UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 9 - Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Integración de contorno y Aplicaciones (I).***

Ejercicios de repaso:

(P) Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n,\ (n \geq 2)$ números complejo distintos. Probar

(a) $\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-z_n}$ donde $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$;

(b) $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = 0$ para cualquier curva simple cerrada continua por tramos,γ, que encierre a todos estos números complejos distintos;

Indicación. Considerar el coeficiente de la potencia z^{n-1} en la ecuación de coeficientes indeterminados.

2. Si los n números complejos distintos, z_i pertenecen a un dominio D. Determinar

$$\alpha = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} dz$$

donde f es una función holomorfa sobre D y γ es una curva simple cerrada y continua por tramos inscrita en D.
Indicación: Se presentan diversas situaciones, involucrado a los posible ceros de f que coincidan o no con algunos de los z_i. etc.

3. Sea $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ es una función racional donde $Q(x,y)$ no se anula en la circunferencia $x^2+y^2=1$. Establecer que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)dt = \oint_{|z|=1} R\Big(\big(\tfrac{z^2+1}{2z}\big), \big(\tfrac{z^2-1}{2iz}\big)\Big)\frac{dz}{iz}$$

Indicación: Aplicar la Fórmula de Euler y la transformación $z = z(t) = e^{it}$.

4. Calcular las siguientes integrales

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos(t)}, a > 1$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^3(2t)}{5-4\cos(2t)} dt$

(d) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos(t))^2}, a > b > 0$

(P) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin^2(t)}$

(c) $\int_0^{3\pi} \frac{dt}{1+\sin^2(t)}$

(e) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2a\cos(t)+a^2)^2},$ $|a| \neq 1$

Indicación: En algunos se debe aplicar la simetría de media onda y $R(x,y)$ debe escribirse como una función racional propia, por ejemplo (4b) realizando la división existen a,b,c y d tales que

$$\frac{x^3}{5-4x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{5-4x}$$

Evaluación de integrales impropia reales de primera especie.

(P) Sea $R > 1$ y F la función definida por

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

donde $q(z) = 1 + z^2$ no se anula sobre el eje real.

(a) Sea σ la trayectoria simple y cerrada definida por la semi circunferencia positivamente orientada $C_R = \{Re^{it} : \ 0 \leq t \leq \pi\}$ y segmento orientado desde el afijo $(-R, 0)$ al afijo $(R, 0)$. Establecer

$$\oint_\sigma F(z)dz = \frac{\pi}{e}.$$

(b) Determinar el valor mínimo de la función $f(t) = \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$ definida sobre $[0, \pi/2]$. Enseguida inferir la desigualdad de Jordan:

$$\boxed{\sin(\mathbf{t}) \geq \tfrac{\mathbf{2t}}{\pi}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{t} \leq \tfrac{\pi}{\mathbf{2}}.}$$

(c) Probar que $|e^{iz}| \leq 1$ si $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Concluir que

$$|F(z)| \leq \frac{2}{|z|^2} \qquad |z| >> R$$

(d) Fundamentar que se puede inferir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)dz = 0 \ \wedge \ \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx = \frac{\pi}{e}.$$

(e) Inferir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

(P). Indicar las condiciones que deben verificar la constante real α y los polinomios p y q, tal que si $F(z) = e^{i\alpha}\frac{p(z)}{q(z)}$, entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)dz = 0$$

6. Repetir el análisis si

(a) $F(z) = \frac{e^{2iz}}{1+z^4}$ (b) $F(z) = \frac{2z}{1+z^4}$ **(P)** $F(z) = \frac{(z^2+i)e^{2iz}}{1+z^4}$

7. Calcule las integrales si las constantes a, b son positivas y distintas. Además $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(at)}{b^2+t^2}dt$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^3\sin(t)}{(1+t^2)(9+t^2)}dt$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{t\cos(t)}{t^2-5t+6}dt$

Noviembre 2024
FPV/fpv