UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 4 TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO I (525041-1)
(Introducción a la teoría de números)

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Determine el valor de verdad de la proposición: $\forall\,(a,b,c)\in(\mathbb{Z}\backslash\{0\})^3\ :\ (a\mid bc\ \wedge\ a\nmid c)\ \Rightarrow\ a\mid b$, Fundamente su respuesta, según corresponda.

2. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ con $b\neq 0$, tales que $b\mid a$ y $b\mid(a+1)$. Demuestre que $|b|=1$.

3. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ con $b\neq 0$. Demostrar: b no divide a a si y sólo si ningún múltiplo de b divide a a.

4. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ con $b\neq 0$. Sabemos que $\exists\,!\,(q,r)\in\mathbb{Z}^2\ :\ a=bq+r$, con $0\leq r<|b|$. Demuestre que en el conjunto $\{a,a-1,...,a-|b|+1\}$ hay un único múltiplo de b.

5. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ PESI. Determinar los valores posibles de $mcd(2a+b,a+2b)$.

6. En cada caso, y con la ayuda del Algoritmo de Euclides (MCD), determine un par $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2$, tal que

$$a)\,258\,\alpha+51\,\beta=3\qquad b)\,243\,\alpha+198\,\beta=9\,.$$

7. En cada caso, y con la ayuda del Algoritmo de Euclides (MCD), determine una terna $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Z}^3$, tal que

$$a)\,62\,\alpha+86\,\beta+80\,\gamma=2\qquad b)\,195\,\alpha-221\,\beta+247\,\gamma=13\qquad c)\,36\,\alpha+42\,\beta+15\,\gamma=3\,.$$

8. José y Manuel comen en la misma pizzeria. José asiste cada 20 días y Manuel cada 38 días. ¿Cuándo volverán a encontrarse?

9. David tiene 24 dulces para repartir y Fernando tiene 18. Si desean regalar los dulces a sus respectivos familiares de modo que todos tengan la misma cantidad y que sea la mayor posible, ¿cuántos dulces repartirán a cada persona? ¿a cuántos familiares regalarán dulces cada uno de ellos?

10. En un vecindario, un camión de helados pasa cada 8 días y un food truck (camión restaurante) pasa cada dos semanas. Se sabe que 15 días atrás ambos vehículos pasaron en el mismo día. Raúl cree que dentro de un mes los vehículos volverán a encontrarse y Oscar cree esto ocurrirá dentro de dos semanas. ¿Quién está en lo cierto?

11. En una banda compuesta por un baterista, un guitarrista, un bajista y un saxofonista, el baterista toca en lapsos de 8 tiempos, el guitarrista en 12 tiempos, el bajista en 6 tiempos y el saxofonista en 16 tiempos. Si todos empiezan al mismo tiempo, ¿en cuántos tiempos sus periodos volverán a iniciar al mismo tiempo?

12. Simón tiene una pista de carreras con dos autos. El primer auto le da una vuelta completa a la pista en 31 segundos y el segundo lo hace en 17 segundos. Carlos también tiene su pista de carreras con dos autos, pero el primero da una vuelta completa en 36 segundos y el segundo en 42 segundos. Como Carlos siempre pierde cuando juegan, propone a Simón que el ganador sea quien tenga en su pista sus dos autos situados en la meta al mismo tiempo. ¿Quién ganará?

13. Sean $a,b\in\mathbb{Z}^+$ PESI, y $c\in\mathbb{Z}^+$. Demostrar $mcd(ac,b)=mcd(c,b)$.

14. Demostrar $\forall\,(a,b,c)\in(\mathbb{Z}^+)^3\ :\ (a|bc\ \wedge\ a,b$ son PESI$)\ \Rightarrow\ a|c$.

15. Demostrar que todo primo que es $\overset{\circ}{3}+1$, es de la forma $\overset{\circ}{6}+1$.

16. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo, y $a \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $mcd(a,p) = p \veebar mcd(a,p) = 1$.

17. Demuestre que $\forall\, m \in \mathbb{N} \;:\; 11^m = \overset{\circ}{10} + 1$. Luego, aplique esta propiedad para establecer que $100 \mid (11^{10} - 1)$.

18. Demuestre que todo número (entero) cuadrado perfecto es $\overset{\circ}{4}$ ó $\overset{\circ}{4} + 1$.

19. Demostrar que la suma de los cuadrados de dos enteros impares cualesquiera, no puede ser un cuadrado perfecto.

20. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dados. Interesa estudiar la Ecuación Diofántica Lineal:
Determinar $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; ax + by = c$.
Demostrar que la ecuación diofántica planteada tiene soluciones enteras si y sólo si $mcd(a,b) \mid c$.

