UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Elementos Finitos 521237

Listado N°2

Considere la ecuación

$$\begin{cases} -((1+x)u'(x))' &=& f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) &=& 0, \\ u(1) &=& 0, \end{cases} \tag{1}$$

con $f \in L^2(a,b)$ dado.

1. Deduzca una formulación variacional apropiada.

2. Demuestre que dicha formulación variacional posee solución única.

3. Escriba la formulación variacional discreta asociada considerando una patición uniforme $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$, de tamaño h, del intervalo $[0,1]$ y el espacio

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}(a,b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i])\,, \text{para}\, i = 1, ..., d+1\,, v(0) = v(1) = 0\}.$$

4. Escriba el sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado.

5. Considere $f(x) = \pi\cos(\pi x) - (1+x)\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$ en la EDO (1), cuya solución exacta es $u(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. Para una partición con $d = 2$, resuelva "a mano" el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado y esboce la gráfica de la solución u_h obtenida.

6. Escriba un programa que realice lo siguiente:

   a) Escriba la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ del sistema lineal del Ejercicio 4.
   b) Calcule la solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$.
   c) Considere $f(x) = \pi\cos(\pi x) - (1+x)\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$, cuya solución exacta es $u(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.
   d) Programe y resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$. Considere $d = 100$ y grafique tanto u_h como u.
   e) Calcule los errores $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$
   f) Complete la siguiente tabla de convergencia.

h	$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$	r	$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$	r
1/4		-		-
1/8				
1/16				
1/32				
1/64				

   Aquí r es llamado orden de convergencia experimental y se define como

   $$r := \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$$

   donde e_{h_1} y e_{h_2} son los errores correspondientes a dos discretizaciones consecutivas utilizando subintervalos de longitud h_1 y h_2 ($h_2 < h_1$), respectivamente. '?Qué observa respecto al comportamiento de r?
   g) Programe y resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$. Considere $d = 100$ y grafique tanto u_h como u.

MSP/msp Concepción 19 de Marzo de 2024.