Procesos Estocásticos : Proceso de Poisson

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

Outline

1. Recuerde : Proceso de Poisson
2. Proceso de Poisson : Ejercicios
3. Propiedades del Proceso de Poisson
4. Principio de Superposición para procesos de Poisson

Definición

Un proceso de Poisson es un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ con intensidad (o tasa) $\lambda \geq 0$ tal que sus incrementos $N_t - N_s$, $s < t$, son independientes y se verifica

1. $N_0 = 0$
2. $\forall s < t$, $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$,

esto es

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\}.$$

Proceso de Poisson

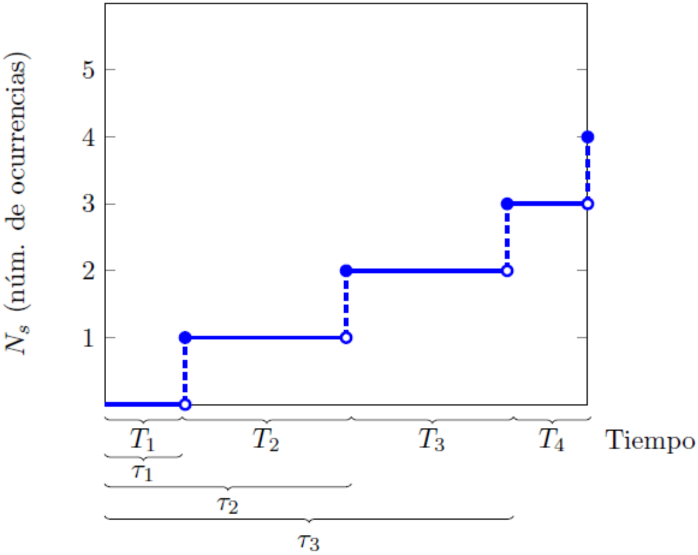
El proceso de Poisson es un ejemplo del proceso de conteo ("point process", "counting process"). Es el proceso estocástico que cuenta el número de los eventos que se han producido desde el instante cero hasta el instante t :

$$N_t = \sum_j \mathbb{I}\{\tau_j \leq t\} \quad \forall t$$

donde τ_j denota el instante de la ocurrencia del j-ésimo evento.

- τ_j son v.a. que tienen distribución Gamma(j, λ).

Proceso de Poisson



Tiempos de espera

En el caso del proceso de Poisson, el tiempo de espera,

$$T_j = \tau_j - \tau_{j-1},$$

es decir el tiempo transcurrido desde el (j-1)-ésimo evento hasta el j-ésimo, es una v.a. con distribución exponencial y parámetro λ :

$$T_j \sim Exp(\lambda).$$

- Por lo tanto, $\forall j$ $\mathbb{E}[T_j] = 1/\lambda$ y $Var[T_j] = 1/\lambda^2$.

Proceso de Poisson

Aparte de lo que los incrementos $N_{t+s} - N_s$ del proceso de Poisson son independientes y estacionarios, tenemos que

$$\begin{aligned} P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) &= 1 - \lambda\Delta t + \overline{o}(\Delta t), \\ P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) &= \lambda\Delta t + \overline{o}(\Delta t), \\ P(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2) &= \overline{o}(\Delta t). \end{aligned}$$

Donde $\overline{o}(\Delta t)$ es una función tal que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Proceso de Poisson

En otras palabras

$$\begin{aligned} \frac{P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0)}{\Delta t} &\sim \frac{1}{\Delta t} - \lambda, \\ \frac{P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1)}{\Delta t} &\sim \lambda, \\ \frac{P(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2)}{\Delta t} &\to 0, \quad \Delta t \to 0. \end{aligned}$$

Aplicaciones del Proceso de Poisson

- El modelamiento financiero : las roturas de stock o los stocks grandes.
- Los seguros. La probabilidad de ruina de una companía de seguros (modelo de Cramér-Lundberg).
- El número de accidentes de transito, de casos de enfermedades.
- Las llegadas de innovaciones en investigación y desarrollo.

