V = 5,6m / s$$

$$Re = 15000V \Rightarrow Re = 8,4 \cdot 10^5$$

Ahora se busca en el diagrama de Moody $f = f(8,4 \times 10^5; 0.0002)$

$f = 0,015$
Como llegamos al
mismo f se para
la iteración



2.- partimos de turbulencia completa $f = 0,014$

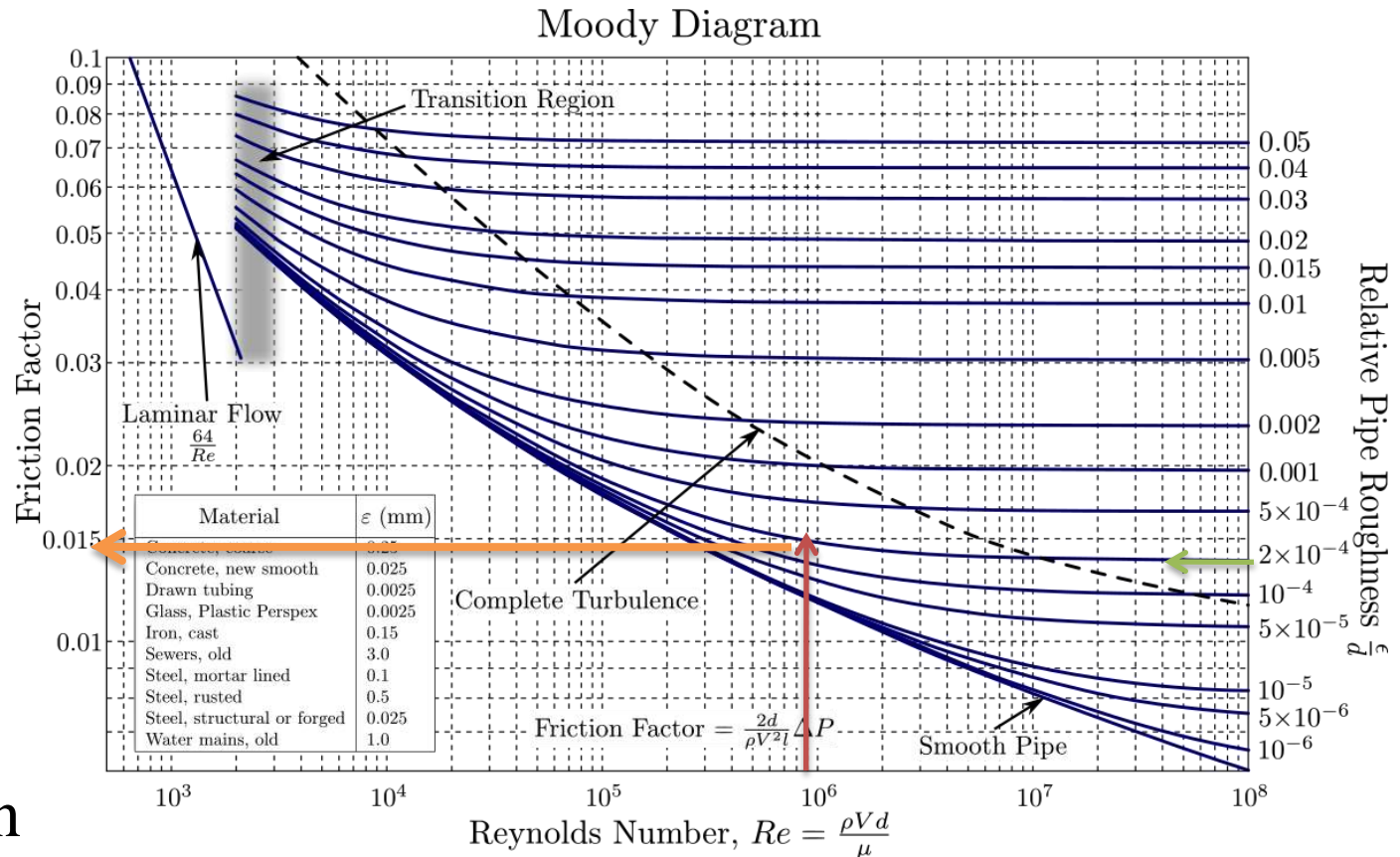
$$0,47 = fV^2 = 0,014V^2 \Rightarrow V = 5,79m / s$$

$$Re = 15000V \Rightarrow Re = 8,7 \cdot 10^5$$

Ahora se busca en el diagrama de Moody $f = f(8,7 \times 10^5; 0.0002)$

$$f = 0,015$$

Llegaremos al
mismo f y se
para la iteración



Ejemplo: Calcule el diámetro conociendo $Q = 1,18 \text{ ft}^3/\text{s}$, $L = 200 \text{ ft}$,
 $\varepsilon = 0,0004 \text{ ft}$, $\nu = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}$, $h_f = 4,5 \text{ ft}$.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} h_f &= f \frac{LV^2}{2gD} \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7} \right) \\ V &= \frac{4Q}{\pi D^2} \end{aligned} \right\} 3 \text{ ecs, } 3 \text{ incógnitas } f, V, D$$

Reemplazemos V en h_f

$$h_f = f \frac{L}{2gD} \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 \Rightarrow D = 1,093 f^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{D}{\nu} \frac{4Q}{\pi D^2} \Rightarrow \text{Re} = \frac{136600}{D} \quad \text{y} \quad \varepsilon^* = \frac{0,0004}{D}$$

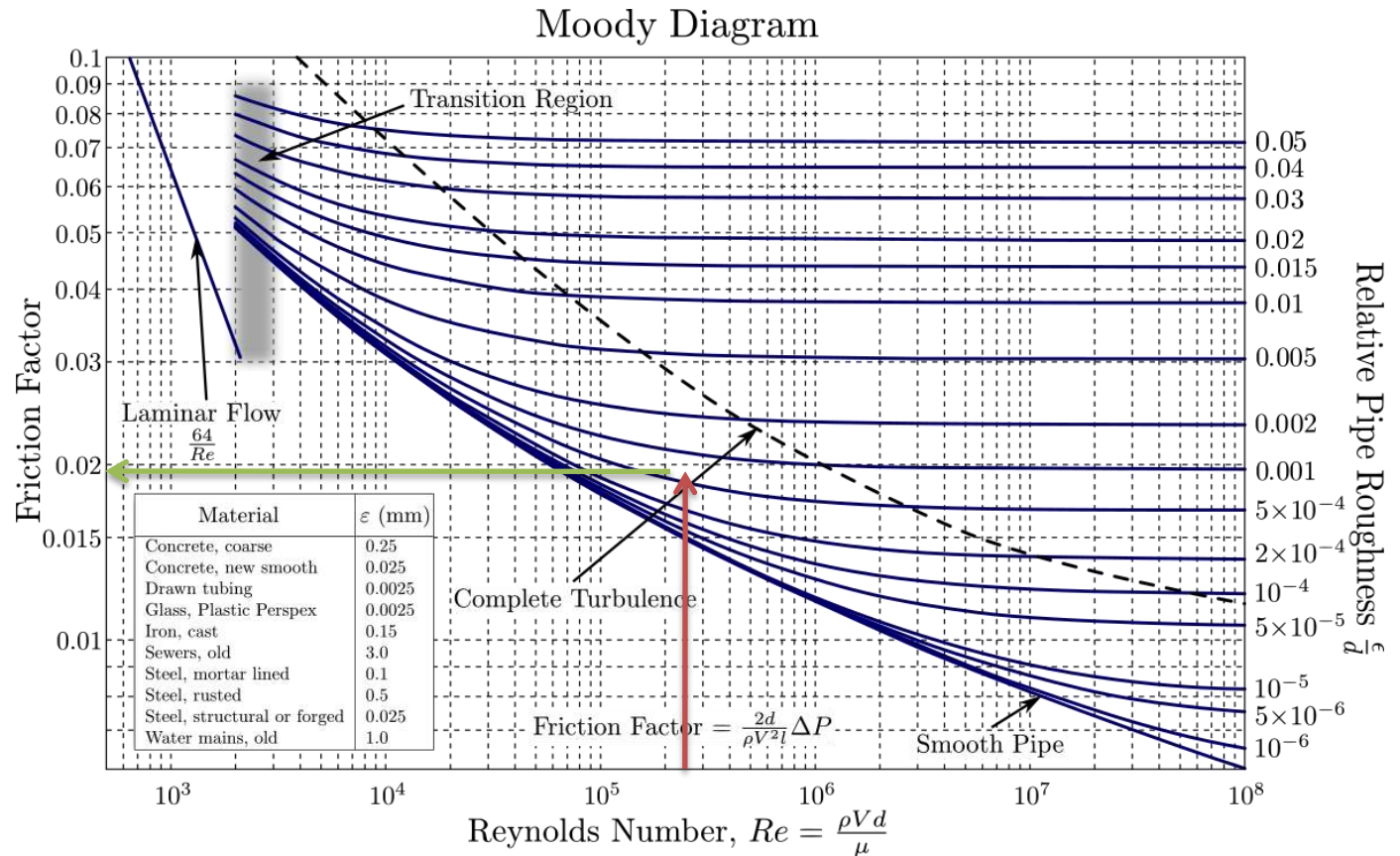
Partimos la iteración con $f=0,03$

$$\Rightarrow D = 1,093 f^{\frac{1}{5}} = 0,542 \text{ ft}$$

$$\Rightarrow Re = \frac{136600}{D} = 252000 \quad \text{y} \quad \varepsilon^* = \frac{0,0004}{D} = 7,38 \cdot 10^{-4}$$

Buscamos en el diagrama de Moody

$$f = 0.02$$



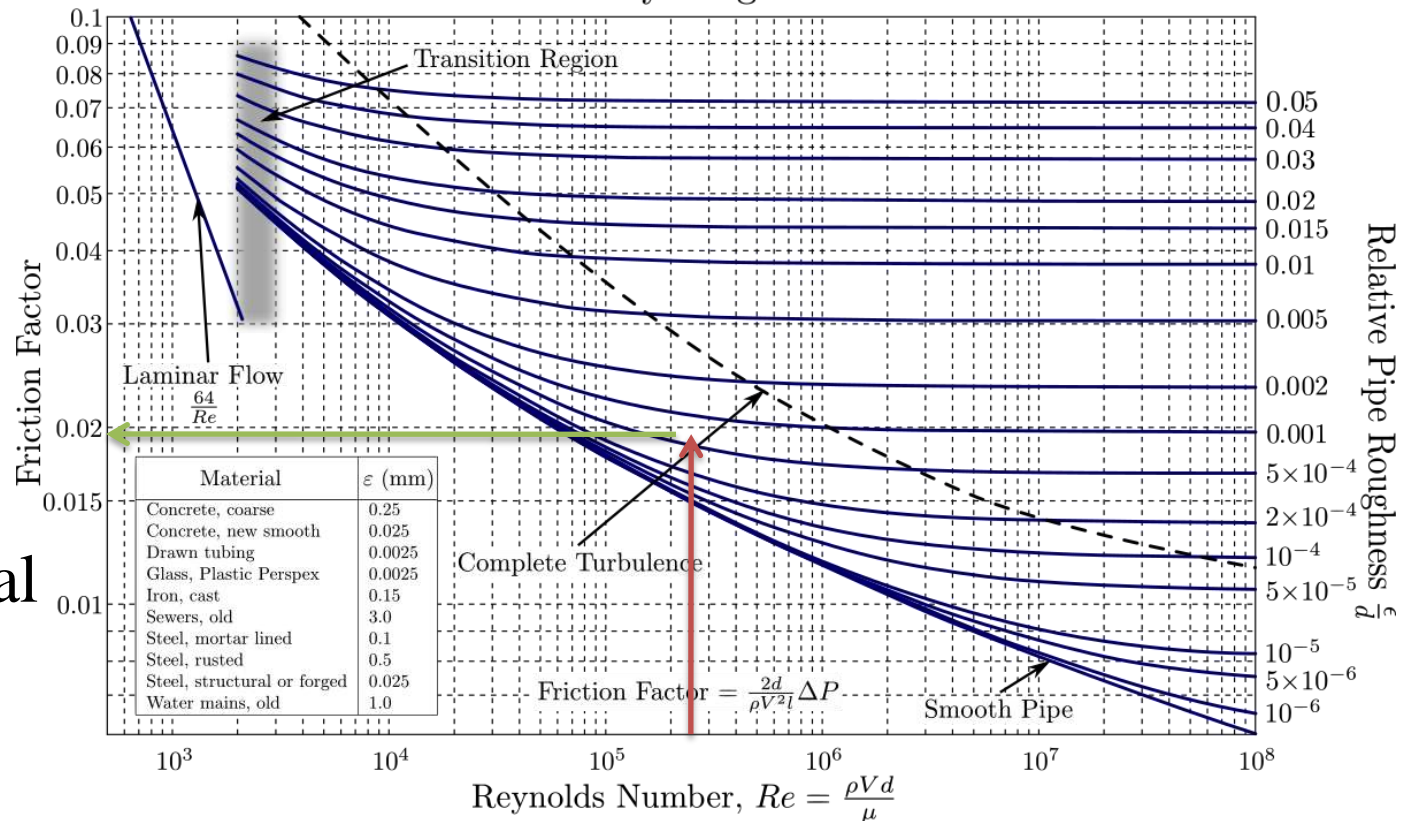
Continuamos iterando con $f=0,02$

$$\Rightarrow D = 1,093 f^{\frac{1}{5}} = 0,5 \text{ ft}$$

$$\Rightarrow Re = \frac{136600}{D} = 273000 \quad y \quad \varepsilon^* = \frac{0,0004}{D} = 8 \cdot 10^{-4}$$

Buscamos en el diagrama de Moody

Moody Diagram



$$f = 0.02$$

Como llegamos al mismo f se para la iteración

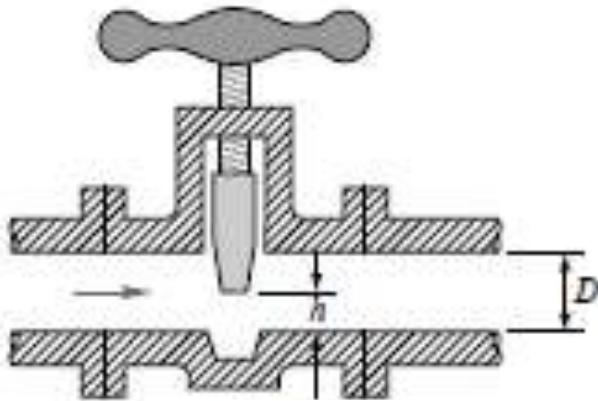
Pérdidas menores

- En adición a las pérdidas por fricción en un sistema de tuberías existen pérdidas llamadas menores o singulares debido a: entradas/salidas, expansiones/contracciones, codos/curvas/T, uniones, válvulas (abiertas o semi-abiertas), sensores, etc.
- Estas pérdidas suelen caracterizarse por un número adimensional K tal que:

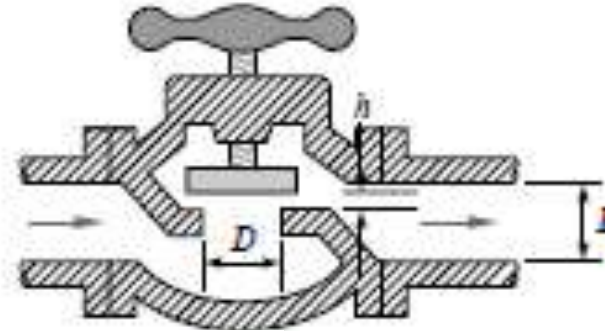
$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_{total} = h_f + h_m = f \frac{LV^2}{2gD} + \sum_i K_i \frac{V^2}{2g}$$

