

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

- ▶ Solución numérica de un P.V.I.
- ▶ Método de Euler.

Solución numérica de un problema de valores iniciales (P.V.I.)

Los métodos numéricos para resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado,} \end{cases}$$

se basan en tomar una partición en N subintervalos del intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

y obtener **sucesivamente** N números y_1, y_2, \dots, y_N que aproximan a los valores $y(x_1), \dots, y(x_N)$ de la solución exacta en los **nodos** x_1, \dots, x_N .

Típicamente los nodos se escogen equiespaciados; es decir, están definidos por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{con } h = \frac{b - a}{N}.$$

Método de Euler (o de la tangente)

Método de la Tangente

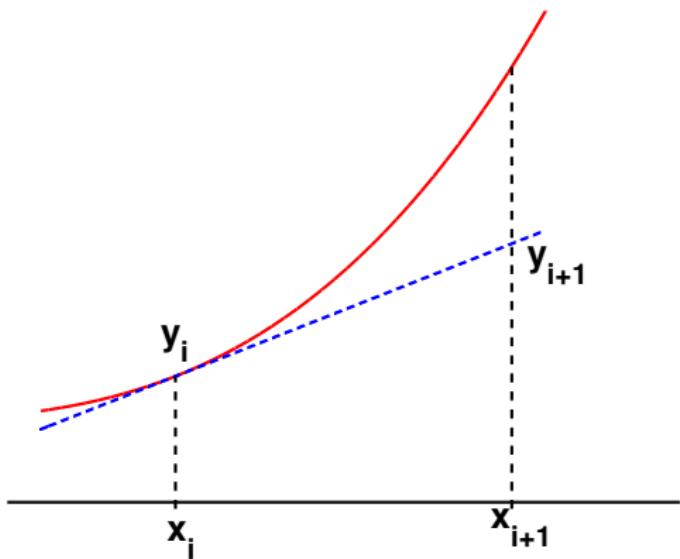
Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Una manera geométrica de aproximar la solución de este problema consiste en reemplazar la derivada y' por la aproximación

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

válida para h pequeño.



Haciendo este reemplazo en la ecuación se encuentra

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

de donde,

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Partiendo de la condición inicial $y(a) = y_0$ y considerando h pequeño, el valor

$$y_1 := y(a) + hf(a, y(a))$$

define una aproximación para $y(a+h)$.

Una vez calculada esta aproximación, se puede utilizar para obtener la aproximación y_2 de $y(a+2h)$, a saber,

$$y_2 := y_1 + hf(a+h, y_1).$$

Repetiendo este proceso se pueden obtener aproximaciones para $y(a + 3h)$, $y(a + 4h)$, ..., $y(a + Nh)$.

Usando nodos x_i equiespaciados obtenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo (Euler)

```
For  $i = 0, \dots, N - 1$ 
     $x_i = a + ih$ 
     $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ 
end
```

Definición. Se define el **error global** como

$$E := \max_{0 \leq i \leq N-1} |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|,$$

donde $y(x_{i+1})$ es el valor de la solución exacta del P.V.I. en el nodo x_{i+1} e y_{i+1} es el valor obtenido por el método numérico.