Problema 1

Se consideran las curvas

$$g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0\}, \quad g_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = -1\}$$

Determinar los puntos $P = (x_1, y_1) \in g_1$ y $Q = (x_2, y_2) \in g_2$ tales que la distancia euclidiana $d(P, Q)$ es mínima.

Solucion. La funcion a analizar es la distancia euclideana entre 2 puntos, es decir

$$d(x_1, y_1, x_2, y_2) := ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}$$

sin embargo, como la función $x^{1/2}$ es creciente en todo su dominio, nuestro análisis se puede hacer de manera equivalente considerando la función

$$\hat{d}(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

ahora buscamos encontrar extremos de la funcion con ciertas restricciones, es por ello que usaremos **multiplicadores de Lagrange** considerando lo siguiente:

Sea $P := (x_1, y_1)$ y $Q := (x_2, y_2)$

$$P \in g_1 \iff x_1 y_1 = 1 \quad , \quad Q \in g_2 \iff x_2 + 2y_2 = -1$$

Por tanto las funciones asociadas a estas restricciones son

$$r_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1 y_1 - 1 \quad , \quad r_2(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_2 + 2y_2 + 1$$

Notamos que

$$\nabla r_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = (y_1, x_1, 0, 0) \quad , \quad \nabla r_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 1, 2),$$

$$\nabla \hat{d}(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2(x_1 - x_2), -2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), -2(y_1 - y_2))$$

Sean λ_1 y λ_2 los multiplicadores de Lagrange asociados a la primera y segunda restriccion respectivamente. ocupando todo lo anteriormente obtenido, llegamos al siguiente sistema

$$\begin{cases} r_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \\ r_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \\ \nabla \hat{d} - \lambda_1 \nabla r_1 - \lambda_2 \nabla r_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 y_1 - 1 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - \lambda_1 y_1 = 0 \\ 2y_1 - 2y_2 - \lambda_1 x_1 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - \lambda_2 = 0 \\ -2y_1 + 2y_2 - 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

sumando la tercera ecuacion con la quinta y la cuarta ecuacion con la sexta obtenemos

$$\begin{cases} x_1 y_1 - 1 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + 1 = 0 \\ -\lambda_1 y_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

De la primera restriccion concluimos que $y_1 = \frac{1}{x_1}$, luego multiplicando la tercera ecuacion por -2 y sumandola con la cuarta obtenemos

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{x_1} \\ x_2 + 2y_2 + 1 = 0 \\ \lambda_1 \left(\frac{2}{x_1} - x_1\right) = 0 \end{cases}$$

Notemos que la ultima ecuacion es valida solo si $\lambda_1 = 0$ o $x_1^2 - 2 = 0$.

Caso 1 ($\lambda_1 = 0$): Reemplazando el valor de λ_1 en ecuaciones anteriores obtenemos que $P = Q$ lo cual es una contradiccion con nuestras hipotesis.

Caso 2 ($x_1 = -\sqrt{2}$): En este caso se tiene que $P \notin g_1$ por las restricciones del conjunto.

Asi concluimos que $x_1 = \sqrt{2}$ y $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, luego para obtener los valores de x_2 y y_2 ocuparemos los valores de obtenidos de x_1 y y_1 y que $x_2 + 2y_2 + 1 = 0$ en ecuaciones anteriores obteniendo

$$x_2 = \frac{3\sqrt{2} - 1}{5} \quad , \quad y_2 = -\frac{3\sqrt{2} + 4}{10}$$

por tanto concluimos que

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad Q = \left(\frac{3\sqrt{2} - 1}{5}, -\frac{3\sqrt{2} + 4}{10}\right)$$

□

Problema 2

¿Cual es el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos?

$$a)\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - e^z)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi z)))^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$
$$b)\mathcal{U} = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - e^y| \leq y, |z - \cos(5\pi y)| \leq 2y, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

Solucion. Para calcular los volumenes solicitados usaremos el Teorema 4.37 (Cavalieri)

a) Notemos que $\mathcal{K}$ corresponde a un cilindro de altura 1 y radio 1. Luego fijando $z = \phi$ con $\phi \in [0,1]$ el conjunto

$$S_\phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - e^\phi)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi\phi)))^2 \leq 1, z = \phi\}$$

corresponde a un disco centrado en $(e^z, 5\sin(\pi z))$ con area $q(\phi) = \pi \cdot 1^2 = \pi$ y por el principio de Cavalieri, el volumen de $\mathcal{K}$ es:

$$V(\mathcal{K}) = \int_0^1 q(\phi)\, d\phi = \pi$$

b) Se puede ver que $\mathcal{U}$ es un paralelepipedo, fijando $y = \aleph$ con $\aleph \in [0,1]$ el conjunto

$$S_\aleph = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - e^\aleph| \leq \aleph, |z - \cos(5\pi\aleph)| \leq 2\aleph, y = \aleph\}$$

