UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 15 - Álgebra III (525201)

Ejercicio 1. Sea $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada con respecto a la base $B = \{1, 1+x, x+x^2\}$ es:

$$A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que f define un producto interior y calcule su matriz representante con respecto a la base $B' = \{1, x, x^2\}$.

Demostración. Demostrar que $A_{f,B}$ es definida positiva para concluir que f define un producto interior.

Luego calcular la matriz de paso P de B a B' y utilizar que $A_{f,B'} = P^t A_{f,B} P$.

■

Ejercicio 2. Sea $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Pruebe que si A es simétrica y $B \cong A$ (i.e. B congruente a A), entonces B es también simétrica. Muestre que esta proposición no es cierta si se reemplaza $B \cong A$ por $B \sim A$.

Demostración. Supongamos que $A \cong B$. Luego, existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = P^t B P$.

Como A es simétrica, entonces $A = A^t$, i.e.

$$\begin{aligned} P^t B P &= (P^t B P) \\ &= P^t B^t P. \end{aligned}$$

Como P es invertible, entonces podemos multiplicar por las inversas correspondientes y concluir que $B = B^t$.

Por otra parte, recordemos que si A es diagonalizable, entonces es similar a una matriz diagonal D. Como las matrices diagonales son simétricas, pero no toda matriz diagonalizable es simétrica, tenemos que $D \sim A$ con D simétrica pero A no necesariamente simétrica. ■

b) Muestre que si $A \cong B$, entonces no necesariamente $\det(A) = \det(B)$.

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. Luego,

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{P^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

Luego, $A \cong B$ pero $\det(A) = -48 \neq -3 = \det(B)$. ■

c) Concluya que si $A \cong B$, entonces no necesariamente $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Demostración. Toda matriz A simétrica definida positiva es congruente a la matriz identidad, sin embargo no necesariamente $\sigma(A) = \{1\}$ (ver ejercicio siguiente). ■

Ejercicio 3. Muestre que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ -6 & 40 & 39 \\ -6 & 39 & 39 \end{pmatrix}$$

es congruente a la matriz identidad I_3.

Demostración. Demostrar que A es definida positiva y por tanto existe la descomposición de Cholesky

$$A = LL^t,$$

con L invertible, de modo que $A \cong I_3$. ■

Ejercicio 4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$$

define un producto interior en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\langle x, y\rangle = x^t Ay$).

Considere $V = \langle\{(1,1,0),(0,1,1)\}\rangle$.

a) Determine a, b y c sabiendo que $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ es una base ortonormal de V.

a) Calcule los vectores de $V^\perp$ de norma 1.

Ejercicio 5. Sea la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1, \qquad \forall (x_1, x_2),(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Muestre que f define un producto interior en $\mathbb{R}^2$. Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ con respecto a este producto interior.

b) Determine el lugar geométrico y haga un dibujo de la cónica definida por la ecuación $B((x,y),(x,y)) = 4$.

Concepción, 13 de enero de 2020
JAL/JMR/jmr