Profesores: Rommel Bustinza, Álvaro Guzmán, Mónica Selva.
DIM - CFM

Listado 8: Descomposiciones LU, PLU y de Cholesky de matrices cuadradas. Sensibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.

1. Problemas con papel y lápiz

1. Dada una matriz triangular superior $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible y un vector $b \in \mathbb{C}^n$, en clase escribimos cómo determinar, por sustitución regresiva, el vector $x \in \mathbb{C}^n$ que satisface $Ax = b$ y demostramos que este algoritmo requiere n^2 operaciones aritméticas.

   Suponga ahora que $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior cuyos elementos en diagonal principal son todos iguales a 1.

   (a) ¿Es B invertible? ¿Por qué?

   (b) Escriba cómo determinar, por sustitución progresiva, $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Bx = c$, siendo c un vector de $\mathbb{C}^n$.

   (c) Muestre que el cálculo de x requiere $n^2 - n$ operaciones aritméticas.

   (d) Si un computador realiza 10^9 operaciones aritmética por segundo, ¿cuánto tiempo demora en resolver el sistema $Bx = c$ cuando $n = 10^6$.

2. Determine, si es posible, una descomposición LU[1] de las siguientes matrices:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Determine, si es posible, una descomposición LU con pivoteo parcial, de las siguientes matrices:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$.

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Determine, si es posible, una factorización LU de la siguiente matriz utilizando el algoritmo de Thomas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

[1] Una descomposición LU de una matriz cuadrada A es un par de matrices L, U con las propiedades:

(a) L es triangular inferior y todos los elementos en su diagonal principal son iguales a 1.

(b) U es triangular superior.

(c) $A = LU$.

5. Determine la factorización LU de la matriz del siguiente sistema de ecuaciones lineales y utilice esta factorización para determinar la solución del sistema.

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Encuentre la factorización de Cholesky de

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Emplee esta factorización para encontrar la tercera columna de la inversa de la matriz anterior.

7. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & c & c \\ c & 3 & c \\ c & c & 3 \end{pmatrix},$$

   cuyos valores propios son $(3-c)$ y $(3+2c)$.

   (a) Determine los valores de $c \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz A puede ser factorizada mediante el Método de Cholesky.

   (b) Considere $c = 6$. Determine los valores de $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ para que las matrices

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 \\ 1 & k_2 & 1 \end{pmatrix}$$

   y

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & k_3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

   constituyan una descomposición LU con pivoteo parcial de A.

   (c) Con el mismo valor $c = 6$, con los valores de k_1, k_2 y k_3 encontrados anteriormente y considerando al vector $b = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$ empleando la factorización LU con pivoteo parcial obtenida en ítem anterior.

8. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Muestre que la matriz A puede ser factorizada mediante el método de Cholesky.

   (b) Determine el valor de los parámetros $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$ tales que $L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ es la matriz triangular inferior que resulta de factorizar A usando el Método de Cholesky.

   (c) Explotando la factorización de Cholesky de A que involucra a la matriz L encontrada en ítem anterior, resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$.

9. Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene descomposición de Cholesky, entonces A es simétrica y definida positiva, es decir, demuestre que si existe $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, triangular inferior y con elementos positivos en diagonal principal, de modo que $A = LL^{\mathrm{t}}$, entonces A es simétrica y definida positiva ($\forall\, x \in \mathbb{R}^n$: $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$).

10. Considere la matriz A y su inversa A^{-1} dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sean $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\tilde{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $x \in \mathbb{R}^3$ y $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ son las soluciones exactas de los sistemas $Ax = b$ y $A\tilde{x} = \tilde{b}$ respectivamente.

Calcule un número $C > 0$ tal que se tenga la garantía de que

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1} \le C\,\frac{\|b - \tilde{b}\|_1}{\|b\|_1}.$$

11. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix},\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5.1 & -2.1 & 1.05 \\ 2.1 & 3.9 & 2.05 \\ 0.05 & 1 & 3.1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine, sin calcular la inversa de A, una constante $C \in \mathbb{R}^+$ de modo que $\operatorname{cond}_1(A) \le C$.

   (b) Sean x y $\tilde{x}$ las soluciones exactas de los sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$ y $\tilde{A}\tilde{x} = b$. Determine una cota superior para $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$.

12. Argumente, sin calcular determinante ni rango ni descomposición LU de las siguientes matrices, por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   (a) Para todo $a \in [0, 2]$ se cumple que la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ a & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   es invertible y tiene descomposición LU.

   (b) La matriz

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   es invertible y tiene descomposición LU.

   (c) La matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

   es invertible y tiene descomposición LU.

13. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector distinto del vector nulo. En clase se demostró que si x y $\tilde{x}$ son las soluciones exactas de los sistemas $Ax = b$ y $A\tilde{x} = b+\delta_b$ respectivamente, entonces

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}.$$

Demuestre que

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\operatorname{cond}(A)}\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}.$$

14. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifique por qué A es invertible, sin calcular ni determinante ni rango de A.

(b) Calcule $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$.

(c) Demuestre, sin calcular A^{-1}, que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$.

(d) Determine una cota para $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

Observación: Dada una norma matricial $\|\cdot\|$, inducida por una norma vectorial, se define el número de condición de una matriz invertible A como $\|A\|\|A^{-1}\|$. De este modo, se denota por cond_2, cond_1 y $\operatorname{cond}_\infty$ de una matriz invertible A a los números

$$\operatorname{cond}_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1, \quad \operatorname{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2, \quad \operatorname{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty.$$

15. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) Si A^2 es invertible, ¿es A invertible?

(b) Si las matrices L y U forman una descomposición LU de A^2, ¿cómo podría utilizarlas para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$?

16. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Calcule $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ y $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

(c) ¿Cuán grande puede ser el error relativo en b para que el error relativo entre las soluciones exactas a $Ax = b$ y $A\tilde{x} = b + \delta_b$ sea menor o igual que 10^{-2}?

(d) Consideremos ahora $Ax = b$ y $(A + \delta_A)y = b$.

Sabiendo que $\dfrac{\|\delta_A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 10^{-3}$, ¿es posible garantizar que $A + \delta_A$ es invertible? ¿es posible garantizar que $\dfrac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq 10^{-2}$?