Procesos Estocásticos : Clase 3. Procesos de Bernoulli

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

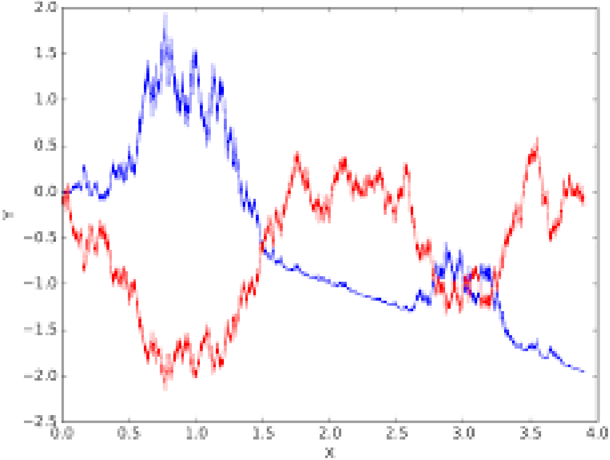
Outline

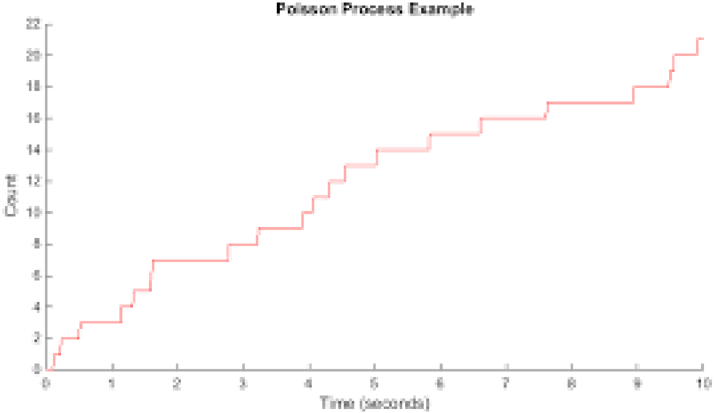
Outline

Procesos de incrementos estacionarios : Definición

Sea $T = [0, \infty)$ o $T = \{0, 1, 2, ...\}$.
Se dice que un proceso $\{X_t, t \in T\}$ es de incrementos estacionarios, si para todo t la distribución de los incrementos $X_{t+\delta} - X_t$ depende sólo de la longitud δ del intervalo del tiempo y no depende del instante t.

$$X_{t+\delta} - X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{s+\delta} - X_s \quad \forall t, s, \delta.$$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
x
y


Poisson Process Example
Count
Time (seconds)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

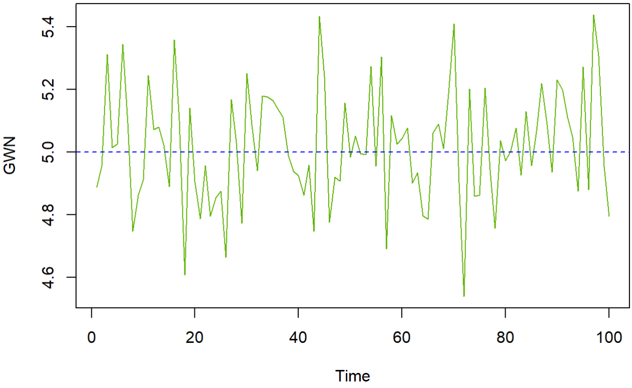
Outline

Procesos Estacionarios : Definición

Sea $T = [0, \infty)$ o $T = \{0, 1, 2, ...\}$.
Se dice que un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, $\forall h \in T$

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

es un proceso estacionario estricto.


5.4
5.2
5.0
4.8
4.6
GWN
0
20
40
60
80
100
Time

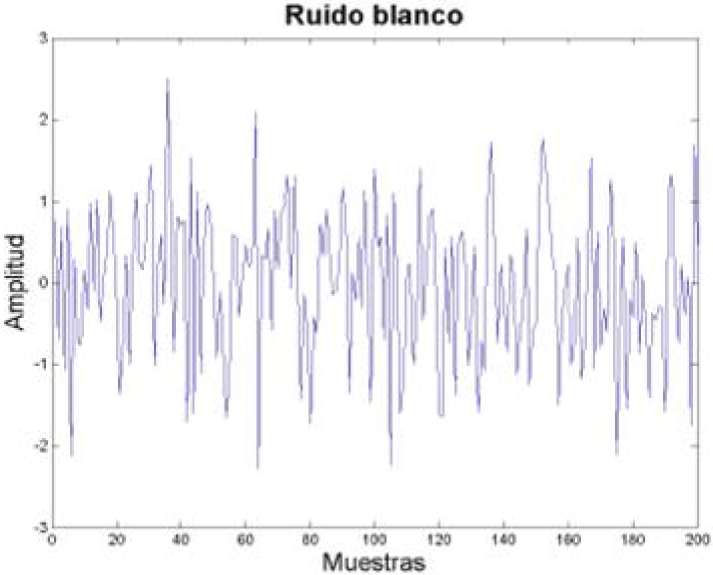
Procesos Estacionarios Débiles : Definición

