

TAREA 2 ALGEBRA III 525201-0 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Tener presente que $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

Problema 5. Considere la familia de conjuntos en \mathbb{R} , no vacíos y distintos, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n := \left(-3 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n}\right).$$

Proponga a qué conjunto corresponden

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{y} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

respectivamente, y demuéstrela.

(20 puntos)

Ciertamente, examinando los primeros conjuntos de esta familia, se observa que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$. Esto nos conduce a la siguiente

AFIRMACIÓN 1: $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subseteq A_n$

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $x \in A_{n+1}$. Luego, se tiene

$$-3 - \frac{1}{n} < -3 - \frac{1}{n+1} < x < 5 + \frac{1}{n+1} < 5 + \frac{1}{n} \Rightarrow x \in A_n,$$

con lo cual se concluye que la AFIRMACIÓN 1 es verdadera.

Ahora, planteamos los resultados para la unión e intersección de esta familia de conjuntos, las que serán demostradas por doble inclusión.

AFIRMACIÓN 2: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-4, 6)$.

(\subseteq): Sea

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x \in A_m \subset A_1 = (-4, 6) \Rightarrow x \in (-4, 6),$$

y se concluye la inclusión postulada.

(\supseteq) Sea

$$x \in (-4, 6) = A_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Y de esta manera queda demostrada la otra inclusión, que permite validar la AFIRMACIÓN 2.

AFIRMACIÓN 3: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-3, 5]$.

(\subseteq): Sea

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n &\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : x \in A_m \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : -3 + \frac{1}{m} < x < 5 + \frac{1}{m} \\ &\Rightarrow \text{cuando } m \rightarrow +\infty : -3 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [-3, 5], \end{aligned}$$

y se concluye la inclusión postulada.

(\supseteq) Sea

$$x \in [-3, 5] \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : -3 - \frac{1}{m} < -3 \leq x \leq 5 < 5 + \frac{1}{m} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : x \in A_m \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Y de esta manera queda demostrada la otra inclusión, que permite validar la AFIRMACIÓN 3.

Problema 6. Considere la relación \mathcal{R} en \mathbb{N}^2 dada por: (15 puntos)

$$\forall x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge y_2 \leq x_2.$$

a) Pruebe que \mathcal{R} es relación de orden en \mathbb{N}^2 .

En general, la mayoría supo cómo abordar esta parte del problema. Sólo se observaron casos aislados de confusión en lo que se debía deducir para concluir. Hay que probar que \mathcal{R} es refleja, antisimétrica y transitiva. A partir de esta etapa, usaremos \leq para referirnos a la relación de orden \mathcal{R} .

b) Determine si \mathcal{R} es de orden parcial o total en \mathbb{N}^2 . Además, determine si \mathcal{R} tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo.

En esta parte, en cambio, se ha notado que les ha costado responder o más bien manejar los conceptos para responder con fundamento lo que se pide. Primero, en vista que $(2, 2), (3, 3) \in \mathbb{N}^2$ son tales que $(2, 2) \not\leq (3, 3)$ y $(3, 3) \not\leq (2, 2)$, se concluye que \leq es una relación de orden parcial.

EXISTENCIA DE MAXIMAL: sea $a := (m, n) \in \mathbb{N}^2$. Analizando la definición de la relación, puede encontrarse otro elemento $x := (m + 1, n) \in \mathbb{N}^2$ tal que $x \neq a \wedge a \leq x$, lo cual descarta a a como elemento maximal. Como $a \in \mathbb{N}^2$ es fijo pero arbitrario, se concluye que NO EXISTE MAXIMAL en este caso. Por un resultado visto en clases, esto implica que tampoco existe máximo.

EXISTENCIA DE MINIMAL: sea $a := (m, n) \in \mathbb{N}^2$. Analizando la definición de la relación, puede encontrarse otro elemento $x := (m, n + 1) \in \mathbb{N}^2$ tal que $x \neq a \wedge x \leq a$, lo cual descarta a a como elemento minimal. Como $a \in \mathbb{N}^2$ es fijo pero arbitrario, se concluye que NO EXISTE MINIMAL en este caso. Por un resultado visto en clases, esto implica que tampoco existe mínimo.

Problema 7. Se define la relación \mathcal{R} en $\emptyset \neq A \subseteq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ por: (15 puntos)

$$\forall (a, b), (c, d) \in A : (a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

a) Pruebe que \mathcal{R} es relación de equivalencia en A .

