

## ANALISIS REAL I (525.301)

### Cap. 1. Ejercicios adicionales.

1. Sean  $X \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente y  $c \in \mathbb{R}$ . Demuestra que  $c \leq \sup X$  si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $x \in X$  tal que  $c - \varepsilon < x$ . Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.
2. Sean  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  conjuntos no vacíos y acotados. Demuestra que  $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ .
3. Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  tales que  $\forall x \in A \ \forall y \in B, x \leq y$ . Demuestra que  $\sup A \leq \inf B$ . Demuestra también que  $\sup A = \inf B$  si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A, y \in B$  tales que  $y - x < \varepsilon$ .
4. Dados  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado y  $c > 0$ , sea  $c \cdot A := \{cx, x \in A\}$ . Demuestra que  $c \cdot A$  es acotado, que  $\sup(c \cdot A) = c \sup A$  y que  $\inf(c \cdot A) = c \inf A$ . Enuncia y demuestra lo que ocurre con  $c < 0$ .
5. Dados  $A, B \subset \mathbb{R}$  no vacíos y acotados, sea  $A + B := \{x + y, x \in A, y \in B\}$ . Demuestra que  $A + B$  es acotado, que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  y que  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ . Enuncia y demuestra los resultados que valen cuando  $A$  y  $B$  son sólo acotados superiormente o sólo acotados inferiormente.
6. Dados  $A, B \subset \mathbb{R}^+$  no vacíos y acotados, sea  $A \cdot B := \{xy, x \in A, y \in B\}$ . Demuestra que  $A \cdot B$  es acotado, que  $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$  y que  $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ .
7. Sean  $B \subset A \subset \mathbb{R}$  no vacíos y acotados superiormente, tales que  $\forall x \in A \ \exists y \in B$  tal que  $x \leq y$ . Demuestra que  $\sup B = \sup A$ . Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.

Además, deben demostrar lo que quedó pendiente en las transparencias y deben hacer los siguientes ejercicios del Capítulo 1 del libro de Rudin: 1, 2, 3, 4 y 5.