UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Pauta Exámen Recuperativo, año 2005

$\boxed{\textbf{Pregunta 1}}$ (20 puntos)
Considere el siguiente problema de valores iniciales (o problema de Cauchy)

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{\left(y(x)^2 + 4y(x)\right)\sqrt{1-x^2}} \\ y(a) = b \end{cases}. \tag{1}$$

a) (7 puntos) Describa detalladamente todas las regiones donde se pueda asegurar la existencia y unicidad de las soluciones de PVI (1).

b) (3 puntos) Justifique que cuando $a = 0$ y $b > 1$ la solución de (1) satisface que para todo x que pertenece al dominio de y, $y(x) > 1$.

c) (10 puntos) Si $a = 0$ y $b = 2$, encuentre una expresión algebraica que defina de manera implícita a la solución de (1).

Solución.
(7 puntos)
La EDO (1) se reescribe como

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = b \end{cases},$$

donde $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{(y^2+4y)\sqrt{1-x^2}}$. Ya que $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{y(y+4)}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, el dominio de f es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ y \neq -4 \text{ y } 1-x^2 > 0\}$.
Como $1-x^2 > 0$ si y solo si $1 > |x|$, el dominio de f es igual a la unión de las siguientes regiones (que además son rectángulos) $R_1 =]-1,1[\times]0,+\infty[$, $R_2 =]-1,1[\times]-4,0[$ y $R_3 =]-1,1[\times]-\infty,-4[$.
Notemos que $f(x,y) = g(x)\,h(y)$, donde $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $h(y) = \dfrac{y^2-1}{y(y+4)}$. Puesto que $1-x^2$ es un polinomio que toma valores positivos para todo $x \in]-1,1[$, la función g es continua en $]-1,1[$. Como h es igual a la división de dos polinomios, h es continuamente derivable para todo y tal que $y(y+4) \neq 0$.
Por lo tanto, f es continua en R_1, R_2 y R_3.
(3.5 ptos por análisis correcto de los puntos de continuidad de f)

Además,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x)\, h'(y)$$

implica que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R_1, R_2 y R_3.

(2 ptos por análisis correcto de los puntos de continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$)

Entonces, del teorema de existencia y unicidad tenemos que para todo $(a,b) \in R_k$, con $k = 1,2,3$, la EDO (1) tiene una única solución definida en un intervalo que contiene al punto a y que está contenido en $]-1,1[$.

(1.5 ptos)

b) (3 puntos)

Note que $h(1) = 0$. Por lo tanto, la función $z(x) = 1$ definida para todo $x \in]-1,1[$ soluciona (1).

(1 pto)

Ya que $\{(x, z(x)) : x \in]-1,1[\} \subset R_1$, del inciso a) tenemos que ninguna otra curva solución de (1) contenida en R_1 corta a la curva $\{(x, z(x)) : x \in]-1,1[\}$. En particular, no existe $x \in]-1,1[$ tal que $y(x) = z(x)$. Ya que y, z son funciones continuas y $y(0) > z(0)$, tenemos que $y(x) > z(x)$ para todo x que pertenece al dominio de y. O sea que $y(x) > 1$ para todo x que pertenece al dominio de y.

(2 ptos)

c) (10 puntos)

Separando variables e integrando tenemos que

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{y^2+4y}{y^2-1}dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

(2 ptos)

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{y^2+4y}{y^2-1}dy &= \int_2^{y(x)} \left(1 + \frac{4y+1}{y^2-1}\right) dy \\ &= (y(x) - 2) + \int_2^{y(x)} \frac{4y+1}{(y-1)(y+1)}dy\end{aligned}$$

Existen constantes reales c y d tales que

$$\frac{4y+1}{(y-1)(y+1)} = \frac{c}{y-1} + \frac{d}{y+1}.$$

Multiplicando e igualando coeficientes de igual potencia se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=1 \end{cases}.$$

De donde se obtiene que $a = 5/2$ y $b = 3/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_2^{y(x)} \frac{4y+1}{(y-1)(y+1)} dy \\
&= \frac{5}{2}\int_2^{y(x)} \frac{1}{y-1} dy + \frac{3}{2}\int_2^{y(x)} \frac{1}{y+1} dy \\
&= \frac{5}{2}\ln|y(x)-1| + \frac{3}{2}\ln|y(x)+1| - \frac{3}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

