UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANÁLISIS REAL I (525.301)
Trabajo Práctico 3.5

Definición 1. Un espacio métrico (X, d) se dice *separable* si existe $E \subset X$ numerable denso en X (i.e. $\overline{E} = X$, donde la clausura se toma c.r. a X).

Definición 2. Una colección de abiertos $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se dice una *base de* X si para todo $x \in X$ y para todo $G \subset X$ abierto con $x \in G$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in V_\lambda \subset G$.

Para el desarrollo de los siguientes ejercicios considere las definiciones anteriores.

Ejercicio 1. Demuestre que $\mathbb{R}^k$ es separable.

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Demuestre que X tiene una base numerable.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico en el cual todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que (X, d) es separable.

Ejercicio 4. Demuestre que todo espacio espacio métrico compacto K tiene una base numerable. Concluya que K es separable.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico con una base numerable $\{V_n\}$. Demuestre que todo cubrimiento por abiertos $\{G_\alpha\}$ de X admite un subcubrimiento numerable.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico en el cual todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es compacto.

Concepción, 25 de abril de 2019
RRA/SCH/JMR/jmr