UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Laboratorio 7: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias – 1$^{\text{era}}$ parte.

Cálculo Numérico 521230/525240

Considere el Problema de Valores Iniciales (PVI)

$$\begin{cases} y'(t) &= f\left(t, y(t)\right), \quad t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

En clase vimos los métodos de Euler explícito e implícito que permiten resolver este tipo de problemas. Descargue desde Canvas los archivos `euler_explicito.m` y `euler_implicito.m`, que contienen la implementación de estos métodos.

Ejercicio 1 (ejercicio guíado por el/la ayudante). Considere el PVI

$$\begin{cases} x'(t) &= -3tx(t)^2 + \dfrac{1}{1+t^3}, \quad t \in [0, 5] \\ x(0) &= 0, \end{cases}$$

cuya solución exacta es

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}.$$

1. Resuelva el problema utilizando el Método de Euler explícito, dividiendo el intervalo $[0, 5]$ en $N = 25$, $N = 50$ y $N = 500$ subintervalos.

2. Repita lo anterior, usando ahora el Método de Euler implícito.

3. Grafique los resultados obtenidos para cada N y compare con la gráfica de la solución exacta.

Ejercicio 2 (ejercicio guíado por el/la ayudante). Considere el PVI

$$\begin{cases} y'(x) &= 10(1 - y(x)), \quad t \in [0, 2] \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

1. Resuelva este problema con los métodos de Euler explícito e implícito, dividiendo el intervalo $[0, 2]$ en 10 subintervalos y grafique los resultados obtenidos, junto con la solución exacta a este problema, que es $y(x) = e^{-10x} + 1$. ¿Qué se observa? ¿A qué se debe esto?

2. Repita el ejercicio, ahora diviendo el intervalo en 40 subintervalos. ¿Se obtiene una gráfica similar a la del ejercicio anterior? ¿Por qué ocurre esto?

Matlab trae algunos comandos para resolver PVI. Dos de ellos son `ode45` y `ode15s`. El segundo de ellos es útil para resolver problemas *stiff*. Ambos tienen la misma sintaxis. La manera más sencilla de ejecutarlos es como sigue:

```
>> [t,y] = ode45('f',[t0 tf],y0);
```

donde

- `f` es el nombre de la función $f(t, y(t))$ (típicamente definida mediante un programa tipo `function`, o mediante una *function handle*),
- `t0` y `tf` son los extremos del intervalo donde se desea conocer la solución,
- `y0` es el valor de la solución en `t0` (es decir, el valor de la condición inicial $y(t_0) = y_0$),
- `t` devuelve los valores de la variable independiente t en los que el método calcula la solución,
- `y` devuelve los valores de la solución en cada uno de los puntos de `t`.

Estos comandos generan de manera automática una partición del intervalo $[t_0, t_f]$ que **no es equiespaciada**. Por lo tanto, no es necesario darles como entrada ni la cantidad ni la longitud de los subintervalos. Los errores cometidos se mantienen debajo de una tolerancia predeterminada.
Si se desea conocer la solución en ciertos valores específicos de `t`, podemos ejecutar alternativamente la instrucción:

```
>> [t,y] = ode45('f',tspan,y0);
```

donde `tspan` es el vector de valores donde se desea conocer la solución. Por ejemplo, si `tspan=t0:0.1:tf`, entonces `t` coincide con `tspan` y la solución es calculada en una partición uniforme, con intervalos de longitud igual a `0.1`.
La tolerancia predeterminada para estos métodos es 10^{-3} para el error relativo, y 10^{-6} para el error absoluto. Si se desea calcular la solución con otras tolerancias, deben prefijarse las opciones elegidas mediante el comando `odeset`. Además, en la ejecución del comando para resolver la E.D.O., debe agregarse el parámetro adicional de las opciones. La sintaxis para realizar esto es, por ejemplo:

```
>> options = odeset('RelTol','1e-6','AbsTol','1e-8');
>> [t,y] = ode45('f',tspan,y0,options);
```

Si se ejecuta `options = odeset('RelTol','1e-6',ÁbsTol','1e-8')` sin el “;” al final, puede verse que hay otras opciones que pueden prefijarse, además de las tolerancias de los errores.

