UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 5

Análisis Numérico II (525441)

Katiusca Cordero
Brayan Sandoval León

Problema 1. Encontrar $u = u(x)$ la solución de,

$$\begin{aligned} -u_{xx} + bu_x + cu = 1, &\quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0,\ -u_x(1) + bu(1) = d & \end{aligned}$$

Solución 1. Definimos $\tilde{u}_i \approx u(x_i)$ como la aproximación de u en el punto (x_i).
Sea $\phi = \phi(z) \in C^4$, la cual mediante teorema de taylor se obtiene,

$$\begin{aligned} \phi(z+h) &= P_3(z+h) + R_3(z+h) \\ \phi(z-h) &= P_3(z-h) + R_3(z-h) \end{aligned}$$

donde, $P_3(z+h)$ es,

$$\begin{aligned} P_3(z+h) &= \phi(z) + \phi'(z)(z+h-z) + \frac{1}{2!}\phi''(z)(z+h-z)^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(z)(z+h-z)^3 \\ P_3(z+h) &= \phi(z) + \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 \end{aligned}$$

de manera similar $P_3(z-h)$ es,

$$\begin{aligned} P_3(z-h) &= \phi(z) + \phi'(z)(z-h-z) + \frac{1}{2!}\phi''(z)(z-h-z)^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(z)(z-h-z)^3 \\ P_3(z-h) &= \phi(z) - \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 - \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 \end{aligned}$$

Luego para $R_3(z+h)$ y $R_3(z-h)$

$$\begin{aligned} R_3(z+h) &= \frac{1}{4!}\phi''''(z+\delta(z+h-z))(z+h-z)^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\overbrace{z+\delta h}^{\tilde{z}})h^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{z})h^4 \\ R_3(z-h) &= \frac{1}{4!}\phi''''(z+\delta(z-h-z))(z-h-z)^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\overbrace{z+\delta h}^{\tilde{\tilde{z}}})h^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{\tilde{z}})h^4 \end{aligned}$$

Reemplazamos lo obtenido en las formulas iniciales y obtenemos,

$$\phi(z+h) = \phi(z) + \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 + \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{z})h^4 \tag{1}$$

$$\phi(z-h) = \phi(z) - \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 - \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 + \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{\tilde{z}})h^4 \tag{2}$$

Sumamos (1) con (2) y obtenemos,

$$\phi''(z) = \frac{\phi(z+h) - 2\phi(z) + \phi(z-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}\phi''''(\hat{z}) \tag{3}$$

Luego restando (1) con (2) y obtenemos,

$$\phi'(z) = \frac{\phi(z+h) - \phi(z-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}\phi'''(z) \tag{4}$$

De (3) y (4) notamos que para un h suficientemente pequeño $\phi''(z)$ seria una buena aproximación para u_{xx} y u_x, luego cubrimos con una malla cuadrática de puntos (x_i) el dominio, con $0 \leq i \leq N+1$ donde $x_i = ih$, $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} u &\approx \tilde{u}_i \\ u_{xx} &\approx \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} \\ u_x &\approx \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}}{2h} \end{aligned}$$

Luego se tienen el sistema de ecuaciones,

$$\frac{-2\tilde{u}_{i+1} + 4\tilde{u}_i - 2\tilde{u}_{i-1}}{h^2} + \frac{bh\tilde{u}_{i+1} - bh\tilde{u}_{i-1}}{2h^2} + \frac{2ch^2\tilde{u}_i}{h^2} = 1$$

La cual después de reacomodar queda,

$$\tilde{u}_{i+1}(bh-2) + \tilde{u}_i\left(4 + 2ch^2\right) - \tilde{u}_{i-1}(bh+2) = 2h^2$$

Expresado en un sistema de ecuaciones se obtiene,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(bh-2) + \tilde{u}_1\left(4 + 2ch^2\right) - \tilde{u}_0(bh+2) &= 2h^2 \\ \tilde{u}_3(bh-2) + \tilde{u}_2\left(4 + 2ch^2\right) - \tilde{u}_1(bh+2) &= 2h^2 \\ \tilde{u}_4(bh-2) + \tilde{u}_3\left(4 + 2ch^2\right) - \tilde{u}_2(bh+2) &= 2h^2 \\ &\vdots \\ \tilde{u}_{N+1}(bh-2) + \tilde{u}_N\left(4 + 2ch^2\right) - \tilde{u}_{N-1}(bh+2) &= 2h^2 \end{aligned}$$