Corresponde a un rectangulo centrado en $(e^y, \cos(5\pi y))$ que tiene lados $2\aleph$ y $4\aleph$ por tanto su area es $q(\aleph) = 8\aleph^2$ y aplicando el principio de Cavalieri se deduce que su volumen es

$$V(\mathcal{U}) = \int_0^1 q(\aleph)\, d\aleph = \int_0^1 8\aleph^2\, d\aleph = \frac{8}{3}$$

$\square$

Problema 3

a) Determinar la masa del sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\delta(x, y, z) = (x^2 + z^2)^{1/2}$

b) Calcular la masa del sólido limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ con $z \geq 0$ si su densidad en cada punto $P(x, y, z)$ es $\delta(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

Solucion. **a)** Sea P el dominio de integracion, luego sabemos que la masa del solido esta dada por

$$m = \iiint_P (x^2 + z^2)^{1/2} \, dx \, dy \, dz$$

donde P es

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x^2 + z^2 \leq 4\}$$

Transformaremos lo anterior a coordenadas cilindricas, de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases}$$

Donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ asi el nuevo dominio de integracion sera

$$U := \{(r, \theta, y) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq y \leq 4, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

por tanto

$$m = \iiint_U r^2 \, dy \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^2 \, dy \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2(4 - r^2) \, dr \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^2 4r^2 - r^4 \, dr\right) = 2\pi \left(\frac{2^5}{3} - \frac{2^5}{5}\right) = \frac{128\pi}{15}$$

b) Sea K el dominio de integracion, la masa del solido esta dada por

$$m = \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

donde K es la superficie $H : (x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ y $z \geq 0$, transformaremos lo anterior a coordenadas esfericas :

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Ademas reemplazando en la ecuacion obtenemos $r = \cos^2\phi$ y por tanto el nuevo dominio de integacion es

$$D = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq \cos^2\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$$

Entonces

$$m = \iiint_D (r^2)^{3/2} r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \iiint_D r^5 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\phi \frac{1}{6} \cos^{12}\phi \, d\phi \; d\theta = \frac{1}{6} \left(\int_0^{2\pi} \, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin\phi \cos^{12}\phi \, d\phi \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\phi \cos^{12}\phi \, d\phi \right)$$

Luego resolveremos esta ultima integral usando integracion por partes, como sigue:

$$I = \int \sin\phi \cos^{12}\phi \, d\phi$$
$$u = \cos^{12}\phi \quad , du = -12\cos^{11}\phi \sin\phi \, d\phi$$
$$dv = \sin\phi \, d\phi \quad , v = -\cos\phi$$

Usando integracion por partes obtenemos

$$\begin{aligned} I &= -\cos^{13}\phi - 12 \int \cos^{12}\phi sin\phi \, d\phi \\ &= -\cos^{13}\phi - 12I \\ \Rightarrow I &= -\frac{\cos^{13}\phi}{13} \end{aligned}$$

Ocupando lo anterior y evaluando en los limites de integracion concluimos que:

$$m = \frac{\pi}{39}$$

□

Problema 4

Calcular el volumen y centro de masa del sólido limitado por la superficie $z = y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

Solución. Notemos que el solido puede ser representado como el conjunto

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 6 - \frac{3}{2}y, 0 \leq z \leq y^2\}$$

y por tanto el volumen del conjunto S es:

$$V(S) = \iiint_S dV = \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}y} \int_0^{y^2} dz\, dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}y} y^2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 y^2(6 - \tfrac{3}{2}y)\, dy = 6\int_0^4 y^2\, dy - \tfrac{3}{2}\int_0^4 y^3\, dy$$

$$= 6 \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4^4}{4} = 4^3(2 - \tfrac{3}{2}) = 32$$

Asi $V(S) = 32$, luego para calcular el centro de masa del sólido inducido por S usaremos la Definicion 5.4 la cual nos da una forma de calcular el centro de masa de un conjunto, en nuestro caso si denotamos al centro de masa como el punto $C = (x_0, y_0, z_0)$ este viene dado explicitamente por:

