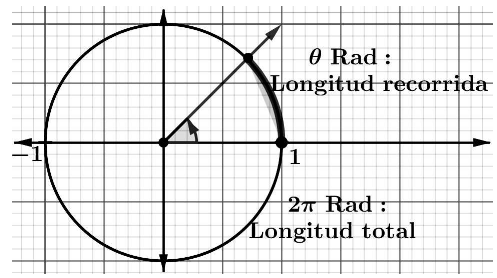
Guía 15-C1: Seno y coseno. Límites

§**1**. *Circunferencia unitaria.* §**2**. *Radianes.* §**3**. *Seno y coseno.* §**4**. *Triángulos rectángulos de hipotenusa* 1. §**5**. *Pitágoras trigonométrico.* §**6**. *Mayoración de v. a. menguante.* §**7**. *Límite trigonométrico fundamental.* §**8**. *Técnicas combinadas para límites.*

15.1. Funciones seno y coseno

Radianes y circunferencia unitaria

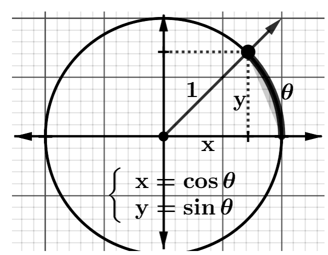
La '*circunferencia unitaria*' es fundamental para comprender los '*radianes*'. La medida en radianes de un ángulo es la longitud de la parte de la circunferencia unitaria que recorre el ángulo. La longitud total de la circunferencia de radio 1 es igual a 2π (reemplazar $R = 1$ en la fórmula $2\pi R$). Un ángulo de 2π será '*una vuelta completa*'.



> Los radianes miden la longitud de una parte de la circunferencia unitaria

Circunferencia unitaria y funciones seno, coseno

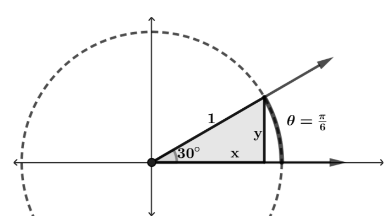
Un ángulo θ (en radianes) determina un punto en la circunferencia unitaria, y las funciones seno y coseno son las coordenadas de ese punto: $\boxed{x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta}$.
En la práctica, para determinar tales coordenadas aplicaremos nuestro conocimiento de geometría para triángulos rectángulos cuando se tiene como datos la hipotenusa = 1 y los ángulos (conocidos por el valor específico de θ). Algunos valores:



θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$-\pi/2$
$\sin\theta$	0	$1/\sqrt{2}$	1	$-1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1
$\cos\theta$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0

`Ejemplo 15.1` *Determinar el seno y el coseno de* $\theta = \frac{\pi}{6}$.

`Solución`. Recordemos que π radianes son la longitud de la mitad de la circunferencia unitaria y esto, en grados sexagesimales, son 180°. Luego, $\frac{\pi}{6}$ son $\frac{180}{6} = 30^\circ$.
Por lo tanto, el triángulo rectángulo que nos permite determinar al seno y al coseno es un triángulo $30 - 60 - 90$. Del hecho que este triángulo es la mitad de un triángulo equilátero obtenemos de inmediato que $\sin(\pi/6) = y = \frac{1}{2}$. Por el teorema de Pitágoras, se tiene $x^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1 \implies \cos(\pi/6) = x = \sqrt{3}/2$, donde se consideró la raíz positiva por la posición del ángulo dentro del primer cuadrante.



Pitágoras trigonométrico y desigualdades básicas

El seno y el coseno son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa = 1:

$$\underline{\textbf{Pitágoras trig.}}: \ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \underline{\textbf{Desig}}: \ |\sin\theta| \le 1, \quad |\cos\theta| \le 1, \quad |\sin\theta| \le |\theta|$$

Los dos primeros desigualdades expresan el hecho que ambos catetos son $\le$ que la hipotensua del triángulo. La tercera desigualdad es que la longitud del cateto vertical es $\le$ que la longitud del arco de circunferencia, como se puede apreciar en la figura de arriba.

15.2. Mayoración de v.a. menguante para límites

Técnica de mayoración de v.a. menguante cuando el límite es cero

Poner un v.a. (valor absoluto) a la expresión y '*mayorarla*' por otra expresión que tiende a cero.

