Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas

Método de variación de paramétros

Carlos M. Mora

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t)=\begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix}\overrightarrow{Z}(t)+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix},$$

donde $a_{i,j}(t)$, con $i,j=1,\ldots,d$, y $f_i(t)$, con $i=1,\ldots,d$, son funciones continuas en $]a,b[$.

Tomemos $A(t):=\begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{F}(t):=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t)=A(t)\,\overrightarrow{Z}(t)+\overrightarrow{F}(t)$$

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X'(t) = -5\,X(t) + 3\,Y(t) + e^{-2\,t} \\ Y'(t) = 2\,X(t) - 10\,Y(t) + 1 \end{cases}$$

con $X(t)\,,\,Y(t) \in \mathbb{R}$

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2\,t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elegimos $\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ y $\overrightarrow{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2\,t} \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t) + \overrightarrow{F}(t)$$

Paso 1

Encontrar un sistema de fundamental de soluciones $\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)$ para

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}_h(t) = A(t)\ \overrightarrow{Z}_h(t) \qquad\qquad \forall t \in \,]a, b[\,.$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}_h(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}_h(t)$$

Cálculo de autovalores: $A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} - \lambda I \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 2 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(-5-\lambda)(-10-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow (5+\lambda)(10+\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 15\lambda + 44 = 0$$

Como $\qquad 0 = \lambda^2 + 15\lambda + 44 = (\lambda+4)(\lambda+11), \qquad \lambda = -4 \quad$ ó $\quad \lambda = -11.$

Cálculo de autovectores

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \qquad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0$

Cuando $\lambda = -4$, buscamos $\overrightarrow{v} \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + 4\, I\right)\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\overrightarrow{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow -v_1 + 3\,v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 3\,v_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomado $v_2 = 1$ llegamos a $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, que genera la solución $\overrightarrow{Z}_1\,(t) = e^{-4\,t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cálculo de autovectores

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \qquad A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\vec{v} = 0$

Cuando $\lambda = -11$, buscamos $\vec{u} \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda\, I)\,\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2\,u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -2\,u_1$$

Eligiendo $u_1 = 1$ obtenemos $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, que tiene asociada la solución $\vec{Z}_2(t) = e^{-11\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{Z}_h(t) = c_1\, e^{-4\,t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-11\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Paso 2: Formar la matriz fundamental de soluciones

Sea $\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)$ un sistema de fundamental de soluciones de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}_h(t) = A(t)\,\overrightarrow{Z}_h(t) \qquad\qquad \forall t \in\,]a,b[\,.$$

Entonces, definimos

$$\Phi(t) := \left(\overrightarrow{Z}_1(t) \,\vdots\, \overrightarrow{Z}_2(t) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \overrightarrow{Z}_d(t)\right).$$

Entonces la solución general de la EDO homogénea asociada es: $\overrightarrow{Z}_h(t) = \Phi(t)\,\overrightarrow{C}$, con $\overrightarrow{C} \in \mathbb{R}^d$.

Ejemplo: $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\overrightarrow{Z}_h(t) = \begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son números reales arbitrarios.

Paso 3: Calcular solución particular

Una solución particular tiene la forma

$$\overrightarrow{Z}_p(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow \overrightarrow{Z}_p(t) = c_1(t)\overrightarrow{Z}_1(t) + \cdots + c_d(t)\overrightarrow{Z}_d(t)$$

donde

$$\Phi(t)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{F}(t) \leftrightsquigarrow c_1'(t)\overrightarrow{Z}_1(t) + \cdots + c_d'(t)\overrightarrow{Z}_d(t) = \overrightarrow{F}(t)$$

