UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Recordemos que si $G(t)$ es un vector cuyas n componentes son funciones derivables, esto es, $G(t) = (g_1(t), \cdots, g_n(t))$ entonces su derivada es la derivada de cada componente
$G'(t) = (g_1'(t), \cdots, g_n'(t))$.

Ejemplo

Si $G(t) = (\mathrm{e}^{3t}, \mathrm{sen}(t^2))$ entonces $G'(t) = (3\mathrm{e}^{3t}, 2t\,\cos(t^2))$. $\square$

Estudiaremos Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, SEDO, del tipo

$$X'(t) = A\,X(t) + F(t) \tag{1}$$

donde $X(t)$ es un vector con funciones incógnitas, por ejemplo, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$.
A es una matriz de coeficientes de orden n por n, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, cuyas entradas, en general, son funciones.
$F(t)$ es un vector de n componentes, cuyas componentes son funciones; en general, este termino es un dato conocido del problema.

Ejemplo: Consideremos el SEDO

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) + (5/3)\mathrm{e}^{4t} \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{-t}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Aquí, $X(t) = (x(t), y(t))$,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $F(t) = \begin{pmatrix} (5/3)\mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$.

Definición: Si en el SEDO (1) el vector F es cero, esto es, $F(t) = (0, \cdots, 0)$ entonces el sistema se denomina HOMOGENEO; en caso contrario, el sistema se dice no-homogéneo.

Definición: Una solución para el Sistema SEDO (1) es un vector $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, de modo que el sistema (1) se satisface.

Ejemplo:

(I) El vector $X_1(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$ es una solución del SEDO no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) \tag{3}$$

Observe que el sistema (3) es una representación matricial del sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{array} \right. \tag{4}$$

(II) El vector

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}$$

es una solución del Sistema no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Observe que el sistema (5) es una representación matricial del sistema no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + \mathrm{e}^t \\ y'(t) = x(t) + \mathrm{e}^{-t}. \end{cases} \tag{6}$$

Nuestro objetivo es determinar la o las soluciones de los SEDO. Dividiremos nuestro objetivo en sistemas homogéneos y en sistemas no homogéneos. $\square$

Pasando de EDO de orden superior a un SEDO:
Antes de los métodos para determinar la o las soluciones de los SEDO, veamos como convertior una EDO lineal de orden superior en un SEDO.

Consideremos la EDO lineal de orden n, en general a coeficientes variables:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t) y(t) = f(t).$$

Haciendo los cambios de variables que se indican, transformaremos la EDO dada en un SEDO de primer orden con n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) = x_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad \text{de donde obtenemos} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = y^{(n)}(t) \end{cases}$$

Ejemplo:
Consideremos la EDO lineal de orden 3 y a coeficientes variables:

$$y'''(t) - (t-1)\, y''(t) - t^2\, y'(t) + y(t) = \mathrm{sen}(2t).$$

Haciendo los cambios de variable indicados en el proceso anterior, se obtiene $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = y'''(t), \end{cases}$

de donde $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = \mathrm{sen}(2t) + (t-1)x_3(t) + t^2 x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$ $\square$

En el lenguaje matricial, el SEDO anterior se escribe como

$$X'(t) = A\, X(t) + F(t)$$

donde $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & t^2 & (t-1) \end{pmatrix}$ y $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen}(2t) \end{pmatrix}$.

Antes de presentar el método para determinar soluciones de los SEDO, veamos el

Teorema: (de existencia y Unicidad de soluciones)

Sean $B = B(t)$ un vector columna $n \times 1$ formado por n funciones continuas, $b_j = b_j(t)$, definidas en el intervalo real $J :=]a, b[$, $A = A(t)$ una matriz cuadrada $n \times n$ cuyas entradas $a_{ij} = a_{ij}(t)$ son funciones continuas en J, $t_0 \in J$.
Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales , SEDO,

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

tiene única solución.
(X_0 un vector conocido de n componentes reales.)

Definición:
El SEDO $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ junto a la condición, $X(t_0) = X_0$ se conoce como **problema con valor inicial**, denotado abreviadamente PVI.

Ejemplo:

El PVI

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t), & \text{con } x(0) = 1, \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t), & \text{con } y(0) = -1, \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) & \text{con } z(0) = 1. \end{cases}$$

tiene por única solución a

$$X(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \square$$

Observación-Definición:

Note que toda solución del SEDO $X'(t) = A(t)X(t)$, es un vector cuyas componentes son funciones derivables, por tanto continuas. Así, podemos definir el conjunto formado por todas las soluciones del sistema homogéneo

$$V = \{X \in C(I, \mathbb{R}^n) : X'(t) = A(t)X(t)\}. \tag{7}$$

El conjunto V en (7) se denomina el espacio solución del SISTEMA HOMOGENEO $X'(t) = A(t)X(t)$.

