525140 – Álgebra 1 – Propuesta de solución a Evaluación 1

Problema 1.

Considere las siguientes proposiciones:

p : 249 es un número primo o 249 es múltiplo de 3.
q : Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n es par, entonces n^2 es par.
r : Para algún número real **x**, se tiene que $\mathbf{x}^2 < 0$.
s : Para cualquier número real **x**, existe al menos un número real **y** tal que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 0$.
t : Existe un único número entero **x**, tal que $\mathbf{x^2 - 4x + 4} = 0$.

1.1 Determine el valor de verdad de las proposiciones **p** y **q**, justificando su respuesta.

1.2 Escriba en forma simbólica las proposiciones **r**, **s** y **t**.

1.3 Escriba la negación de las proposiciones **q** y **t**, en forma simbólica.

Solución:

1.1

- La proposición 249 es múltiplo de 3 es **verdadera** pues $249 = 3 \cdot 83$. Como la proposición usa el conector disyunción inclusiva, la proposición **p** es **verdadera**.
  La proposición **q** es **verdadera**. Demostrémoslo. Dado $n \in \mathbb{N}$, si n es par, entonces $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, luego $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, donde $2k^2$ es un número natural. Así, podemos concluir que n^2 es par,

(4 puntos)

1.2

- $\mathbf{r} : \exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < 0.$
- $\mathbf{s} : (\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R}) : x + y = 0.$
- $\mathbf{t} : \exists!\, x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4x + 4 = 0.$

(6 puntos)

1.3

- Definamos las funciones proposiciones simples

$$\mathbf{p_1}(n) : n \text{ es par} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{p_2}(n) : n^2 \text{ es par},$$

  siendo n un número natural.
  Entonces la proposición **p** en forma simbólica es: $\mathbf{p} \equiv \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, \mathbf{p_1(n)} \rightarrow \mathbf{p_2(n)}$ y

$$\sim \mathbf{p} \equiv \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, \mathbf{p_1(n)} \wedge \sim \mathbf{p_2(n)},$$

  que también se puede escribir como

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, \mathbf{n \text{ es par}} \wedge \mathbf{n^2 \text{ es impar}}.$$

- $\sim \mathbf{t} : (\forall\, x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4x + 4 \neq 0) \vee (\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2 : x_1^2 - 4x_1 + 4 = 0 \wedge x_2^2 - 4x_2 + 4 = 0).$

(10 puntos)

Problema 2.

2.1 Considere el conjunto

$$A = \{\pi, \mathrm{e}, \{\pi\}, \emptyset\}.$$

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (**V**) o falsas (**F**).

a) _____ $\{\pi\} \in A$
b) _____ $\{\pi\} \subseteq A$
c) _____ $\{\pi\} \in \mathcal{P}(A)$
d) _____ $\{\{\pi\}\} \in \mathcal{P}(A)$
e) _____ $\{\pi\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
f) _____ $\emptyset \in A$
g) _____ $\{\emptyset\} \subseteq A$
h) _____ $\emptyset \subseteq A$
i) _____ $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
j) _____ $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$

2.2 Sea $x \in \mathbb{N}$. Demuestre si $3x^2 + 6x + 4$ es par, entonces x es par.

Sugerencia: *Considere utilizar la técnica de demostración indirecta.*

Solución:

2.1 a) **V** $\{\pi\} \in A$
b) **V** $\{\pi\} \subseteq A$
c) **V** $\{\pi\} \in \mathcal{P}(A)$
d) **V** $\{\{\pi\}\} \in \mathcal{P}(A)$
e) **F** $\{\pi\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
f) **V** $\emptyset \in A$
g) **V** $\{\emptyset\} \subseteq A$
h) **V** $\emptyset \subseteq A$
i) **V** $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
j) **V** $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$

(10 puntos)

2.2 Utilizaremos la técnica de demostración indirecta, es decir, demostraremos la contrarrecíproca de la proposición que corresponde a:

Si x es impar, entonces $3x^2 + 6x + 4$ es impar.

Sea x impar, es decir, $\exists k \in \mathbb{N} : x = 2k - 1$, luego

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 4 &= 3(2k-1)^2 + 6(2k-1) + 4 \\ &= 3(4k^2 - 4k + 1) + 12k - 6 + 4 \\ &= 12k^2 - 12k + 3 + 12k - 2 \\ &= 12k^2 + 1. \end{aligned}$$

Así, $\exists p \in \mathbb{N}$ $(p = k^2)$ de modo que $3x^2 + 6x + 4 = 2p + 1$, lo que nos permite asegurar que $3x^2 + 6x + 4$ es impar concluyendo que

si x es impar, entonces $3x^2 + 6x + 4$ es impar

y así, podemos concluir que

si $3x^2 + 6x + 4$ es par, entonces $3x^2 + 6x + 4$ es par.

(10 puntos)

Problema 3.

En una elección se presentan tres candidatos, que representan a los partidos Renovación Internacional, Frente Ampliado y Partido Publicano.
Llamemos

- $\mathcal{U}$, al conjunto del total de votantes,
- R, al conjunto de los votantes que manifiestan preferencia por el candidato de Renovación Internacional,
- F, al conjunto de los votantes que manifiestan preferencia por el candidato del Frente Ampliado,
- P, al conjunto de los votantes que manifiestan preferencia por el candidato del Partido Publicano.