Outline

Problema 1

Los usuarios llegan a una ventanilla de un terminal de buses a una tasa de 21 personas/hora. Si las llegadas ocurren según un proceso de Poisson,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto entre las 7 y 9 hrs. como entre las 10 y 12 hrs. lleguen la misma cantidad de personas, igual a 40 ?

b) Muestre que el número esperado de personas que llega entre las 7 y 9 hrs., y entre 10 y 12 hrs., es mayor a 40.

Solución

Sea $N_t - N_s$ el número de personas que llega entre las s y t horas. Tenemos que

$$\begin{aligned} P(N_9 - N_7 = 40) &= P(N_{12} - N_{10} = 40) \\ &= \frac{\exp(-42) \cdot 42^{40}}{40!} \approx 0,06 \end{aligned}$$

Por otro lado, el valor esperado es

$$\mathbb{E}[N_9 - N_7] = \mathbb{E}[N_{12} - N_{10}] = \lambda t = 21 \cdot 2 > 40$$

.

Problema 2

Un mecanismo de impulsión de agua tiene una válvula que es sensible a la presencia de particulas. Los experimentos muestran que, en promedio, el mecanismo absorbe λ particulas por cada litro de agua y es dado por un proceso de Poisson. La probabilidad condicional de que una partícula entre a la válvula es igual a p.

- Encuentre la distribución del número de partículas que entran a la válvula.

Solución

Sean los sucesos

$$A_k : \text{entran } k \text{ partículas a la válvula}$$
$$H_l : \text{Entran } l \text{ partículas al mecanismo}$$

Tenemos para $l \geq k$

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{l=k}^{\infty} P(A_k|H_l)P(H_l) \\
&= \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \frac{\lambda^l}{l!} \exp(-\lambda) \\
&= \sum_{l=k}^{\infty} \frac{l!}{k!(l-k)!} p^k (1-p)^{l-k} \frac{\lambda^l}{l!} \exp(-\lambda).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{p^k \exp(-\lambda)}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{m!}(1-p)^m \qquad\qquad (m = l - k) \\ &= \frac{(\lambda p)^k \exp(-\lambda)}{k!} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}}_{\exp \lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k \exp(-\lambda p)}{k!}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{k \to \infty} P\,(\text{número de partículas que entran a la válvula} = k)$$

es Poisson(λp).

Outline

Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson y sean $s < t$, $n \geq k$. Entonces,

$$P(N_s = k | N_t = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

Demo.

$$
\begin{aligned}
P(N_s = k | N_t = n) &= \frac{P(N_s = k; N_t = n)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{P(N_s = k; N_{t-s} = n-k)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{P(N_s = k) P(N_{t-s} = n-k)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Clientes llegan a una tienda según un proceso de Poisson. Suponga que dos clientes llegan durante la primera hora.
¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen durante los primeros 20 minutos ?
Utilizando el resultado anterior,

$$P(N_{20} = 2 | N_{60} = 2) = \binom{2}{2} \left(\frac{20}{60}\right)^2 \left(1 - \frac{20}{30}\right)^0 = 1/9$$

Ejemplo 1. Cont.

Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado durante los primeros 20 minutos ?

$$
\begin{aligned}
& P(N_{20} \geq 1 | N_{60} = 2) \\
= \; & P(N_{20} = 1 | N_{60} = 2) + P(N_{20} = 2 | N_{60} = 2) \\
= \; & 1/9 + 4/9 = 5/9
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
P(N_{20} = 1 | N_{60} = 2) = \binom{2}{1} \left(\frac{20}{60}\right)^{1} \left(1 - \frac{20}{30}\right)^{2-1} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4/9
$$

Outline

Principio de Superposición para procesos de Poisson

Supongamos que eventos ocurren con tasa λ y que además, a los eventos se les puede clasificar en eventos de "tipo 1" y eventos de "tipo 2", que ocurren con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Así, definimos

- $\{N_t : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos en el período t
- $\{N_t^{(i)} : t \geq 0\}$: Núm. total de eventos del tipo $i, i = 1, 2$ en el período t.

