UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Pauta Evaluación 2

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una aplicación lineal. Pruebe que:
   a) $Ker(T) = Ker(T^2) \iff Ker(T) \cap Im(T) = \{\theta\}$.
   b) $dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2)) \iff Im(T) = Im(T^2)$.

2. Sea V un espacio vectorial real con $dim(V) = n \geq 2$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base. Se define la aplicación lineal $T : V \to V$ por:

$$T(v_1) = v_1 \quad \wedge \quad \forall j = 2, \ldots, n,\ T(v_j) = v_j + v_{j-1}.$$

   a) Determine $[T]_{BB}$.
   b) Calcule $Ker(T)$ e $Im(T)$. Concluya si T es o no un automorfismo.
   c) Muestre que $\{v_n, (T - Id)(v_n), (T - Id)^2(v_n), \ldots, (T - Id)^{n-1}(v_n)\}$ es base de V.
   d) Encuentre los valores y vectores propios de T ¿Es T diagonalizable?

3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interior y $T : V \to V$ una aplicación lineal simétrica tal que $T^2 = T$. Pruebe que:
   a) $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
   b) $V = Ker(T) \oplus Ker(T - Id)$.
   c) $\forall u \in Ker(T),\ v \in Im(T),\ \langle u, v \rangle = 0$.

Soln:

1. Del listado 3 de ejercicios sabemos que $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$ y $Im(T^2) \subseteq Im(T)$.
   a) ($\Rightarrow$) Supongamos $Ker(T) = Ker(T^2)$ y sea $v \in Ker(T) \cap Im(T)$. Luego, existe $u \in V$ tal que $v = T(u)$ y $T(v) = \theta$. De aquí, $T(v) = T(T(u)) = \theta$ y por consiguiente $u \in Ker(T^2) = Ker(T)$ lo que implica que $v = T(u) = \theta$. Por lo tanto, $Ker(T) \cap Im(T) = \{\theta\}$.
   ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $Ker(T) \cap Im(T) = \{\theta\}$. Sea $v \in Ker(T^2)$. Luego, $T^2(v) = \theta \implies T(v) \in Ker(T)$. Como $T(v) \in Im(T)$, entonces por hipótesis $T(v) = \theta \implies v \in Ker(T)$. Así, $Ker(T^2) \subseteq Ker(T) \implies Ker(T) = Ker(T^2)$.

b) Como V es de dimensión finita se tiene por el Teorema de Núcleo-Imagen que:

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(Ker(T^2)) + dim(Im(T^2)).$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2))$, esto implica que $dim(Im(T)) = dim(Im(T^2))$ y como $Im(T^2) \subseteq Im(T)$, entonces $Im(T^2) = Im(T)$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $Im(T^2) = Im(T)$. Luego,

$$Im(T^2) = Im(T) \implies dim(Im(T)) = dim(Im(T^2)) \implies dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2)).$$

2. a) Como

$$T(v_1) = v_1 \quad \wedge \quad \forall j = 2, \dots, n,\ T(v_j) = v_j + v_{j-1}$$

y

$$[T]_{BB} = [\ [T(v_1)]_B\ [T(v_2)]_B \cdots [T(v_n)]_B\ ],$$

entonces

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $v \in Ker(T) \iff [v]_B \in Ker([T]_{BB})$. Por otro lado,

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \in Ker([T]_{BB}) \iff [T]_{BB} \cdot x = \theta.$$

Como

$$[T]_{BB} \cdot x = \theta \iff \forall j = 1, \dots, n-1,\ x_j + x_{j+1} = 0 \ \wedge\ x_n = 0 \implies x = \theta,$$

entonces $Ker([T]_{BB}) = \{\theta\} \implies Ker(T) = \{\theta\}$. Luego, T es inyectiva. Por otro lado, como V es de dimensión finita, entonces por resultado visto en clase T es inyectiva si y sólo si T es biyectiva, lo que implica que $Im(T) = V$ y T es entonces un automorfismo.

c) Probemos por inducción sobre $k = 1, \dots, n-1$ que $(T - Id)^k(v_n) = v_{n-k}$.
En efecto, para $k = 1$: $(T - Id)(v_n) = T(v_n) - v_n = v_n + v_{n-1} - v_n = v_{n-1}$.
Hipótesis de Inducción: $(T - Id)^k(v_n) = v_{n-k}$. Luego,

$$(T-Id)^{k+1}(v_n) = (T-Id)(T-Id)^k(v_n) = (T-Id)(v_{n-k}) = T(v_{n-k}) - v_{n-k} = v_{n-k} + v_{n-k-1} - v_{n-k} = v_{n-(k+1)}.$$

De esta forma,

$$\{v_n, (T - Id)(v_n), (T - Id)^2(v_n), \dots, (T - Id)^{n-1}(v_n)\} = \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_1\} = B$$

que es base de V.

d) $p_{[T]_{BB}} = (1 - \lambda)^n$. De aquí, $\sigma([T]_{BB}) = \sigma(T) = \{1\}$ con multiplicidad algebraica igual a n. Por otro lado, $v \in V$ es valor propio de T asociado a $\lambda = 1$ si y sólo si $[v]_B$ es valor de $[T]_{BB}$ asociado a $\lambda = 1$.
Luego, $Ker([T]_{BB} - Id) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ ([T]_{BB} - Id) \cdot x = \theta\}$. Así,

$$([T]_{BB} - Id) \cdot x = \theta \iff [T]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \theta \implies x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Por lo tanto, $Ker([T]_{BB} - Id) = \langle\{(1,0,\ldots,0) = e_1\}\rangle$ y así $S_{\lambda=1} = Ker(T - Id) = \langle\{v_1\}\rangle \neq V$. De aquí T no es diagonalizable.

3. *a*) (06 Ptos.) Sea $\lambda \in \sigma(T)$ y v un vector propio asociado a λ, es decir $T(v) = \lambda v \implies T^2(v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$.

   Como por hipótesis $T^2 = T$, entonces

$$\lambda v = \lambda^2 v \iff (\lambda^2 - \lambda)v = \theta \implies (\lambda^2 - \lambda) = 0 \implies \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \implies \sigma(T) \subseteq \{0,1\}.$$

   b) (07 Ptos.) Sea $v \in V$. Luego,

$$v = v - T(v) + T(v).$$

   Notar que $v - T(v) \in Ker(T)$ pues $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v))) = T(v) - T(v) = \theta$ y $T(v) \in Ker(T - Id)$ pues $(T - Id)(T(v)) = T(T(v)) - T(v) = T(v) - T(v) = \theta$.

   Por lo tanto,

$$V = Ker(T) + Ker(T - Id).$$

   Por otro lado, $v \in Ker(T) + Ker(T - Id) \iff T(v) = \theta \wedge T(v) - v = \theta \implies v = \theta \implies Ker(T) + Ker(T - Id) = \{\theta\}$. Así,

$$V = Ker(T) \oplus Ker(T - Id).$$

   c) (07 Ptos.) Sea $u \in Ker(T)$ y $v \in Im(T)$. Luego, existe $w \in V,\ v = T(w)$. Así,

$$\langle u, v\rangle = \langle u, T(w)\rangle = \langle T(u), w\rangle = \langle \theta, w\rangle = 0.$$

   Notar que $\langle u, T(w)\rangle = \langle T(u), w\rangle$ pues por hipótesis T es simétrica.

JAL, semestre otoño de 2022.