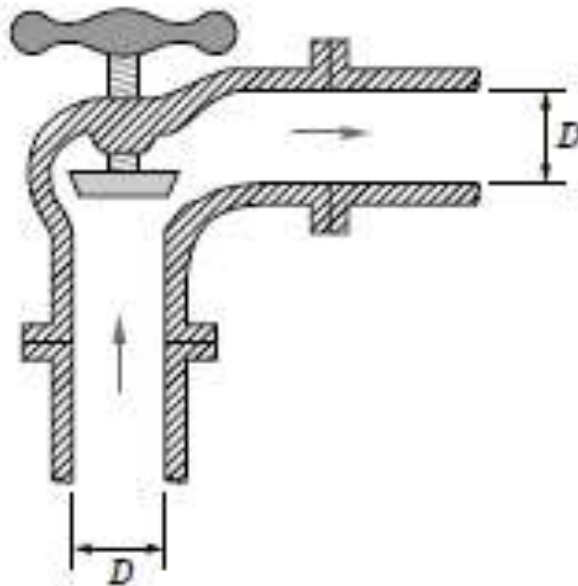
Tipos de válvulas



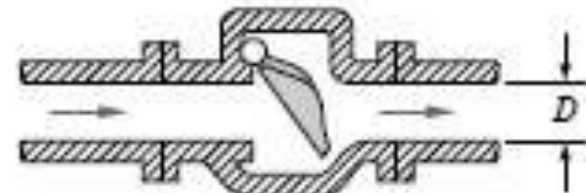
compuerta



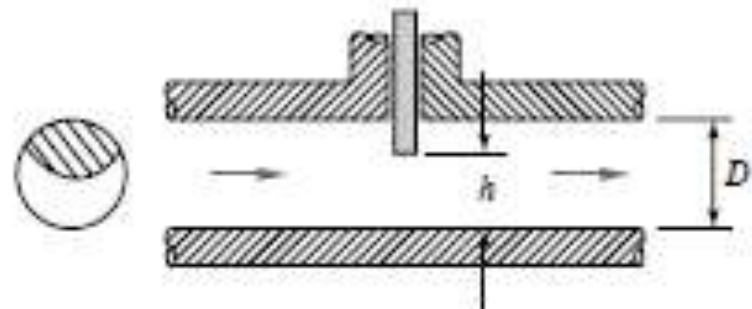
globo



ángulo



retención



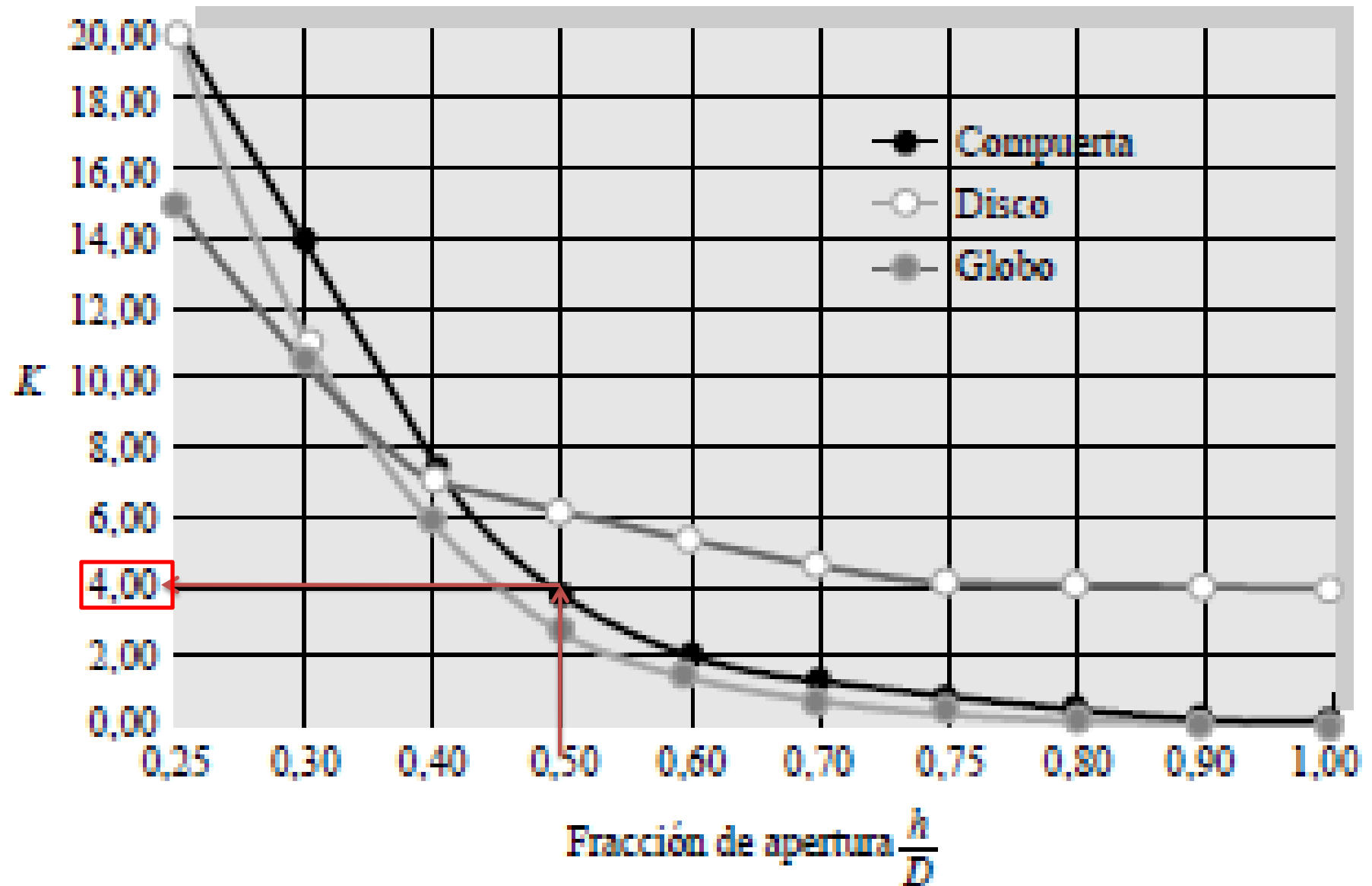
disco

Pérdidas en válvulas abiertas

Tabla 6.5. Coeficientes de pérdida $K = h_m/[V^2/(2g)]$ para válvulas abiertas, codos y «tes».

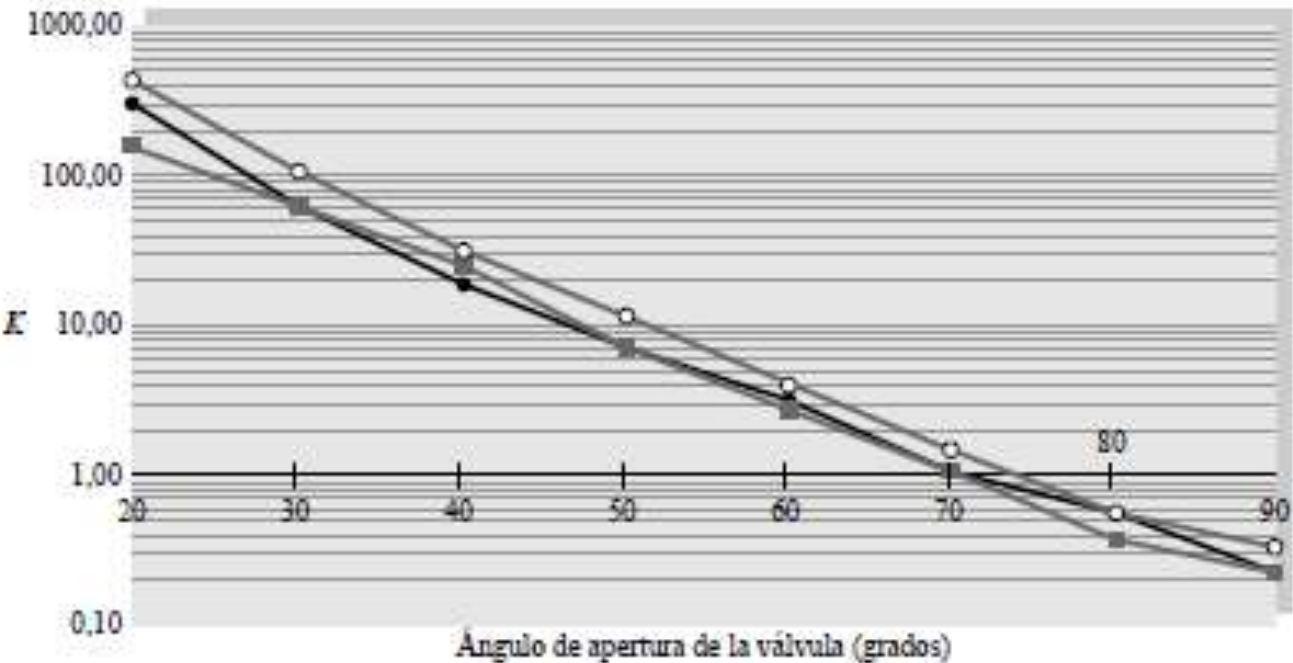
	Diámetro nominal, in								
	Roscado				Acoplado				
	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1	2	4	8	20
Válvulas (abiertas):									
Globo	14	8,2	6,9	5,7	13	8,5	6,0	5,8	5,5
Compuerta	0,30	0,24	0,16	0,11	0,80	0,35	0,16	0,07	0,03
De retención	5,1	2,9	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
De ángulo	9,0	4,7	2,0	1,0	4,5	2,4	2,0	2,0	2,0
Codos:									
45° normal	0,39	0,32	0,30	0,29					
45° suave					0,21	0,20	0,19	0,16	0,14
90° normal	2,0	1,5	0,95	0,64	0,50	0,39	0,30	0,26	0,21
90° suave	1,0	0,72	0,41	0,23	0,40	0,30	0,19	0,15	0,10
180° normal	2,0	1,5	0,95	0,64	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20
180° suave					0,40	0,30	0,21	0,15	0,10
«Tes»:									
Flujo directo	0,90	0,90	0,90	0,90	0,24	0,19	0,14	0,10	0,07
Flujo lateral	2,4	1,8	1,4	1,1	1,0	0,80	0,64	0,58	0,41

Válvulas parcialmente abiertas





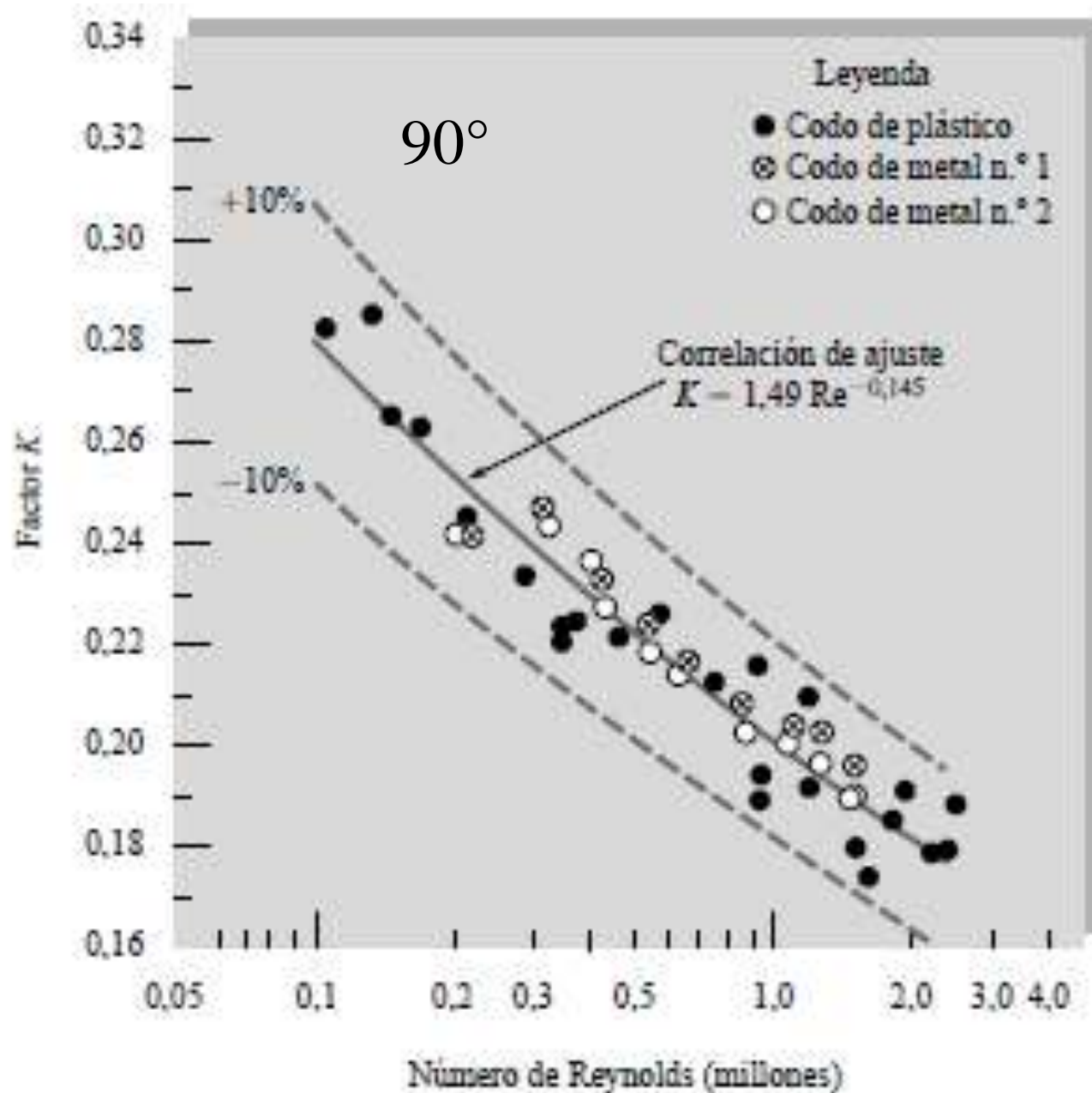
(a)

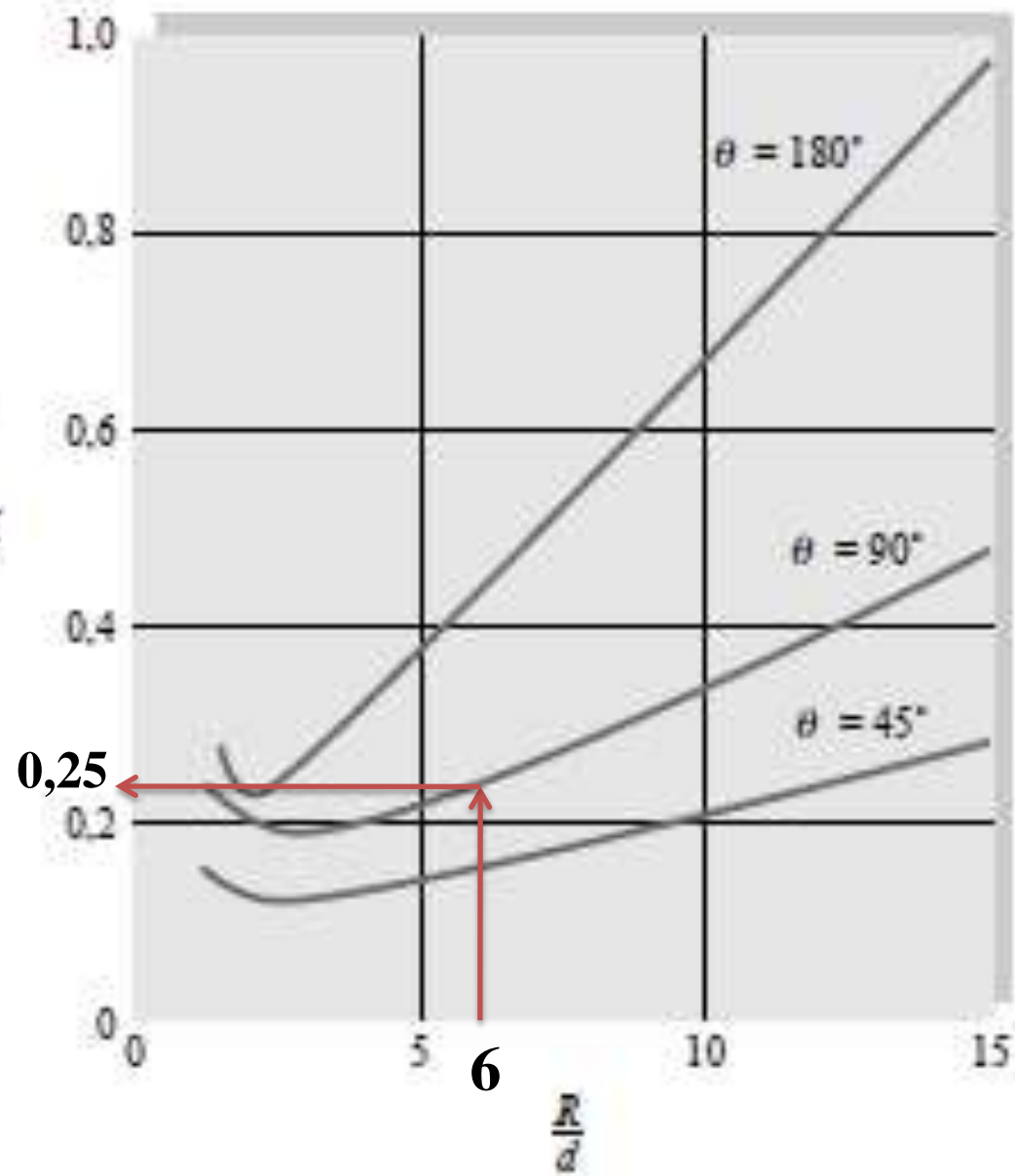
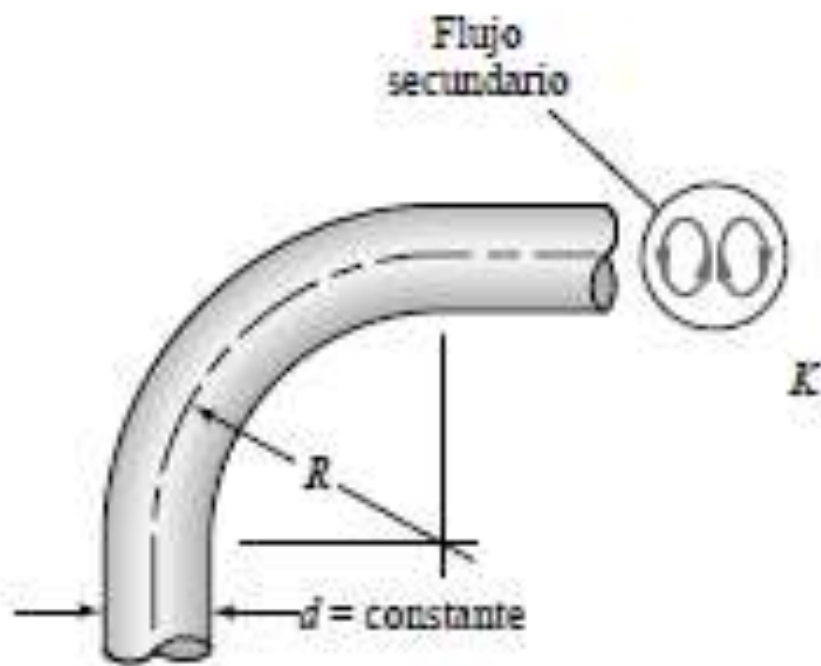


