UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 6 - Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Problemas de Holomorfía y Armónicas conjugadas.***

Notación: Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo entonces $H(\Omega)$ es el espacio vectorial complejo de todas las funciones holomorfas sobre Ω.

(P) Sea f una función holomorfa no constante sobre el disco $D(0,r)$ Probar que

(a) si $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$, entonces $\bar{f} \notin H(D(0,r))$;

(b) si $\bar{\bar{f}}(z) := \overline{f(\bar{z})}$, entonces $\bar{\bar{f}} \in H(D(0,r))$.

2. Si $u = u(x,y)$ es armónica sobre una conjunto abierto V del plano, entonces la función f definida por $f(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, es holomorfa en $D := \{x + iy : (x,y) \in V\}$.

3. Sea f y g dos funciones $\mathbb{C}$-derivables en z_0 , $g(z_0) \neq 0$. Probar que

(a) fg es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 y exhibir su derivada;

(b) $1/g$ es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 y exhibir su derivada;

(c) f/g es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 y exhibir su derivada;

¿Cuando se podrá afirmar que f/g es holomorfa sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$?

(P) Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica y sobreyectiva verificando que $\nabla u \neq 0$. Hallar todas las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivables y tales que $F \circ u$ sea armónica. ¿$\triangle(F \circ u)$?

5. Sea $f \in H(\mathbb{C})$ cuyas funciones componentes tienen segundas derivadas parciales continuas. Entonces

$$\Phi(x,y) = u^2(x,y) - v^2(x,y)$$

es armónica sobre $\mathbb{R}^2$.
Indicación: Si $G(z) = z^2$ entonces $G \in H(\mathbb{C})$. Evaluar $G \circ f$ y aplicar el teorema de caracterización de las funciones armónicas.

(P) Establecer que la función polinomial de grado tres

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x$$

es armónica sobre $\mathbb{R}^2$ y encontrar su armónica conjugada v, la cual existe, pues, el domino es simplemente conexo. Ella puede construir al menos por los siguientes procedimientos :

1º Integre las condiciones de contorno

$$v_y(x,y) = u_x(x,y) \quad \wedge \quad v_x(x,y) = -u_y(x,y)$$

2º Evaluando la integral de linea

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_\gamma dv \\ dv &:= v_x(x,y)dx + v_y(x,y)dy \\ &= -u_y(x,y)dx + u_x(x,y)dy \end{aligned}$$

donde γ es cualquier trayectoria que conecte un punto (x,y) con el origen. Mostrar que gracias a que u es armónica dicha integral es independiente de la trayectoria. Se recomienda, parametrizar la trayectoria dada por la composición de $\overline{P(0,0)Q(x,0)} \bigcup \overline{Q(x,0)R(x,y)}$.[1]

3º Finalmente, o bien previo a todo, dado que el dominio es simplemente conexo, identifique del conocimiento de las funciones elementales la función holomorfa f tal que $u(x,y) = Re(f(z))$.

7. En el ejercicio anterior integre las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el dominio $D = [0,x] \times [0,y]$ para una *afijo* cualquier (x,y) del plano. Para establecer, citando teoremas del cálculo diferencial e integral que permitan obtener [2]

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y u_x(x,t)dt - \int_0^x u_y(s,0)ds \\ &= \int_0^y [3x^2 - 3t^2 - 1]dt - 0 \\ &= 3x^2y - y^3 - y. \end{aligned}$$

Repetir, el ejercicio para $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y)$. Obviamente, gracias a que el dominio es simplemente conexo $u(x,y) = \mathrm{Re}(\sin(z))$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}(\sin(z))$. El objetivo es enseñar a integrar *formas diferenciales.*

8. Sean D y S dos dominios y sean $f \in H(D)$ y $g \in H(S)$ tales que $f(D) \subseteq S$. Probar que $g \circ f \in H(D)$. Indicación. Previamente, repasar o conocer el teorema en el cálculo diferencial real...

9. Probar que una condición necesaria y suficiente para que una función compleja univariada

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

sea holomorfa en un dominio simplemente conexo, S, es que sus funciones componentes sean armónicas conjugadas en S.

En los siguiente tres problemas u es una función armónica en un dominio simplemente conexo S. Debe proponer dos alternativas para desarrollar la respuesta.

10. Si v es armónica conjugada de u , entonces $-u$ es armónica conjugada de v.

11. Si v_1 y v_2 son dos armónicas conjugadas de u ellas difieren en una constante

12. Si v es armónica conjugada de u , entonces también lo es de $u + c$ con c constante real.

13. Sean a, b, c constants reales. Para $z = x + iy$, se define

$$P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Inferir una condición necesaria y suficiente sobre las constantes reales para las cuales existe $f \in H(\mathbb{C})$ verificando $\mathrm{Re}(f) = P$. Describir explícitamente dichas funciones f.

14. Para los afijos $(x,y) \neq (0,0)$ se define$P(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$:

(a) Probar que existe una única función holomorfa f definida sobre $\mathbb{C} - \{0\}$ donde $P = \mathbb{R}(f)$ y tal que $f(1) = 2$.

(b) Para $z \neq 0$, determinar la expresión de todas las funciones $f = f(z)$ tales que $P = \mathrm{Re}(f)$.

Septiembre 2024
FPV/fpv

[1] El ejercicio, fundamenta la correcta integración de las condiciones de Cauchy-Riemann y es análogo a la correcta construcción del campo conservativo que define implícitamente la solución de una EDO de primer orden exacta.

[2] Ver ejemplo de la clase