MAT1610 - Clase 28

La integral definida

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

22 de mayo del 2024

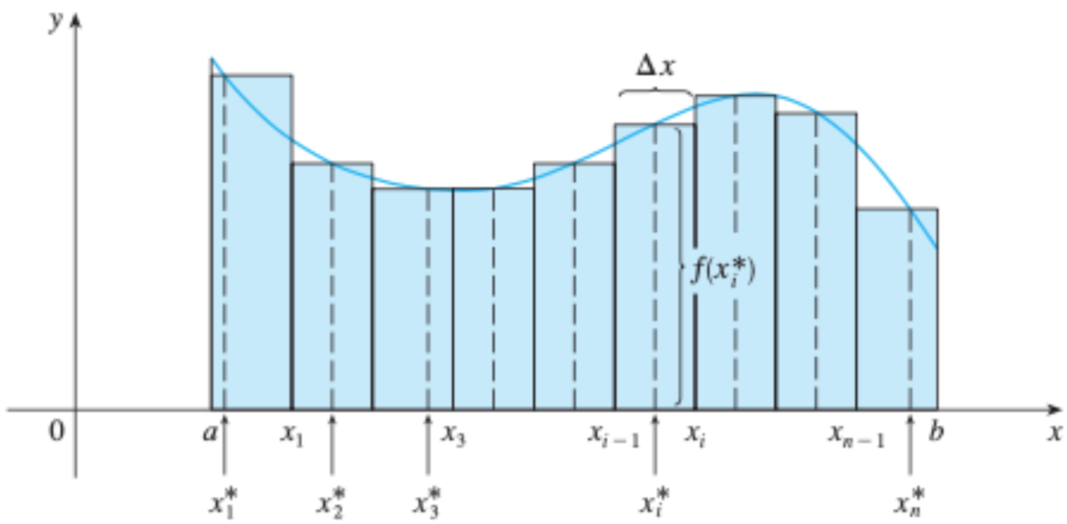
Objetivo

- Comprender lo que es una suma de Riemann de integral definida y cómo se relaciona con el cálculo de área.

Área bajo la curva

Cuando se calcula un área, surge un límite de la forma

$$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$



Definición de la integral definida

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$.

Sean $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_n(=b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es integrable sobre $[a, b]$.

Definición de la integral definida

El significado preciso del límite que define a la integral es:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier elección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

Definición de la integral definida

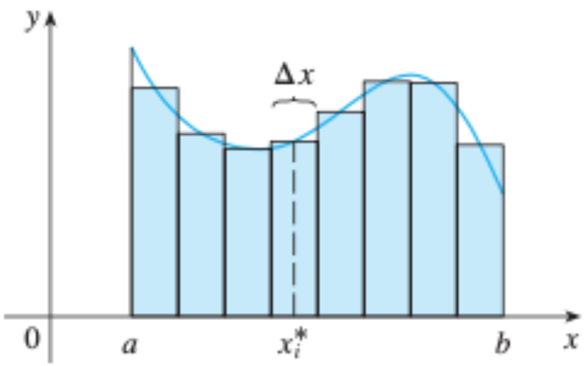


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\Sigma\, f(x_i^*)\, \Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

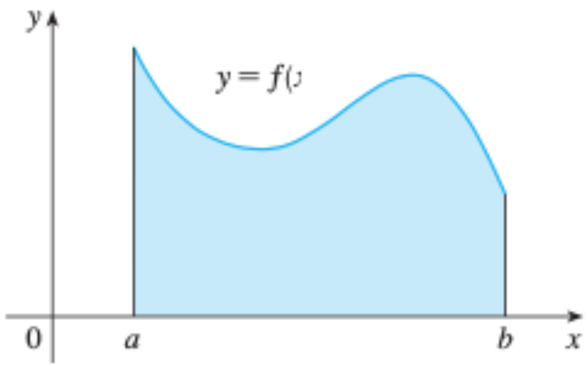


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la curva $y = f(x$ desde a hasta b.

¿Qué pasa cuando f toma valores negativos?

Definición de la integral definida

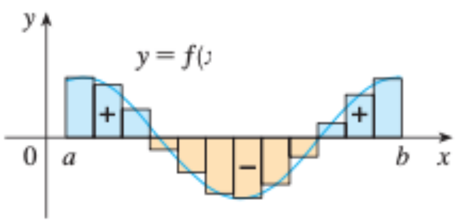


FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación al área neta.

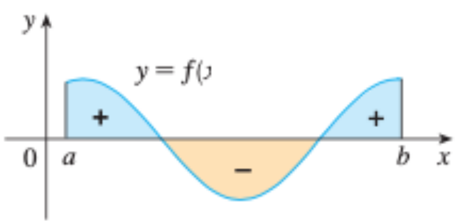


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los negativos de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en azul menos las áreas de los rectángulos en oro).

Cuando tomamos el límite de esas sumas de Riemann, obtenemos una integral definida que puede interpretarse como un **área neta**; es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{A}_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, y A_2 corresponde al área de la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

Teorema

Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Teorema

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{y} \qquad x_i = a + i\,\Delta x$$

Ejemplo 1: Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^3 + x_i \cdot sen(x_i)\right) \Delta x$$

como una integral sobre el intervalo $[0, \pi]$.

Ejemplo 2: Evalúe las siguientes integrales interpretando cada una en términos de áreas:

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

b) $\int_0^3 (x - 1) dx$

Ejemplo 3: Evalúe

$$\int_0^3 (x^3 - 6x) dx$$

Propiedades de integrales definidas

Propiedad 1:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Propiedad 2:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Propiedades de integrales definidas

Propiedad 3:

$$\int_a^b c\, dx = c\,(b-a)$$ Donde c es cualquier constante

Propiedad 4:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Propiedad 5:

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$ Donde c es cualquier constante

Propiedad 6:

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Conclusión

- Aprendimos sobre suma de Riemann y vimos propiedades de integrales definidas

Libro guía

- Págs. 371-377.