(b)

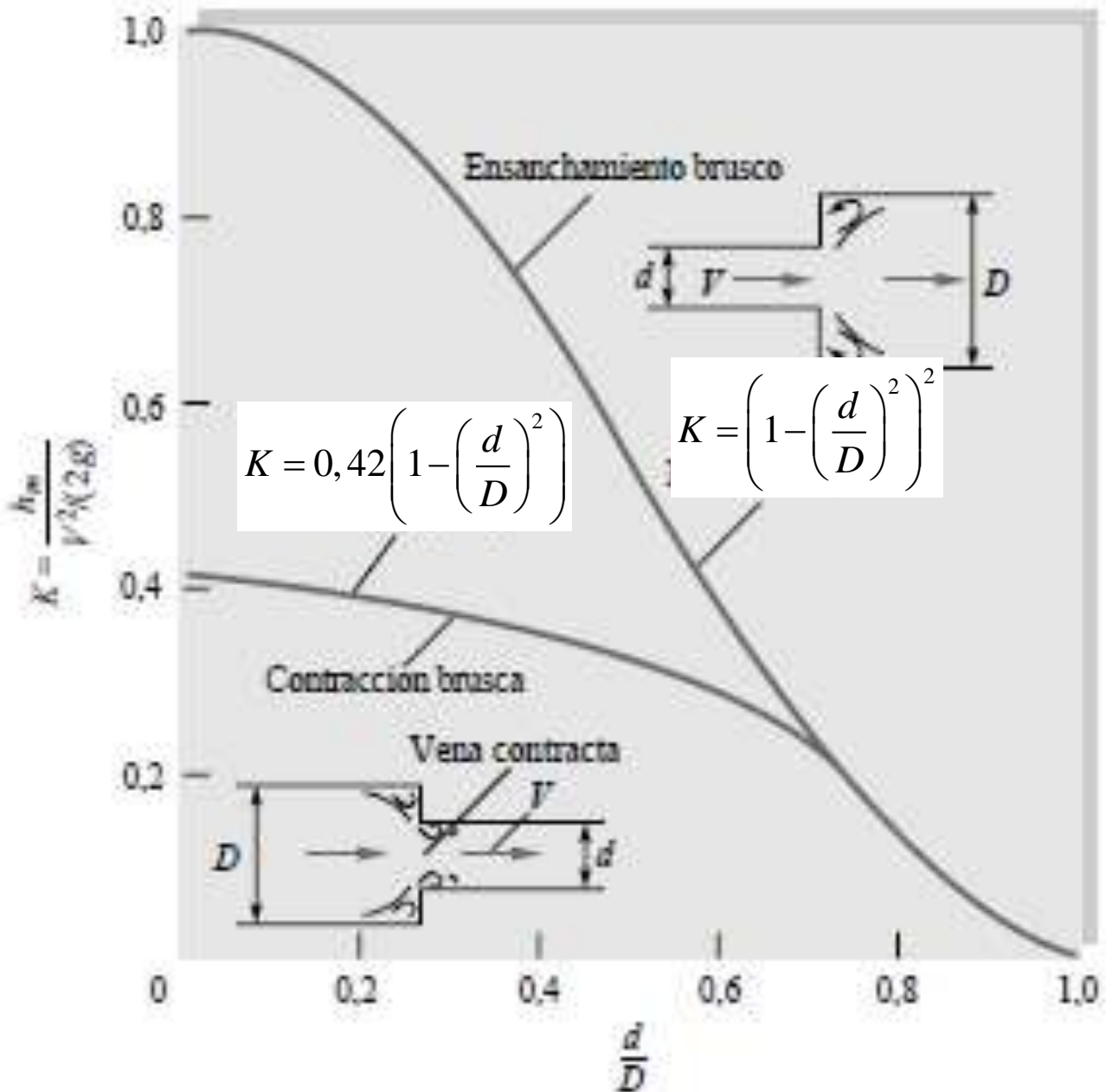
Figura 6.19. Actuaciones de válvulas de mariposa: (a) geometría típica (cortesía de Tyco Engineered Products and Services); (b) coeficientes de pérdida de tres fabricantes.

Pérdidas en codos

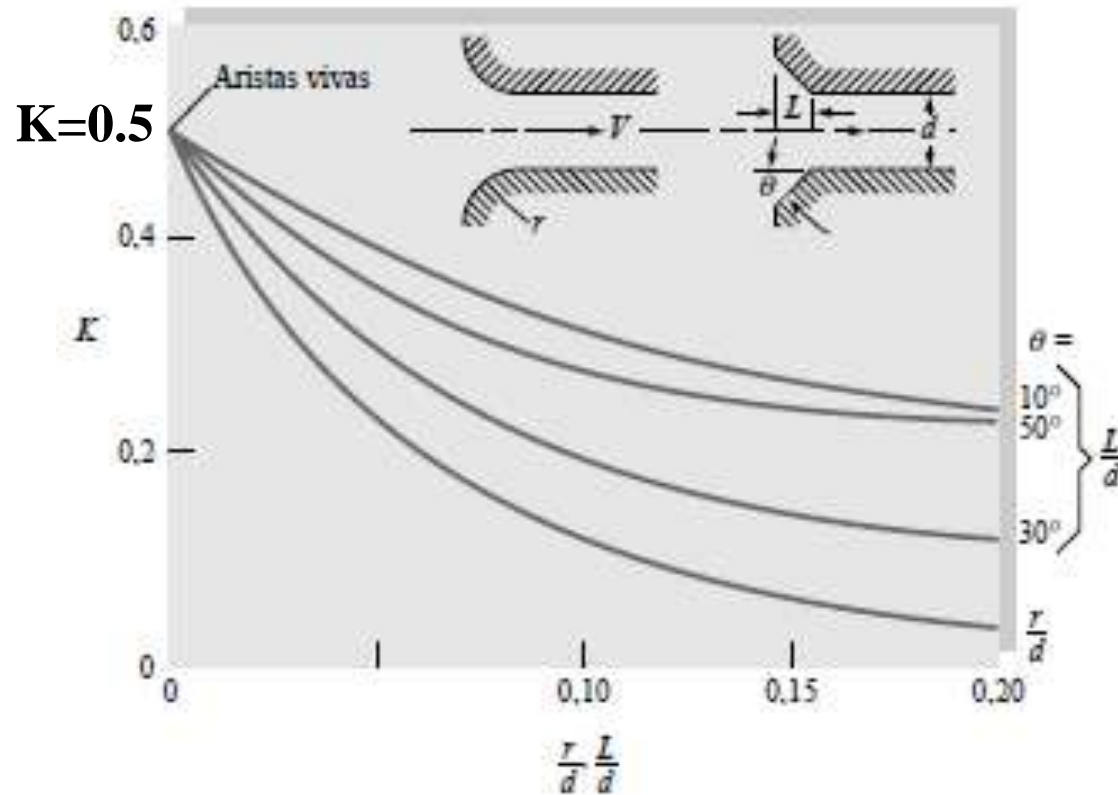
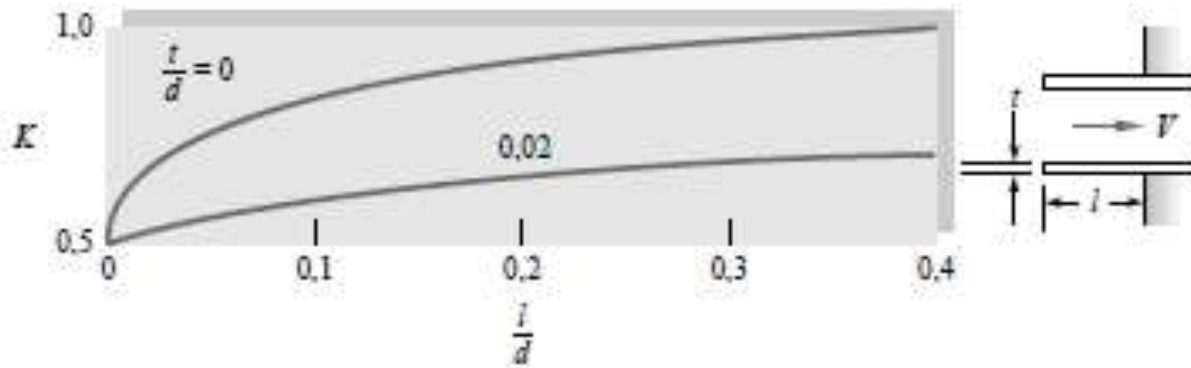




Expansiones y contracciones



Entradas/Salidas



Ensanchamiento suave

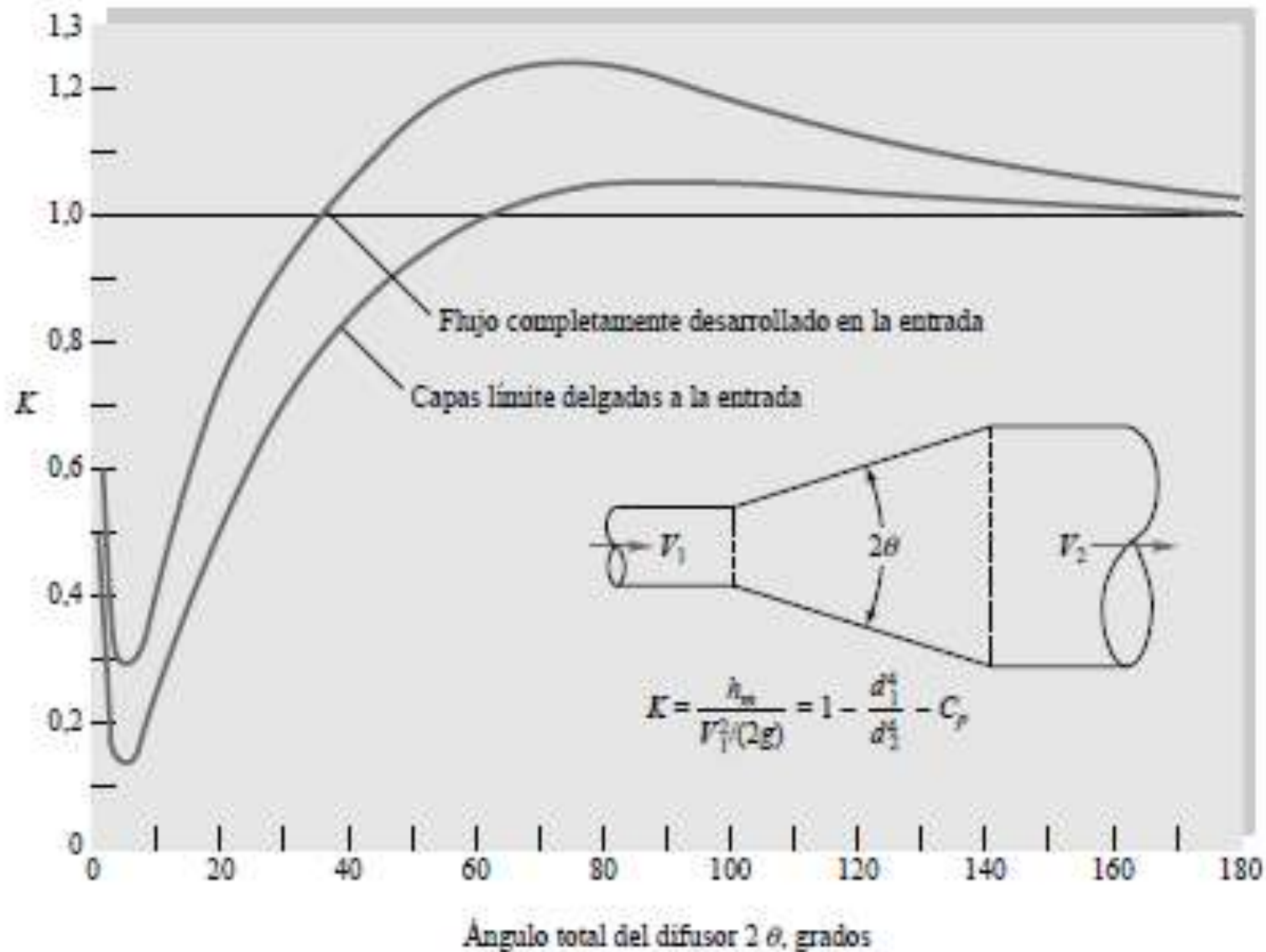
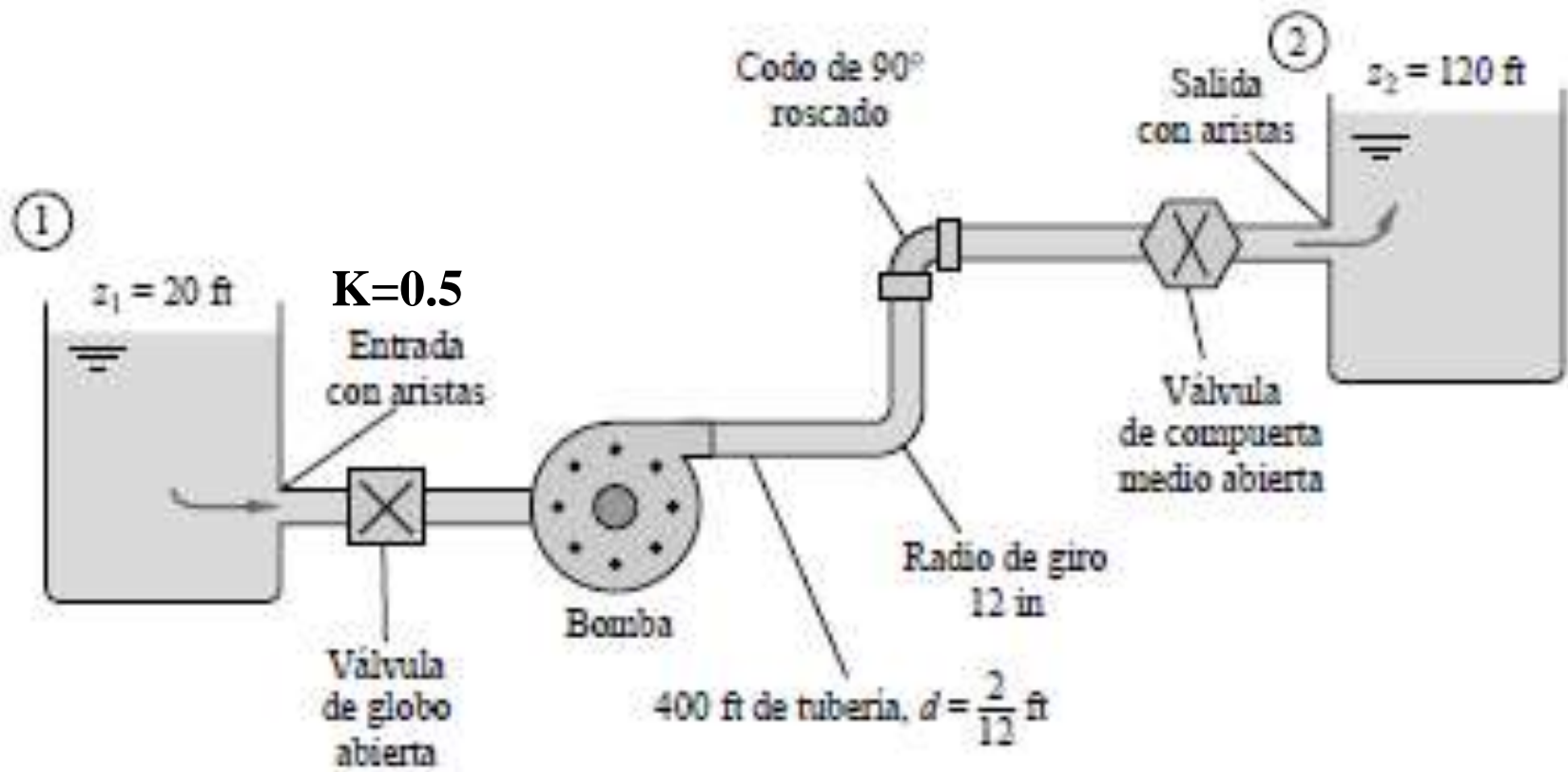


Figura 6.23. Pérdidas en un ensanchamiento cónico gradual.

Ejemplo: Entre dos depósitos se bombea agua, $\rho = 1,94$ slugs/ft³ y $\nu = 0,000011$ ft²/s, a razón de 0,2 ft³/s a través de una tubería de 2 in de diámetro y 400 ft de longitud con varios elementos intermedios, como se muestra en la Figura. La rugosidad relativa del tubo es $\varepsilon/d = 0,001$. Calcule la potencia requerida para el bombeo.



Aplicamos la ec. de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_b = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_m$$

$$\Rightarrow h_b = (z_2 - z_1) + f \frac{LV^2}{2gD} + \sum_i K_i \frac{V^2}{2g}$$

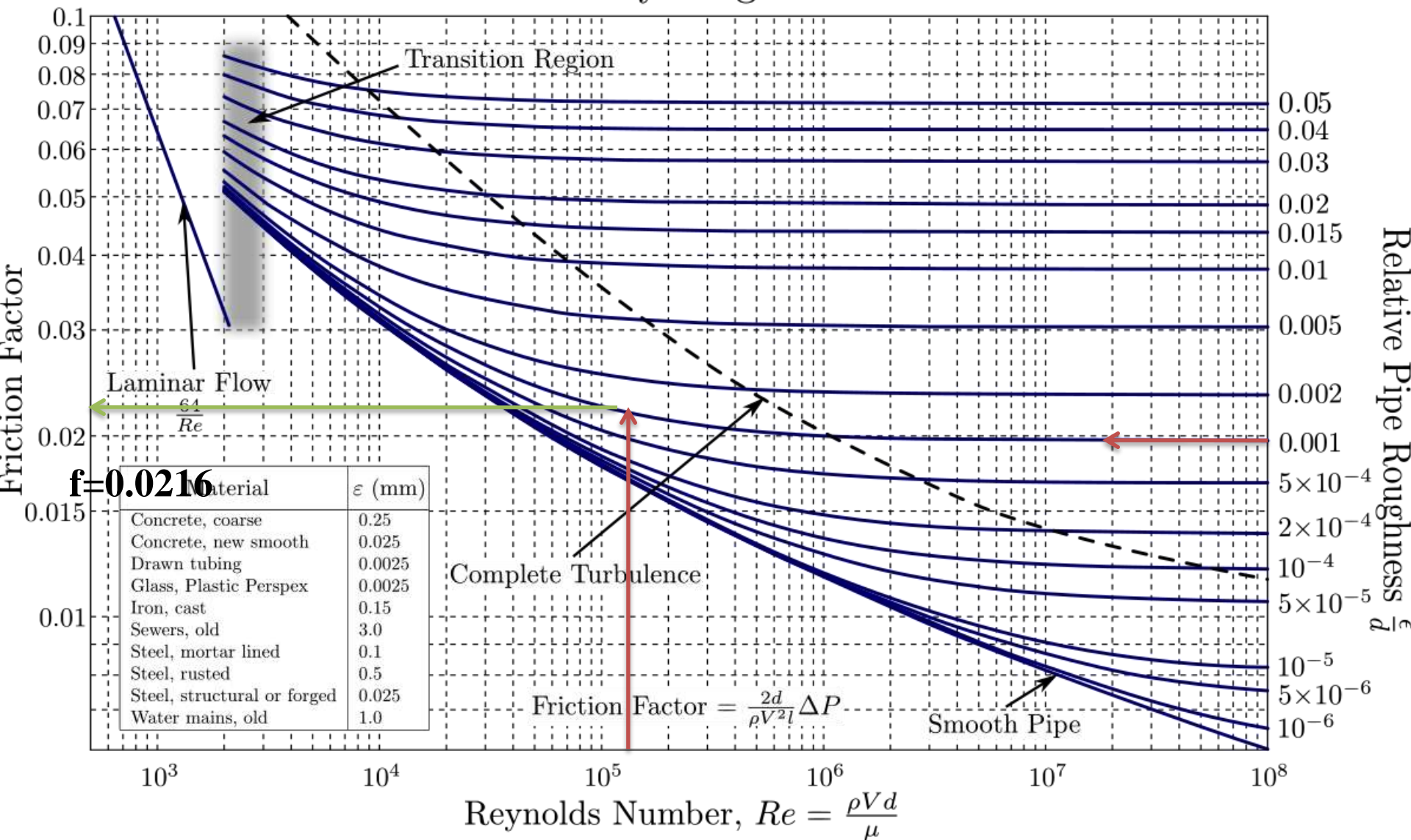
La conservación de la masa: $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 9,17 \text{ ft/s}$

Hay que calcular f : $\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = 1,39 \cdot 10^5; \varepsilon^* = 0,001$

$$\Rightarrow f = 0,0216$$

Hay que "contar" las pérdidas menores

Moody Diagram



Singularidad	K
Entrada con aristas 0,5	0,5
Válvula de globo abierta 2 in	6,9
Curva de 12 in	0,25
Codo normal de 90°	0,95
Válvula de compuerta semiabierta	4
Salida brusca	1
	13,6

$$\Rightarrow h_b = (z_2 - z_1) + f \frac{LV^2}{2gD} + \sum_i K_i \frac{V^2}{2g}$$

$$h_b = 100 + 67,7 + 13,6 \cdot \frac{9,17^2}{2 \cdot 32,2} = 185,45$$

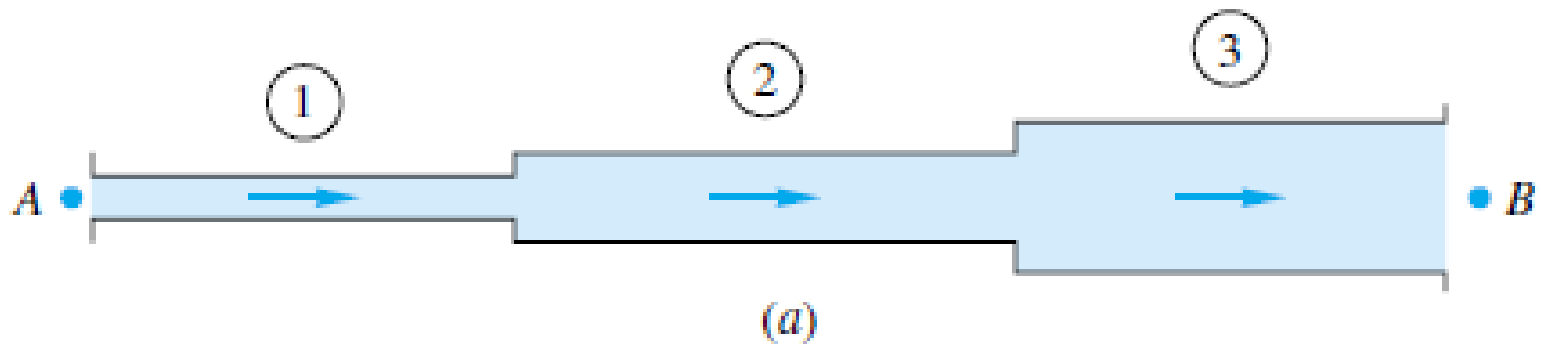
$$P = \rho g h_b Q = 1,94 \cdot 32,2 \cdot 185,45 \cdot 0,2 = 2317 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{s}$$

Sistemas de cañerías múltiples

Tuberías en serie

C. Masa: $Q_1 = Q_2 = Q_3$

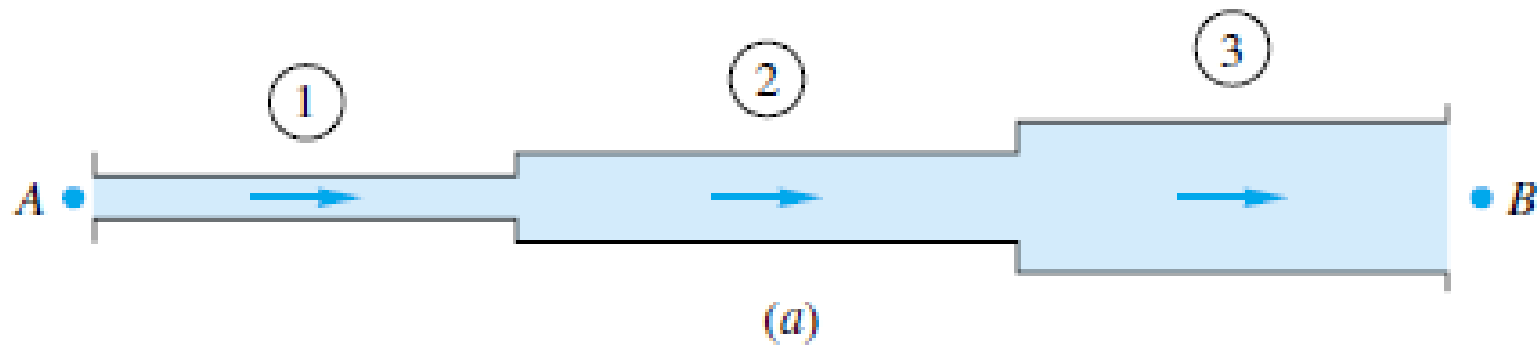
C. Energía: $\Delta h_{A \rightarrow B} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3$



Ejemplo: Un sistema de tres tuberías en serie transporta agua. La caída de presión total es $p_A - p_B = 150.000 \text{ Pa}$, y la diferencia del nivel $z_A - z_B = 5 \text{ m}$. Los datos de los tuberías son:

	$L[m]$	$D[cm]$	$\varepsilon[mm]$	ε^*
1	100	8	0,24	0,003
2	150	6	0,12	0,002
3	80	4	0,1	0,005

Calcule Q



Solución:

Se aplica conservación de la masa

$$D_1^2 V_1 = D_2^2 V_2 = D_3^2 V_3$$

Se aplica ec. energía.

$$\frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3}$$

$$h_{f_i} = f_i \frac{L_i V_i^2}{2g D_i}$$

Hay que calcular f_i y para ellos necesitamos Re y ε^*

$$Re_i = \frac{\rho V_i D_i}{\mu} \text{ pero } Re_i D_i = \frac{\rho V_i D_i^2}{\mu} = cte$$

$$\Rightarrow Re_1 D_1 = Re_2 D_2 = Re_3 D_3$$

Despreciamos las pérdidas menores y los términos cinéticos
(en efecto no indican cuanto vale V_A ni V_B)

$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} + z_A - z_B = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3}$$

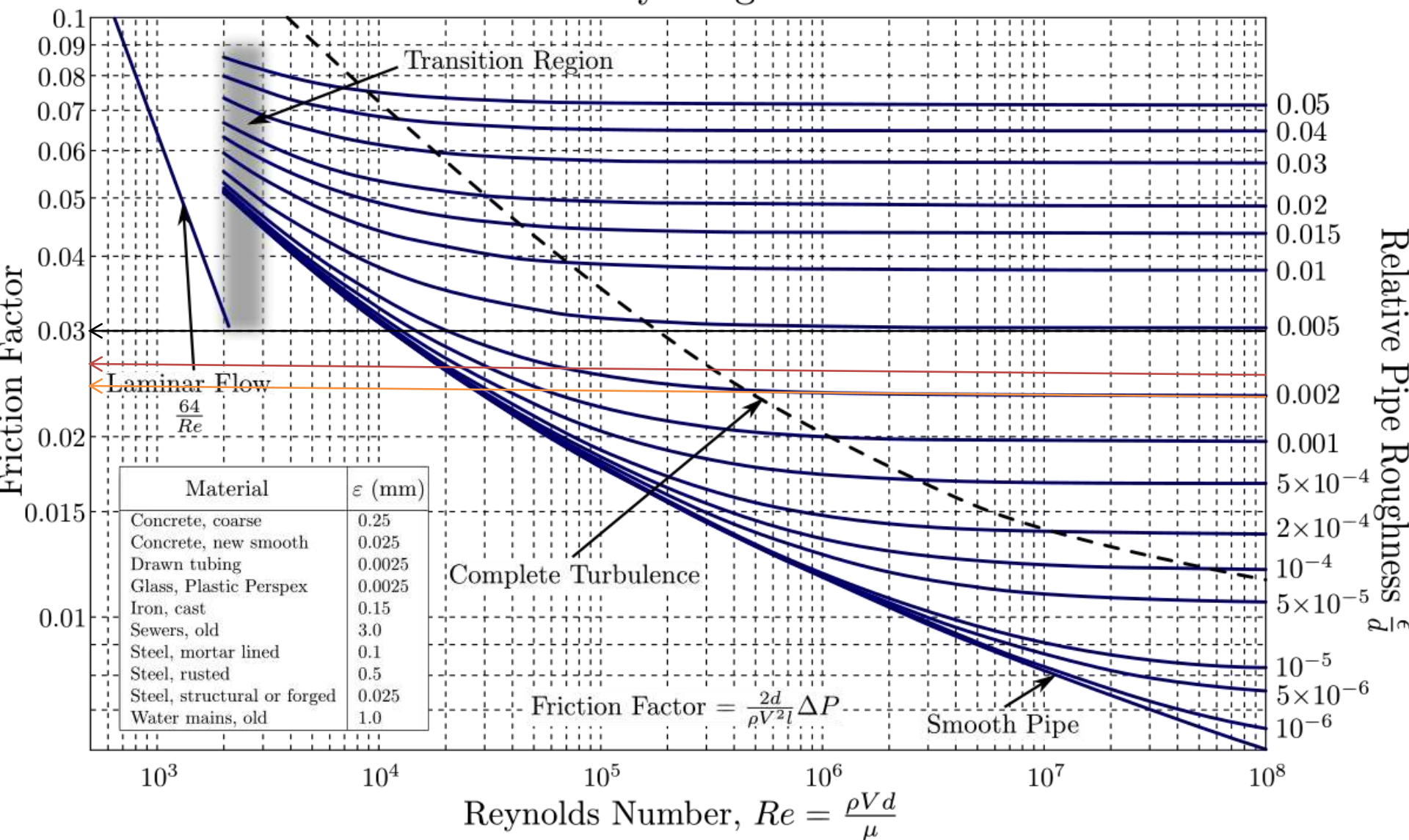
$$20,3 = f_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1} + f_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2} + f_3 \frac{L_3 V_3^2}{2gD_3}$$

$$\left. \begin{aligned} 20,3 &= \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,8} (1250 f_1 + 7900 f_2 + 32000 f_3) \\ \frac{1}{\sqrt{f_i}} &= -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re}_i \sqrt{f_i}} + \frac{\varepsilon_i^*}{3.7} \right) \end{aligned} \right\} 4 \text{ ecs, } 4 \text{ incógnitas}$$

Debemos partir la iteración desde algún punto, por ejemplo

turbulencia completa: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon^*}{3.7} \right)$

Moody Diagram



$$f_1 = 0,0262; \quad f_2 = 0,0234; \quad f_3 = 0,0304$$

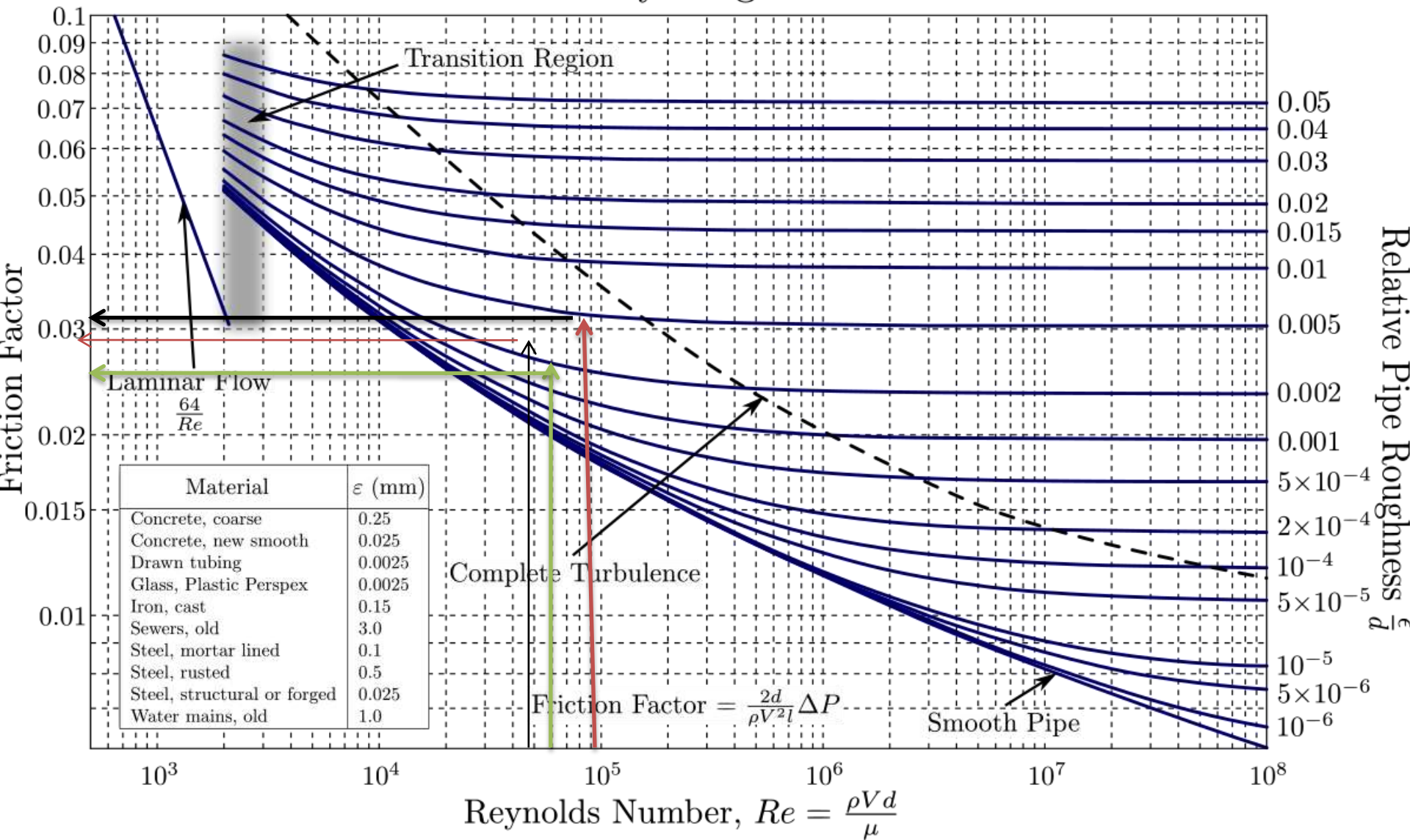
$$20,3 = \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,8} (1250 f_1 + 7900 f_2 + 32000 f_3)$$

$$\Rightarrow V_1 = 0,58 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 45400 \Rightarrow \text{Re}_2 = \frac{D_1}{D_2} \text{Re}_1 = 60500; \text{Re}_3 = 90800$$

