Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº3: Números Complejos
Clase N°25 - 11/06/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Potencias con Exponente Natural

Definición

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, la potencia con exponente natural n de z se define, como el producto de z por sí mismo n veces y $z^0 = 1$. Luego, se tiene:

$$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \quad z^3 = z^2 \cdot z, \quad \ldots, \quad z^n = z^{n-1} \cdot z$$

Fórmula de Moivre

Teorema

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que:

$$z^n = (|z|\text{cis}(\theta))^n = |z|^n\text{cis}(n\theta) = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Ejercicios

Calcule y escriba el resultado en forma polar.

1. $(1+i)^4(1-i)^4$
2. $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2020}$
3. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$
4. $\left(\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i}\right)^{-3}$

Ejercicios

Solución 3. Podemos considerar que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^3}$, luego si expresamos cada uno de los complejos en su forma polar, se tiene:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8\text{cis}(\pi) = -8$$
$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Así, se tiene que:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3 = \frac{8\text{cis}(\pi)}{2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

finalmente, en forma polar queda expresado por $2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Motivación

En los números complejos $\sqrt{z}$ es el conjunto de los números complejos w que satisfacen $w^2 = z$. Por tanto, si consideramos a 9 como complejo real, se tiene que

$$\sqrt{9} = \sqrt{9 + 0i} = \{3, -3\}$$

En adelante representaremos por $\sqrt{(x)}$ a la raíz cuadrada de x, cuando este es un número complejo.

Raíces n-ésimas de un número complejo

Teorema

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que z tiene n raíces n-ésimas, distintas entre si. Si $z = |z|\text{cis}(\theta)$ las raíces n-ésimas de z son:

$$w^n = z \Leftrightarrow w = \sqrt[n]{|z|}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

haciendo $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$.

Ejercicio

Calculemos las raíces cuartas de $z = i$.

Solución: Notemos que las raíces cuartas de z están dadas por:

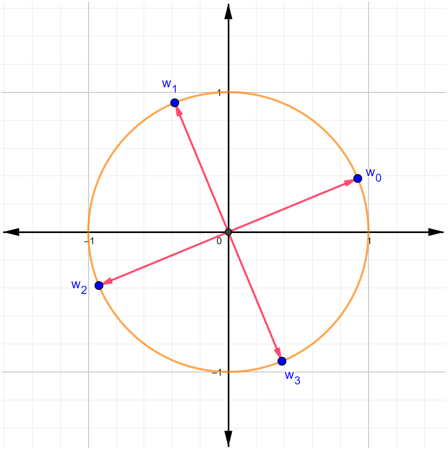
$$w_k = \sqrt[4]{|z|}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3$. Luego, se tiene:

- $w_0 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- $w_1 =$
- $w_2 =$
- $w_3 =$

Ejercicio

Notemos que gráficamente las raíces cuartas de z se representan de la siguiente manera



Raíces de la unidad

Notemos que el complejo real $z = 1$, neutro para el producto en el conjunto de los números complejos tiene algunas propiedades, en particular con respecto al cálculo de sus raíces, de hecho:

$$u_k = \sqrt[n]{(1)} = \text{cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

donde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Raíces de la unidad

Lema

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z \neq 0$. Si w es una de las raíces n-ésimas de z $(w \neq 0)$, entonces todas las raíces de z pueden calcularse mediante:

$$wu_0, wu_1, wu_2, ..., wu_{n-1}$$

si $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ son las raíces n-ésimas de 1.

Raíces de la unidad

De acuerdo con el lema anterior, se tiene que conocida una raíz n-ésima de un número complejo z, el cálculo de las n raíces n-ésimas de z se reduce al cálculo de las raíces n-ésimas de la unidad. En particular si z es un número real positivo, se tiene:

$$\sqrt[n]{(z)} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{(1)}$$

donde $\sqrt[n]{(z)}$ es la raíz n-ésima de z. Por ejemplo, las raíces cuartas de 1 son $1, -1, i, -i$, por ende las raíces cuartas de 16 son:

$$\sqrt[4]{(16)} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{(1)} = 2 \cdot \sqrt[4]{(1)} = \begin{cases} 2 \\ -2 \\ 2i \\ -2i \end{cases}$$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones con $z \in \mathbb{C}$.
   (a) $z^2 + 2z + 4 = 0$
   (b) $z^3 + 8 = 0$
   (c) $z^4 - z^2 - 6 = 0$
2. Sean $1, u$ y u^2 las raíces cúbicas de la unidad. Demuestre que:
   (a) $1 + u^2 = -u$
   (b) $(1 - u + u^2)(1 + u - u^2) = 4$