Ejemplo (vía 1): $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Phi(t)\,\overrightarrow{c}\,'(t) = \overrightarrow{F}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Restando la primera ecuación por la segunda multiplicada por 3 obtenemos

$$c_2'(t) = \frac{1}{7}\left(e^{9t} - 3e^{11t}\right) \rightsquigarrow c_1'(t) = \frac{1}{7}\left(2\,e^{2t} + e^{4t}\right).$$

$$\overrightarrow{c}(t) = \frac{1}{7}\int \begin{pmatrix} 2\,e^{2t} + e^{4t} \\ e^{9t} - 3\,e^{11t} \end{pmatrix} dt$$

$$\overrightarrow{Z}_p(t) = \Phi(t)\,\overrightarrow{c}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t}/4 \\ e^{9t}/9 - 3\,e^{11t}/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{3}{44} \\ \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{44} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (vía 2) $\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Phi(t)\,\vec{c}\,'(t) = \vec{F}(t) \Rightarrow \vec{Z}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\,\vec{F}(t)\,dt, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Phi(t)^{-1} = \frac{1}{-7\,e^{-15t}}\begin{pmatrix} -2\,e^{-11t} & -e^{-11t} \\ -e^{-4t} & 3\,e^{-4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\,e^{4t} & e^{4t} \\ e^{11t} & -3\,e^{11t} \end{pmatrix}$$

$$\int \Phi(t)^{-1}\,\vec{F}(t)\,dt = \frac{1}{7}\int \begin{pmatrix} 2\,e^{4t} & e^{4t} \\ e^{11t} & -3\,e^{11t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{7}\int \begin{pmatrix} 2\,e^{2t} + e^{4t} \\ e^{9t} - 3\,e^{11t} \end{pmatrix} dt$$

$$\Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\,\vec{F}(t)\,dt = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t}/4 \\ e^{9t}/9 - 3\,e^{11t}/11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{3}{44} \\ \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{44} \end{pmatrix}$$

Justificación del cálculo de solución particular (Paso 3)

La solución general de $\boxed{\dfrac{d}{dt}\vec{Z}_h(t) = A(t)\;\vec{Z}_h(t)}$ es:
$\vec{Z}_h(t) = c_1\,\vec{Z}_1(t) + c_2\,\vec{Z}_2(t) + \cdots + c_d\,\vec{Z}_d(t)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$.

Se busca una solución particular de $\boxed{\dfrac{d}{dt}\vec{Z}(t) = A(t)\;\vec{Z}(t) + \vec{F}(t)}$ con la forma:

$$\vec{Z}_p(t) = c_1(t)\;\vec{Z}_1(t) + c_2(t)\;\vec{Z}_2(t) + \cdots + c_d(t)\;\vec{Z}_d(t) \Rightarrow \vec{Z}_p(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix}$$

Ya que $\vec{Z}'_k(t) = A(t)\,\vec{Z}_k(t)$,

$$\begin{aligned}
\vec{Z}'_p(t) &= c'_1(t)\;\vec{Z}_1(t) + c'_2(t)\;\vec{Z}_2(t) + \cdots + c'_d(t)\;\vec{Z}_d(t) \\
&\quad \boxed{+c_1(t)\;\vec{Z}'_1(t) + c_2(t)\;\vec{Z}'_2(t) + \cdots + c_d(t)\;\vec{Z}'_d(t)} \\
&= c'_1(t)\;\vec{Z}_1(t) + c'_2(t)\;\vec{Z}_2(t) + \cdots + c'_d(t)\;\vec{Z}_d(t) \\
&\quad \boxed{+c_1(t)\,A(t)\,\vec{Z}_1(t) + c_2(t)\,A(t)\,\vec{Z}_2(t) + \cdots + c_d(t)\;A(t)\,\vec{Z}_d(t)}
\end{aligned}$$

$$A(t)\;\vec{Z}_p(t) + \vec{F}(t) = \vec{Z}'_p(t) = c'_1(t)\;\vec{Z}_1(t) + c'_2(t)\;\vec{Z}_2(t) + \cdots + c'_d(t)\;\vec{Z}_d(t) + A(t)\;\vec{Z}_p(t)$$

