

Análisis Numérico III  
Problemas de valores iniciales  
de ecuaciones diferenciales ordinarias (Parte I)  
Módulo 1, Presentación 1

Raimund Bürger

14 de marzo de 2022

# 1.0. Introducción

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden es dado por

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\&\vdots \\y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Cada sistema de funciones

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad y_i \in C^1(a, b), \quad i = 1, \dots, n$$

que satisface (1.1) idénticamente se llama **solución** de (1.1).

**Problemas de valores iniciales:**

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad y_i(a) = y_a^i, \quad i = 1, \dots, n.\tag{1.2}$$

# 1.0. Introducción

Notación compacta:

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_a := \begin{pmatrix} y_a^1 \\ \vdots \\ y_a^n \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

entonces (1.2) se escribe como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a. \quad (1.3)$$

Cada problema de valores iniciales (PVI) de una EDO **del orden  $n$**  puede ser reducido a (1.2) o (1.3).

$$y^{(n)} := \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.4)$$
$$y^{(j)}(a) = y_a^j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

# 1.0. Introducción

Podemos identificar la  $j$ -ésima derivada  $y^{(j)}$  de la función escalar  $y = y(x)$  con la  $(j + 1)$ -ésima componente  $y_{j+1}$  de un vector

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$$

de  $n$  funciones escalares,

$$y^{(j)} = y_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n - 1,$$

y así convertir (1.4) en el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias escalares de primer orden:

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = y_3,$$

⋮

$$y'_{n-1} = y_n,$$

$$y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n).$$

# 1.0. Introducción

Obtenemos un sistema de EDOs del tipo (1.3) con

$$\mathbf{y}(a) = \begin{pmatrix} y_a^0 \\ y_a^1 \\ \vdots \\ y_a^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

La componente  $y_1(x)$  de la solución del sistema corresponde a la solución  $y(x)$  del PVI (1.4).

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

**1.1.1 Método general** Para la aproximación numérica del problema (1.2) o (1.3), se subdivide el intervalo  $[a, b]$  en  $N$  subintervalos del tamaño

$$h := \frac{b - a}{N} > 0,$$

el cual se llama **tamaño de paso**. Los puntos

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N$$

se llaman **puntos de malla**; la totalidad de los puntos para un valor de  $h > 0$  se llama **malla**  $G_h$ .

Queremos calcular **aproximaciones**

$$\mathbf{y}_i^h := (y_{1i}^h, \dots, y_{ni}^h)^T$$

de los valores **exactos**

$$\mathbf{y}(x_i) = (y_1(x_i), \dots, y_n(x_i))^T$$

de la solución (incógnita) en los puntos de la malla.

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Los métodos más simples son **métodos de paso simple explícitos**. Estos métodos permiten la computación de  $\mathbf{y}_{i+1}^h$  cuando se conoce solamente  $\mathbf{y}_i^h$  (para  $h$  dado). Usando una función vectorial

$$\Phi := (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T,$$

obtenemos el método general

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{i+1}^h &= \mathbf{y}_i^h + h\Phi(x_i, \mathbf{y}_i^h; h), \quad i = 0, \dots, N-1, \\ \mathbf{y}_0^h &= \mathbf{y}_a.\end{aligned}\tag{1.5}$$

En detalle,

$$y_{1,i+1}^h = y_{1i}^h + h\Phi_1(x_i, y_{1i}^h, \dots, y_{ni}^h; h),$$

⋮

$$y_{n,i+1}^h = y_{ni}^h + h\Phi_n(x_i, y_{1i}^h, \dots, y_{ni}^h; h),$$

$$y_{k0}^h = y_a^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

El sistema (1.5) es un sistema de **ecuaciones de diferencias**. Obviamente, hay que elegir la función  $\Phi$  de tal forma que los vectores  $\mathbf{y}_i^h$  efectivamente sean aproximaciones de  $\mathbf{y}(x_i)$ .

En el caso más simple, el sistema (1.5) resulta del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de reemplazar todas las derivadas por cuocientes de diferencias. El método (1.5) se llama **método de diferencias finitas de paso simple**.

