Integración en el espacio producto.

- **Clases monótonas.**
- **Integración en el espacio producto.**

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ son dos espacios de medidas y $Z := X \times Y$ es el producto cartesiano de X e Y.

Recordemos lo que hemos visto la clase anterior:

- $A \times B$ con $A \in \mathscr{X}$ y $B \in \mathscr{Y}$: rectángulo medible.
- $\mathscr{Z}_0 := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k),\ A_k \in \mathscr{X},\ B_k \in \mathscr{Y} \right\}$: álgebra.
- $\mathscr{Z}$: σ-álgebra generada por los rectángulos medibles.
- $\exists \pi : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}}$ medida producto tal que $\pi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$.
- $\forall E \subset Z, \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x := \{y \in Y :\ (x, y) \in E\} \\ E^y := \{x \in X :\ (x, y) \in E\} \end{array} \right\}$: secciones de E.
- $\forall f : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{R}},\ f_x := f(x, \cdot),\ f^y := f(\cdot, y)$: secciones de f.
- $E \in \mathscr{Z} \implies E_x \in \mathscr{Y}\ \forall x \in X$ y $E^y \in \mathscr{X}\ \forall y \in Y$.
- $f \in M(Z, \mathscr{Z}) \implies \left\{ \begin{array}{ll} f_x \in M(Y, \mathscr{Y}) & \forall x \in X, \\ f^y \in M(X, \mathscr{X}) & \forall y \in Y, \end{array} \right.$

Clases monótonas.

Lema: Sean E, F y $E_\alpha \subset Z \quad \forall \alpha \in A$.

(a) $(E \setminus F)_x = E_x \setminus F_x$ y $(E \setminus F)^y = E^y \setminus F^y$.

(b) $\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha\in A} (E_\alpha)_x$ y $\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^y = \bigcup_{\alpha\in A} (E_\alpha)^y$.

(c) $\left(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha\in A} (E_\alpha)_x$ y $\left(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^y = \bigcap_{\alpha\in A} (E_\alpha)^y$.

Dem.: **(a, b)** **Ej. 10.I.** **(c)** **Ej.** ■

Def.: Sea $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$. $\mathscr{M}$ es una **clase monótona** en X si:

(1) $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n \in \mathscr{M} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies E \in \mathscr{M}$;

(2) $F = \downarrow\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ con $F_n \in \mathscr{M} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies F \in \mathscr{M}$.

Lema: La intersección de clases monótonas en X es una clase monótona en X.

Dem.: **Ej. 2.V.**

Def.: Sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. La **clase monótona generada por** $\mathscr{A}$ es la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathscr{A}$.

La definición anterior es correcta, pues siempre hay al menos una clase monótona que contiene a $\mathscr{A}$: $\mathscr{P}(X)$,

Lema: (a) Las σ-álgebras son clases monótonas.

(b) Dada $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, sean $\mathscr{S}$ la σ-álgebra y $\mathscr{M}$ la clase monótona generadas por $\mathscr{A}$. Entonces, $\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$.

Dem.: (a) $\boxed{\textbf{Ej. 2.V.}}$ **(b)** $\boxed{\textbf{Ej. 2.W.}}$ ■

Lema [de la clase monótona (L.C.M.)]: Si $\mathscr{A}$ es un álgebra, entonces la clase monótona y la σ-álgebra generadas por $\mathscr{A}$ coinciden.

Dem.: Ver la demostración del Lema 10.7 del texto de Bartle. ■

Corol.: Sea $\mathscr{A}$ un álgebra y $\mathscr{S}$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$.
Si $\mathscr{M}$ es una clase monótona y $\mathscr{M} \supset \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{M} \supset \mathscr{S}$.

Dem.: $\mathscr{A}$ álgebra $\overset{\text{L.C.M.}}{\Longrightarrow}$ $\mathscr{S}$ es la clase monótona generada por $\mathscr{A}$.
Por lo tanto, como $\mathscr{M}$ es una clase monótona y $\mathscr{M} \supset \mathscr{A} \implies \mathscr{M} \supset \mathscr{S}$. ■

Integración en el espacio producto.

