Relaciones

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

21 de abril de 2021

Dados dos subconjuntos arbitrarios A y B no vacíos, una **relación binaria** $\mathcal{R}$ es cualquier subconjunto de $A \times B$, es decir $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.
Cuando $A = B$, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ se llama una relación en A o sobre A.
Si $(a, b) \in \mathcal{R}$, entonces diremos que a está relacionado con b y escribiremos $a\mathcal{R}b$:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}\,.$$

Dado $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, se define:

$$(i)\ \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) := \{a \in A : \exists\, b \in B : a\,\mathcal{R}\,b\} \subseteq A\,,$$
$$(ii)\ \mathrm{Rec}(\mathcal{R}) := \{b \in B : \exists\, a \in A : a\,\mathcal{R}\,b\} \subseteq B\,.$$

Ejemplos:

1. Sean $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 4\}$ y $\mathcal{R}$ definida por

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a + b \leq 5, \quad a \in A, b \in B.$$

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 1)\},\ \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = A,\ \mathrm{Rec}(\mathcal{R}) = B.$$

2. La relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a + 3b \leq 1, \quad a, b > 0$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + 3b \leq 1\}\,.$$

Se deduce (Ejercicio) que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = (0, 1)$ y $\mathrm{Rec}(\mathcal{R}) = (0, 1/3)$.

Clasificación de relaciones binarias en/sobre un conjunto A

Una relación $\mathcal{R}$ en A se llama:

1. Refleja (o reflexiva), si $\forall\, a \in A : a\mathcal{R}a$.
2. Simétrica, si $\forall\, a, b \in A : a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad b\mathcal{R}a$.
3. Antisimétrica, si $\forall\, a, b \in A : (a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}a) \quad \Rightarrow \quad a = b$.
4. Transitiva, si $\forall\, a, b, c \in A : (a\mathcal{R}b \quad \wedge \quad b\mathcal{R}c) \quad \Rightarrow \quad a\mathcal{R}c$.

Ejemplos: Discutir si cada una de las relaciones siguientes es refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva. Justifique.

1. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : ab \geq 0\}$ una relación en $\mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ : ab \geq 0\}$
3. $\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\}$, donde $a \mid b$ se lee: "a divide a b", o también "a es factor de b". Asimismo, se puede leer como "b es divisible por a".

Se destacan:

- Relaciones de orden: las que son refleja, antisimétrica y transitiva.
- Relaciones de equivalencia: aquellas que son refleja, simétrica y transitiva.

Una relación $\mathcal{R}$ en A se dice que es relación de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos:

1. $\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$, siendo $\leq$ la relación usual "es menor o igual que".
2. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(X)$, definida por: $\forall\, A\,, B \subseteq X : \quad A\mathcal{R}B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$, o equivalentemente
$$\mathcal{R} := \{(A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}\ .$$

Conjunto o Estructura ordenada

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, se dice que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto o estructura ordenada. En este caso, se denota usualmente por $(A, \leq)$ en vez de $(A, \mathcal{R})$.
Además, $\forall\, a\,, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ es denotado por $a \leq b$.
Por otra parte, se define $<$ con la regla: $\forall\, a\,, b \in A : a < b \Leftrightarrow a \leq b \quad \wedge \quad a \neq b$.

Tipos de relaciones de orden: Total, Parcial

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Se dice que $\leq$ es relación de orden de tipo:

