

Cálculo II (527150)

Clase 07: Teorema fundamental del cálculo

Ejemplos de integración definida

Ejemplos

Calcular las integrales siguientes.

(i) $\int_0^1 x^4 \, dx$

(ii) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \, dx$

(iii) $\int_2^5 \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$

(iv) $\int_0^1 \arctan(x) \, dx$

(v) $\int_{-\frac{3}{10}}^0 \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}} \, dx$

Ejemplo de función definida por tramos

Ejemplos

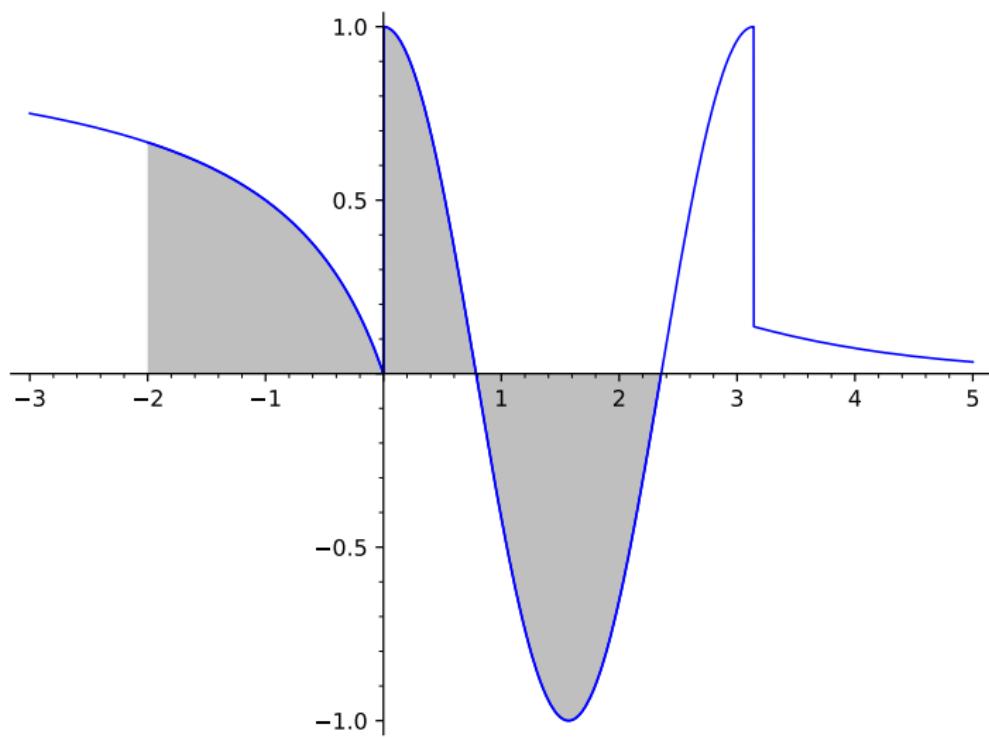
Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \cos(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ xe^{-x} & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

Determinar el valor de

$$\int_{-2}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx$$

Ejemplo de función definida por tramos



Teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Se define la función

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Esta función es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y su derivada es $G'(x) = f(x)$.

Funciones definidas por integrales

Ejemplos

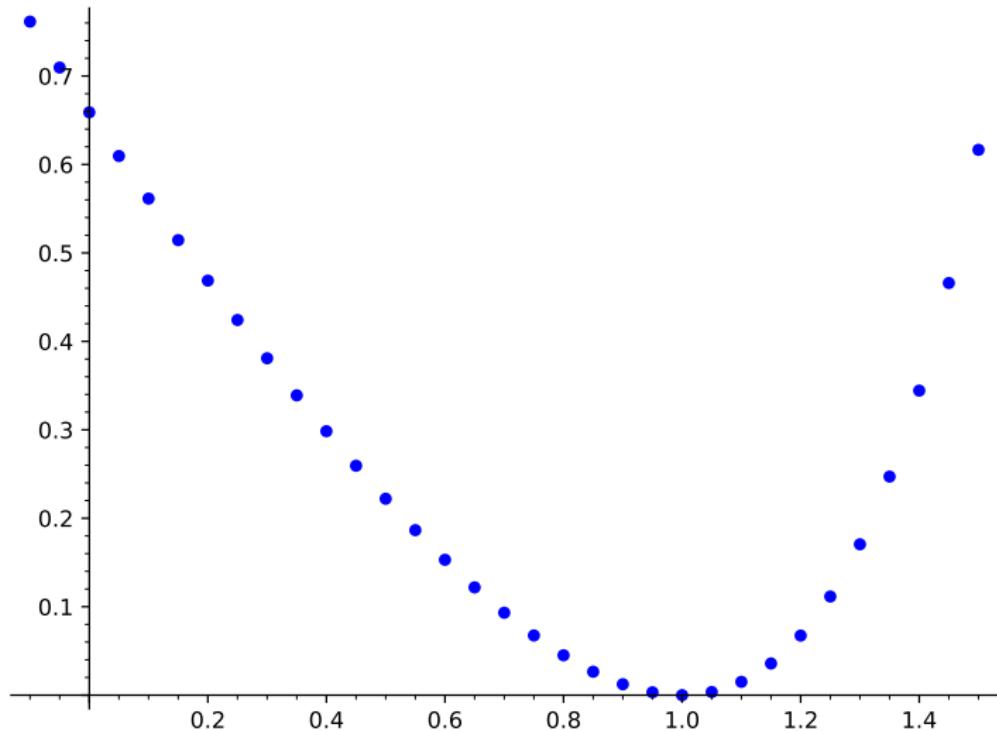
$$\blacktriangleright F(x) = \int_0^x \frac{t^3 + 2t - 8}{t^4 + t^2 + 1} dt$$