De las condiciones de contorno se deduce,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 &= 0 \\ -\frac{\tilde{u}_{N+1} - \tilde{u}_{N-1}}{2h} + b\tilde{u}_N &= d \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno al sistema de ecuaciones se obtiene el siguiente esquema matricial,

$$\frac{1}{2h^2}\begin{bmatrix} 6+2ch^2 & bh-2 & & & & \\ -bh-2 & 4+2ch^2 & bh-2 & & & \\ & -bh-2 & 4+2ch^2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & bh-2 & \\ & & & -bh-2 & 4+2ch^2 & bh-2 \\ & & & & -bh-2 & 6-\frac{bh}{2}+ch^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-1} \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1-\frac{d}{h} \end{bmatrix}$$

- **Solución mediante GMRES (con $b = 2,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Para resolver este problema primero le asignaremos valores a las constantes c, b y d Además consideraremos un $h = \frac{1}{101}$.

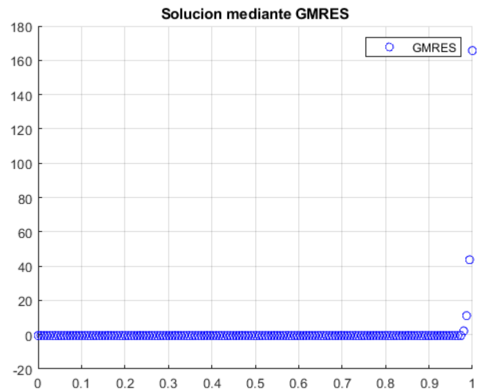


Figura 1: Aproximación mediante GMRES con $b = 2, c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante Gauss-seidel, Eliminación gaussiana y GMRES(con $b = 2,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Usando los comandos *tic* y *toc* en matlab, se obtiene que el método de gauss-seidel tarda 0,043797 segundos mientras que por eliminación gaussiana el programa tarda 0,075582 segundos y para GMRES el programa tarda 0,041499 segundos. Podemos notar que el método GMRES es el más rápido para determinar la sólución factible.

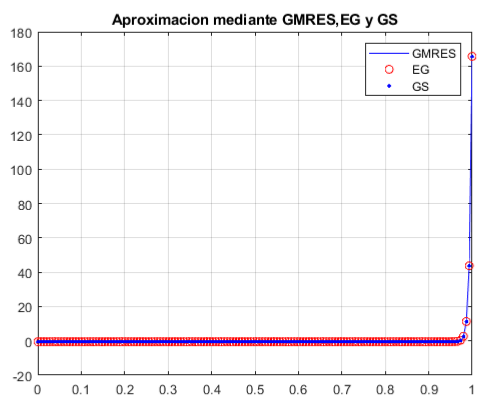


Figura 2: Aproximación po GS, EG y GMRES con $b = 2, c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante GCP (con $b = 0,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Para resolver este problema primero le asignaremos valores a las constantes c, b y d Además consideraremos un $h = \frac{1}{101}$.

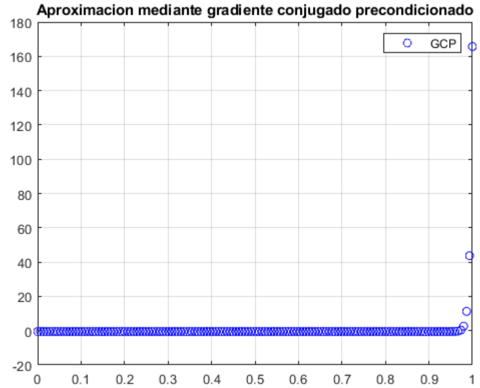


Figura 3: Aproximación mediante GCP con $b = 0, c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante Gauss-seidel, Eliminación gaussiana y GCP (con $b = 0,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Usando los comandos *tic* y *toc* en matlab, se obtiene que el método de gauss-seidel tarda 0,051712 segundos mientras que por eliminación gaussiana el programa tarda 0,054188 segundos y para gradiente conjugado precondicionado el programa tarda 0,731200 segundos.
  En este caso el método de gauss-seidel es el que menos tarda en determinar la solución factible, mientras que el método GCP es el que más tarda por casi el doble de tiempo

