

Problema 1

Calcular la integral de línea

$$\int_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) ds$$

donde L es la primera espiral de la línea helicoidal cónica $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$

Solución. Sea $f(x, y, z) := 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$, notando que L está parametrizada por :

$$r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto r(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$$

y puesto que:

$$ds := \|r'(t)\| dt$$

concluimos

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_L f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

Luego para determinar el valor de esta integral necesitamos calcular lo siguiente:

1.

$$\begin{aligned} r'(t) &= (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1) \\ \Rightarrow \|r'(t)\| &= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2 + t^2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(r(t)) &= 2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} \\ &= 2t - \sqrt{t^2} = t \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \int_L f(r(t)) \|r'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt, \quad u = 2 + t^2, \quad du = 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{2(1+2\pi^2)} \sqrt{u} du \\ &= \frac{2^{3/2}}{3} \left((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned}$$

□

Problema 2

Calcular el área de las siguientes superficies:

- a) De la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante
- b) De la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ la cual está por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0, y = 0, x = 3$ e $y = 6$.
- c) De la parte de $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b$ e $y = -b$

Solucion. **a)** Notemos que $2z = 12 - 6x - 3y$ y por tanto $z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y$, luego de la teoría vista en clases sabemos que el area de superficie buscada esta dada por:

$$\iint_S d\sigma = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Donde $S := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x\}$, ademas se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -3 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{3}{2}$$

luego

$$\begin{aligned} \iint_S d\sigma &= \iint_S \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}} = \iint_S \frac{7}{2} dx dy \\ &= \frac{7}{2} \int_0^2 \int_0^{4-2x} dy dx = \frac{7}{2} \int_0^2 (4 - 2x) dx \\ &= \frac{7}{2}(4) = 14 \end{aligned}$$

b) Como la parte de la superficie considerada esta por encima del plano $z = 0$ se tiene que $z \geq 0$ y por tanto $z = \sqrt{2xy}$, procederemos analogamente a **a)**

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{2xy}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2xy}}$$

Por otro lado $S := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6\}$, por tanto el area de superficie buscada es:

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy &= \iint_S \sqrt{1 + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}} dx dy \\ &= \iint_S \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^6 \int_0^3 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} dy \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (2\sqrt{6} + 4\sqrt{6}) = 36. \end{aligned}$$

c) Procederemos de manera analoga a los 2 ejercicios anteriores, despejando x en terminos de y, z obtenemos:

$$x = \pm \sqrt{y^2 + z^2}$$

por tanto considerando $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, se obtiene:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial z}(x, y) = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

ademas notamos que

$$-b \leq y \leq b \quad , \quad x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow z^2 + y^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow z^2 = a^2 \Rightarrow -a \leq z \leq a$$

de esto concluimos que el dominio de integracion sera $R := \{(y, z) : -b \leq y \leq b, -a \leq z \leq a\}$, y prodecemos a calcular el area de superficie buscada como sigue:

$$\begin{aligned} \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz &= \iint_R \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} = \iint_S \sqrt{2} dy dz \\ &= \sqrt{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b dy dz = \sqrt{2}(2a)(2b) \\ &= 4\sqrt{2}ab \end{aligned}$$

lo anterior se puede hacer de manera analoga considerando $x = -\sqrt{y^2 + z^2}$ obteniendo el mismo resultado, por tanto el area de superficie buscada es:

$$A_S = 8\sqrt{2}ab$$

□

Problema 3

Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y, x - 2xz, -xy)$. Demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = 0$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ por encima del plano (x, y)

Demostración. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (L, M, N)$, luego por el Teorema de Stokes se tiene que

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S} L dx + M dy + N dz = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

buscaremos usar la Definicion 6.11 , para ello buscamos encontrar una parametrización para ∂S , para esto notemos que S es la superficie del casquete de la esfera de radio a . por tanto la frontera de este conjunto es:

$$\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = a^2\}$$

es decir ∂S es un circulo de radio a , por tanto podemos parametrizarlo como

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$$

obteniendo $f'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$, asi para usar la Definicion 6.11 necesitamos calcular lo siguiente

$$\vec{F}(f(t)) = (a \sin t, a \cos t - 0, -a^2 \cos t \sin t)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_0^{2\pi} -a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t dt = a^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{4\pi} \cos u du \\ &= \frac{a^2}{2} (\sin 4\pi - \sin 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Problema 4

Usando el Teorema Integral de Gauss calcule el valor de la integral

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} d(x, y, z)$$

donde $\vec{F}(x, y, z) = (0, xyz^2, 3z)$ y V es el solido limitado por las superficies $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z = 4$.

