UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218-525221)
Listado 7
Sistemas Lineales de EDO (Parte II)

Problemas a resolver en práctica

1. **Valores propios complejos:** Aplicando el método de valores y vectores propios, resolver el sistema PVI:
$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t)\,,$$
con la condición inicial $\boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución:
Sea $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Primero, calculamos los Valores propios de $\boldsymbol{A}$:
$$|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{I}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-3)^2 + 2^2 = 0\,,$$
de donde $\lambda_1 = 3+2i$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 3-2i$ son los valores propios (complejos conjugados) de $\boldsymbol{A}$.
Calculando el espacio propio asociado a λ_1, se encuentra que
$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle\,,$$
de donde se concluye que $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ es un vector propio (complejo) de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ_1. Se recuerda que $\boldsymbol{v}_2 := \bar{\boldsymbol{v}}_1$ es vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ_2.
Como interesa obtener un sistema fundamental de soluciones en el cuerpo $\mathbb{R}$, construimos
$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{X}}(t) &= \mathrm{e}^{(3+2i)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{i(2t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -\cos(2t) - i\,\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) + \mathrm{sen}(2t) + i\,(\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t)) \end{pmatrix}\,,\end{aligned}$$
de donde se deducen las funciones vectoriales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$:
$$\boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{Re}(\tilde{\boldsymbol{X}}(t)) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \cos(2t) + \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$$
y
$$\boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{Im}(\tilde{\boldsymbol{X}}(t)) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}\,.$$

De esta manera, la solución general del sistema EDO homogéneo dado es

$$\boldsymbol{X}(t) \,=\, C_1\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \cos(2t)\,+\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\,\mathrm{sen}(2t) \\ \mathrm{sen}(2t)\,-\,\cos(2t) \end{pmatrix},$$

siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

Ahora, imponemos la condición inicial:

$$\boldsymbol{X}(0) \,=\, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad C_1 = -4 \quad , \quad C_2 = -9\,.$$

Finalmente, la solución del PVI dado es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= -4\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \cos(2t)\,+\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} - 9\,\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -\,\mathrm{sen}(2t) \\ \mathrm{sen}(2t)\,-\,\cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 4\cos(2t)\,+\,9\,\mathrm{sen}(2t) \\ 5\cos(2t)\,-\,13\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Resuelva usando el método de valores/vectores propios:

$$(i)\ \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = 5x(t) - y(t), & y(0) = 1, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t), \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) - z(t), \\ z'(t) = x(t) - y(t) - 2z(t), \end{cases}$$

DESARROLLO

(i) El sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}(t)\,, \quad \boldsymbol{X}(0) \,=\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Las raíces del polinomio característico
$p(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, son

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i,$$

las cuales son **complejas conjugadas simples**, y por tanto, basta obtener un sólo espacio propio.

El espacio propio correspondiente a λ_1 es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\,\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, .$$

De esta manera, $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. En vista que $\boldsymbol{A}$ tiene componentes reales, se infiere que $\overline{\boldsymbol{v}_1}$ será un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

En consecuencia, el espacio propio asociado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ es

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2\, \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Considerando la función vectorial compleja (por columnas) $\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{Z}(t) := \mathrm{e}^{(1+i)\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$, se inducen las siguientes soluciones del sistema EDO dado, linealmente independientes:

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}(t)) \;=\; \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}(t)) \;=\; \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ 2\,\mathrm{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Así, la solución general del sistema EDO lineal de primer orden homogéneo es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= c_1\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2\, \boldsymbol{X}_2(t) \\ &= c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} \;+\; c_2\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ 2\,\mathrm{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.
Imponiendo la condición inicial, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2\,c_1 - c_2 \end{pmatrix},$$

cuya única solución es $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$.
Por lo tanto, la única solución del PVI planteado viene dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = -\boldsymbol{X}_2(t) = -\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ 2\,\mathrm{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alternativa: Se sabe que $\boldsymbol{X}_2$ es solución de sistema, y además, $\boldsymbol{X}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con lo cual $-\boldsymbol{X}_2$ es una solución del PVI planteado, y gracias al **Teorema de Existencia y Unicidad**, es su única solución.

(ii) El sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$. Calculando el determinante, obtenemos $p(\lambda) = -\lambda\,(3+\lambda)^2$. Luego las raíces de p son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \text{ (valor propio doble)}, \qquad \lambda_3 = 0 \text{ (valor propio simple)}.$$

El espacio propio correspondiente al valor propio doble λ_1 (DEJADO AL LECTOR DE EJERCICIO) es

$$S_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Identificando, tenemos que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, donde $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, es una base de S_{λ_1}, conformada por vectores propios de $\boldsymbol{A}$ asociados al valor propio (de multiplicidad 2) $\lambda_1 = -3$. Por tanto, se obtienen las siguientes soluciones del sistema EDO dado:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que puesto que $\dim(S_{\lambda_1}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio λ_1, puede asegurarse que la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable (¿POR QUÉ?).

