UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 3 -Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Continuidad y funciones elementales.***

1.a Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \text{int}(D) = \mathring{D}$. Probar que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ entonces $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|$ y $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$.

1.b Dilucidar la existencia de $\lim_{z\to 1-i} \left[z^2 - \overline{z}^2\right]$.

(P) Utilizar la aplicación $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \in \mathbb{R}$ para resolver (1.b).

(P) Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ el conjuntos de los afijos de los $z \in D$. Probar que $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto y también conexo como lo es D. Enseguida establecer la equivalencia

$$f \in C(D, \mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad u = \text{Re}(f),\, v = \text{Im}(f) \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

(P) Determinar el dominio de continuidad de la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + 2xyi & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0i & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

(P) Resolver la ecuación $\cos(z) = 2$
Indicación: $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Reducir la ecuación a una ecuación polinomial de segundo orden en $Z = e^{iz}$ y resolver.

4. Determine el valor de $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ para que las siguientes funciones re-definan una función con conjunto de continuidad maximal, es decir, fuera de ese conjunto la función es discontinua.

   (a) $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+\mathbf{a}}$ (b) $f(z) = \frac{z^2+\mathbf{a}z+2+i}{z^2+2z+2}$ (c) $f(z) = \frac{z^3+z^2+z+1}{(z+\mathbf{a})(z^2+(1+i)z+i)}$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y re definir cuando los puntos de discontinuidad son removible:

   (a) $f(z) = \dfrac{z\text{Re}(z)}{|z|}$
   (P) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z}$
   (b) $f(z) = \dfrac{iz^3 - 8}{z - 2i}$
   (c) $f(z) = \dfrac{z^2 + 4z - 21}{z - 3}$
   (d) $f(z) = \dfrac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$
   (e) $f(z) = \dfrac{(\text{Im}(z))^2}{z}$
   (f) $f(z) = \dfrac{\overline{z}^3}{z^2}$
   (P) $f(z) = \text{Arg}(z - i)$
   (g) $f(z) = \text{Arg}(iz)$
   (h) $f(z) = \text{Arg}(iz - 4)$

6. Resolver ejercicios con respuestas presentados en las siguientes referencia sobre los temas de álgebra y aritmética de números complejos.Igualmente de límite y continuidad (se resaltan los más convenientes)

References

[1] ZILL D. & CULLEN M. *Matemáticas Avanzadas para Ingenieríia.* 3^a Ed., Editorial MacGraw Hill. 2008.

[2] **Kwok Y. K.** *Applied Complex Variables for Scientist and Engineers.* 2^a Ed., Editorial Cambridge University Press. 2010.

[3] **Mathews J. H. & Howell R. W.** *Complex Analysis for Mathematics and Engineering.* 3^a Ed., Editorial Jones and Bartletl Publishers. 1997.

Algunos problemas considerados en las preguntas de antiguas evaluaciones:

e1 Si $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 2 - 3i$, representar en el plano de Argand el giro en 135^o grados sentido horario de $\mathbf{b} = \frac{e^{i\pi}}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

e2 Determinar el dominio de continuidad de $f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{iz^3+1}$
¿Es posible re definir f en algún cero del denominador?

e3 Determinar las constantes $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tal que la siguiente funciones sea continua:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z^2+1)(2z-1+i\sqrt{3}}{i(z^3+1)} & \text{si} \quad |z| \neq 1 \\ \mathbf{a} & \text{si} \quad z = i \\ \mathbf{b} & \text{si} \quad z = -1 \\ \mathbf{c} & \text{si} \quad 2z = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

e4 Resolver

$$z \in \mathbb{C} : \qquad Arg\,(\overline{z}) = Arg(z)$$

e5 Determinar la expresión binaria de $\mathbf{a}$ si

$$\mathbf{a} = \frac{(1+i)^5 \log(1+i)}{(1-i)^5 \sinh(1+i)}$$

e6 Determinar el mínimo valor de $r > 0$ tal que

$$|z| < r \quad \Longrightarrow \quad |z + 6 + 8i| \leq 11.$$

e7 Resolver

$$(a)\ z^2 + (2+i)z + 2i = 0 \quad (b)\ z^2 - (2+i)z + 2i = 0 \quad (c)\ z^2 + (2-i)z - 2i = 0$$

e8 Dilucidar la existencia de $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|}$

e9 Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ la exponencial compleja es no nula.

Agosto 2024
FPV/fpv/