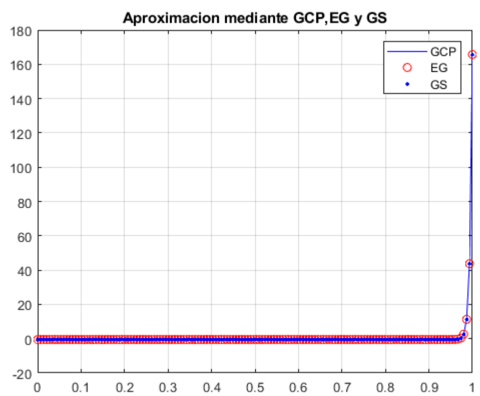


Figura 4: Aproximación mediante GS,EG y GCP con $b = 0, c = 5$ y $d = 3$

Problema 2. Encontrar $u = u(x, y)$ la solución de,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + bu_x + cu = 1, &\quad 0 < x, y < 1 \\
u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = 0 & \\
u_x(0, y) = 0,\ -u_x(1, y) + bu(1, y) = d &
\end{aligned}
$$

Solución 2. Definimos $\tilde{u}_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ como la aproximación de u en el punto (x_i, y_j).
Sea $\phi = \phi(z) \in C^4$, la cual mediante teorema de taylor se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\phi(z + h) = P_3(z + h) + R_3(z + h) \\
\phi(z - h) = P_3(z - h) + R_3(z - h)
\end{aligned}
$$

donde, $P_3(z+h)$ es,

$$P_3(z+h) = \phi(z) + \phi'(z)(z+h-z) + \frac{1}{2!}\phi''(z)(z+h-z)^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(z)(z+h-z)^3$$
$$P_3(z+h) = \phi(z) + \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3$$

de manera similar $P_3(z-h)$ es,

$$P_3(z-h) = \phi(z) + \phi'(z)(z-h-z) + \frac{1}{2!}\phi''(z)(z-h-z)^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(z)(z-h-z)^3$$
$$P_3(z-h) = \phi(z) - \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 - \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3$$

Luego para $R_3(z+h)$ y $R_3(z-h)$

$$R_3(z+h) = \frac{1}{4!}\phi''''(z+\delta(z+h-z))(z+h-z)^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\overbrace{z+\delta h}^{\tilde{z}})h^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{z})h^4$$
$$R_3(z-h) = \frac{1}{4!}\phi''''(z+\delta(z-h-z))(z-h-z)^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\overbrace{z+\delta h}^{\tilde{\tilde{z}}})h^4 = \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{\tilde{z}})h^4$$

Reemplazamos lo obtenido en las formulas iniciales y obtenemos,

$$\phi(z+h) = \phi(z) + \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 + \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{z})h^4 \tag{5}$$
$$\phi(z-h) = \phi(z) - \phi'(z)h + \frac{1}{2}\phi''(z)h^2 - \frac{1}{6}\phi'''(z)h^3 + \frac{1}{24}\phi''''(\tilde{\tilde{z}})h^4 \tag{6}$$

Sumamos (5) con (6) y obtenemos,

$$\phi''(z) = \frac{\phi(z+h) - 2\phi(z) + \phi(z-h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}\phi''''(\hat{z}) \tag{7}$$

Luego restando (5) con (6) y obtenemos,

$$\phi'(z) = \frac{\phi(z+h) - \phi(z-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}\phi'''(z) \tag{8}$$

De (7) y (8) notamos que para un h suficientemente pequeño $\phi''(z)$ seria una buena aproximación para u_{xx}, u_{yy} y u_x, luego cubrimos con una malla cuadrática de puntos (x_i, y_j) el dominio, con $0 \leq i, j \leq N+1$ donde $x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} u &\approx \tilde{u}_{i,j} \\ u_{xx} &\approx \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h^2} \\ u_{yy} &\approx \frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{h^2} \\ u_x &\approx \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{2h} \end{aligned}$$

Luego se tienen la ecuación,

$$\frac{-\tilde{u}_{i+1,j} + 2\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{-\tilde{u}_{i,j+1} + 2\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}}{h^2} = +b\left(\frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{2h}\right) + c\tilde{u}_{i,j} = 1$$

Reacomodando se obtiene,

$$-\tilde{u}_{i-1,j}\left(2+bh\right)+\tilde{u}_{ij}\left(8+2ch^2\right)+\tilde{u}_{i+1,j}\left(bh-2\right)-2\tilde{u}_{i,j+1}-2\tilde{u}_{i,j-1}=2h^2$$

despejando nuevamente , se obtiene

$$\frac{1}{h^2}\left(-\tilde{u}_{i-1,j}\left(1+\frac{1}{2}bh\right)+\tilde{u}_{ij}\left(4+ch^2\right)+\tilde{u}_{i+1,j}\left(\frac{1}{2}bh-1\right)-\tilde{u}_{i,j+1}-\tilde{u}_{i,j-1}\right)=1$$

