

# Cálculo III – 525211

## Cápsula 03: Transformaciones diferenciables

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática  
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021



**1** Derivada direccional

**2** Derivada parcial

**3** La diferencial

**4** Derivadas de alto orden

Notación: Sea  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  no nulo, denotaremos por  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$  al vector unitario en dirección  $\mathbf{u}$ , es decir

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}.$$

Así, siempre que usemos la notación  $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$  podemos asumir que  $\|\hat{\mathbf{z}}\| = 1$  independiente de si se ha definido previamente  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ .

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ , definimos la *derivada direccional de  $f$  en el punto  $\mathbf{x}_0$  respecto a la dirección  $\hat{\mathbf{u}}$*  al límite:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}.$$

Observación: Para  $n = 1$ , derivada direccional y la derivada en el punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , coinciden.

Ejemplo: Sea  $f(x, y) = x + y^3$  considere  $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + h u_1) + (0 + h u_2)^3 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h u_1 + h^3 u_2^3}{h} = u_1. \end{aligned}$$

Sea  $f(x, y) = 1 - (x^2 + 2y^2)$  y  $\mathbf{x}_0 = (a, b)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h u_1, b + h u_2) - f(a, b)}{h} \\ &= -2a u_1 - 4b u_2. \end{aligned}$$

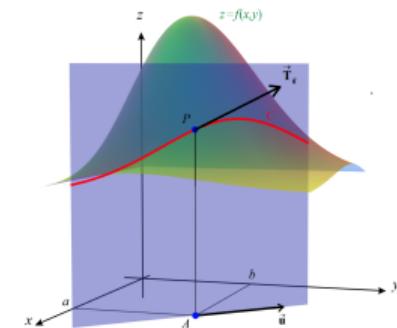
## Teorema

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ , asuma que  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$  y  $\frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$  existen.

Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1**  $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(f + g)(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$
  - 2** Si  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(c f)(\mathbf{x}_0) = c \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$
  - 3**  $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(f g)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$
  - 4** Si  $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ,
- $$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0) \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2}.$$

Demostración: Ejercicio.



Observación: Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , note que

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \\ &= \lambda \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + r \lambda \hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda r} \\ &=: \frac{\partial f}{\partial (\lambda \hat{\mathbf{u}})}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

## Proposición

Sean  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  asuma  $\hat{\mathbf{u}} + \lambda \hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$  y que  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}$  y  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}$  existen y son continuas en una vecindad en torno al punto  $\mathbf{x}_0$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial(\hat{\mathbf{u}} + \lambda \hat{\mathbf{v}})}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0).$$

Notación: Sean  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  los vectores canónicos definidos por

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Observación: Sea  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  definido por

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , primero observemos que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Asuma que  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_n}(\mathbf{x}_0)$  existen, y son continuas en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ , de la proposición anterior podemos concluir

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial(\sum_{i=1}^n u_i \hat{\mathbf{e}}_i)}(\mathbf{x}_0)$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}(\mathbf{x}_0).$$

Podemos decir que  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_n}(\mathbf{x}_0) \right\}$  genera todas las derivadas direccionales.

Demostración: (Para la propiedad aditiva de la proposición sobre linealidad)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial(\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h(\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h(\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})) - f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\mathbf{v}})}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h(\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}})) - f(\mathbf{x}_0 + h\hat{\mathbf{v}})}{h} + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) \\
 &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left( \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f((\mathbf{x}_0 + h_2\hat{\mathbf{v}}) + h_1\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x}_0 + h_2\hat{\mathbf{v}})}{h_1} \right) + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) \\
 &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0 + h_2\hat{\mathbf{v}}) \right) + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \left( \lim_{h_2 \rightarrow 0} (\mathbf{x}_0 + h_2\hat{\mathbf{v}}) \right) + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0). \quad \square
 \end{aligned}$$

# Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Observación: Todos los conceptos antes descritos pueden ser fácilmente generalizados a funciones de valores vectoriales. En efecto, sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  no nulo, y  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , defina ahora  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

donde  $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $j = 1, \dots, m$ , de esta manera,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right).$$

Luego, si escribimos  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , con  $u_i \in \mathbb{R}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , si asumimos además que cada  $\frac{\partial f_j}{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}$  existe y es continua en una vecindad al punto  $\mathbf{x}_0$ , para cada  $j = 1, \dots, m$ , entonces siguiendo un procedimiento análogo al caso escalar tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\mathbf{e}}_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \hat{\mathbf{e}}_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , y,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , definimos la  $j$ -ésima derivada parcial de  $f$  en el punto  $\mathbf{x}_0$  al límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \hat{\mathbf{e}}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{h}.$$

Ejemplo: Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1,\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x}{h} = 0.\end{aligned}$$

Ejemplo: Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2}$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+y^2} - e^{x^2+y^2}}{h} = 0.\end{aligned}$$

## Proposición

Sea  $A = A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ , donde  $A_j$  es un abierto de  $\mathbb{R}$  para cada  $j = 1 \dots n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n g_j(\xi_j), \quad \forall \mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in A$$

donde,  $g_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $\xi_j = x_j^{(0)}$ , y  $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = g'_k(x_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n g_j(x_j)$$

para cada  $k = 1, \dots, n$ .