`Ejemplo 15.2` *Analizar* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cos(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2}\right)$.

`Solución`. Usaremos que hecho que $|\cos(\theta)| \leq 1$ para realizar un acotamiento de v.a.menguante:

$$\left|\frac{\cos(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2}\right| = \frac{|\cos(x+\sqrt{x^2-1})|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \xrightarrow{(x\to\pm\infty)} 0.$$

Mayoramos el v.a. de la expresión original por algo menguante. Conclusión: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cos(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2}\right) = 0$.

El límite trigonométrico fundamental

Vemos en la figura que define al seno y al coseno que si $\theta \to 0$, entonces $y = \sin\theta \to \theta$:

$$\underline{\text{LTF}}: \quad \boxed{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1}.$$

`Ejemplo 15.3` *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)$.

`Solución`. Si hacemos el cambio de variable $\theta = 2x$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta/2}\right) = 2\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 2.$$

Combinación de técnicas

`Ejemplo 15.4` *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$.

`Solución`. Notamos que

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}.$$

Aplicando Pitágoras, queda $= \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$. Esto implica que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0.$$

`Ejemplo 15.5` *Analizar* $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

`Solución`. Hacemos el cambio de variable $\theta = \frac{1}{x}$. Luego, $\theta \to 0$ y

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\sin(\theta) = 1.$$

15.3. Ejercicios

Enunciados

P 15.1 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$.

P 15.2 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(1-x)}{1-x^2}\right)$.

P 15.3 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}\right)$.

P 15.4 *Analizar* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+\sin(x)}{x^2+\cos(x)}\right)$.

P 15.5 *Analizar* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{|\sin(x)|}{x}\right)$.

P 15.6 *Analizar la continuidad en* $x=0$ *de la función* $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0,\\ 0 & si\ x=0.\end{cases}$

P 15.7 *Analizar* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\right)$.

P 15.8 *Analizar* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{\pi+\frac{1}{x}}{\cos(\pi+\frac{1}{x})}\right)$.

P 15.9 *Encuentre los* $k\in\mathbb{R}$ *tales que la función* $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin((1+k^2)x)}{x} & si\ x\neq 0,\\ 2k & si\ x=0.\end{cases}$ *es continua en* $x=0$.

P 15.10 *Analizar* $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(1-\cos(\frac{1}{x})\right)$.

P 15.11 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}\right)$.

P 15.12 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\right)$.

P 15.13 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}\right)$.

P 15.14 *Encuentre los* $k\in\mathbb{R}$ *tales que la función* $f(x)=\begin{cases} k-x\sin(\frac{k}{x}) & si\ x\neq 0,\\ k^2 & si\ x=0.\end{cases}$ *es continua en* $x=0$.

P 15.15 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}\right)$.

P 15.16 *Analizar* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2(x^2)}{x^3\sin(3x)}\right)$.

P 15.17 *Considerar la función*

$$f(x)=\begin{cases} x+(x-1)^2\sin\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) & si\ x\neq 1\\ 1 & si\ x=1.\end{cases}$$

i) *¿Es f continua en $x=1$?*
ii) *Si es que existen, determine todas las asíntotas de f.*

Respuestas

__**P. 15.1**__ $= \frac{1}{2}$. __**P. 15.2**__ $= \frac{1}{2}$. __**P. 15.3**__ $= 2$. __**P. 15.4**__ $= 1$. __**P. 15.5**__ $= \nexists$. __**P. 15.6**__ Si es continua. __**P. 15.7**__ $= \frac{3}{5}$. __**P. 15.8**__ $= -\pi$. __**P. 15.9**__ $k = 1$. __**P. 15.10**__ $= 0$. __**P. 15.11**__ $= 0$. __**P. 15.12**__ $= \frac{1}{4}$. __**P. 15.13**__ $= 1$. __**P. 15.14**__ $k = 0$, $k = 1$. __**P. 15.15**__ $= 2$. __**P. 15.16**__ $= \frac{1}{6}$. __**P. 15.17**__ (i) Si es continua. (ii) f tiene una única asíntota, que es oblicua, la recta $y = 2x$.