**1.1.2 Método de Euler** Consideremos el caso  $n = 1$ , o sea una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$y' = f(x, y). \quad (1.6)$$

Si  $y = y(x)$  es una solución suficientemente suave de (1.6), tenemos la fórmula de Taylor

$$y(x + h) = \sum_{k=0}^m \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(x + \theta h), \quad \theta \in [0, 1]. \quad (1.7)$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Para  $x = x_i$  y no considerando el término  $\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(x + \theta h)$  de (1.7), podemos calcular  $y(x_i + h)$  de  $y(x_i)$ , dado que

$$y' = f, \tag{1.8}$$

$$y'' = f_x + ff_y, \tag{1.9}$$

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + f(f_y)^2, \quad \text{etc.}$$

Motivación:

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Este método es poco útil, salvo en aquellos casos donde podemos desarrollar la función  $f$  en una serie de potencias. Sin embargo, para  $m = 1$  tenemos

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(x_i + \theta h).$$

Despreciando el término  $\frac{h^2}{2}y''(x_i + \theta h)$ , llegamos al método

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.10)$$

Ejemplo ad-hoc:

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Este método es un **método de paso simple** con

$$\Phi(x, y; h) = f(x, y),$$

o sea, la función  $\Phi$  no depende de  $h$ .

Para el caso del **sistema (1.3)**, un cálculo análogo entrega el método

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h), \quad i = 0, \dots, N - 1, \quad (1.11)$$

donde

$$\Phi(x, \mathbf{y}; h) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}).$$

En ambos casos, (1.10) y (1.11), podemos reescribir el método como

$$\frac{1}{h}(\mathbf{y}_{i+1}^h - \mathbf{y}_i^h) = \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

lo que ilustra la idea básica de la construcción.

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

El método (1.10) o (1.11) se llama **método de Euler explícito** o **método de trazado poligonal**. Este método es el más simple posible. (Por supuesto, el término “método de Euler explícito” indica que existe también una versión implícita, la cual vamos a conocer más adelante.)

Motivación:

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

### 1.1.3 Métodos de Taylor

Consideremos la fórmula (1.7):

$$y(x+h) = \sum_{k=0}^m \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(x+\theta h), \quad \theta \in [0, 1].$$

Las derivadas de  $y$  son reemplazadas por evaluaciones de la función  $f$  y ciertos términos que involucran sus derivadas parciales. Por ejemplo, partiendo del desarrollo en serie de Taylor truncado

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

y utilizando (1.8) y (1.9), obtenemos

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hf(x, y(x)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left( f_x(x, y(x)) + f(x, y(x))f_y(x, y(x)) \right) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

de lo cual sigue el **método de Taylor de segundo orden**

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h) + \frac{h^2}{2} \left( f_x(x_i, y_i^h) + f(x_i, y_i^h)f_y(x_i, y_i^h) \right).$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h) + \frac{h^2}{2} \left( f_x(x_i, y_i^h) + f(x_i, y_i^h) f_y(x_i, y_i^h) \right).$$

Ejemplo ad-hoc:

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

La gran desventaja de estos métodos es la necesidad de **evaluar numéricamente** (o por derivación automática o simbólica) las derivadas parciales de la función  $f$ . Salvo por casos excepcionales, **no es aceptable** el esfuerzo computacional requerido por tales métodos. Los **métodos del tipo Runge-Kutta** requieren solamente la evaluación de la función  $f$  misma.

**1.1.4 Métodos de Runge-Kutta** Los métodos que vamos a introducir ahora no se distinguen en los casos de ecuaciones escalares y de **sistemas de ecuaciones**, por lo tanto los presentamos desde el principio para el caso de sistemas.

Sea la solución  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  del problema de valores iniciales (1.3)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a$$

conocida en  $x$ , y queremos evaluarla en  $x + h$ ,  $h > 0$ . Utilizando el Teorema Principal del Cálculo Diferencial e Integral, tenemos

$$\mathbf{y}(x + h) = \mathbf{y}(x) + h \int_0^1 \mathbf{y}'(x + \tau h) d\tau. \quad (1.12)$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

La integral se aproxima por una **fórmula de cuadratura**, donde los **nodos**  $\alpha_i$  y los **pesos**  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , se refieren al intervalo de integración  $[0, 1]$ :

$$\int_0^1 \mathbf{g}(w) dw \approx \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{g}(\alpha_i). \quad (1.13)$$

dado que la fórmula de cuadratura (1.13) debe ser exacta por lo menos para  $\mathbf{g} \equiv \text{const.}$ , obtenemos la restricción

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = 1. \quad (1.14)$$

Aproximando la integral en (1.12) por la fórmula de cuadratura (1.13), obtenemos

$$\mathbf{y}(x + h) \approx \mathbf{y}(x) + h \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{y}'(x_i + \alpha_i h). \quad (1.15)$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Usando la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$ , podemos convertir (1.15) en

$$\mathbf{y}(x + h) \approx \mathbf{y}(x) + h \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{f}(x + \alpha_i h, \mathbf{y}(x + \alpha_i h)).$$

Para  $\alpha_i \neq 0$  los valores  $\mathbf{y}(x + \alpha_i h)$  son incógnitos. Para su aproximación, usamos nuevamente el ya mencionado Teorema Principal. Ahora

$$\mathbf{y}(x + \alpha_i h) = \mathbf{y}(x) + h \int_0^{\alpha_i} \mathbf{y}'(x + \tau h) d\tau, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.16)$$

Nuevamente queremos aproximar las integrales en (1.16) por fórmulas de cuadratura. Los nodos de las nuevas fórmulas de cuadratura sean los mismos valores  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  de (1.13).

