Problemas de Optimización

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si f es continua, el Teorema de Valores Extremos nos garantiza la existencia de máximos y mínimos absolutos de la función. ¿Cómo encontrar estos puntos?

Si $x_0 \in [a, b]$ es un punto de extremo absoluto de f, puede darse dos casos:

- $x_0 \in]a, b[$: x_0 es un extremo relativo y, por tanto, un punto crítico de f.
- x_0 pertenece a la *frontera* de $[a, b]$, es decir, $x_0 = a$ o $x_0 = b$.

Así, el procedimiento es el siguiente:

1. Determinar puntos críticos de f en $]a, b[$.
2. Evaluar f en cada uno de estos puntos críticos obtenidos anteriormente y compararlos con $f(a)$ y $f(b)$.
3. Elegir la mayor y menor imagen obtenida en el paso anterior. **La mayor imagen será el máximo absoluto de f en $[a, b]$ y la menor imagen será el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.**

Problema 1

Un administrador de un complejo de departamentos tiene 50 *departamentos a su cargo. Si fija el arriendo a* $\$350000$ *pesos el mes, todos los departamentos están ocupados, y por cada incremento de* $\$25000$*, se arrienda un departamento menos. Los costos de mantención de un departamento ocupado son de* $\$50000$ *al mes ¿Cuál es la renta que maximiza la cantidad total de ganancia?*

Solución. Primero, debemos determinar la función que nos entrega la ganancia total mensual. Para ello, denotamos por x las veces que se incrementa la renta, de aquí notamos que $0 \leq x \leq 50$. El arriendo de un departamento es $R(x) = 350\,000 + 25\,000x$.

$$\begin{aligned} G(x) &= R(x)(50-x) - 50\,000(50-x) \\ &= (350\,000 + 25\,000x)(50-x) - 50\,000(50-x) \\ &= -25\,000x^2 + 1\,300\,000x + 15\,000\,000 \end{aligned}$$

Se debe encontrar el máximo absoluto de $G(x)$ en $[0, 50]$. Como G es una función continua (en $\mathbb{R}$), por TVE existe tal punto en $[0, 50]$.

(1) Los puntos críticos de G en $]0, 50[$:

$$G'(x) = -50\,000x + 1\,300\,000$$
$$\Longrightarrow G'(x) = 0 \iff x = 26$$

(2) Se evalúa G en el punto crítico y en los bordes del intervalo:

$$G(26) = 22\,700\,000$$
$$G(0) = 15\,000\,000 \qquad G(50) = 0$$

Luego, $x = 26$ es el máximo absoluto de G en $[0, 50]$. Por lo tanto, la renta que mayor ganancia da es de $\$1\,000\,000$.

Una función continua sobre un intervalo no cerrado y acotado I no cumple con las hipótesis de TVE, luego no se garantiza la existencia de extremos absolutos de la función en el intervalo I.

Sin embargo, en el caso de que f tenga **un único punto crítico** x_0 en el intervalo I, para saber si es un extremo absoluto, se puede usar los criterios de primera o segunda derivada.

Problema 2

Un edificio alto está rodeado por una reja de 4 metros de altura a una distancia de 3 metros de éste. ¿Cual es la longitud de la escalera más corta que apoyada en el suelo y pasando por encima de la reja llega al edificio?

Solución. Denotamos por x a la distancia entre el pie de la escalera y la reja, y a la altura del edificio donde se apoyaría la escalera. Notar que $x > 0$.

Por Teorema de Pitágoras, el largo de la escalera, denotado por L, es

$$L^2 = y^2 + (3 + x)^2.$$

Por otro lado, por Teorema de Thales,

$$\frac{4}{y} = \frac{x}{x+3} \implies y = \frac{4(x+3)}{x},$$

y de este modo,

$$L^2(x) = 16\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 + (x+3)^2 \qquad (\clubsuit)$$

Problema 2
Continuación

La función a minimizar es L. Notamos que, como $L > 1$, si minimizamos L^2 también se minimiza L. Así, derivamos (♣) respecto a x

$$2LL'(x) = -32\left(1+\frac{3}{x}\right)\frac{(3)}{x^2} + 2(x+3)$$

y determinamos los puntos críticos de L

$$\begin{aligned} L'(x) = 0 &\iff -\frac{48}{x^2}\left(\frac{x+3}{x}\right) + (x+3) = 0 \\ &\implies (x+3)\left(1-\frac{48}{x^3}\right) = 0 \\ &\implies x = -3 \ \vee \ x = (48)^{1/3} \end{aligned}$$

Descartamos la primera solución ya que no pertenece al intervalo $]0,+\infty[$ y verificamos que $x = \sqrt[3]{48}$ es un mínimo local.

Problema 2

Final

Para ello, analizamos los signos de la primera derivada, como $L > 0$, el signo de $L'(x)$ será el signo de

$$-32\left(1+\frac{3}{x}\right)\frac{(3)}{x^2}+2(x+3)=2(x+3)\left(1-\frac{48}{x^3}\right)$$

de donde se obtiene que $L'(x) < 0$ para todo $x \in]0, \sqrt[3]{48}[$ y $L'(x) > 0$ si $x \in]\sqrt[3]{48}, +\infty[$. Así, por el Criterio de Primera de derivada, se concluye que $x = \sqrt[3]{48}$ es mínimo local, y al ser único punto crítico de L, es mínimo global de L.

Por lo tanto, la mínima longitud que puede tener la escalera que cumpla con el enunciado, es

$$\sqrt{16\left(1+\frac{3}{\sqrt[3]{48}}\right)^2+(3+\sqrt[3]{48})^2} \approx 9{,}87 \text{ metros.}$$