Del inciso b) tenemos que $y(x) > 1$. Lo que implica que

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{y^2+4y}{y^2-1} dy = y(x) - 2 + \frac{5}{2}\ln(y(x)-1) + \frac{3}{2}\ln(y(x)+1) - \frac{3}{2}\ln(3).$$

(4 ptos por cálculo de integral)
Usando el cambio de variable $t = sen(\theta)$, con $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_{arcsen(0)}^{arcsen(x)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta \\
&= arcsen(x).
\end{aligned}$$

(3 ptos por cálculo de integral)
Entonces

$$y(x) - 2 + \frac{5}{2}\ln(y(x)-1) + \frac{3}{2}\ln(y(x)+1) - \frac{3}{2}\ln(3) = arcsen(x).$$

Luego

$$exp(y(x)-2)(y(x)-1)^{\frac{5}{2}}(y(x)+1)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} exp(arcsen(x)).$$

(1 punto por tratamiento de las condiciones iniciales)

Pregunta 2 (20 puntos)
Encuentre la expresión de la curva integral de la EDO,

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = e^{-x}\cos(x) + \delta(x-1)$$

de modo que la recta tangente a esta curva en el origen tenga la dirección del eje x.
Sugerencia: Descomponga el problema de Cauchy dado en dos problemas de valores iniciales con condiciones iniciales convenientes y utilize el principio de superposición.

Solución.
Como la recta tangente a la curva buscada tiene la dirección del eje x tenemos que encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{c} 2y''(x) - y'(x) - y(x) = e^{-x}\cos(x) + \delta(x-1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Utilizando el principio de superposición, decomponemos (2) en los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} 2u''(x) - u'(x) - u(x) = e^{-x}\cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

y

$$\begin{cases} 2v''(x) - v'(x) - v(x) = \delta(x-1) \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Utilizando el método de aniquiladores, coeficientes indeterminados o variación de parámetros obtenemos que la solución (3) es

$$u(x) = \frac{2}{15}e^{x} - \frac{2}{15}e^{-x/2} - \frac{1}{5}e^{-x}sen(x).$$

Por otro lado, aplicando la transformada de Laplace a (4) se llega a que

$$2s^2\mathcal{L}(v) - s\mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(v) = e^{-s}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(v) = \dfrac{e^{-s}}{(2s+1)(s-1)} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-s}}{2s+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-s}}{s-1}$. Lo que implica que

$$v(x) = -\frac{1}{3}H_1(t)e^{-x/2} + \frac{1}{3}H_1(t)e^{x}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) + v(x) \\ &= \frac{2}{15}e^{x} - \frac{2}{15}e^{-x/2} - \frac{1}{5}e^{-x}sen(x) - \frac{1}{3}H_1(t)e^{-x/2} + \frac{1}{3}H_1(t)e^{x} \\ &= \frac{2}{15}e^{x} - \frac{2}{15}e^{-x/2} - \frac{1}{5}e^{-x}sen(x) + \frac{1}{3}H_1(t)\left(e^{x} - e^{-x/2}\right). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Pregunta 3}}$ (20 puntos)

Resuelva el problema de valores iniciales (PVI) :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) + e^{-t} \\ y'(t) = 6y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = 9y(t) - 6z(t) \\ x(0) = 1\ ; \quad y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

Solución.

A) Primera alternativa : usando valores y vectores propios. La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X' = A\,X + B(t)$, siendo

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B(t) := \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3.0 pts, por escritura matricial)

Encontrando una base del espacio solución: para esto necesitamos conocer los valores propios de A, los cuales son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = \lambda^2(1-\lambda)$, es decir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,0)^T\}\rangle\,, \quad S_{\lambda_2} = \langle\{(1,2,3)^T\}\rangle\,.$$

Así tenemos $X_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. **(3.0 pts, por valores propios)**

(3.0 pts, por vectores propios)

Hallando $X_3(t) = u_1 + u_0\, t$, siendo $u_0\,, u_1 \in \mathcal{R}^3$ a determinar. Para esto, primero caracterizamos el espacio rango de A, el cual viene dado por

$$ER(A) := \{C = (a,b,c)^T \quad | \quad r(A|C) = r(A)\} = \{(a,b,c)^T \quad | \quad 2c = 3b\}$$

