UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Evaluación Recuperativa
Tiempo: 100 Mins.

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ con $\lambda > 0$.
   a) Pruebe que si A es diagonalizable, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \neq \theta$.
   b) Muestre que la siguiente matriz A no es diagonalizable.
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica.
   a) Pruebe que existe una única $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que
   $$B(x, y) = \langle x, Ay\rangle, \quad \forall x, y \in R^n.$$
   b) Muestre que si $B(x, x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \theta$, entonces existe $R \in M_n(\mathbb{R})$, matriz invertible tal que
   $$B(x, y) = \langle Rx, Ry\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3. Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal.
   a) Pruebe que $\text{an}(Im\, T) = Ker\, T^*$ y $\text{an}(Ker\, T) = Im\, T^*$.
   b) Concluya que T es inyectiva si y sólo si T^* es sobreyectiva y
   T es sobreyectiva si y sólo si T^* es inyectiva.

JAL, 06-julio-2009.