



Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán

Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema N°2: Funciones Reales

Clase N°19 - 07/05/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Ejemplos

Determine el valor de $\sin(t)$ y $\cos(t)$ para los siguientes ángulos.

(a) $t = 0.$

(b) $t = \frac{\pi}{4}.$

(c) $t = \frac{\pi}{6}.$

(d) $t = \frac{\pi}{3}.$

(e) $t = \frac{\pi}{2}.$

(f) $t = \frac{3\pi}{4}.$

(g) $t = \pi.$

(h) $t = -\frac{3\pi}{2}.$

(i) $t = \frac{15\pi}{6}.$

Funciones Trigonométricas

Dadas las funciones anteriores, podemos definir las siguientes:

1. $\tan : \text{Dom}(\tan) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$
2. $\cot : \text{Dom}(\cot) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$
3. $\sec : \text{Dom}(\sec) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$
4. $\csc : \text{Dom}(\csc) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$

Identidades Trigonométricas

Definición

Una identidad trigonométrica es una igualdad que relaciona dos funciones trigonométricas y que es válida para un dominio en común.

Ejemplos: Algunas de las identidades ya las hemos visto:

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \equiv 1$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha) \equiv \cos(-\alpha)$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin(-\alpha) \equiv -\sin(\alpha)$

Identidades Trigonométricas

Existen otro tipo de identidades trigonométricas que relacionan la suma o diferencia de ángulos, como las siguientes:

1. $\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
3. $\cos(2\alpha) \equiv \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
4. $\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
5. $\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$
6. $\sin(2\alpha) \equiv 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Ejercicios

1. Determinar el valor de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ si:
 - (a) $\cos(\alpha) = -\frac{7}{9}$, sabiendo que $P(\alpha) \notin \text{III}$ cuadrante.
 - (b) $\tan(\alpha) = -\frac{1}{2} \wedge \sin(\alpha) > 0$.
2. Si $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$ y $P(\alpha) \notin \text{I}$ cuadrante, además $\sec(\beta) = -\frac{5}{4}$ y $P(\beta) \in \text{III}$ cuadrante. Calcular el valor exacto de:
 - (a) $\sin(2\alpha)$
 - (b) $\tan(\alpha + \beta)$
3. Demuestre las siguientes identidades:
 - (a) $2 \cot(2\alpha) \equiv \frac{\sin(3\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\cos(3\alpha)}{\sin(\alpha)}$
 - (b) $\sec^4(\alpha) - \sec^2(\alpha) \equiv \tan^2(\alpha) + \tan^2(\alpha)$
 - (c) $\frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \equiv 1 - 2 \sin^2(\alpha)$