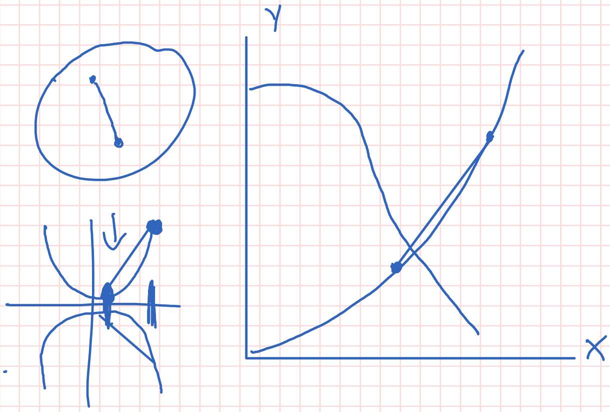
Funciones Convexas y Cóncavas.

miércoles, 7 de abril de 2021 17:15



Si K es un cjto convexo se dice que $f : K \to \mathbb{R}$ es convexa sí: Para $x_1, x_2 \in K$, $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

se dice que f es cóncava sí $-f$ es convexo o tambien sí $x_1, x_2 \in K$, $\lambda \in (0,1)$.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

ejemplo: Consideremos el problema lineal

$$\min \; c^t x$$
$$\text{s.a} \quad Ax \geq b$$
$$x \geq 0.$$

esto induce un conjunto $K := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ → Vacío, → Acotado, → no Acotado

Pero también el conjunto $S := \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \min_{z \in K} c^t z\}$.

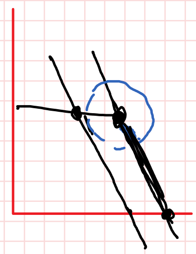
Probemos que S es Convexo y cerrado

(1) Convexidad: Sean $x_1, x_2 \in S$, $S \neq \phi$, entonces

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad , \lambda \in (0,1)$$

Así $c^t x_\lambda = \lambda c^t x_1 + (1-\lambda) c^t x_2$ Por def $x_1, x_2 \in S$.

$$= \lambda \min_{z \in K} c^t z + (1-\lambda) \cdot \min_{z \in K} c^t z = \min_{z \in K} c^t z$$
$$\leq c^t x \quad , x \in K$$



$\Rightarrow x_\lambda \in S$.

(2) Cerrado: Sea x un punto de Acumulación de S, Pdq $x \in S$.

$$\Rightarrow \text{Para Todo } \varepsilon > 0 \quad (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap S \neq \phi$$

Tomemos $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$, entonces existe $y \in S$. tal que $y \in B(x,\varepsilon)$, $y \neq x$ en otras palabras

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{n} \qquad / \; \|\cdot\| \text{ induce una métrica}$$

Tomemos el P.i de c con $(x-y)$

$$|c^t(x-y)| \leq \|c\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|x-y\|_{\mathbb{R}^n} < \underbrace{\|c\|_{\mathbb{R}^n}}_{<\infty} \cdot \frac{1}{n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Cuando hacemos que $n \to \infty$: $\qquad \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$|c^t(x-y)| = 0 \Rightarrow c^t(x-y) = 0$$
$$\Rightarrow c^t x = c^t y = \min_{z \in K} c^t z \Rightarrow x \in S.$$

Como x es punto de Acumulación y $x \in S$ $\Rightarrow$ S es cerrado.
Y x es arbitrario

Ejercicio: Abstrayendo la demostración Anterior pruebe la convexidad del cjto solución del problema

Singleton $\{a\}$

$S = \{x\}$ es cerrado //

Ejercicio: Abstrayendo la demostración Anterior pruebe la convexidad del conjunto solución del problema

$$\min_{x\in K} f(x)$$

Si $K\subseteq\mathbb{R}^n$ convexo y $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es convexa.

$S=\{\bar{x}\}$ es cerrado //

Dem: Para esto definimos $S:=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=\min_{z\in K} f(z)\}$

Sean $x_1,x_2\in S$. Luego $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $\lambda\in(0,1)$.
es claro notar que $x_\lambda\in K$ (porque K es convexo)

P.d.q. $f(x_\lambda)=\min_{z\in K} f(z) \iff x_\lambda\in S.$ $\iff S$ es convexo

$\geq$) $f(x_\lambda)\geq \min_{z\in K} f(z)$, $x_\lambda\in K$

$\leq$) $f(x_\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$; Como f es convexa y $\lambda\in(0,1)$.

$$\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
$$=\lambda \min_{z\in K} f(z)+(1-\lambda)\min_{z\in K} f(z)=\min_{z\in K} f(z)$$

$\Rightarrow f(x_\lambda)=\min_{z\in K} f(z) \Rightarrow x_\lambda\in S \Rightarrow S$ es convexo.

Ejemplo: Sea $K:=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\geq b, x\geq 0\}$, y sea $x_0\in K$
Pero $Ax_0>b$ y $x_0>0$.

