UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 7 ALGEBRA III 525201-0: Dualidad. Anulador. Aplicación dual.

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $w \in V \backslash \{\theta\}$. Pruebe que existe $T \in V'$ tal que $T(w) = 1$.
2. Sea $S := \{\varphi \in \left(\mathbb{R}^3\right)' \,|\, \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Muestre que S es un subespacio vectorial de $\left(\mathbb{R}^3\right)'$ y determine una base de S.
3. Dada la base B del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, determinar su base dual en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $V := \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $B := \{(1,-1),(2,0)\}$.
   (b) $V := \mathbb{C}^3$, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, $B := \{(1,0,i),(0,1,-1),(i,1,0)\}$.
4. Sea $\tilde{B} := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $\left(\mathbb{R}^3\right)'$ definida por
$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) := x_1 + x_2\,, \quad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) := x_1 + x_3\,, \quad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) := x_2 + x_3\,.$$
   Determinar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{B}$ es la base dual de B.
5. Sea $B := \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Determinar las coordenadas de la base dual de B respecto de la base dual de la canónica.
6. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto T(x,y,z) := (4x+5y+6z, 7x+8y+9z)$. Considere $B_1 := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y $B_2 := \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Definir los funcionales lineales $T'(\varphi_1)$ y $T'(\varphi_2)$.
   (b) Expresar $T'(\varphi_1)$ y $T'(\varphi_2)$ como combinación lineal de elementos de B_2.
7. Sean $V := \mathbb{R}^2$ y $W := \mathbb{R}^3$. Considere también $B := \{(1,2),(1,3)\}$ y $C := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ bases de V y W, respectivamente. Se define $T \in \mathcal{L}(V,W)$ de modo que $V \ni (x_1,x_2) \mapsto T(x_1,x_2) := (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$.
   (a) Determinar T'.
   (b) Determinar B' y C'.
   (c) Determinar $[T]_B^C$ y $[T']_{C'}^{B'}$. ¿Qué se observa?
8. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V'$, siendo $V := \mathbb{R}^3$ y $S := \langle\{(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)\}\rangle$.
9. Dados los subespacios $U := \langle\{(1,1,-1,1),(2,-1,3,1)\}\rangle$ y $W := \langle\{(2,4,-8,0),(-1,1,2,3)\}\rangle$ del espacio vectorial real $V := \mathbb{R}^4$, determinar una base de $(U+W)^\circ$ y una base de $(U \cap W)^\circ$.
10. Considere $\varphi \in (\mathcal{P}_5(\mathbb{R}))'$ dado para cada $p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, por $\varphi(p) := p(8)$. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbb{R}))$, tal que $\mathrm{Ker}(T') = \langle\{\varphi\}\rangle$. Pruebe que $\mathrm{Im}(T) = \{p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) : p(8) = 0\}$.
11. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Deduzca que cualquier funcional (lineal) en V', es sobreyectiva ó la aplicación nula.
12. Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada una, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$.
    Demostrar que $T' = \Theta_{\mathcal{L}(W',V')}$ si y sólo si $T = \Theta_{\mathcal{L}(V,W)}$.
13. Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada una. Pruebe que la aplicación que transforma $T \in \mathcal{L}(V,W)$ en $T' \in \mathcal{L}(W',V')$, es un isomorfismo de $\mathcal{L}(V,W)$ sobre $\mathcal{L}(W',V')$.
14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios de V. Demuestre que:
    (a) $U = \{\theta\}$ si y sólo si $U^\circ = V'$.
    (b) $U = V$ si y sólo si $U^\circ = \{\Theta\}$.
15. Determinar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean invariantes respecto a la aplicación lineal:
    (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) := (4x+2y, -3x+11y)$.
    (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,y) := (-y,x)$.
16. Consideremos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definida por $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto T(x,y,z) := (-2y+4z, -x-y+z, 3x-3y+z)$, y los subespacios $W_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y+z = 0\}$ y $W_2 := \langle\{(1,0,1)\}\rangle$.
    (a) Muestre que W_1 y W_2 son T-invariantes, y que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.
    (b) Luego, determine una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B^B$ sea diagonal por bloques.

Ejercicios propuestos:

17. Dada la base B del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, determinar su base dual en cada uno de los siguientes casos:
    (a) $V := \mathbb{R}^3$, $B := \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
    (b) $V := \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $B := \{p_0,p_1,p_2,p_3\}$, siendo $p_0(t) := -t+2$, $p_1(t) := t-1$, $p_2(t) := t^2-3t+2$, $p_3(t) := t^3-3t^2+2t$.

