



Laboratorio 4: Interpolación polinomial y Splines cúbicos  
 Cálculo Numérico (521230)

**Observaciones**

- En esta guía se plantean tres problemas. El primero se resuelve en el video asociado al laboratorio. El segundo problema debes entregarlo. El tercer problema complementa tu formación en el curso.
- **Todos los archivos .m pueden ser descargados de Canvas, del módulo Laboratorios.**
- Te recomendamos leer esta guía antes de ver el video de resolución del problema.

Supongamos que los  $n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) pares ordenados

$$(1.1) \quad (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

son tales que  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .<sup>1</sup>

El problema de **interpolación polinomial** consiste en determinar el **único** polinomio  $p$ , de grado menor o igual que  $n$ , que satisface  $p(x_i) = y_i$  para cada  $i$  entre 0 y  $n$ .

Una **spline cúbica** que interpola los pares (1.1) es una función  $s \in C^2([x_0, x_n])$  tal que

$$s(x) = \begin{cases} q_0(x), & \text{si } x \in [x_0, x_1[, \\ q_1(x), & \text{si } x \in [x_1, x_2[, \\ \vdots & \\ q_{n-1}(x), & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

siendo  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ , polinomios de grado menor o igual que 3 que satisfacen  $q_0(x_0) = y_0$ ,  $q_1(x_1) = y_1, \dots$ ,  $q_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1}$  y  $q_{n-1}(x_n) = y_n$ .

Tanto  $p$  como  $s$  se determinan para poder aproximar valores de una función desconocida que pasa por  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  en puntos  $z_0, z_1, \dots, z_m$  entre  $x_0$  y  $x_n$ .

Denotemos por  $\mathbf{x}$  al vector cuyas componentes son  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , por  $\mathbf{y}$  al vector con componentes  $y_0, y_1, \dots, y_n$  y por  $\mathbf{z}$  al vector cuyas componentes son  $z_0, z_1, \dots, z_m$ , es decir, los valores donde deseamos evaluar a  $p$  y a  $s$ .

En OCTAVE el par de comandos **polyfit**, **polyval** permite determinar y evaluar  $p$ , mientras que el par de comandos **spline**, **ppval** permite determinar y evaluar  $s$ .

Ellos son tales que:

**polyfit**: permite determinar  $p$ .

**Recibe**:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{n}$ .

**Retorna**: vector que contiene los coeficientes de  $p$ .

**spline**: permite determinar  $s$ .

**Recibe**:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ .

**Retorna**: vector que contiene coeficientes de  $s$ . Si  $\mathbf{y}$  tiene la misma cantidad de elementos que  $\mathbf{x}$ , OCTAVE utiliza la condición no-nodo (continuidad de  $s'''$  en  $x_1$  y  $x_{n-1}$ ) para determinar  $s$ .

**ppval**: permite evaluar  $s$ .

**Recibe**: vector que retorna **spline** y  $\mathbf{z}$ .

**Retorna**: los valores de  $s$  en  $\mathbf{z}$ .

**polyval**: permite evaluar  $p$ .

**Recibe**: vector que retorna **polyfit** y  $\mathbf{z}$ .

**Retorna**: los valores de  $p$  en  $\mathbf{z}$ .

<sup>1</sup>Para llamar a las funciones en OCTAVE no es necesario que los valores estén ordenados, esta suposición es solo para facilitar la escritura de esta guía de laboratorio.

**Problema resuelto en video:**

La siguiente tabla muestra los valores de viscosidad del ácido sulfúrico (en milipascal por segundos) como función de la concentración (en porciento de masa),

Concentración	0	20	40	60	80	100
Viscosidad	0.89	1.40	2.51	5.37	17.4	24.2

Se quiere, con ayuda de esta tabla, determinar la viscosidad de ácido sulfúrico cuando la concentración es del 5 % y del 63 %.

---

**Problema a entregar:** La siguiente tabla muestra los valores de *emitancia térmica* o *emisividad térmica* del tungsteno como función de la temperatura (en grados Kelvin).

Temperatura	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Emisividad térmica	0.024	0.035	0.046	0.058	0.067	0.083	0.097	0.111	0.125

Nuestro objetivo es, con ayuda de la tabla anterior, determinar valores aproximados para la emisividad térmica del tungsteno a 350, 550 y 850 grados Kelvin.

Escribe un rutero en OCTAVE, `tungsteno.m`, en el que:

- 1) determines el polinomio  $p$  que interpola a los pares ordenados en la tabla,
- 2) evalúes al polinomio en 350, 550 y 850,
- 3) realices un gráfico del polinomio, evaluado en 1000 puntos entre 300 y 1100 y en el que también incluyas los pares en la tabla.

Observa que en los subintervalos  $[300, 400]$  y  $[1000, 1100]$   $p$  tiene un comportamiento distinto al que tiene en  $[400, 1000]$ . Ya sabemos que si los puntos a interpolar son muchos y equidistantes, el polinomio de interpolación puede alejarse mucho de la función a interpolar, sobre todo en puntos cercanos a los extremos del intervalo. Esto se conoce como fenómeno de Runge. Los valores 550 y 850 no son cercanos a los extremos del intervalo, pero 350 sí lo es.

En el rutero `tungsteno.m` realiza ahora lo siguiente:

- 1) determina la spline cúbica  $s$  que interpola los datos en la tabla, evalúala en 350, 550 y 850,
- 2) calcula  $|p(350) - s(350)|$ ,  $|p(550) - s(550)|$  y  $|p(850) - s(850)|$ .

Observa que la diferencia en 350 es casi 10 veces mayor que en 550 y 850.

**Forma de entrega:** Archivo `tungsteno.m`.

### Problema adicional para el trabajo con OCTAVE , no debes entregarlo:

Del mismo modo que se pueden calcular polinomios que interpolen a funciones reales en ciertos puntos de su dominio, es posible aproximar funciones  $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  por funciones polinomiales por tramos  $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  que interpolen a  $F$  en puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  dados.

La función OCTAVE `interp2` permite, dados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $y_0, y_1, \dots, y_n$  y  $F(x_0, y_0), F(x_1, y_1), \dots, F(x_n, y_n)$ , determinar una función polinomial por tramos  $q$  que interpola a  $F$ .

En `ejemplo_interpolacion2D.m` puedes ver un ejemplo de uso de esta función, así como de las funciones `meshgrid`, `surf` y `mesh` que permiten graficar funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ .

La función a interpolar es una que describe la carga de electrones en la posición  $(x, y)$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$  de un semiconductor que ha sido dopado con el objetivo de cambiar sus propiedades eléctricas. Esta función es evaluada en `concentracion_semiconductor.m`.

Ahora podrías, por ejemplo,

- Determinar un nuevo polinomio que interpole a  $F$  en más puntos que el polinomio del ejemplo y compararlo con el polinomio ya calculado.
- El último parámetro a la función `interp2` en el ejemplo es `'linear'`, pero otros posibles valores son `'cubic'`, `'pchip'`, `'spline'`, etc. Puedes investigar la diferencia entre ellos con el comando `help` de OCTAVE y, además, comparar los polinomios que se obtienen con uno u otro.