Conjuntos compactos.

- Conjuntos compactos y no compactos.
- Carácter intrínseco de la noción de compacidad.
- Propiedades básicas de conjuntos compactos.
- Sucesiones encajadas de compactos.
- Subconjuntos infinitos de un conjunto compacto.

Conjuntos compactos y no compactos.

Recordemos:

Def.: Un conjunto K es **compacto** si **todo** cubrimiento por abiertos de K tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplo: $(0,1)$ no es compacto.

Dem.: Necesitamos un cubrimiento por abiertos, que no tenga subcubrimiento finito:

$$(0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1}{n}, 1\right) \qquad \boxed{\textbf{Ej.}}$$

es un cubrimiento por abiertos de $(0,1)$ que no tiene un subcubrimiento finito, pues

$$\forall n_1 < \cdots < n_K \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{n_k}, 1\right) = \left(\frac{1}{n_K}, 1\right) \not\supset (0,1). \quad \square$$

Ejemplo: $\mathbb{R}$ no es compacto.

Dem.: Procedemos como antes:

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n) \qquad \boxed{\textbf{Ej.}}$$

es un cubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$ que no tiene un subcubrimiento finito, pues

$$\forall n_1 < \cdots < n_K \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=1}^{K} (-n_k, n_k) = (-n_K, n_K) \not\supset \mathbb{R}. \quad \square$$

Carácter intrínseco de la noción de compacidad.

Sea d una métrica en X. Sea $Y \subset X$ dotado de la métrica inducida.

Sea $K \subset Y$. Como la noción de compacidad se define a partir de abiertos, a priori el que K sea compacto en X o en Y podrían ser cosas distintas:

- K es compacto en X si todo cubrimiento de K por abiertos en X tiene un subcubrimiento finito;
- K es compacto en Y si todo cubrimiento de K por abiertos en Y tiene un subcubrimiento finito.

Sin embargo, veremos que la noción de compacidad es **intrínseca** de K, en el sentido de que no depende del espacio métrico, X o Y, en el que se lo mire.

Teor.: Sea $K \subset Y \subset X$. K es compacto en Y si y sólo si es compacto en X.

Por esa razón, tiene sentido decir que **un espacio métrico es compacto**, mientras que no tiene sentido decir que un espacio métrico es abierto o cerrado, ya que ambas propiedades dependen de cual es el espacio métrico que se considere.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea K compacto en Y. Veremos que K es compacto en X.

Sean G_α, $\alpha \in A$, abiertos en X : $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Como $K \subset Y$, entonces $K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y)$.

Como los conjuntos $(G_\alpha \cap Y)$ son abiertos en Y y K es compacto en Y, entonces $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$: $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} (G_{\alpha_n} \cap Y) \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_{\alpha_n}$

$\Longrightarrow$ K es compacto en X.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea K compacto en X. Veremos que K es compacto en Y.

Sean V_α, $\alpha \in A$, abiertos en Y : $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.

V_α abierto en Y $\Longrightarrow$ $\exists G_\alpha$ abierto en X : $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$

$\Longrightarrow$ $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Como los G_α son abiertos en X y K es compacto en X, entonces $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$: $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} G_{\alpha_n}$ y, como $K \subset Y$, entonces $K \subset \left(\bigcup_{n=1}^{N} G_{\alpha_n}\right) \cap Y = \bigcup_{n=1}^{N} (G_{\alpha_n} \cap Y) = \bigcup_{n=1}^{N} V_{\alpha_n}$

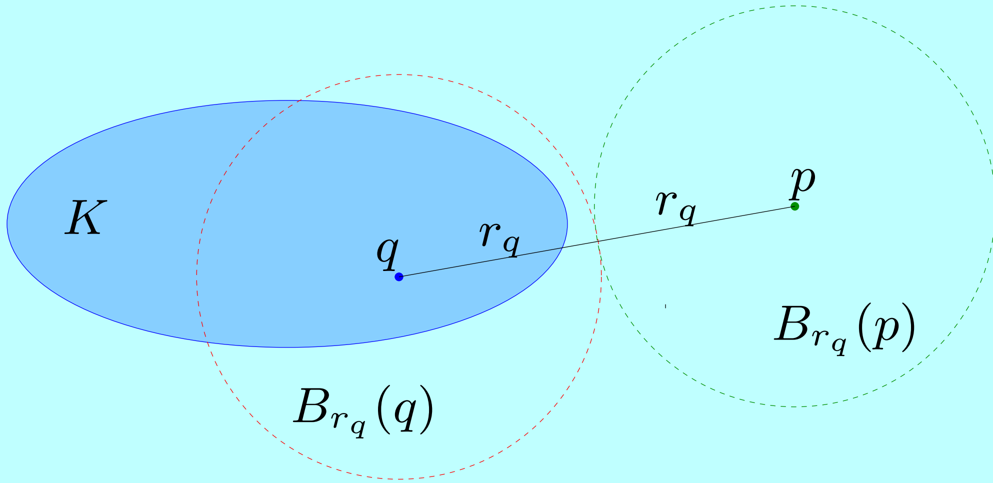
$\Longrightarrow$ K es compacto en Y. $\square$

Propiedades básicas de conjuntos compactos.

Teor.: Los conjuntos compactos son cerrados.

Dem.: Sea $K \subset X : K$ es compacto. Si $K = X$, no hay nada que demostrar. Si $K \neq X$, veremos que K^c es abierto (lo que equivale a que K sea cerrado).

Sea $p \in K^c$. $\forall q \in K$, sea $r_q := \frac{1}{2} d(p,q) > 0$.



Como $K \subset \bigcup_{q \in K} B_{r_q}(q) \implies \exists q_1, \ldots, q_N \in K : K \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n)$.