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{V}\iiint_S x\, d(x, y, z), \frac{1}{V}\iiint_S y\, d(x, y, z), \frac{1}{V}\iiint_S z\, d(x, y, z)\right)$$

Por tanto, para calcular el centro de masa debemos calcular las 3 integrales anteriores, haremos esto como sigue:

1.

$$\iiint_S x\, d(x, y, z) = \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \int_0^{y^2} x\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} xy^2\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_0^6 x(4 - \tfrac{2}{3}x)^3\, dx$$

Para simplificar calculos haremos el cambio de variable $u = 4 - \frac{2}{3}x$, resultando

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 u^3(6 - \tfrac{3}{2}u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^4 6u^3 - \tfrac{3}{2}u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(6\int_0^4 u^3\,du - \tfrac{3}{2}\int_0^4 u^4\,du\right) = \frac{1}{2}\left(6\cdot 4^3 - \tfrac{3}{2}\ \cdot \tfrac{4^5}{5}\right)$$

$$= \frac{192}{5}$$
$$\therefore x_0 = \frac{192}{160}$$

2.

$$\iiint_S y\,d(x,y,z) = \int_0^4\int_0^{6-\frac{3}{2}y}\int_0^{y^2} y\,dz\,dx\,dy = \int_0^4\int_0^{6-\frac{3}{2}y} y^3\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 y^3(6 - \frac{3}{2}y)\,dy = 6\int_0^4 y^3 - \frac{3}{2}\int_0^4 y^4\,dy$$

$$= 6\left(\frac{4^4}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{4^5}{5}\right) = \frac{384}{5}$$
$$\therefore y_0 = \frac{384}{160}$$

3.

$$\iiint_S z\,d(x,y,z) = \int_0^4\int_0^{6-\frac{3}{2}y}\int_0^{y^2} z\,dz\,dx\,dy = \int_0^4\int_0^{6-\frac{3}{2}y} \frac{y^4}{2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 y^4(6 - \frac{3}{2}y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^4 6y^4 - \frac{3}{2}y^5\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(6\int_0^4 y^4\,dy - \frac{3}{2}\int_0^4 y^5\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6\left(\frac{4^5}{5}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{4^6}{6}\right)\right) = \frac{512}{5}$$
$$\therefore z_0 = \frac{512}{160}$$

Por tanto de lo obtenido anteriormente concluimos que el centro de masa esta ubicado en:

$$C = (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{192}{160}, \frac{384}{160}, \frac{512}{160}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

$\square$

Problema 5

a) Se considera la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{9x+9}}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{15}\int_{x-3}^{\sqrt{9x+9}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Dibujar el dominio de integración $\mathcal{R}$, representar la integral como integral iterada única y calcular su valor para $f(x,y) = y^2$.

b) Sea $\mathcal{Q} := [1,4]\times[1,2]$. Calcular

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,d(x,y), \quad \text{donde} \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{(x+y)^2} & \text{si } y \le x \le 2y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

c) Calcular

$$\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy.$$

d) Demostrar que para $a > 0$,

$$\int_0^a \left(\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\,dx\right) dy = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)\,dx$$