Ejercicio 3 (ejercicio guíado por el/la ayudante). Considere el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & 100(1 - y(t)), \quad t \in [0, 5] \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Resuelva este problema con `ode45` y `ode15s`, tomando `AbsTol = 1e-6` y `RelTol = 1e-4`. ¿En cuántos subintervalos divide `ode45` el intervalo $[0, 5]$ para resolver el problema? ¿En cuántos lo divide `ode15s`? Observe que `ode15s` necesita dividir $[0, 5]$ en muchos menos subintervalos que `ode45`, a pesar de que las tolerancias usadas con ambos métodos son las mismas. Este comportamiento es típico de problemas *stiff*.

2. Grafique los tamaños de paso generados por ambos métodos y la solución exacta de este problema, que es $y(t) = e^{-100t} + 1$. Oberve que la solución exacta de este problema varía rápidamente desde el valor inicial hasta un valor cercano a 1, pero para $t \geq 0.1$ se mantiene casi constante. Es de esperarse que a partir de 0.1, un método numérico para resolver este problema tome en $[0, 0.1]$ tamaños de paso pequeños, para poder reproducir la variación de la solución exacta, pero a partir de 0.1 use tamaños de paso mucho mayores.
   Sin embargo, en los gráficos de los tamaños de paso usados por `ode45` y `ode15s`, sólo `ode15s` exhibe el comportamiento esperado. Este comportamiento de `ode45` es el típico de métodos no adecuados para resolver problemas *stiff* cuando son usados para resolver problemas *stiff*.

Ejercicio 4 (ejercicio para trabajo autónomo). Un *interruptor genético* es un mecanismo que regula si una proteína particular es sintetizada o no por una célula. Este mecanismo puede ser modelado por el siguiente problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} g'(t) & = & s - 1.51\, g(t) + 3.03\dfrac{g(t)^2}{1+g(t)^2}, \qquad t \in [0,\, 100] \\ g(0) & = & 0, \end{array}\right. \tag{1}$$

donde g denota la concentración de la proteína y s es una constante que determina la concentración del químico que activa la producción de la proteína.
El objetivo de este problema es determinar si este modelo permite modelar la existencia de un valor umbral para s: si llamamos $\tilde{s}$ al valor umbral para s, debe ocurrir que para $s < \tilde{s}$ la concentración de la proteína debe variar desde 0 (valor inicial) a un valor cercano a cero y debe permanecer casi constante a partir de ese momento. Si $s > \tilde{s}$, debe ocurrir algo similar, pero el valor en que permanece g (valor en equilibrio de g) debe ser "significativamente" mayor al anterior. Determinemos si existe $\tilde{s}$. Para ello escriba el rutero `interruptor_gen.m` en el que:

1. Resuelva (1) con `ode45`, tomando s igual a cada uno de los siguientes valores: 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

2. Grafique, en un mismo gráfico, las aproximaciones a g obtenidas con `ode45` y cada uno de los valores de s. Observe que la solución numérica tiene el comportamiento esperado. Para los dos primeros valores de s, los valores de g se mantienen cercanos a cero, pero para los dos últimos el valor de g en equilibrio es un número entre 1.5 y 2. Esto indica que $\tilde{s}$ es un número entre 0.2 y 0.3.

3. Resuelva nuevamente (1) con `ode45`, pero tomando ahora s igual a 0.201, 0.202, 0.203 y 0.204. ¿Entre cuáles de los valores anteriores usted presumiría que se encuentra el valor de $\tilde{s}$?

Ejercicio 5 (ejercicio para trabajo autónomo). Considere el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & -200y(t) + 200\sin(t) + \cos(t), \quad t \in [0,1] \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Resuelva el problema anterior con los métodos de Euler explícito e implćito, dividiendo el intervalo $[0,1]$ en $N = 80$ subintervalos.

2. Grafique, en ventanas distintas, las aproximaciones obtenidas con ambos métodos. ¿Son similares los gráficos resultantes?

3. Calcule, con el método de Euler explícito y $N = 160$ una nueva aproximación a la solución exacta del PVI. Grafíquela. ¿Es ésta similar a la aproximación calculada con el método de Euler implícito y $N = 80$?

4. Repita la pregunta anterior con $N = 320$. ¿Es ahora la aproximación que retorna Euler explícito similar a la obtenida con Euler implícito y $N = 80$?