Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 07: Aplicaciones de las bases de Gröbner
Álgebra con Software (527282)

Todos los anillos de polinomios considerados tienen sus coeficientes en un campo K.

1. Considerar un anillo de polinomios $K[x,y]$ con el orden monomial deglex. Considerar el conjunto $G = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\}$.
   - *a*) Utilizando el criterio de Buchberger, mostrar que G no es base de Gröbner.
   - *b*) Utilizando el algoritmo de Buchberger, extender G hasta conseguir una base de Gröbner.
   - *c*) Con ayuda de software encontrar una base de Gröbner para el ideal generado por G. Compararla con la obtenida en el item anterior y justificar las diferencias.

2. Sean a, b, c números reales tales que
$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2=5 \\ a^3+b^3+c^3=7 \end{cases}$$
   - *a*) Utilizando bases de Gröbner, mostrar que $a^4+b^4+c^4=9$.
   - *b*) Utilizando bases de Gröbner, determinar el valor de $a^5+b^5+c^5$.
   - *c*) ¿Qué valor entrega la base de Gröbner para a? Explicar el resultado.

3. Resolver el sistema con incógnitas en $\mathbb{C}$
$$\begin{cases} x^2y = z^3 \\ 2xy = 4z+1 \\ z = y^2 \\ x^3 = 4zy \end{cases}$$

4. Sea E la elipse descrita por el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x-2z=3 \end{cases}$$
   Utilizando bases de Gröbner, determinar el punto de la elipse más cercano al origen. ¿Qué ocurre al cambiar el orden escogido entre las variables?

5. Construir ecuaciones implícitas que contengan a la curva de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por
$$\begin{cases} x=t^4 \\ y=t^3 \\ z=t^2 \end{cases}$$

6. Se construye una superficie S en $\mathbb{R}^3$ como unión de las infinitas rectas R_t, $t \in \mathbb{R}$, donde R_t es la recta que pasa por los puntos $(t, 0, 1)$ y $(0, 1, t)$.

   a) Construir una descripción paramétrica de S.

   b) Utilizando bases de Gröbner, construir una ecuación implícita cuyo conjunto solución contenga a S.

7. Demostrar la *fórmula de Herón*: el área s de un triángulo de lados a, b, c satisface $s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es su semiperímetro.

8. Demostrar la existencia del círculo de Apolonio: sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A. Los puntos medios de cada lado y el pie de la altura desde el vértice A están todos en una misma circunferencia.

Mini proyecto: potencia de un punto

Un teorema clásico de geometría plana dice lo siguiente: *dadas una circunferencia C, un punto P en la región interior a C y una cuerda $\overline{AB}$ de C que pasa por P, entonces el valor de $\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ no depende de la cuerda escogida.*
Este valor se conoce como la *potencia de P relativa a C*, y en los siguientes ejercicios se demostrará su independencia de la cuerda y se describirá su valor.
Se trabajará con el siguiente código en Sage:

```
R.<ax,ay,bx,by,d,e,px,py,r> = PolynomialRing(QQ)
L = []
L = L + [ax^2+ay^2-r^2, bx^2+by^2-r^2] # puntos A,B
L = L + [(r^2-px^2-py^2)*d^2-1] # posición de P
L = L + [(px-ax)*(py-by)-(px-bx)*(py-ay)] # más sobre posición de P
L = L + [((ax-bx)^2+(ay-by)^2)*e-1] # relación entre A,B
I = R.ideal(L)
T = ((ax-px)^2+(ay-py)^2)*((bx-px)^2+(by-py)^2)
```

Las coordenadas de los puntos son A =(`ax`, `by`), B =(`bx`, `by`), P =(`px`, `py`). El radio de la circunferencia es `r`. La potencia buscada, elevada al cuadrado, es la variable `T`.

9. Justificar las cinco relaciones polinomiales añadidas a la lista L. Explicar el rol de las variables `d` y `e`.

10. Ejecutar el comando `T.reduce(I)` para determinar el resto de dividir T (la potencia al cuadrado) por la base de Gröbner del ideal I generado por L. Observar las variables que aparecen en la expresión. ¿Por qué demuestra esto el teorema?

11. Ejecutar el comando `T.reduce(I).factor()` para factorizar la expresión anterior. Con esto en mano, determinar una expresión para la potencia de P que involucre el radio de la circunferencia y la posición de P dentro del círculo.