Demostración: Ejercicio en cátedra.

Observación: El resultado anterior es un caso particular de una observación más general. De la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h \hat{\mathbf{e}}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

podemos inspirar la definición de una función  $g : A_k \rightarrow \mathbb{R}$  a través de

$$g(\xi_k) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

para todo  $\xi_k \in A_k$ , luego

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_k + h) - g(x_k)}{h} = g'(x_k),$$

es decir podemos entender la derivada parcial como una derivada ordinaria.

Aplicación: Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

1  $p(x, y) = 1 + x + y + xy + x^3 y^4$

2  $u(x, y) = \sin(2\pi xy)$

3  $f(x, y, z) = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{d}{dt} \left( t \mapsto e^{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + t^2}} \right) \Big|_{t=z_0} \\ &= t \frac{e^{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + t^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + t^2}} \Big|_{t=z_0} \\ &= z_0 \frac{e^{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \end{aligned}$$

Definición: Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  
 $\mathbf{x}_0 \in A'$ , considere  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  
 $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  
funciones con todas sus derivadas  
parciales en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Se definen los  
siguientes operadores diferenciales:

### 1 Gradiente:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

### 3 Divergencia:

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

### 4 Rotacional ( $n=3$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{f}) &= \nabla \times \mathbf{f} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Una vez más ... si escribimos  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , con  $u_i \in \mathbb{R}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , si asumimos además que cada  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  existe y es continua en una vecindad al punto  $\mathbf{x}_0$ , para cada  $j = 1, \dots, m$ , entonces tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

es decir  $\mathbf{u} \mapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$  define una aplicación lineal que depende de  $\mathbf{x}_0$ , si denotamos  $L(\cdot) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \cdot}(\mathbf{x}_0)$ , su evaluación en  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  nos entrega lo siguiente:

$$L(\hat{\mathbf{v}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{r},$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{r} - L(\hat{\mathbf{v}}) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - r L(\hat{\mathbf{v}})}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(r \hat{\mathbf{v}})}{r} \right) \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \right) \end{aligned}$$

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, y  $\mathbf{x}_0 \in A'$ . Se dice que  $\mathbf{f}$  es *diferenciable* en  $\mathbf{x}_0$  si existe una transformación lineal  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

Si tal aplicación  $L$  existe, entonces denotaremos  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = L$ , es decir

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

y la aplicación  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se conoce como *diferencial de  $\mathbf{f}$  en el punto  $\mathbf{x}_0$* .

## Proposición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si todas las derivadas parciales de  $\mathbf{f}$  existen y son continuas en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ .

Demostración: Sigue la forma de construcción de la diferencial en el slide anterior.

## Proposición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$  entonces todas las derivadas direccionales de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  existen.

Demostración: Tenemos que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

donde  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la diferencial en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Como tal límite existe, podemos considerar la siguiente trayectoria

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = r \hat{\mathbf{u}}, r \in \mathbb{R}^+\},$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}$  es fijo pero arbitrario, y se verifica que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(r \hat{\mathbf{u}})}{\|r \hat{\mathbf{u}}\|} = \mathbf{0},$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - r D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{u}})}{r \|\hat{\mathbf{u}}\|} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{r} - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{u}}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + r \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{r} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$$

es decir,  $\mathbf{f}$  tiene derivada direccional en cualquier dirección arbitraria  $\hat{\mathbf{u}}$  y además  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{u}})$ .



Observación: Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , de la proposición anterior sabemos que  $\nabla f$  existe en  $\mathbf{x}_0$ , además

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

donde  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$  es un vector unitario arbitrario. Una pregunta típica es acerca de la dirección de máximo crecimiento de  $f$  es decir donde  $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0)$  alcanza su mayor valor absoluto.

Observemos primero lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) \right| &= |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}| \\ &\leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \|\hat{\mathbf{u}}\| \\ &\leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

es decir, el máximo valor absoluto que puede alcanzar la derivada direccional es  $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$ . Si  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ , entonces podemos definir  $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}_0) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|, \end{aligned}$$

por lo tanto una función diferenciable tiene como derivada direccional máxima la que sigue la dirección del gradiente en ese punto, es decir la dirección de mayor crecimiento de dicha función coincide con la dirección de su gradiente en el punto estudiado.

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$  y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ , definimos su *matriz jacobiana en  $\mathbf{x}_0$* ,  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , como la matriz asociada a la transformación lineal  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , es decir

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Observación: note que si  $m = 1$  podemos escribir  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^T$ , interpretando el gradiente como un vector columna.

## Proposición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$  y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{f}$  es continua en  $\mathbf{x}_0$ .

Demostración: Sea  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$  de la diferenciabilidad tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}$$

Luego, como toda transformación lineal es continua sobre su dominio (ejercicio), se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

por lo tanto  $\mathbf{f}$  es continua en  $\mathbf{x}_0$ . □

## Definición

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  abiertos tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A' \cap B'$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Decimos que  $\mathbf{g}$ , es una *buena aproximación de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$*  si se satisface

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}.$$

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, se dice que  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación afín, si

$$T(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \mathbf{y}_0, \forall \mathbf{x} \in A,$$

donde,  $L : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal e  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$  es fijo.

