UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 2 ANÁLISIS NUMÉRICO II 525441

9. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices hermitianas. Demuestre que ellas poseen una misma base común de autovectores si y sólo si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

10. Demuestre que
$$\lim_{p \to +\infty} ||\boldsymbol{v}||_p = ||\boldsymbol{v}||_\infty \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n\,.$$

11. Sea $\boldsymbol{A}$ matriz diagonal. Demuestre que $||\boldsymbol{A}||_p = \rho(\boldsymbol{A})$, $1 \leq p \leq +\infty$.

12. Dada una matriz diagonalizable $\boldsymbol{A}$, ¿existirá (al menos) una norma matricial $||\cdot||$ en la cual $||\boldsymbol{A}|| = \rho(\boldsymbol{A})$?

13. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz hermitiana definida positiva. Demuestre que existe una única matriz hermitiana definida positiva $\boldsymbol{B}$ (simétrica si $\boldsymbol{A}$ lo es) tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$.

14. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz hermitiana. Determine una condición necesaria y suficiente para que la función $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{v})^{1/2}$ sea una norma sobre $\mathbb{C}^n$.

15. Determinar las constantes más pequeñas (posibles) C para las cuales $||\boldsymbol{v}|| \leq C\, ||\boldsymbol{v}||_* \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, cuando $||\cdot||\,,\, ||\cdot||_* \in \{||\cdot||_1\,,\, ||\cdot||_2\,,\, ||\cdot||_\infty\}$.

16. Determine si existe algún valor de $\alpha > 0$ para el cual la función $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n} \mapsto \alpha \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, es una norma matricial.

17. Sea $\{\boldsymbol{U}_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de matrices unitarias. Justifique por qué existe una subsucesión que converge a una matriz unitaria.

18. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada tal que la sucesión $\{\boldsymbol{A}^k\}_{k\in \mathbb{N}}$ converge a una matriz invertible. Identifique la matriz $\boldsymbol{A}$.

19. Sea $\boldsymbol{B}$ una matriz cuadrada con $||\boldsymbol{B}|| < 1$. Probar que la sucesión $\{\boldsymbol{C}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\boldsymbol{C}_k := \sum\limits_{j=0}^{k} \boldsymbol{B}^j$, con la convención $\boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{I}$ aún si $\boldsymbol{B}$ es nula, es convergente, y $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{C}_k = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}$.

20. En lo que sigue $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada.

    a) Definimos la sucesión $\{\boldsymbol{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ por $\boldsymbol{B}_k := \sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{\boldsymbol{A}^j}{j!}$. Demuestre que esta sucesión es convergente. Su límite será denotado por $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ (matriz exponencial de $\boldsymbol{A}$).
    b) Demuestre que $\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}$, lo cual muestra que la matriz $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ es siempre no singular.
    c) Sea también $\boldsymbol{B}$ otra matriz cuadrada, del mismo orden que $\boldsymbol{A}$. Pruebe que si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, entonces $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$.

Fecha de entrega: Viernes 25.04.2014.

Respecto a la redacción de las tareas, se recomienda hacerlo utilizando LaTeX.

RBP/rbp 15.04.2014