

**PAUTA CERTAMEN 1 - CÁLCULO II**  
Lunes 6 de Agosto de 2012

■ **Problema 1** (15 puntos)

Considere la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Determine, por definición, si  $F$  es continua en 1.
- Demuestre que  $F$  es derivable en 1.

**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{1} = 0 = F(1).$

Donde la segunda igualdad es válida por la regla de L'Hopital y por el TFC.

Luego  $f$  es continua en 1.

- b) Por definición de derivada

$$\begin{aligned} F'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1} \int_0^{x-1} \sin(t^2) dt - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^{x-1} \sin(t^2) dt}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos((x-1)^2) \cdot 2(x-1)}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde la tercera y cuarta igualdad se justifican con la regla de L'Hopital y el TFC.  
Por lo anterior,  $F$  es derivable en 1 y  $F'(1) = 0$ .

■ **Problema 2** (20 puntos)

- a) Muestre que la integral impropia  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  diverge usando la definición.
- b) Haga un estudio del comportamiento de la integral  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$  utilizando el item anterior.

**Solución:**

- a) Reescribimos la integral impropia de la siguiente manera

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Para  $c > 0$ ,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{c} + 1 \right) = 1$$

Para  $b > 0$ , se tiene lo siguiente

$$\lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +0} \left( -1 + \frac{1}{b} \right) = \infty$$

Por lo que  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  diverge. Así,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  diverge.

- b) Primero notamos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$$

Ahora,  $\int_0^1 \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$  es una integral definida, pues el integrando es una función continua en el intervalo  $[0, 1]$ , por lo que sólo resta analizar el comportamiento de  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$ .

Las funciones  $f(x) = \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1}$  y  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  son continuas y no negativas en el intervalo  $[1, +\infty[$ . Observemos que para  $x \geq 1$ :

$$0 \leq \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} \leq \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{x^2}{x^4} \leq \frac{1}{x^2}$$

Método 1:

Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge (item anterior), concluimos por el criterio de comparación directa que  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$  converge. Por lo tanto  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin(x)|}{x^4 + 1} dx$  converge.

Método 2:

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^4 + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4 + 1} = 1 > 0$$

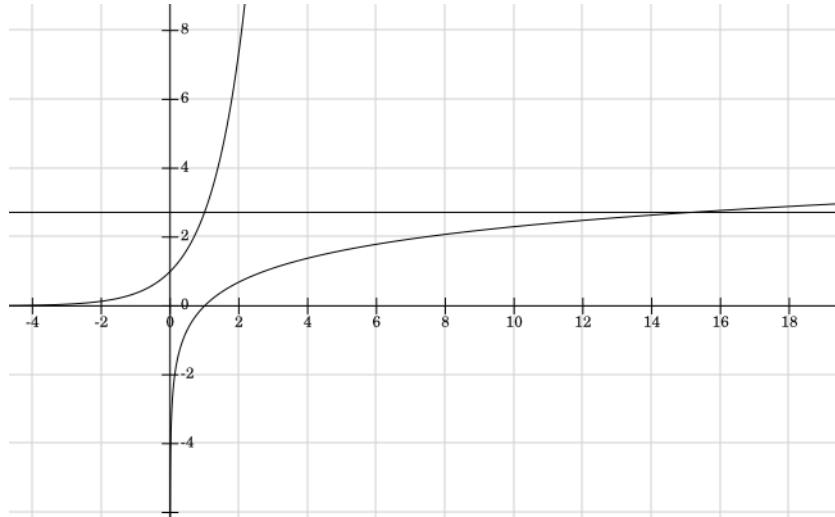
Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge (item anterior), por el criterio de comparación al límite, también lo hace  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ . Ahora, por el criterio de comparación directa, la integral  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} dx$  converge. Por lo tanto,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 |\sin x|}{x^4 + 1} dx$  converge.

■ **Problema 3** (25 puntos)

Considere la región  $R$  del primer cuadrante acotada por las curvas  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$  y la recta  $y = e$ .

- Haga un bosquejo de la región y calcule su área.
- Suponga que la región  $R$  gira alrededor de la recta  $y = -1$ . Escriba la fórmula integral que permite calcular el volumen del sólido de revolución generado por medio de:
  - el método de los discos
  - el método de los cilindros (capas, anillos).
- Suponga que la región  $R$  es la base de un sólido cuyas secciones transversales paralelas al eje  $Y$  son rectángulos de altura 6. Calcule el volumen del sólido.

**Solución:**



a)

El área  $A$  de la región  $R$  es

$$A = \int_0^1 e^x dx + \int_1^e (e - \ln x) dx = e^x|_0^1 + (ex - x \ln x + x)|_1^e = e - 1 + e^{e+1} - e^{e+1} + e^e - e - 1 = e^e - 2$$

b) Las fórmulas integrales son:

$$(i) \int_0^1 \pi[(e^x + 1)^2 - (1^2)] dx + \int_1^{e^e} \pi[(e + 1)^2 - (\ln x + 1)^2]$$

$$(ii) \int_0^1 2\pi(y + 1)(e^y) dy + \int_1^e 2\pi(y + 1)(e^y - \ln y) dy$$

c) Por el método de las secciones transversales, el volumen  $V$  del sólido está dado por:

$$V = \int_0^1 6e^x dx + \int_1^{e^e} 6(e - \ln x) dx = 6e^e - 12$$