21. Aplique la caracterización anterior para decidir si las siguientes ecuaciones diofánticas lineales, tienen soluciones enteras o no:

$$a)\; 2x + 3y = 2 \quad b)\; 9x - 15y = 1 \quad c)\; -8x + 22y = 20\,.$$

22. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos a la vez, con los cuales se plantea la Ecuación Diofántica Lineal Homogénea: Determinar $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; ax + by = 0$.
Considerando $d := mcd(a,b)$, demostrar/deducir que el conjunto solución de esta ecuación viene dado por

$$C.S. = \left\{ (x,y) = \left(\frac{b}{d}m, -\frac{a}{d}m \right) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

23. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no nulos a la vez, y $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, con los cuales se plantea la Ecuación Diofántica Lineal No Homogénea: Determinar $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; ax + by = c$.
Supongamos que la ecuación diofántica planteada es soluble, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ es una solución de ésta.
Considerando $d := mcd(a,b)$, deducir que el conjunto solución de esta ecuación viene dado por

$$C.S. = \left\{ (x,y) = \left(x_0 + \frac{b}{d}m, y_0 - \frac{a}{d}m \right) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

24. Resolver las ecuaciones diofánticas solubles del Ejercicio 21.

Ejercicios propuestos:

1. En cada caso, y con la ayuda del Algoritmo de Euclides (MCD), determine un par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, tal que

$$a)\; 285\,\alpha + 57\,\beta = 3 \quad b)\; 294\,\alpha + 318\,\beta = 2\,.$$

2. En cada caso, y con la ayuda del Algoritmo de Euclides (MCD), determine una terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$, si existe, tal que

$$a)\; 100\,\alpha + 140\,\beta + 144\,\gamma = 8 \quad b)\; 138\,\alpha + 276\,\beta - 552\,\gamma = 23 \quad c)\; 49\,\alpha + 63\,\beta - 21\,\gamma = -35\,.$$

3. Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, tales que a es impar, $d \mid a$ y $d \mid (ab + 2)$. Deducir que $d = 1$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, y considere $d := mcd(a,b)$. Demostrar $\forall\, m \in \mathbb{Z} \;:\; mcd(a, b - ma) = d$.

5. Demostrar: $\forall\, (a,b) \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\})^2 \;:\; mcd(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; \alpha a + \beta b = 1$.

6. Sean $m \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in \mathbb{Z}^+$ un número primo, tal que $p \mid (m^2 + 1)$. Deducir que $mcd(p, m) = 1$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ PESI, y $m \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que $mcd(am, b) = mcd(m, b)$.

8. Andrés tiene una cuerda de 120 metros y otra de 96 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos tengan la misma longitud (entera) en cm, pero lo más largos posible. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá? ¿Cuánto debe medir cada trozo?

9. Maximiliano quiere pintar una casa pequeña. Según sus cálculos, necesitará: 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca. Pero Maximiliano quiere comprar tinajas de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de tinajas sea el menor posible. ¿De cuántos litros debe ser cada tinaja de pintura? ¿Cuántas tinajas de cada color debe comprar?

10. Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros:

    - Opción 1: tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio,
    - Opción 2: tarda 8 días en ir y regresar a su punto de inicio y
    - Opción 3: tarda 10 días en ir y regresar a su punto de inicio.

    Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

11. Daniel y Matías compraron 40 y 32 caramelos, respectivamente, para una fiesta de cumpleaños. Quieren repartirlos entre todos los invitados de modo que:

    - Tanto Daniel como Matías dan el mismo número de caramelos a cada persona.
    - Todos los invitados han de tener el mismo número de caramelos y éste ha de ser máximo.
    - Cada invitado sólo puede recibir caramelos de Daniel o de Matías, pero no de ambos.

    Calcular el número máximo de invitados que deben asistir para que ninguno se quede sin caramelos.

12. Sean $\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\} \subseteq \mathbb{Z}$ tales que $\forall\, i, j \in \{1, 2\} : \{a_i, b_j\}$ son PESI.
    Deducir que $mcd(a_1 a_2, b_1 b_2) = 1$.
    Hint: considere propiedad dada en Ejercicio 7 propuesto.

13. Sea $\{a\}, \{b_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathbb{Z}$, tales que $\forall\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, mcd(a, b_j) = 1$. Deducir que $mcd(a, b_1 \cdots b_m) = 1$.

14. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que $b \mid a$. Demostrar: $\forall\, c \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \,:\, mcd(a + c, b) = mcd(c, b)$.

15. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ PESI. Demostrar que $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, mcd(a^m, b^n) = 1$.

16. Sea $\{p_j\}_{j=1}^{\ell} \subseteq \mathbb{Z}^+$ un conjunto de primos relativos dos a dos. Demostrar que $mcm(p_1, ..., p_\ell) = p_1 \cdots p_\ell$.

17. Sea $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p = \overset{\circ}{4} + 1$ y $p = \overset{\circ}{3} + 1$. Demostrar que $p = \overset{\circ}{12} + 1$.

18. Demostrar que todo primo distinto de 2 y 3, es de la forma $\overset{\circ}{6} + 1$ ó $\overset{\circ}{6} - 1$.

19. Demostrar que todo entero de la forma $\overset{\circ}{3} + 2$, tiene un factor primo de la misma forma.

20. Demostrar que todo entero de la forma $\overset{\circ}{4} + 3$, tiene un factor primo de la misma forma.

21. Demostrar que hay un número infinito de primos de la forma $4m + 3$, con $m \in \mathbb{Z}^+$.
    Hint: Asuma que hay $k \in \mathbb{N}$ números primos de esa forma $\{p_1, ..., p_k\}$, y considere el número $N := 4p_1 \cdots p_k + 3$.

22. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, y S un conjunto de $m + 1$ elementos distintos tomados del conjunto $\{1, 2, ..., 2m\}$. Muestre que hay al menos dos elementos en S primos relativos.

23. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m - 1$ es primo (Primo de Mersenne). Demostrar que m es primo.