$$\blacktriangleright G(x) = \int_x^{2x} e^{4t} dt$$

$$\blacktriangleright H(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2} - e^t}{t} dt$$

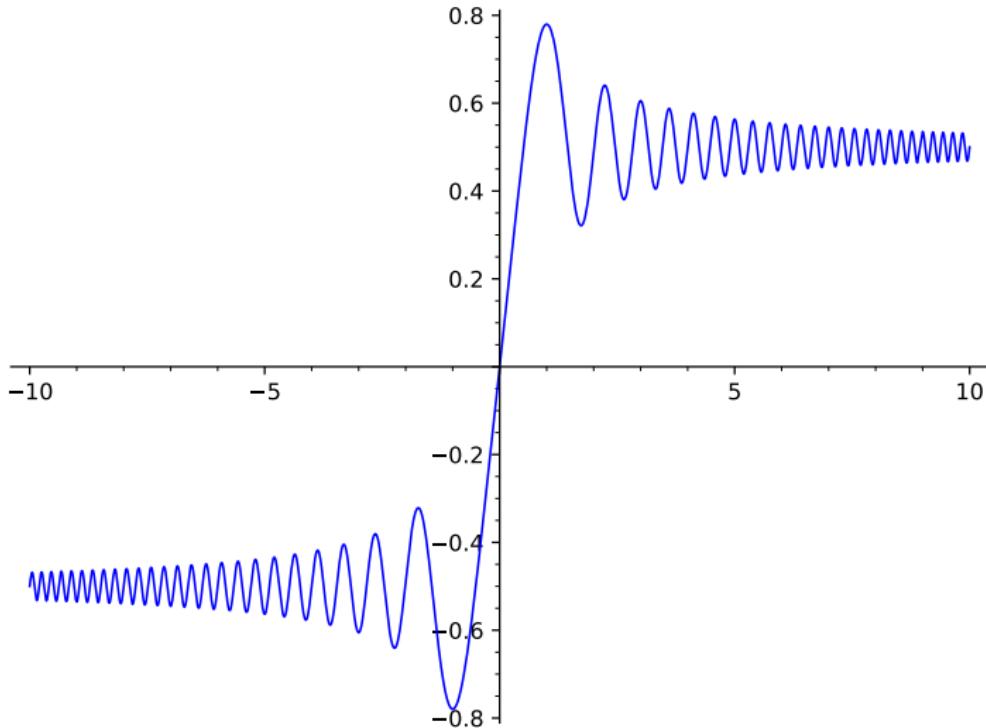
Ejemplo de gráfica

Considerar la función $H(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2} - e^t}{t} dt.$



Otro ejemplo: función coseno de Fresnel

Considerar la función $C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$



Derivación de funciones definidas por integrales

Ejemplos

Derivar las siguientes funciones:

$$(i) \quad F(x) = \int_1^{x^2} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

$$(ii) \quad G(x) = \int_{3x}^2 \frac{1}{t^6 + 1} dt$$

$$(iii) \quad H(x) = \int_{2x}^{3x^2+8} \sqrt{u^5 + 1} du$$

La función logaritmo

Definición

La función *logaritmo*, de dominio $(0, \infty)$, se define

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Propiedades

Las propiedades de la función logaritmo se pueden deducir de su definición.