Espacios Vectoriales.

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 10, 2020

Definición de cuerpo

Definición

Un **cuerpo** es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad \text{y} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x + (y + z) = (x + y) + z,$ (asociatividad)
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \ : \ x + y = y + x,$ (conmutatividad)
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{K} \ : \ \forall x \in \mathbb{K} \ : \ 0 + x = x,$ (existencia de neutro para $+$)
4. $\forall\, x \in \mathbb{K} \ : \ \exists (-x) \in \mathbb{K} \ : \ x + (-x) = 0,$ (existencia de inverso para $+$)
5. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$ (asociatividad)
6. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot y = y \cdot x,$ (conmutatividad)
7. $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \ : \ \forall x \in \mathbb{K} \ : \ 1 \cdot x = x,$ (existencia de neutro para $\cdot$)
8. $\forall\, x \in \mathbb{K} - \{0\} \ : \ \exists x^{-1} \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot x^{-1} = 1,$ (existencia de inverso para $\cdot$)
9. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$ (distributividad)

Propiedades de un cuerpo

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo. Hemos denotado por
0 al neutro para $+$, 1 al neutro para $\cdot$,
$-x$ al inverso para $+$ de x y x^{-1} al inverso para $\cdot$ de x.
Entonces,

1. $\mathbb{K} \neq \emptyset$,
2. los neutros para ambas operaciones son únicos,
3. para cada $x \in \mathbb{K}$, su inverso para $+$ es único,
4. para cada $x \in \mathbb{K} - \{0\}$, su inverso para $\cdot$ es único,
5. para cada $x \in \mathbb{K}$ se cumple que $0 \cdot x = 0$,
6. para cada $x \in \mathbb{K}$, $(-x) = (-1) \cdot x$,
7. para cada $x \in \mathbb{K}$, $-(-x) = x$ y $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$,
8. para cada par de valores $x, y \in \mathbb{K}$, $x \cdot y = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $y = 0$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$**,** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **y** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **son cuerpos**.

Definición

Un **espacio vectorial (e. v.)** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto V junto con dos operaciones

$$\oplus : V \times V \to V \quad \text{y} \quad \odot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que cumplen las siguientes propiedades:

1. $(\forall\, x, y, z \in V)\ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ (asociatividad)
2. $(\forall\, x, y \in V)\ x \oplus y = y \oplus x,$ (conmutatividad)
3. $(\exists\, \theta \in V)(\forall x \in V)\ \theta \oplus x = x,$ (existencia de neutro para $\oplus$)
4. $(\forall\, x \in V)(\exists y \in V)\ x \oplus y = \theta,$ (existencia de inverso para $\oplus$)
5. $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall u, v \in V),$
   a) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u,$
   b) $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v,$
   c) $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u,$
6. $(\forall\, u \in V)\ 1 \odot u = u.$

Donde 1 denota el neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$.

Propiedades de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Si $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial,
Θ representa al elemento neutro para $+$,
para cada $x \in U$, $-x$ representa al inverso de x para $+$,
entonces

1. el vector nulo Θ es único,
2. para cada $x \in V$, el inverso aditivo de x es único,
3. $\forall\, x \in V \;:\; 0 \cdot x = \Theta$,
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \alpha \cdot \Theta = \Theta$,
5. para cada $x \in V$ su inverso aditivo es igual a $(-1) \cdot x$,
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in V \;:\; (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$,
7. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in V \;:\; \alpha \cdot x = \Theta \Leftrightarrow \alpha = 0 \;\vee\; x = \Theta$.

Ejemplos de espacios vectoriales

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces los siguientes conjuntos, con las operaciones usuales de adición entre elementos de cada uno de ellos y multiplicación entre un elemento de ellos y un elemento en $\mathbb{K}$, son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

1. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, el conjunto de n-uplas ordenadas, $n \in \mathbb{N}$, con componentes en $\mathbb{K}$.
2. $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, el conjunto de las matrices de m filas, n columnas, $m, n \in \mathbb{N}$, y coeficientes en $\mathbb{K}$.
3. $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$, el conjunto de las funciones de $X \subseteq \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$.
4. $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.

- Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y
$$\mathcal{F}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ es función}\}\,.$$
Este conjunto, con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación escalar real por una función, es un espacio vectorial real
Estas operaciones son tales que
$$+ : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X), \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X).$$
Para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{F}(X)$ la función
$$f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
es tal que $\forall\, x \in X \ : \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
Además para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y para cada $f \in \mathcal{F}(X)$ la función
$$\alpha\, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
es tal que $\forall\, x \in X \ : \ (\alpha\, f)(x) = \alpha\, f(x)$.

