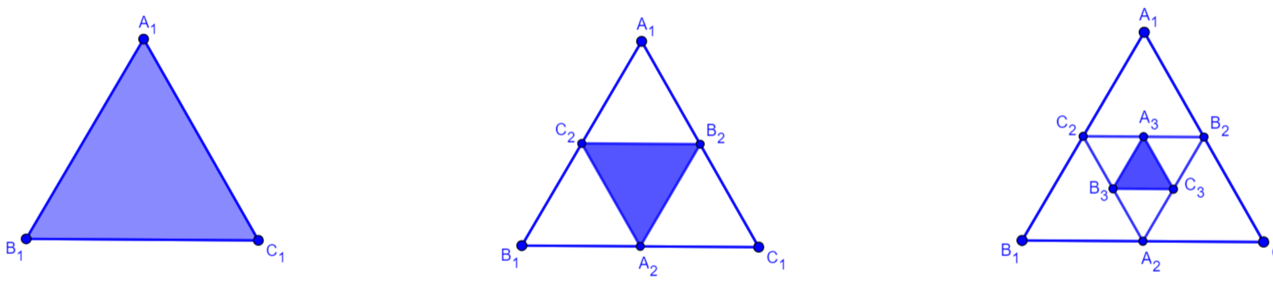
Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525140 – Álgebra 1 – Solución de Evaluación 3 (27.06.2023)

Problema 1. (15 puntos)

En un triángulo equilátero $\triangle A_1B_1C_1$ de lado 1 se unen los puntos medios de sus lados y se forma un nuevo triángulo equilátero, $\triangle A_2B_2C_2$, en el centro. En este segundo triángulo $\triangle A_2B_2C_2$ se repite el procedimiento y se forma un nuevo triángulo equilátero $\triangle A_3B_3C_3$ en el centro y así, sucesivamente como se muestra en la siguiente figura.



1.1 Calcule la suma de los perímetros de todos los triángulos coloreados desde $\triangle A_1B_1C_1$ hasta $\triangle A_{100}B_{100}C_{100}$.

1.2 Calcule la suma de las áreas de todos los triángulos coloreados desde $\triangle A_1B_1C_1$ hasta $\triangle A_{50}B_{50}C_{50}$.

Indicación: El área de un triángulo equilátero de lado L es $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

Solución:

1.1 Denotamos por $\mathcal{P}(\triangle A_nB_nC_n)$ el perímetro del triángulo equilátero $\triangle A_nB_nC_n$. Notemos que

$$\mathcal{P}(\triangle A_1B_1C_1) = 3, \qquad \mathcal{P}(\triangle A_2B_2C_2) = 3\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \mathcal{P}(\triangle A_3B_3C_3) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad \ldots$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto, se cumple que los perímetros de los triángulos se encuentran en progresión geométrica, cuyo primer término es $a_1 = 3$ y de razón $r = \frac{1}{2}$. Así, la suma de sus perímetros está dada por la fórmula

$$S_{\text{Perímetro}} = a_1\left(\frac{r^{100}-1}{r-1}\right) = 3\left(\frac{(\frac{1}{2})^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}\right).$$

(7 puntos)

1.2 Similar al ítem anterior, denotamos por $\mathcal{A}(\triangle A_nB_nC_n)$ el área del triángulo equilátero $\triangle A_nB_nC_n$.

Usando la fórmula del área de un triángulo equilátero, tenemos que

$$\mathcal{A}(\triangle A_1B_1C_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \mathcal{A}(\triangle A_2B_2C_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right), \qquad \mathcal{A}(\triangle A_3B_3C_3) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2, \qquad \ldots$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto, las áreas también se encuentran en progresión geométrica, cuyo primer término es $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ y de razón $r = \frac{1}{4}$. Así, la suma de sus áreas esta dado por la fórmula

$$S_{\text{Área}} = a_1\left(\frac{r^{50}-1}{r-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{(\frac{1}{4})^{50}-1}{\frac{1}{4}-1}\right).$$

(8 puntos)

Problema 2. (15 puntos)

2.1 Verifique que para todo número complejo z se cumple que $(z - \overline{z})^2$ es un complejo real.

2.2 Sea $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ ((z - \overline{z})^2 \geq 0) \ \wedge \ (|z - 4 + i| < 3)\}$.

Represente a $\mathcal{A}$ gráficamente en el plano de Argand. Justifique su respuesta.

