Numerabilidad.

- Coordinabilidad.
- Numerabilidad.
- Conjuntos numerables.
- Conjuntos no numerables.

Coordinabilidad.

Sea $f : A \to B$ una **función**. Recordemos algunas definiciones básicas.

- **Imagen:** Dado $E \subset A$, $f(E) := \{f(x),\ x \in E\} \subset B$.
- **Preimagen:** Dado $F \subset B$, $f^{-1}(F) := \{x \in A :\ f(x) \in F\} \subset A$.
- f es **inyectiva**, si $\forall x, y \in A :\ x \neq y,\ f(x) \neq f(y)$.
- f es **sobreyectiva**, si $\forall y \in B,\ \exists x \in A :\ f(x) = y$.
- f es **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva;
- Una **sucesión** es una función definida en $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{N} &\to B \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

  y se denota $\{x_n\}$ o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Def.: Dos conjuntos, A y B, son **coordinables** si $\exists f :\ A \to B$ biyectiva, en cuyo caso denotamos $A \sim B$.

La coordinabilidad es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).

Numerabilidad.

Def.: Dado un conjunto A:

- A es **finito** si $A = \emptyset$ o $\exists N \in \mathbb{N}: \ A \sim \{1, 2, \ldots, N\}$;
- A es **infinito** si no es finito;
- A es **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$;
- A es **a lo sumo numerable** si es finito o numerable;
- A es **no numerable** si no es numerable ni finito.

Notemos que si $A \sim \{1, 2, \ldots, N\}$, entonces A es un conjunto finito que contiene exactamente N elementos.

Por otra parte, un conjunto X es numerable, si y sólo si hay una sucesión $\{x_n\}$ que contiene todos los elementos de X ($n \mapsto x_n$ sobreyectiva) sin repetir ($n \mapsto x_n$ inyectiva). Es decir, si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ con x_n todos distintos.

Conjuntos numerables.

Ejemplo 1: Sea $\boldsymbol{P} := \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los naturales **pares**. Sea

$$\begin{aligned} f\,:\ \mathbb{N} &\to \boldsymbol{P}, \\ k &\mapsto 2k. \end{aligned}$$

f es biyectiva $\implies$ $\boldsymbol{P} \sim \mathbb{N}$ y por lo tanto $\boldsymbol{P}$ **es numerable**.

Este ejemplo muestra que un conjunto numerable (en este caso $\mathbb{N}$) puede contener un subconjunto propio también numerable (en este caso $\boldsymbol{P}$).

Ejemplo 2: Consideremos la siguiente sucesión:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Esa sucesión contiene todos los enteros sin repetición, de manera que

$$\begin{aligned} f\,:\ \mathbb{N} &\to \mathbb{Z}, \\ n &\mapsto x_n, \end{aligned}$$

es una biyección $\implies$ $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathbb{Z}$ **es numerable**.

Este ejemplo muestra que también $\mathbb{Z}$ **es numerable** y, otra vez, que un conjunto numerable ($\mathbb{Z}$) contiene un subconjunto propio numerable ($\mathbb{N}$).

Teor.: Sean A un conjunto numerable y $E \subset A$ un subconjunto **infinito**. Entonces, E también es numerable.

Este teorema nos dice en términos intuitivos que, entre los conjuntos infinitos, los numerables son los más pequeños.

Dem.: A numerable $\Longrightarrow$ $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ con los x_n todos distintos.
Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el menor índice n tal que $x_n \in E$.
Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ el menor índice $n > n_1$ tal que $x_n \in E$.
Procedemos recursivamente: habiendo escogido $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, los k índices más pequeños tales que $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \in E$, sea $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ el menor índice $n > n_k$ tal que $x_n \in E$ (que siempre existe, pues si no E **sería finito**).
De ese modo, construimos el subconjunto $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\} \subset E$.

Como $E \subset A$, todo elemento de E es algún x_n y, por lo tanto, en algún paso del procedimiento recursivo ese x_n es uno de los x_{n_k} escogidos $\Longrightarrow$ $E \subset \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$.
Por lo tanto, $E = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ y, como los x_{n_k} son todos distintos, E es **numerable**. $\square$

Teor.: La unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

Dem.: $\forall n \in \mathbb{N}$, sean $E_n := \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}, \ldots\}$ numerables.

$$
\begin{array}{cccccc}
E_1 : & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & \cdots \\
E_2 : & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
E_n : & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Sea $\quad E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, \cdots\}$.

Como los E_n no son necesariamente disjuntos dos a dos, esta sucesión puede tener elementos repetidos. Si eliminamos los elementos repetidos en esta sucesión, nos queda que E es un conjunto a lo sumo numerable (es decir finito o numerable) de x_{nm} todos distintos. Como E contiene los elementos de cada E_n y como cada E_n es numerable, E tiene infinitos elementos. Por lo tanto, E es numerable. $\square$

Corol.: La unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es un conjunto a lo sumo numerable.

Dem.: **Ej.**

Corol.: $\mathbb{Q}$ es numerable.

Dem.:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{numerable}} \implies \mathbb{Q} \text{ numerable.} \quad \square$$

Corol.: Si A es numerable, entonces, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n$ es numerable.

Dem.: Por inducción en n. Si $n = 1,\ A^n = A$ numerable.

Supongamos A^n **numerable.** Entonces,

$$A^{n+1} = \{(x, y)\,,\ x \in A^n,\ y \in A\} = \bigcup_{y \in A} \underbrace{\{(x, y)\,,\ x \in A^n\}}_{\text{numerable}} \text{ numerable.} \quad \square$$

Conjuntos no numerables.

Teor.: Sea $A := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos. Entonces A es **no numerable**.

Dem.: Por el absurdo. **Supongamos A numerable** $\Longrightarrow$

$$A = \{E_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad E_n := \{x_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ con } x_{nm} \in \{0,1\} \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
E_1 : & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & \cdots \\
E_2 : & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
E_n : & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Sea $F := \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n := 1 - x_{nn},\ n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow\ y_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow F \in A$.

Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n := 1 - x_{nn} \neq x_{nn} \Longrightarrow F \neq E_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow\ F \notin A$. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\square$