UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 2 ALGEBRA III 525201-1 (Comentarios/desarrollo)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 50 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de DIMENSIÓN FINITA, y B una base de V. Considere $S, T \in \mathcal{L}(V)$ isomorfismos. Demuestre que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$. **(10 puntos)**

Desarrollo: Sean $P := [T]_B^B$ y $Q := [S]_B^B$. En vista que $S, T \in \mathcal{L}(V)$ son isomorfismos, P y Q son no singulares. Además, recordamos que $[T \circ S]_B^B = PQ$. De esta manera, para establecer que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$ es suficiente con probar que PQ y QP tienen sus polinomios característicos p_{PQ} y p_{QP} tienen las mismas raíces. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos

$$\begin{aligned} p_{PQ}(\lambda) &= \det(PQ - \lambda I) = \det(P(QP - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(QP - \lambda I)\det(P^{-1}) = \det(QP - \lambda I) = p_{QP}(\lambda). \end{aligned}$$

Luego, en vista que $p_{PQ} = p_{QP}$, se deduce que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

Problema 2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, tal que **(10 puntos)**

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo B y C las correspondientes BASES CANÓNICAS de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$. Considerando $U := \langle\{(1,1,0,0), (1,2,-1,1)\}\rangle$, determine el SUBESPACIO VECTORIAL NO NULO W de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$W \subseteq \operatorname{Im}(T) \quad \wedge \quad T(U) \cap W = \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Desarrollo: Tenemos que $T(U) = \langle\{T(1,1,0,0), T(1,2,-1,1)\}$ (¿POR QUÉ?). Teniendo presente las propiedades de matriz representante y B, C son bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, resulta

$$[T(1,1,0,0)]_C = [T]_B^C\,[(1,1,0,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow T(1,1,0,0) = (2,1,1),$$

$$[T(1,2,-1,1)]_C = [T]_B^C\,[(1,2,-1,1)]_B \ldots \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow T(1,2,-1,1) = (2,1,1).$$

Como consecuencia, $T(U) = \langle\{(2,1,1)\}\rangle$.
Por otro lado, se identifica que $\operatorname{Im}(T) = \langle\{(1,0,1), (1,1,0), (0,-1,1), (-1,-2,1)\}\rangle$.
Examinando $\operatorname{Im}(T)$ y $T(U)$, se deduce que los CANDIDATOS para definir W, son $W := \langle\{(1,0,1)\}\rangle$, $W := \langle\{(1,1,0)\}\rangle$, $W := \langle\{(0,-1,1)\}\rangle$, $W := \langle\{(-1,-2,1)\}\rangle$.

COMENTARIO: Algunos determinaron una base de $\operatorname{Im}(T)$, aunque no era necesario en este caso.
Notamos que

$$\begin{aligned} (-1,-2,1) &= (0,-1,1) - (1,1,0) \Rightarrow (-1,2,1) \text{ puede ser extraído}, \\ (0,-1,1) &= (1,0,1) - (1,1,0) \Rightarrow (0,-1,1) \text{ puede ser extraído}. \end{aligned}$$

Así, $\operatorname{Im}(T) = \langle\{(1,0,1), (1,1,0)\}\rangle$, y como $(1,0,1)$ no es múltiplo de $(1,1,0)$, se deduce que $\{(1,0,1), (1,1,0)\}$ es una BASE de $\operatorname{Im}(T)$.
Examinando $\operatorname{Im}(T)$ y $T(U)$, se deduce que algunos CANDIDATOS para definir W, son $W := \langle\{(1,0,1)\}\rangle$ o $W := \langle\{(1,1,0)\}\rangle$. También podrían ser $W := \langle\{(0,-1,1)\}\rangle$, $W := \langle\{(-1,-2,1)\}\rangle$.

Problema 3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, del cual $B := \{z_1, z_2, z_3\}$ es una base. Considere ahora $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2 & b & -4 \\ 0 & c & 3 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ parámetros}.$$

Sabiendo que $(-1, v)$ es un autopar de $[T]_B^B$, siendo $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

3.1) Determine los valores propios de T. Esto supone que debe determinar los valores de a, b, c primero. **(07 puntos)**

Desarrollo: Por definición de autopar, se debe cumplir

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2 & b & -4 \\ 0 & c & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1-a = -1 \\ 2-b = 1 \\ -c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 0\,. \end{cases}$$

Ahora procedemos a calcular los valores propios de T, que serán los mismos que los de $A := [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (estamos en dimensión finita). Para ello, consideramos la ecuación característica asociada, y calculamos sus raíces.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(3-\lambda)^2(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3\,,\, \lambda_3 = -1\,.$$

Por tanto, $\sigma(T) = \{-1, 3\}$.