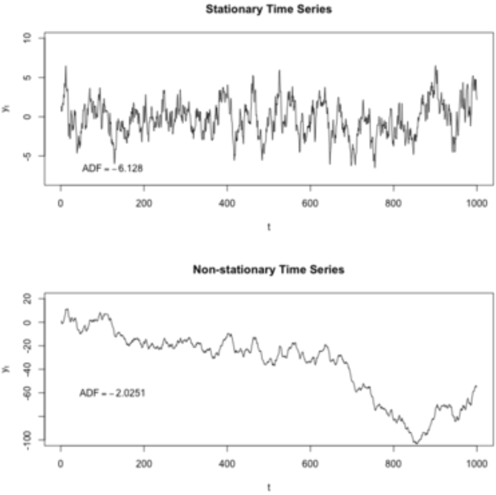
Sea $T = [0, \infty)$ o $T = \{0, 1, 2, ...\}$.
Se dice que un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ tal que $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= m = Cte. \\ Cov(X_t, X_s) &= \mathbb{E}\left[(X_t - m)(X_s - m)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(|t-s|) \end{aligned}$$

es un proceso estacionário en sentido débil (weakly stationary, wide-sense stationary, second-order stationary process).

- Proceso estacionario $\Rightarrow$ Proceso estacionario débil.
- Excepción : Procesos Gaussianos.


Ruido blanco
Amplitud
Muestras
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200


Stationary Time Series
ADF = -6.128
y_t
t
Non-stationary Time Series
ADF = -2.0251
y_t
t

Outline

Procesos de Márkov : Definición

Sea $T = [0, \infty)$ o $T = \{0, 1, 2, ...\}$.
Se dice que un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es markoviano si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$

$$\begin{aligned} & P\left\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right\} \\ = \; & P\left\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} \leq x_n\right\} \end{aligned}$$

- Todos los procesos de incrementos estacionatios e independientes (el Proceso de Wiener, de Poisson) son markovianos.

Outline

Recuerde : Distribución de Bernoulli

Supongamos un experimento de lanzamiento de una moneda

$$\Omega = \{\{C\}, \{+\}\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{C, +\}, \{C\}, \{+\}, \emptyset\}$$

El modelo metemático es la distribucón de Bernoulli, donde el "éxito" ocurra con probabilidad p y el "fracaso" con probabilidad $1 - p$.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{p ;} \\ 0, & \text{1-p.} \end{cases}$$

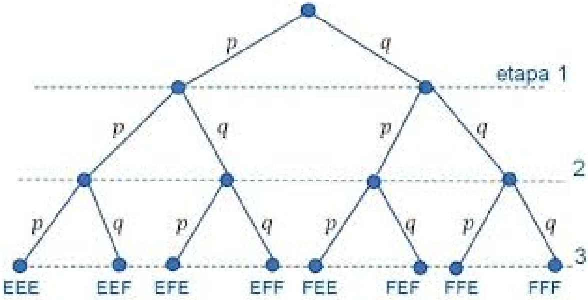
lo que significa que el el i-ésimo ensayo obtuvimos un "éxito" con probabilidad p.

Procesos de Bernoulli : Definición

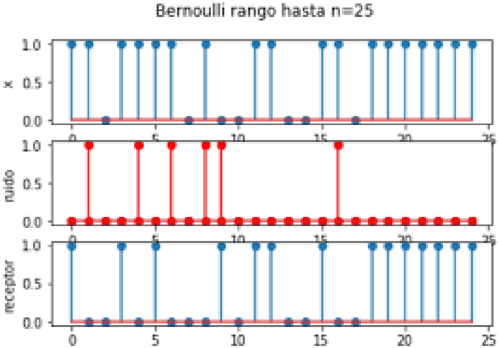
- Llamaremos Proceso de Bernoulli $\{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ a una colección numerable de las v.a. independientes definidas en la lamina anterior.

- Es una Cadena ya que el Espacio de estados E y el Espacio paramétrico T son discretos.

Distribución al tercer paso



Trayectorias del proceso



Número de éxitos en un proceso de Bernoulli

Se define el proceso de conjunto de éxitos

$$\left\{ X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \; n \in \mathbb{N} \right\},$$

esto es, el número de éxitos al realizar n experimentos de Bernoulli.

- Claro que el Espacio de estados $E = 0, 1, 2, ..., n$ y el Espacio paramétrico $T = \mathbb{N}$.

Obvio que $X_n = k \Leftrightarrow \xi_1 + \xi_2 +, \cdots, \xi_n = k$.
Por tanto,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{(n-k)} \, ,$$

esto es $X_n \sim Bin(n, p)$.

Las v.a. $X_{n+m} - X_n$ representan el número de éxitos entre el n-ésimo y el $(n+m)$-ésimo ensayos. Es claro que

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+m} - X_n = k) &= P\left(\sum_{i=1}^{n+m} \xi_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i = k\right) \\
P\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} \xi_i = k\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i = k\right) \\
&= \binom{m}{k} p^k \left(1-p\right)^{(m-k)} \quad \forall k = 0, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

lo cual significa que el número de éxitos sólo depende de la cantidad de ensayos observados y no del instante en que han comenzado a observar el proceso. Por lo tanto, tenemos que los incrementos $X_{n+m} - X_n$ son estacionarios, esto es el proceso de número de éxitos es de incrementos estacionarios.