1. Total, si $\forall\, a\,, b \in A\, :\; a \,\leq\, b \quad \vee \quad b \,\leq\, a$. Es decir, todos los elementos en A están relacionados entre sí (son comparables). En este caso, se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.
2. Parcial, si no es total, es decir $\exists\, a\,, b \in A\, :\; a \,\not\leq\, b \quad \wedge \quad b \,\not\leq\, a$.
   Es decir, existe al menos un par de elementos en A que no son comparables. En este caso, se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\forall\, a\,, b \in \mathbb{N}\, :\; a \,\leq\, b \quad \Leftrightarrow \quad a \,|\, b$, es un conjunto parcialmente ordenado, pues $4 \,\not\leq\, 5 \quad \wedge \quad 5 \,\not\leq\, 4$.
2. $(\mathcal{P}(X), \leq)$, donde $\forall\, A\,, B \,\subseteq\, X\, :\; A \,\leq\, B \quad \Leftrightarrow \quad A \,\subseteq\, B$. Si
   - $|X| \,=\, 1$, entonces $(\mathcal{P}(X), \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.
   - en otro caso, $(\mathcal{P}(X), \leq)$ resulta ser un conjunto parcialmente ordenado, pues existen $A\,, B \in \mathcal{P}(X)$ no vacíos, tales que $A \cap B \,=\, \emptyset$, y $A \,\not\subseteq\, B \quad \wedge \quad B \,\not\subseteq\, A$.
3. $(\mathbb{R}, \leq)$, donde $\leq$ es la relación "menor o igual que" usual en $\mathbb{R}$, es un conjunto totalmente ordenado, ya que $\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}\, :\; x \,\leq\, y \quad \vee \quad y \,\leq\, x$.

Diagrama de Hasse de una relación de orden

El Diagrama de Hasse de un conjunto ordenado $(A, \leq)$, con A conjunto finito, es una representación de la relación definida en él, en la que si $a, b \in A$, con $a \neq b$, son tales que $a \leq b$, entonces se dibuja a por debajo de b y se unen éstos por un segmento, suprimiendo los segmentos que corresponden a la propiedad transitiva (por ejemplo, si $a \leq b$ y $b \leq c$, se suprime el segmento correspondiente a $a \leq c$). Algunos autores suelen decir también "Diagrama de Hasse de A (con respecto a $\leq$)".

Ejemplo: Considere $D_m := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ es un divisor de } m\}$, con $m \in \mathbb{N}$, provista de la relación de divisibilidad ($a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \,|\, b$). Determine los diagramas de Hasse asociados a D_{15}, D_{24} y D_{36} considerando esta relación de orden. Recordar (La descomposición de un número natural como producto de factores primos): Dado $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$: $\exists \, \{p_j\}_{j=1}^k \subseteq \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (números primos), y $\exists \, \{s_j\}_{j=1}^k \in \mathbb{N}$, tales que $m = \prod_{j=1}^k p_j^{s_j}$. Además, $|D_m| = \prod_{j=1}^k (s_j + 1)$. Por convención, $|D_1| := 1$.

Elementos característicos de conjuntos ordenados (definiciones/caracterizaciones)

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y B un subconjunto no vacío de A. Decimos que

1. $c \in A$ es cota superior o mayorante de B si $\forall\, x \in B : x \leq c$. El conjunto de las cotas superiores se llama Conjunto mayorante de B.
2. $c \in A$ es cota inferior o minorante de B si $\forall\, x \in B : c \leq x$. El conjunto de las cotas inferiores se llama Conjunto minorante de B.
3. $s \in A$ es supremo de B (si existe) si s es cota superior de B y para toda cota superior c de B: $s \leq c$. Notación: $s = \sup(B)$.
4. $i \in A$ es ínfimo de B (si existe) si i es cota inferior de B y para toda cota inferior c de B: $c \leq i$. Notación: $i = \text{ínf}(B)$.
5. Si el supremo de B es un elemento de B, se llama máximo de B. Dicho de otra forma, $a \in B$ es máximo de B, si $\forall\, x \in B : x \leq a$. Notación: $a = \text{máx}(B)$.
6. Si el ínfimo de B es un elemento de B, se llama mínimo de B. Es decir: $a \in B$ es mínimo de B, si $\forall\, x \in B : a \leq x$. Notación: $a = \text{mín}(B)$.
7. $a \in B$ es maximal de B si $\forall\, x \in B : a \leq x \quad \Rightarrow \quad a = x$.
8. $a \in B$ es minimal de B, si $\forall\, x \in B : x \leq a \quad \Rightarrow \quad a = x$.
9. B está acotado superiormente si existe $c \in A$ cota superior de B.
10. B está acotado inferiormente si existe $c \in A$ cota inferior de B.
11. B está acotado si está acotado superior e inferiormente.

