Teorema 2.1

[Existencia y Unicidad] Sean $\mathbf{A}(t)$ una matriz de orden $n \times n$ con elementos (funciones) continuas en un intervalo I, y $\mathbf{F}(t)$ un vector de dimensión n continuo en el mismo intervalo I. Si $t_0 \in I$, entonces el sistema lineal

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t), \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

tiene solución única.

Teorema 2.2

[Principio de Superposición] Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución de un sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X},$$

en un intervalo I. Entonces, la combinación lineal

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2 + \cdots + C_k\mathbf{X}_k,$$

donde C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución del sistema en el intervalo I.

Tal y como hicimos para ecuaciones de alto orden, estamos interesados primeramente en estudiar **sistemas homogéneos**, *y construir para estos* **una base que nos diga cómo escribir cualquier solución al sistema**.

En este sentido, como ahora nuestras funciones son vectores de funciones $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)\}$, queremos buscar un criterio que nos de información sobre la independencia lineal entre elementos de este conjunto de funciones.

Teorema 2.3

[Criterio del Wronskiano]

Sea

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix}(t),\mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix}(t),\dots,\mathbf{X}_n(t)=\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}(t)$$

un conjunto de n vectores solución del sistema homogéneo

$$\mathbf{X}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t),$$

en un intervalo I. Entonces, el conjunto $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n\}$ de vectores solución es linealmente independiente en I si y solo si existe $t_0\in I$ tal que el **Wronskiano**

$$W[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n](t)=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\dots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\dots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\dots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\uparrow&\uparrow&\dots&\uparrow\\\mathbf{X}_1(t)&\mathbf{X}_2(t)&\dots&\mathbf{X}_n(t)\\\downarrow&\downarrow&\dots&\downarrow\end{vmatrix}$$

es distinto de cero (que equivale a ser no nulo para todo $t\in I$).

Ejemplo 2.2. *Demuestre que los vectores*

$$\mathbf{X}_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}6\\-1\\-5\end{pmatrix},\quad\mathbf{X}_2(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\quad\mathbf{X}_3(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{X}'(t)=\begin{pmatrix}0&6&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\mathbf{X}(t).\tag{5}$$

Derivando los vectores tenemos que

$$\mathbf{X}_1'(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix},\quad\mathbf{X}_2'(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}6\\-2\\-2\end{pmatrix},\quad\mathbf{X}_3(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Luego, es fácil ver que

$$\begin{pmatrix}0&6&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\mathbf{X}_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix}=\mathbf{X}_1(t),$$

por lo que $\mathbf{X}_1$ es un vector solución del sistema (5).

Del mismo modo se puede ver que $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ también son vectores soluciones.

Por Principio de Superposición tenemos además que, para C_1,C_2,C_3 constantes arbitrarias, el vector

$$\mathbf{X}(t):=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}6\\-1\\-5\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

es también solución del sistema en $\mathbb{R}$.

Más aún, si evaluamos el Wronskiano en $t = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} W[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3](0) &= \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \\ W[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3](0) &= 4(-3+8) \neq 0. \end{aligned}$$

Por el criterio del Wronskiano, el conjunto $\left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forma un conjunto linealmente independiente.*

Definición

[Conjunto fundamental de soluciones]

Sea $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ un conjunto de n vectores linealmente independientes y soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$ en un intervalo I. Entonces se dice que $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo I.

Teorema 2.4

Sea $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$ en un intervalo I. Entonces, la solución general del sistema en el intervalo está dada por

$$\mathbf{X}(t) = C_1\mathbf{X}_1(t) + C_2\mathbf{X}_2(t) + \cdots + C_n\mathbf{X}_n(t),$$

donde C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.3. *Por lo visto en el ejemplo anterior,* $\left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forma un conjunto fundamental para el sistema homogéneo*

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}(t).$$

y así, la solución general viene dada por

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con C_1, C_2 y C_3 constantes arbitrarias.