18. Sea $\varphi \in \left(\mathbb{R}^3\right)'$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) := 2x_1+3x_2-x_3$, y sea $E := \{f_1,f_2,f_3\} \subseteq \left(\mathbb{R}^3\right)'$ la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Determinar las coordenadas de φ respecto de E.
    (b) Determinar las coordenadas de φ respecto de la base $\tilde{E} := \{f_1+f_2+f_3, f_1+f_2, f_1\}$.
    (c) Considere ahora el subespacio $S := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1+3x_2-x_3 = 0\}$, y sea $B := \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Determine un caracterización de los elementos de S.
    HINT: verificar que $\tilde{E}$ es la base dual de B, y no hacer cuenta alguna.

19. Sean $B_1 := \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_2 := \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Si $\varphi \in \left(\mathbb{R}^3\right)'$ tiene coordenadas $(1,-3,2)^t$ respecto de B_1', determinar sus coordenadas respecto de B_2'.

20. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V'$ en los siguientes casos:
    (a) $V := \mathbb{R}^4$ y $S := \langle\{(1,1,-1,1),(2,1-,3,1)\}\rangle$.
    (b) $V := \mathbb{R}^3$ y $S := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1+x_3 = 0 \wedge 2x_1-x_2+x_3 = 0\}$.

21. Para los siguientes subespacios U y W del espacio vectorial real V, determinar una base de $(U+W)^\circ$ y una base de $(U\cap W)^\circ$.
    (a) $V := \mathbb{R}^4$, $U := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1-x_3 = 0 \wedge x_1+x_2+x_4 = 0\}$, $W := \langle\{(2,1,3,1)\}\rangle$.

22. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y U, W subespacios de V. Demuestre que:
    (a) $U \subseteq W \Rightarrow W^\circ \subseteq U^\circ$.
    (b) $W^\circ \subseteq U^\circ \Rightarrow U \subseteq W$.

    REMARK: la propiedad (a) es válida incluso en dimensión infinita.

23. Sean $\alpha_0,...,\alpha_n \in \mathbb{K}$, tal que $\forall\, i \neq j : \alpha_i \neq \alpha_j$. Para cada $i \in \{0,...,n\}$, se define $T_{\alpha_i} \in \left(\mathcal{P}_n(\mathbb{K})\right)'$ como $\mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \ni p \mapsto T_{\alpha_i}(p) := p(\alpha_i)$.
    (a) Demostrar que $B_1 := \{T_{\alpha_i}\}_{i=0}^n$ es una base de $\left(\mathcal{P}_n(\mathbb{K})\right)'$.
    (b) Sea $B := \{q_j\}_{j=0}^n$ la base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ tal que $B' = B_1$. Pruebe que el polinomio $p := \sum_{i=0}^n \beta_i\, q_i$ es el único polinomio en $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ tal que $\forall\, i \in \{0,...,n\} : p(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se conoce como el POLINOMIO INTERPOLANTE DE LAGRANGE.
    (c) En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, probar que existe $\{\omega_j\}_{j=0}^n \subseteq \mathbb{R}$, tal que
    $$\forall\, p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \int_0^1 p(x)dx = \sum_{j=0}^n \omega_j\, p(\alpha_j)\,.$$
    Para el caso $n = 2$, determinar $\{\omega_j\}_{j=0}^2 \subseteq \mathbb{R}$, cuando $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1/2$ y $\alpha_2 = 0$.

24. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se define el ESPACIO BIDUAL DE V, denotado por V'', al espacio dual de V'. En otras palabras, $V'' := \left(V'\right)'$. Se define $\Lambda : V \to V''$, por $V \ni z\,,\, V' \ni \varphi \mapsto \Lambda(z)(\varphi) := \varphi(z)$. Demuestre que
    (a) $\Lambda \in \mathcal{L}(V,V'')$.
    (b) $\forall T \in \mathcal{L}(V) : T'' \circ \Lambda = \Lambda \circ T$, siendo $T'' := \left(T'\right)'$ (APLICACIÓN BIDUAL DE T).
    (c) Si además V es finito dimensional, entonces Λ es un isomorfismo de V en V''.

25. Determinar todos los subespacios del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ que sean invariantes respecto a la aplicación lineal:
    (a) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x,y) := (4x+2y, -3x+11y)$.
    (b) $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $L(x,y) := (-y,x)$.

26. Considere V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sean $S,T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $ST = TS$. Pruebe que $\mathrm{Ker}(S)$ y $\mathrm{Im}(S)$ son invariantes bajo T.