Se observa:

- $a \in B$ es máximo/elemento mayor de B, entonces $a \in B$ es maximal de B.
- $a \in B$ es mínimo/elemento menor de B, entonces $a \in B$ es minimal de B.

También se puede apreciar:

- $s \in A$ es supremo de B (si existe) $\Leftrightarrow$ s es el mínimo del conjunto mayorante de B (si existe).
- $i \in A$ es ínfimo de B (si existe) $\Leftrightarrow$ i es el máximo del conjunto minorante de B (si existe).

OBSERVACIÓN: Sea $(A, \leq)$ una relación de orden, y sean $x, y \in A$. Entonces, si $x \leq y$, se suele decir que

- x ANTECEDE / PRECEDE / ES ANTERIOR A y, o
- y SUCEDE / ES POSTERIOR A x.

Conjuntos bien ordenados: Se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado si

i) $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

ii) $\forall\, B \subseteq A : (B \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad B$ tiene mínimo (primer elemento)).

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.
2. $(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado, pero no es conjunto bien ordenado (no tiene mínimo).
3. $(\mathbb{R}_0^+, \leq)$ tampoco es conjunto bien ordenado. $\emptyset \neq \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}_0^+$ tiene a 0 como cota inferior. En realidad, 0 es ínfimo de $\mathbb{R}^+$ pero no es mínimo de $\mathbb{R}^+$.

Principio de la buena ordenación: Todo conjunto no vacío admite una relación de orden total con el cual se induce un conjunto bien ordenado.

Aplicación: $\mathbb{R}$ admite un buen orden. ¿Cuál es tal relación de orden total? Se desconoce, solo se sabe que existe.

Ejemplos:

1. Para el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \leq)$, donde $\forall\, A\,, B \subseteq X : A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$, se tiene que $X \in \mathcal{P}(X)$ y $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ son elementos máximo y mínimo de $(\mathcal{P}(X), \leq)$, respectivamente. Por otro lado, no existen elementos maximales o minimales distintos de X y $\emptyset$.
2. En el conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$, siendo $\leq$ la relación de orden usual, sólo hay un elemento mínimo $(1 \in \mathbb{N})$, que por la observación, también es minimal.
3. Sea $A := \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Se define la relación $\forall\, a\,, b \in A : a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \,|\, b$. ($a \,|\, b$ se lee: a divide a b) Se prueba que $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado parcial (3 y 4 son elementos de A no comparables). Además, $(A, \leq)$ no posee elemento máximo, pero 6 y 4 son elementos maximales, y 1 es mínimo.
4. Considere el conjunto $A := \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 20, 30\}$, sobre el cual se define la relación de orden parcial $\leq$ definida por

$$\forall\, a, b \in A : a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \,|\, b\,.$$

Determine todos los elementos característicos, que existan, de los subconjuntos (de A) $B := \{2, 5, 10\}$ y $C := \{2, 8, 15, 20\}$.

Calculando maximal(es) de $(A, \leq)$ del ejemplo 3 anterior

Recordamos que $a \in A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ es maximal si (Caracterización)

$$\forall x \in A : (a \leq x \Rightarrow a = x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A : (a \neq x \Rightarrow a \nleq x)$$

$a \in A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ NO es maximal si (Caracterización)

$$\exists x \in A : (a \leq x \wedge a \neq x)\,.$$

En el contexto del ejercicio, significa que el elemento maximal a será aquel elemento de A que no sea factor / no es divisor de otro elemento de A.
Es por ello, que quedan descartados 1, 2 y 3 como candidatos a ser elemento maximal, pues

$$\begin{array}{llll} 1\,,2 \in A : & 1 \leq 2 & \wedge & 1 \neq 2 \\ 2\,,4 \in A : & 2 \leq 4 & \wedge & 2 \neq 4 \\ 3\,,6 \in A : & 3 \leq 6 & \wedge & 3 \neq 6\,. \end{array}$$

No así para 4 y 6. Ambos no tienen otro elemento mayor que ellos en A, del cual sean factor. En consecuencia, $\{4, 6\}$ es el conjunto de elementos maximales de $(A, \leq)$.

