Elementos Finitos

Pauta Evaluación 1

Prof. Manuel E. Solano P.

16 de abril de 2024

Ejercicio 1. [1 pto.]

(a) **[0.5 ptos.]** Demostrar que $\displaystyle\int_a^b w'(x)w(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(w(b)^2 - w(a)^2\right)$ para $w \in H^1(a,b)$. **Indicación.:** Usar integración por partes.

(b) **[0.5 ptos.]** Sea $V := \{v \in H^1(a,b) : v(a) = 0\}$. Demostrar que $v(b) \leq (b-a)^{1/2}\|v'\|_{L^2(a,b)}$ para todo $v \in V$.

Solución:

(a) Sea $w \in H^1(a,b)$. Integrando por partes,

$$\int_a^b w'(x)w(x)\,dx = -\int_a^b w(x)w'(x)\,dx + w(b)^2 - w(a)^2 = -\int_a^b w'(x)w(x)\,dx + w(b)^2 - w(a)^2,$$

de donde $\displaystyle\int_a^b w'(x)w(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(w(b)^2 - w(a)^2\right)$.

(b) Sea $v \in V$. Como $v(a) = 0$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $v(b) = \displaystyle\int_a^b v'(x)\,dx$. De donde, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$v(b) = \int_a^b v'(x)\,dx \leq \|1\|_{L^2(a,b)}\|v'\|_{L^2(a,b)} \leq (b-a)^{1/2}\|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

Ejercicio 2. [2 ptos.] Dados $f \in L^2(0,1)$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ una constante positiva, considere la siguiente ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcll} -u''(x) + \beta u'(x) & = & f(x) & , \quad x \in (a,b), \\ u(a) & = & 0 & , \\ u'(b) & = & \beta & . \end{array}\right. \tag{1}$$

(a) **[0.5 ptos.]** Deduzca una formulación variacional apropiada. **Indicación:** El término asociado a $\beta u'(x)$ no lo integre por partes.

(b) **[1.5 ptos.]** Demuestre que la formulación variacional obtenida posee solución única. **Indicaciones:**

- Puede usar lo demostrado en el Ejercicio 1.
- NO demuestre que la forma $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal, ni tampoco que el funcional es lineal.

Solución:

(a) Sea $V := \{v \in H^1(a,b) : v(a) = 0\}$. La formulación variacional es: Hallar $u \in V$ tal que $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$, donde

$$a(u,v) := \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + \beta\int_a^b u'(x)v(x)\,dx \quad \text{y} \quad L(v) := \int_a^b f(x)v(x) + \beta v(b).$$

(b) $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(a,b)})$ es un espacio de Hilbert. Además, sean $u, v \in V$.

- $a(u,v) \leq \|u'\|_{L^2(a,b)}\,\|v'\|_{L^2(a,b)} + \beta\|u'\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \max\{1,\beta\}\|u\|_{H^1(a,b)}\,\|v\|_{H^1(a,b)}$.
- Utilizando 1(a),

$$a(v,v) = \|v'\|^2_{L^2(a,b)} + \beta\int_a^b v'(x)v(x)\,dx = \|v'\|^2_{L^2(a,b)} + \frac{\beta}{2}v(b)^2 \geq \|v'\|^2_{L^2(a,b)} \geq C_P\|v\|^2_{H^1(a,b)},$$

  en donde hemos utilizado la desigualdad de Poincaré.

- $L(v) \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} + \beta|v(b)| \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} + \beta(b-a)^{1/2}\|v'\|_{L^2(a,b)}$, en donde hemos utilizado 1(b). Así, $L(v) \leq \left(\|f\|_{L^2(a,b)} + \beta(b-a)^{1/2}\right)\|v\|^2_{H^1(a,b)}$.

Por lo tanto, gracias al Lema de Lax-Milgram concluimos que existe una única $u \in V$ tal que $a(u,v) = L(v)$ para todo $v \in V$.