Además, entenderemos como **voto válidamente emitido** aquel que manifiesta **sólo** una preferencia, como **voto nulo** aquel que manifiesta más de una preferencia y como **voto blanco** aquel que no manifiesta ninguna preferencia.
El ganador de la elección es el candidato que obtiene más votos válidamente emitidos.
Al momento del conteo de votos se reveló que el total de votantes fueron 100 personas, y además:

- El candidato de Renovación Internacional recibió 37 votos válidamente emitidos.
- Ningún votante manifestó preferencia por los candidatos de Renovación Internacional y del Frente Ampliado.
- El candidato del Frente Ampliado recibió 23 preferencias.
- El candidato del Partido Publicano recibió 40 preferencias.
- $|F \cup P| = 60$.
- Hubo 5 votos nulos.

Con la información anterior,

3.1 Determine, justificadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) El número de votos nulos es igual a $|R \cap F \cap P|$.

(ii) El número de votos válidamente emitidos es igual a $|R \cup F \cup P|$.

3.2 Determine justificadamente qué candidato ganó la elección y cuántos votos válidamente emitidos recibió. Indique además el conjunto cuya cardinalidad es la cantidad de votos válidamente emitidos que recibió el candidato ganador.

Solución:

3.1 La afirmación del ítem (i) es **falsa**, pues si algún votante manifestó preferencia sólo por dos de los tres candidatos, entonces su voto es nulo pero él no pertenece a la intersección de los tres conjuntos. Por otro lado, la afirmación del ítem (ii) también es **falsa** porque la unión de los tres conjuntos incluye las intersecciones, que no corresponden a votos válidamente emitidos.

(10 puntos)

3.2 Comencemos mencionando que, dado que $|F| = 23$ y que el candidato de Renovación Internacional recibió 37 votos válidamente emitidos, no es posible que el ganador sea el candidato del Frente Ampliado. Sólo resta ver cuántos de los 40 votos recibidos por el candidato del Partido Publicano son válidamente emitidos.

Del hecho que $R \cap F = \emptyset$ deducimos que, en particular, no hay elementos en el conjunto $P \cap R \cap F$ (intersección de los 3 conjuntos, región (3) de la figura), y que, por lo tanto, los votos nulos se reparten entre los conjuntos disjuntos $P \cap R \cap F^c$ (región (2) en la figura) y $P \cap F \cap R^c$ (región (4) en la figura), esto es,

$$|P \cap R \cap F^c| + |P \cap F \cap R^c| = 5.$$

Así, podemos expresar todo el conjunto P como la siguiente unión de conjuntos que, tomados dos a dos, no tienen elementos en común (vea la figura 1):

$$P = \underbrace{(P \cap F^c \cap R^c)}_{\text{región (1)}} \cup \underbrace{(P \cap R \cap F^c)}_{\text{región (2)}} \cup \underbrace{(P \cap F \cap R^c)}_{\text{región (4)}} \cup \underbrace{(P \cap R \cap F)}_{\text{región (3)}}.$$

Por lo tanto, podemos calcular la cardinalidad de P directamente como la suma de las cardinalidades de los cuatro conjuntos anteriores (las intersecciones entre ellos son todas vacías):

$$|P| = |P \cap F^c \cap R^c| + \underbrace{|P \cap R \cap F^c| + |F \cap P \cap R^c|}_{\text{número total de votos nulos}} + |P \cap R \cap F|,$$

esto es,

$$40 = |P \cap F^c \cap R^c| + 5 + 0,$$

de donde

$$|P \cap F^c \cap R^c| = 35.$$

Esto significa que el candidato del Partido Publicano recibió 35 votos válidamente emitidos, y por lo tanto el ganador de la elección es el candidato de Renovación Internacional.

Los votos válidamente emitidos por él corresponden al conjunto $R \cap P^c \cap F^c = R \setminus (P \cup F)$.

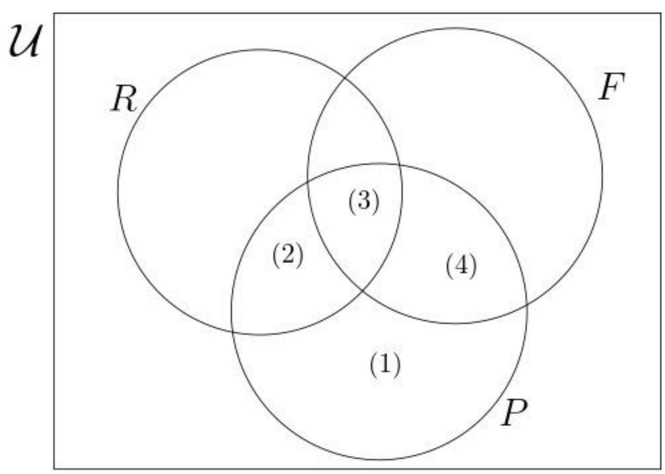

Figura 1: Diagrama de Venn asociado a problema

(10 puntos)