UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218-525221)
PAUTA Evaluación 2

Problema 1 ([15 puntos])

Un cuerpo de masa $0.5[Kg]$ se acopla a un resorte que cuelga del techo, produciendo un estiramiento de $0.2[m]$. Si el cuerpo se eleva y se suelta desde el reposo $2[m]$ por arriba de la posición de equilibrio, determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Considere que el medio que rodea al sistema ofrece una resistencia $\mu = 1[N \cdot s/m]$. Además asuma que $g = 10[m/s^2]$.

Solución:

Calculamos $\lambda = \dfrac{\mu}{2m} = \dfrac{1}{2 \cdot 0.5} = 1[s^{-1}]$.

Calculamos $\dfrac{k}{m}$: $kl = mg \to \dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{l} = \dfrac{10}{0.2} = 50$.

Ecuación de movimiento: $x'' + 2\lambda x' + \dfrac{k}{m}x = 0 \to x'' + 2x' + 50x = 0$.

Valor inicial: $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$.

Tenemos la sistema $\begin{cases} x'' + 2x' + 50x = 0 \\ x(0) = -2, x'(0) = 0 \end{cases}$

(5pts)

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 50x = 0 \\ x(0) = -2, x'(0) = 0 \end{cases} \to x(t) = -\frac{2}{7}e^{-t}(\sin(7t) + 7\cos(7t)).$$

(5pts)

Determine el tiempo en el que la masa por la posición de equilibrio:

$x(t) = 0 \to \sin(7t) + 7\cos(7t) = 0.$

$\to \tan(7t) = -\dfrac{1}{7}.$

$\to 7t = \arctan(-\dfrac{1}{7}) + k\pi,\ k = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

$\to t = \dfrac{1}{7}\arctan(-\dfrac{1}{7}) + k\dfrac{\pi}{7},\ k = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

(5pts)

Problema 2 ([20 puntos])
Este problema consta de dos partes independientes entre si:

(i) ([**7 puntos**]) Encuentre todos los valores de y_0 para los cuales el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{x - y(x)} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución (definida para todo x en un intervalo que contiene a 1). Justifique su respuesta.

(ii) ([**8 puntos**]) Asuma que $z(x)$ soluciona el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(x) = (z(x) - x)^3 + 1 \\ z(2) = 1 \end{cases}.$$

Justifique que $z(x) < x$ para todo x en cierto intervalo que contiene a 2. Con este fin, use el teorema de existencia y unicidad de soluciones, junto con notar que la función $y(x) = x$ satisface el problema de valor inicial $\begin{cases} y'(x) = (y(x) - x)^3 + 1 \\ y(2) = 2 \end{cases}$.

Solución:

(i) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, elegimos

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x - y}.$$

Entonces, el dominio de f es $\mathbb{R}^2$ y f es continua en $\mathbb{R}^2$.
De otra parte

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{1}{3}(x - y)^{-2/3} = \frac{-(1/3)}{(x - y)^{2/3}},$$

y es continua para todo $x \neq y$.

Sea $y_0 \neq 1$. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola abierta de centro $(1, y_0)$ y radio ϵ no toca a la recta $y = x$. Así que f y $\frac{\partial}{\partial y} f$ son continuas en la bola abierta de centro $(1, y_0)$ y radio ϵ. Lo que implica que el PVI dado tiene una única solución cuando $y_0 \neq 1$.

Si $y_0 = 1$ no podemos asegurar la unicidad de la solución (puesto que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ ni siquiera está definida. **[7 puntos]**

(ii) Definimos $f(x, y) = (y - x)^3 + 1$. Ya que f y $\frac{\partial}{\partial y} f$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u'(x) = (u(x) - x)^3 + 1 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una única solución para cada $x_0, u_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, las curvas solución $(x, y(x))$ y $(x, z(x))$ no se cortan. Ya que

$$z(2) = 1 < 2 = y(2),$$

$z(x) < y(x) = x$ para todo x en cierto intervalo que contiene a 2.

[8 puntos]

Problema 3. ([**15 puntos**])
Usando valores y vectores propios, determine la solución general del sistema de EDO

$$\begin{cases} {x_1}'(t) = 4x_1(t) + x_3(t) \\ {x_2}'(t) = 6x_2(t) \\ {x_3}'(t) = -4x_1(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

Solución: La forma matricial del sistema dado es $X'(t) = AX(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Se propone una solución de la forma $X_i = ve^{\lambda t}$, donde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A. Determinamos los valores propios de A,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (6-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4) = 0 \\ &\Rightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 20) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 4 \pm 2i \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios de A son 6, $4 + 2i$ y $4 - 2i$.
Por otra parte, determinamos los vectores propios asociados a cada valor propio de A.

