MAT1610 - Clase 32

Integrales indefinidas
Teorema del cambio neto

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

31 de mayo del 2024

Objetivo

- Entender la relación entre integral indefinida, indefinida y primitiva.

Integral Indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Significa que $F'(x) = f(x)$.

La integral indefinida es considerada como la representante de toda una familia de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Tabla de Integral Indefinida

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Integral Indefinida

Adoptamos la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general, es válida sólo sobre un intervalo.

Ejemplo 1:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

Ejemplo 2: Determine

$$\int \left(10x^4 - 2sec^2(x)\right)dx$$

Ejemplo 3: Determine

$$\int \frac{\cos(\theta)}{sen^2(\theta)}\,d\theta$$

Ejemplo 4: Determine

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$$

Ejemplo 5: Determine

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$$

Teorema del cambio neto

La integral de una razón de cambio es el **cambio neto**

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo

Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito, en el instante t. Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)dt = V(t_2) - V(t_1)$$

Corresponde al cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

Ejemplo 6: Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).

a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leq t \leq 4$.
b) Halle la distancia recorrida durante este periodo de tiempo.

Conclusión

- Se relacionó la integral indefinida con la integral definida y la primitiva.

Libro guía

- Págs. 397-403.