UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 11

1. La sucesión de Fibonacci es una recurrencia lineal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ y $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   a) Adoptando la notación $u_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, determine una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $u_{n+1} = Au_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   b) Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $u_n = A^{n-1}u_1$.

   c) Diagonalice A, calcule sus potencias y determine una fórmula cerrada para f_n, es decir, una formula que depende de n, pero no de f_{n-1}.

2. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y $S \subseteq V$ (no necesariamente un s.e.v. de V). Se define el espacio ortogonal a S por:

$$S^\perp = \{u \in V : \forall s \in S,\ \langle s, u\rangle = 0\}.$$

   Pruebe que:

   a) $S^\perp$ es s.e.v. de V.

   b) $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$.

   c) $S' \subseteq S \implies S^\perp \subseteq S'^\perp$.

   d) Si V es de dimensión finita, entonces $V = \langle S\rangle \oplus \langle S\rangle^\perp$.

   e) $\langle S\rangle = (S^\perp)^\perp$.

3. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior, y $T : V \to V$ una aplicación lineal simétrica tal que $\forall u \in V$, $\langle T(u), u\rangle = 0$.

   a) Pruebe que $\forall u, v \in V$, $\langle T(u), v\rangle = 0$.

   b) Use a) para concluir que $T = \theta$.
