Guía 12-C1: SOBRE FUNCIONES Y GRÁFICOS II

§**1**. *Continuidad.* §**2**. *Derivadas con límites.* §**3**. *No derivabilidad y quiebres del gráfico.* §**4**. *Asíntotas verticales.* §**5**. *Asíntotas horizontales y oblicuas.* §**6**. *Continuidad en intervalos cerrados.*

12.1. Continuidad y derivabilidad

Concepto de continuidad

Gráficamente, una función es continua cuando su gráfico es un trazo continuo. Esto falla para $x = 0$ en los gráficos (II) y (III) de abajo. La expresión analítica de la continuidad es:

$$f \text{ continua en } a \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) \iff f(a+\hbar) \to f(a).$$

En (I) $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \implies$ continuidad. En (II) se tiene $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty \implies f$ no es continua en 0. En (III) ocurre que $f(0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, pero $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \implies f$ no es continua en 0.

Derivabilidad con límites

Vimos en la Guía 10 que la derivada de una función $f(x)$ se obtiene aplicando flecha al cuociente diferencial $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+\hbar)-f(a)}{\hbar}$. En ese momento nos enfocamos en los casos en que la derivada si existe, pasando por alto que la flecha puede producir un resultado infinito o llevar a divergencia. Vemos primero la formulación con límites de la derivada:

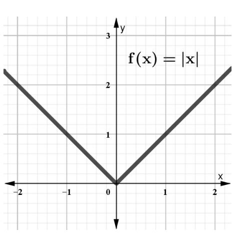
$$f \text{ derivable en } a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{df}{dx}(a) \iff \frac{f(a+\hbar)-f(a)}{\hbar} \to \frac{df}{dx}(a).$$

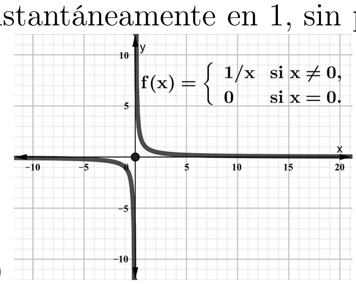
$\underline{Teorema}$: f Derivable en $a \implies f$ Continua en a.

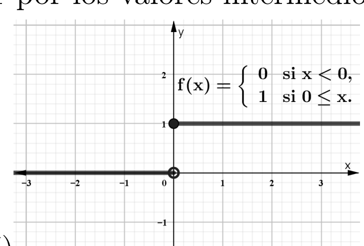
`Ejemplo 12.1` *Analizar la derivabilidad de* $f(x) = |x|$.

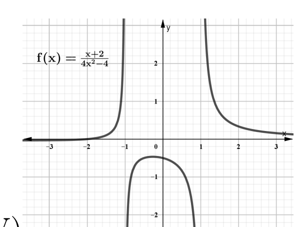
`Solución`. El problema requiere analizar el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a}$. La eliminación del valor absoluto dependerá del signo de a. <u>Caso $a < 0$</u>: Aquí el hecho que $x \to a$ también asegura que $x < 0$, de donde $a < 0 \implies \lim\limits_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(-x)-(-a)}{x-a} = -1$, es decir, $a < 0 \implies \frac{d(|x|)}{dx}(a) = -1$. <u>Caso $a > 0$</u>: En este caso se concluye que $a > 0 \implies \frac{d(|x|)}{dx}(a) = 1$. <u>Caso $a = 0$</u>: El límite de diferenciabilidad queda así: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. Este límite no existe, así que $\frac{d(|x|)}{dx}(0) = \nexists$.

<u>Para pensar</u>: ¿Qué significa que una derivada no exista en un valor? Analíticamente, significa que '*es imposible saber la pendiente del punto*'. Gráficamente, significa que, o hay discontinuidad en el valor (ver gráficos (II) y (III)) o, si bien hay continuidad, la tendencia de pendiente del gráfico se quebró en ese punto, como en el gráfico (I) donde la pendiente antes de cero era $= -1$ y después de cero se transformó instantáneamente en 1, sin pasar por los valores intermedios.

(I) 

(II) 

(III) 

(IV) 

12.2. Comportamiento Asintótico

Asíntotas verticales

Un ejemplo de asíntota vertical es la recta $x = 0$ en el Gráfico (II) de $f(x) = 1/x$.

$$\text{Recta } x = a \text{ es asíntota vertical} \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \;\vee\; \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

`Ejemplo 12.2` *Demuestre que las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x+2}{4x^2-4}$ (ver (IV)).*

`Solución`. Es inmediato de que $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{4x^2-4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{x+2}{4x^2-4} = -\infty$. En este caso se cumple también que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{4x^2-4} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{x+2}{4x^2-4} = +\infty$, pero tales hechos son redundantes para que las rectas $x = \pm 1$ sean asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales al infinito

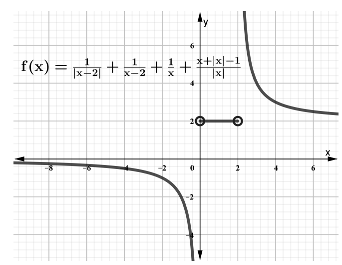
Un ejemplo de asíntota horizontal es la recta $y = 0$ en el Gráfico (II) de $f(x) = 1/x$.

$$\text{Recta } y = b \text{ es asíntota horizontal} \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = b \;\vee\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

`Ejemplo 12.3` *En la figura se muestra el gráfico de*

$$f(x) = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} + \frac{x+|x|-1}{|x|},$$

función concebida como ejemplo ilustrativo. Vemos que $x = 0$ y $x = 2$ son asíntotas verticales e $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$, así como $y = 2$ es asíntota horizontal en $+\infty$.