## Proposición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$  y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ . Entonces existe una buena aproximación de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  que verifica ser una aplicación afín.

Demostración: Definimos  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  como  
 $T(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x} \in A,$

verificamos que es afín con  $L = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  e  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0)$ . Además, de la definición de diferenciabilidad es inmediato que  $T$  es una buena aproximación de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$ . □

Observación: La aplicación  $T$  se conoce como *buena aproximación afín de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$* .

## Aproximaciones afines según dimensión:

- 1 Si  $n = m = 1$ , la buena aproximación afín de  $f$  en  $x_0$  es la recta tangente  $L(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$  que toca a la gráfica  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ ;
- 2 Si  $n = 2$  y  $m = 1$ , la buena aproximación afín de  $f$  en  $x_0$  es el plano tangente  $P(x) = Df(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  que toca a la gráfica  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ ;
- 3 Si  $n > 2$  y  $m = 1$ , la buena aproximación afín de  $f$  en  $x_0$  es el hiperplano tangente  $H(x) = Df(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  que toca a la gráfica  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$ .

## Teorema

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in A' \cap B'$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y  $\lambda : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  y  $\lambda$ , son diferenciables en  $x_0$ , entonces

- 1  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  es diferenciable en  $x_0$ , y  $D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x_0) = D\mathbf{f}(x_0) + D\mathbf{g}(x_0)$ ;
- 2 para  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \mathbf{f}$  es diferenciable en  $x_0$ , y  $D(c \mathbf{f})(x_0) = c D\mathbf{f}(x_0)$ ;
- 3  $\lambda \mathbf{f}$  es diferenciable en  $x_0$ , y  $D(\lambda \mathbf{f})(x_0) = \lambda(x_0) D\mathbf{f}(x_0) + \mathbf{f}(x_0) D\lambda(x_0)$ ;
- 4 para  $\lambda(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{\mathbf{f}}{\lambda}$  es diferenciable en  $x_0$ , y  $D\left(\frac{\mathbf{f}}{\lambda}\right)(x_0) = \frac{\lambda(x_0) D\mathbf{f}(x_0) - \mathbf{f}(x_0) D\lambda(x_0)}{(\lambda(x_0))^2}$ .

**Teorema (regla de la cadena)**

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$ , abiertos,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^p$  tales que  $\mathbf{f}(A) \subseteq B$ . Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{g}$  es diferenciable en  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , entonces  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$  y además

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \circ D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo: Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x^2 + y^2), x^2 + y^2)$ , para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Podemos notar que  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ f$ , donde  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas

por  $\mathbf{g}(x) = (\cos(x), x)$  y  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , respectivamente. Luego, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x) &= -\sin(x), \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y,\end{aligned}$$

y observamos que son derivadas parciales continuas, por lo tanto  $\mathbf{g}$  y  $f$  son diferenciables. Concluimos,

$$\begin{aligned}J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, y_0) &= \begin{bmatrix} -\sin(x_0^2 + y_0^2) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_0 \sin(x_0^2 + y_0^2) & -2y_0 \sin(x_0) \\ 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Aplicación: Consideremos los cambios de variables definidos por

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \quad z_1 = z_1(y_1, \dots, y_m)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_m = y_m(x_1, \dots, x_n), \quad z_p = z_p(y_1, \dots, y_m)$$

siguiendo la regla de la cadena para diferenciales, se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}_0) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Consideremos el cambio de coordenadas de rectangulares a polares, definido por

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta)$$

$$y(r, \theta) = r \sin(\theta)$$

defina  $z = f(x, y)$  luego,  
 $z = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

existe, para  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Así, denotamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

que define la *segunda derivada parcial de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$ , con respecto a las coordenadas  $x_j$  e  $x_i$* . Si  $j = i$ , escribimos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ .

Extensión: Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  existe en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ , y además  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$  existe, para  $k \in \{1, \dots, n\}$ , análogamente denotamos  $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ . Al repetir recursivamente el proceso anterior, tenemos

$$\frac{\partial^{\ell+1} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_j^{\alpha_j+1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_j^{\alpha_j} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0},$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ , son tales que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \ell$ , lo que define las derivadas parciales de orden  $\ell + 1$ .

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto y  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

- 1 Si  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  existe y es continua sobre  $A$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ , entonces decimos que  $\mathbf{f}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $A$  y denotamos  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(A)$ ;
- 2 Si  $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_j^{\alpha_j} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  existe y es continua sobre  $A$  para todo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$  que  $\mathbf{f}$  es de clase  $\mathcal{C}^k$  sobre  $A$  y denotamos  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(A)$ ;
- 3 Si  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^k(A)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  decimos que  $\mathbf{f}$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $A$  y denotamos  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(A)$ .

## Teorema (de Schwarz)

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\mathbf{x}_0 \in A'$ , y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Demostración: Ejercicio.

Contra-ejemplo: Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$