UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 5 (OPCIONAL) ALGEBRA III 525201-0 - COMENTARIOS

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada problema tiene un puntaje máximo de **15 puntos**.

Problema I. Sea $X \neq \emptyset$. Se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ por

$$\forall\, A, B, C, D \subseteq X : (A, B)\, \mathcal{R}\, (C, D) \quad \Leftrightarrow \quad \big(A \subseteq C \quad \wedge \quad D \subseteq B \big).$$

1. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$.

   Desarrollo: Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva.
   Refleja: Sean $A, B \subseteq X$. Como $A \subseteq A$ y $B \subseteq B$, se cumple $(A, B)\, \mathcal{R}\, (A, B)$. Así, en vista que A y B son fijas pero arbitrarias, se concluye que $\mathcal{R}$ es refleja.

   Antisimétrica: Sean $A, B, C, D \subseteq X$ tales que $(A, B)\, \mathcal{R}\, (C, D)$ y $(C, D)\, \mathcal{R}\, (A, B)$. Esto significa que

   $$\big(A \subseteq C \quad \wedge \quad D \subseteq B \big) \wedge \big(C \subseteq A \quad \wedge \quad B \subseteq D \big) \Rightarrow \big(A = C \wedge B = D \big) \Rightarrow (A, B) = (C, D).$$

   Luego, como $(A, B), (C, D) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ son fijos pero arbitrarios, se concluye que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

   Transitiva: Sean $(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ tales que $(A, B)\, \mathcal{R}\, (C, D)$ y $(C, D)\, \mathcal{R}\, (E, F)$. Esto significa que

   $$\big(A \subseteq C \quad \wedge \quad D \subseteq B \big) \wedge \big(C \subseteq E \quad \wedge \quad F \subseteq D \big) \Rightarrow \big(A \subseteq E \quad \wedge \quad F \subseteq B \big) \Rightarrow (A, B)\, \mathcal{R}\, (E, F).$$

   Del hecho que $(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ son fijos pero arbitrarios, se infiere que $\mathcal{R}$ es transitiva.

   Conclusión: $\mathcal{R}$ es una relación de orden. Por ello, a partir de ahora, la denotaremos por $\leq$.

2. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden parcial o total? Justifique su respuesta apropiadamente.

   Desarrollo: Tenemos $(\emptyset, \emptyset), (X, X) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, y son tales que

   $$(\emptyset, \emptyset) \nleq (X, X) \wedge (X, X) \nleq (\emptyset, \emptyset),$$

   es decir, son elementos no comparables. Por tanto, $\leq$ es una Relación de orden parcial.

3. Determine si esta relación de orden admite elemento(s) minimal(es) maximal(es), mínimo, máximo. Indique cuáles son éstos en cada caso, si existen.

   Desarrollo: Primero notemos que $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$: $\emptyset \subseteq A \subseteq X$. Esto nos permite establecer que

   $$\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : (\emptyset, X) \leq (A, B) \Rightarrow (\emptyset, X) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \text{ es elemento mínimo}.$$
   $$\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : (A, B) \leq (X, \emptyset) \Rightarrow (X, \emptyset) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \text{ es elemento máximo}.$$

   Es sabido que los elementos máximo y mínimo, si existen, son únicos. Además, también se asegura que $(X, \emptyset)$ y $(\emptyset, X)$ son elementos maximal y minimal, respectivamente.

   Veamos si existen otros elementos minimales y maximales: Sea $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$.
   Caso 1: $(A, B) \neq (\emptyset, X)$. Como $(\emptyset, X) \leq (A, B)$, se deduce que (A, B) no puede ser elemento minimal.
   Caso 2: $(A, B) \neq (X, \emptyset)$. Dado que $(A, B) \leq (X, \emptyset)$, se infiere que (A, B) no puede ser elemento maximal.

   Conclusión: en este caso, $(\emptyset, X)$ es el único elemento minimal, mientras que $(X, \emptyset)$ es el único elemento maximal.

Problema II. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{Z}^+$, y $T \in \mathcal{L}(V)$.

