UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Problema 1. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = x + \cos(\ln(x))\,. \tag{1}$$

(i) Efectuando el cambio de variable $x = \exp(t)$, reduzca (1) a una EDO lineal no homogénea. Justifique su respuesta.
(ii) Encuentre la solución de (1) para $x > 0$, que satisfaga las condiciones:
$y(1) = y'(1) = 0$.
Pauta:
(i) Aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-t}\frac{dy}{dt}\,, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\,.$$

De esta forma la ecuación (1) se convierte, al efectuar el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$, en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - y(t) = \mathrm{e}^t + \cos(t)\,.$$

(ii) Notamos que la ecuación (1) es de Euler, luego aplicando el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$, se obtiene la EDO con coeficientes constantes no homogénea (ver item (i))

$$y''(t) - y(t) = \mathrm{e}^t + \cos(t)\,, \tag{2}$$

que resolveremos a continuación.
a) Resolviendo la EDO homogénea asociada: $y''(t) - y(t) = 0$, (usando operadores sería $(D^2 - 1)y(t) = 0$) se tiene que la ecuación característica correspondiente es $\lambda^2 - \lambda = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, de donde se concluye que la solución general de la homogénea es $y_h(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$, siendo $C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}$ constantes arbitrarias.
b) Encontrando una solución particular: Analizando la función del lado derecho de la EDO (2), se aprecia que un aniquilador (de más bajo orden) es $L_1 = (D-1)(D^2+1)$, siendo $D := \frac{d}{dt}$. Luego, procediendo como corresponde, se deduce que una solución particular de (2) es de la forma

$$y_p(t) = A\,t\mathrm{e}^t + B\,\cos(t) + C\,\mathrm{sen}(t)\,,$$

donde A, B, y C son constantes reales a determinar (a este mismo resultado se llega aplicando el método de coeficientes indeterminados). De hecho, estas constantes deben ser tales que y_p satisfaga la ecuación (2), lo cual conduce a afirmar que

$$2A\mathrm{e}^t - 2B\cos(t) - 2C\mathrm{sen}(t) = \mathrm{e}^t + \cos(t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}\,.$$

De esta forma, se deduce que $A = 1/2$, $B = -1/2$, y $C = 0$, es decir que la solución particular buscada es $y_p(t) = \frac{1}{2} t\, \mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\cos(t)$.

c) USANDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, tenemos que la solución general de (2) es

$$y(t) \,=\, C_1 \mathrm{e}^t \,+\, C_2 \mathrm{e}^{-t} \,+\, \frac{1}{2} t\, \mathrm{e}^t \,-\, \frac{1}{2}\cos(t)\,,$$

lo cual implica que la solución general de (1) sea

$$y(x) \,=\, C_1\, x \,+\, C_2\, x^{-1} \,+\, \frac{1}{2} x\, \ln(x) \,-\, \frac{1}{2}\cos(\ln(x))\,,$$

siendo $C_1\,, C_2 \in \mathbf{R}$ constantes arbitrarias.

d) RESOLVIENDO EL PVI FORMADO POR LA EDO (1) CON LAS CONDICIONES INICIALES $y(1) = y'(1) = 0$: En vista que conocemos la solución general de (1), procedemos a determinar C_1 y C_2 tales que se verifiquen las condiciones iniciales.

- De $y(1) = 0$, se desprende que $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$,
- De $y'(1) = 0$, se desprende que $C_1 - C_2 = -\frac{1}{2}$,

de donde resulta $C_1 = 0$, $C_2 = 1/2$. Finalmente, la solución del PVI dado es

$$y(x) \,=\, \frac{1}{2}\, x^{-1} \,+\, \frac{1}{2} x\, \ln(x) \,-\, \frac{1}{2}\cos(\ln(x))\,.$$

Problema 2. Resolver

$$\frac{1}{3} y(t) \,+\, \int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\, y(u)\, du \,=\, \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \pi\,, \\ \operatorname{sen}(t) & \text{si } \pi \le t < 2\,\pi\,, \\ 0 & \text{si } 2\,\pi \le t\,. \end{cases}$$

Exprese la solución $y(t)$ por tramos.