En el Ejemplo anterior, los vectores

$X_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertenecen al espacio V.

Definición:

Sea $B = \{X_1(t), X_2(t), \cdots X_n(t)\}$ donde para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $X_j(t) = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})$, un conjunto de n soluciones de $X'(t) = A(t)X(t)$, con A matriz de $n \times n$, entonces se denomina **Wronskiano** de las funciones $X_1(t), X_2(t), \cdots X_n(t)$ asociado al SEDO, denotado por $W(X_1(t), \cdots, X_n(t))$ a:

$$W(X_1(t), \cdots, X_n(t)) := \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ & \cdots & \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

En el ejemplo anterior

$$W(X_1(0), X_2(0), X_3(0)) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Teorema

Para $A = A(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, consideremos el SEDO

$$X'(t) = A(t)X(t). \tag{8}$$

Entonces:

1. Si A es una matriz cuyas componentes $a_{ij} = a_{ij}(t)$ son todas continuas, entonces el conjunto V definido en (7) es un espacio vectorial de dimensión igual al orden de la matriz A.
2. Sea $B = \{X_1(t), X_2(t), \cdots X_n(t)\}$ un conjunto de n soluciones de (8). Entonces B es base para V si, y sólo si $W(X_1(t_0), \cdots, X_n(t_0)) \neq 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Dem: La demostración de la parte (1) se basa en el Teorema de existencia y Unicidad, la parte (2) es analoga a lo hecho en las EDO de orden superior. $\square$

Ahora vamos a la determinaci"on de soluciones de los SEDO.

Observación Importante:

Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos soluciones del sistema no homogeneo (1), $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$, entonces

$$\begin{cases} X_1'(t) &= A\,X_1(t) + F(t) \\ X_2'(t) &= A\,X_2(t) + F(t) \end{cases}$$

de donde $X_1'(t) - X_2'(t) = A\,(X_1(t) - X_2(t))$. Por tanto, poniendo $Y(t) = X_1(t) - X_2(t)$, resulta que

$$Y'(t) = A\,Y(t)$$

de lo anterior se deduce la

Proposición (*)

Sea $Z = Z(t)$ una solución del sistema (1). Entonces $Z(t) = Y_h(t) + X_p(t)$, donde $Y_h(t)$ es una solución del sistema homogéneo asociado a (1) y $X_p(t)$ es una solución del sistema no homogéneo (1) (esta última se conoce como solución particular del sistema (1)).

Ejemplo (**Este ejemplo es muy importante pues muestra el camino que seguiremos para determinar la solución general de un SEDO**)

Consideremos el Sistema no homogéneo (2)

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) + (5/3)\mathrm{e}^{4t} \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

Primero observemos que el Sistema homogéneo asociado al sistema dado es:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t). \end{cases} \tag{9}$$

Se puede ver que los vectores

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } X_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son dos soluciones del sistema (9). Puesto que sabemos que el espacio solución de (9) tiene dimensión dos y

$$w(X_1(0), X_2(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

sigue que toda solución $X_h(t)$ del sistema (9), se escribe como

$$X_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Además vimos a inicios de capitulo que el vector

$$X_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}$$

es una solución particular del sistema no homogéneo considerado.
Así, toda solución $Z(t)$ del sistema no homogenéo es del tipo

$$Z(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

esto es,

$$Z(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}.$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Observación:
De acuerdo al ejemplo anterior para determinar las soluciones del sistema $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$, primero debemos resolver el sistema homogeñeo asociado, para luego buscar soluciones particulares, eso lo haremos al final.

Caso Homogéneo:

$$X'(t) = A\,X(t) \tag{10}$$

Recordemos que dada la matriz A de orden $n \times n$ con entradas reales a_{ij}, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es una **valor propio para** A , si existe vector $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq \theta$ de modo que $A(u) = \lambda\,u$ (en tal caso se dice que u es un vector propio asociado a λ). Lo anterior es equivalente a decir que λ es una raíz del polinomio caracteístico $p(\lambda) := Det[A - \lambda A]$.

Se puede probar el siguiente

Teorema

Sean A una matriz real de orden $n \times n$, λ un valor propio para A con vector propio asociado u. Entonces el vector $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, u$ es una solución para el SEDO $X'(t) = A\, X(t)$.