1. Demostrar que:

   (a) $\forall\, k \in \mathbb{N} : \operatorname{Ker}(T^k) \subseteq \operatorname{Ker}(T^{k+1})$,

   (b) $\forall\, k \in \mathbb{N} : \operatorname{Im}(T^{k+1}) \subseteq \operatorname{Im}(T^k)$.

   Demostración: Sea $k \in \mathbb{N}$ y $z \in V$. Se verifica:

$$z \in \operatorname{Ker}(T^k) \Rightarrow T^k(z) = \theta \Rightarrow T^{k+1}(z) = T\big(T^k(z)\big) = T(\theta) = \theta \Rightarrow z \in \operatorname{Ker}(T^{k+1}).$$

$$z \in \operatorname{Im}(T^{k+1}) \Rightarrow \exists\, w \in V : z = T^{k+1}(w) = T^k\big(T(w)\big) \Rightarrow \exists\, u := T(w) \in V : z = T^k(u) \Rightarrow z \in \operatorname{Im}(T^k).$$

   Finalmente, considerando en cada caso que z es fijo pero arbitrario, al igual que $k \in \mathbb{N}$, se concluyen (1a) y (1b), respectivamente.

2. Si T no es inyectivo, demuestre que

   (a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq n_0 : \operatorname{Ker}(T^k) = \operatorname{Ker}(T^{n_0})$,

   (b) $\exists\, m_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq m_0 : \operatorname{Im}(T^k) = \operatorname{Im}(T^{m_0})$.

   ¿Qué se puede decir en el caso T es monomorfismo?

   Demostración (Caso T no es inyectivo)
   Existencia: Supongamos, por reducción al absurdo, que no existen dichos enteros positivos. Esto implica que:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : 0 < n(T) < \cdots < n(T^k) < n(T^{k+1}) < \cdots < n \Rightarrow \exists\, \tilde{k} \in \mathbb{N} : n(T^{\tilde{k}}) = n < n\,(\rightarrow\leftarrow),$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : 0 < \cdots < r(T^{k+1}) < r(T^k) < \cdots < r(T) < n \Rightarrow \exists\, \hat{k} \in \mathbb{N} : r(T^{\hat{k}}) = 0 > 0\,(\rightarrow\leftarrow),$$

   De esta manera, se garantiza la existencia de $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$n(T^{n_0}) = n(T^{n_0+1}) \wedge r(T^{m_0}) = r(T^{m_0+1}) \underset{(1b)}{\overset{(1a)}{\Leftrightarrow}} \operatorname{Ker}(T^{n_0}) = \operatorname{Ker}(T^{n_0+1}) \wedge \operatorname{Im}(T^{m_0+1}) = \operatorname{Im}(T^{m_0}).$$

   Demostremos ahora $\forall\, k \geq n_0 : \operatorname{Ker}(T^k) = \operatorname{Ker}(T^{n_0})$.
   Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > n_0$. Esto permite expresar $k = n_0 + i$, para algún $i \in \mathbb{N}$. De esta forma, la Tesis puede expresarse de manera equivalente como: $\forall\, j \in \mathbb{N} : \operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1}) = \operatorname{Ker}(T^{n_0+j})$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Por (1a), tenemos que $\operatorname{Ker}(T^{n_0+j}) \subseteq \operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1})$. Resta probar entonces que $\operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(T^{n_0+j})$.

   Sea $z \in \operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1})$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\theta = T^{n_0+j+1}(z) = T^{n_0+1}\big(T^j(z)\big) &\Rightarrow T^j(z) \in \operatorname{Ker}(T^{n_0+1}) = \operatorname{Ker}(T^{n_0}) \\ &\Rightarrow T^{n_0+j}(z) = T^{n_0}\big(T^j(z)\big) = \theta \Rightarrow z \in \operatorname{Ker}(T^{n_0+j}).\end{aligned}$$

   Así, como $z \in \operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1})$ es fijo pero arbitrario, se infiere que $\operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(T^{n_0+j})$, con lo cual se establece $\operatorname{Ker}(T^{n_0+j+1}) = \operatorname{Ker}(T^{n_0+j})$. Ahora, como $j \in \mathbb{N}$ es fijo pero arbitrario, se concluye $\forall\, k \geq n_0 : \operatorname{Ker}(T^k) = \operatorname{Ker}(T^{n_0})$, y con ello queda probado (2a).

