UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 8 - Álgebra III (525201)
Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Sea U un e.v. de dimensión n y sea $L : U \to U$ un automorfismo tal que $L^i \neq L^j$ para $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distintos con $m > n^2$. Muestre que el conjunto $\{L, L^2, \dots, L^m\} \subset \mathcal{L}(U)$ es linealmente dependiente.

Demostración. Recordemos que $\mathcal{L}(U)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cuya dimensión es n^2. Por tanto, $\dim(\mathcal{L}(U)) = n^2$. Así, cualquier conjunto de $m > n^2$ vectores es linealmente dependiente. ■

Ejercicio 2. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal definida por: $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $T(x) = Ax$.

a) Pruebe que si B es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, entonces $[T]_{BB} = A$.

Demostración. Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y $A = (A_{ij})$.

Sabemos que Ae_i es la i-ésima columna de A. En otras palabras, $Ae_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} e_k$. Luego, $[Ae_i]_B = (A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni})^T$.

Por tanto, tenemos que la matriz representante de T con respecto a B y B está dada por

$$\begin{aligned}
[T]_{BB} &= [[T(e_1)]_B [T(e_2)]_B \cdots [T(e_n)]_B] \\
&= [[Ae_1]_B [Ae_2]_B \cdots [Ae_n]_B] \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

■

b) Muestre que si $[T]_{BB} = A$, no necesariamente B es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Demostración. Sii $A = I_n$, entonces T es la función identidad. Sabemos que $[T]_{BB} = I_n$ para toda base B de $\mathbb{K}^n$, por lo que $[T]_{BB} = A$ para bases que no son necesariamente la canónica. ■

c) Demuestre que T es diagonalizable si y sólo si A es diagonalizable.

Demostración. Pendiente. ■

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y B una base de V. Sean además $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

a) Pruebe que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(T \circ S)$. Esto es, existe $v \in V$ no nulo tal que

$$T \circ S(v) = \lambda v$$

Sea $\lambda \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} & T \circ S(v) = \lambda v \\ \Longrightarrow \ & S \circ T(S(v)) = \lambda S(v) \end{aligned}$$

Como $S(v) \neq \theta$, pues de lo contrario $T \circ S(v) = T(\theta) = \theta$ y por tanto $\lambda = 0$, entonces λ es valor propio de $S \circ T$ con vector propio $S(v)$.

Sea $\lambda = 0$. Luego, existe $v \in V$ no nulo tal que

$$T \circ S(v) = \theta$$

Supongamos que T es inyectiva. De lo anterior tenemos que $S(v) = \theta$ y por tanto S es no inyectiva. Como V es de dimensión finita, se sigue que T es sobreyectiva y por tanto existe $w \in V$ tal que $T(w) = v$. Luego,

$$S \circ T(w) = \theta$$

Supongamos que T no es inyectiva. Luego, existe $w \in Ker(T)$ no nulo tal que

$$\begin{aligned} S \circ T(w) &= S(\theta) \\ &= \theta \end{aligned}$$

Por tanto $\lambda \in \sigma(S \circ T)$ y $\sigma(T \circ S) \subseteq \sigma(S \circ T)$. Invirtiendo los roles de S y T concluimos que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$. ∎

b) Muestre que no necesariamente $[T \circ S]_{BB}$ es similar a $[S \circ T]_{BB}$.

Indicación: Defina las aplicaciones S y T en función de las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostración. Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y definamos $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $S(x) = Cx$ y $T(x) = Dx$. Luego,

$$[S \circ T]_{BB} = [S]_{BB}[T]_{BB} = CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$[T \circ S]_{BB} = [T]_{BB}[S]_{BB} = DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, CD y DC no son similares. Para probar esto, supongamos que sí lo son. Luego, existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertible tal que $P^{-1}(DC)P = CD$. Es decir,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow \ & \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} -2ab & -2b^2 \\ 2a^2 & 2ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde obtenemos $a^2 = b^2 = 0$ y en consecuencia $\det(P) = 0$, lo cual es una contradicción. ∎

Ejercicio 4. Sea V un e.v. de dimensión finita y sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Pruebe que existen B, B' bases de V tales que $[S]_{BB} = [T]_{B'B'}$ si y sólo si existe $U \in \mathcal{L}(V)$ invertible tal que $T = USU^{-1}$.

Demostración. Supongamos que existen B, B' bases de V tales que $[S]_{BB} = [T]_{B'B'}$. Sea $U : V \to V$ tal que $U(B) = B'$. Como B y B' son bases de V, entonces U es invertible. Más aún, la matriz representante de U es la matriz de paso P de B a B' (i.e. $[U]_{BB} = P$). Ahora probaremos que $T = USU^{-1}$ probando que $S = U^{-1}TU$. Para tal efecto, basta probar que tienen las mismas matrices representantes de B a B.

$$\begin{aligned}
[U^{-1}TU]_{BB} &= [U^{-1}]_{BB}[T]_{BB}[U]_{BB} \\
&= [U]_{BB}^{-1}[T]_{BB}[U]_{BB} \\
&= P^{-1}[T]_{BB}P \\
&= [T]_{B'B'} \\
&= [S]_{BB}
\end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que existe $U \in \mathcal{L}(V)$ invertible tal que $T = USU^{-1}$. Sea B una base arbitraria de V y fijemos $B' = U(B)$. Luego, $[U]_{BB}$ es la matriz de paso de B a B'. Así,

$$\begin{aligned}
[S]_{BB} &= [U^{-1}TU]_{BB} \\
&= [U^{-1}]_{BB}[T]_{BB}[U]_{BB} \\
&= [U]_{BB}^{-1}[T]_{BB}[U]_{BB} \\
&= [T]_{B'B'}
\end{aligned}$$

■