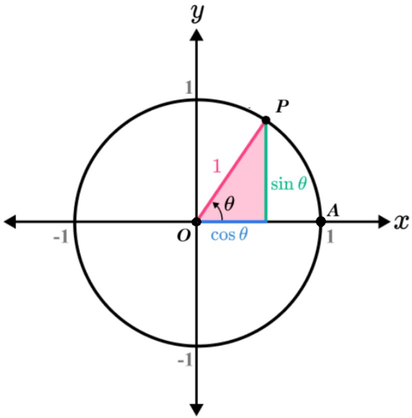
Teorema del Acotamiento y límites trigonométricos

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Seno y coseno

Circunferencia unitaria

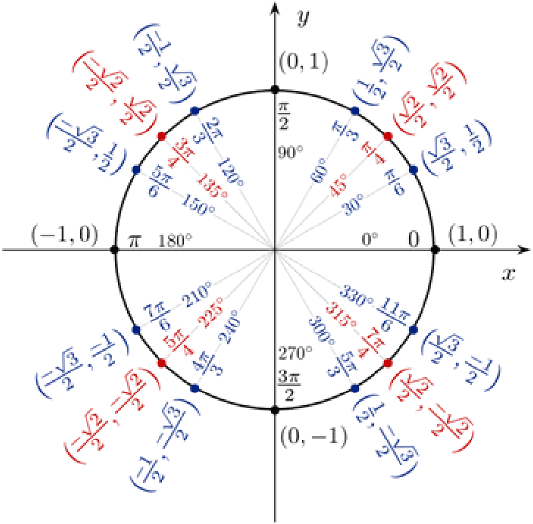


En la imagen aparece una circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, donde θ denota al ángulo formado por los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OP}$. Cada punto $P = (x, y) \in \mathcal{C}$ corresponde al par ordenado $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. De esto, se tiene la identidad trigonométrica

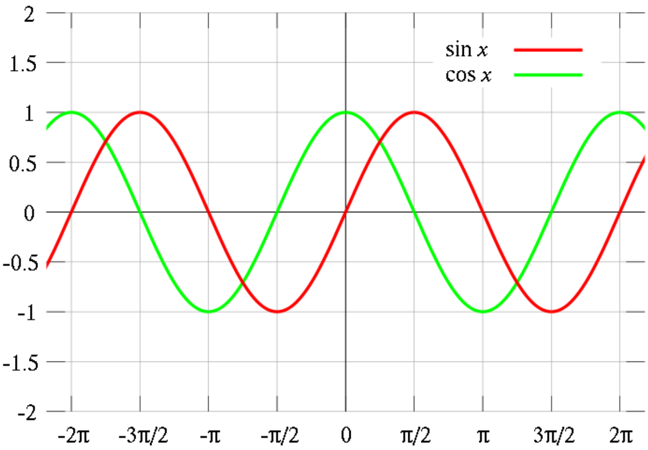
$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Seno y coseno

Ángulos notables



Funciones seno y coseno



Ver `https://www.geogebra.org/m/azzwxBPC`.

Funciones seno y coseno

Propiedades

- Son funciones **acotadas**: $|\sin(\theta)| \leq 1$ y $|\cos(\theta)| \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Coseno es una **función par**: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Seno es una **función impar**: $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Son funciones **periódicas:** $\sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta)$ y $\cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$

Teorema del Acotamiento

o "Teorema del Sandwich"

Teorema

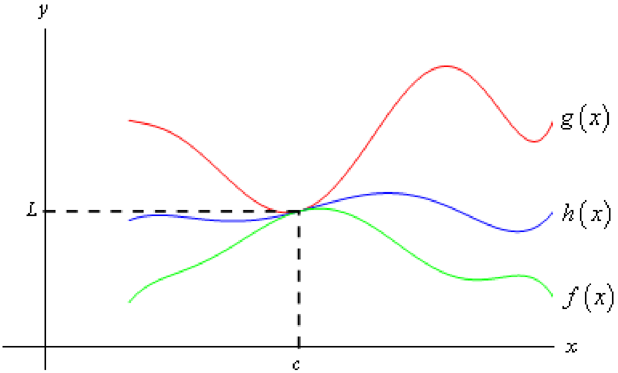
Sean f, g y h funciones definidas en un intervalo de la forma $]a-r, a+r[$ con $r >$ (a excepción, posiblemente, del punto a) tales que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in]a-r, a+r[.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Teorema del Acotamiento