Iteramos nuevamente con el diagrama de Moody

Moody Diagram



$$f_1 = 0,0288; \quad f_2 = 0,026; \quad f_3 = 0,0314$$

$$20,3 = \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,8} (1250 f_1 + 7900 f_2 + 32000 f_3)$$

$$\Rightarrow V_1 = 0,565 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \text{Re}_1 = 44314 \Rightarrow \text{Re}_2 = \frac{D_1}{D_2} \text{Re}_1 = 59085; \text{Re}_3 = 88626$$

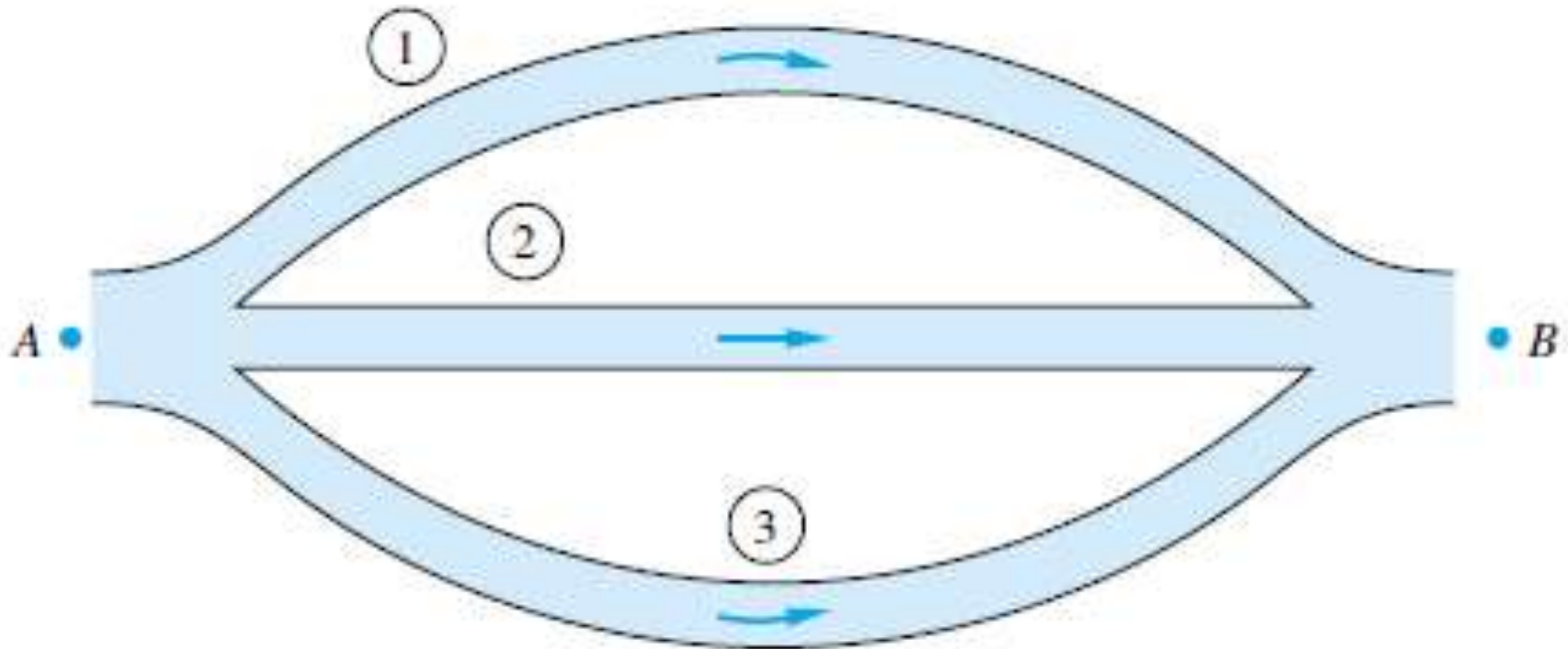
El error está dentro del 5%, luego se detiene la iteración

$$Q = 10,2 \text{ m}^3/\text{hr}$$

Tuberías en paralelo

C. Masa: $Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$

C. Energía: $\Delta h_{A \rightarrow B} = \Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3$



Ejemplo: Suponga que los tres tubos del anterior están en paralelo con una pérdida de carga total de 20,3 m. Calcule el caudal total Q, despreciando las pérdidas menores.

	$L[m]$	$D[cm]$	$\varepsilon[mm]$	ε^*
1	100	8	0,24	0,003
2	150	6	0,12	0,002
3	80	4	0,1	0,005

Solución:

$$20,3 = \Delta h_{A \rightarrow B} = \Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3$$

$$20,3 = f_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1} = f_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2} = f_3 \frac{L_3 V_3^2}{2gD_3}$$

En este caso el sistema se desacopla y hay que resolver

$$20,3 = f_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1}; \frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re}_1 \sqrt{f_1}} + \frac{\varepsilon_1^*}{3.7} \right)$$

$$20,3 = f_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2}; \frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re}_2 \sqrt{f_2}} + \frac{\varepsilon_2^*}{3.7} \right)$$

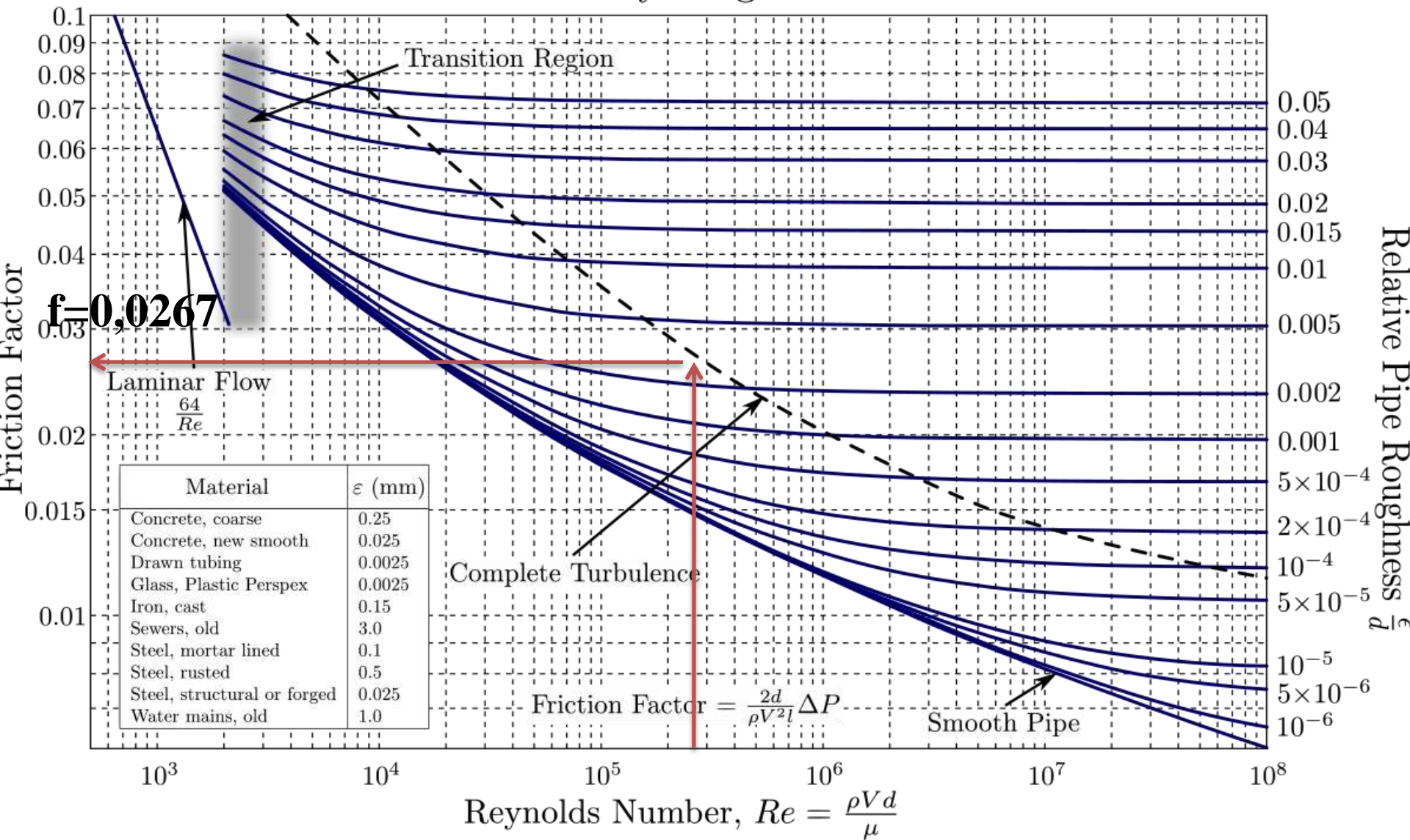
$$20,3 = f_3 \frac{L_3 V_3^2}{2gD_3}; \frac{1}{\sqrt{f_3}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re}_3 \sqrt{f_3}} + \frac{\varepsilon_3^*}{3.7} \right)$$

Partimos suponiendo turbulencia completa para la tubería 1

$$f_1 = 0,0262 \Rightarrow V_1 = 3,49 \text{m/s} \Rightarrow \text{Re}_1 = 273000,$$

hay que buscar en el diagrama de Moody

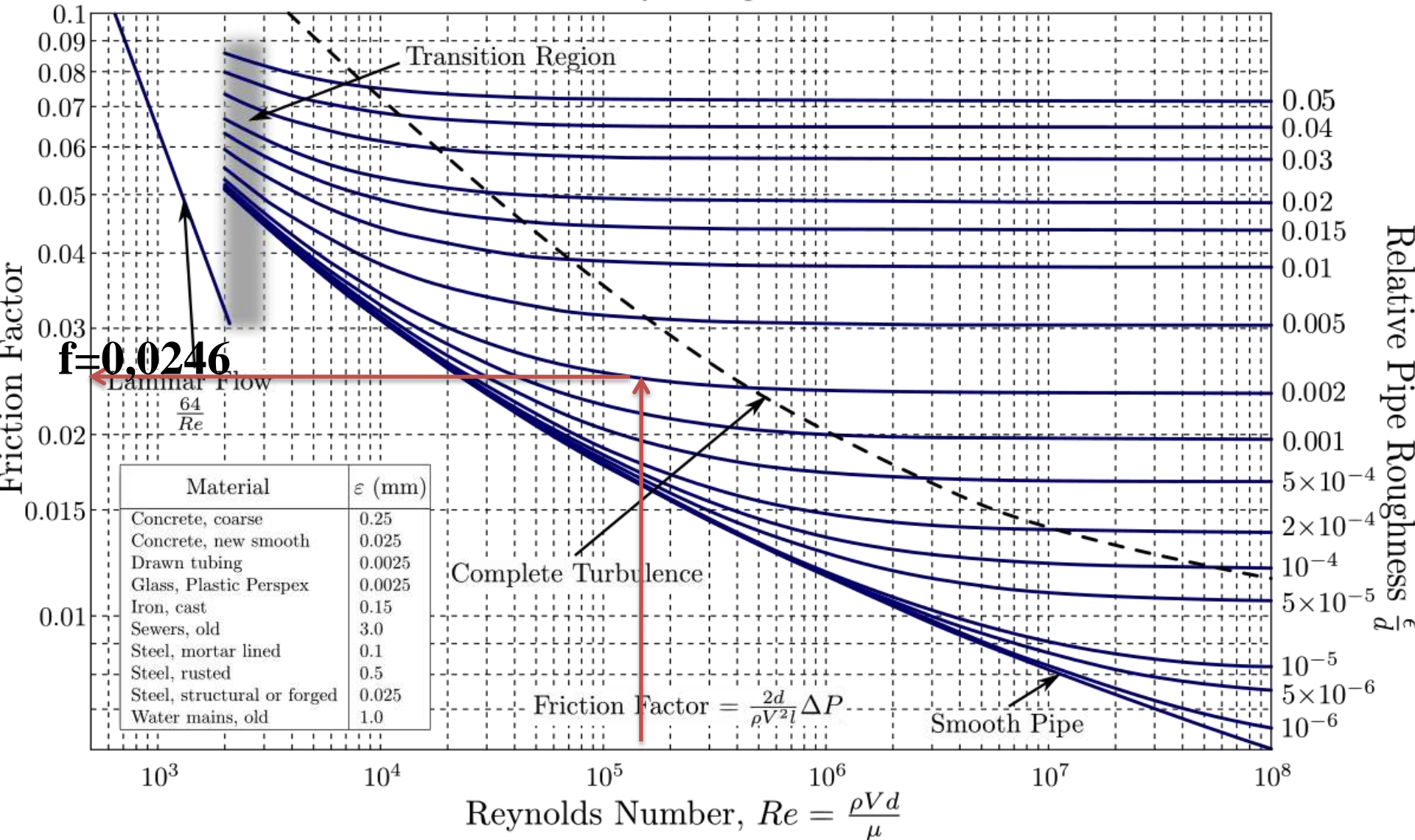
Moody Diagram



$$f_1 = 0.0267 \Rightarrow V_1 = 3.46 \text{ m/s} \Rightarrow Q_1 = 62.5 \text{ m}^3/\text{hr}$$

$$f_2 = 0,0234 \Rightarrow V_2 = 2,61\text{m/s} \Rightarrow \text{Re}_2 = 153000,$$

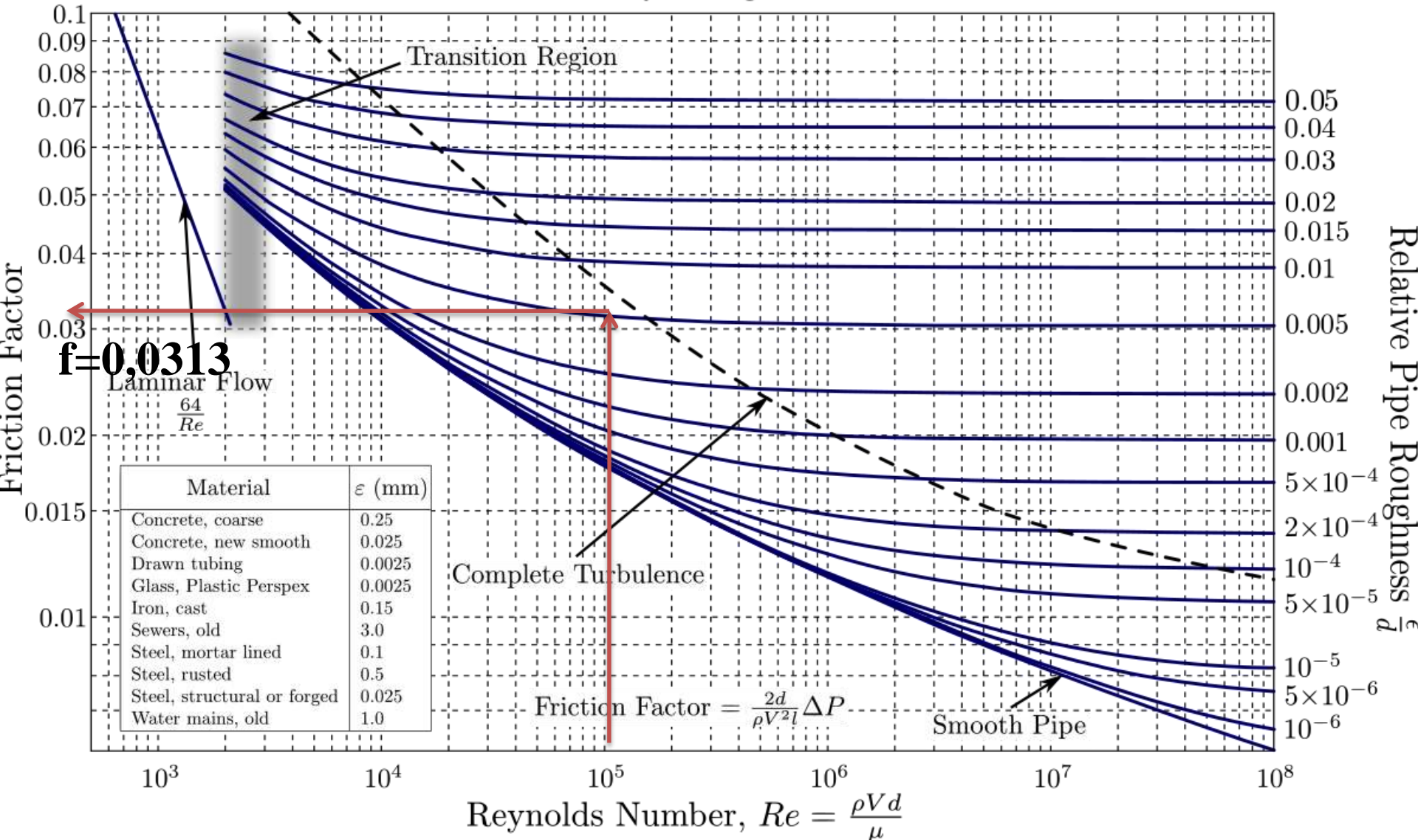
Moody Diagram



$$f_2 = 0,0246 \Rightarrow V_2 = 2,55\text{m/s} \Rightarrow Q_2 = 25,9 \text{ m}^3/\text{hr},$$