Solucion. **a)**

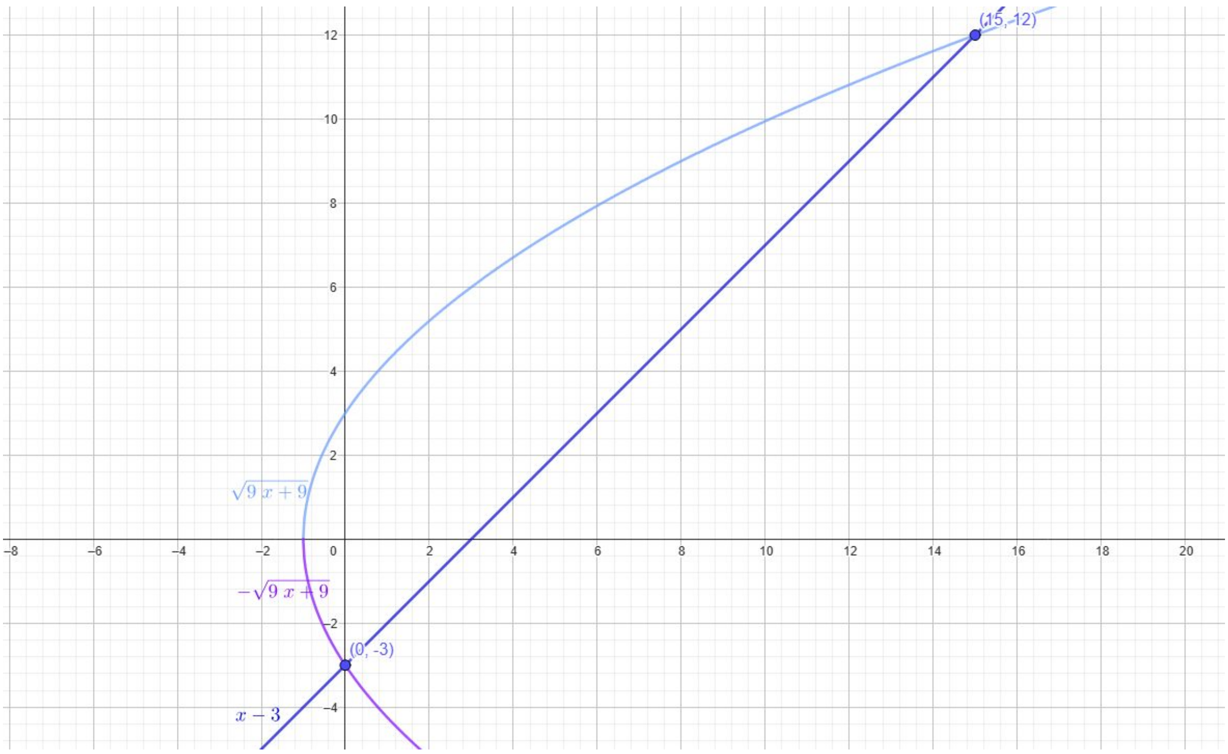

Figura 1: Dominio de integracion $\mathcal{R}$

Del grafico podemos notar que si intentamos poner a x en funcion de y la integracion se puede expresar en una sola integral, los limites de integracion de y pueden ser deducidos del grafico anterior asi se tiene que

$$-3 \leq y \leq 12$$

luego ponemos a x en funcion de y de la siguiente forma $y^2 = 9x + 9 \iff x = \frac{y^2-9}{9}$ y $y = x - 3 \iff x = y + 3$, apoyandonos del grafico concluimos que

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-3}^{12} \int_{\frac{y^2-9}{9}}^{y+3} f(x,y)\, dx\, dy$$

Luego calcularemos el valor de esta integral usando $f(x,y) = y^2$, como sigue:

$$\int_{-3}^{12} \int_{\frac{y^2-9}{9}}^{y+3} y^2\, dx\, dy = \int_{-3}^{12} y^2 \left(y + 3 - \left(\frac{y^2-9}{9} \right) \right) dy = \int_{-3}^{12} y^3 + 4y^2 - \frac{1}{9} y^4\, dy$$

$$= \left(\frac{12^4}{4} - \frac{(-3)^4}{4} \right) + 4 \left(\frac{12^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{12^5}{5} - \frac{(-3)^5}{5} \right)$$

$$= \frac{7875}{4}$$

b) Notemos que dada la definicion de $f(x,y)$ integrar a f sobre $\mathcal{Q}$ es equivalente a integrarla sobre el dominio

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq 2y, 1 \leq y \leq 2\}$$

entonces

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\, d(x,y) = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_y^{2y} \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy \quad , u = x + y,\ du = \ dx$$

$$= \int_1^2 \int_{2y}^{3y} \frac{1}{u^2}\, du\, dy = \int_1^2 -\frac{1}{3y} + \frac{1}{2y}\, dy = -\frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{y}\, dy + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y}\, dy$$

$$= -\frac{1}{3}(\ln(2) - ln(1)) + \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) = -\frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{6} \ln(2)$$

c) El dominio sobre el que se integra es

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi/2\}$$

notemos que S es equivalente al siguiente dominio por el **Teorema de Fubini** (notando que $\sin x$ es continua)