Para la solución faltante, procedemos a caracterizar el espacio propio asociado a $\lambda_3 = 0$. Como resultado (EJERCICIO), se obtiene

$$S_{\lambda_3} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_3\, \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle ,$$

de donde se infiere que $\boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio λ_3. Nuevamente, por propiedad vista en clases, la tercera solución del sistema EDO dado, linealmente independiente con las ya obtenidas, viene dada por

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_3(t) := \mathrm{e}^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Así, la solución general del sistema homogéneo es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2\, \boldsymbol{X}_2(t) + c_3\, \boldsymbol{X}_3(t) = c_1\, \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-3\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

3. Resolver usando el método de valores y vectores propios y la variación de parámetros (según corresponda): $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) + t \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + 2\,\mathrm{e}^{t} \end{array} \right.$

DESARROLLO

Se observa que el sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Gracias al Principio de Superposición, la solución general del problema está dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t),$$

siendo $\boldsymbol{X}_h$ la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p$ una solución particular del problema planteado.

El cálculo del determinante (DEJADO AL LECTOR) nos conduce al polinomio característico $p(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (1-\lambda)\,(2-\lambda)^2$. Sus raíces son

$$\lambda_1 = 1 \text{ (valor propio simple)}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \text{ (valor propio doble)}.$$

El espacio propio correspondiente a λ_1 es

$$S_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\,\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da lugar a la primera solución,

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El espacio propio asociado al valor propio doble λ_2 está dado por

$$S_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos las soluciones faltantes, linealmente independientes

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_3(t) := \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que puesto que $\dim(S_{\lambda_2}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica de λ_2, la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Así, la solución general del sistema homogéneo, $\boldsymbol{X}_h$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\,\boldsymbol{X}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{X}_2(t) + c_3\,\boldsymbol{X}_3(t) = c_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Para la Búsqueda de una solución particular: $\boldsymbol{X}_p$.
Aplicando la variación de paramétros, buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = d_1(t)\,\boldsymbol{X}_1(t) + d_2(t)\,\boldsymbol{X}_2(t) + d_3(t)\,\boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las funciones (derivables) $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $d_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{\text{matriz fundamental de soluciones}} \begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \\ d_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2\,e^t \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} d_1'(t) &= 2 + t\,e^{-t} \\ d_2'(t) &= -2\,e^{-t} \\ d_3'(t) &= -t\,e^{-2t}. \end{cases}$$

Calculando primitivas de cada una de estas derivadas, resulta

$$\begin{cases} d_1(t) &= -\,(1+t)\,e^{-t} + 2\,t \\ d_2(t) &= 2\,e^{-t} \\ d_3(t) &= \frac{1}{4}\,(1+2\,t)\,e^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = (2\,t\,e^t - 1 - t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\,(1+2\,t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, .$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) = & c_1\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\,e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\,e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ & + (2\,t\,e^t - 1 - t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\,(1+2\,t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

4. Resolver el sistema EDO lineal no homogéneo de primer orden

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t \\ e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sabiendo que una MATRIZ FUNDAMENTAL para el sistema EDO homogéneo asociado viene dada por $\boldsymbol{M}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Además, el sistema EDO no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene por solución particular a $\boldsymbol{X}_p(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.

DESARROLLO

Del enunciado se desprende que las funciones vectoriales (por columnas) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ y $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ son soluciones l.i del sistema EDO homogéneo asociado. Luego, la solución general de dicho sistema EDO homogéneo es

$$\boldsymbol{X}_H(t) = c_1\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2\, \boldsymbol{X}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

Gracias al Principio de Superposición, se construye una solución particular de la forma $\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{X}_{p1} + \boldsymbol{X}_{p2}$, siendo $\boldsymbol{X}_{p1}$ una solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

y $\boldsymbol{X}_{p2}$ solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Del enunciado sabemos que

$$\boldsymbol{X}_{p1}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para construir $\boldsymbol{X}_{p2}$ aplicaremos variación de parámetros. Esta técnica propone que

$$\boldsymbol{X}_{p2}(t) = d_1(t)\, \boldsymbol{X}_1(t) + d_2(t)\, \boldsymbol{X}_2(t),$$

de modo que las funciones derivables d_1 y d_2, satisfacen el sistema

$$\Big(\boldsymbol{X}_1(t) \,|\, \boldsymbol{X}_2(t)\Big) \begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se tiene

$$d_1'(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}{2} \quad \Rightarrow \quad d_1(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t$$

y

$$d_2'(t) = \frac{e^{3t}+e^{4t}}{2} \quad \Rightarrow \quad d_2(t) = \frac{1}{6}\,e^{3t} + \frac{1}{8}\,e^{4t}.$$

De esta forma,

$$\boldsymbol{X}_{p2}(t) = \left(\frac{1}{4}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,e^{t}\right)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\,e^{3t} + \frac{1}{8}\,e^{4t}\right)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9\,e^{3t} - 8\,e^{2t} \\ 3\,e^{3t} - 16\,e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, la solución general del sistema EDO no homogéneo dado es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{X}_H(t) + \boldsymbol{X}_{p1}(t) + \boldsymbol{X}_{p2}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(e^t - e^{-t}) \\ (2t-1)(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix} + \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9\,e^{3t} - 8\,e^{2t} \\ 3\,e^{3t} - 16\,e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

5. Considere el sistema lineal de EDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) \quad + e^{-t} \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) \quad - (e^{-t} + e^{-3t}) \end{cases}$$

(*i*) Si la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema de EDO lineal homogéneo asociado al sistema dado, escriba la solución general del **sistema lineal homogéneo** correspondiente.