Lema: Sean μ y ν σ-finitas. Dado $E \in \mathscr{Z}$, sean

$$\begin{aligned} f : X &\to \overline{\mathbb{R}}, \\ x &\mapsto \nu(E_x), \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : Y &\to \overline{\mathbb{R}}, \\ y &\mapsto \mu(E^y). \end{aligned}$$

Entonces, f y g son medibles y

$$\int_X f\, d\mu = \pi(E) = \int_Y g\, d\nu.$$

Dem.: Hacemos la demostración en dos pasos.

- **Paso 1:** Consideremos primero el caso particular en que μ y ν son finitas:

$$\mu(X) < \infty \quad \text{y} \quad \nu(Y) < \infty \implies \pi(X \times Y) = \mu(X)\,\nu(Y) < \infty.$$

Sea $\boxed{\mathscr{M} := \left\{ E \in \mathscr{Z} \,:\, f,\, g \text{ medibles y } \int_X f\, d\mu = \pi(E) = \int_Y g\, d\nu \right\}.}$

La afirmación de este lema (que es lo que queremos demostrar) es que $\mathscr{Z} \subset \mathscr{M}$.

Para demostrarlo vamos a usar el corolario anterior. Para ello debemos verificar que se cumplen sus dos hipótesis:

(a) $\mathscr{M} \supset \mathscr{Z}_0$ y

(b) $\mathscr{M}$ es una clase monótona.

(a) Veamos que $\mathscr{M} \supset \mathscr{Z}_0$.

Recordemos que si $A \in \mathscr{X}$ y $B \in \mathscr{Y}$, entonces

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \emptyset, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \nu\big((A \times B)_x\big) = \left\{ \begin{array}{ll} \nu(B), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{array} \right\} = \chi_A(x)\, \nu(B).$$

Análogamente, $\nu\big((A \times B)^y\big) = \chi_B(y)\, \mu(A)$.

Sea $E \in \mathscr{Z}_0 \implies E = \biguplus_{k=1}^n (A_k \times B_k)$ con $A_k \in \mathscr{X}$ y $B_k \in \mathscr{Y}$,

$\implies f(x) := \nu(E_x) = \sum_{k=1}^n \nu\big((A_k \times B_k)_x\big) = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x)\, \nu(B_k)$.

Análogamente, $g(y) := \mu(E^y) = \sum_{k=1}^n \chi_{B_k}(y)\, \mu(A_k)$.

Entonces, f y g son medibles y

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{k=1}^n \Big(\int_X \chi_{A_k}\, d\mu \Big)\, \nu(B_k) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\mu(A_k)\, \nu(B_k)}_{\pi(A_k \times B_k)} = \pi(E).$$

Análogamente $\int_Y g\, d\nu = \pi(E)$.

Por lo tanto, $E \in \mathscr{M} \implies \mathscr{Z}_0 \subset \mathscr{M}$.

(b) Veamos que $\mathscr{M}$ es una clase monótona. Para ello, hay que demostrar que $\mathscr{M}$ satisface los dos axiomas de la definición de clase monótona. El primero es:

(1) $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n \in \mathscr{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies E \in \mathscr{M}$.

Sea $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n \in \mathscr{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sean $f_n(x) := \nu\big((E_n)_x\big)$ y $g_n(y) := \mu\big((E_n)^y\big), \quad n \in \mathbb{N}$.

$E_n \in \mathscr{M} \implies f_n,\ g_n$ medibles y $\int_X f_n\, d\mu = \pi(E_n) = \int_Y g_n\, d\nu, \ \ n \in \mathbb{N}$.

Sean $f(x) := \nu\big(E_x\big)$ y $g(y) := \mu\big(E^y\big)$.