   Demostremos ahora $\forall\, k \geq m_0 : \operatorname{Im}(T^k) = \operatorname{Im}(T^{m_0})$.
   En vista que $r(T^{m_0}) = r(T^{m_0+1})$, aplicando el Teorema de la dimensión, se desprende que $n(T^{m_0}) = n(T^{m_0+1})$, y dado que $\operatorname{Ker}(T^{m_0})$ es subespacio vectorial de $\operatorname{Ker}(T^{m_0+1})$, se infiere que $\operatorname{Ker}(T^{m_0}) = \operatorname{Ker}(T^{m_0+1})$. Ahora, aplicando el razonamiento anterior (considerando m_0 en lugar de n_0), se concluye que $\forall\, j \in \mathbb{N} : \operatorname{Ker}(T^{m_0+j+1}) = \operatorname{Ker}(T^{m_0+j})$. Invocando nuevamente el Teorema de la dimensión, de demuestra que $\forall\, j \in \mathbb{N} : r(T^{m_0+j}) = r(T^{m_0+j+1})$, y como $\operatorname{Im}(T^{m_0+j+1})$ es subespacio vectorial de $\operatorname{Im}(T^{m_0+j})$, se deduce que $\forall\, k \geq m_0 : \operatorname{Im}(T^k) = \operatorname{Im}(T^{m_0})$, y así queda probado (2b).

Demostración (Caso T es inyectivo)
Como estamos en dimensión finita, que T sea inyectiva (monomorfismo) equivale a decir que T es sobreyectiva (epimorfismo). Esto significa que $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta\}$, $\mathrm{Im}(T) = V$, y en consecuencia $n_0 = 1 = m_0$.

3. Si n_0 y m_0 son los **menores enteros positivos** que verifican las propiedades (2a) y (2b), entonces $n_0 = m_0$.

   Hint: Tenga en cuenta el Teorema de la dimensión.

   Demostración: Primero, notemos (2a) es equivalente a decir

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\, k \,\geq\, n_0 \,:\, n(T^{n_0}) \,=\, n(T^k)\,. \tag{1}$$

   Asimismo, (2b) equivale a decir

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\, k \,\geq\, m_0 \,:\, r(T^k) \,=\, r(T^{m_0})\,. \tag{2}$$

   Luego, invocando el Teorema de la dimensión, se tiene que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, n \,=\, n(T^{n_0}) \,+\, r(T^{n_0}) \,=\, n(T^k) \,+\, r(T^k) \,=\, n(T^{m_0}) \,+\, r(T^{m_0})\,. \tag{3}$$

   Se tiene así, de (1) y (3)

$$\forall\, k \,\geq\, n_0 \,:\, r(T^k) \,=\, r(T^{n_0}) \,\Rightarrow\, n_0 \,\geq\, m_0\,, \tag{4}$$

   ya que m_0 es el menor entero positivo que valida (2). Similarmente, de (2) y (3) resulta

$$\forall\, k \,\geq\, m_0 \,:\, n(T^k) \,=\, n(T^{m_0}) \,\Rightarrow\, m_0 \,\geq\, n_0\,, \tag{5}$$

   ya que n_0 es el menor entero positivo que valida (1). Finalmente, de (4) y (5) se concluye que $n_0 = m_0$.

Problema III. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, y sea f una forma bilineal en V.

1. Sea $z \in V$. Demuestre que la aplicación L_z, definida por $V \ni w \mapsto L_z(w) := f(w,z)$, es un elemento de V'.

   Demostración: Sean $w, u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos $\alpha\, w \,+\, u \,\in\, V$ y

$$L_z(\alpha\, w \,+\, u) \,=\, f(\alpha\, w \,+\, u, z) \,=\, \alpha\, f(w,z) \,+\, f(u,z) \,=\, \alpha\, L_z(w) \,+\, L_z(u)\,.$$

   Luego, como $w, u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ son fijos pero arbitrarios, se concluye que

$$\forall\, w, u \in V \,:, \alpha \in \mathbb{R} \,:\, L_z(\alpha\, w \,+\, u) \,=\, \alpha\, L_z(w) \,+\, L_z(u)\,,$$

   i.e. para cada $z \in V$, $L_z \in V'$.