Asíntotas oblicuas al infinito

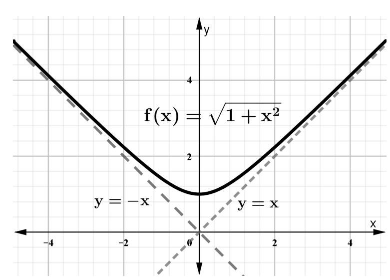
Las rectas $y = \pm x$ son un ejemplo de asíntotas oblicuas para la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$.

$$y = mx + b \text{ es asíntota oblicua} \iff \mathbf{1^\circ)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \;\wedge\; \mathbf{2^\circ)}\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = b.$$

`Ejemplo 12.4` *Analizar la existencia de asíntotas para $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.*

`Solución`. Es evidente que ningún $x \to a$ ($a \in \mathbb{R}$) provoca que $f(x) \to \pm\infty$, así que no hay asíntotas verticales. Además, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$, así que tampoco hay asíntotas horizontales.

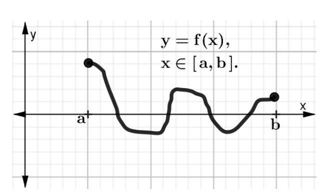
Tenemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}}{x} = \pm 1$. Esto implica que hay asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ com $m = \pm 1$. En $+\infty$ ocurre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0$, así que $b = 0$ y la asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = x$. Similarmente, se ve que la asíntota oblicua en $-\infty$ es $y = -x$, como se observa en la figura.



Funciones continuas con dominio un intervalo cerrado

<u>*Teorema*</u>: *f continua $\wedge$ $Dom(f) = [a, b]$ $\implies$ f no tiene asíntotas.*

`Demostración`. Como el dominio de f es un intervalo cerrado, no puede ocurrir $x \to \pm\infty$, así que son imposibles asíntotas horizontales u oblicuas. Además, en caso de asíntota vertical, la función no sería continua.



Las funciones continuas sobre intervalos cerrados son relevantes y pronto las volveremos a ver.

12.3. Ejercicios

Enunciados

P 12.1 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 8x-2 & si\ x \le 1 \\ 3x^2+2x+1 & si\ x > 1 \end{cases}$. *(i) Escriba la expresión de cada límite lateral* $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)$. *(ii) Analice los límites anteriores. (iii) Escriba la expresión de cada límite lateral* $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *(iv) Analice los límites anteriores. (v) ¿Es* f *continua? (vi) ¿Es* f *derivable?*

P 12.2 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 5x-4-2 & si\ x \le 1 \\ 4x^3-2x & si\ x > 1 \end{cases}$. *Analice si (i)* f *es continua en* $x=1$, *(ii)* f *es derivable en* $x=1$. *(iii) ¿Es necesario analizar el límite del cuociente para la derivabilidad en este caso?*

P 12.3 *Sea* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. *(i) Defina* $f(1)=k$ *de forma que* f *sea continua. (ii)¿Es derivable en* $x=1$ *con ese valor de* k*? (iii) ¿Es necesario analizar el límite del cuociente para la derivabilidad en este caso?*

P 12.4 *Sea* $f(x) = ||x|-1|$. *(i) Haga el gráfico de* f *(use graficador). (ii) ¿Es* f *continua? (iii) Escriba una expresión ramificada para la derivada. (iv) Encuentre eventuales asíntotas.*

P 12.5 *Sean* $f(x) = ||x|-1|$ *y* $g(x) = f(\,f(x)\,)$. *(i) Haga el gráfico de* g *(use graficador). (ii) ¿Es* g *continua? (iii) Escriba una expresión ramificada para* $\frac{dg}{dx}$. *(iv) Encuentre eventuales asíntotas.*

P 12.6 *Sean* $f(x) = |x|x$ *y* $g(x) = x^2$. *(i) Grafique en un mismo plano cartesiano* f, g *(use graficador). (ii) ¿Son continuas? (iii) ¿Son diferenciables en* $x=0$*?. (iv) Encuentre eventuales asíntotas.*

P 12.7 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 1-x & si\ x < 1 \\ (1-x)(2-x) & si\ 1 \le x \le 2 \\ 3-x & si\ 2 < x \end{cases}$. *¿Dónde fallan continuidad o diferenciabilidad?*

P 12.8 *Demuestre el teorema* f *diferenciable* $\Longrightarrow$ f *continua.*

P 12.9 *Considerando el gráfico de* f *a mano alzada en (I), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) falsa(s)?* (A) $f(-1) = f(0) = 2$. (B) f *es derivable en* $x=1$. (C) f *no es continua en* $x=2$. (D) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \nexists$. (E) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$. (F) $y=1$ *es asíntota vertical.* (G) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