3.2) Determine una base para cada Espacio Propio de $[T]_B^B$ existente. **(07 puntos)**

Desarrollo: Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$:

$$S_3 := \left\{ v \in \mathbb{K}^{3\times 1} \,:\, (A - 3\,I)v = \theta \right\}\,.$$

Escalonando, por filas, la matriz del sistema:

$$A - 3\,I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual

$$(A - 3\,I)v = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t + 2s \\ y = t \\ z = s \\ t, s \in \mathbb{K}\,. \end{cases}$$

De esta manera, se deduce que $S_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Para $\lambda_3 = -1$:

$$S_{-1} := \left\{ v \in \mathbb{K}^{3\times 1} \,:\, (A + I)v = \theta \right\}\,.$$

Escalonando, por filas, la matriz del sistema:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$(A + I)v = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{K}\,. \end{cases}$$

De esta manera, se deduce que $S_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

3.3) ¿Es T Diagonalizable? Fundamente su respuesta. En caso T sea diagonalizable, determine la base C de V que "diagonaliza" a T. Además, indique $[T]_C^C$. **(06 puntos)**

Desarrollo: Como $m_{\lambda_1} = 2\, d_{\lambda_1}$, $m_{\lambda_3} = 1\, d_{\lambda_3}$, y $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_3} = 3$, se tiene que A es Diagonalizable. Por un resultado de equivalencia, visto en clases, T entonces también es Diagonalizable.

Base C de V que Diagonaliza T.

- Como $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 3$, entonces $w_1 := z_1 + z_2$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 3$.
- Como $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ es otro vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 3$, entonces $w_2 := 2z_1 + z_3$ es otro vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 3$.
- Como $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -1$, entonces $w_3 := -z_1 + z_2$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = -1$.

Finalmente, $C := \{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de V, formada por vectores propios de T, y se tiene $[T]_C^C = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Problema 4. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de Dimensión Infinita, $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la transformación identidad. Considere además $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = \tilde{I}$. Demuestre que

4.1) T es un automorfismo. **(10 puntos)**

- Veamos que T es Inyectiva. Siendo T lineal, equivale a probar que $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_V\}$.
  Sea $z \in \mathrm{Ker}(T)$. Se tiene que $T(z) = \theta$. Entonces $z = T^2(z) = T(T(z)) = T(\theta_V) = \theta_V$, lo cual permite inferir que $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \{\theta_V\}$. En vista que $\{\theta_V\} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$, se concluye que $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_V\}$ y por tanto T es Inyectiva.
- Veamos que T es Sobreyectiva, es decir $\mathrm{Im}(T) = V$. Por definición, $\mathrm{Im}(T) \subseteq V$. Resta probar entonces la otra inclusión.
  Sea $w \in V$, fijo pero arbitrario. Deseamos determinar $u \in V$ tal que $T(u) = w$. En vista que $T(u) = T(T(w))$ (¿Por Qué?), y dado que T es Inyectiva, se deduce que $u = T(w) \in V$. Es así que se establece: $\forall\, w \in V$: $\exists\, u := T(w) \in V$: $T(u) = w$, lo cual implica que $\mathrm{Im}(T) \subseteq V$. Finalmente, se deduce que $\mathrm{Im}(T) = V$, i.e. T es Sobreyectiva.
- Conclusión: $T \in \mathcal{L}(V)$ es un Automorfismo.

Desarrollo:

4.2) $V = \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$. **(10 puntos)**

Desarrollo:

- Veamos que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \cap \mathrm{Ker}(T - \tilde{I}) = \{\theta_V\}$.
  Sea $u \in \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \cap \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$, fijo pero arbitrario. Esto implica
  $$\mathrm{Ker}(T + \tilde{I})(u) \Rightarrow T(u) + u = \theta_V\,,$$
  $$\mathrm{Ker}(T - \tilde{I})(u) \Rightarrow T(u) - u = \theta_V\,.$$
  Restando estas ecuaciones, se deduce que $2u = \theta_V$, de donde resulta $u = \theta_V$. De esta manera, se infiere que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \cap \mathrm{Ker}(T - \tilde{I}) \subseteq \{\theta_V\}$. Dado que $\{\theta_V\} \subseteq \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \cap \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$ Siempre, se deduce que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \cap \mathrm{Ker}(T - \tilde{I}) = \{\theta_V\}$.
- Por un lado, gracias a que $T + \tilde{I}, T - \tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ tenemos que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I})\,, \mathrm{Ker}(T - \tilde{I}) \subseteq V$. En consecuencia, $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) + \mathrm{Ker}(T - \tilde{I}) \subseteq V$.
- Resta probar que $V \subseteq \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) + \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$.
  Sea $z \in V$, fijo pero arbitrario. Se desea determinar $(a, b) \in \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \times \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$, tal que $z = a + b$. Procedemos a resolver este problema. Tenemos
  $$T(a) = -a \wedge T(b) = b \Rightarrow T(z) = T(a) + T(b) = -a + b = 2b - z \Rightarrow b = \frac{z + T(z)}{2} \in \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})\,.$$
  Esto permite deducir $a = \dfrac{z - T(z)}{2} \in \mathrm{Ker}(T + \tilde{I})$.
  De esta manera, se infiere que $z \in \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$. Siendo $z \in V$ fijo pero arbitrario, queda establecido que $V \subseteq \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$.
- Finalmente, se concluye que $V = \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$.