Pauta: Primero observamos que

$$\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\, y(u)\, du = \operatorname{sen}(t) * y(t)\,,$$

y además que, denotando por $f(t)$ la función *fuente* del lado derecho de la ecuación integral, se deduce que

$$f(t) = \operatorname{sen}(t)\Big(H_\pi(t) - H_{2\pi}(t)\Big) = -\operatorname{sen}(t-\pi)\, H_\pi(t) - \operatorname{sen}(t - 2\pi)\, H_{2\pi}(t)\,.$$

Luego, aplicando la transformada de Laplace, y usando propiedades adecuadas de ésta, resulta

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}[y(t)](s) + \frac{\mathcal{L}(y(t))(s)}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1}\Big(\mathrm{e}^{-\pi\, s} + \mathrm{e}^{-2\pi\, s}\Big)\,,$$

de donde se obtiene

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = -\frac{3}{s^2+4}\Big(\mathrm{e}^{-\pi\, s} + \mathrm{e}^{-2\pi\, s}\Big)\,.$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace, y ocupando la SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN, se tiene que

$$y(t) = g(t-\pi)H_\pi(t) + g(t-2\pi)H_{2\pi}(t)\,,$$

siendo $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{3}{s^2+4}\right](t) = -\dfrac{3}{2}\text{sen}(2t)$. De esta forma, la solución viene dada por

$$y(t) = -\frac{3}{2}\text{sen}(2t)H_\pi(t) - \frac{3}{2}\text{sen}(2t)H_{2\pi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \pi\,, \\ -\dfrac{3}{2}\,\text{sen}(2t) & \text{si } \pi \le t < 2\,\pi\,, \\ -3\,\text{sen}(2t) & \text{si } 2\,\pi \le t\,. \end{cases}$$

Observación: intentar resolver la ecuación dada "analizando" cada tramo (y aplicando para cada tramo la transformada de Laplace) es incorrecto, puesto que la función en cuestión tiene que estar definida en $[0,+\infty)$ para (por lo menos) intentar calcular su transformada de Laplace.

Problema 3. Resuelva el siguiente sistema aplicando el método de valores y vectores propios.

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + \mathrm{e}^t\,, \\ y'(t) = x(t) - y(t) + \mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$$

Pauta: La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$, siendo $X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$.
Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como $\boxed{X(t) = X_H(t) + X_P(t)}$, donde $X_H(t)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $X_P(t)$ es una solución particular del sistema original.
a) **Cálculo de** $X_H(t)$: calculando los valores propios de A, éstos son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2)$, es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(2,1)^T\}\rangle\,, \quad S_{\lambda_2} = \langle\{(1,-1)^T\}\rangle\,.$$

Por lo tanto la base del espacio solución está conformado por

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}\,, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\,.$$

De esta forma, la solución del sistema homogéneo está dado por

$$X_H(t) = C_1\,X_1(t) + C_2\,X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\,,$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

b) **Cálculo de** $X_P(t)$: usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $\boxed{X_P(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t)}$, donde $C_1(t)$ y $C_2(t)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Resolviendo el sistema anterior, multiplicando por la inversa de la matriz del sistema o aplicando la regla de Cramer, se tiene

$$C_1'(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(t) = \tfrac{t}{3} - \tfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

$$C_2'(t) = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(t) = -\tfrac{2}{3}t + \tfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3t}\,,$$

con lo cual se obtiene la solución particular

$$X_P(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t) = \begin{pmatrix} \left(\tfrac{2}{3}t + \tfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{t} - \tfrac{2}{9}(1+3t)\mathrm{e}^{-2t} \\ \tfrac{1}{9}(3t-1)\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{9}(1-6t)\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\tfrac{2}{3}t + \tfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{t} - \tfrac{2}{9}(1+3t)\mathrm{e}^{-2t} \\ \tfrac{1}{9}(3t-1)\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{9}(1-6t)\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} ,$$

siendo C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.