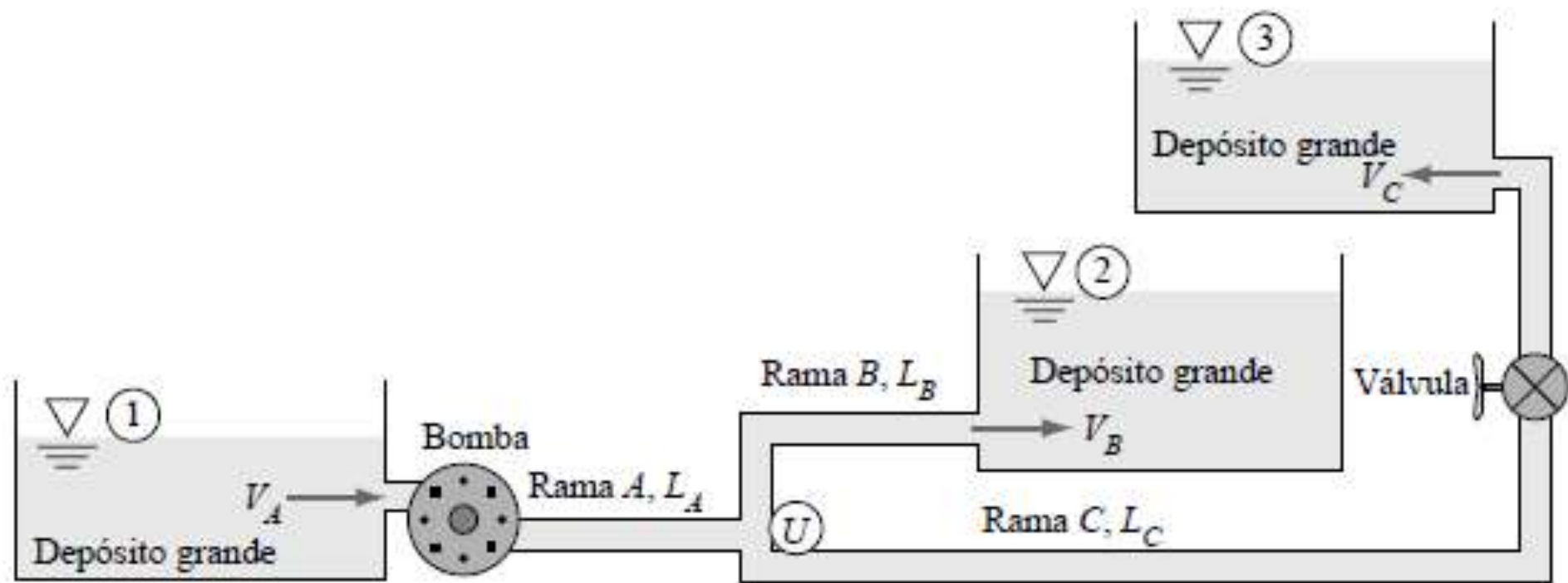
$$f_3 = 0,0304 \Rightarrow V_3 = 2,56 \text{ m/s} \Rightarrow \text{Re}_3 = 100000,$$

Moody Diagram



$$f_3 = 0,0313 \Rightarrow V_3 = 2,52 \text{ m/s} \Rightarrow Q_3 = 11,4 \text{ m}^3/\text{hr},$$

Ej: Una bomba proporciona un flujo estacionario de agua (ρ, μ) desde un depósito grande a dos depósitos situados más altos, como se muestra en la Figura. El diámetro d de los conductos y su rugosidad ε son constantes. Todas las pérdidas menores son despreciables, excepto una válvula parcialmente abierta con coeficiente de pérdidas $K_{\text{válvula}}$. Asuma flujo turbulento. La curva de funcionamiento de la bomba está dada por $H = a - bV_A^2$ donde a y b son constantes conocidas. La longitud del tubo L_C es mucho mayor que L_B . Se desea determinar: la presión en U, $f_A, f_B, f_C, V_A, V_B, V_C$ y la potencia de la bomba. Escriba las ecuaciones del problema



$$V_A = V_B + V_C$$

$$H = a - bV_A^2$$

$$z_1 + H = z_2 + f_A \frac{L_A V_A^2}{2gd} + f_B \frac{L_B V_B^2}{2gd}$$

$$z_1 + H = z_3 + f_A \frac{L_A V_A^2}{2gd} + f_C \frac{L_C V_C^2}{2gd} + K_{\text{válvula}} \frac{V_C^2}{2g}$$

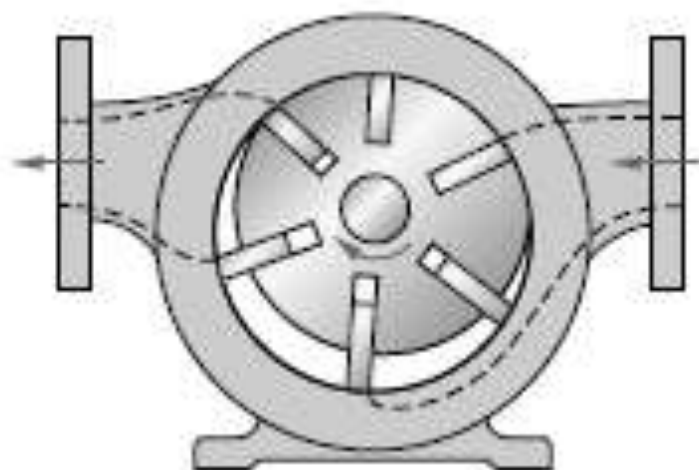
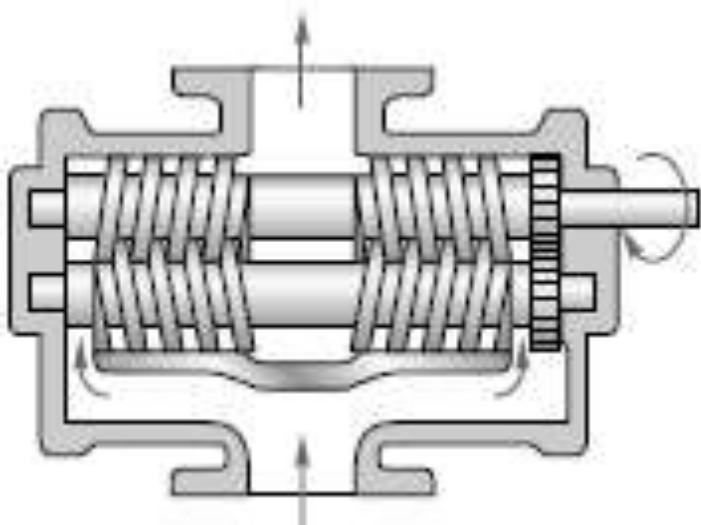
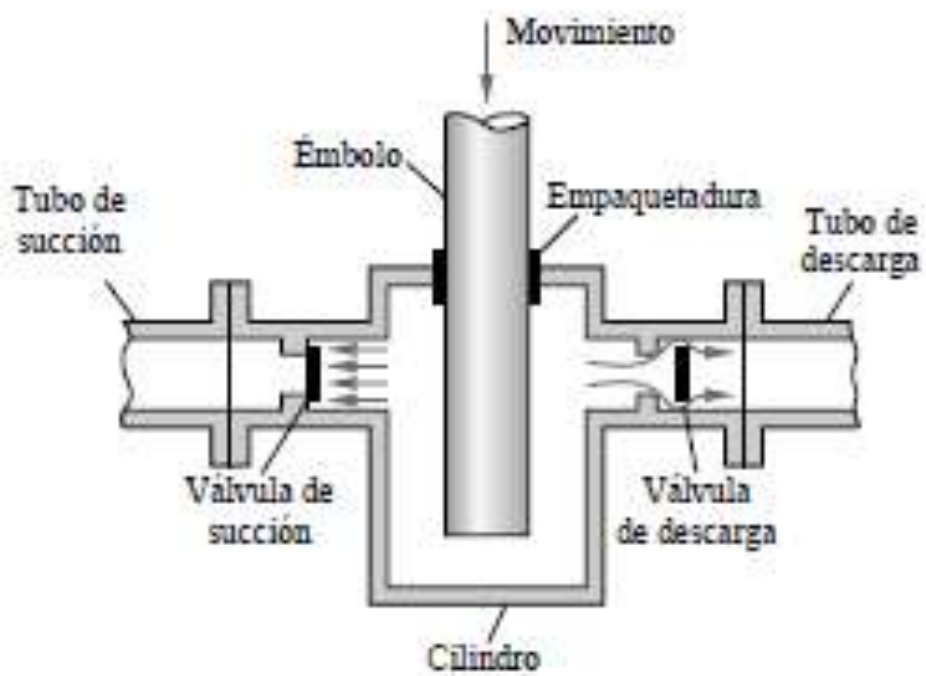
$$\frac{1}{\sqrt{f_A}} = -2\log\left(\frac{2.51}{\text{Re}_A(V_A)\sqrt{f_A}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7}\right)$$

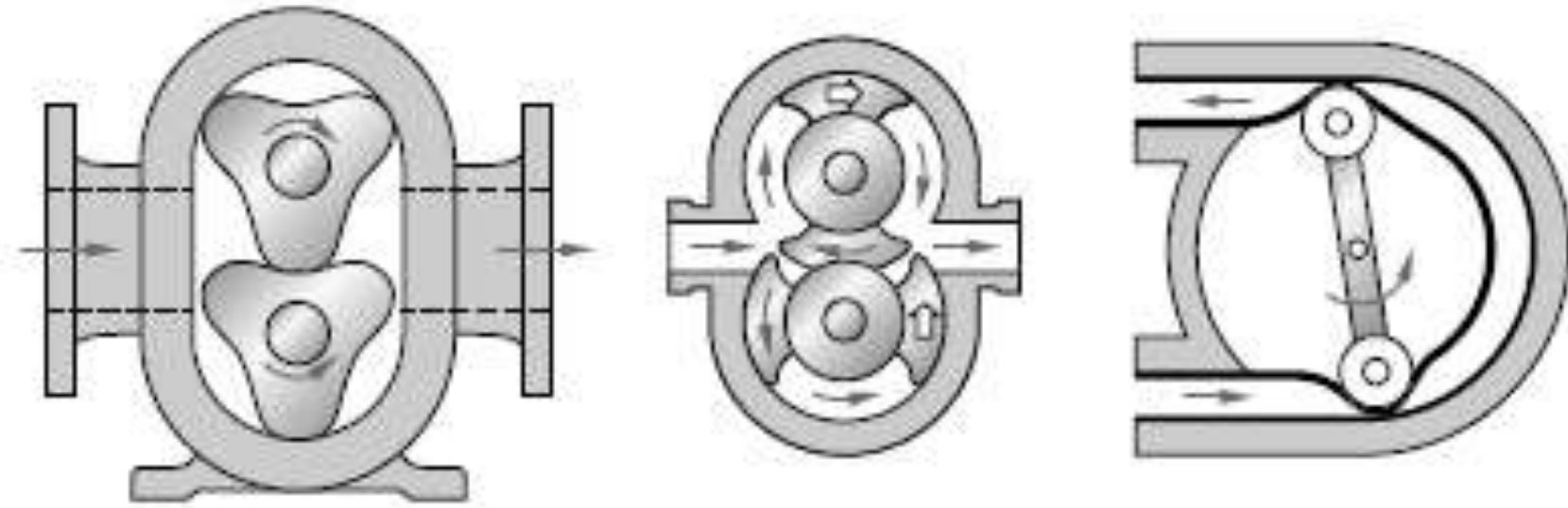
$$\frac{1}{\sqrt{f_B}} = -2\log\left(\frac{2.51}{\text{Re}_B(V_B)\sqrt{f_B}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_C}} = -2\log\left(\frac{2.51}{\text{Re}_C(V_C)\sqrt{f_C}} + \frac{\varepsilon^*}{3.7}\right)$$

Bombas

- Son máquinas usadas para ayudar al transporte de fluidos a lo largo de un sistema de tuberías.
- Hay dos tipos básicos de bombas: de desplazamiento positivo y dinámicas o de intercambio de cantidad de movimiento.
- Las bombas de desplazamiento positivo (BDP) tienen un contorno móvil que, por cambios de volumen, obligan al fluido a avanzar a través de la máquina. Se abre una cavidad en la que el fluido penetra a través de la toma. Después se cierra la cavidad y se expulsa el fluido por la abertura de salida.

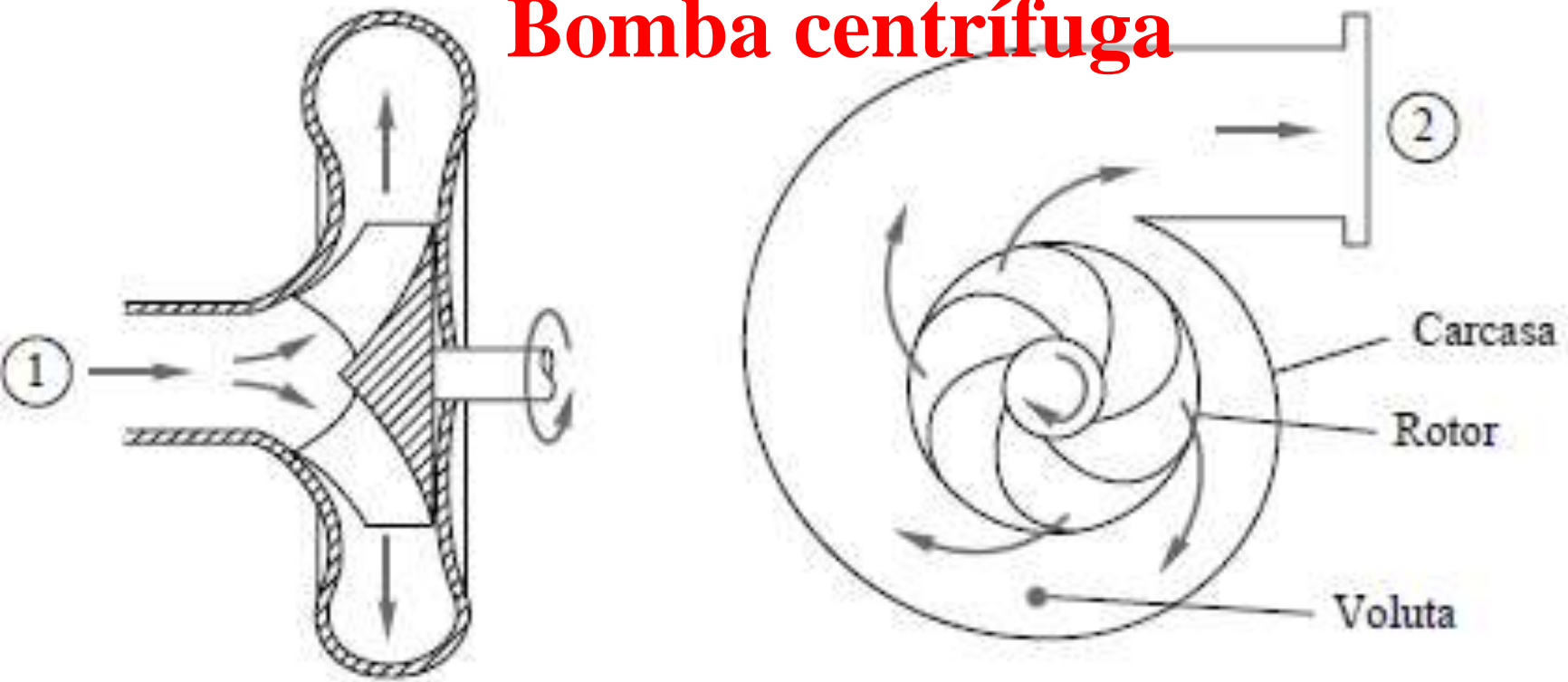




- Su gran ventaja es que pueden bombear cualquier fluido, independientemente de su viscosidad.

- Las bombas dinámicas añaden simplemente cantidad de movimiento al fluido por medio de paletas, álabes giratorios o ciertos dispositivos especiales. No hay volúmenes cerrados: el fluido aumenta su cantidad de movimiento mientras se mueve a través de pasajes abiertos, para convertir después su alta velocidad en incremento de presión al salir a través de un difusor.
- Las bombas dinámicas pueden clasificarse como
 - Rotativas
 - 1. Centrífugas o de flujo de salida radial
 - 2. Flujo axial
 - 3. Flujo mixto
 - Diseño especial

Bomba centrífuga



El fluido entra axialmente a través del eje de la carcasa, los álabes del rotor la fuerzan a tomar un movimiento tangencial y radial hacia el exterior del rotor, donde es recogido por una carcasa que hace de difusor. El fluido aumenta su velocidad y presión cuando pasa a través del rotor. La parte de la carcasa, de forma toroidal decelera el flujo y aumenta más la presión.

