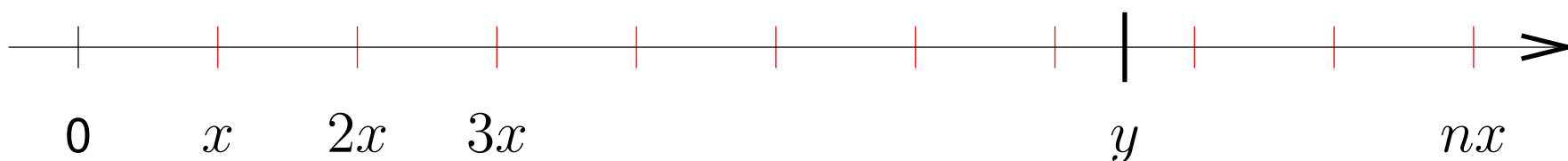


Propiedades de los números reales.

- Propiedad arquimediana.
- Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} .
- Existencia de raíces enésimas.
- Sistema extendido de números reales.

Propiedad arquimediana.

Teor.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0, \exists n \in \mathbb{N} : nx > y.$



Dem.: Si $y \leq x$ es trivial (por ejemplo, $n = 2$). Veamos el caso $x < y$.

Por el absurdo. Supongamos que $\nexists n \in \mathbb{N} : nx > y$.

$\implies \forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y \implies y$ es cota superior de $A := \{nx, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

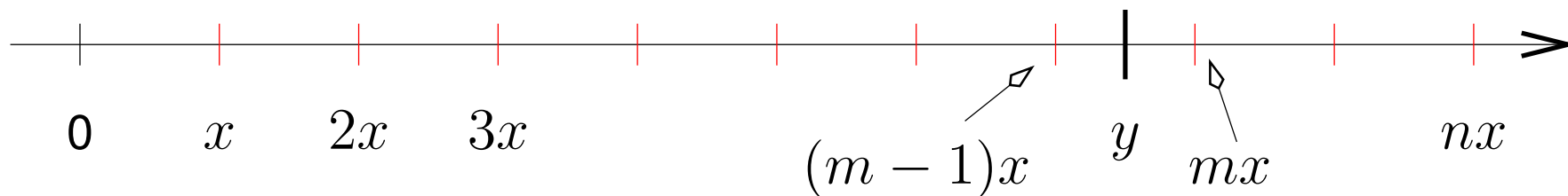
$\implies A$ es acotado superiormente $\xRightarrow{\text{Prop. Sup.}} \exists \alpha := \sup A \in \mathbb{R}.$

Como $x > 0$, entonces $\alpha - x < \alpha \implies \alpha - x$ no es cota superior de A

$\implies \exists m \in \mathbb{N} : mx > \alpha - x \implies (m + 1)x > \alpha.$

Pero $(m + 1)x \in A$ y $\alpha := \sup A \implies (m + 1)x \leq \alpha. \triangleright \triangleleft \square$

Corol.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : 0 < x < y, \exists m \in \mathbb{N} : (m - 1)x \leq y < mx.$



Para demostrar este corolario, vamos a utilizar la siguiente propiedad de los números naturales:

Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene mínimo.

Dem.: Por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N} : nx > y$. Entonces,

$$B := \{n \in \mathbb{N} : nx > y\} \neq \emptyset.$$

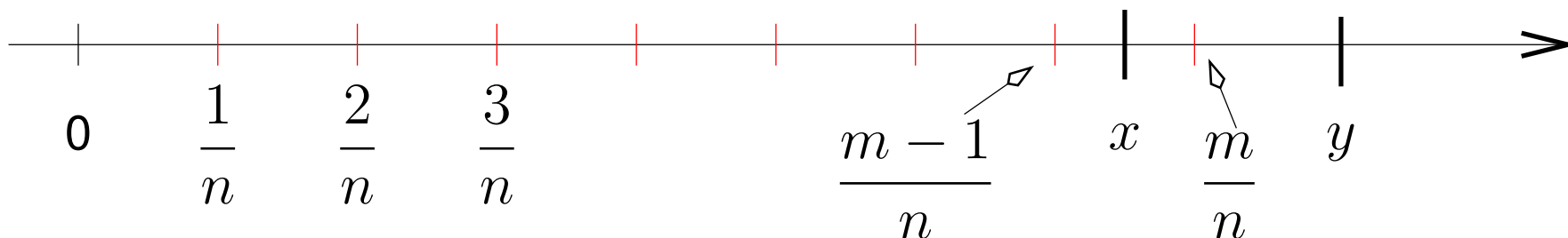
Como B es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , tiene mínimo.

Sea $m := \min B$. Como $m \in B$, entonces $mx > y$.

Por otra parte, como $(m - 1) < m = \min B$, entonces, $(m - 1) \notin B$
 $\implies (m - 1)x \leq y$. \square

Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} .

