



Álgebra 1 (525140)
Semestre 2 - 2023, Pauta de Evaluación 2

Problema 1. (12 puntos)

Sea x un número real distinto de cero. Considere el desarrollo de

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}.$$

Determine:

- 1.1 La potencia de x en el término central.
- 1.2 El término independiente de x .
- 1.3 La posición que ocupa el término que contiene a x^{-3} .

Indicación: Si alguna de sus respuestas incluye un coeficiente binomial, debe calcularlo.

Respuesta a problema 1.

Comenzamos aplicando el Teorema del Binomio y propiedades conocidas de potencias para escribir:

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{12-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{12-3k}.$$

Para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ el término $k + 1$ -ésimo en el desarrollo del binomio dado es

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} x^{12-3k}.$$

(3 puntos)

- 1.1 El término central es el séptimo, T_7 , que se obtiene cuando $k = 6$. Por lo tanto, la potencia de x es

$$12 - 3 \cdot 6 = -6.$$

(3 puntos)

- 1.2 El término independiente de x se obtiene cuando el exponente de x es cero, esto es, cuando

$$12 - 3k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4.$$

Así, el término independiente de x es

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 495.$$

(3 puntos)

- 1.3 La potencia x^{-3} aparece cuando

$$12 - 3k = -3 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5,$$

es decir, en el sexto término, T_6 .

(3 puntos)

Problema 2. (12 puntos)

Considere una **progresión geométrica** de razón $r = 3$. Si al segundo término se le suma 5 y a su tercer término se le resta 6, entonces los tres primeros términos de ella forman una **progresión aritmética**. Determine la suma de los cinco primeros términos de la **progresión geométrica** inicial.

Respuesta a problema 2.

Sea x el primer término de la progresión geométrica inicial. Entonces los otros dos se obtienen multiplicando el anterior por $r = 3$, es decir, son $3x$ y $3(3x) = 9x$.

Luego, los tres números que forman una progresión aritmética son

$$x, \quad 3x + 5 \quad \text{y} \quad 9x - 6.$$

Como forman una progresión aritmética, sabemos que la diferencia entre dos consecutivos es constante. Por ello, se tiene que

$$3x + 5 - x = (9x - 6) - (3x + 5) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 5 = 6x - 11 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Luego, considerando $a_1 = 4$ y $r = 3$, la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica inicial está dada por

$$\frac{a_1(1 - r^5)}{1 - r} = \frac{4(1 - 3^5)}{1 - 3} = 484.$$

Problema 3. (20 puntos)

Considere la función $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

3.1 Determine $\text{Dom}(f)$ (dominio de f) y $\text{Rec}(f)$ (recorrido de f).

3.2 ¿Es f una función invertible? Justifique. Si no lo es, redefínala adecuadamente para que lo sea, esto es, defina una función $g : \text{Dom}(g) \rightarrow \text{Rec}(g)$, biyectiva, con las propiedades:

- $\text{Dom}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$,
- $\text{Rec}(g) = \text{Rec}(f)$,
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

3.3 Defina la inversa de la función g definida en el ítem anterior.

Respuesta a problema 3.

3.1 Comenzamos con

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Por el denominador, imponemos que $\sqrt{x^2 - 2x} \neq 0$, y por la raíz cuadrada debemos imponer que $x^2 - 2x \geq 0$. Así, ambas condiciones juntas equivalen a imponer la inecuación $x^2 - 2x > 0$, de donde

$$\text{Dom}(f) =] - \infty, 0[\cup]2, +\infty[.$$

Dado que

$$\text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \text{Dom}(f) : f(x) = y\}$$

para determinar el recorrido despejaremos x de la igualdad $y = f(x)$ y veremos qué restricciones debemos imponer a y para que esta ecuación tenga solución en $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} & (y \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{1}{y} & (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x = \frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$x^2 - 2x - \frac{1}{y^2} = 0$$

y despejamos x usando la fórmula para los ceros de una ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{y^2}}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{y^2}}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}.$$

De esta última expresión no sale ninguna restricción pues la cantidad bajo la raíz cuadrada es siempre no negativa. Además, como $1 + \frac{1}{y^2} > 1$ se tiene que para todo $y > 0$

$$1 + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} > 2 \quad \text{y} \quad 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} < 0.$$

Es decir, para todo $y > 0$ ambas soluciones de la ecuación $f(x) = y$ pertenecen al dominio de f , una de ellas es mayor que 2 y la otra es menor que 0.

Así,

$$\text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \wedge y > 0\} =]0, +\infty[.$$

(10 puntos)

3.2 Podemos afirmar que f no es invertible ya que no es sobreyectiva (el recorrido $]0, +\infty[$ es distinto al codominio \mathbb{R}).

