Listado 1

1. Dado un conjunto E con n elementos.

   a) Determine cuántas relaciones hay en E

   b) Determine cuántas relaciones reflejas hay en E.

   c) Cuántas simétricas.

   d) Cuántas antisimétricas.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto $\{0,1,*\}^n$ y la siguiente relación:

$$u_1u_2..u_n\ R\ v_1v_2..v_n \Leftrightarrow (\forall i \in \{1,..,n\})\ (u_i \neq * \Rightarrow u_i = v_i)$$

   a) Haga el diagrama de Hasse de la relación para $n = 2$, identificando máximos, mínimos, maximales y minimales.

   b) Demuestre que R es de orden.

   c) Decida si es total o parcial.

3. Demuestre que la siguiente es una relación de orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine si es de orden total o parcial, y calcule sus elementos minimales, maximales, mínimos y máximos (si es que existen).

$$(a,b)\ R\ (c,d)\ \Leftrightarrow\ (\exists k \in \mathbb{N})(\exists \in \mathbb{N})\ (a+k, b+j) = (c,d)$$

   Haga un diagrama de Hasse restringiéndola al conjunto $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$

   Demuestre además que todo par de puntos tiene una cota superior común, es decir:

$$(\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\exists (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})\ (a,b)\ R\ (i,j) \wedge (c,d)\ R\ (i,j).$$

4. Demuestre que la siguiente es una relación de orden en $A = \{0,1,2\}^3$, determine si es de orden total o parcial y calcule sus elementos minimales, maximales, mínimos y máximos. Dibuje su diagrama de Hasse.

$$(x_1,x_2,x_3)\ R\ (y_1,y_2,y_3)\ \Leftrightarrow\ (\forall k \in \{1,2,3\})\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

   Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, considere ahora el caso en que $A = \mathbb{N}^n$, con la siguiente relación; demuestre que es de orden y que tiene un mínimo, pero no tiene máximo ni maximal.

$$(x_1,\ldots,x_n)\ R\ (y_1,\ldots,y_n)\ \Leftrightarrow\ (\forall k \in \{1,\ldots,n\})\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$