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Para la aproximación de la integral en (1.16) sobre el intervalo  $[0, \alpha_i] \subset [0, 1]$  usamos una fórmula del tipo

$$\int_0^{\alpha_i} \mathbf{g}(w) dw \approx \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \mathbf{g}(\alpha_j), \quad i = 1, \dots, m,$$

donde los pesos  $\beta_{ij}$  aún no están especificados, y los nodos  $\alpha_j$  dados no necesariamente deben pertenecer a  $[0, \alpha_i]$ . Se debe satisfacer

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.17)$$

Un **método de Runge-Kutta de  $m$  pasos** es dado por las fórmulas

$$\mathbf{y}^h(x + h) = \mathbf{y}^h(x) + h \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{k}_i, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f} \left( x + \alpha_i h, \mathbf{y}^h(x) + h \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \mathbf{k}_j \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.19)$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

En general, (1.19) representa un sistema de  $m$  ecuaciones no lineales para  $m$  vectores  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m$ , cada uno con  $n$  componentes escalares. Incluso para una ecuación escalar, tenemos un sistema de  $m$  ecuaciones (algebraicas) de la dimensión  $m$ .

Para el caso  $\alpha_1 = 0$  y  $\beta_{ij} = 0$  para  $j \geq i$ , (1.19) no es intrinsecamente un sistema de ecuaciones no lineales, ya que en este caso podemos calcular  $\mathbf{k}_2$  explícitamente de  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ ,  $\mathbf{k}_3$  de  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$ , etc. En este caso, se habla de un **método de Runge-Kutta explícito**.

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

Dado que las fórmulas (1.18) y (1.19) son las mismas para todos los métodos de Runge-Kutta, pero hay una gran cantidad de coeficientes  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_{ij}$  propuestos en la literatura, es muy común representar un método de Runge-Kutta a través del llamado **diagrama de Butcher**:

$$\begin{array}{c|ccccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \cdots & \beta_{mm} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m \end{array} \quad (1.20)$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

**Ejemplo 1.1 (Métodos de Heun)** Para  $m = 3$ , los métodos de Heun son dados por

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}.$$

En detalle, combinando (1.18) y (1.19) con el diagrama de Butcher, podemos, por ejemplo, escribir el segundo método como

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + h \left( \frac{1}{4} \mathbf{k}_1^{(i)} + \frac{3}{4} \mathbf{k}_3^{(i)} \right),$$

donde  $\mathbf{k}_1^{(i)} = \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h)$ ,

$$\mathbf{k}_2^{(i)} = \mathbf{f} \left( x_i + \frac{h}{3}, \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{3} \mathbf{k}_1^{(i)} \right),$$

$$\mathbf{k}_3^{(i)} = \mathbf{f} \left( x_i + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}_i^h + \frac{2h}{3} \mathbf{k}_2^{(i)} \right).$$

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

### Ejemplo 1.2 (Método clásico de Runge-Kutta de cuatro pasos)

Este método con  $m = 4$  corresponde al diagrama

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

## 1.1. Métodos de paso simple explícitos

**Ejemplo 1.2 (continuación)** Es decir, este método corresponde a la fórmula

$$\mathbf{y}_{i+1}^h = \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{(i)} + 2\mathbf{k}_2^{(i)} + 2\mathbf{k}_3^{(i)} + \mathbf{k}_4^{(i)})$$

o equivalentemente, al método (1.5) con

$$\Phi(x_i, \mathbf{y}_i^h; h) = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1^{(i)} + 2\mathbf{k}_2^{(i)} + 2\mathbf{k}_3^{(i)} + \mathbf{k}_4^{(i)}),$$

donde

$$\mathbf{k}_1^{(i)} = \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i^h),$$

$$\mathbf{k}_2^{(i)} = \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{(i)}\right),$$

$$\mathbf{k}_3^{(i)} = \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i^h + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{(i)}\right),$$

$$\mathbf{k}_4^{(i)} = \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_i^h + h\mathbf{k}_3^{(i)}).$$