¿Tiene el conjunto $A \backslash \{1\}$, elemento minimal, considerando la misma relación de orden $\leq$? ¿mínimo?

Veamos que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

ETAPA 1: El argumento de la demostración será por REDUCCIÓN AL ABSURDO. Suponemos así que $(\mathbb{N}, \leq)$ no es un conjunto bien ordenado.

ETAPA 2: En vista que $(\mathbb{N}, \leq)$ es totalmente ordenado, con primer elemento (mínimo) 1, entonces se tiene que $\exists \emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$ tal que no admite primer elemento. Esto significa que $1 \notin B$, pues de lo contrario B tendría primer elemento. Esto sugiere definir el conjunto $S := \{m \in \mathbb{N} : (\forall\, k \in \{1, ..., m\})\,(k \notin B)\}$

Afirmación: S es un conjunto inductivo. En efecto,

1. $1 \in S$, pues $1 \notin B$
2. Supongamos que $\ell \in S$. Entonces $(\forall\, k \in \{1, ..., \ell\})\,(k \notin B)$. Como consecuencia, $\ell + 1$ no puede ser mínimo de B (sino, B tendría primer elemento). Así, $\ell + 1 \in S$.

ETAPA 3: Invocando el conocido PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA, $S = \mathbb{N}$, lo cual implica que $B = \emptyset\,(\rightarrow\leftarrow)$.

CONCLUSIÓN: $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado. $\square$

Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados. En $A \times B$ se pueden definir (al menos) dos relaciones de orden:

1. ORDEN PRODUCTO $\leq := \leq_A \times \leq_B$:
   $\forall (a,b),(c,d) \in A \times B : (a,b) \leq (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a \leq_A c) \wedge (b \leq_B d)$.
2. ORDEN LEXICOGRÁFICO $\leq_{\texttt{lex}}$:
   $\forall (a,b),(c,d) \in A \times B : (a,b) \leq_{\texttt{lex}} (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad (a <_A c) \vee \Big(a = c \wedge b \leq_B d\Big)$.

EJEMPLOS: Consideremos $A = B = \mathbb{N}$, provistos ambos de la relación de orden usual $\leq$. Entonces

1. $(2,5) \leq (6,8)$, pues $2 \leq 6$ y $5 \leq 8$. Por otro lado, se puede verificar que $(2,5)$ y $(7,3)$ no son comparables con el orden producto. Esto permite afirmar que este orden producto es parcial.
2. $(2,5) \leq_{\texttt{lex}} (7,3)$, pues $2 < 7$. También tenemos $(2,5) \leq_{\texttt{lex}} (2,7)$, ya que a pesar que $2 = 2$, se cumple $5 \leq 7$. Por otro lado, $(2,5) \not\leq_{\texttt{lex}} (2,3)$, pero $(2,3) \leq_{\texttt{lex}} (2,5)$. Esto permite probar que este orden lexicográfico es total (DEJADO COMO EJERCICIO).

EJERCICIO: Analizar para $A = B = \mathbb{N}$, provistos ambos de la relación de orden $|$.

Resultados importantes

Proposición

Sea B un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Tanto el máximo como el mínimo de B, si existen, son únicos.

Proposición

Sea B un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Tanto el supremo como el ínfimo de B, si existen, son únicos.

Proposición

Sea B un subconjunto finito no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Entonces B posee al menos un elemento maximal y otro minimal.

Isomorfismo de conjuntos ordenados

Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados.