Sea $r := \min_{1 \leq n \leq N} r_{q_n} > 0$. Entonces, $\forall n = 1, \ldots, N$, $B_r(p) \subset B_{r_{q_n}}(p)$

$$\implies B_r(p) \cap B_{r_{q_n}}(q_n) \subset B_{r_{q_n}}(p) \cap B_{r_{q_n}}(q_n) = \emptyset, \quad n = 1, \ldots, N$$

$$\implies B_r(p) \cap \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n) = \bigcup_{n=1}^N \left(B_r(p) \cap B_{r_{q_n}}(q_n) \right) = \emptyset$$

$$\implies B_r(p) \cap K = \emptyset \implies B_r(p) \subset K^c \implies K^c \text{ abierto. } \square$$

Prop.: Los conjuntos compactos son acotados.

Dem.: Dado $p \in X$, demuestra y usa que $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(p)$. **Ej.** $\square$

Teor.: Los subconjuntos cerrados de un conjunto compacto son compactos.

Dem.: Sean K compacto y $F \subset K$ cerrado. Veremos que F es compacto.

Sea $F \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ un cubrimiento por abiertos de F.

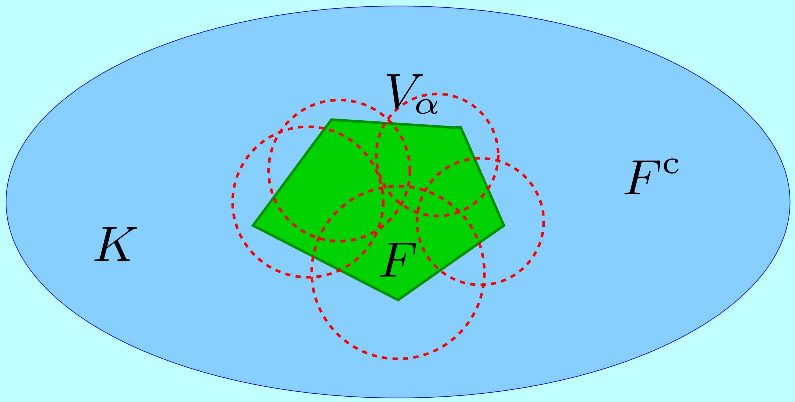
Sea $F^c := K \setminus F$. Entonces,

$$K = F^c \cup F \subset F^c \cup \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha.$$

F cerrado $\Longrightarrow$ F^c abierto $\Longrightarrow$

$$K \subset F^c \cup \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$$

es un cubrimiento por abiertos de K



$$\Longrightarrow \exists \alpha_1,\ldots,\alpha_N \in A: \quad K \subset F^c \cup \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$$

$$\Longrightarrow F = K \cap F \subset (F^c \cap F) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}\right) \cap F \subset \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$$

$\Longrightarrow$ F es compacto. $\square$

Corol.: (a) Si F es cerrado y K es compacto, entonces $F \cap K$ es compacto.

(b) Si $\forall \alpha \in A,\ K_\alpha$ es compacto, entonces $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$ también es compacto.

Dem.: **Ej.** $\square$

Sucesiones encajadas de compactos.

Def.: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión encajada de conjuntos** si $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teor.: Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión encajada de conjuntos compactos no vacíos. Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Dem.: Por el absurdo. Supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$.

$$\Longrightarrow\ K_1 \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} K_n = \emptyset \ \Longrightarrow\ K_1 \subset \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} K_n\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_n^{\mathrm{c}}.$$

Como K_n^{c} son abiertos y K_1 compacto, $\exists n_1 < \cdots < n_K :\ K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{K} K_{n_k}^{\mathrm{c}}$

$$\Longrightarrow\ K_1 \subset \left(\bigcap_{k=1}^{K} K_{n_k}\right)^{\mathrm{c}} = K_{n_K}^{\mathrm{c}},\ \text{pues}\ K_{n_1} \supset \cdots \supset K_{n_K}$$

$$\Longrightarrow\ K_{n_K} = K_1 \cap K_{n_K} = \emptyset. \quad \triangleright\!=\!\triangleleft \quad \square$$

Ejemplos de la necesidad de la **hipótesis de compacidad** en este teorema.

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ **Ej.** $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ **no compactos** pues no son cerrados.
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty) = \emptyset$ **Ej.** $[n, +\infty)$ **no compactos** pues no son acotados.

Subconjuntos infinitos de un conjunto compacto.

Teor.: Todo subconjunto infinito de un conjunto compacto tiene un punto de acumulación en el compacto.

Dem.: Sean K compacto y $E \subset K$ infinito. Por el absurdo.

Supongamos que ningún punto de K es punto de acumulación de E.

Entonces, $\forall q \in K,\ \exists r_q > 0 : \ B_{r_q}(q) \cap E = \begin{cases} \{q\}, & \text{si } q \in E, \\ \emptyset, & \text{si } q \notin E. \end{cases}$

$\Longrightarrow \ B_{r_q}(q) \cap E \subset \{q\} \quad \forall q \in K.$

Ahora bien, como $K \subset \bigcup_{q \in K} B_{r_q}(q)$ y es compacto, entonces

$$\exists q_1, \ldots, q_N : \ K \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n)$$

$$\Longrightarrow \ E = K \cap E \subset \left(\bigcup_{n=1}^N B_{r_{q_n}}(q_n) \right) \cap E = \bigcup_{n=1}^N \left(B_{r_{q_n}}(q_n) \cap E \right).$$

Pero acabamos de ver que $B_{r_{q_n}}(q_n) \cap E \subset \{q_n\}, \quad n = 1, \ldots, N$

$\Longrightarrow \ E \subset \{q_1, \ldots, q_N\}$, que es un conjunto finito $\Longrightarrow$ E finito. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\square$