Además, si (β, v) son tales que $A(v) = \beta v$, con $\lambda \neq \beta$, entonces el conjunto de soluciones $\{\mathrm{e}^{\lambda t}\, u, \mathrm{e}^{\beta t}\, v\}$ es linealmente independiente.

Dem:

$$\frac{d}{dt}[X(t)] = \frac{d}{dt}[\mathrm{e}^{\lambda t}]u = AX(t).$$

El hecho que $\{\mathrm{e}^{\lambda t}\, u, \mathrm{e}^{\beta t}\, v\}$ sea linealmente independiente sigue del curso de Algebra Lineal.

Ejemplo:

Determine todas las soluciones del SEDO homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

(i) Si el vector $X_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}(1, 1, -1)$ es solución del sistema de EDO lineal homogéneo asociado al sistema dado, escriba la solución general del **sistema lineal homogéneo** correspondiente.

(ii) Determine una solución particular para el sistema dado.

(iii) Determine la solución general del sistema dado.

SOLUCION

Aquí la matriz de los coeficientes del sistema homogéneo, es $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Por tanto, las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -1$$

Para determinar los correspondientes vectores propios, buscamos los espacios propios correspondientes, esto es , $\mathrm{Ker}(A - \lambda\, I)$ pues como veremos mas adelante la información de la dimensión de ese subespacio es vital.

En general, para un valor propio λ, el espacio propio, S_λ es:

$$S_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I) = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)(x) = \theta\}. \tag{11}$$

En este caso resulta que

$$S_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - (-2)I)(x) = \theta\} =< \{(1,1,-1)\} >$$

$$S_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - (-3)I)(x) = \theta\} =< \{(1,0,-1)\} >$$

$$S_{\lambda_3} = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - (-1)I)(x) = \theta\} =< \{(0,1,-1)\} >$$

En consecuencia formamos las soluciones

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \text{ y } \ X_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Además

$$W(X_1(0), X_2(0), X_3(0)) \neq 0$$

de donde el conjunto $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ es linealmente independiente. Por el Teorema de la dimensión sigue que

$$B = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$$

es base del espacio solución del sistema homogéneo considerado. Por tanto toda solución $X_h(t)$ del sistema viene dada como

$$X_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observación

Antes de presentar otros ejemplos es útil introducir algunos elementos que serán cruciales para los casos complicados.

Definición

Dada la matriz A, si $A(u) = \lambda u$, la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico, se denomina **multiplicidad algebraíca de** λ. De otra parte, la dimensión del espacio propio asociado a λ, esto es, $\dim(A - \lambda I)$ se denomina **multiplicidad geométrica de** λ.

Ejemplo.

En el Ejemplo anterior, la multiplicidad algebraíca de cada autovalor es uno. Lo mismo ocurre para la multiplicidad geométrica.

Ejercicio.

Determine la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Note que el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} -x'(t) = & 3x + 4z \\ y'(t) = & 4x + y + 4z \\ z'(t) = & 3z + 2x \end{cases}$$

Solución.

Sabemos que $\vec{x}=\vec{v}e^{\lambda t}$ es una solución de (12) sí y sólo si λ es valor propio de A con vector propio asociado $\vec{v}$. Es decir, si λ es raíz de

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$$

Así, los valores propios obtenidos son

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \ \text{ y } \lambda_3=-1.$$

En este caso los espacios propios resultan ser:

$$S_{\lambda_1}=\{(a,b,c)^t\,:\,a+c=0,\,b\in\mathbb{R}\}=\langle\{(1,0,-1)^t,(0,1,0)^t\}\rangle$$

$$S_{\lambda_2}=\{(a,b,c)^t\,:\,a+2c=0,\,a+b=0,\,a\in\mathbb{R}\}=\langle\{(-2,2,-1)^t\}\rangle.$$

Así, obtenemos las soluciones

$$X_1(t)=e^t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\qquad X_2(t)=e^t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad X_3(t)=e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix},$$

que forman un conjunto fundamental de soluciónes para (12) (puesto que $W(X_1(0),X_2(0),X_3(0))\neq 0$). Finalmente, toda solución del sistema, es de la forma

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}e^t+c_3\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}e^{-t},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Ejemplo (en que la m.a es mayor a la m.g.)

