Análisis Real I (525.301)

Pauta de corrección

Evaluación 2, 2022

Ej. 1: Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\,; \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}\,; \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2}\,.$$

Sol.: (a) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n} 1$, $\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.

$\implies 0 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \implies 0 < \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2} < \dfrac{1+\varepsilon}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\varepsilon}{n^2}$ converge.

Entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ converge.

(b) $$\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} \leq \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n^2})} = \frac{2}{n^{3/2}}$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^{3/2}}$ converge.

Entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}$ converge.

(c) $$\frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 1 \implies (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2} \not\to 0$$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2+1}{n^2}$ no converge. $\square$

Ej. 2: Sea $f : X \to \mathbb{R}$, continua en un punto $x_0 \in X$ en el que $f(x_0) > 1$.
Demuestra que hay un abierto no vacío U tal que $f(x) > 1 \quad \forall x \in U$.

Sol.: Sea $\varepsilon := f(x_0) - 1 > 0$.

f continua en $x_0 \implies \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in B_\delta(x_0), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\implies -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \implies f(x) > f(x_0) - \varepsilon = 1.$

Sea $U := B_\delta(x_0)$. Entonces U es abierto y $\forall x \in U,\ f(x) > 1. \quad \square$

Ej. 3: Sean X e Y espacios métricos y $f: X \to Y$ continua y sobreyectiva.
Demuestra que si D es denso en X, entonces $f(D)$ es denso en Y.

Sugerencia: Recuerda que A es denso en $B \iff \forall x \in B, \exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x$.

Sol.: Sea $y \in Y$. Debemos encontrar una sucesión $\{y_n\} \subset f(D) : y_n \to y$.

f sobreyectiva $\implies \exists x \in X : y = f(x)$.

D denso en $X \implies \exists \{x_n\} \subset D : x_n \to x$.

f continua $\implies f(x_n) \to f(x)$.

Sean $y_n := f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{y_n\} \subset f(D)$ e $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$.

Por lo tanto, $f(D)$ es denso en Y. $\square$

Ej. 4: Sean $f,\, g: \, X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas y acotadas.
Demuestra que (fg) es uniformemente continua.

Sol.: Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in X : \, d(x,y) < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |[f(x) - f(y)]\, g(x)| + |f(y)\, [g(x) - g(y)]| \\ &\leq |f(x) - f(y)|\, |g(x)| + |f(y)|\, |g(x) - g(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como f y g son acotadas, $\exists A, B > 0 :$

$$|f(y)| \leq A \quad \forall y \in X \qquad \text{y} \qquad |g(x)| \leq B \quad \forall x \in X.$$

Como f es uniformemente continua, $\exists \delta_1 > 0 : \, \forall x, y \in X : \, d(x,y) < \delta_1$,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2B}.$$

Como g es uniformemente continua, $\exists \delta_2 > 0 : \, \forall x, y \in X : \, d(x,y) < \delta_2$,

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Entonces, $\forall x, y \in X : \, d(x,y) < \delta$,

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\frac{\varepsilon}{2B}}\, \underbrace{|g(x)|}_{B} + \underbrace{|f(y)|}_{A}\, \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\frac{\varepsilon}{2A}} < \varepsilon. \quad \square$$

Ej. 5: Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) := \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$.

(b) Estudia la convergencia uniforme de esa sucesión en $\mathbb{R}$.

(c) Dado $a > 0$, estudia la convergencia uniforme de la sucesión en $[a, +\infty)$.

Sol.: (a) $\forall x \neq 0$, $\left(1+x^2\right) > 1 \implies f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \xrightarrow{n} 0.$

Para $x = 0$, $\quad f_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(0) \xrightarrow{n} 1.$

Por lo tanto, sea $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Entonces $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente.

(b) Las funciones f_n son continuas $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, si $\{f_n\}$ convergiera uniformemente en $\mathbb{R}$, su límite f debería ser continua.

Pero f es discontinua. Por lo tanto, $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

(c) Sea $a > 0$. $\forall x \geq a$, $\quad |f_n(x) - 0| = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \leq \dfrac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow{n} 0.$

$$\implies \sup_{x \geq a} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow{n} 0.$$

$$\implies f_n \xrightarrow{n} 0 \text{ uniformemente en } [a, +\infty). \quad \square$$