De esto, ya tenemos que $\text{Rec}(g)$ debe ser definido como $]0, +\infty[$.

Para definir $\text{Dom}(g)$ observamos que f no es inyectiva.

Alternativa 1 para justificar no inyectividad de f : Con la observación realizada al final del ítem **3.1**: ambas soluciones de la ecuación $f(x) = y$ pertenecen, para todo $y > 0$, al dominio de f .

Alternativa 2 para justificar no inyectividad de f : Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 2x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - 2x_2}}.$$

Elevando al cuadrado y multiplicando, tenemos que

$$x_2^2 - 2x_2 = x_1^2 - 2x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2) = 0.$$

Factorizando nos queda:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0, \quad \text{de donde} \quad x_1 = x_2 \vee x_1 + x_2 = 2.$$

Así, vemos que, por ejemplo, para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ (elegidos de modo que cumplan la segunda condición) se obtiene que

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = f(x_2),$$

es decir, f no es inyectiva.

Para corregir la no inyectividad de f debemos restringir su dominio de modo que solo una de las soluciones de la ecuación $f(x) = y$ pertenezca al nuevo conjunto escogido o, de manera alternativa, de modo que no sea posible encontrar x_1, x_2 en nuevo conjunto que satisfagan $x_1 + x_2 = 2$.

Ambas alternativas sugieren que debemos restringir el dominio a sólo al intervalo $] - \infty, 0[$ o a el intervalo $]2, +\infty[$.

Otra forma de ver esto es reescribiendo la función como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 1}},$$

lo cual nos dice que lo que pasa con la función en el dominio a la izquierda de $x = 1$ (es decir, en $] - \infty, 0[$) se replica de manera idéntica en el dominio a la derecha de $x = 1$ (esto es, en $]2, +\infty[$).

Por esto, dos posibles redefiniciones biyectivas de f son:

- $g_1 :] - \infty, 0[\rightarrow]0, +\infty[$, donde $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$,
- $g_2 :]2, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, donde $g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

(6 puntos)

3.3 De acuerdo a las dos posibles elecciones anteriores, sus inversas son

- $g_1^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow] - \infty, 0[$, donde $g_1^{-1}(y) = x \Leftrightarrow g_1(x) = y$.
- $g_2^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$, donde $g_2^{-1}(y) = x \Leftrightarrow g_2(x) = y$.

Para determinar la fórmula de la definición de cada una de ellas, del procedimiento usado en el recorrido obtuvimos que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}},$$

y observamos que la solución

$$x = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

entrega valores de x que son mayores que 2, es decir, es la que corresponde a $g_2^{-1}(y)$. De manera análoga, la solución

$$x = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

entrega valores de x que son menores que 0 y, por ello, esta solución corresponde al caso de $g_1^{-1}(y)$.

Así, se concluye que la definición de las inversas es:

- $g_1^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow] - \infty, 0[$, donde $g_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.
- $g_2^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$, donde $g_2^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

(4 puntos)

Problema 4. (16 puntos)

4.1 Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se satisface

$$e^{4x} + 3e^{3x} - 4e^{2x} = 0.$$

4.2 Determine para qué valores de $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ se satisface

$$\log_{\left(\frac{3}{2}-x\right)}(x^2 - x) > 2.$$

Indicación: Recuerde que si a y b son números reales con $a < b$, entonces

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Respuesta a problema 4.

4.1 Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$. Por ello, podemos dividir la ecuación por e^{2x} y queda

$$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u = e^x$ queda

$$u^2 + 3u - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u + 4)(u - 1) = 0,$$

de donde $u = -4$ o $u = 1$. Como $u = e^{2x}$, el primer caso no se puede dar y, por lo tanto, debemos hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{2x} = 1$, esto es, $x = 0$.

El conjunto solución de la ecuación dada es $\{0\}$.

(6 puntos)

4.2 Comenzamos notando que:

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{3}{2} - x < 1,$$

es decir, la base del logaritmo es un número entre 0 y 1, y en este caso la función resulta decreciente.

Ahora, del argumento del logaritmo, restringimos:

$$x^2 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

Por último, resolvemos la inecuación (usando que para todo $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ se cumple que $\log_{\frac{3}{2}-x}$ es decreciente):

$$\log_{\left(\frac{3}{2}-x\right)}(x^2 - x) > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x < \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x < \frac{9}{4} - 3x + x^2,$$

de donde obtenemos la inecuación

$$2x < \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{9}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] -\infty, \frac{9}{8} \right[.$$

Así, intersectando todas las condiciones que tenemos para x , obtenemos que el conjunto solución de la inecuación es

$$\left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[\cap \left(]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\right) \cap \left] -\infty, \frac{9}{8} \right[= \left] 1, \frac{9}{8} \right[.$$

(10 puntos)