

Universidad de Concepción
 Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
 Departamento de Ingeniería Matemática
 Dr. Raimund Bürger
 Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Práctica 1 — miércoles 29 de abril de 2020

Problema 1. Indicar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ tales que $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero que

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$ dado,
- (iv) la sucesión $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es acotada, pero no converge.

Problema 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Demostrar que la sucesión converge y determinar su límite.

Problema 3. Para un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $A \subset X$ un punto $x \in X$ se llama *punto adherente* de A si x pertenece a la *clausura* de A , denotada \bar{A} , es decir en cada vecindad de x existe por lo menos un elemento de A , es decir para todo $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Un conjunto A es cerrado si $A = \bar{A}$. Graficar los siguientes conjuntos (si posible) e identificar sus puntos interiores, de acumulación, de adherencia, de frontera y de puntos aislados. Además indicar si los conjuntos son abiertos, cerrados y compactos.

- (i) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
- (ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 < 64\}$.
- (iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$.
- (iv) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cup \{(3, 3, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (vi) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2 < x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0, 0, 0)\}$.
- (vii) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$.

Problema 4.

a) Sea (M, d) un espacio métrico. Demostrar que

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in M : \quad d(x, y) &\geq |d(x, z) - d(z, y)|; \\ \forall x, y, x', y' \in M : \quad |d(x, y) - d(x', y')| &\leq d(x, x') + d(y, y'). \end{aligned}$$

b) Se considera el espacio métrico \mathbb{R}^2 con las métricas

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ d_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Para cada una de las métricas, dibujar la bola unitaria

$$U_{i,1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_i(0, y) \leq 1\}, \quad i = 1, 2, \infty.$$

Problema 5. ¿Cuales de las siguientes funciones $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ definen una métrica sobre \mathbb{R}^2 ? Fundamente su respuesta o por una demostración, o por un contraejemplo.

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases} \quad g_2(x, y) = ((x_1 - y_1)^{1/2} + (x_2 - y_2)^{1/2})^2, \\ g_3(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (\text{donde } d \text{ es alguna métrica sobre } \mathbb{R}^2), \\ g_4(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ d(x, z) + d(y, z) & \text{si } x \neq y, \end{cases} \end{aligned}$$

donde en el caso de g_4 , d es alguna métrica sobre \mathbb{R}^2 y $z \in \mathbb{R}^2$ arbitrario.