1. Se dice que una función $f : A \to B$ PRESERVA EL ORDEN si $\forall x, y \in A : x \leq_A y \quad \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$.
2. Una función $f : A \to B$ es ISOMORFISMO de los conjuntos ordenados $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ si f es biyección, y tanto f como f^{-1} preservan el orden. En este caso se dice que $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son isomorfos.

EJEMPLO: Consideremos los conjuntos ordenados $(D_{15}, |\,)$ y $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq)$, y sea $f : D_{15} \to \mathcal{P}(\{a, b\})$ la función definida por $f(1) = \emptyset$, $f(3) = \{a\}$, $f(5) = \{b\}$, $f(15) = \{a, b\}$. Analice si $(D_{15}, |\,)$ y $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq)$ son o no isomorfos.

Una relación $\mathcal{R}$ sobre un conjunto A se dice que es de equivalencia, si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo: Relación de matrices semejantes

Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definida por

$$\forall\, \boldsymbol{A}\,,\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;:\quad \boldsymbol{A}\mathcal{R}\boldsymbol{B} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, \boldsymbol{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ no singular } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,.$$

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Se definen las clases de equivalencia de A, inducidas por $\mathcal{R}$, a los conjuntos de la forma

$$\forall\, x \in A \,:\, [x]_{\mathcal{R}} := \{y \in A \,:\, y\mathcal{R}x\} \,.$$

Observaciones

1. Al conjunto $[x]_{\mathcal{R}}$ se le llama clase de equivalencia de $x \in A$, según la relación $\mathcal{R}$.
2. Como $\mathcal{R}$ es refleja, entonces $\forall\, x \in A \,:\, x \in [x]_{\mathcal{R}}$, es decir $\forall\, x \in A \,:\, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
3. Sea $[x]_{\mathcal{R}}$ una clase de equivalencia, a x se le suele llamar representante de dicha clase.
4. Al conjunto de las clases de equivalencia se le denomina espacio cuociente, y es denotado por $A/\mathcal{R}$.
$$A/\mathcal{R} := \{[x]_{\mathcal{R}} \,:\, x \in A\} \,.$$
5. Con frecuencia, la relación de equivalencia se denota por el símbolo $\sim$.

Proposición (CE1)

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Entonces se cumple $\forall\, a\,,b \in A$:

$$(i)\ [a]_\sim = [b]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b\,,$$
$$(ii)\ [a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim = [b]_\sim$$

Proposición (CE2)

$A/\sim$ (sin clases repetidas) es una partición de A.

Proposición (CE3)

Sea $\{A_j\}_{j\in I}$ una partición cualquiera de A. Entonces, existe una relación de equivalencia $\sim$ en A, tal que $A/\sim = \{A_j\}_{j\in I}$.

Demostración de Proposición CE1

Sean $a, b \in A$, fijos pero arbitrarios.

$$(i)\ [a]_\sim = [b]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b\,.$$

($\Rightarrow$) Hipótesis: $[a]_\sim = [b]_\sim$.
En virtud a la Observación 2 y a la Hipótesis, tenemos que $a \in [a]_\sim = [b]_\sim$, lo cual implica que $a \in [b]_\sim$. Por definición de clase de equivalencia, se infiere que $a \sim b$.
($\Leftarrow$) Hipótesis: $a \sim b$.
Paso 1: Probemos que $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$: Sea $x \in [a]_\sim$. Esto implica que $x \sim a$. Como $a \sim b$, tenemos por ser $\sim$ Transitiva, que $x \sim b$, es decir $x \in [b]_\sim$. Luego, en vista que $x \in [a]_\sim$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$.
Paso 2: Probemos que $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$: Sea $x \in [b]_\sim$. Esto implica que $x \sim b$. Como $a \sim b$ y $\sim$ es Simétrica, se infiere que $b \sim a$. Por ser $\sim$ Transitiva, se deduce que $x \sim a$, es decir $x \in [a]_\sim$. Luego, como $x \in [b]_\sim$ es fijo pero arbitrario, se concluye que $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$.
Paso 3: Conclusión: $[a]_\sim = [b]_\sim$. $\square$

$$(ii)\ [a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim = [b]_\sim\,.$$

