

EVALUACIÓN 1, ECUACIONES DIFERENCIALES II (5525214), 2024-2

**PROBLEMA 1. [Parte A: 24 puntos, Parte B: 10 puntos]**

Nota importante: *se puede contestar las preguntas de la parte B de este problema antes de contestar las preguntas de la parte A. En particular, la pregunta B.1. es independiente de las demás preguntas.*

- A. Se considera una barra metálica cuasi uni-dimensional de longitud  $L$ , de superficie lateral aislada térmicamente y cuyas extremidades en  $x = 0$  y  $x = L$  estan también aisladas térmicamente. El problema con valores iniciales y de frontera que modeliza la propagación del calor en la barra es

$$\begin{cases} \partial_t T(x, t) = k \partial_x^2 T(x, t) & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ \partial_x T(0, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ T(x, 0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

donde  $T(x, t)$  es la temperatura en la sección de la barra de posición  $x$  al tiempo  $t$ ,  $k > 0$  es una constante y  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  es el perfil inicial de temperatura de la barra.

1. Usando el método de separación de variables, determine soluciones de la forma  $T(x, t) = u(x)v(t)$  del problema con valores de frontera

$$(PVF) \quad \begin{cases} \partial_t T(x, t) = k \partial_x^2 T(x, t) & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ \partial_x T(0, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L, t) = 0 & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Muestre que los valores propios  $\lambda_n$  del problema de Sturm-Liouville asociado satisfacen  $\lambda_n > 0$  y estan dados por

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

esto es, el problema de Sturm-Liouville solamente tiene soluciones constantes si  $\lambda \neq \lambda_n$ .

2. Justifique que el problema con valores de frontera (PVF) satisface el principio de superposición. Deduzca que para cualquier  $N \in \mathbb{N}$  y cualesquieras constantes  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ ,

$$T_N(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n e^{-k\lambda_n t} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad , \quad (1)$$

es solución de (PVF).

3. Se supone que  $f$  es continua en  $[0, L]$ , derivable en  $]0, L[$  salvo quizá en un número finito de puntos, y tal que  $f'$  es continua por trozos en  $[0, L]$ .  
Muestre que si  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , son los coeficientes de Fourier de la serie de cosenos de  $f$ , luego para todo  $x \in ]0, L[$ , el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (2)$$

existe y es igual a  $f(x)$ .

¿ La serie de Fourier del miembro derecho de (1) converge uniformemente? Justifique su respuesta.

- B. 1. Encuentre la serie de cosenos de la función  $f$  definida en  $[0, L]$  por  $f(x) = L - x$ ,  $0 \leq x < L$ . Indique el período de la serie y dibuje la gráfica de la extensión periódica par de  $f$ .  
Muestre que esta serie converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .
2. Deduzca los valores de los coeficientes  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , en la solución (1) de (PVF) tales que  $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x, 0) = f(x)$  en el caso de un perfil inicial lineal de temperatura dado por  $f(x) = L - x, 0 \leq x \leq L$ .

**Desarrollo:** A.1. Buscamos una solución de la ecuación del calor de la forma  $T(x, t) = u(x)v(t)$ . Suponiendo que  $u(x) \neq 0 \forall x \in ]0, L[$  y  $v(t) \neq 0 \forall t > 0$ , dividiendo la ecuación del calor por  $T(x, t)$  y reemplazando  $T(x, t) = u(x)v(t)$  en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = k \frac{u''(x)}{u(x)}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Como el miembro izquierdo solamente depende de  $t$  y el miembro derecho solamente depende de  $x$ , sigue que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = k \frac{u''(x)}{u(x)} = -k\lambda,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es una constante. Las condiciones de frontera implican  $u'(0)v(t) = u'(L)v(t) = 0$  para todo  $t > 0$ . Luego  $u(x)$  satisface el problema de Sturm-Liouville

$$(PST) \quad \begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 & , \quad 0 < x < L \\ u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0. \end{cases}$$

[5 puntos]

- Si  $\lambda < 0$ , la solución de la EDO es  $u(x) = A e^{\sqrt{|\lambda|}x} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$ . Las constantes reales  $A$  y  $B$  satisfacen  $\sqrt{|\lambda|}(A - B) = u'(0) = 0$  y  $\sqrt{|\lambda|}(A e^{\sqrt{|\lambda|}L} - B e^{-\sqrt{|\lambda|}L}) = u'(L) = 0$  por las condiciones de frontera. Sigue que  $A = B = 0$  y (PST) solamente admite la solución trivial  $u(x) = 0$ .
- Si  $\lambda = 0$ , la solución de la EDO es  $u(x) = Ax + B$ , donde la constante  $A$  satisface  $A = u'(0) = u'(L) = 0$ . Así, (PST) solamente admite soluciones constantes  $u(x) = B$ .