2.3 Decida, justificando su respuesta, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\forall\, z \in \mathcal{A} \ : \ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}.$$

Solución:

2.1 Sea $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(z - \overline{z})^2 &= (x + yi - (x - yi))^2 \\ &= (2yi)^2 \\ &= 4y^2 i^2 \\ &= -4y^2\end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{Im}((z-\overline{z})^2) = \operatorname{Im}(-4y^2) = 0$, por lo que se puede concluir que $(z - \overline{z})^2$ es un complejo real.

(4 puntos)

2.2 De lo anterior, tenemos que para todo $z = x+yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que $(z-\overline{z})^2 = -4y^2$, luego:

$$(z - \overline{z})^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Por lo que los z que cumplen la primera condición son de la forma $z = x$ (Recordar que $y = 0$).

Ahora, los z que cumplen la segunda condición se reconocen como aquellos que cumplen:

$$\begin{aligned}|z - 4 + i| < 3 &\Leftrightarrow |x - 4 + (y + 1)i| < 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} < 3 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 < 9\end{aligned}$$

Lo cual se representa gráficamente como el interior de una circunferencia centrada en el punto $(4, -1)$, de radio 3.

Así, los z que cumplen ambas condiciones son aquellos que están dentro de la circunferencia cuya segunda componente es igual a 0, es decir, están sobre el eje real,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}(z) = 0 \ \wedge \ (\operatorname{Re}(z) - 4)^2 < 8\right\}, \\ &= \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}(z) = 0 \ \wedge \ 4 - \sqrt{8} < \operatorname{Re}(z) < 4 + \sqrt{8}\right\}.\end{aligned}$$

En la figura 1 se ha representado gráficamente el conjunto $\mathcal{A}$.

(9 puntos)

2.3 Según el ítem anterior, todos los números que pertenecen al conjunto $\mathcal{A}$ están sobre el eje real, es decir, pueden tener argumento principal igual a 0 ó π. Como la circunferencia se ubica a la derecha del eje imaginario, necesariamente son números complejos con parte real positiva. Luego, el argumento principal de todos es 0, cumpliéndose así la desigualdad.

(2 puntos)

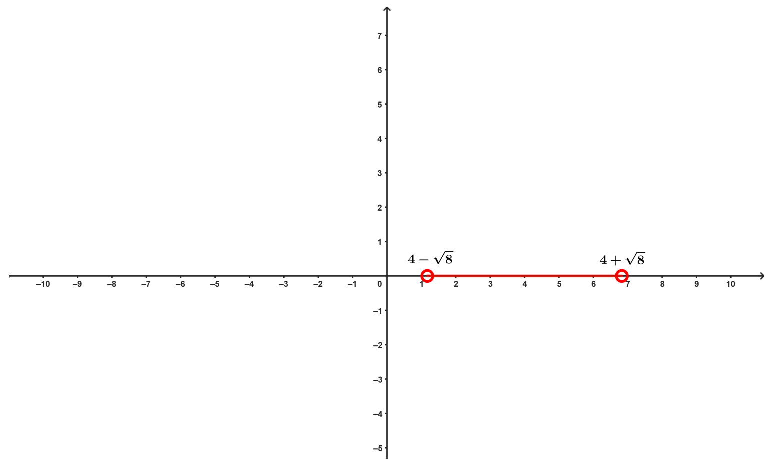


Figura 1: Conjunto $\mathcal{A}$

Problema 3. (15 puntos)

Considere $w = \dfrac{-\sqrt{3}-7i}{2\sqrt{3}+i}$.

3.1 Verifique que $w+1 = -\sqrt{3}i$.

3.2 Determine la forma polar de w.

3.3 Determine para qué números complejos z se cumple que $z^3 + (w+1)^6 = 27i$.

Solución:

3.1

$$\begin{aligned} w+1 = \frac{-\sqrt{3}-7i}{2\sqrt{3}+i} + 1 &= \frac{-\sqrt{3}-7i+2\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+i}, \\ &= \frac{\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}+i}, \\ &= \frac{\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\overline{2\sqrt{3}+i}}{\overline{2\sqrt{3}+i}}, \\ &= \frac{\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}+i} \cdot \frac{2\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}-i}, \\ &= \frac{6-\sqrt{3}i-12\sqrt{3}i-6}{|2\sqrt{3}+i|^2}, \\ &= \frac{-13\sqrt{3}i}{13}, \\ &= -\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $w+1 = -\sqrt{3}i$.