($\Rightarrow$) Hipótesis: $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$. La Hipótesis garantiza que $\exists\, x \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$.
$\Rightarrow x \in [a]_\sim \wedge x \in [b]_\sim \Rightarrow x \sim a \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim x \wedge x \sim b \Rightarrow a \sim b$. Así, invocando (i), se concluye que $[a]_\sim = [b]_\sim$.
($\Leftarrow$) Hipótesis: $[a]_\sim = [b]_\sim$. La conclusión es Inmediata (¿Por qué?).
Conclusión Final: siendo $a, b \in A$, fijos pero arbitrarios, $(i) - (ii)$ se cumplen siempre.

Demostración de Proposición CE2

Tenemos $S := \{[x]_\sim : x \in A\}$. Hay que notar, en virtud a la Proposición CE1, que si $x\,, y \in A$, tales que $y \sim x$, entonces $[y]_\sim = [x]_\sim$. Esto nos sugiere que pueden haber clases de equivalencias repetidas en la familia de conjuntos S. Por ello, procedemos a contar cada clase de equivalencia de A respecto de $\sim$ una sola vez, lo cual conducirá a una segunda familia de conjuntos $T := \{[x_j]_\sim : j \in I\}$, donde I es un conjunto de índices (puede ser finito o no finito), tal que $\forall\, j \in I : x_j \in A$, con la propiedad:

$$\forall\, k\,,\ell \in I : k \neq \ell : [x_k]_\sim \neq [x_\ell]_\sim \Leftrightarrow \forall\, k\,,\ell \in I : k \neq \ell : [x_k]_\sim \cap [x_\ell]_\sim = \emptyset\,.$$

Luego, resta probar que considerando el espacio cuociente $A/\sim$ sin clases repetidas, esto es, T, resulta ser una partición de A. En efecto,

1. Por definición de clase de equivalencia, se tiene que $\forall\, j \in I : [x_j]_\sim \neq \emptyset$, pues $\forall\, j \in I : x_j \in [x_j]_\sim$.
2. Sean $j\,, k \in I$, con $j \neq k$. Por la construcción de T, resulta que $[x_j]_\sim \cap [x_k]_\sim = \emptyset$, y así se infiere que los elementos de la familia T son disjuntos dos a dos.
3. Sea $b \in A$, fijo pero arbitrario. Entonces $b \in [b]_\sim$, lo cual garantiza que $\exists\, j_0 \in I : [b]_\sim = [x_{j_0}]_\sim$. Esto implica que $b \in [x_{j_0}]_\sim \subseteq \bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim$. Así queda establecido que $A \subseteq \bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim$.
   Por otro lado, en vista que $\forall\, j \in I : [x_j]_\sim \subseteq A$, se deduce (EJERCICIO) que $\bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim \subseteq A$.
   Finalmente, se concluye que $\bigcup_{j\in I}[x_j]_\sim = A$, y termina la demostración. $\square$

Demostración de Proposición CE3

La prueba es constructiva. Comenzaremos, definiendo la siguiente relación $\sim$ en A:

$$\forall\, c\,,b \in A \,:\, c \,\sim\, b \Leftrightarrow \exists\, j \in I \,:\, \{c, b\} \,\subseteq\, A_j\,.$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

$\sim$ es refleja: Sea $b \in A$ (fijo pero arbitrario). Como $\{A_j\}_{j\in I}$ es una partición de A, $\exists!\, j_0 \in I \,:\, b \in A_{j_0} \Rightarrow \{b\} \,\subseteq\, A_{j_0}$. De esta forma, se tiene que $\exists\, j_0 \in I \,:\, \{b, b\} = \{b\} \subseteq A_{j_0}$, lo cual permite concluir que $\forall\, b \in A \,:\, b \,\sim\, b$, es decir $\sim$ es refleja.