Además, las condiciones de contorno tienen la forma,

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= u_{i,0}=0\\
u(x,1) &= u_{i,N}=0\\
u_x(0,y) &= \frac{\tilde{u}_{2,j}-\tilde{u}_{0,j}}{2h}=0 \iff u_x(0,y)=\tilde{u}_{2,j}-\tilde{u}_{0,j}=0\\
-u_x\left(1,y\right)+bu\left(1,y\right) &= \frac{-h\tilde{u}_{N+1,j}+h\tilde{u}_{N-1,j}+2bh^2\tilde{u}_{N,j}}{2h^2}=d
\end{aligned}$$

Luego, el sistema de ecuaciones aplicando las condiciones de contorno nos quedaría el siguiente sistema matricial .

$$\begin{bmatrix} S & K & & & \\ K & S & K & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & K & S & K \\ & & & K & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-1}\\ \tilde{u}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b\\ \vdots \\ \vdots \\ b\end{bmatrix}$$

Donde las matrces K y S tienen la forma

$$K=-\frac{1}{h^2}I_N,\ \tilde{u}_i=\begin{bmatrix}\tilde{u}_{i1}\\ \vdots\\ \tilde{u}_{iN}\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 1-d/h\end{bmatrix}.$$

$$S=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 3+ch^2 & -1+bh/2 & & & \\ -1-bh/2 & 4+ch^2 & -1+bh/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1-bh/2 & 4+ch^2 & -1+bh/2 \\ & & & -1-bh/2 & 3-bh/2+ch^2 \end{bmatrix}$$

- **Solución mediante GMRES (con $b = 2,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Para resolver este problema primero le asignaremos valores a las constantes c, b y d Además consideraremos un $h = \frac{1}{101}$.

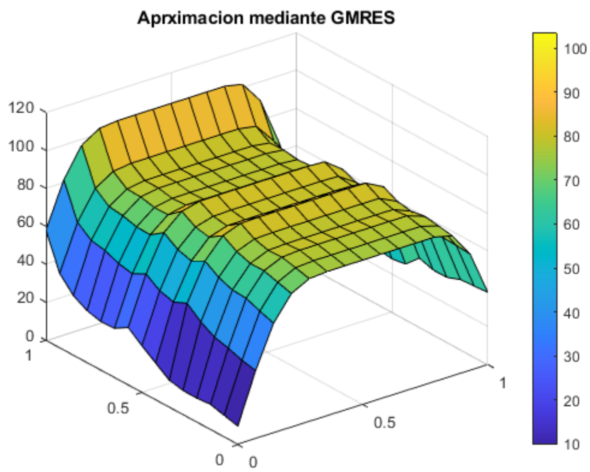
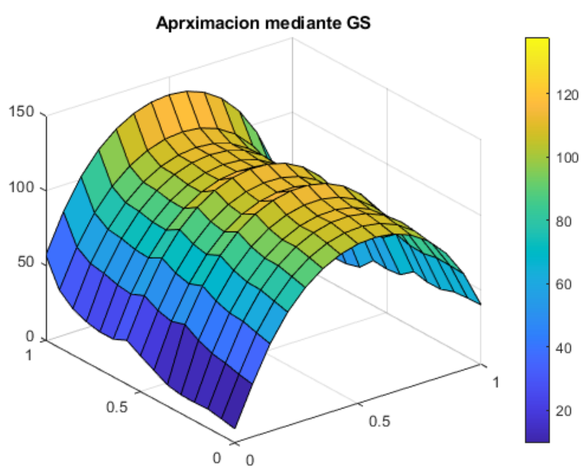
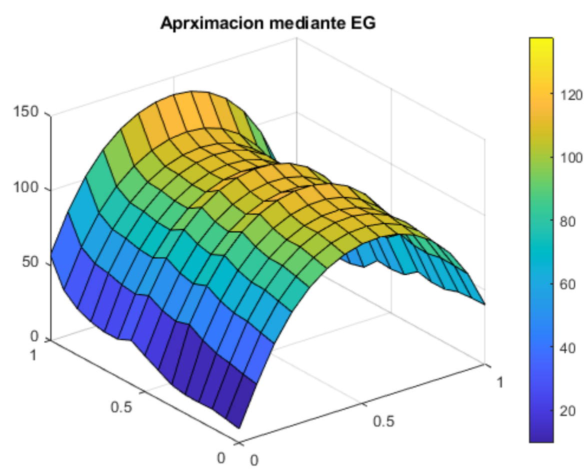


Figura 5: Aproximación mediante GMRES con $b = 2, c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante Gauss-seidel, Eliminación gaussiana y GMRES(con $b = 2,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Usando los comandos *tic* y *toc* en matlab, se obtiene que el método de gauss-seidel tarda 2,255826 segundos mientras que por eliminación gaussiana el programa tarda 0,097301 segundos y para GMRES el programa tarda 0,056980 segundos. Así notamos que el método mas rápido en este caso es el GMRES.



