TAREAS 2 Y 3 DE 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II (2023-1)

LEONARDO E. FIGUEROA

Resumen. Aquí hay 2 problemas con la misma ponderación. Conteste todas las que desee, pero los 2 de mayor puntaje formarán sus tareas 2 y 3 y la 1 de menor puntaje será ignorada.

Problema A (Ejemplo computacional de convolución en una dimensión)**.** La función $\varrho\colon R^N \to R$, definida en [Tar07, Lem. 2.4] mediante

$$\varrho(x) := \begin{cases} \exp\Bigl(-\frac{1}{1-|x|^2}\Bigr) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

es un ejemplo muy útil de función en $C_c^\infty(R^N)$ que no es idénticamente nula, tiene soporte conocido exactamente ($\overline{B^N}$) y es nonegativa. En particular, normalizando a ϱ en $L^1(R^N)$ y reescalando el resultado apropiadamente, es posible construir una sucesión suavizante especial (cf. [Tar07, Def. 3.1]), que a su vez es muy útil para probar resultados de aproximación por funciones suaves.

Sin embargo, ϱ no es atractiva para hacer cálculos explícitos. El objetivo de esta tarea es construir, en el caso unidimensional, una función análoga que sí se preste para estos fines a costa de menor regularidad.

A.1. (2 puntos) Pruebe que la función nonegativa $r\colon R \to R$ definida por

$$r(x) := \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_c^1(R)$ pero *no* a $C_c^2(R)$.

A.2. (2 puntos) Calcule $\|r\|_1$.

A.3. (2 puntos) Para $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ sea $r_n\colon R \to R$ definida por

$$r_n(x) := \|r\|_1^{-1}\, n\, r(n\, x).$$

Calcule $\|r_n\|_1$.

A.4. (6 puntos) Considere a la función escalón de Heaviside $H\colon R \to R$ definida por

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule $r_n \star H$.

A.5. (4 puntos) Sea $G\colon R \to R$ la función definida por

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Calcule $r_n \star G$. *Indicación:* Explote que $G(x) = H(x+1) - H(x-1)$.

A.6. (6 puntos) Pruebe que $\|G - r_n \star G\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Problema B (La topología más gruesa que hace que una colección de mapas sea continua)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $(Y_i)_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos [Mun00, p. 76]. Para cada $i \in I$, sea $\varphi_i \colon X \to Y_i$ un mapa. El objetivo de este problema es *construir* la topología de X más gruesa (con menos abiertos) posible pero que todavía consiga que para todo $i \in I$ el mapa φ_i sea continuo.

Para ello, comencemos definiendo a la colección

$$\mathcal{U} = \{\varphi_i^{-1}(\omega_i) \mid i \in I,\ \omega_i \text{ es un abierto de } Y_i\}.$$

Si los φ_i van a ser continuos, claramente los miembros de $\mathcal{U}$ tienen que pertenecer a la topología con la que se equipará a X.

B.1. Pruebe que $\emptyset \in \mathcal{U}$ y que $X \in \mathcal{U}$.

El ítem anterior manifiesta que $\mathcal{U}$ satisface una de las partes de la definición de una topología para X (cf. [Mun00, p. 76]). Pero $\mathcal{U}$ no es necesariamente estable con respecto a intersecciones finitas y a uniones arbitrarias. Construiremos super-colecciones de $\mathcal{U}$ que sí satisfacen esas condiciones. Sea Φ la colección de conjuntos que son intersección finita de miembros de $\mathcal{U}$. Es claro que, por construcción, Φ es estable respecto a intersecciones finitas. Sea $\mathcal{F}$ la colección de conjuntos que son unión arbitraria de miembros de Φ. Es claro que, por construcción, $\mathcal{F}$ es estable con respecto a uniones arbitrarias.

B.2. Pruebe que $\mathcal{F}$ todavía es estable respecto a intersecciones finitas. *Indicación:* Pruebe y explote que Φ es una base para una topología en X (cf. [Mun00, §13]).

El ítem anterior manifiesta que $\mathcal{F}$ es una topología para X. Cualquier topología para X que deje continuos a los mapas φ_i debe contener a la topología $\mathcal{F}$, que consiguientemente es la más gruesa de entra aquellas que producen dichas continuidades.

B.3. Sea Z un conjunto no vacío, sea $\mathcal{B}$ una base para una topología en Z y sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{B}$. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Z y sea $z \in Z$. Suponga que para todo $B \in \mathcal{B}$ que satisface $z \in B$ se tiene que existe un umbral $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies z_n \in B$. Pruebe que $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ en $\mathcal{T}$. *Indicación:* La definición de convergencia secuencial en una topología cualquiera aparece en [Mun00, p. 98].

B.4. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en la topología $\mathcal{F}$ si y solo si para todo $i \in I$ se tiene que $\varphi_i(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_i(x)$ en la topología Y_i. *Indicación:* Para la implicación de derecha a izquierda explote el ítem B.3.

Problema C (Distribución valor principal de $1/x$)**.** Considere al candidato a distribución $T \colon \mathcal{D}(R) \to R$ definido por

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(R)) \quad \langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \int_{R\setminus[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx. \tag{1}$$

Nuestro objetivo es probar que, efectivamente, el límite anterior existe y que T es una distribución. Sea entonces $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, arbitrario.

C.1. Use el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que

$$(\forall\, x \in R) \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x|\, \|\varphi'\|_\infty. \tag{2}$$

C.2. Sea $R > 0$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq [-R, R]$. Pruebe que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \int_{R \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{[-R,R] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx. \tag{3}$$

C.3. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definidas para casi todo $x \in [-R, R]$ por

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \in [-R, R] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases} \tag{4}$$

Obviamente, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi en todas partes de $[-R, R]$ a la función $f \colon [-R, R] \to R$ definida casi en todas partes del mismo intervalo por

$$f(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}. \tag{5}$$

Pruebe que existe $g \in L^1([-R, R])$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$.

C.4. Por lo obtenido en la parte C.3 y el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$f \in L^1([-R, R]) \qquad \text{y} \qquad \int_{[-R,R]} f_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{[-R,R]} f(x)\, dx \tag{6}$$

(no lo pruebe esto). Pruebe que $\langle T, \varphi \rangle$ como aparece definido en (1) efectivamente es un número finito.

C.5. Pruebe que T es una distribución.

Referencias

[Mun00] James R. Munkres, *Topology*, second ed., Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)