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi/2\}$$

por tanto deducimos que

$$\iint_S (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy = \iint_H (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x} (\cos x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \quad , u = 1+\cos^2 x,\; du = -2\cos x \sin x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}2^{3/2} - \tfrac{2}{3}1^{3/2}\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

d) El dominio sobre el que se integra es

$$L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le a, 0 \le x \le y\}$$

ademas notando que este dominio es un triangulo, podemos deducir que este conjunto es equivalente a

$$J := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a, x \le y \le a\}$$

por tanto

$$\iint_L e^{m(a-x)} f(x)\,dx\,dy = \iint_J e^{m(a-x)} f(x)\,dy\,dx = \int_0^a \int_x^a e^{m(a-x)} f(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)\,dx\,dy$$

$\square$

Problema 6

Se consideran los campos vectoriales $\vec{V}_1, \vec{V}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por

$$\vec{V}_1 := \{yz, xz, xy\}, \quad \vec{V}_2 := \{x^2y, x-z, xyz\}$$

ademas las curvas

$$\mathcal{K}_1 : [0,1] \ni t \mapsto (t, t^2, 2) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{K}_2 : [0,1] \ni t \mapsto (t, t, 2)$$

Calcular rot $\vec{V}_1$ y rot $\vec{V}_2$ y las cuatro siguientes integrales de linea, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

$$\int_{\mathcal{K}_i} \vec{V}_j \cdot\, dx = \int_{\mathcal{K}_i} V_{j,1}\, dx + V_{j,2}\, dy + V_{j,3}\, dz, \quad i, j = 1, 2.$$

Demostración. Sean:

$$\vec{V}_1 = (yz, xz, xy) = (L_1, M_1, N_1), \quad \vec{V}_2 = (x^2y, x-z, xyz) = (L_2, M_2, N_2).$$

Para encontrar el rotacional de cada campo vectorial usaremos la Definicion 6.9, como sigue:

$$\operatorname{rot} \vec{V}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y}N_1 - \frac{\partial}{\partial z}M_1, \frac{\partial}{\partial z}L_1 - \frac{\partial}{\partial x}N_1, \frac{\partial}{\partial x}M_1 - \frac{\partial}{\partial y}L_1\right)$$

$$= (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y}N_2 - \frac{\partial}{\partial z}M_2, \frac{\partial}{\partial z}L_2 - \frac{\partial}{\partial x}N_2, \frac{\partial}{\partial x}M_2 - \frac{\partial}{\partial y}L_2\right)$$

$$= (xz + 1, -yz, 1 - x^2)$$

Luego calcularemos las 4 integrales de linea, haciendo uso de la Definicion 6.11

1. Sabemos que la curva $\mathcal{K}_1$ esta parametrizada por la funcion $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (t, t^2, 2)$ y por tanto $f'(t) = (1, 2t, 0)$, luego por la Definicion 6.11 se tiene que

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{V}_1 \cdot\, dx = \int_0^1 (2t^2, 2t, t^3) \cdot (1, 2t, 0)\, dt = \int_0^1 2t^2 + 4t^2\, dt = 6\int_0^1 t^2\, dt = 2$$

2.

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{V}_2 \cdot\, dx = \int_0^1 (t^4, t-2, 2t^3) \cdot (1, 2t, 0)\, dt = \int_0^1 t^4 + 2t(t-2)\, dt$$

$$= \int_0^1 t^4 + 2t^2 - 4t\, dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{2} = \frac{-17}{15}$$

3. Analogamente a lo anterior sabemos $\mathcal{K}_2$ esta parametrizada por $g : [0,1] \to \mathbb{R}^3, g(t) = (t, t, 2)$ y $g'(t) = (1, 1, 0)$ y por tanto

$$\int_{\mathcal{K}_2} \vec{V}_1 \cdot \, dx = \int_0^1 (2t, 2t, t^2) \cdot (1, 1, 0) \, dt = \int_0^1 2t + 2t \, dt = 4 \int_0^1 t = 2$$

4.

$$\int_{\mathcal{K}_2} \vec{V}_2 \cdot \, dx = \int_0^1 (t^3, t-2, 2t^2) \cdot (1, 1, 0) \, dt = \int_0^1 t^3 + t - 2 \, dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$