- Si  $\lambda > 0$ , la solución de la EDO es  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$  y las constantes reales  $A$  y  $B$  satisfacen  $B\sqrt{\lambda} = u'(0) = 0$  y  $-A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}L) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) = u'(L) = 0$ . Por ende,  $B = 0$  y  $A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ . Así, (PSL) admite una solución no constante

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda_n}x) \quad , \quad A \neq 0$$

si y solo si  $\lambda = \lambda_n$  satisface

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}^*.$$

Si  $\lambda = \lambda_n$ , visto que las soluciones de  $v'(t)/v(t) = -k\lambda_n$  están dadas por  $v(t) = \text{const.} \cdot e^{-k\lambda_n t}$ , (PVF) admite la solución

$$T(x, t) = u(x)v(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} k t},$$

donde  $a_n$  es una constante real no nula. Aunque si  $n > 1$  nuestra hipótesis  $u(x) \neq 0$  para todo  $x \in ]0, L[$  no se cumpla, es fácil chequear que  $T(x, t)$  es solución de (PVF) para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . **[6 puntos]**

A.2. La ecuación del calor siendo una ecuación diferencial lineal, ella satisface el principio de superposición. Además, si  $T_1(x, t)$  y  $T_2(x, t)$  son dos soluciones de (PVF) y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , luego  $\partial_x(T_1 + \alpha T_2)(0, t) = \partial_x T_1(0, t) + \alpha \partial_x T_2(0, t) = 0$ . Similarmente,  $\partial_x(T_1 + \alpha T_2)(L, t) = 0$ . Así,  $(T_1 + \alpha T_2)(x, t)$  es también solución de (PVF). Eso demuestra que (PVF) satisface el principio de superposición.

Por ende, para cualquier  $N \in \mathbb{N}^*$  y cualesquiera constantes  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ ,

$$T_N(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2} k t} \quad (3)$$

es solución de (PVF). **[5 puntos]**

**NOTA:** Esta solución de (PVF) tiene la misma forma que las soluciones del problema estudiado en clase sobre la ecuación del calor con condiciones de frontera de Dirichlet, salvo que los senos están reemplazados por cosenos.

A.3. Si los coeficientes  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son los coeficientes de Fourier de la serie de cosenos de  $f$ , luego

$$T_N(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

es la suma parcial de la serie de cosenos de  $f$ . Esta serie es, por definición, la serie de Fourier (SF) de la extensión  $2L$ -periódica par  $\tilde{f}_p$  de  $f$ . Por las hipótesis sobre  $f$  del enunciado,  $\tilde{f}_p$  es continua por trozos (CPT) en  $[-L, L]$ , derivable en  $] -L, L[$  salvo en un número finito de puntos, de deriva  $\tilde{f}'_p$  CPT en  $[-L, L]$ . Por un corolario del teorema de Dirichlet, sigue que la serie de cosenos de  $f$  converge puntualmente y por lo tanto el límite de su suma parcial  $T_N(x, 0)$  existe cuando  $N \rightarrow \infty$  para todo  $x \in [-L, L]$ .

Por paridad de  $\tilde{f}_p$ ,  $\tilde{f}_p(-L) = \tilde{f}_p(L)$  y  $\tilde{f}_p(0-) = \tilde{f}_p(0+)$ . Por lo tanto,  $\tilde{f}_p$  es continua en  $\mathbb{R}$  y el teorema de Dirichlet nos asegura que

$$S_{\tilde{f}_p}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x, 0) = \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = f(x)$$

para todo  $x \in [-L, L]$ .

[5 puntos]

Además,  $\tilde{f}_p$  satisface las hipótesis del teorema visto en clase para la convergencia uniforme de la SF (más específicamente,  $\tilde{f}_p$  es  $2L$ -periódica, continua en  $\mathbb{R}$ , derivable en  $] -L, L[$  salvo en un número finito de puntos, de deriva  $\tilde{f}'_p$  CPT en  $[-L, L]$ ). Así, la serie del miembro derecho de (1) converge uniformemente con respecto a  $x$  en  $\mathbb{R}$ .

[3 puntos]

B.1. Como visto anteriormente, la serie de cosenos de  $f$  es por definición la SF de la extensión  $2L$ -periódica par de  $f$ , esto es, la extensión  $2L$ -periódica de la función  $f_p$  definida por

$$f_p(x) = \begin{cases} L - x & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ L + x & \text{si } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $\tilde{f}_p$  tiene la forma de triángulos isóceles de vértices  $((2k-1)L, 0)$ ,  $(2kL, L)$  y  $((2k+1)L, 0)$ , con  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Los coeficientes de Fourier de  $\tilde{f}_p$  están dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Integrando  $f(x) = L - x$  sobre el intervalo  $[0, L]$ , obtenemos  $a_0 = L$ . Usando integración por partes y  $\cos(\pi n) = (-1)^n$ , calculamos

$$a_n = \frac{2L}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n), \quad n \neq 0. \quad (4)$$

Luego la serie de cosenos de  $f$  está dada por

$$S_{\tilde{f}_p}(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2 (2m+1)^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right).$$

Esta serie tiene período  $2L$ .

