UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
PRACTICA 8
Sistemas Lineales de EDO: Primera Parte

Problemas a resolver en práctica

1. Escriba la EDO lineal de orden 3 que sigue, como un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

   $x'''(t) - t^3\, x''(t) + 4\mathrm{e}^{-3t}\, x'(t) + 2t\, x(t) = t^2\, \mathrm{e}^{3t}$.

   Desarrollo:

   Haciendo $\left\{ \begin{array}{c} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \\ y_3(t) = x''(t), \end{array} \right.$ obtenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = x'''(t). \end{array} \right.$

   Notemos que la última ecuación es:

   $$y_3'(t) = x'''(t) = -2tx(t) - 4\mathrm{e}^{-3t}x'(t) + t^3x''(t) + t^2\mathrm{e}^{3t}$$

   Por tanto, el sistema requerido, es

   $$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = -2ty_1(t) - 4\mathrm{e}^{-3t}y_2(t) + t^3y_3(t) + t^2\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right.$$

   Observemos que en modo matricial el sistema de EDO anterior, es:

   $$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2t & -4\mathrm{e}^{-3t} & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

2. Reescriba el sistema de ecuaciones diferenciales dado como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

   $\left\{ \begin{array}{l} x'' - 3x' + 2y' + 2x = 0 \\ y'' - x' = y' + y. \end{array} \right.$

   Solución.

   Definimos la función auxiliar $\overrightarrow{Z}\,(t)$ como $\overrightarrow{Z}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ x'\,(t) \\ y\,(t) \\ y'\,(t) \end{pmatrix}$. La k-ésima componente de

$\overrightarrow{Z}(t)$ es llamada $z_k(t)$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ x''(t) \\ z_4(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ 3\,z_2(t) - 2\,z_4(t) - 2\,z_1(t) \\ z_4(t) \\ z_2(t) + z_4(t) + z_3(t) \end{pmatrix}.$$

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}$$

3. Considere el sistema $X'(t) = A\,X(t)$, donde A es la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (i) Muestre que los vectores $\mathbf{u(t)} = \mathrm{e}^t(1,0,-1)^T$, $\mathbf{v(t)} = \mathrm{e}^{-t}(0,-3/2,1)^T$ y $\mathbf{w(t)} = \mathrm{e}^{2t}(0,0,1)^T$ son solución del sistema dado.

   (ii) Muestre que toda combinación lineal $c_1\mathbf{u(t)} + c_2\mathbf{v(t)} + c_3\mathbf{w(t)}$ es también solución del sistema dado (c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias).

   (iii) Muestre que $\{\mathbf{u(t)}, \mathbf{v(t)}, \mathbf{w(t)}\}$ es linealmente independiente en el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

Solución.

(i) Primero comprobamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando que $\exp'(\lambda\,x) = \lambda\,\exp(\lambda\,x)$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t\,A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A\left(e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\frac{d}{dt}e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t}A\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = A\left(e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

y

$$\frac{d}{dt}e^{2\,t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,e^{2\,t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2\,t}A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\left(e^{2\,t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(ii) Como la derivada es lineal,

$$\frac{d}{dt}\left(c_1\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\mathbf{w}(\mathbf{t})\right)=c_1\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\frac{d}{dt}\mathbf{w}(\mathbf{t}).$$

Del inciso (i) tenemos que

$$\begin{aligned}c_1\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\frac{d}{dt}\mathbf{w}(\mathbf{t})&=c_1\,A\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\,A\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\,A\mathbf{w}(\mathbf{t})\\&=A\left(c_1\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\mathbf{w}(\mathbf{t})\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(c_1\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\mathbf{w}(\mathbf{t})\right)=A\left(c_1\mathbf{u}(\mathbf{t})+c_2\mathbf{v}(\mathbf{t})+c_3\mathbf{w}(\mathbf{t})\right).$$

(iii) El Wronskiano de $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{w}(\mathbf{t})$ evaluado en 0 es igual a

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-3/2&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-3/2\end{vmatrix}=-3/2,$$

luego es diferente de 0. Por ende $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{w}(\mathbf{t})$ son linealmente independientes.

4. Considere el sistema no homogéneo

$$X'(t)=AX(t)\;+\;F(t).$$

Verifique que el vector $X_p(t){:=}\,\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\;+\;t\,\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, es una solución, cuando $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}$ y $F(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$.

Desarollo

Calculamos la derivada de $X_p(t)$:

$$X_p'(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\;.$$

De otra parte,

$$AX_p(t)+F(t)=\mathrm{e}^tA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\mathrm{e}^tA\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}+t\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$$

Así tenemos $X_p'(t)=AX_p(t)+F(t)$ y por tanto $X_p(t)$ es solución del sistema de EDOs propuesto.

5. Resuelva $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t), & y(0) = 1, \end{cases}$

Desarrollo:

Sabemos que las soluciones buscadas son del tipo $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}u(t)$ donde (λ, u) son tales que $Au = \lambda u$.

En este caso la matriz de los coeficientes A es dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

El polinomio caracterstico es $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3$. Así, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 5 \ \text{ y } \lambda_2 = 1.$$

Para los vectores propios determinamos los espacios propios

$$S_{\lambda_1} = Ker(A - 5I) \text{ y } S_{\lambda_2} = Ker(A - I).$$

Resulta:

$$Ker(A - 5I) = Ker \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =< \{(1, 3)^t\} >,$$

$$Ker(A - I) = Ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} =< \{(1, -1)^t\} > .$$

Así, los vectores :

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \ \text{ y } X_2(t) = \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

son soluciones del sistema dado. Además, como el Wronskiano de X_1 y X_2 evaluado en $t = 0$, es $W(X_1, X_2; t = 0) \neq 0$, los vectores X_1 y X_2 son l.i. Así, toda solución, $X(t)$, del sistema dado, se ecribe como:

$$X(t) = c_1\mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Ahora usamos las condiciones iniciales para determinar c_1 y c_2. Tomando $t = 0$ en la solución general y igualando con el vector inicial del PVI, obtenemos

$$X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 3c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se resuelve facilmente. Al adicionar las dos lineas obtenemos $4c_1 = 3$, esto es, $c_1 = 3/4$, y luego substituyendo en la primera linea obtenemos $c_2 = 2 - c_1 = 5/4$. Así, la única solución del PVI es

$$X(t) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Verifique que el vector $\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ t\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t(t+\dfrac{t^2}{2}) \end{bmatrix}$ es solución del sistema

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

2. Muestre que el vector

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{3}e^t \\ \\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{32} - \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}$$

es una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + \mathrm{e}^t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + t. \end{cases}$$

3. Reescriba el sistema de ecuaciones diferenciales dado como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

(i) $\begin{cases} x'' - x + y = \operatorname{sen}(t) \\ x' + 3y' = \mathrm{e}^t. \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x'' = 3x' + 4y' - x \\ y'' = 3x' + y'. \end{cases}$

4. Verifique que

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$$

es un **conjunto fundamental** para el sistema de EDO

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

5. Resuelva $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t), & x(0) = -2, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t), & y(0) = 3, \end{cases}$

MDT/JMS/CMG/DS//jms/cmg/ds
Agosto de 2020.