Ejercicio 3. [2 ptos] Considere el espacio $V_h := \{v \in \mathcal{C}(a,b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i])\,, \text{para}\, i = 1, ..., d{+}1\,, v(a) = 0\}$ y la familia de funciones techo $B := \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_d, , \varphi_{d+1}\}$ definidas en clase. Escriba el sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado al Ejercicio 2. **Indicación**: No necesita conocer la forma explícita de las funciones techo.

Solución: La matriz $\mathbf{A}$ es tridiagonal. Además, sea $i \in \{1, ..., d\}$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
A_{ii} =& \int_a^b \varphi_i'(x)^2\,dx + \beta \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_i(x) \\
=& \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)^2\,dx + \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)\varphi_i(x)\,dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_i(x)\,dx \\
=& \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\,dx + \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h}\varphi_i(x)\,dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\varphi_i(x)\,dx \\
=& \frac{2}{h} + \beta\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)\,dx - \beta\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Para las dos últimas integrales podemos usar tanto la regla del punto medio como la de los trapecios. Así,

$$
A_{ii} = \frac{2}{h} \quad \text{para} \quad i \in \{1, ..., d\}
$$

Para $i = d+1$,

$$
A_{i,i} = \int_{x_d}^{x_{d+1}} \varphi_i'(x)^2\,dx + \beta \int_{x_d}^{x_{d+1}} \varphi_i'(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_{x_d}^{x_{d+1}} \frac{1}{h^2}\,dx + \beta \int_{x_d}^{x_{d+1}} \frac{1}{h}\varphi_i(x)\,dx = \frac{1}{h} + \frac{\beta}{2}.
$$

Ahora, sea $i \in \{1, ..., d\}$. Notar que la matriz no es simétrica. Luego,

$$
\begin{aligned}
A_{i,i+1} =& \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)\,dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}(x)\,dx \\
=& -\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\,dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\varphi_{i+1}(x)\,dx = -\frac{1}{h} - \frac{\beta}{2}. \\
A_{i+1,i} =& \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i(x)\,dx \\
=& -\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}\,dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\varphi_i(x)\,dx = -\frac{1}{h} + \frac{\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

Sea $i \in \{1, ..., d\}$. Tenemos que

$$
b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x) \approx \frac{h}{2}\left(f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right)
$$

y para $i = d+1$,

$$
b_i = \int_{x_d}^{x_{d+1}} f(x)\varphi_{d+1}(x) + \beta\varphi_{d+1}(b) \approx \frac{h}{2} f\left(\frac{x_d + x_{d+1}}{2}\right) + \beta.
$$

Ejercicio 4. [1 pto.] Considere la siguiente ecuación

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
-u''(x) - k^2u(x) &=& 0 &, \quad x \in (0,\pi), \\
u(0) &=& 0 &, \\
u(\pi) &=& 0, &
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

con k un número entero dado. Del curso de Ecuaciones Diferenciales, sabemos que las soluciones de (2) son generadas por la familia $\{\text{sen}(kx)\}$. La forma bilineal asociada es $a : H_0^1(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$ tal que $a(u,v) = \int_0^\pi u'(x)v'(x)\,dx - k^2 \int_0^\pi u(x)v(x)\,dx$. Demuestre que **no** es elíptica en $(H_0^1(0,\pi), \|\cdot\|_{H^1(0,\pi)})$.

Solución: Utilizaremos un contra ejemplo para mostrar que ésta forma bilineal no es elíptica. Sea $v = \text{sen}(kx)$. Notemos que $v \in V$ y

$$
\begin{aligned}
a(v,v) =& \int_0^\pi v'(x)^2\,dx - k^2 \int_0^\pi v(x)^2\,dx = k^2 \int_0^\pi \cos^2(kx)\,dx - k^2 \int_0^\pi \text{sen}^2(kx)\,dx \\
=& k^2 \int_0^\pi \left(\cos^2(kx) - \text{sen}^2(kx)\right)dx = k^2 \int_0^\pi \cos(2kx)\,dx = 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, notar que $\|v\|^2_{H^1(0,\pi)} \neq 0$ pues v no es nula. Luego, $a(v,v) < \|v\|^2_{H^1(0,\pi)}$.