$\overset{\text{Ej}}{\implies}$ $f_n \nearrow f$ y $g_n \nearrow g \implies f,\ g$ medibles y, aplicando **T.C.M.** dos veces,

$$\int_X f\, d\mu = \lim_n \int_X f_n\, d\mu = \underbrace{\lim_n \pi(E_n)}_{\pi(E)} = \lim_n \int_Y g_n\, d\nu = \int_Y g\, d\nu,$$

donde también hemos usado que π es una medida y $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Entonces, $E \in \mathscr{M}$.

El segundo axioma de la definición de clase monótona es:

(2) $F = \downarrow\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ con $F_n \in \mathscr{M} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies F \in \mathscr{M}$.

La demostración es similar, salvo que se usa **T.C.D.** en vez de **T.C.M.** y que las medidas son finitas para poder aplicar **T.C.D.** y que $\lim_n \pi(F_n) = \pi(F)$. **Ej.**

- **Paso 2:** Consideremos ahora el caso en que μ y ν son σ-finitas:

$$X =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ con } \mu(X_n) < \infty, \quad Y =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \text{ con } \nu(Y_n) < \infty$$

$$\Longrightarrow \; Z =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \text{ con } Z_n := X_n \times Y_n \text{ y } \pi(Z_n) = \mu(X_n)\,\nu(Y_n) < \infty.$$

Sea $E \in \mathscr{Z}$. Vamos a demostrar que $E \in \mathscr{M}$ y por lo tanto el lema.

$$E =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap Z_n)$$

$$\Longrightarrow \; E_x =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap Z_n)_x \quad \text{y} \quad E^y =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap Z_n)^y.$$

Sean $f_n(x) := \nu\big((E \cap Z_n)_x\big)$ y $g_n(x) := \mu\big((E \cap Z_n)^y\big), \quad n \in \mathbb{N}$.

Como $\mu(X_n) < \infty$ y $\nu(Y_n) < \infty$, aplicamos lo demostrado en el **Paso 1:**

$$f_n,\ g_n \text{ medibles} \quad \text{y} \quad \int_X f_n\, d\mu = \pi(E \cap Z_n) = \int_Y g_n\, d\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con una demostración similar a la del **Paso 1 (b),** se tiene que

$f_n \nearrow f$ y $g_n \nearrow g \implies f,\ g$ medibles y, aplicando **T.C.M.** dos veces,

$$\int_X f\, d\mu = \lim_n \int_X f_n\, d\mu = \underbrace{\lim_n \pi(E \cap Z_n)}_{\pi(E)} = \lim_n \int_Y g_n\, d\nu = \int_Y g\, d\nu,$$

donde hemos usado que π es una medida y $E =\uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap Z_n)$.

Entonces, $E \in \mathscr{M}$. $\blacksquare$

Tomando en cuenta que:

- $\pi(E) = \int_{X\times Y} \chi_E \, d\pi,$

- $\int_X f \, d\mu = \int_X \nu\big(E_x\big) \, d\mu(x) = \int_X \left[\int_Y \chi_{E_x}(y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x)$

$$\overset{\text{Ej.}}{=} \int_X \left[\int_Y \left(\chi_E\right)_x(y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x),$$

- $\int_Y g \, d\nu = \int_Y \mu\big(E^y\big) \, d\nu(y) = \int_Y \left[\int_X \chi_{E^y}(x) \, d\mu(x) \right] d\nu(y)$

$$\overset{\text{Ej.}}{=} \int_Y \left[\int_X \left(\chi_E\right)^y(x) \, d\mu(x) \right] d\nu(y),$$

el resultado de este lema puede reescribirse asi:

$$\boxed{\int_X \left[\int_Y \left(\chi_E\right)_x d\nu \right] d\mu = \int_{X\times Y} \chi_E \, d\pi = \int_Y \left[\int_X \left(\chi_E\right)^y d\mu \right] d\nu.}$$

Es decir que el lema establece la igualdad entre la integral doble y ambas integrales iteradas, en el caso en el que el integrando sea la función carcacterística de un conjunto medible.

En la clase siguiente, extenderemos este resultado a funciones más generales.