Consideremos el siguiente SEDO

$$\begin{cases} x'(t) \;=\; x(t)+y(t)+z(t), & x(0)=-1; \\ y'(t) \;=\; 2\,x(t)+y(t)-z(t), & y(0)=0; \\ z'(t) \;=\; -y(t)+z(t), & z(0)=1. \end{cases}$$

SOLUCION

Solución: El sistema homogéneo dado puede ser escrito en la forma

$$X'(t)=A\,X(t)$$

donde

$$X=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Los valores propios son las raíces de $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Haciendo el cálculo en este caso, sigue:

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - 2((1-\lambda) + 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + 2(\lambda - 2) \\
&= \lambda(1-\lambda)(\lambda - 2) + 2(\lambda - 2) \\
&= (\lambda - 2)\left(\lambda(1-\lambda) + 2\right) \\
&= -\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)(\lambda - 2) \\
&= -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0
\end{aligned}
$$

Así, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ son valores propios de la matriz A, siendo m.a.$(\lambda_1) = 1$ y m.a.$(\lambda_2) = 2$. De otra parte, se puede ver que

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(-3, 4, 2)\}\rangle \ \text{ y}$$

$$S_{\lambda_2} = \langle\{(0, -1, 1)\}\rangle$$

de donde la m.g.$(\lambda_1) =$ m.g.$(\lambda_2) = 1$.

En este caso, solamente podemos formar las soluciones

$$X_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad X_2(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que nos encontramos frente a un problema con degeneramiento de orden 1.

Definición (orden de degeneración de un autovalor)

El **orden de degeneración, o.d. de un valor propio λ, o.d.(λ)**, se define como el número no negativo

$$\text{o.d.}(\lambda) := \text{m.a.}(\lambda) - \text{m.g.}(\lambda).$$

En el ejemplo que estamos tratando tenemos:

$$\text{o.d.}(\lambda_1) = 0, \ \text{ y } \quad \text{o.d.}(\lambda_2) = 1.$$

Observación:

Cuando el o.d. de un valor propio es mayor que uno para determinar las soluciones “faltantes” procedemos como sigue:

1. Si el o.d.(λ) es uno, entonces se busca la solución que falta como

   $$\boldsymbol{X}(t) \,=\, \mathrm{e}^{\lambda t}\,[\boldsymbol{I} \,+\, t\,(\boldsymbol{A} \,-\, \lambda\boldsymbol{I})]\,\boldsymbol{w}\,,$$

   donde $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} \,-\, \lambda\boldsymbol{I})^2$.

2. Si el o.d.(λ) es dos, entonces las dos soluciones que faltan se buscan como sigue

   $$\boldsymbol{X}_i(t) \,=\, \mathrm{e}^{\lambda t}\,[\boldsymbol{I} \,+\, t\,(\boldsymbol{A} \,-\, \lambda\boldsymbol{I})]\,\boldsymbol{w}\,,$$

donde $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^2$ y

$$\boldsymbol{X}_{i+1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \left[\boldsymbol{I} + t\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) + \frac{1}{2}\, t^2 (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^2 \right] \boldsymbol{w}\,,$$

donde $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^3$.

3. Si el o.d.(λ) es tres, se prosigue el algorítmo anterior donde el $\boldsymbol{w}$ requerido debe pertenecer al Ker ... correspondiente.
4. Note que cuando el valor propio λ considerado tiene o.d. $= 0$, la solución correspondiente se busca con el mismmo algorítmo, esto es,

$$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \boldsymbol{w}$$

con $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$

Ejemplo: En el ejemplo en desarrollo el autovalor que interviene es $\lambda_2 = 2$ cuyo o.d.(λ_2) es uno. Entonces la solución que nos falta (para completar la base correspondiente) viene dada por

$$X_3(t) = e^{2t}\,[I + t\,(A - \lambda_2 I)]\,u \tag{13}$$

donde $u \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$.

teniendo presente que $(A - 2\,I) == \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

El cálculo nos proporciona:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\left((A-2I)^2\right) &= \left\{ v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (A-2I)\,v = \theta \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ a - b - c = 0 \right\} \\
&= \operatorname{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Así, de acuerdo con (13) y considerando el vector $(1,1,0)^t \in \operatorname{Ker}\left((A-2I)^2\right)$ (note que $\{(-3,4,2),(0,-1,1),(1,1,0)\}$ es l.i.) se obtiene

$$X_3(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Finalmente, toda solución $X(t)$ al sistema

$$\left\{ \begin{aligned}
x'(t) &= x(t) + y(t) + z(t), && x(0) = -1; \\
y'(t) &= 2\,x(t) + y(t) - z(t), && y(0) = 0; \\
z'(t) &= \phantom{2\,x(t) + {}} -y(t) + z(t), && z(0) = 1.
\end{aligned} \right.$$