$\sim$ es simétrica: Sean $c\,,b \in A$.

$$c \,\sim\, b \Leftrightarrow \exists\, j \in I \,:\, \{c, b\} \,\subseteq\, A_j \Leftrightarrow \exists\, j \in I \,:\, \{b, c\} \,\subseteq\, A_j \Leftrightarrow b \,\sim\, c\,.$$

Y así, dado que $c\,,b \in A$ son fijos pero arbitrarios, se deduce que $\sim$ es simétrica.

$\sim$ es transitiva: Sean $b\,,c\,,d \in A$ (fijos pero arbitrarios), tales que $b \,\sim\, c$ y $c \,\sim\, d$. Entonces,

$$\begin{aligned} b \,\sim\, c &\Leftrightarrow \exists\, j_1 \in I \,:\, \{b, c\} \,\subseteq\, A_{j_1}\,, \\ c \,\sim\, d &\Leftrightarrow \exists\, j_2 \in I \,:\, \{c, d\} \,\subseteq\, A_{j_2}\,. \end{aligned}$$

Se aprecia que $c \in A_{j_1} \,\cap\, A_{j_2}$, pero $A_{j_1} \,\cap\, A_{j_2} \,=\, \emptyset$, por ser $\{A_j\}_{j\in I}$ una partición de A. Luego, para que no haya contradicción, la única posibilidad es que $j_1 \,=\, j_2$. Así, tenemos que $\exists\, j_1 \in I \,:\, \{b, d\} \,\subseteq\, A_{j_1} = A_{j_2} \Leftrightarrow d \,\sim\, b$, con lo que se infiere que $\sim$ es transitiva.

Conclusión 1: $\sim$ es relación de equivalencia en A.

Veamos ahora que $A/\sim = \{A_j\}_{j\in I}$:

Sea $c \in A$. Siendo $\{A_j\}_{j\in I}$ una partición de A, $\exists!\, j_0 \in I \,:\, c \in A_{j_0}$. Probemos que $A_{j_0} = [c]_\sim$.
$\subseteq$: Sea $b \in A_{j_0}$. Como $c \in A_{j_0}$, se tiene que $\{b, c\} \subseteq A_{j_0}$, lo cual implica que $b \sim c$, es decir $b \in [c]_\sim$. Así se deduce que $A_{j_0} \subseteq [c]_\sim$.
$\supseteq$: Sea $b \in [c]_\sim$. Esto significa que $b \sim c$, y siendo que $c \in A_{j_0}$, se infiere que $\{b, c\} \subseteq A_{j_0}$ (¿por qué?). De esta forma, se tiene $b \in A_{j_0}$, con lo cual $[c]_\sim \subseteq A_{j_0}$.

Conclusión 2: $\forall\, c \in A \,:\, \exists\, j \in I \,:\, A_j = [c]_\sim$

Ahora, si denotamos por $a_j \in A$, un representante de A_j, con $j \in I$, se tendrá $\forall\, j \in I \,:\, A_j = [a_j]_\sim$, y así se concluye que $A/\sim := \{[a_j]_\sim \,:\, j \in I\} = \{A_j\}_{j\in I}$.

Ejemplo 1: Relación de congruencia módulo 2

Sea $\sim$ una relación en $\mathbb{Z}$ definida por

$$\begin{aligned} \forall\, x\,, y \in \mathbb{Z} \,:\, x \sim y &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \,:\, x = 2\,k + y \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \,:\, x - y = 2\,k\,. \end{aligned}$$

Probar que $\sim$ es relación de equivalencia, y determinar $\mathbb{Z}/\sim$.

Ejercicio propuesto:

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, A^m = I_n$. Se define la relación $\mathcal{R}_A$ en $\mathbb{R}^n$ por

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}^n \,:\, x\, \mathcal{R}_A\, y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, A^k\, x = y\,.$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}_A$ es una relación de equivalencia (en $\mathbb{R}^n$).

b) Determine, $\forall\, (a, b) \in \{0, 1\}^2 \,:\, [(a, b)^{\mathrm{t}}]_{\mathcal{R}_A}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.