Integración Numérica II

1. Reglas de Gauss-Legendre.
2. Integrales múltiples.

Reglas de Gauss-Legendre

Se considera el cálculo de integrales en el intervalo $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

usando **reglas de integración** de la forma:

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i).$$

A diferencia de las reglas anteriores, en las **reglas Gaussianas**, tanto los nodos x_i, como los coeficientes $A_i \quad i = 1, \ldots, n$ se determinan de modo que $I_n(f)$ **resulte exacta cuando f es un polinomio del grado mayor posible**.

Puntos y pesos de la regla de Gauss de integración

x_i	A_i	x_i	A_i
$n=1$		$n=2$	
0.000000000000000	2.00000000000000	$\pm$ 0.577350269189626	1.00000000000000
$n=3$		$n=4$	
$\pm$ 0.774596669241483	0.555555555555555	$\pm$ 0.861136311594053	0.347854845137455
0.000000000000000	0.888888888888889	$\pm$ 0.339981043584856	0.652145154862547
$n=5$		$n=6$	
$\pm$ 0.906179845938664	0.236926885056189	$\pm$ 0.932469514203152	0.171324492379170
$\pm$ 0.538469310105683	0.478628670499367	$\pm$ 0.661209386466265	0.360761573048138
0.000000000000000	0.568888888888889	$\pm$ 0.238619186083197	0.467913934572691
$n=7$		$n=8$	
$\pm$ 0.949107912342759	0.129484966168870	$\pm$ 0.960289856497537	0.101228536290376
$\pm$ 0.741531185599394	0.279705391489276	$\pm$ 0.796666477413627	0.222381034453375
$\pm$ 0.405845151377397	0.381830050505119	$\pm$ 0.525532409916329	0.313706645877887
0.000000000000000	0.417959183673470	$\pm$ 0.183434642495650	0.362683783378362

Observaciones.

- (Cambio de intervalo). Aunque las reglas de Gauss se definen sobre el intervalo $[-1,1]$, mediante el cambio de variable:

$$x(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

se pasa de una integral en $[a,b]$ a una integral en $[-1,1]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))\,dt.$$

- Si $f \in C^{2n}([-1,1])$, el error de las Reglas de Gauss-Legendre, definido por

$$E_n(f) := \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

satisface

$$|E_n(f)| \leq CM_n$$

donde C es una constante positiva y $M_n := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|$.

Ejemplo: Valor calculado de las siguientes integrales mediante la regla de Gauss de n puntos:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \qquad\qquad \int_{0}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

n	integral calculada
0	2.00000000000000
1	1.43306262114758
2	1.49867959566003
3	1.49333462244954
4	1.49366392070263
5	1.49364761415061
6	1.49364828886942
7	1.49364826489901
8	1.49364826564500
9	1.49364826562435
10	1.49364826562487
11	1.49364826562485
12	1.49364826562485
13	1.49364826562485
14	1.49364826562485
15	1.49364826562485

n	integral calculada
0	1.253314137315500
1	0.945846306765387
2	0.881724441044291
3	0.895101280858322
4	0.894873008285135
5	0.894829867593220
6	0.894831432899344
7	0.894831471817628
8	0.894831469487727
9	0.894831469482569
10	0.894831469484157
11	0.894831469484145
12	0.894831469484146
13	0.894831469484145
14	0.894831469484144
15	0.894831469484145

Integrales Múltiples

Las ideas anteriores se extienden a más dimensiones. Cálculo de la integral de una función de dos variables $f(x, y)$ en el rectángulo $D := [a, b] \times [c, d]$:

$$I = \int_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx.$$

Para

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

se tiene que:

$$I = \int_a^b g(x)dx.$$

Observaciones:

- Para cada una de estas dos integrales se puede utilizar una regla de integración distinta.
- La misma idea se puede usar para funciones de tres o más variables.