(a) Aproximación mediante GS



(b) Aproximación mediante EG

Figura 6: Comparación método GS, EG y GMRES con $b = 2,\ c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante GCP (con $b = 0,\ c = 5$ y $d = 3$)**
  Para resolver este problema primero le asignaremos valores a las constantes c, b y d Además consideraremos un $h = \frac{1}{101}$.

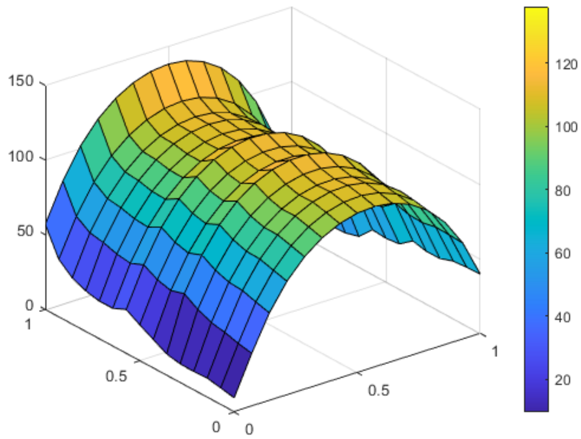
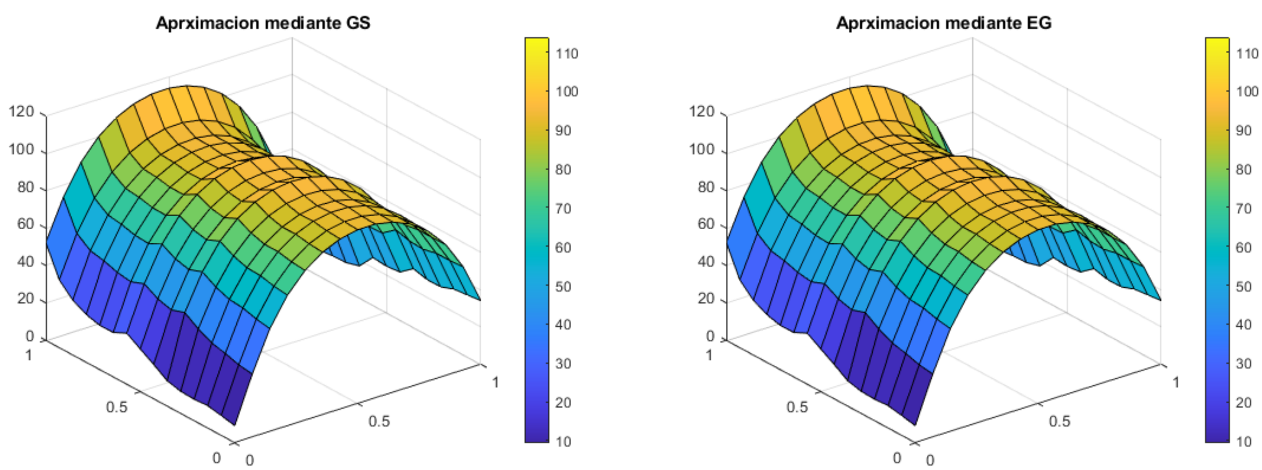


Figura 7: Aproximación mediante GCP con $b = 0, c = 5$ y $d = 3$

- **Solución mediante Gauss-seidel, Eliminación gaussiana y GCP (con $b = 0,\ c = 5$ y $d = 3$)**

Usando los comandos *tic* y *toc* en matlab, se obtiene que el método de gauss-seidel tarda 2,379718 segundos mientras que por eliminación gaussiana el programa tarda 0,095893 segundos y para gradiente conjugado precondicionado el programa tarda 0,888525 segundos, Donde se puede apreciar que el método mas rápido en este caso es el método de gradiente conjugado precondicionado.



(a) Aproximación mediante GS

(b) Aproximación mediante EG

Figura 8: Comparación método GS, EG y GMRES con $b = 0,\ c = 5$ y $d = 3$