$\square$

Problema 7

Se considera el siguiente campo vectorial plano con el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{K}_\alpha(x,y) = \left\{\alpha y + \tan x, \frac{\arctan y}{1+y^2}\right\}, \quad (x,y) \in \mathcal{G} := \{(x,y) \mid |x| < \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ una curva rectificable que conecte el punto inicial $\mathbf{x}_0 \in G$ con el punto final $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}$.¿Para qué valor de α la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_\alpha(x,y)\,dx = \int_{\mathcal{C}} K_{\alpha,1}\,dx + K_{\alpha,2}\,dy$$

depende solamente de $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$, pero no de $\mathcal{C}$?
b) Para el valor de α determinado en a), hallar un potencial $\varphi(x,y)$ del campo vectorial $\vec{K}_\alpha(x,y)$.
c) Sean $\mathbf{x}_0$=(0,$\pi/4$),$\mathbf{x}_1 = (\pi/4, 0)$, y $\mathcal{C}$ el segmento recto que conecta ambos puntos. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}_1(x,y)\,dx$$

Aviso: Escribir $\vec{K}_1$ como suma de dos campos vectoriales y aprovechar el resultado de b).

Solucion. **a)** Para que se cumpla lo deseado buscamos que $\vec{\mathcal{K}_\alpha}$ sea un campo vectorial conservativo, usaremos la Definicion 6.12 para encontrar los valores de α que cumplan lo deseado.

Supongamos que existe $\varphi \in C^1(\mathcal{G})$ tal que:

$$\nabla\varphi(x,y) = \vec{\mathcal{K}_\alpha} = \left(\alpha y + \tan x, \frac{\arctan y}{1+y^2}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y) &= \alpha y + \tan x \\ \Rightarrow \varphi(x,y) &= \int \alpha y + \tan x\,dx \\ &= \alpha y x - \ln|\cos x| + \phi(y) \end{aligned}$$

Donde $\phi(y)$ es una funcion que solo depende de y, ademas como $(x,y) \in \mathcal{G}$ se tiene que $|x| < \pi/2$ y por tanto $\cos x > 0$ para cualquier $x \in \mathcal{G}$. Luego usando lo obtenido

$$\begin{aligned} \varphi_y(x,y) &= \alpha x + 0 + \phi_y(y) = \frac{\arctan y}{1+y^2} \\ \Rightarrow \phi_y(y) &= \frac{\arctan y}{1+y^2} - \alpha x \end{aligned}$$

Notemos que si $\alpha \neq 0$ entonces contradecimos la existencia de $\varphi(x,y)$ ya que en este caso $\phi(y)$ dependera de x, asi concluimos que $\alpha = 0$.

b) De lo obtenido anteriormente deducimos que

$$\phi(y) = \int \frac{\arctan y}{1+y^2}\,dy = \frac{\arctan^2 y}{2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

ademas podemos fijar $c = 0$ sin perdida de generalidad, ya que esto no afectara en los calculos posteriores. Por tanto el potencial $\varphi(x, y)$ es:

$$\varphi(x, y) = -\ln(\cos x) + \frac{\arctan^2 y}{2}$$

c) Notemos que $\vec{\mathcal{K}_1} = \vec{\mathcal{K}_0} + \vec{L}$ donde $\vec{L} := (y, 0)$, por tanto

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K_1}\,dx = \int_{\mathcal{C}} \vec{K_0} + \vec{L}\,dx = \int_{\mathcal{C}} \vec{K_0}\,dx + \int_{\mathcal{C}} \vec{L}\,dx$$

$$= \varphi(x_1) - \varphi(x_0) + \int_{\mathcal{C}} \vec{L}\,dx$$

Notar que la ultima igualdad es valida debido a que $\mathcal{K}_0$ es un campo conservativo. Luego calcularemos la integral de linea restante, para ello notemos que la funcion que parametriza a la curva $\mathcal{C}$ es $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \left(\frac{\pi}{4}t, \frac{\pi}{4}(1-t)\right)$ y $f'(t) = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ por tanto

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{L}\,dx = \int_0^1 (\tfrac{\pi}{4}(1-t), 0) \cdot (\tfrac{\pi}{4}, -\tfrac{\pi}{4})\,dt = \tfrac{\pi^2}{16} \int_0^1 (1-t)\,dt = \tfrac{\pi^2}{16} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi^2}{32}$$

Luego con lo obtenido en **b)**

$$\varphi(x_1) = \varphi(\pi/4, 0) = \frac{\arctan^2(0)}{2} - \ln(\cos(\pi/4)) = 0 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\varphi(x_2) = \varphi(0, \pi/4) = \frac{\arctan^2(\pi/4)}{2} - \ln(\cos(0)) = \frac{\arctan^2(\pi/4)}{2}$$

Por tanto concluimos que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K_1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\arctan^2(\pi/4)}{2} + \frac{\pi^2}{32}$$

$\square$

Problema 8

Determinar las siguientes áreas de superficie:
a) de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ interior a la superficie $y^2 = a(x + a), a > 0$,
b) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por la superficie $z^2 = py, p > 0$,
c) de la superficie que es parte de $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ recortada por $x^2 = 2\sqrt{2}y$ y el plano $z = 4$.

