UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 2 ALGEBRA III 525201-1

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 50 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de Dimensión Finita, y B una base de V. Considere $S, T \in \mathcal{L}(V)$ isomorfismos. Demuestre que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$. **(10 puntos)**

Problema 2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, tal que **(10 puntos)**

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo B y C las correspondientes Bases Canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$. Considerando $U := \langle\{(1,1,0,0),(1,2,-1,1)\}\rangle$, determine el Subespacio vectorial no nulo W de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$W \subseteq \mathrm{Im}(T) \quad \wedge \quad T(U) \cap W = \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Problema 3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, del cual $B := \{z_1, z_2, z_3\}$ es una base. Considere ahora $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2 & b & -4 \\ 0 & c & 3 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ parámetros}.$$

Sabiendo que $(-1, v)$ es un autopar de $[T]_B^B$, siendo $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

3.1) Determine los valores propios de T. Esto supone que debe determinar los valores de a, b, c primero. **(07 puntos)**

3.2) Determine una base para cada Espacio Propio de $[T]_B^B$ existente. **(07 puntos)**

3.3) ¿Es T Diagonalizable? Fundamente su respuesta. En caso T sea diagonalizable, determine la base C de V que "diagonaliza" a T. Además, indique $[T]_C^C$. **(06 puntos)**

Problema 4. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de Dimensión Infinita, $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la transformación identidad. Considere además $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = \tilde{I}$. Demuestre que

4.1) T es un automorfismo. **(10 puntos)**

4.2) $V = \mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \tilde{I})$. **(10 puntos)**

RBP/rbp 04.06.2021