Teor.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y, \exists p \in \mathbb{Q} : x < p < y.$



Dem.: Veamos el caso $0 < x < y$. Los otros dos casos, $x < 0 < y$ y $x < y < 0$, quedan como **Ej.**

Como $y - x > 0$, por la propiedad arquimediana, $\exists n_1 \in \mathbb{N} : n_1 (y - x) > 1$.

Como $x > 0$, por la propiedad arquimediana, $\exists n_2 \in \mathbb{N} : n_2 x > 1$.

Sea $n := \max \{n_1, n_2\}$.

Entonces, $n(y - x) \geq n_1(y - x) > 1 \implies \frac{1}{n} < y - x \implies x + \frac{1}{n} < y$

y $nx > n_2 x > 1 \implies \frac{1}{n} < x$, por lo que, aplicando el Corol.,

$$\exists m \in \mathbb{N} : (m-1) \frac{1}{n} \leq x < m \frac{1}{n} \implies x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

Entonces, para $p := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $x < p < y$. \square

Existencia de raíces enésimas.

Teor.: $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists! y > 0 : y^n = x.$

Ese número y se denota $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n}$.

Dem.: Por sencillez, veremos sólo el caso $n = 2$ y $x = 2$ (vale decir, $\sqrt{2}$).

Existencia. Demostraremos que $\exists y > 0 : y^2 = 2$.

Sean $E := \{x > 0 : x^2 < 2\}$ y $F := \{x > 0 : x^2 > 2\}$.

Se demuestra como en la Clase 1 que:

- E no tiene máximo y F no tiene mínimo;
- los elementos de E son cotas inferiores de F ;
- los elementos de F son cotas superiores de E .

Por lo tanto E es acotado superiormente y además es no vacío.

Entonces la propiedad del supremo $\implies \exists y = \sup E \in \mathbb{R}$.

Veamos que $y^2 = 2$.

Recordemos: $E := \{x > 0 : x^2 < 2\}$ y $F := \{x > 0 : x^2 > 2\}$.

Por el absurdo. Supongamos que $y^2 \neq 2$. Entonces $y^2 > 2$ o $y^2 < 2$.

- **Caso 1:** Supongamos que $y^2 > 2$. Entonces $y \in F$.

F no tiene mínimo $\implies \exists z \in F : z < y = \sup E$.

$z \in F \implies z$ cota superior de E .

Entonces z es una cota superior de E menor que el $\sup E \triangleright=\triangleleft$

$\implies y^2 \not> 2$.

- **Caso 2:** Supongamos que $y^2 < 2$. Entonces $y \in E$.

E no tiene máximo $\implies \exists z \in E : z > y = \sup E \triangleright=\triangleleft$

$\implies y^2 \not< 2$.

Entonces, como $y^2 \not> 2$ e $y^2 \not< 2$, necesariamente $y^2 = 2$.

Unicidad. Supongamos que $\exists y, z > 0 : y^2 = 2 = z^2$.

Supongamos que $y < z$. Entonces $y^2 < z^2 \triangleright=\triangleleft \implies y \not< z$.

Supongamos que $y > z$. Entonces $y^2 > z^2 \triangleright=\triangleleft \implies y \not> z$.

Como $y \not< z$ e $y \not> z$, entonces $y = z$. \square

Sistema extendido de números reales.

Def: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ es un conjunto ordenado con el orden usual en \mathbb{R} y la relación $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Claramente, $\forall E \subset \overline{\mathbb{R}} : \begin{cases} +\infty \text{ es cota superior de } E, \\ -\infty \text{ es cota inferior de } E. \end{cases}$

Prop.: $\forall F \subset \mathbb{R} : F \neq \emptyset, \begin{cases} F \text{ no acotado superiormente} \iff \sup F = +\infty, \\ F \text{ no acotado inferiormente} \iff \inf F = -\infty. \end{cases}$

Dem.: Ej. \square

Corol.: $\forall F \subset \mathbb{R} : F \neq \emptyset, \exists \sup F \in \overline{\mathbb{R}} \text{ y } \exists \inf F \in \overline{\mathbb{R}}.$

Dem.: Sea $F \subset \mathbb{R} : F \neq \emptyset$. Si F está acotado superiormente, la propiedad del supremo $\implies \exists \sup F \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Si F no está acotado superiormente, entonces $\sup F = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. Para el ínfimo, la demostración es idéntica. \square

$\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto ordenado, pero no un cuerpo. Pese a ello, las siguientes operaciones algebraicas que involucran $+\infty$ o $-\infty$ están bien definidas:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty + x = +\infty$ y $x - \infty = -\infty + x = -\infty$;
- $\forall x > 0 : x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$ y $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$;
- $\forall x < 0 : x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$ y $x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$;
- $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$;
- $+\infty + \infty = +\infty$ y $-\infty - \infty = -\infty$;
- $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

En cambio, no están bien definidas:

$$+\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0(\pm\infty) \quad \text{y} \quad (\pm\infty)0.$$