

Cálculo III (521227)
Listado 3

Continuidad

1. Determinar, si es posible, para qué valores de a son las siguientes funciones continuas:

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^a}{x^4+y^4+x^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Estudiar la continuidad en \mathbb{R}^2

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ 1 & , \text{ si } 0 < y < x^2 \end{cases} .$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan x}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & , \text{ si } x > -y \\ 2x & , \text{ si } x \leq -y \end{cases}$$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} & , \text{ si } xy \neq 0 \\ -1/2 & , \text{ si } xy = 0 \end{cases}$$

3. Determine el conjunto de puntos donde cada función es continua.

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{3x^4 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(b)

$$f(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x^2 y + z^4 w}{x^2 + y^4 + z^4 + w^2}, & \text{si } (x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0) \\ 1, & \text{si } (x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}.$$

Derivadas parciales

4. Calcule las derivadas parciales de cada función en un punto arbitrario (x, y) en su dominio.

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2}.$

(b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$

(d) $f(x, y) = x^y.$

(e) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$

(f) $f(x, y, z) = \ln(\cos(x + y + z))$

(g) $f(x, y, z) = e^{-x} \sin y \cos z.$

5. Considere la función

$$f(x, y, z, w) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{w} + \frac{w}{x}.$$

Demuestre que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + w \frac{\partial f}{\partial w} = 0.$$

6. (a) Sea $u = \sin\left(\frac{r}{t}\right) + \ln\left(\frac{t}{r}\right)$. Verifique que

$$t \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

(b) Sea $w = x^2 y + y^2 z + x z^2$. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2.$$

7. Calcule las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes, donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

(a) $f(x, y) = \int_{xy}^{y^2} g(t) dt.$

(b) $f(x, y) = \int_{x+y}^{y-x} g(t) dt.$

Derivadas direccionales

8. Calcule la derivada direccional de la función dada en la dirección del vector indicado. Si no se indica un punto, hágalo para un punto arbitrario (x, y) .
- (a) $f(x, y) = x - 4y^2 + y^2$, $v = (3/5, 4/5)$.
- (b) $f(x, y) = xye^{xy}$, $v = (a, b)$ un vector unitario, en el punto $(1, -1)$.
- (c) $f(x, y, z) = xyz$, $v = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
9. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) \neq \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right), v \right\rangle$$

donde $v = (a, b)$ es un vector unitario dado.