Ecuaciones básicas

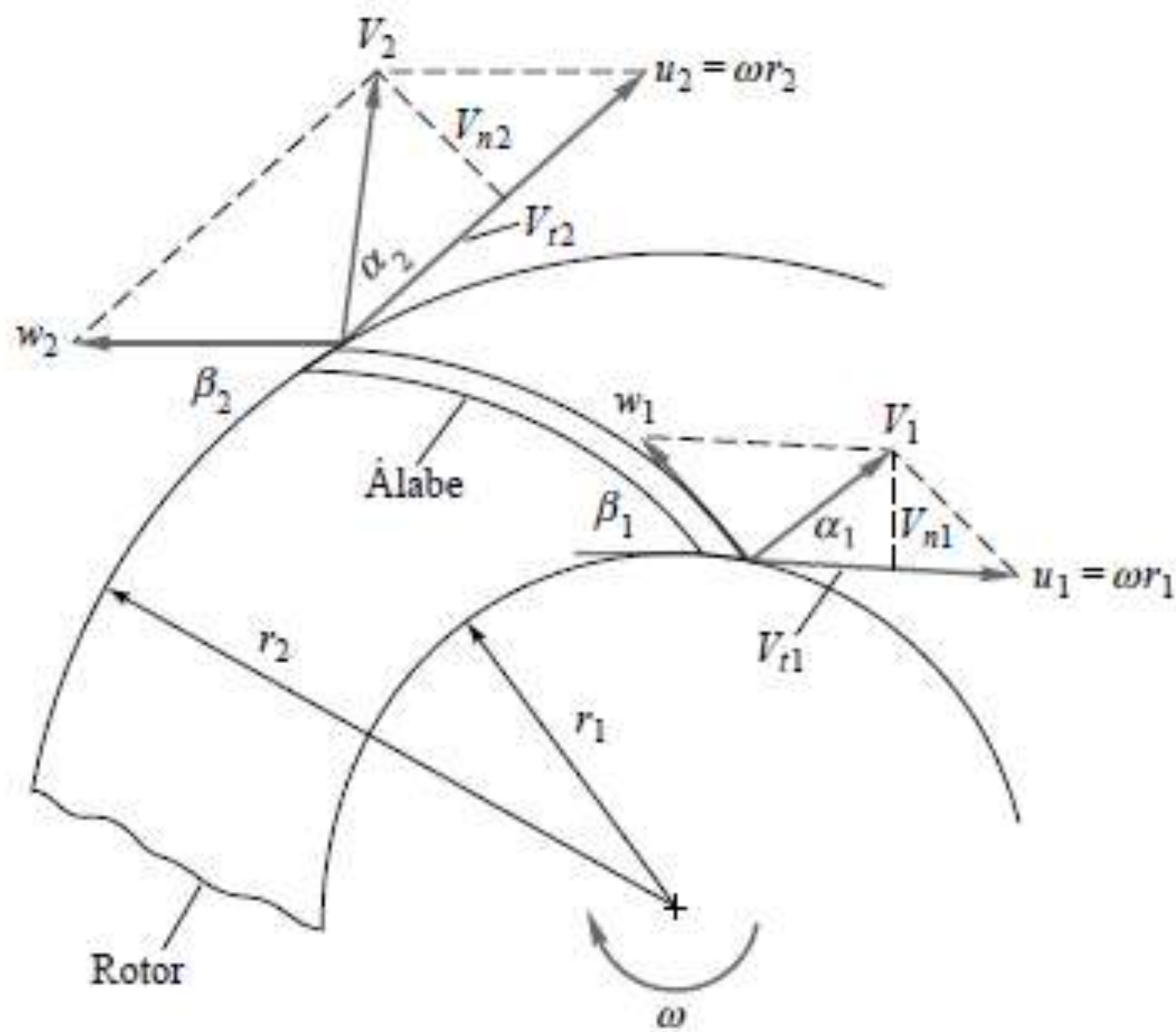
Potencia útil: γHQ

Potencia al freno: $\omega \vec{T}$

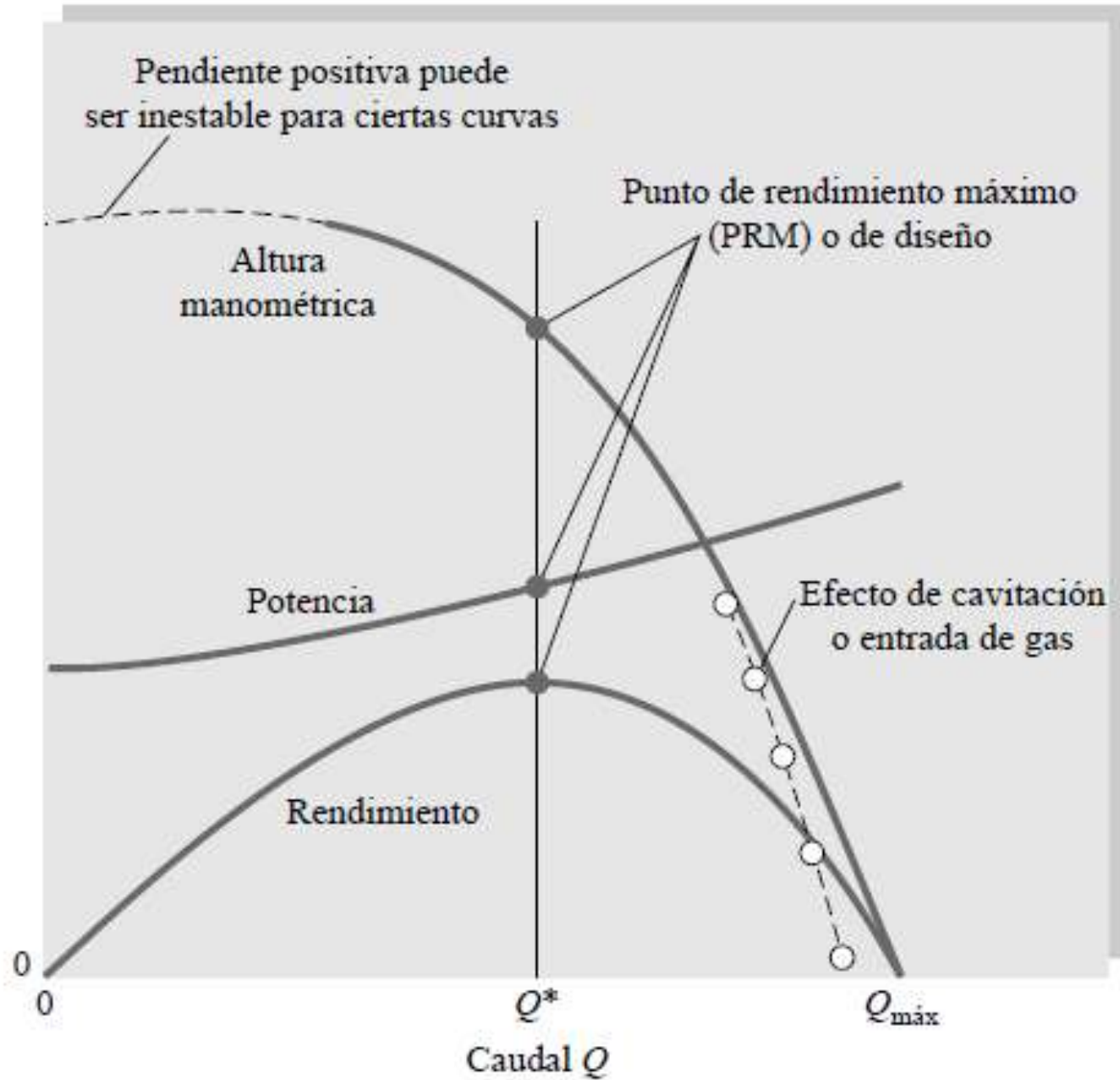
Eficiencia: $\eta = \frac{\gamma HQ}{\omega \vec{T}}$

$$\vec{T} = \rho Q \left[r_2 V_{2t} - r_1 V_{1t} \right]$$

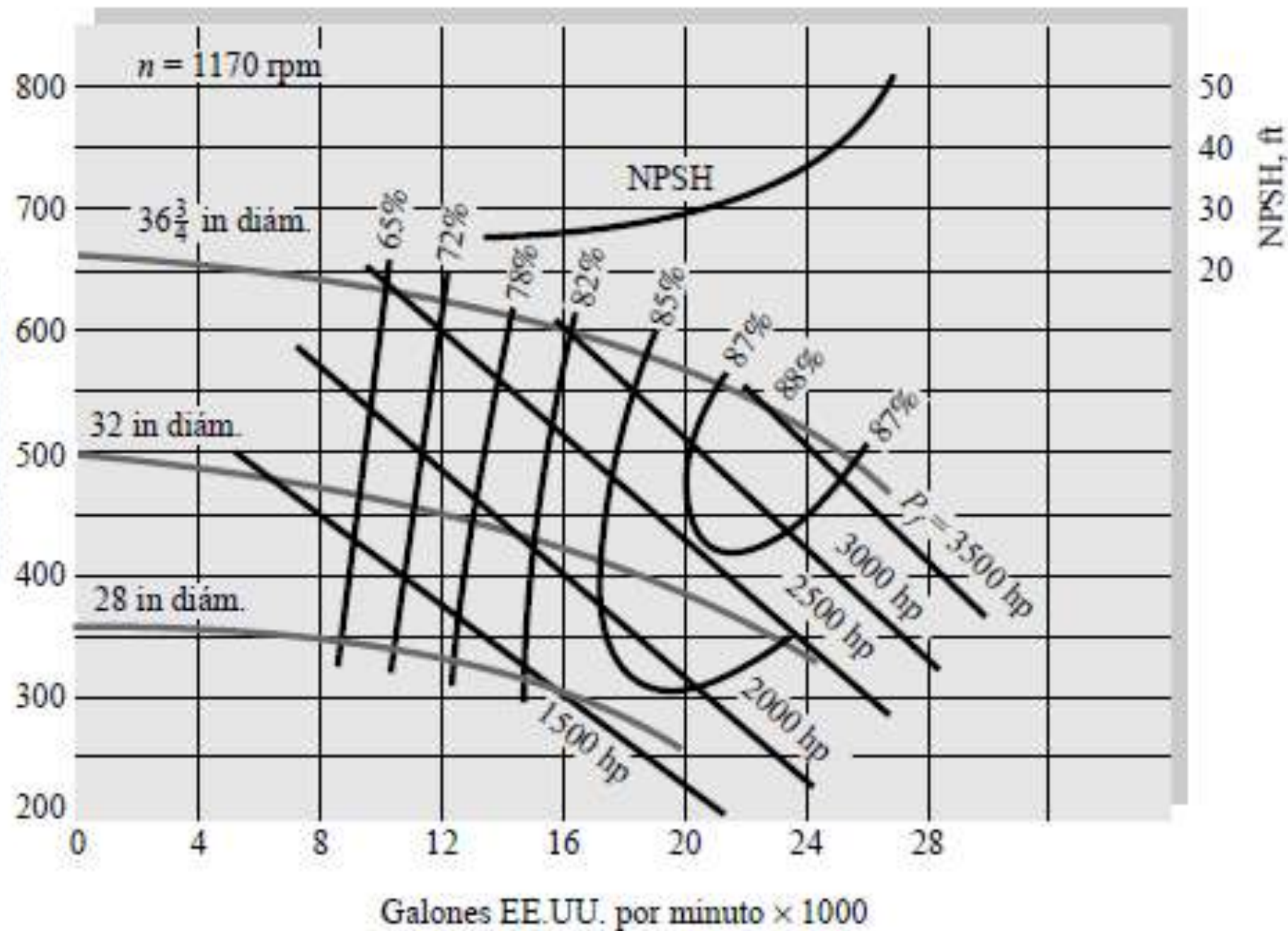
$$\text{Potencia al freno: } \omega \vec{T} = \rho Q \omega \left[r_2 V_{2t} - r_1 V_{1t} \right] = \rho Q \left[u_2 V_{2t} - u_1 V_{1t} \right]$$



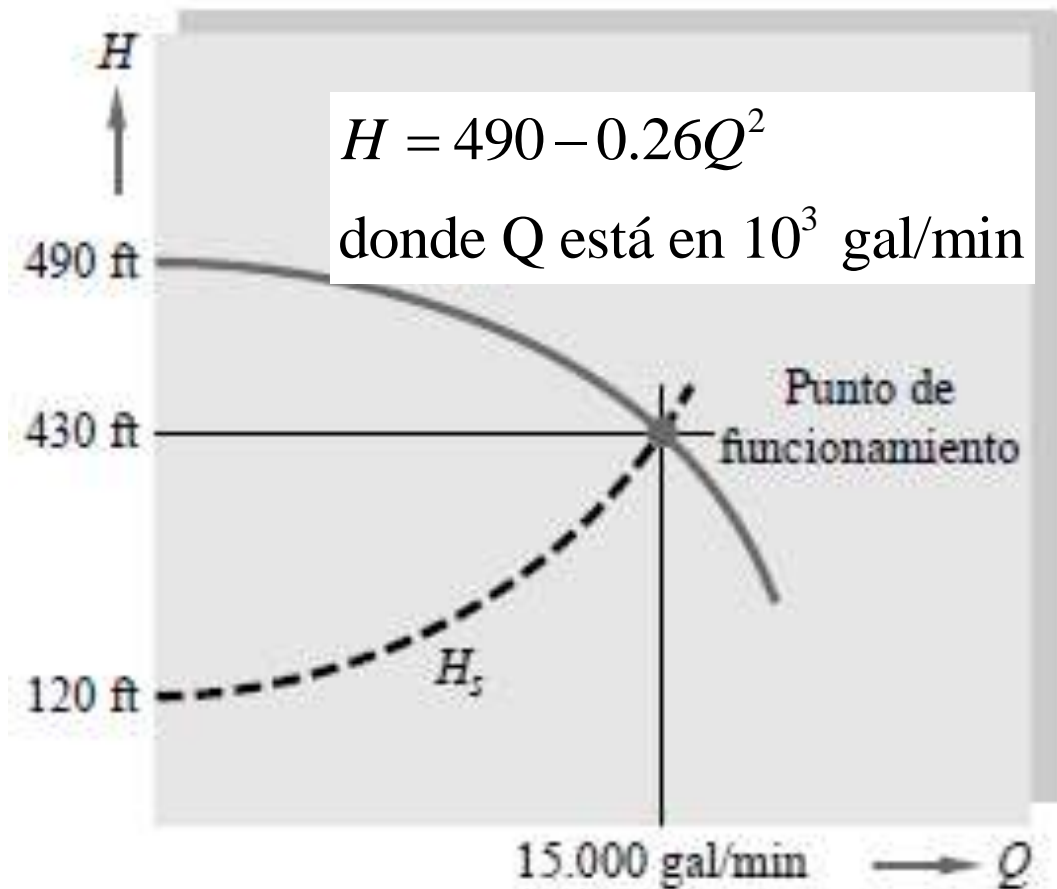
Curva característica



Altura manométrica, ft



Ejemplo: Se quiere utilizar la bomba de 32 in de la figura a 1170 rpm para bombear agua a 60 °F de un depósito a otro 120 ft más alto a través de una tubería de 1500 ft de largo y 16 in de diámetro D, con un coeficiente de fricción $f = 0.03$. ¿Cuál será el punto de funcionamiento y el rendimiento?



Aplicamos Bernoulli entre ambos estanques

$$H_{\text{bomba}} = z_2 - z_1 + f \frac{LV^2}{2gd} = 120 + \frac{V^2}{2g} \frac{0.03 \cdot 1500}{16/12}$$

Por otro lado, $H = 490 - 0.26Q^2$ y $Q = V \frac{\pi d^2}{4}$

Despejando se obtiene $Q = 15200$ gal/min y
 $H = 430$ ft

Altura neta de succión NPSH

- La entrada de la bomba, o zona de succión, es la región donde la presión es más baja y donde puede aparecer antes la cavitación (:= formación de burbujas debido al cambio de fase de líquido a gas).
- La columna de succión se define por:

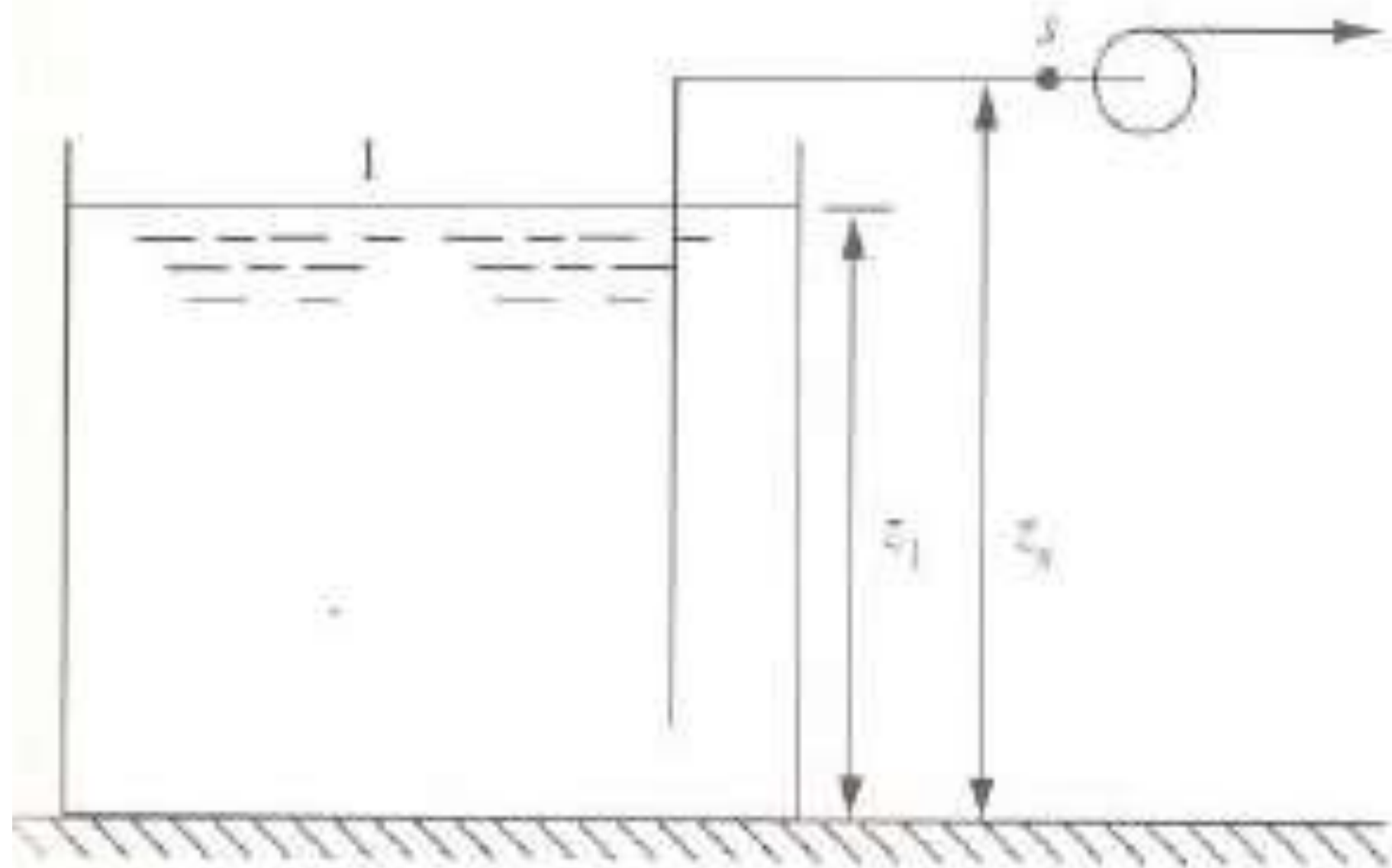
$$\text{NPSH} = \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} - \frac{p_{\text{vapor}}}{\gamma}$$

donde p_e es la presión en la entrada de la bomba,

V_e su velocidad y p_{vapor} la presión de vapor del fluido.