(4 puntos)

3.2 De la pregunta anterior obtenemos que $w = -1-\sqrt{3}i$, por lo que $\operatorname{Re}(w) = -1$ y $\operatorname{Im}(w) = -\sqrt{3}$, en efecto

a) $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$,

b) w está ubicado en el tercer cuadrante del plano de Argand, por lo que el argumento principal de w está dado de la siguiente manera

$$\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Por lo tanto, la forma polar de w es

$$w = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

(5 puntos)

3.3 Considerando que $w+1=-\sqrt{3}i$, la ecuación dada queda de la siguiente manera

$$z^3+(w+1)^6=27i \Rightarrow z^3+(-\sqrt{3}i)^6=27i \Leftrightarrow z^3-27=27i \Leftrightarrow z^3=27+27i.$$

Por lo que las soluciones de la ecuación dada son las raíces cúbicas de $u=27+27i$. Se tiene que

a) $|u|=\sqrt{(-27)^2+(27)^2}=27\sqrt{2}$,

b) u está ubicado en el primer cuadrante del plano de Argand, por lo que el argumento principal de u está dado de la siguiente manera

$$\operatorname{Arg}(u)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{27}{27}\right)=\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}.$$

Luego las raíces cúbicas de $u=27+27i$ están dadas mediante la siguiente expresión

$$u_k=|u|^{1/3}\operatorname{cis}\left(\frac{\operatorname{Arg}(u)+2k\pi}{3}\right)=3\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ \text{con } k\in\{0,1,2\}.$$

Reemplazando cada valor de k, obtenemos las raíces buscadas y en efecto, las soluciones de la ecuación dada en el problema son

$$u_0=3\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right),\ u_1=3\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ u_2=3\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)=3\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-7\pi}{12}\right).$$

(6 puntos)

Problema 4. (15 puntos)

Sea $p(x)=8-8x-2x^2+(m+1)x^3-5x^4+x^5$.

4.1 Determine m sabiendo que $p(x)$ es divisible por $x+1$.

4.2 Usando el valor m del ítem anterior y considerando además que 2 es raíz doble (o de multiplicidad dos) de $p(x)$, determine todas las raíces de $p(x)$.

Solución:

4.1 Como $x+1$ divide al polinomio $p(x)$, por Teorema del Resto se tiene que $p(-1)=0$.

Así,

$$\begin{aligned} p(-1)=0 \Leftrightarrow 8-8(-1)-2(-1)^2+(m+1)(-1)^3-5(-1)^4+(-1)^5 &= 0,\\ \Leftrightarrow 8+8-2-(m+1)-5-1 &= 0,\\ \Leftrightarrow m+1 &= 8,\\ \Leftrightarrow m &= 7. \end{aligned}$$

Por lo tanto, -1 es raíz de $p(x)$, si y solo si, $m=7$.

(5 puntos)

4.2 Del ítem anterior $m=7$, así, $p(x)=8-8x-2x^2+8x^3-5x^4+x^5$ y además -1 es raíz de $p(x)$, por lo que $x+1$ divide a $p(x)$.

Usando el método de Ruffini, se tiene:

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & 8 & -2 & -8 & 8 & -1 \\ \hline & -1 & 6 & -14 & 16 & -8 & \\ \hline 1 & -6 & 14 & -16 & 8 & 0 & \end{array}$$

Luego, $p(x)=(x+1)(x^4-6x^3+14x^2-16x+8)$.

Como 2 es raíz doble de $p(x)$, usaremos nuevamente Ruffini. Primero, dividiremos a $q(x)=x^4-6x^3+14x^2-16x+8$ por $x-2$, esto es:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 14 & -16 & 8 & 2 \\ \hline & 2 & -8 & 12 & -8 & \\ \hline 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & \end{array}$$

Luego, $p(x) = (x+1)(x-2)(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$.Repetimos el proceso, dividiendo a $s(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ por $x - 2$, esto es,

1	-4	6	-4	2
	2	-4	4	
1	-2	2	0	

Luego, $p(x) = (x+1)(x-2)^2(x^2 - 2x + 2)$, donde las raíces del polinomio $r(x) = x^2 - 2x + 2$ son $1 + i$ y $1 - i$.

En resumen: las raíces de $p(x)$ son $-1,\ 2$ (raíz doble), $1 + i$ y $1 - i$.

(10 puntos)