viene dada por

$$
\begin{aligned}
X(t) &= c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1+t\\-t\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3\,e^{-t} & 0 & e^{2t}\\ 4\,e^{-t} & -e^{2t} & (1+t)\,e^{2t}\\ 2\,e^{-t} & e^{2t} & -t\,e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Observación: la matriz cuyas columnas forman base del espacio solución de un SEDO se denomina **MATRIZ FUNDAMENTAL** asociada al SEDO. En nuestro ejemplo anterior, la matriz fundamental asiciada al SEDO es

$$
\begin{pmatrix}-3\,e^{-t} & 0 & e^{2t}\\ 4\,e^{-t} & -e^{2t} & (1+t)\,e^{2t}\\ 2\,e^{-t} & e^{2t} & -t\,e^{2t}\end{pmatrix}.
$$

Utilizando la condición inicial se tiene

$$
\begin{aligned}
X(0) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la solución final al problema planteado corresponde a

$$
X(t) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\,e^{-t} - \,e^{2t}\\ 8\,e^{-t} - e^{2t}\,(3\,t+8)\\ 4\,e^{-t} + e^{2t}\,(3\,t+5)\end{pmatrix}.
$$

Caso No Homogéneo

Veamos ahora como se determina la solución del sistema (1)

$$X'(t) = A\,X(t) + F(t)$$

Recordemos que de acuerdo a la Proposición (*) Toda solución $Z(t)$ de (1), se escribe como

$$Z(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

donde X_h es solución del SEDO homogéneo asociado y
X_p es una solución particular de (1).

Usamos el método de Variación de Parámetros. Este consiste en buscar una solución particular, X_p para (1) como

$$X_p(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,X_j(t) \tag{14}$$

donde para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $c_j(t)$ son incógnitas y $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ forman base del espacio solución del SEDO homogéneo.

Al incorporar la forma de X_p en (14) en el sistema (1) se puede ver que las funciones $c_j(t)$ buscadas deben satisfacer el sistema:

$$\sum c_j'(t)\, X_j(t) = f_j(t) \tag{15}$$

donde $F_j(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^t$.

Ejemplo.

Determine la solución general del SEDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) & \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) & +\mathrm{e}^{-t} \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) & -(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{cases}$$

SOLUCION

como sabemos la solución general del problema es $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$, donde $X_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo asociado y $X_p(t)$ es una solución particular del problema.

Aquí la matriz de coeficientes del sistema homogéneo, es $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -1$$

Los espacios propios, S_{λ_i}, resultan ser:

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1} &= \langle\{(1, 1, -1)\}\rangle \\ S_{\lambda_2} &= \langle\{(1, 0, -1)\}\rangle \\ S_{\lambda_3} &= \langle\{(0, 1, -1)\}\rangle. \end{aligned}$$

Asi, obtenemos que toda solución, $X_h(t)$, del problema homogéneo asociado es

$$X_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.

Usando variación de paramétros buscamos una solución particular $X_p(t)$ del tipo

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t) + c_3(t)X_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} c_1(t) &= \mathrm{e}^{-t} \\ c_2(t) &= t \\ c_3(t) &= t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$X_p(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$X_p(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} X(t) = \quad & A\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \quad C\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + \quad & \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \quad (t\mathrm{e}^{-t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.
Ejercicio.

(a) Sabiendo que la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales que sigue tiene al valor 1 como autovalor, determine la solución general del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - y(t) - z(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t), \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t). \end{cases} \tag{16}$$

(b) Escriba la EDO lineal de orden 3 que sigue, como un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (no se pide resolver).
$x'''(t) - t\,x''(t) + 2\,x'(t) - t\,x(t) = t\mathrm{e}^{3t}$.

Ejercicio.

1. Exprese el siguiente sistema lineal de ecuaciones de orden superior como un sistema EDO de primer orden, en su forma matricial.

$$\begin{cases} x''(t) - \mathrm{e}^t\,y(t) + 2\,\mathrm{sen}(2t)\,y'(t) = t^3 - 1\,, \\ \\ y'''(t) + (t-1)\,x'(t) - \cos(3t)\,x(t) = \ln(t^2+1)\,. \end{cases}$$

2. Aplicando el método de valores y vectores propios, resolver el PVI:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 24 & 9 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) \quad , \quad \boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

JMS//jms
Agosto de 2020.