Mismo comentario que en el problema anterior. En general, la mayoría supo cómo abordar esta parte del problema. Sólo se observaron casos aislados de confusión en lo que se debía deducir para concluir. Hay que probar que \mathcal{R} es refleja, simétrica y transitiva. A partir de esta etapa, usaremos \sim para referirnos a la relación de equivalencia \mathcal{R} .

b) Para

$$A := \{(-4, 20), (-3, -9), (-2, -4), (-1, -11), (-1, -3), (1, 2), (1, 5), (2, 10), (2, 14), (3, 6), (4, 8), (4, 12)\},$$

determinar las clases de equivalencia $[(-1, -11)]_{\mathcal{R}}, [(2, 10)]_{\mathcal{R}}, [(1, 2)]_{\mathcal{R}}$.

La mayoría desarrolló correctamente esta parte. Unos pocos no supieron responder, pues en mi opinión no tienen madurado el concepto de clase de equivalencia. Se tiene

$$\begin{aligned} [(-1, -11)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (-1, -11)\} = \{(-1, -11)\}, \\ [(2, 10)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (2, 10)\} = \{(2, 10), (1, 5)\}, \\ [(1, 2)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (1, 2)\} = \{(1, 2), (-2, -4), (3, 6), (4, 8)\}. \end{aligned}$$

c) Determine A/\mathcal{R} , siendo A el conjunto definido en el item anterior.

Se pide el conjunto cociente, el cual es la colección de todas las clases de equivalencia inducida por \sim con elementos de A . Identificando aquellas clases distintas, éstas son $[(-1, -11)]_{\mathcal{R}}, [(2, 10)]_{\mathcal{R}}, [(1, 2)]_{\mathcal{R}}$ (ya calculadas), y también

$$\begin{aligned} [(-4, 20)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (-4, 20)\} = \{(-4, 20)\}, \\ [(2, 14)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (2, 14)\} = \{(2, 14)\}, \\ [(-3, -9)]_{\sim} &:= \{(a, b) \in A : (a, b) \sim (-3, -9)\} = \{(-3, -9), (-1, -3), (4, 12)\}. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} A/\sim &:= \{[(-1, -11)]_\sim, [(2, 10)]_\sim, [(1, 2)]_\sim, [(-4, 20)]_\sim, [(2, 14)]_\sim, [(-3, -9)]_\sim\} \\ &= \left\{ \{(-1, -11)\}, \{(2, 10), (1, 5)\}, \{(1, 2), (-2, -4), (3, 6), (4, 8)\}, \right. \\ &\quad \left. \{(-4, 20)\}, \{(2, 14)\}, \{(-3, -9), (-1, -3), (4, 12)\} \right\}. \end{aligned}$$

Problema 8. Sea A un conjunto no vacío, y \mathcal{R} una relación en A . Se dice que \mathcal{R} es **circular** si y sólo si

$$\forall a, b, c \in A : [a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c] \Rightarrow c \mathcal{R} a.$$

Demuestre que \mathcal{R} es relación de equivalencia en A si y sólo si \mathcal{R} es refleja y circular. **(10 puntos)**

(\Rightarrow) HIPÓTESIS: \mathcal{R} es relación de equivalencia en A . Esto significa que \mathcal{R} es refleja, simétrica y transitiva. Resta, entonces, probar que \mathcal{R} es circular. Sean $a, b, c \in A$ tal que $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c$. Por ser \mathcal{R} transitiva, se infiere que $a \mathcal{R} c$. Como también \mathcal{R} es simétrica, esto implica que $c \mathcal{R} a$. De esta manera, se ha establecido

$$\forall a, b, c \in A : (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \Rightarrow c \mathcal{R} a,$$

con lo cual se tiene que \mathcal{R} es circular.

(\Leftarrow) HIPÓTESIS: \mathcal{R} es relación refleja y circular. Por probar que \mathcal{R} es simétrica y transitiva.

AFIRMACIÓN 1: \mathcal{R} es simétrica.

Sea $a, b \in A$, tales que $a \mathcal{R} b$. Como \mathcal{R} es refleja, se tiene que $b \mathcal{R} b$. Así,

$$(a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} b) \Rightarrow b \mathcal{R} a,$$

lo cual conduce a la implicación: $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$. Procediendo de manera análoga, se infiere también que $b \mathcal{R} a \Rightarrow a \mathcal{R} b$. De esta forma, se ha establecido: $\forall a, b \in A : a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \mathcal{R} a$, es decir \mathcal{R} es simétrica.

AFIRMACIÓN 2: \mathcal{R} es transitiva.

Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c$. Como \mathcal{R} es circular, se infiere que $c \mathcal{R} a$. El hecho que \mathcal{R} es simétrica (propiedad establecida en AFIRMACIÓN 1), implica que $a \mathcal{R} c$. En resumen, se ha establecido que

$$\forall a, b, c \in A : (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c,$$

es decir \mathcal{R} es transitiva.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 06.05.2020, 18:30 horas

RBP/rbp

27.04.2020