Solucion. Por el Teorema de Gauss tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} d(x, y, z) &= \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} \|f_u \times f_v\| du dv \\ &= \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot (f_u \times f_v) du dv \end{aligned}$$

donde f es una parametrización de ∂V que depende de las variables u y v , además notemos que $\partial V = H_1 \cup H_2$ donde H_1 es el disco de radio 4, y H_2 los bordes del cono, así tenemos que:

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot (f_u \times f_v) du dv = \iint_{H_1} \vec{F} \cdot (u_r \times u_\phi) dr d\phi + \iint_{H_2} \vec{F} \cdot (h_\rho \times h_\theta) d\rho d\theta$$

Por como lo definimos $H_1 := \{(x, y, 4) : x^2 + y^2 \leq 16\}$, así deducimos que una parametrización para H_1 es:

$$u : [0, 4] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \phi) \mapsto u(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 4)$$

Por tanto

$$u_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad , \quad u_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0)$$

$$u_r \times u_\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}r = (0, 0, r)$$

luego para determinar el valor de la integral, calculamos lo siguiente:

$$\vec{F}(u(r, \phi)) = (0, 16r^2 \cos \phi \sin \phi, 12) \quad , \quad \vec{F}(u(r, \phi)) \cdot u_r \times u_\phi = 12r$$

así concluimos que:

$$\iint_{H_1} \vec{F} \cdot (u_r \times u_\phi) dr d\phi = \iint_{H_1} 12r dr d\phi = 12 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^4 r dr \right) = 12(2\pi)(8) = 192\pi$$

¹Aunque $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, su interseccion es un circulo, el cual tiene area nula, por tanto esto no afectara al calculo de la integral, por ello podemos separar la integral sobre la frontera de V en 2 integrales.

Resta por calcular la integral asociada a H_2 para esto notemos lo siguiente:

$$H_2 := \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^{1/2} = z\}$$

y por tanto una parametrización para H_2 es:

$$g : [0, 4] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\rho, \theta) \mapsto g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

por tanto

$$g_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \quad , \quad g_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

$$g_\rho \times g_\theta = (-\rho \sin \theta, -\rho \cos \theta, \rho)$$

sin embargo $g_\rho \times g_\theta$ apunta al interior de V por tanto debemos considerar a $-(g_\rho \times g_\theta)$, luego para determinar el valor de la integral calculamos lo siguiente

$$\vec{F}(g(\rho, \theta)) = (0, \rho^4 \sin \theta \cos \theta, 3\rho) \quad , \quad \vec{F}(g(\rho, \theta)) \cdot (-(g_\rho \times g_\theta)) = \rho^5 \sin^2 \theta \cos \theta - 3\rho^2$$

por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{H_2} \vec{F} \cdot (-(g_\rho \times g_\theta)) d\rho d\theta &= \iint_{H_2} \rho^5 \sin^2 \theta \cos \theta - 3\rho^2 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \int_0^4 \rho^5 d\rho - 3 \int_0^4 \rho^4 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{4^6}{6} \sin^2 \theta \cos \theta - 4^3 d\theta \\ &= \frac{4^6}{6} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta - 128\pi \\ &= -128\pi \end{aligned}$$

asi concluimos que

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} d(x, y, z) = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot (f_u \times f_v) du dv = 192\pi - 128\pi = 64\pi$$

□

Apendice

Definición 6.11

Sea \mathbf{K} una curva suave por trozos en \mathbb{R}^n con la parametrización $(f, [a, b])$, además sea $\vec{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ un campo vectorial continuo sobre \mathbf{K} . Entonces la expresión

$$\int_a^b \vec{V}(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_K (V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n)$$

se llama integral de línea de \vec{V} a lo largo de \mathbf{K} con respecto a la parametrización $(f, [a, b])$.

Teorema 6.19 (Teorema integral de Gauss).

Sea $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ un campo definido sobre el conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^3$; sea $\vec{V} \in C^1(D)$. Sea S un recinto estandar con $\bar{S} \subset D$, y sea ∂S un subconjunto de un numero finito de superficies. Si denotamos por \vec{n} el vector normal exterior sobre ∂S , entonces se tiene que:

$$\iiint_S \operatorname{div} \vec{V} d(x, y, z) = \iiint_{\partial S} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Teorema 6.20 (Teorema integral de Stokes).

Sea $\vec{V} = (L, M, N) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ un campo vectorial; sea \vec{V} definido sobre un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, y sea $\vec{V} \in C^1(D)$. Sea F una superficie con la parametrizacion (f, S) contenida en D , y sea $f \in C^2(S)$. Además, sea $G \subset F$ un conjunto con la imagen reciproca $\bar{G} \subset S$, donde \bar{G} sea una region de Green. En este caso se tiene que:

$$\iint_G (\operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\partial G} (L dx + M dy + N dz)$$