(*ii*) Determine una solución particular para el sistema dado.

(*iii*) Determine la solución general del sistema dado.

DESARROLLO

El sistema EDO dado puede expresarse en forma matricial, como $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -(e^{-t} + e^{-3t}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(*i*) La solución general del problema es $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t)$, donde $\boldsymbol{X}_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p(t)$ es una solución particular del problema.

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -1 \quad \text{(valores propios simples)}$$

Puesto que $\boldsymbol{A}$ tiene valores propios simples, sigue que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Como nos dan la solución asociada a $\lambda_1 = -2$, buscamos los espacios propios S_{λ_2} y S_{λ_3} asociados respectivamente a $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -1$.

El espacio propio correspondiente a λ_2, S_{λ_2}, resulta ser (Dejado de ejercicio al lector)

$$S_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da origen a la segunda solución (¿Por qué?), $\boldsymbol{X}_2(t)$,

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para el espacio propio correspondiente a λ_3, obtenemos (Dejado de ejercicio al lector)

$$S_{\lambda_3} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos la tercera solución $\boldsymbol{X}_3(t)$,

$$\boldsymbol{X}_3(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general del sistema EDO lineal homogéneo de primer orden dado, $\boldsymbol{X}_h(t)$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1 \,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \,\mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \,\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias. Comentario: como nos dicen que $\boldsymbol{X}_1$ es una solución de la EDO homogénea asociada, invocando la Propiedad, se tiene que $\lambda_1 = -2$ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$ (es decir, una raíz de p). Además, $S_{\lambda_1} = \langle \{\boldsymbol{v}_1\} \rangle$, con $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*ii*) Para la solución particular, $\boldsymbol{X}_p$, por variación de parámetros buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = d_1(t)\boldsymbol{X}_1(t) + d_2(t)\boldsymbol{X}_2(t) + d_3(t)\boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $d_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \\ d_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} d_1'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t} \\ d_2'(t) &= 1 \\ d_3'(t) &= 1 + \mathrm{e}^{-2\,t}. \end{cases}$$

Integrando, obtenemos (eligiendo constantes de integración nulas),

$$\begin{cases} d_1(t) & = \mathrm{e}^{-t} \\ d_2(t) & = t \\ d_3(t) & = t \, - \, \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t \, - \, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t\mathrm{e}^{-t} \, - \, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(iii) Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) =& c_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &+ \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t\mathrm{e}^{-t} \, - \, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Problemas propuestos para el estudiante.

1. Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (multiplicidad igual a 1).

$$(i) \begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), & y(0) = 5, \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = 3x(t) + 5y(t), & y(0) = 3, \end{cases},$$

2. Usando el método de valores/vectores propios, resuelva:

$$(i) \begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) - z(t), & y(0) = 0, \\ z'(t) = x(t) - y(t) - 2z(t), & z(0) = 1, \end{cases}$$

3. Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (valores propios complejos).

$$(i)\ \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t) - y(t), & y(0) = 1, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = 5x(t) - y(t), & y(0) = 0, \end{cases}$$

4. Resolver usando variación de parámetros:

   a) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-2t}, \\ y'(t) = x(t) + y(t) - \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{3t}, \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x'(t) = y(t) + \mathrm{e}^{t}, & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t), & y(0) = 0, \end{cases}$

5. Resuelva $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t), & x(0) = -2, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t), & y(0) = 3, \end{cases}$

6. Determine la solución general de

   a)
   $$\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

   b)
   $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = 4\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

   c)
   $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2\,y(t) \\ z'(t) = y(t) - z(t) \end{cases}$$

   d)
   $$\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - 7\,y(t) \\ y'(t) = 5\,x(t) + 10\,y(t) + 4\,z(t) \\ z'(t) = 5\,y(t) + 2\,z(t) \end{cases}$$

7. En dos tanques A y B de 800 litros de capacidad, se tienen respectivamente 400 [lts] de agua pura y 200 [lts] de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. Desde el externo ingresan al tanque A 8 [lt/min] de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. Simultáneamente desde el tanque B ingresan al tanque A 2 [lt/min] de agua y sal, y desde el tanque A ingresan al tanque B 6 [lt/min] de mezcla.
   Si del tanque B se pierden al externo 4 [lt/min], y suponiendo que en todo instante la mezcla de ambos tanques son homogéneas, escriba el sistema de EDO que rige el proceso anterior, hasta el momento del rebalse.

KMR/JMS/CMG// jms/cmg
Mayo, 7 de 2025.