Definición

Sean $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial (e.v.) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que que $(U,+,\cdot)$ es un subespacio vectorial (s.e.v.) de $(V,+,\cdot)$ si $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$, y $(U,+,\cdot)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$.

Lema

Sean $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $U \subseteq V$.
U es **subespacio vectorial de V** si y sólo si

i. $U \neq \emptyset$,

ii. $\forall\, u, w \in U \,:\, u + w \in U$, (+ es cerrada en U)

iii. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, u \in U \,:\, \lambda \cdot u \in U$. ($\cdot$ es cerrada en U)

Observación:

Las condiciones ii. y iii. del Lema anterior, son equivalentes a
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, u, w \in U \,:\, \lambda u + w \in U$.

Ejemplos de subespacios vectoriales

- $(V,+,\cdot)$ y $(\{\Theta\},+,\cdot)$ son los únicos s.e.v. triviales del e.v. $(V,+,\cdot)$.
- Sea $\mathcal{F}(A,B) := \{f : A \to B : f$ es función$\}$. Luego, $(\mathcal{F}(A,B),+,\cdot)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$, donde $+$ y $\cdot$ son definidas por

  $$(a)\ \forall f, g \in \mathcal{F}(A,B) : \forall x \in A : (f+g)(x) := f(x) + g(x),$$
  $$(b)\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \forall f \in \mathcal{F}(A,B) : \forall x \in A : (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

  Aquí, $(B,+,\cdot)$ debe ser un e.v. sobre $\mathbb{K}$.
  Cuando $A = B = \mathbb{R}$, y $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{C}(\mathbb{R},+,\cdot)$ es s.e.v. de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$, donde

  $$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es función continua}\}.$$

- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de adición entre polinomios y multiplicación escalar (real) - polinomio, define un espacio vectorial real (es subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$).

- $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ es un espacio vectorial real (es subespacio vectorial de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).
- En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ con sus operaciones binarias $+$ y $\cdot$ usuales, se destacan los s.e.v.

  $$(a)\ U := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\},$$
  $$(b)\ W := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\},$$

Subespacios Vectoriales Notables

Sean $(U,+,\cdot)$ y $(W,+,\cdot)$ s.e.v. del e.v. $(V,+,\cdot)$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, se tiene que

1. $(U \cap W,+,\cdot)$ es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$,
2. $(U + W,+,\cdot)$ es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$, donde $U + W := \{u+w \,:\, u \in U \wedge w \in W\}$. Además, cuando $U \cap W = \{\Theta\}$, se dice que $U + W$ es suma directa y se denota por $U \bigoplus W$. La descomposición en este caso, es única. Es decir

$$\forall\, v \in V \,:\, v \in U \bigoplus W \Rightarrow \exists!\, u \in U \,:\, \exists!\, w \in W \,:\, v = u + w\,.$$

Observaciones:

1. Si $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $U \subseteq V$ es tal que $\theta \notin U$, entonces U no es un subespacio vectorial de V.
2. $(U \cup W,+,\cdot)$ no siempre es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$. En realidad, se prueba que

$$(U \cup W,+,\cdot) \text{ es s.e.v de } (V,+,\cdot) \Leftrightarrow U \subseteq W \vee W \subseteq U$$

Ejemplo

Se puede probar que $U := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x\}$ y $W := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 2x\}$ son s.e.v. de $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (Verificarlo). Tenemos que $(1,1)^t \in U \subseteq U \cup W$, y $(1,2)^t \in W \subseteq U \cup W$, pero $(1,1)^t + (1,2)^t = (2,3)^t \notin U \cup W$.

Espacio generado y sistema generador

Definición: Combinación lineal

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \subseteq V$ (subconjunto no vacío, finito o no finito). Se dice que $w \in V$ es **combinación lineal (c.l.)** de vectores de A, si $\exists\, m \in \mathbb{N} : \exists\, v_1, \dots, v_m \in A : \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} : w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$.

Definición: Espacio generado

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \subseteq V$ (subconjunto no vacío, finito o no finito). Se define el espacio generado por A como

$$\langle A \rangle := \{ v \in V \,:\, v \text{ es c.l. de vectores de } A \}.$$

Al conjunto A se le llama conjunto generador.