2. Si se denota por $L : V \to V'$ la aplicación definida por $V \ni z \mapsto L(z) := L_z$, demuestre que L es lineal.

   Demostración: Sean $z, x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Siendo V un espacio vectorial real, $\lambda\, z \,+\, x \,\in\, V$. Por mostrar ahora que $L(\lambda\, z \,+\, x) \,=\, \lambda\, L(z) \,+\, L(x)$ en V'. Consideremos $y \in V$. Se tiene

$$L(\lambda\, z \,+\, x)(y) \,=\, L_{\lambda\, z \,+\, x}(y) \,=\, f(y, \lambda\, z \,+\, x) \,=\, \lambda\, f(y,z) \,+\, f(y,x) \,=\, \lambda\, L_z(y) \,+\, L_x(y) \,=\, \big(\lambda\, L_z \,+\, L_x\big)(y)\,.$$

   Esto implica que $\forall\, y \in V \,:\, L(\lambda\, z \,+\, x)(y) \,=\, \big(\lambda\, L_z \,+\, L_x\big)(y)$, i.e. $L(\lambda\, z \,+\, x) \,=\, \lambda\, L_z \,+\, L_x$. En vista que $z, x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ son fijos pero arbitrarios, se concluye que
   $\forall\, z, x \in V \,:\, \forall\, \lambda \,\in \mathbb{R} \,:\, L(\lambda\, z \,+\, x) \,=\, \lambda\, L_z \,+\, L_x \,=\, \lambda\, L(z) \,+\, L(x)$, i.e. $L \in \mathcal{L}(V, V')$.

3. Demuestre que f es no degenerada si y sólo si L es un isomorfismo.

Problema IV. Se desea identificar la superficie cuadrática de ecuación:

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0\,.$$

Para ello, primero exprese esta forma cuadrática matricialmente, identificando su matriz asociada A. Luego, determine la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A. Luego, efectúe el cambio de variables que induce P (ecuaciones de rotación) y escribir la ecuación en los nuevos ejes. En caso sea necesario, indique las ecuaciones de traslación que permitan identificar la superficie cuadrática, precisando su nombre.

Desarrollo: Primero, expresamos la ecuación en forma matricial.

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - (6\ 6\ 4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + 9 = 0\,.$$

Consideremos $A := \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Se deduce (¡Hacerlo!) que $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$, de donde $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, con $m_{\lambda_1} = 2$ y $m_{\lambda_2} = 1$. El espacio propio asociado a $\lambda_1 = -1$ es $S_{-1} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, mientras que el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 2$ es $S_2 = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$. Aplicando el Procedimiento de Gram-Schmidt (a la base de S_{-1}), se deduce que

$$\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A.

Candidato a matriz de rotación: $P := \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Como $\det(P) = -1 < 0$, no cumple la condición de Rotación antihoraria. Hay que permutar dos columnas.

Luego, la matriz de rotación (antihoraria) es $\tilde{P} := \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, con la cual se cumple $\tilde{P}^t A \tilde{P} = D := \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Ahora, definiendo la rotación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \tilde{P}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}\\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}\\ z = \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}\end{cases}$$

la ecuación cuadrática nos queda:

$$\begin{aligned}&(\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})\, D\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix} - (6\ 6\ 4)\,\tilde{P}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix} + 9 = 0\\
\Rightarrow\ & -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 2\,\tilde{z}^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\,\tilde{x} - \frac{16}{\sqrt{3}}\,\tilde{z} + 9 = 0\\
\Rightarrow\ & 2\left(\tilde{z} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \left(\tilde{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \tilde{y}^2\,.\end{aligned}$$

Si además introducimos las Ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} \hat{x} := \tilde{x} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \hat{y} := \tilde{y} \\ \hat{z} := \tilde{z} - \frac{4}{\sqrt{3}} \,, \end{cases}$$

la ecuación de la superficie cuadrática nos queda:

$$2\,\hat{z}^2 - 1 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \,,$$

la cual corresponde a un Hiperboloide de dos hojas.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 28.08.2020

RBP/rbp 14.08.2020