- Si apareciese cavitación, habría ruido y vibraciones en la bomba, deterioro del rotor por picaduras y una caída brusca en la altura y el caudal de la bomba.

- Los fabricantes de bomba indican la columna de succión necesaria para evitar la cavitación.
- Ejemplo: Una bomba centrífuga es usada para transportar $5\text{m}^3/\text{hr}$ de un líquido desde un estanque abierto. El estanque tiene 3 m de diámetro e inicialmente está lleno hasta 2.5m. La bomba está ubicada 3m sobre el fondo y la pérdida por fricción en la línea es 0.5m. La presión de vapor del líquido es 18kN/m^2 y el fabricante indica que la bomba opera adecuadamente si NPSH es al menos 5m. Determine la cantidad transportada antes de la cavitación.



Aplicamos Bernoulli entre la superficie del líquido y la succión

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z_s + h_f \Rightarrow \frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - z_s - h_f - \frac{V^2}{2g}$$

La cavitación empieza cuando

$$\text{NPSH} = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \frac{p_{\text{vapor}}}{\gamma} = 5m$$

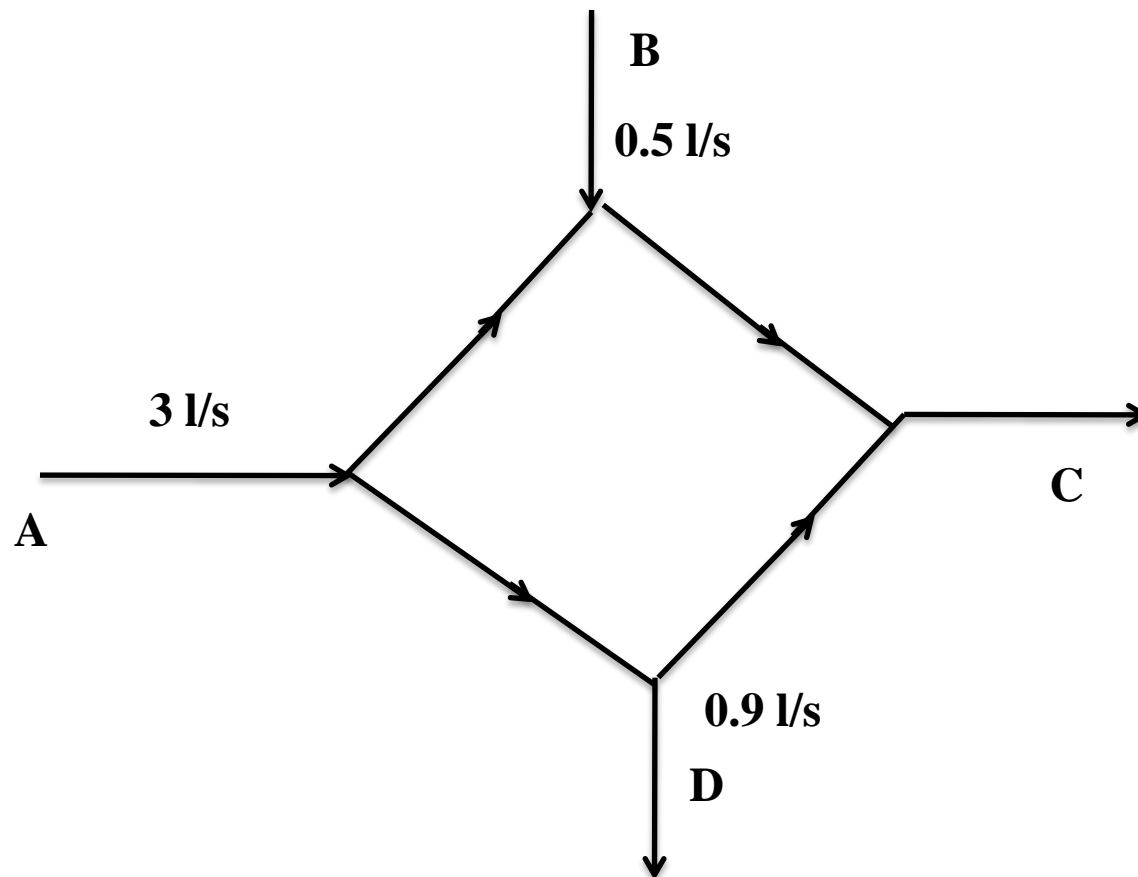
$$\Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - z_s - h_f - \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{p_{\text{vapor}}}{\gamma} = 5m$$

$$\Rightarrow z_1 = 5m + z_s + h_f + \frac{p_{\text{vapor}}}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = 0.375m$$

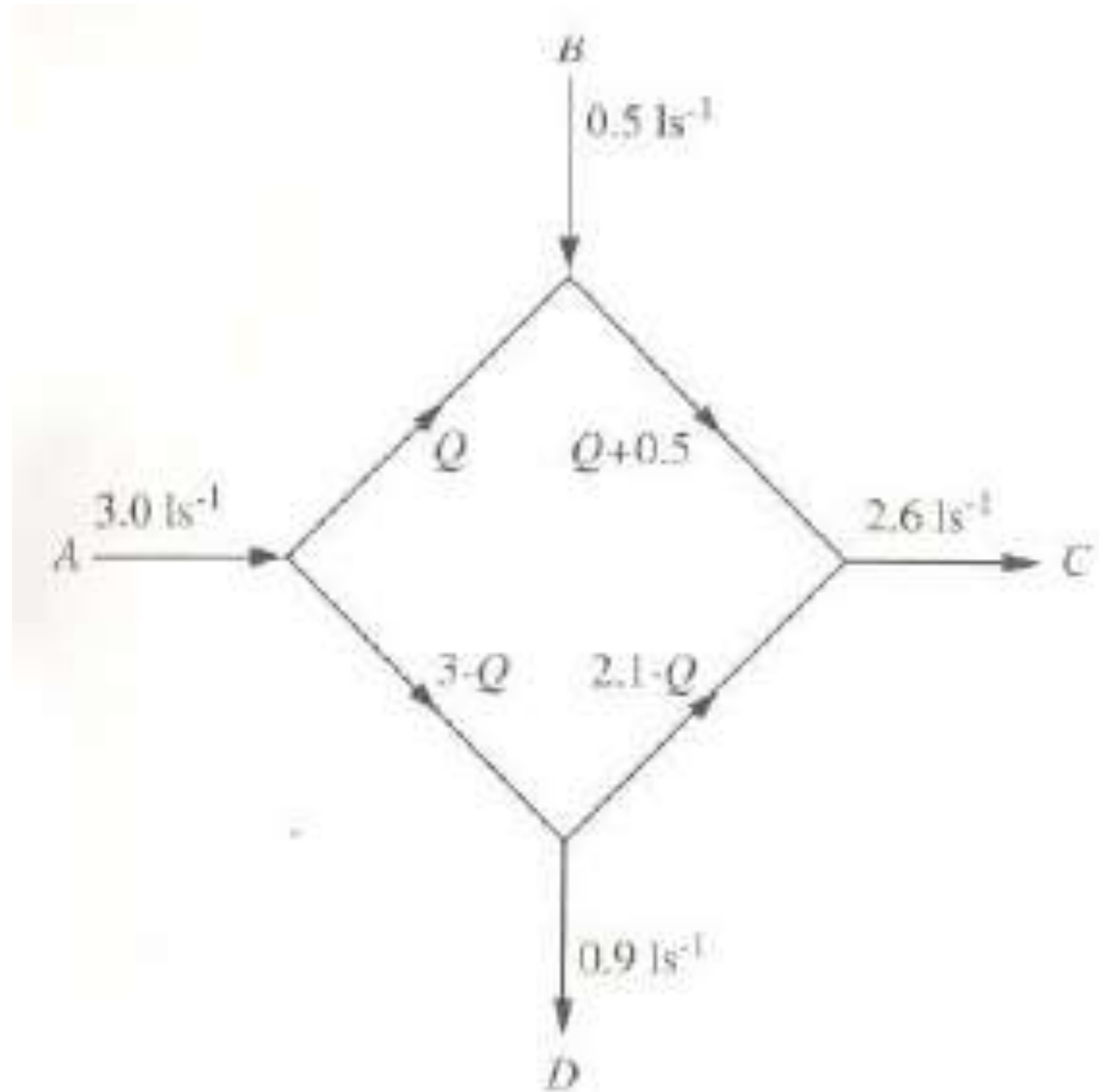
$$\Rightarrow Vol = \frac{\pi D^2}{4} (z_{\text{inicial}} - z_{\text{final}})$$

$$\Rightarrow t = Vol / Q = 15 / 5 = 3hrs$$

Ejemplo: Agua es alimentada a un laboratorio a través de un circuito como se muestra en la figura. Determine los flujos en cada rama suponiendo que cada rama tiene 10 m de largo, diámetro 25 mm y factor de fricción $f=0.005$.



Conservación de masa implica que flujo en C igual a 2.6 l/s.
Supongamos un flujo Q entre A y B. El balance de masa por nodo entrega:



El balance de energía indica que la pérdida de carga para ir de A a C a través de B es igual que ir a través de D

$$\Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} = \Delta h_{AD} + \Delta h_{DC}$$

$$\Rightarrow f \frac{LV_{AB}^2}{2gD} + f \frac{LV_{BC}^2}{2gD} = f \frac{LV_{AD}^2}{2gD} + f \frac{LV_{DC}^2}{2gD}$$

y del balance de masa $V_i = \frac{4Q_i}{\pi D^2}$

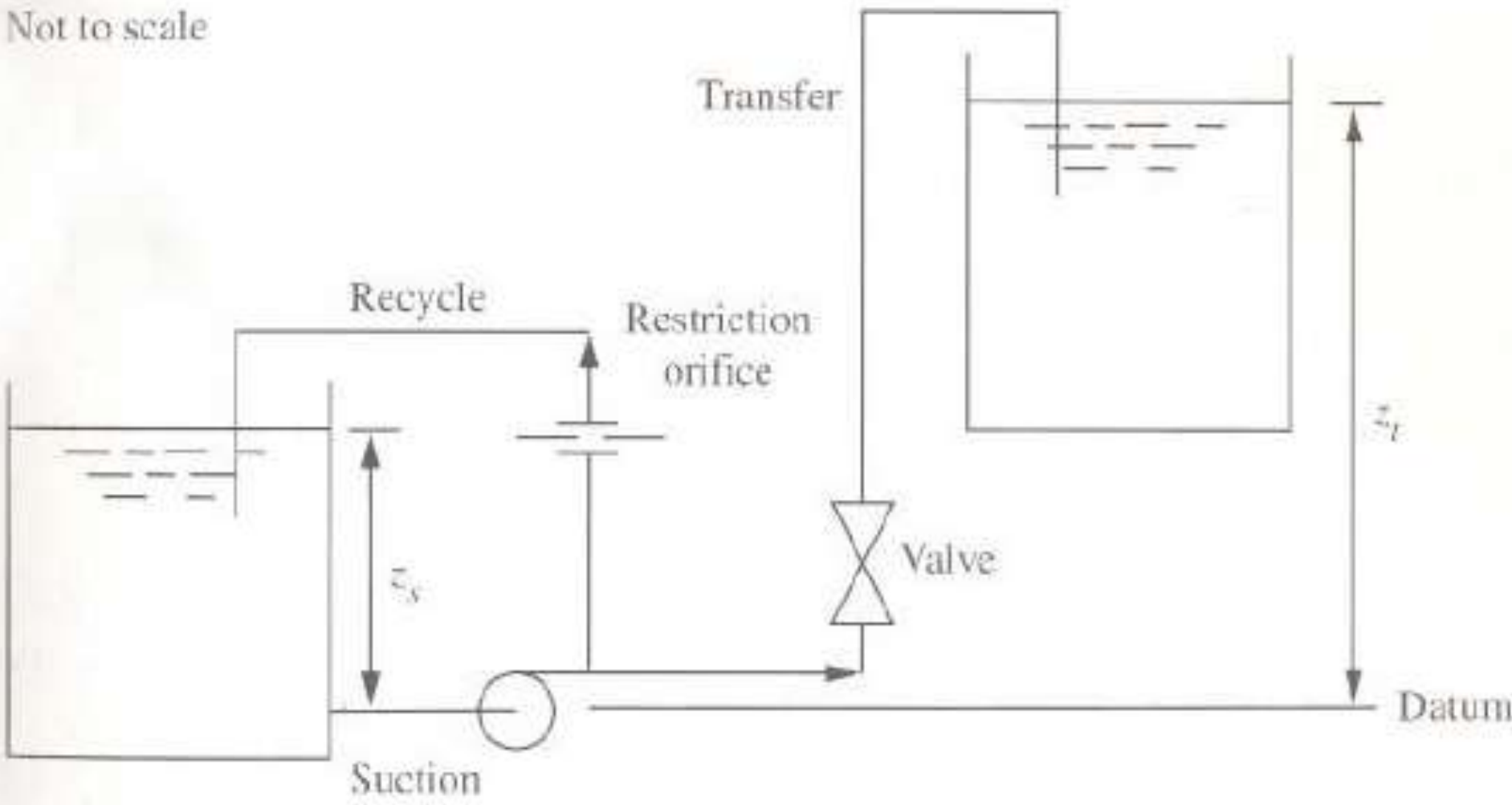
$$\Rightarrow Q^2 + (Q + 0.5)^2 = (3 - Q)^2 + (2.1 - Q)^2$$

$$\Rightarrow 11.2Q - 13.16 = 0 \Rightarrow Q = 1.175 \text{ l/s}$$

Ejemplo: Un bomba es usada para transportar un líquido entre 2 estanques abiertos. Dispone además de una línea de reciclo con un orificio de restricción que permite una velocidad menor o igual a 2 m/s. Demuestre que el flujo al estanque es de $1.1 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ si $z_2=12 \text{ m}$, $z_1=5\text{m}$ y la altura de bomba está dada por: $H=12-70Q-4300Q^2$ siendo $d=10\text{cm}$, y los largos equivalentes de cada sección $l_{\text{succión}}=2\text{m}$, $l_{\text{reciclo}}=10\text{m}$, $l_{\text{transferencia}}=20\text{m}$. El factor de fricción se asume $f=0.00125$.

Indicación: Determine el factor K de pérdida de la restricción en una primera instancia

Not to scale



Conservación de la energía

$$h_{bomba} = \frac{V^2}{2g} + f \frac{(L_s + L_r)V^2}{2gD} + K \frac{V^2}{2g}$$

En este caso $V = 2 \text{ m/s} \Rightarrow Q = 0.0157 \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow h_{bomba} = 9.84 \text{ m}$

Reemplazamos para obtener $K = 44.9$.

Ahora consideramos ambos circuitos y aplicamos Bernoulli

$$\left. \begin{aligned} h_{bomba} &= \frac{V_r^2}{2g} + f \frac{L_s (V_r + V_t)^2}{2gD} + K \frac{V_r^2}{2g} + f \frac{L_r V_r^2}{2gD} \\ h_{bomba} &= \Delta z + \frac{V_t^2}{2g} + f \frac{L_s (V_r + V_t)^2}{2gD} + f \frac{L_t V_t^2}{2gD} \\ h_{bomba} &= 12 - 70 \frac{\pi D^2}{4} (V_r + V_t) - 4300 \left[\frac{\pi D^2}{4} (V_r + V_t) \right]^2 \end{aligned} \right\} 3 \text{ ecs, } 3 ?$$

$$v_r = 1.75 \text{ m/s}$$

$$v_t = 1.4 \text{ m/s}$$

$$h_{bomba} = 7.49 \text{ m}$$