Solucion. Para calcular todas las areas de superficie pedidas usaremos la Definicion 6.18
a) Para parametrizar la superficie usaremos coordenadas cilindricas, como sigue:

$$\begin{cases} x = a\cos\phi \\ y = y \\ z = a\sin\phi \end{cases}$$

Luego se tiene que

$$y^2 = a(a\cos\phi + a) = a^2(\cos\phi + 1)$$

Por tanto deducimos que la parametrizacion (f, S) es

$$f(\phi, y) = (a\cos\phi, y, a\sin\phi) \quad , a > 0$$
$$S := \{(\phi, y) \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, -a\sqrt{\cos\phi + 1} \leq y \leq a\sqrt{\cos\phi + 1}\}$$

ademas

$$f_\phi(\phi, y) = (-a\sin\phi, 0, a\cos\phi) \quad , \quad f_y(\phi, y) = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow f_\phi \times f_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin\phi & 0 & a\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-a\cos\phi, 0, -a\sin\phi)$$

$$\Rightarrow \|f_\phi \times f_y\| = a$$

Por tanto el area a calcular es

$$\iint_S a\, dy\, d\phi = a\int_0^{2\pi}\int_{-a\sqrt{\cos\phi+1}}^{a\sqrt{\cos\phi+1}} dy\, d\phi = a\int_0^{2\pi} 2a\sqrt{\cos\phi + 1}\, d\phi$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos\phi + 1}\, d\phi$$

ademas como

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos\phi + 1}\, d\phi = \int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\, d\phi = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right|\, d\phi, \quad u = \frac{\phi}{2}, 2du = d\phi$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos u|\, du = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos u\, du = 4\sqrt{2}$$

Con esto concluimos que el ares de superficie es

$$A_s = 8\sqrt{2}a^2$$

b) Para parametrizar la superficie usaremos coordenadas cilindricas como sigue

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = r \end{cases}$$

Ademas se tiene que

$$r^2 = rz\sin\phi \Rightarrow r = p\sin\phi$$

y como $r \geq 0$ entonces $\phi \in [0, \pi]$, asi la parametrizacion (f, S) es

$$\vec{f}(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$$
$$S = \{(r,\phi) \mid 0 \leq r \leq p\sin\phi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Ademas

$$f_r(r,\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 1) \quad , \quad f_\phi(r,\phi) = (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0)$$

$$\Rightarrow f_\phi \times f_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \\ -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = (r\cos\phi, -r\sin\phi, -r)$$

$$\Rightarrow \|f_\phi \times f_r\| = r\sqrt{2}$$

Por tanto el area de superficie a calcular es

$$\iint_S r\sqrt{2}\, dr\, d\phi = \sqrt{2}\int_0^\pi \int_0^{p\sin\phi} r\, dr\, d\phi = \frac{p^2\sqrt{2}}{2}\int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi$$

Y como

$$\int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\phi}{2}\, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\phi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\phi\, d\phi \quad , u = 2\phi, \frac{1}{2}\, du = d\phi$$

$$= \frac{1}{2}(\pi) - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos u\, du = \frac{\pi}{2}$$

Con esto concluimos que es area de superficie buscada es

$$A_s = \frac{\sqrt{2}}{4}p^2\pi$$

c) Parametrizaremos lo pedido usando coordenadas cilindricas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = r \end{cases}$$

Luego reemplazando los valores en la ecuacion tenemos que

$$r^2\cos^2\phi = 2\sqrt{2}r\sin\phi \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}\sin\phi}{\cos^2\phi}$$

ademas $r \geq 0$ por tanto $\phi \in [0, \pi]$, luego apoyandonos de *Geogebra* notamos que la parametrizacion (f, S) viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{f}(r,\phi) &= (r\cos\phi, r\sin\phi, r) \\ S :&= \{(r,\phi) \mid 0 \leq r \leq \xi(\phi), 0 \leq \phi \leq \pi\} \end{aligned}$$