Observaciones: $\forall\, A, B$ subconjuntos no vacíos del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, se verifica:

1. $\langle A \rangle$ es un s.e.v. de $(V, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{K}$ (el más pequeño que contiene a A).
2. $\langle \{\Theta\} \rangle = \{\Theta\}$, y $\langle V \rangle = V$.
3. $A \subseteq \langle A \rangle$, pues $\forall\, v \in A : v = 1 \cdot v \in \langle A \rangle$.
4. $\langle A \rangle \cup \langle B \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle$.
5. Si además $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

Lema (Espacio generado por un conjunto finito)

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. Dado $A := \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$, el conjunto $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}\rangle$ es, en efecto un subespacio vectorial de V, llamado **espacio generado por el conjunto** $A = \{v_1, , \ldots, v_m\}$.
Al conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ se le denomina **sistema generador** de $\langle\{v_1, \ldots, v_m\}\rangle$.

Ejemplos:

$$(a)\ \langle\, \{1, x, x^2, ..., x^m\}\rangle = \mathcal{P}_m(\mathbb{R}),$$

$$(b)\ \left\langle\, \{x^m\}_{m\in\mathbb{Z}_0^+} \right\rangle = \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Conjunto linealmente dependiente / Independiente

Definición

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. $A \subseteq V$ se dice que es conjunto linealmente dependiente (l.d.) si $\exists\, v \in A : v \in \langle A \backslash \{v\} \rangle$.
En caso contrario, se dirá que A es linealmente independiente (l.i.)
Cuando A es finito, por ejemplo $A := \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq V$, para algún $m \in \mathbb{N}$, se dice que A es **l.d.** si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \theta\,,$$

lo que es equivalente a decir $\exists\, j \in \{1, ..., m\} : v_j \in \langle A \backslash \{v_j\} \rangle$.
Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ no es l.d., se dice que es **linealmente independiente (l.i.)**.
Equivalentemente, $\{v_1 \ \ldots, v_m\}$ es l.i. si

$$\forall\, \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K} : \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, v_j = \theta \Rightarrow \forall\, j \in \{1, ..., m\} : \lambda_j = 0\,.$$

Lema de Dependencia Lineal

Sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. sobre $\mathbb{K}$, y $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ un conjunto de vectores l.d. Entonces, existe $\{v_{i_1}, ..., v_{i_n}\} \subseteq \{v_1, ..., v_m\}$ conjunto de vectores l.i., tal que $\langle\{v_1, ..., v_m\}\rangle = \langle\{v_{i_1}, ..., v_{i_n}\}\rangle$.

Idea de la demostración

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v_1 \neq \theta$. Como $A := \{v_1, ..., v_m\}$ es l.d., entonces AFIRMAMOS:

$$\exists\, j \in \{2, ..., m\} \,:\, v_j \in \langle \{v_1, ..., v_{j-1}\} \rangle \,.$$

ESTA AFIRMACIÓN ES VERDADERA, pues de no serlo, se tendría

$$\forall\, j \in \{2, ..., m\} \,:\, v_j \notin \langle \{v_1, ..., v_{j-1}\} \rangle \Rightarrow \{v_1, ..., v_m\} \text{ es l.d. } (\rightarrow\leftarrow)\,.$$

De esta forma, v_j (al ser c.l. de $\{v_1, ..., v_{j-1}\}$) será extraído del conjunto A. Esto nos conduce a afirmar que

$$\langle \{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_m\} \rangle = \langle\, A \,\rangle \,.$$

Lo que sigue ahora es repetir el proceso anterior para extraer otro vector (si existe) que haga que $A \backslash \{v_j\}$ sea l.d. De esta manera, vamos eliminando aquellos vectores de A que la hacen ser un conjunto l.d., hasta que deje de serlo. Al final, obtendremos un conjunto l.i. $\{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\} \subseteq A$ tal que

$$\langle\, \{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\} \,\rangle = \langle\, A \,\rangle \,,$$

y termina la demostración.

Base y dimensión

Definición: Base

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. $B \subseteq V$ es una base de V si B es l.i. y $\langle B \rangle = V$.

Definición: Espacio vectorial de dimensión finita

Sea B una base del $\mathbb{K}$- espacio vectorial V. Si B es un conjunto finito, con $|B| = m$, entonces se dice que V es de dimensión finita ($\dim(V) = m$). Si por el contrario, B tiene cardinal infinito, entonces V se dice que es de dimensión infinita.

Observaciones

1. Si B y B' son bases de V, con $|B| = m$ y $|B'| = n$, entonces $m = n$.
2. $\dim(\{\Theta\}) = 0$. Así, $\forall\, S$ s.e.v. de V e.v. finito dimensional: $\dim(S) \leq \dim(V)$.
3. Si S s.e.v. de V e.v. finito dimensional tal que $\dim(S) = \dim(V)$, entonces $S = V$.

Teorema de Grassmann

Sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. de dimensión finita, y $(U, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ dos s.e.v. de $(V, +, \cdot)$. Entonces,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

En particular, si $U \cap W = \{\theta\}$, entonces $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.