UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 8 - Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Inferencias de los Teoremas de Cauchy.***

Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville.

Estudiar las demostraciones de los siguientes teoremas fundamentales. Las cuales permiten potenciar el aprendizaje de los teoremas expuestos en clase y práctica (existencia de la primitiva):

A **Desigualdad de Cauchy**:
Sea $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en D. Para todo $z = a \in \mathrm{D}$ y $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset \mathrm{D}$. Si $M_r = \max\{|f(z)| : |a - z| = r\}$ entonces:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M_r}{r^n}. \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

B **Teorema de Morera**:
Si $f(z)$ es continua sobre un dominio D y $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ para todo contorno simple y cerrado inscrito en D. Entonces, f es holomorfa en D.

C **Teorema de Liouville**:
Toda función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *entera y acotada* es necesariamente *constante*.

(P) Establecer

(a) $f(z) = \cos(z)$ es acotada;

(b) Si $f(z)$ es ua función entera y $\mathrm{Re}(f(z))$ es acotada. Probar que $f(z)$ es constante;
Indicación: Estudiar $h(z) = e^{f(z)}$

(c) Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dos funciones enteras, tales que $g(z) \neq 0$ y $|f(z)| \leq |g(z)|$ cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$.
Indicación: Estudiar $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$

(d) Si $f(z)$ es una función entera y existe una constante positiva M tal que $|f(re^{i\theta}| < Mr$, $(r > 0)$. Demostrar que $f \in P_1(\mathbb{C})$.

5. Si $f(z)$ es ua función entera y $\mathrm{Im}(f(z))$ es acotada. Probar que $f(z)$ es constante.

6. Si $f(z)$ es una función entera y existen constantes positivas M y R tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$ si $|z| > R$. Probar que $f \in P_m(\mathbb{C})$

7. Si $f(z)$ es una función entera tal que $|f'(z)| \leq |z|$. Probar que $f(z) = a + bz^2$ para algunas constantes complejas a y b con $|b| \leq 1$.
Indicación: $(2\pi i)f''(z_0) = \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{(z - z_0)^2}dz$

(P) Encontrar el máximo de $|\sin(z)|$ sobre el cuadrado $\{x + iy : (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$

9. Repetir el ejercicio anterior para $|\cos(z)|$.
Indicación: $|\cos(0 + 2i\pi)| > 1$.

(P) Encontrar el máximo de la función real de variable compleja $\left|e^{z^3}\right|$ sobre $\overline{B(0, 1)}$.

11 Encontrar los valores extremos sobre la región

$$\mathbf{R} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 0 \right\}$$

de los módulos

(a) $\left| ze^z + z^2 \right|$ (b) $\left| iz^2 - 2z \right|$

12 Para la función $f(z) = z + 1$ encintar los valores extremos de $|f|$ en el triángulo cerrado de vértices $z = 0$, $z = 2$ y $z = i$. Indique los afijos donde se alcanzan sos esos valores extremos.

13 Para la función entera

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

determinar sus valores extremos de $|g|$ sobre el rectángulo con vertices en $0, \pi, i, \pi + i$ e indicar los afijos donde se alcanzan esos valores extremos.

14 Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones complejas continuas y sin ceros en $\overline{B(0,r)}$. Si ellas son holomorfas en el disco abierto $B(0,r)$ y $|f(z)| = |g(z)|$ sobre $\operatorname{Fr}(B(0,r))$. Probar que existe una constante compleja c uni-modular tal que $f(z) = cg(z)$ sobre el disco cerrado $\overline{B(0,r)}$.

15 Inferir el siguiente corolario del **PMM**.

Sea D un dominio acotado y $u = u(x,y)$ es una función armónica en D y no constante, Entonces u no puede obtener sus valores extremos en D. En otras palabras si el afijo $(x_0, y_0) \in D$ s tal que

$$u(x_0, y_0) = \sup_D u \quad \vee \quad u(x_0, y_0) = \inf_D u$$

entonces $u)u(x,y)$ es constante en D.

16 Si $f(z)$ es holomorfa y $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1 - |z|}$ sobre el disco abierto $B(0,1)$. Inferir que $|f'(0)| \leq 4$

17 Si $f(z)$ es una función entera tal que $f(z) \to \infty$ si $z \to \infty$. Entonces, $f(z)$ debe tener un cero.

18 Resolver los ejercicios de las páginas 149 y 150 del texto

Churchill R.V. & Brown J.W.: *Variable Compleja y aplicaciones*
McGraw-Hill. 5ª edición (1992).

19 Resolver los ejercicios de la sección 6.6 (páginas 206-207) del texto

Mathews J.H. & Howell R.W.: *Complex Analysis for Mathematics and Engineering.*
Jones& Bartlett Publisher(1997).