UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°10

ÁLGEBRA 2 - 525150

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) La siguiente función, que a un par de vectores $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ hace corresponder el número real
   $$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$$
   es un producto interior en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior y $x, y \in V$ son ortogonales, entonces
   $$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$
   siendo $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interior.

2. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la aplicación que a cada par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ hace corresponder
   $$\langle x, y \rangle_B = \langle Bx, By \rangle,$$
   siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$.

   (a) Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ también es un producto interior en $\mathbb{R}^n$.

   (b) Considere ahora $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Determine $\|v\|_B$ si $\|\cdot\|_B$ es la norma inducida por el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ y B es la matriz dada.

3. Sean w_1, w_2, w_3 reales positivos. Se define la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por:
   $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := \sum_{i=1}^{3} w_i x_i y_i.$$

   (a) Pruebe que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interior sobre $\mathbb{R}^3$.

   (b) Suponga que $(w_1, w_2, w_3) = (2, 6, 4)$. Encuentre los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $\{(-1, a, 1), (1, 1, -1), (b, 0, a)\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interior definido.

   (c) Suponga que $(w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 2)$ y sea $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$. Encuentre una base de $F^\perp$ para el producto interior definido.