[5 puntos]

La serie de cosenos de  $f$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$  puesto que las hipótesis del teorema visto en clase sobre la convergencia uniforme de la SF se cumplen. De hecho,

(i)  $\tilde{f}_p$  es  $2L$ -periódica y continua en  $\mathbb{R}$  (en particular en  $x = 0$  y  $x = \pm L$ );

(ii)  $\tilde{f}_p$  es derivable en  $] -L, L[\setminus \{0\}$ , de derivada  $\tilde{f}'_p(x) = -\text{sign}(x) \forall x \in ] -L, L[\setminus \{0\}$  y  $\tilde{f}'_p$  es continua por trozos en  $[-L, L]$ .

[3 puntos]

B.2. Deducimos de las preguntas anteriores que si el perfil inicial de temperatura es lineal y dado por  $f(x) = L - x$ ,  $0 \leq x \leq L$ , y los coeficientes  $a_n$  están dados por  $a_0 = L$  y (4), luego  $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x, 0) = f(x)$ .

[2 puntos]

**NOTA:** No hemos mostrado aquí que  $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x, t)$  existe si  $t > 0$  y que su límite  $T_{\infty}(x, t)$  satisface la ecuación del calor. Este resultado se demostrará en el Problema 2 del Listado 4 de ejercicios. También se demostrará en este ejercicio que  $\partial_x T_{\infty}(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_x T_N(x, t)$ . Como  $\partial_x T_N(0, t) = \partial_x T_N(L, t) = 0$  para todo  $N \in \mathbb{N}^*$  (ver 2.), sigue que  $\partial_x T_{\infty}(0, t) = \partial_x T_{\infty}(L, t) = 0$ . Luego, usando también el resultado establecido en la pregunta 3, sigue que  $T_{\infty}(x, t)$  es solución del problema con valores iniciales y de frontera planteado al principio del enunciado.

**PROBLEMA 2. [26 puntos]**

Sea  $f$  la función  $2\pi$ -periódica tal que  $f(t) = t^2$  si  $-\pi < t \leq \pi$ .

1. Encuentre la serie de Fourier de  $f$ .
2. Muestre que esta serie converge uniformemente y que su suma es igual a  $f(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

3. Deduzca el valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

4. Usando la identidad de Parseval, deduzca el valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

5. Determine, a partir de la serie de Fourier de  $f$  obtenida en la pregunta 1, la serie de Fourier de

$$g(t) = \int_0^t f(s) \, ds - \frac{\pi^2}{3} t.$$

Deduzca el valor de  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}$ .

**Desarrollo:** 1. Puesto que  $f$  es una función par, tenemos  $b_n = 0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}^*$ . Calculamos

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dt \, f(t) = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Sea  $n \geq 1$ . Con la ayuda de dos integraciones por partes, obtenemos

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) \, dt = \dots = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Luego la SF de  $f$  está dada por

$$S_f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

[5 puntos]

2. Observamos que

- (i)  $f$  es  $2\pi$ -periódica y continua en  $\mathbb{R}$  (en particular en  $\pm\pi$ , puesto que  $f(-\pi) = f(\pi)$ );
- (ii)  $f$  es derivable en  $] -\pi, \pi[$ , de derivada  $f'(t) = 2t$ , y  $f'$  es CPT en  $[-\pi, \pi]$ .

Por el teorema visto en clase sobre la convergencia uniforme de las series de Fourier, sigue que la SF de  $f$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$  y su suma es igual a  $f(t)$ ,

$$S_f(t) = f(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

[5 puntos]

3. Tomando  $t = \pi$ , sigue

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

[5 puntos]

4. Como  $f$  es  $2\pi$ -periódica y  $f^2$  es integrable sobre  $[-\pi, \pi]$  (puesto que es continua en este intervalo), podemos aplicar la identidad de Parseval. Obtenemos

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t)^2 .$$

Calculando la integral y substituyendo los valores de  $a_n$  y  $b_n$ , sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

[5 puntos]

5. Puesto que  $f$  es  $2\pi$ -periódica y continua en  $[-\pi, \pi]$ , podemos integrar la SF de  $f$  término a término sobre  $[0, t]$  y la serie correspondiente converge a la integral de  $f$ . Luego

$$g(t) = \int_0^t f(s) ds - \frac{a_0}{2}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^t \cos(ns) ds = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nt)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t \in [-\pi, \pi]$  luego  $\int_0^t f(s) ds = t^3/3$ . Por ende,

$$\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2 t}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nt) \quad , \quad -\pi \leq t \leq \pi .$$

[3 puntos]

Tomando  $t = \pi/2$  y usando

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m \text{ es par} \\ (-1)^m & \text{si } n = 2m + 1 \text{ es impar,} \end{cases}$$

obtenemos

$$-\frac{\pi^3}{8} = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1}{(2m+1)^3} (-1)^m \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

[3 puntos]