Por otro lado, para cada $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ las v.a. $X_{n_1}, X_{n_2} - X_{n_1}, \ldots, , X_{n_m} - X_{n_{m-1}}$.

$$\begin{aligned} X_{n_1} &= \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \\ X_{n_2} - X_{n_1} &= \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \xi_i \\ \ldots & \ldots \ldots \\ X_{n_m} - X_{n_{m-1}} &= \sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \xi_i . \end{aligned}$$

Entonces

$$\left\{ X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \;\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un proceso de incrementos independientes.

- Teniendo presente que los incrementos son estacionarios, el proceso de número de éxitos en ensayos de Bernoulli, $\{X_n\}$, es markoviano. Por ende es una Cadena de Márkov.

Por otro lado, es fácil de comprobar directamente que $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es markoviano.

$$\begin{aligned}
& P\{X_{n+1} = j | X_1 = l, \ldots, X_n = i\} \\
= \ & P\{X_n + \xi_{n+1} = j | X_1 = l, \ldots, X_n = i\} \\
= \ & \begin{cases} p, & \text{si i=j-1} \\ 1-p, & \text{si i=j} \\ 0, & \text{otro.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Es decir, dado el "presente", n, el estado "futuro" $n-1$ del proceso depende solo de su presente y no del "pasado".

Instantes de éxito

Sea $\{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito $= p$, es decir con

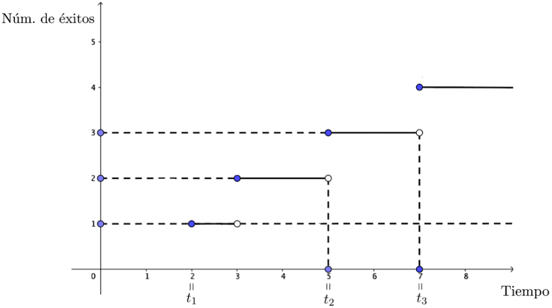
$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

- Sea $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ el número de éxitos hasta la n-ésima observación.

- Sea la v.a τ_k : instante en que se produce el k-ésimo éxito, τ_k=mín $\{n \in \mathbb{N} | X_n = k\}$.

Procesos de Bernoulli : Instantes de éxitos

El proceso $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}\}$ es el proceso que describe los instantes en que se producen los éxitos en un proceso de Bernoulli.



$$\tau_1 = 2,\ \tau_2 = 5,\ \tau_3 = 7 \ \Leftrightarrow\ \{F, E, E, F, E, F, E, ...\}$$

Entonces, $X_3 = X_4 = 2$ y $X_5 = 3$.

Sea $x \geq k$. Entonces,

- 1. $\tau_k = n \Leftrightarrow X_{n-1} = k - 1, \xi_n = 1$.

Esto es, tuvimos $k-1$ éxitos hasta el $n-1$ ensayo y el n-ésimo ensayo tuvimos un éxito. Por tanto

$$\boxed{P(\tau_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Demo :

$$\begin{aligned} P(\tau_k = n) &= P(X_{n-1} = k-1, \xi_n = 1) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\xi_i = k-1, \xi_n = 1}_{\text{son v.a. independientes}}\right) \\ &= P(X_{n-1} = k-1) P(\xi_n = 1) \end{aligned}$$

$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} p.$$

- 2. $\tau_k \leq n \Leftrightarrow X_n \geq k$. Por lo tanto :

$$\boxed{P(\tau_k \leq n) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}}.$$

Demo. :

$$\begin{aligned} P(\tau_k \leq n) &= P(X_n \geq k) \\ &= P(X_n = k) + P(X_n = k+1) + ... + P(X_n = n). \end{aligned}$$

Tiempos entre éxitos

Sea $T_k = t_k - t_{k-1} \Rightarrow P(T_k = m) = p(1-p)^{m-1}$, es decir $T_k \sim Geom\,(p)$ tiene distribución geométrica que corresponde a la distribución de probabilidad del núm. X_n de ensayos Bernoulli necesaria para obtener un éxito o equiv. la distr. de probabilidad de núm, de fallos antes del primer éxito.

- Si $p = \dfrac{1}{n}$, $n \to \infty$, la distribución límite es $Exp(\lambda)$ con $\lambda = \dfrac{1}{n}$.

En efecto,

$$\begin{aligned} P(X > m) &= (1-p)^m \\ = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\frac{1}{n}m} &= \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{m}{n}} \\ &\to e^{-\frac{m}{n}}, \end{aligned}$$

porque cuando $n \to \infty$ y m es fijo $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e$.

Conclusión : $\{X_n\}$ es el análogo del Proceso de Poisson en tiempo discreto, en otras palabras, el Proceso de Poisson es su proceso límite, cuando $n \to \infty$.

Gracias y hasta pronto !