EVALUACIÓN 1 DE 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II (2024-1)

LEONARDO E. FIGUEROA

RESUMEN. Esta evaluación consiste en 4 problemas con la misma ponderación.

Problema A (Ejemplo computacional de convolución en una dimensión)**.** La función $\varrho\colon R^N \to R$, definida en [Tar07, Lem. 2.4] mediante

$$\varrho(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

es un ejemplo muy útil de función en $C_c^\infty(R^N)$ que no es idénticamente nula, tiene soporte conocido exactamente ($\overline{B^N}$) y es nonegativa. En particular, normalizando a ϱ en $L^1(R^N)$ y reescalando el resultado apropiadamente, es posible construir una sucesión suavizante especial (cf. [Tar07, Def. 3.1]), que a su vez es muy útil para probar resultados de aproximación por funciones suaves.

Sin embargo, ϱ no es atractiva para hacer cálculos explícitos. El objetivo de esta tarea es construir, en el caso unidimensional, una función análoga que sí se preste para estos fines a costa de menor regularidad.

A.1. (2 puntos) Pruebe que la función nonegativa $r\colon R \to R$ definida por

$$r(x) := \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_c^1(R)$ pero *no* a $C_c^2(R)$.

A.2. (2 puntos) Calcule $\|r\|_1$.

A.3. (2 puntos) Para $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ sea $r_n\colon R \to R$ definida por

$$r_n(x) := \|r\|_1^{-1}\, n\, r(n\, x).$$

Calcule $\|r_n\|_1$.

A.4. (6 puntos) Considere a la función escalón de Heaviside $H\colon R \to R$ definida por

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule $r_n \star H$.

A.5. (4 puntos) Sea $G\colon R \to R$ la función definida por

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } -1 \le x < 1, \\ 0 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Calcule $r_n \star G$. *Indicación:* Explote que $G(x) = H(x+1) - H(x-1)$.

A.6. (6 puntos) Pruebe que $\|G - r_n \star G\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Problema B (Convolución entre función $C_c(R^N)$ y una distribución)**.** Dadas una función $g \in C_c(R^N)$ y una distribución $u \in \mathcal{D}'(R^N)$, definimos sobre $C_c^\infty(R^N)$ a la forma lineal $g \circledast u$ mediante

$$\big(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(R^N)\big) \qquad \langle g \circledast u, \varphi \rangle := \langle u, \check{g} \star \varphi \rangle,$$

donde, recordemos, $\check{g}(x) := g(-x)$.

B.1. Pruebe que, para todo $g \in C_c(R^N)$ y $u \in \mathcal{D}'(R^N)$, $g \circledast u$ está bien definida, efectivamente es lineal y es una distribución.

B.2. Suponga que u es una distribución regular. Pruebe que $g \circledast u$ coincide con la distribución inducida por la función $g \star u\colon R^N \to R$.

B.3. Pruebe que, para todo $g \in C_c(R^N)$, $g \circledast \delta_0$ coincide con la distribución inducida por g.

Problema C (Espacios de Sobolev ponderados)**.** Sea Ω un abierto de R^N, $1 < p < \infty$ y sea $w\colon \Omega \to R$ una función medible que satisface las condiciones:

$$w > 0 \text{ casi en todas partes} \quad \wedge \quad w^{-1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

Definimos al espacio de Lebesgue ponderado $L^p_w(\Omega)$ mediante

$$L^p_w(\Omega) := \left\{ u\colon \Omega \to R \mid u \text{ es medible } \wedge \int_\Omega |u(x)|^p \, w(x)\, dx < \infty \right\}$$

(como siempre funciones iguales casi en todas partes se identifican) y se le equipa con la norma

$$\|u\|_{L^p_w(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, w(x)\, dx \right)^{1/p}.$$

C.1. (3 puntos) Pruebe que $L^p_w(\Omega)$ es un espacio de Banach. *Indicación:* Utilice la transformación $u \mapsto w^{1/p}\, u$ y las propiedades del espacio de Lebesgue convencional $L^p(\Omega)$.

C.2. (4 puntos) Pruebe que $L^p_w(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

C.3. (4 puntos) Dado $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, pruebe que el mapa $F_\varphi\colon L^p_w(\Omega) \to R$ definido por

$$F_\varphi(v) := \int_\Omega v(x)\, \varphi(x)\, dx$$

es un funcional lineal y acotado sobre $L^p_w(\Omega)$ (esto es, $F_\varphi \in [L^p_w(\Omega)]'$).

C.4. (6 puntos) Definimos al espacio de Sobolev ponderado $W_w^{1,p}(\Omega)$ mediante

$$W_w^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L_w^p(\Omega) \,\middle|\, (\forall\, i \in \{1, \ldots, n\})\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_w^p(\Omega) \right\},$$

y se le equipa con la norma

$$\|u\|_{W_w^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L_w^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_w^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Pruebe que $W_w^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Problema D (Extensión a órdenes mayores de primera parte del teorema de inyección de Sobolev)**.** En clase demostramos el caso $m = 1$ de la primera parte del teorema de inclusión de Sobolev [Tar07, Theorem 6.7(i)]:

$$p \in [1, N) \implies W^{1,p}(R^N) \subset L^r(R^N), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Demuestre que este resultado se extiende para $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ en general; esto es, pruebe que

$$p \in \left[1, \tfrac{N}{m}\right) \implies W^{m,p}(R^N) \subset L^r(R^N), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Indicación: Argumente por inducción en m. También, a riesgo de decir algo obvio, notar que el r que se debe obtener es distinto para cada m.

Referencias

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)