UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 1 ALGEBRA III 525201-0 (COmentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada.

Problema 1. Usando tabla de verdad, muestre que la *disyunción excluyente* de p y q, $p \veebar q$ es lógicamente equivalente con $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ **(05 puntos)**
Casi todos desarrollaron correctamente esta pregunta.

Problema 2. Dada la siguiente proposición: $(p \wedge q)$ ¿? $(p \leftrightarrow q)$, cuál de los cinco conectivos lógicos principales vistos en clases, debe ir en el lugar de la interrogación para que la proposición compuesta sea una tautología? Justifique su razonamiento. **(05 puntos)**
Aquí también la gran mayoría hizo el desarrollo/razonamiento como se esperaba.

Problema 3. Aplicando las tautologías vistas en clases (llamadas leyes de la lógica proposicional), simplifique lo más que se pueda la proposición: **(10 puntos)**

$$s : [\sim p \rightarrow (p \vee q)] \leftrightarrow [\sim q \rightarrow (p \wedge q)]$$

Aquí primero simplificamos cada proposición que constituye la bicondicional.

$$\begin{aligned} \sim p \rightarrow (p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q \\ \sim q \rightarrow (p \wedge q) &\Leftrightarrow q \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge q\,. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} s &\Leftrightarrow (p \vee q) \leftrightarrow [(q \vee p) \wedge q] \\ &\Leftrightarrow \underbrace{[(p \vee q) \rightarrow [(q \vee p) \wedge q]]}_{s_1} \wedge \underbrace{[[(q \vee p) \wedge q] \rightarrow (p \vee q)]}_{s_2} \end{aligned}$$

Ahora simplificamos s_1 y s_2.

$$\begin{aligned} s_1 &\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee [(q \vee p) \wedge q] \Leftrightarrow [\sim (q \vee p) \vee q] \Leftrightarrow [(\sim q \wedge \sim p) \vee q] \Leftrightarrow \sim p \vee q \\ s_2 &\Leftrightarrow \sim [(q \vee p) \wedge q] \vee (p \vee q) \Leftrightarrow [\sim (q \vee p) \vee \sim q] \vee (p \vee q) \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

Luego,

$$s \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2 \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge V \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q\,.$$

Problema 4. Sean **p** y **q** las siguientes proposiciones:

$$\mathbf{p}: \quad [\exists x \in \{1, 2\} : s(x)] \rightarrow [\forall x \in \{1, 2\} : t(x)] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{q}: \quad \forall x \in \{1, 2\} : s(x) \leftrightarrow t(x),$$

donde s y t son funciones proposicionales.

1. Asigne, en la siguiente tabla, valores de verdad a $s(1), s(2), t(1)$ y $t(2)$ de modo que **p** sea F y **q** sea V. **(10 puntos)**

	Valor de verdad
s(1)	
s(2)	
t(1)	
t(2)	

Como **p** es Falso, el antecedente ha de ser verdadero mientras que el consecuente falso. Esto nos lleva a afirmar que $s(1) \vee s(2)$ es verdadero, y $t(1) \wedge t(2)$ es falso. Por otra parte, dado que **q** es verdadero, $s(j)$ y $t(j)$ deben tener los mismos valores de verdad a la vez, para $j \in \{1, 2\}$. Con esta información, se deduce que los valores de las proposiciones involucradas que hacen todo esto posible son:

	Valor de verdad
s(1)	F
s(2)	V
t(1)	F
t(2)	V

y

	Valor de verdad
s(1)	V
s(2)	F
t(1)	V
t(2)	F

2. Determine el valor de verdad de

$$\mathbf{r} : \forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x) \to t(x),$$

suponiendo que los valores de verdad de $s(1), s(2), t(1)$ y $t(2)$ son tales que **p** es V. Justifique su respuesta. **(10 puntos)**

Dado que la proposición **p** es verdadera, se tiene, en esencia dos escenarios posibles:

- $[\exists\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x)]$ y $[\forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, t(x)]$ son verdaderas. Esto significa que $s(1) \vee s(2)$ es verdadero, y que $t(1)$ y $t(2)$ tienen (ambos) valores de verdad verdadero. Esto último permite afirmar que el valor de verdad de **r** será siempre verdadero.
- $[\exists\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x)]$ es falso. En esta situación el valor de verdad del consecuente en **p** no tiene mayor importancia para la condicional. De esto se desprende que $s(1)$ y $s(2)$ tienen (ambos) valor de verdad falso. Sin requerir, en este caso, más información de los valores de verdad de $t(x)$, con $x \in \{1, 2\}$, se deduce también que la proposición **r** es verdadera.

Observación: Algunos de Uds. "dedujeron" la propiedad

$$\mathbf{p} : \quad [\exists\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, s(x)] \to [\forall\, x \in \{1,\, 2\} \,:\, t(x)] \Leftrightarrow \forall\, x \in \{1, 2\} \,: s(x) \,\to\, t(x)\,.$$

Desafortunadamente, esto es Falso. Se presenta el contra-ejemplo a continuación: Para los valores de verdad indicados en la tabla siguiente:

	Valor de verdad
s(1)	V
s(2)	F
t(1)	V
t(2)	F

se verifica que $\forall\, x \in \{1, 2\} \,: s(x) \,\to\, t(x)$ es verdadera. Sin embargo, para estos mismos valores de verdad para $s(1)$, $s(2)$, $t(1)$ y $t(2)$, la proposición **p** es Falsa.

Problema 5. Determinar la validez del siguiente argumento lógico: "Todos los números primos son impares, ya que es falso que 2 es número primo no obstante 2 es número par. 2 es número impar o 2 es número primo o 2 es número par. Ni 2 es número par ni 2 es número primo, si todos los números primos son impares. 2 es número primo sin embargo 2 es número par. En consecuencia, todos los números primos son impares o 2 es número impar pero no ambos." **(20 puntos)**
Primero hay que expresar el argumento lógico usando lenguaje proposicional. Comenzamos identificando las proposiciones simples que aparecen en el enunciado. Éstas son:

- p: Todos los números primos son impares.
- q: 2 es número primo.
- r: 2 es número par.

Luego, representamos cada sentencia / premisa, identificando las proposiciones simples que participan, y el/los conectivos lógicos que las relacionan:
PREMISAS:

- $\sim (q \wedge r) \rightarrow p$: "Todos los números primos son impares, ya que es falso que 2 es número primo no obstante 2 es número par".
- $\sim r \vee q \vee r$: "2 es número impar o 2 es número primo o 2 es número par."
- $p \rightarrow (\sim r \wedge \sim q)$: "Ni 2 es número par ni 2 es número primo, si todos los números primos son impares."
- $q \wedge r$: "2 es número primo sin embargo 2 es número par."

CONCLUSIÓN: ("En consecuencia")

- $p \underline{\vee} \sim r$: "todos los números primos son impares o 2 es número impar pero no ambos."

El paso siguiente, es validar este argumento lógico. Para ello, se examina si acaso existe una asignación de valores de verdad para p, q y r, que hagan que la condicional:

$$\Big[\Big(\sim (q \wedge r) \rightarrow p\Big) \wedge \Big(\sim r \vee q \vee r\Big) \wedge \Big(p \rightarrow (\sim r \wedge \sim q)\Big) \wedge \Big(q \wedge r\Big)\Big] \rightarrow \Big(p \underline{\vee} \sim r\Big).$$

tenga valor de verdad FALSO. Haciendo el análisis lógico correspondiente, en este caso, se DEDUCE que este valor de verdad se da para $p : F$, $q : V$ y $r : V$. En consecuencia, el argumento lógico expuesto, es NO VÁLIDO.

RBP/rbp 06.05.2020