Principio de Superposición para procesos de Poisson

- $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ y $\lambda = p\lambda + (1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)}$ es un proceso de Poisson de tasa $p\lambda$
- $N_t^{(2)}$ es un proceso de Poisson de tasa $(1-p)\lambda$.
- $N_t^{(1)} \perp\!\!\!\perp N_t^{(2)}$.
- Si $N_t^{(1)}, \ldots, N_t^{(k)}$ son procesos de Poisson independientes con tasas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, entonces $N_t := N_t^{(1)} + \ldots + N_t^{(k)}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Principio de Superposición para procesos de Poisson

Para los procesos de Poisson definidos anteriormente, se tiene para $n > k$

$$P(N_t^{(1)} = k | N_t = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Demo.

$$
\begin{aligned}
P(N_t^{(1)} = k | N_t = n) &= \frac{P(N_t^{(1)} = k; N_t = n)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{P(N_t^{(1)} = k; N_t^{(2)} = n-k)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{P(N_t^{(1)} = k)P(N_t^{(2)} = n-k)}{P(N_t = n)}
\end{aligned}
$$

$$
= \left(\frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda(1-p)t}(\lambda(1-p)t)^{(n-k)}}{(n-k)!}\right)\left(\frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}\right)
$$

$$
= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
$$

Ejemplo

Suponga una fuente radioactiva que emite partículas de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa 4 por minuto. Un científico coloca un contador de Geiger frente a la fuente, el cual independientemente de cualquier otra cosa, registra con probabilidad 0,75 cada partícula emitida.

1. Calcule la probabilidad de que al menos una partícula haya sido registrada 10 minutos después de iniciado el conteo.
2. Si el número de partículas emitidas en los primeros 10 minutos de conteo era 50. ¿Cuál es la probabilidad de que 40 de ellas hayan sido registradas ?
3. Dado que 40 partículas se registraron en los 10 primeros minutos del conteo, ¿cuál es el número total esperado de partículas que la fuente ha emitido ?

Solucón. Pregunta 1

- Calcule la probabilidad de que al menos una partícula haya sido registrada 10 minutos después de iniciado el conteo.
- Definimos $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ donde $N_t \sim \text{Poisson}(4t)$ es el número total de partículas emitidas por la fuente.
- $N_t^{(1)} \sim \text{Poisson}(\frac{3}{4} \cdot 4t)$ es el número de particulas registradas y $N_t^{(2)} \sim \text{Poisson}(\frac{1}{4} \cdot 4t)$ es el número de partículas no registradas.
- Así

$$\begin{aligned} P(N_{10}^{(1)} \geq 1) &= 1 - P(N_{10}^{(1)} = 0) \\ &= 1 - e^{-30}. \end{aligned}$$

Solucón. Pregunta 2

- Si el número de partículas emitidas en los primeros 10 minutos de conteo era 50. ¿Cuál es la probabilidad de que 40 de ellas hayan sido registradas ?
- Con $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ donde $N_t \sim \text{Poisson}(4t)$ es el número total de partículas emitidas por la fuente.
- $N_t^{(1)} \sim \text{Poisson}(3t)$ es el número de particulas registradas y $N_t^{(2)} \sim \text{Poisson}(t)$ es el número de partículas no registradas.
- Así, por un resultado anterior,

$$P(N_{10}^{(1)} = 40 | N_{10} = 50) = \binom{50}{40} \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \approx 0.0985.$$

Solucón. Pregunta 3

- Dado que 40 partículas se registraron en los 10 primeros minutos del conteo, ¿cuál es el número total esperado de partículas que la fuente ha emitido ?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_{10}|N_{10}^{(1)} = 40] &= \mathbb{E}[N_{10}^{(1)} + N_{10}^{(2)}|N_{10}^{(1)} = 40] \\
&= \mathbb{E}[N_{10}^{(1)}|N_{10}^{(1)} = 40] + \mathbb{E}[N_{10}^{(2)}|N_{10}^{(1)} = 40] \\
&= \mathbb{E}[N_{10}^{(1)}|N_{10}^{(1)} = 40] + \mathbb{E}[N_{10}^{(2)}] \\
&= 40 + 10 = 50.
\end{aligned}
$$