Justificación del cálculo de solución particular (Paso 3)

$$\overrightarrow{F}(t) = c_1'(t)\ \overrightarrow{Z}_1(t) + c_2'(t)\ \overrightarrow{Z}_2(t) + \cdots + c_d'(t)\ \overrightarrow{Z}_d(t)$$

$$\overrightarrow{F}(t) = \Phi(t)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1}\overrightarrow{F}(t) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} = \int \Phi(t)^{-1}\overrightarrow{F}(t)\,dt$$

$$\overrightarrow{Z}_p(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_d(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overrightarrow{Z}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\overrightarrow{F}(t)\,dt$$

Paso 4: Calcular solución general

$$\overrightarrow{Z}(t) = \Phi(t)\,\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Z}_p(t).$$

$\overrightarrow{Z}_h(t) = \Phi(t)\,\overrightarrow{C}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\,\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Z}_p(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\,\overrightarrow{C}\right) + \overrightarrow{Z}'_p(t) &= A(t)\,\Phi(t)\,\overrightarrow{C} + A(t)\,\overrightarrow{Z}_p(t) + \overrightarrow{F}(t)\\ &= A(t)\left(\Phi(t)\,\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Z}_p(t)\right) + \overrightarrow{F}(t)\end{aligned}$$

Ejemplo: $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}\overrightarrow{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} 3\,e^{-4t} & e^{-11t} \\ e^{-4t} & -2\,e^{-11t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{3}{44} \\ \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{44} \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son números reales arbitrarios.

$$X(t) = 3\,c_1\,e^{-4t} + c_2\,e^{-11t} + \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{3}{44} \longrightarrow_{t\to+\infty} \frac{3}{44}$$

$$Y(t) = c_1\,e^{-4t} - 2\,c_2\,e^{-11t} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{44} \longrightarrow_{t\to+\infty} \frac{5}{44}$$

Encuentre la solución general de

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución alternativa

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \vec{Z}(t) + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(t) := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}(t) \Rightarrow \begin{cases} v_1'(t) = -4\, v_1'(t) + \frac{1}{7}\left(2\, e^{-2t} + 1\right) \\ v_2'(t) = -11\, v_2'(t) + \frac{1}{7}\left(e^{-2t} - 3\right) \end{cases}$$

Encuentre la solución general de

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}\,(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \vec{Z}\,(t) + \begin{pmatrix} e^{-2\,t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución alternativa

$$\vec{V}\,(t) := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}\,(t) \Rightarrow \begin{cases} v_1'\,(t) = -4\,v_1'\,(t) + \frac{1}{7}\left(2\,e^{-2\,t} + 1\right) \\ v_2'\,(t) = -11\,v_2'\,(t) + \frac{1}{7}\left(e^{-2\,t} - 3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1\,(t) = e^{-4\,t}c_1 + \frac{1}{7}e^{-4\,t}\int e^{4\,t}\left(2\,e^{-2\,t} + 1\right)\,dt \\ v_2\,(t) = e^{-11\,t}c_2 + \frac{1}{7}e^{-11\,t}\int e^{11\,t}\left(e^{-2\,t} - 3\right)\,dt \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{Z}\,(t) = \begin{pmatrix} e^{-4\,t}c_1 \\ e^{-11\,t}c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{-4\,t}\int e^{4\,t}\left(2\,e^{-2\,t} + 1\right)\,dt \\ e^{-11\,t}\int e^{11\,t}\left(e^{-2\,t} - 3\right)\,dt \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}\,(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4\,t}c_1 \\ e^{-11\,t}c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2\,t} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9}e^{-2\,t} - \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}\,(t) = \begin{pmatrix} 3\,e^{-4\,t}c_1 + e^{-11\,t}c_2 \\ e^{-4\,t}c_1 - 2\,e^{-11\,t}c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{9}e^{-2\,t} + \frac{3}{44} \\ \frac{1}{9}e^{-2\,t} + \frac{5}{44} \end{pmatrix}$$