Gráfico teorema



Aplicaciones Teorema del Acotamiento

Límites importantes

El límite $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe dado que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es una función que oscila infinitamente a medida que se x se aproxima a 0. Sin embargo, por el teorema anterior, sí existe $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

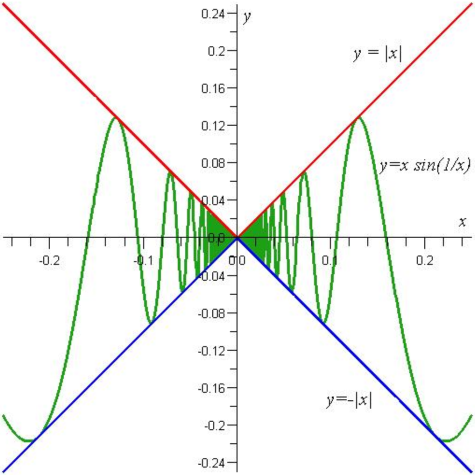
Ejemplo 1. Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple que $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. Luego

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \qquad x \neq 0$$

Del Teorema del Acotamiento, se concluye que $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Aplicaciones

Gráfica de $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Aplicaciones

Más en general, se tiene el siguiente resultado:

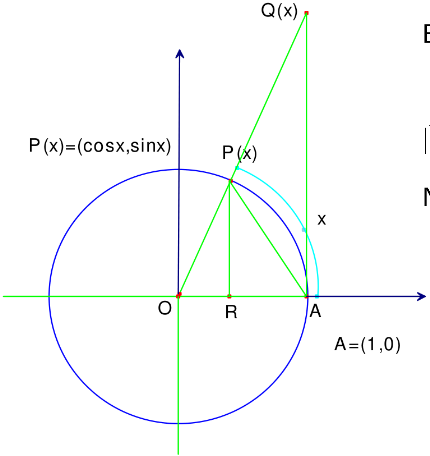
Corolario.

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en $]a-r, a+r[$ para algún $r>0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

Aplicaciones

Desigualdades de seno y coseno



En el dibujo, tenemos que

$$m(\angle POR) = x = |\widehat{AP}|$$

$$|\overline{OR}| = \cos(x) \quad |\overline{RP}| = \sin(x)$$

Notar que

$$\text{Área}(\triangle OAP) = \frac{\sin(x)}{2}$$

$$\text{Área sector}(OAP) = \frac{x}{2}$$

$$\text{Área}(\triangle OAQ) = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Aplicaciones

Continuidad de seno y coseno en $x = 0$

Además, de la figura anterior, se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin(x) \leq |\overline{AP}| \leq |\widehat{AP}| \\ 0 &\leq 1 - \cos(x) = |\overline{RA}| \leq |\overline{AP}| \leq |\widehat{AP}| \end{aligned}$$

Como seno y coseno son funciones impar y par, respectivamente, las desigualdades anteriores se pueden extender a $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ como:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin(x)| \leq |x| \\ 0 &\leq |1 - \cos(x)| \leq |x| \end{aligned}$$

Luego, por Teorema del Acotamiento $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

Por otro lado, de la figura anterior

$$\text{Área}(\triangle OAP) \leq \text{Área sector}(OAP) \leq \text{Área}(\triangle OAQ)$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Esta desigualdad se puede extender a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$ como

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$$

Luego, por Teorema del Acotamiento $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Observaciones

- El Teorema del Acotamiento también es válido para límites laterales o al infinito.
- De la continuidad de $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en $x = 0$ y de las fórmulas de seno y coseno de la suma de ángulos, se demuestra que son funciones continuas para todo $x \in \mathbb{R}$.
- La función tangente se define como $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, por lo que tiene infinitas asíntotas verticales definidas por los valores $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.