Para $\lambda = 6$, sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_6$, se tiene que

$$\begin{aligned} (A - 6I)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2x + z \\ 0 \\ -4x - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow -2x + z = 0 \wedge -4x - 2z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que $x = z = 0$,
luego, $S_6 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

[6 puntos]

Con respecto a los valores propios complejos obtenidos, utilizamos $\lambda = 4+2i$ para determinar el resto de los vectores propios. Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_{4+2i}$ tal que

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda I)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 0 & 1 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ -4 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} -2ix+z \\ (2-2i)y \\ -4x-2iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow -2ix+z = 0 \wedge (2-2i)y = 0 \wedge -4x-2iz = 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que $y = 0$, $z = 2ix$, luego, $S_{4+2i} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}$, por teorema visto en clases, sabemos que

$$X_1(t) = Re(e^{(4+2i)t}v) \text{ y } X_2(t) = Im(e^{(4+2i)t}v)$$

son soluciones l.i del sistema EDO dado.

$$X_1(t) = Re(e^{(4+2i)t}v) = Re\left(e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+i\,\mathrm{sen}\,(2t) \\ 0 \\ 2\cos(2t)i - 2\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{pmatrix}\right) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 0 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = Im(e^{(4+2i)t}v) = Im\left(e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+i\,\mathrm{sen}\,(2t) \\ 0 \\ 2\cos(2t)i - 2\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{pmatrix}\right) = e^{4t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(2t) \\ 0 \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\left\{ e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 0 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{pmatrix}, e^{4t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(2t) \\ 0 \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}, e^{6t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema fundamental de soluciones lo cual concluye que la solución general del sistema de EDO dado es

$$X(t) = c_1e^{4t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 0 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{pmatrix} + c_2e^{4t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(2t) \\ 0 \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} + c_3e^{6t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0. \end{pmatrix}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias. **[9 puntos]**

Problema 4. ([**15 puntos**])
En este problema se debe usar Transformada de Laplace.

Considere el PVI

$$\begin{cases} y''(t) + 4y' + 8y(t) &= f(t) \text{ para } t \geq 0 \text{ y } f \text{ continua de orden exponencial,} \\ y(0) = 0,\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

Muestre que si $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, entonces

(*i*) $Y(s) = \dfrac{F(s)+1}{s^2+4s+8}$ donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

(*ii*) Determine el valor de $y(t)$ en el caso que $f(t) = 1$.

$$y(t) = (1/5)e^{2t} + e^{3t}\Big((4/5)\cos(2t) - (14/10)\,\mathrm{sen}\,(2t)\Big)$$

Solución:

(*i*) Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ se obtiene

$$(s^2Y(s) - 1) + 4sY(s) + 8Y(s) = F(s)$$

de donde se obtiene que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2+4s+8} + \frac{1}{s^2+4s+8}$$

(4pts)

(*ii*) Si $f(t) = 1$, de la parte anterior sigue

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+4s+8)} + \frac{1}{s^2+4s+8} \\ &= \frac{1+s}{s(s^2+4s+8)} \\ &= \frac{(1/8)}{s} + \frac{\Big(-(1/8)s + (1/2)\Big)}{s^2+4s+8} \\ &= \frac{(1/8)}{s} + \frac{\Big(-(1/8)(s+2) + (3/4)\Big)}{(s+2)^2+4} \\ &= \frac{(1/8)}{s} - \frac{(1/8)(s+2)}{(s+2)^2+4} + \frac{(3/4)}{(s+2)^2+4}. \end{aligned}$$

(5pts)

Ahora aplicando Transformada de Laplace Inversa, sigue

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8} - (1/8)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right](t) + (3/4)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+4}\right](t) \\ &= \frac{1}{8} - (1/8)e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t) + (3/4)\,e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right](t) \\ &= \frac{1}{8} - (1/8)e^{-2t}cos(2t) + (3/8)e^{-2t}sin(2t). \end{aligned}$$

(6pts)

LBV/HN/JMS/CMG//jms
Junio, 19 de 2023.