donde $\xi(\phi) := \text{mín}(4, \frac{2\sqrt{2}\sin\phi}{\cos^2\phi})$, por tanto

$$\begin{aligned} \vec{f}_r(r,\phi) &= (\cos\phi, \sin\phi, 1) \\ \vec{f}_\phi(r,\phi) &= (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0) \\ &\Rightarrow \vec{f}_r \times \vec{f}_\phi = (-r\cos\phi, r\sin\phi, r) \\ &\Rightarrow \|\vec{f}_r \times \vec{f}_\phi\| = r\sqrt{2} \end{aligned}$$

luego para encontrar donde varia r resolveremos lo siguiente

$$\begin{gathered} 4\cos^2\phi = 2\sqrt{2}\sin\phi \Rightarrow \cos^2\phi = \sqrt{2}\sin\phi \Rightarrow 2(1-\sin^2\phi) - \sqrt{2}\sin\phi = 0 \\ \iff -2\sin^2\phi - \sqrt{2}\sin\phi + 2 = 0 \iff \phi = \frac{\pi}{4} \end{gathered}$$

Caso 1 ($0 \leq r \leq \frac{\pi}{4}$):

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{2\sqrt{2}\sin\phi}{\cos^2\phi}} r\,dr\,d\phi &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2\phi}{\cos^4\phi}\,d\phi \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\phi\sec^2\phi, \quad u = \tan\phi,\, du = \sec^2\phi\,d\phi \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^1 u^2\,du = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Caso 2 ($\frac{\pi}{4} \leq r \leq \pi$):

$$\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_0^4 r\,dr\,d\phi = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 8\,d\phi = 6\sqrt{2}\pi$$

Por tanto el area de superficie buscada es

$$A_s = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 6\sqrt{2}\pi$$

□

Apendice

Teorema 4.37 (Cavalieri) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Riemann-medible y

$$S \subset I := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ahora si para un índice v fijo $(1 \leq v \leq n)$ el conjunto

$$S_\xi^{(v)} = S \cap \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x = \xi\}$$

es Riemann-medible para todo $\xi \in [a, b]$ en el espacio $(n-1)$ dimensional de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_{v-1}, x_{v+1}, \ldots, x_n)$ con la medida $q(\xi)$, entonces

$$\mu(S) = \int_{a_v}^{b_v} q(\xi)\, d\xi$$

Definicion 5.4 Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto medible y

$$V = \iiint_S d(x, y, z) \neq 0.$$

En este caso, el punto (x_0, y_0, z_0) con las coordenadas

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{V} \iiint_S x\, d(x, y, z), \frac{1}{V} \iiint_S y\, d(x, y, z), \frac{1}{V} \iiint_S z\, d(x, y, z) \right)$$

se llama centro de masa de S.

Definicion 6.9 Sean $\vec{V} = \{L, M, N\} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}^3$ un campo vectorial y $X \subset D(\vec{V})$ un conjunto abierto, y sean las funciones L, M y N parcialmente diferenciables con respecto a x, y y z sobre X. Entonces,, la expresión

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial y} N - \frac{\partial}{\partial z} M, \frac{\partial}{\partial z} L - \frac{\partial}{\partial x} N, \frac{\partial}{\partial x} M - \frac{\partial}{\partial y} L \right)$$

Definicion 6.11 Sea $\mathbf{K}$ una curva suave por trozos en $\mathbb{R}^n$ con la parametrización $(f, [a, b])$, además sea $\vec{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathbf{K}$. Entonces la expresión

$$\int_a^b \vec{V}(f(t)) \cdot f'(t)\, dt = \int_K (V_1\, dx_1 + \cdots + V_n\, dx_n)$$

se llama integral de línea de $\vec{V}$ a lo largo de $\mathbf{K}$ con respecto a la parametrización $(f, [a, b])$.

Definicion 6.12 Sea $\vec{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}^n$ un campo vectorial, y sea $D(\vec{V}) = X$ abierto. Si existe una función escalar $\varphi \in C^1(X)$ tal que $\vec{V}(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$ para todo $x \in X$, entonces φ se llama potencial de $\vec{V}$. El campo vectorial $\vec{V}$ se llama campo vectorial conservativo.

Definicion 6.18 Sea F una superficie en $\mathbb{R}^3$ con la parametrización (f, S). Si existe la integral

$$\iint_S \|\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)\| \, d(u,v) = \iint_F d\sigma$$

entonces su valor se le llama contenido de superficie de F.