Luego, $u_0 \in ER(A)$ y $u_1 \notin ER(A)$ se buscan (y escogemos una de las soluciones admisibles) tales que satisfagan:

$$\begin{array}{rcl} A\,u_0 = 0 & \Rightarrow & u_0 = (1,2,3)^T \\ A\,u_1 = u_0 & \Rightarrow & u_1 = (0,-1,-2)^T\,. \end{array}$$

De esta manera, se tiene $X_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -2+3t \end{pmatrix}$,

(3.0 pts, por cálculo de u_0 y u_1)
(3.0 pts, por describir vector $X_3(t)$)

con lo que la solución general del sistema homogéneo es

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}\,,$$

siendo C_1, C_2 y C_3 determinadas por las condiciones iniciales.

(3.0 pts, por solución homogenea)

Solución particular I. Método de Variación de Parámetros.

$$X_p(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}\,,$$

donde $c_1,\ c_2,\ c_3$ son solución de

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 1 & t \\ 0 & 2 & 2t-1 \\ 0 & 3 & 3t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cuál $c_2'(t) = c_3'(t) = 0$ y $c_1'(t) = \mathrm{e}^{2t}$. Integrando se obtiene $c_1(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}$, y $c_2(t) = c_3(t) = 0$. Es decir,

$$X_p(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución particular II. Coeficientes indeterminados.
La solución particular es de la forma

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{-t} \\ \beta\mathrm{e}^{-t} \\ \gamma\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

Reemplazando en el sistema, se tiene

$$\begin{cases} -\alpha = \alpha + \beta - \gamma + 1 \\ -\beta = 6\beta - 4\gamma \\ -\gamma = 9\beta - 6\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow X_p(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.0 pt, por solución particular con cualquiera de los dos métodos)

Condiciones Iniciales.

$$\begin{aligned} x(0) = C_1 - \frac{1}{2} = 1 &\Longrightarrow C_1 = \frac{3}{2} \\ y(0) = 2C_2 - C_3 = 0 &\Longrightarrow C_3 = 2C_2 \\ z(0) = 3C_2 - 2C_3 = 0 &\Longrightarrow C_2 = C_3 = 0 \end{aligned}$$

Con lo cuál

$$X(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + \sinh(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.0 pt, por cálculo de los coeff. y solución del (PVI))

B) Segunda alternativa : Transforamda de Laplace. Aplicando TL al sistema, se tiene :

$$\begin{cases} (s-1)X(s) - Y(s) + Z(s) = 1 + \dfrac{1}{1+s} \\ (s-6)Y(s) + 4Z(s) = 0 \\ -9Y(s) + (s+6)Z(s) = 0. \end{cases}$$

(4.0 pts, por sistema bién planetado)

La dos últimas ecuaciones conforman un sistema de 2 linealmente independiente, con lo cuál $Y(s) = Z(s) = 0$, es decir reemplazando en la primera ecuación :

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1}$$

(4.0 pts, por cálculo de $Y(s)$ y $Z(s)$))
(4.0 pts, por cálculo de $X(s)$))

Con lo cuál aplicando antitransformada de Laplace, se tiene $x(t) = \mathrm{e}^t + \sinh(t)$. Es decir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + \sinh(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.0 pts, por cálculo de $x(t)$))
(4.0 pts, por cálculo de $y(t)$ y $z(t)$))

C) Tercera alternativa : sustitución. Considerando la 2da y 3era ecuacón y sus condiciones iniciales respectivas se tiene :

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = 9y(t) - 6z(t) \\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(4.0 pts)

Cuya solución es trivialmente $x(t) = y(t) = 0$ por ser $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ matriz invertible.

(4.0 pts)

Luego reemplazando en la primera ecuación se tiene

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + e^{-t} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

(4.0 pts)

Ecuación de primer orden cuya solución es $x(t) = \mathrm{e}^t + \sinh(t)$. Es decir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + \sinh(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.0 pts, por cálculo de $x(t)$))
(4.0 pts, por solución final)