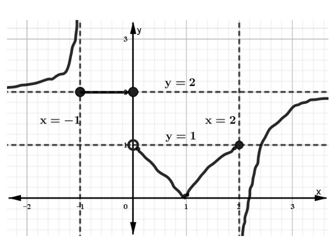
P 12.10 *Determine las asíntotas de* $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}$ *(Ver gráfico (II)).*

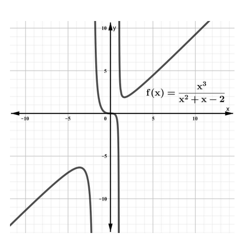
P 12.11 *Determine las asíntotas de* $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$ *(Ver gráfico (III)).*

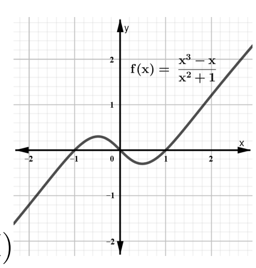
P 12.12 *Sea* $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x^3}$ *(Ver gráfico (IV)). (i) Determine si* f *es derivable en* $x=0$ *y* $x=1$. *(ii) Encuentre las asíntotas.*

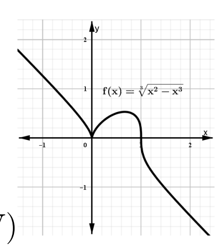
P 12.13 *Demuestre que si* f *es continua en todo* $x \in \mathbb{R}$, *entonces no tiene asíntotas verticales.*

P 12.14 *Invente una función* f *continua en todo* $x \in \mathbb{R}$ *que tenga asíntotas horizontales.*

(I) 

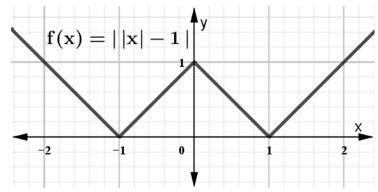
(II) 

(III) 

(IV) 

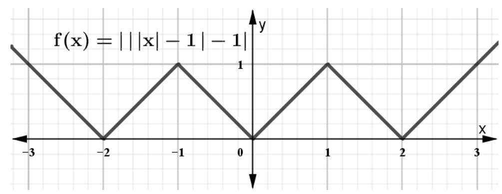
Respuestas

P. 12.1 (i) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 8x - 2$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x^2 + 2x + 1$. (ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 8 - 2 = 6$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 + 2 + 1 = 6$. (iii) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{8x-2-6}{x-1}$; $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+2x+1-6}{x-1}$. (iv) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 8$; $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 8$. (v) Si. (vi) Si. **P. 12.2** (i) No es continua en $x = 1$, (ii) no es derivable en $x = 1$. (iii) No es necesario ya que no es continua, así que no puede ser derivable en $x = 1$. **P. 12.3** (i) $k = 2$. (ii) Si. (iii) Si, porque continuidad no asegura derivabilidad.
P. 12.4 (ii) Si.



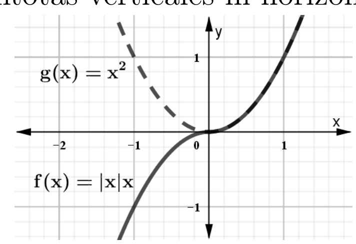
$$\text{(iii)}\quad \frac{df}{dx}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < -1 \ \vee\ 0 < a < 1 \\ 1 & \text{si } -1 < a < 0,\ \vee\ 1 < a \\ \nexists & \text{si } a \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

(iv) Asíntotas oblicuas: $y = -x$ en $-\infty$ e $y = x$ en $+\infty$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales.
P. 12.5 (ii) Si.



$$\text{(iii)}\quad \frac{dg}{dx}(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < -2 \ \vee\ -1 < a < 0 \ \vee\ 1 < a < 2 \\ 1 & \text{si } -2 < a < -1,\ \vee\ 0 < a < 1 \ \vee\ 2 < a \\ \nexists & \text{si } a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}. \end{cases}$$

(iv) Asíntotas oblicuas: $y = -x$ en $-\infty$ e $y = x$ en $+\infty$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales.



P. 12.6 (ii) Si. (iii) Si. (iv) No tienen asíntotas.

P. 12.7 Solo $x = 2$, donde fallan ambas propiedades.
P. 12.8 f diferenciable en $x = a \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k = \frac{df}{dx}(a)$. Esto implica que $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = k \cdot 0 = 0 \implies \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) + f(a) = 0 + f(a) = f(a) \implies f$ continua en a. **P. 12.9** Sólo B y F. **P. 12.10** Verticales: $x = -2$, $x = 1$. Oblicua: $y = x - 1$. **P. 12.11** Oblicua: $y = x$. **P. 12.12** (i) No es derivable en ninguo de los dos valores. (ii) Oblicua: $y = -x + \frac{1}{3}$. **P. 12.13** Si $x = a$ fuera asíntota vertical, entonces f no sería continua en $x = a$.