Vamos a mostrar que x_0 no es solución óptima del Problema

$$\min_{x\in K} c^t x \iff \min c^t x \quad \text{s.a } Ax\geq b,\ x\geq 0.$$

$$K_0:=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax>b, x>0\}\subset K$$

Vamos a mostrar que K_0 es abierto

$$K_0^c:=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b \vee x\leq 0\}.$$

Sea x un punto de acumulación de K_0^c, Así para todo $\varepsilon>0$ $(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap K_0^c\neq\emptyset$
y elijamos $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$; y tomemos $y\in B(x,\frac{1}{n})\setminus\{x\}$.
es claro notar

$$\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}\leq\frac{1}{n}$$

$$A=\begin{pmatrix} — c_1 — \\ — c_2 — \\ \vdots \\ — c_m — \end{pmatrix} \quad c_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\dots,m \quad A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

$$Ax=\begin{pmatrix} c_1^t x \\ c_2^t x \\ \vdots \\ c_m^t x\end{pmatrix} \qquad |\langle u,v\rangle|^2\leq\|u\|^2\cdot\|v\|^2$$

$$\|A(x-y)\|^2_{\mathbb{R}^n}=\sum_{i=1}^m |c_i^t(x-y)|^2$$
$$\leq m\cdot\max_{1\leq i\leq m}|c_i^t(x-y)|^2$$

sea $k\in\{1,\dots,m\}$ tal que $|c^t$

Así

$$\|A(x-y)\|^2_{\mathbb{R}^n}\leq m\cdot|c_k^t(x-y)|^2\leq m\cdot\|c_k\|^2\cdot\|x-y\|^2\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Así

$$\|A(x-y)\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq m \cdot |C_k^t (x-y)|^2 \leq \underbrace{m \cdot \|C_k\|^2}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|x-y\|^2}_{<\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

$\Rightarrow \|A(x-y)\|^2 = 0$, cuando $n \to \infty$

$A(x-y) = 0$, ''

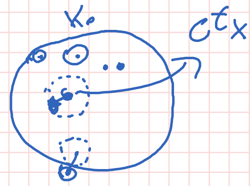
$\Rightarrow Ax = Ay \leq b \Rightarrow Ax \leq b \Rightarrow x \in K_0^c$ $\therefore$ K_0^c es cerrado

$\Rightarrow K_0$ es abierto

$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax > b, x > 0\}$. es abierto

recordemos que queremos probar que si $x_0 \in K$ $\to x_0 \in K_0$ cumple que $Ax_0 > b$ y $x_0 > 0$ entonces no es solución optima del problema.

¿Porque pedimos K_0 Abierto?



Pues si $x_0 \in K_0$ (Abierto) existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \tfrac{\varepsilon}{2}) \subset K_0$$

Ahora definimos $\hat{x} := x_0 - \delta c$, c es el vector costo
$\delta > 0$.

Si elegimos $\delta := \frac{\varepsilon}{2\|c\|}$

Así

$$\|x_0 - \hat{x}\| = \|\overbrace{x_0 - x_0}^{0} + \delta c\| = \|\delta c\| = \frac{\varepsilon}{2\|c\|} \cdot \|c\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

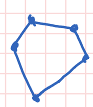
$\therefore \hat{x} \in K_0$, Verifiquemos que $\hat{x}$ minimiza aún más la función costo:

$$C^t \hat{x} = C^t x_0 - \delta C^t C \quad , \delta > 0$$

$$= C^t x_0 - \underbrace{\delta \|c\|^2}_{>0} < C^t x_0 \Rightarrow x_0 \text{ no minimiza la función costo } C^t x .$$

finalmente dado que $x_0 \in K_0$ es Arbitrario los puntos de K_0 no son solución optima del problema. ∎

Ejercicio: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in U$ entonces x_0 no es solución optima del problema $\min_{x \in U} C^t x$

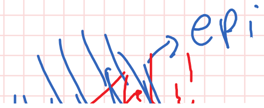


Def: Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. y $f : C \to \mathbb{R}$ se define el epígrafo de f como sigue

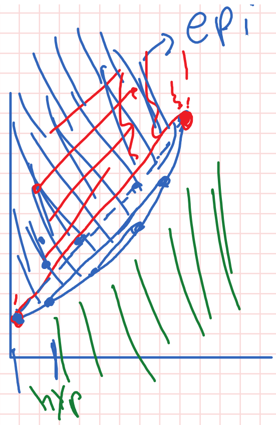
$$\text{epi}(f) := \{(\underset{C \subseteq \mathbb{R}^n}{x}, \underset{\in \mathbb{R}}{t}) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$$

análogamente se define el hipografo

$$\text{hyp}(f) := \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$$



$$\text{hyp}(f) := \{ (x,t) \in C\times\mathbb{R} : f(x) \geq t \}$$



ejercicio: Probar que $\text{epi}(f)$ es convexo $\iff$ f es convexa

$\Rightarrow$) Sean $(x_1,t_1);(x_2,t_2)\in \text{Epi}(f)$ tal que $f(x_1)=t_1 \wedge f(x_2)=t_2$

Luego tomamos $\lambda\in(0,1)$, $(x_\lambda,t_\lambda)=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2;\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\in \text{Epi}(f)$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq t_\lambda=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2$$
$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

Como esto se cumple para todo $x_1,x_2\in C$ $(\text{Dom}(f))$ f es convexa.

$\Leftarrow$) Sean $(x_1,\underset{?}{t_1})$ $\geq f(x_1)$; (x_2,t_2) $\geq f(x_2)$ $\in \text{epi}(f)$. Y sea $(x_\lambda,t_\lambda)=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2;\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)$ $\lambda\in(0,1)$

Así: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \overset{\geq 0}{\lambda}\underbrace{f(x_1)}_{t_1}+\overset{\geq 0}{(1-\lambda)}\underbrace{f(x_2)}_{t_2}$

$$\leq \lambda t_1+(1-\lambda)t_2=t_\lambda$$

Pdq $f(x_\lambda)\leq t_\lambda$

$\therefore$ $(x_\lambda,t_\lambda)\in\text{Epi}(f)$ y $\therefore$ $\text{Epi}(f)$ es convexo

Ejercicio. Probar que:

f es cóncava $\iff$ $\text{hyp}(f)$ es convexo.