

Nombres y Apellidos:

Preg. 1	Preg. 2	Preg. 3	Preg. 4	Nota

Tienen 100 minutos para realizar la Evaluación; No se permite ni calculadora, ni celular ni ningún artefacto electrónico que permita conectarse a internet o alguna IA.

1. Considere los **polinomios de Legendre** definidos por $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ y

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xp_n(x) - \frac{n}{n+1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

- (6 pts) Obtenga el polinomio $p_3(x)$ usando la recurrencia.
- (4 pts) Calcule las raíces de p_3 : $x_1 < x_2 < x_3$.
- (6 pts) Usando x_1, x_2, x_3 como nodos, escriba tres ecuaciones que permitan determinar los pesos A_1, A_2, A_3 de la regla

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

exigiendo exactitud para $f(x) = 1, x$ y x^2 .

- (4 pts) Con los pesos anteriores, verifique que la regla también es exacta para $f(x) = x^3, x^4$ y x^5 .

Desarrollo:

2. Considere el PVI

$$y'' + y = x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

La solución exacta es $y(x) = x^2$. Use paso $h = 1$.

- a) (6 pts) Reescriba el PVI como un sistema de primer orden $u'_1 = F_1(x, u_1, u_2)$, $u'_2 = F_2(x, u_1, u_2)$, indicando claramente u_1, u_2 .
- b) (8 pts) Aplique Euler explícito para obtener $(u_1(1), u_2(1))$ y $(u_1(2), u_2(2))$.
- c) (6 pts) Aplique Euler implícito solo en el primer paso ($0 \rightarrow 1$), plantee el sistema lineal resultante y determine $(u_1(1), u_2(1))$. Compare con $y(1) = 1$ e indique cuál método aproxima mejor.

Desarrollo:

3. Considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) (6 pts) Demuestre que se puede aplicar el método de Cholesky para resolver el sistema.
- b) (6 pts) Compruebe si los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel convergen para este sistema, indicando claramente qué criterio de convergencia utiliza (por ejemplo, dominancia diagonal estricta o que A sea simétrica definida positiva).
- (c) Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, realice:
- (4 pts) una iteración del método de Jacobi, y
 - (4 pts) una iteración del método de Gauss–Seidel,
- entregando los vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ obtenidos en ambos casos.

Desarrollo: