Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ I: límites y continuidad
Módulo 2, Presentación 4

Raimund Bürger

24 de marzo de 2025

2.1. Funciones reales de n variables

Empezaremos ahora el estudio de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Todas las definciones y todos los teoremas del capítulo anterior que se refieren a espacios métricos quedan válidos.

Para una función

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

todavia podemos visualizar la función considerando

$$S_f := \big\{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\big\}.$$

Bajo hipótesis apropiadas, S_f es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.1

1.) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$D(f) = \big\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\big\}, \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Evidentemente, S_f es el hemisfério superior del radio 1.

2.1. Funciones reales de n variables

Ejemplo 2.1 (continuación)

2.) Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$D(f) = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy$$

S_f es un paraboloide hiperbólico.

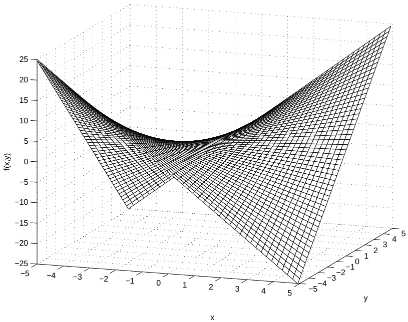

Figura: La función $f(x, y) = xy$.

2.2. Límites direccionales y la continuidad direccional

Definición 2.1 Una dirección en $\mathbb{R}^n$ es un vector $\vec{a} \in \mathbb{V}^n$ con

$$\|\vec{a}\| = 1.$$

Para estudiar funciones en una dirección $\vec{a}$ dada, consideremos f en una vecindad de un punto interior x^0 de $D(f)$ sobre la recta

$$G_{\vec{a}}(x^0) := \{x \mid x = x^0 + h\vec{a},\ h \in \mathbb{R}\},$$

es decir estudiamos la función

$$\varphi(h) = f(x^0 + h\vec{a}) \quad (x^0 + h\vec{a} \in D(f))$$

del parámetro real de la recta h.

Definición 2.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que en un punto interior $x^0 \in D(f)$, la función f posee el límite g en la dirección $\vec{a}$ si

$$\lim_{h \to 0} f(x^0 + h\vec{a}) = g.$$

Escribimos

$$\vec{a}\text{-}\lim_{x \to x^0} f(x) = g.$$

2.2. Límites direccionales y la continuidad direccional

Evidentemente, si una función posee el límite g, entonces todos sus límites direccionales existen e igualan g. Se podría pensar que por otro lado, si todos estos límites direccionales existen e igualan g, entonces f posee el límite g en x^0. Esto no es así.

Ejemplo 2.2 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \text{ o } y \neq x^2, \\ 1 & \text{si } y = x^2,\ x \neq 0. \end{cases}$$

Evidentemente, $f(0, 0) = 0$ y para cada dirección $\vec{a}$,

$$\vec{a}\text{-}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Pero

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = 1,$$

por lo tanto f no posee un límite en $(0, 0)$, y en particular es discontinua en $(0, 0)$.

2.2. Límites direccionales y la continuidad direccional

Definición 2.3 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama continua en un punto interior x^0 de $D(f)$ en la dirección $\vec{a}$ si

$$\vec{a}\text{-}\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$$

El Ejemplo 2.2 presenta una función que es discontinua en $(0, 0)$, pero que es continua en $(0, 0)$ en cada dirección, por lo tanto una función que es continua en un punto en cada dirección no necesariamente es continua en este punto.

2.2. Límites direccionales y la continuidad direccional

Ejemplo 2.3 Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función no es continua en el punto $(0,0)$ dado que

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Pero f es continua en las direcciones $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, dado que

$$\lim_{h\to 0} f(0+h, 0) = 0; \quad \lim_{h\to 0} f(0, 0+h) = 0.$$

2.2. Límites direccionales y la continuidad direccional

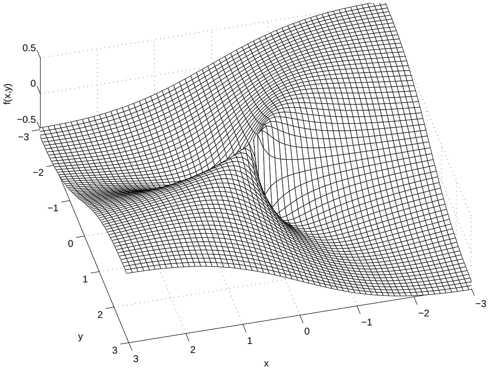

Figura: La función $f(x, y)$ definida en el Ejemplo 2.3.

2.3. Derivadas direccionales

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Analizaremos primero el comportamiento de f en la vecindad de un punto interior x^0 de $D(f)$ en una dirección.

Como así f es una función de una variable, podemos describir el crecimiento o el decrecimiento de f en esta dirección en términos del cálculo diferencial de una variable.

Definición 2.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La función f se llama diferenciable en un punto interior $x^0 \in D(f)$ en la dirección $\vec{a}$ si el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h}$$

existe; si existe, el límite se llama derivada direccional de f en la dirección $\vec{a}$, y lo denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0).$$

2.3. Derivadas direccionales

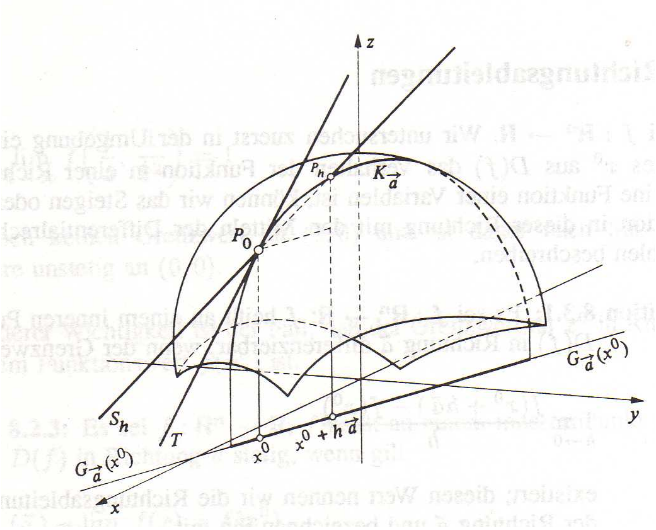

Figura: Ilustración de la derivada direccional ($n = 2$).

2.3. Derivadas direccionales

Sea $x^0 = (x_0, y_0)$ y $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, entonces

$$x^0 + h\vec{a} = (x_0 + ha_1, y_0 + ha_2).$$

Si consideramos f solamente sobre $G_{\vec{a}}(x^0) \cap D(f)$, el grafo es una "curva" $K_{\vec{a}}$ en esta superficie.

Trataremos de encontrar la tangente T a la curva $K_{\vec{a}}$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La secante S_h por los puntos P_0 y

$$P_h = \big(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2)\big).$$

está únicamente determinada por su pendiente

$$\frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h}.$$

Ahora, si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0),$$

entonces la recta por P_0 con la pendiente $\partial f / \partial \vec{a}(x^0)$ —como recta límite de las secantes —es la tangente T a la curva $K_{\vec{a}}$ deseada.

2.3. Derivadas direccionales

Ejemplo 2.4 Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + x \cos y$.

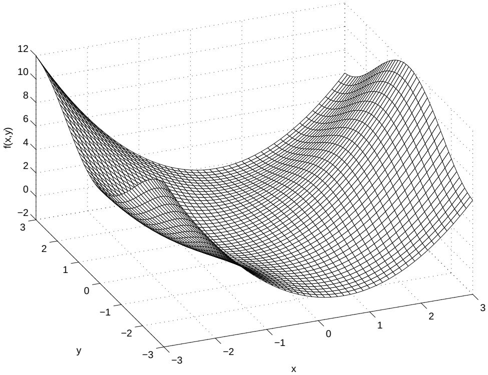

Figura: La función $f(x, y) = x^2 + x \cos y$.

2.3. Derivadas direccionales

Queremos calcular la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección $\vec{a} = (1/\sqrt{2})\{1, 1\}$.

Aquí obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - x_0^2 - x_0 \cos y_0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2}hx_0 + \frac{1}{2}h^2}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - \cos y_0}{\frac{h}{\sqrt{2}}}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}x_0 - \frac{x_0 \sin y_0}{\sqrt{2}} + \frac{\cos y_0}{\sqrt{2}}.$$

2.3. Derivadas direccionales

Teorema 2.1 Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x^0 en la dirección $\vec{a}$, entonces f también es diferenciable en x^0 en la dirección $-\vec{a}$, y

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0).$$

Demostración

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x^0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + h(-\vec{a})) - f(x^0)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + (-h)\vec{a}) - f(x^0)}{-h} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.2 Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en la dirección $\vec{a}$, entonces f es continua en x^0 en la dirección $\vec{a}$.

Demostración

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h} \cdot h\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.4. Derivadas parciales

Definición 2.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La función f se llama parcialmente diferenciable con respecto a x_k en un punto interior x^0 de $D(f)$ si existe la derivada direccional $(\partial f / \partial \vec{e}_k)(x^0)$. Tambien escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f_{x_k}(x^0).$$

Esta expresión se llama derivada parcial (de primer orden) de f con respecto a la variable x_k en el punto x^0.

Según la Definición 2.5,

$$\begin{aligned} f_{x_k}(x^0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h\vec{e}_k) - f(x^0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n}{h} \end{aligned}$$

es decir, podemos obtener esta derivada parcial fijando $x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_{k+1}^0, .$ y formando la derivada ordinaria con respecto a x_k en x_k^0.

2.4. Derivadas parciales

Ejemplo 2.5

1. Sea $f(x,y) = x^2 + x\cos y$. Para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + \cos y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -x_0 \sin y_0.$$

2. Consideremos nuevamente la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aquí obtenemos para $(\xi, \eta) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\xi^2\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2\xi\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

2.4. Derivadas parciales

Ejemplo 2.5 (continuación)

2. (continuación) Para $(\xi, \eta) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = [\dots] = 0,$$

es decir, las derivadas parciales existen en cada punto.

Por otro lado, la función no es continua en $(0,0)$. Las derivadas parciales no son acotadas en una vecindad de $(0,0)$, puesto que para $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, 0) = \frac{1}{\xi}.$$

Entonces, la existencia de las derivadas parciales aún no implica la continuidad de la función.

2.4. Derivadas parciales

Teorema 2.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x^0 \in D(f)$. Si las derivadas parciales $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ existen en una vecindad $U_r(x^0)$ de x^0 con $U_r(x^0) \subset D(f)$ y son acotadas en esta vecindad, entonces f es continua en x^0.

Demostración

1.) Sea $\vec{v} = \{v_1, \dots, v_n\} = v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n$ un vector con $\|\vec{v}\| < r$. Si definimos

$$\vec{v}^0 := \vec{0}; \quad \vec{v}^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} v_i\vec{e}_i, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

entonces siempre se tiene que $\|\vec{v}^\nu\| \leqslant \|\vec{v}\| < r$, y sabemos que

$$x^0 + \vec{v}^\nu \in U_r(x^0), \quad \nu = 0, 1, \dots, n.$$

2.4. Derivadas parciales

Demostración del Teorema 2.3 (continuación)

2. Ahora consideramos que

$$\begin{aligned} f(x^0+\vec{v})-f(x^0) &= \big(f(x^0+\vec{v}^n)-f(x^0+\vec{v}^{n-1})\big) \\ &\quad + \big(f(x^0+\vec{v}^{n-1})-f(x^0+\vec{v}^{n-2})\big) \\ &\quad + \cdots + \big(f(x^0+\vec{v}^1)-f(x^0+\vec{v}^0)\big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\big(f(x^0+\vec{v}^\nu)-f(x^0+\vec{v}^{\nu-1})\big). \end{aligned}$$

Según el Teorema del Valor Intermedio existen puntos $\xi^\nu \in U_r(x^0)$ localizados en el segmento lineal que une $x^0+\vec{v}^{\nu-1}$ con $x^0+\vec{v}^\nu$ tales que

$$f(x^0+\vec{v}^\nu)-f(x^0+\vec{v}^{\nu-1}) = v_\nu \cdot f_{x_\nu}(\xi^\nu),$$

luego

$$f(x^0+\vec{v})-f(x^0) = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \cdot f_{x_\nu}(\xi^\nu).$$

2.4. Derivadas parciales

Demostración del Teorema 2.3 (continuación)

3. Dado que todas las derivadas parciales son acotadas, existen constantes $M_\nu > 0$ con $|f_{x_\nu}(x)| \leqslant M_\nu$ para todo $x \in U_r(x^0)$ y $\nu = 1, \ldots, n$. Ahora, si $\varepsilon > 0$ elegimos un δ_ε tal que $0 < \delta_\varepsilon < r$ y
$$\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M_1 + \cdots + M_n}.$$
4. Así, todos los vectores $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| < \delta_\varepsilon$ satisfacen lo siguiente:
$$\left| f(x^0 + \vec{v}) - f(x^0) \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |v_\nu| M_\nu < \delta_\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu < \varepsilon.$$
Esto implica que f es continua en x^0. ■

2.4. Derivadas parciales

Definición 2.6 Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcialmente diferenciable con respecto a cada una de las variables x_k, $k = 1, \ldots, n$. Entonces el vector

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \left\{ f_{x_1}(x^0), f_{x_2}(x^0), \ldots, f_{x_n}(x^0) \right\}$$

se llama gradiente de f en x^0. Otra notación es

$$\nabla f(x^0) = \operatorname{grad} f(x^0).$$