UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 6
Análisis Real II (525302)
Espacios L^p

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, restringido a la $\sigma-$Álgebra de Borel.

Problema 1 El objetivo de este problema es demostrar el siguiente teorema

---

Teorema 1 (Desigualdad de Jensen) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Si $\mu(X) = 1$, $f : X \to (a, b)$ una función medible e integrable, y $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,*

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f \, d\mu$$

---

a) Demuestre que φ es convexa si y sólo si, para todos $s, t, u \in (a, b)$ tales que $a \leq s < t < u \leq b$, se cumple que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s}$$

Concluya que $d = \sup_{a<x<s} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(s)}{x - s} \leq \inf_{s<x<b} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(s)}{x - s} = D$. Note que φ también es una función continua (no es necesario que lo demuestre).

b) Demuestre que, para todo $\bar{x} \in (a, b)$, existe $\alpha \in [d, D]$ tal que

$$(\forall x \in [a, b]) \ \ \varphi(x) \geq \alpha(x - \bar{x}) + \varphi(\bar{x})$$

c) Defina $\bar{x} = \displaystyle\int f \, d\mu$. Demuestre que $\bar{x} \in [a, b]$.

d) Suponga que $a < \bar{x} < b$. Aplique 2) para concluir la desigualdad de Jensen.

e) Concluya el teorema en los casos $\bar{x} = a$ y $\bar{x} = b$.

Problema 2 Sean $f, g : X \to (0, +\infty]$ medibles tales que $fg \geq 1$. Demuestre que, si $\mu(X) = 1$, entonces

$$\left(\int f \, d\mu\right)\left(\int g \, d\mu\right) \geq 1$$

Problema 3 (Generalización de la Desigualdad de Hölder) Sean $p, q, r \in [1, +\infty]$ tales que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$. Demuestre que $fg \in L^r(X)$ y que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Problema 4 (Propiedad de Interpolación) Sean $p, q, r \in (0, +\infty)$ tales que $p < r < q$.

a) Demuestre que $L^p \cap L^q \subseteq L^r \subseteq L^p + L^q$.

b) Sea $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\lambda}{p} + \dfrac{\lambda}{q}$. Demuestre que, si $f \in L^p \cap L^q$, entonces

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\lambda} \|f\|_q^{\lambda}$$

Problema 5 Demuestre que, si $\mu(X) < +\infty$ y $0 < p < q < +\infty$, entonces $L^q \subseteq L^p$ y $(\forall f \in L^p)$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(X)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

Problema 6 Sea $p \in [1, +\infty)$. Demuestre que $L^\infty \subseteq L^p$ si y sólo si $\mu(X) < +\infty$.

Problema 7 Sea $p \in [1, +\infty)$ y $f \in L^p$. Demuestre que $E = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ es $\sigma-$finito, o sea, que existe una familia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\mu(E_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$.

Problema 8 Sea $f \in L^\infty$. Demuestre que $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$.

Problema 9 Demuestre que, si existe $p \in [1, +\infty)$ tal que $f \in L^p$, entonces

$$\lim_{r \to +\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty$$

Indicación: Considere los siguientes casos; $f \in L^p \cap L^\infty$ y $f \in L^p \setminus L^\infty$.

Problema 10 Considere el espacio de medida de Lebesgue, restringido a $[0, +\infty]$. Demuestre que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1 + |\ln(x)|)} \in L^p$ si y sólo si $p = 2$.

Definición 1 En el espacio de medida de conteo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ se denota l^p al espacio L^p definido en este espacio de medida.[1]

Problema 11 Sea $p \in [1, +\infty]$. Demuestre que, para $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$, se tiene que

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Problema 12 Sean $p \geq 1$, $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ y $s \in [p, +\infty]$. Demuestre que $x \in l^s$ y que $\|x\|_s \leq \|x\|_p$.
Indicación: Analice la función $f : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\forall \boldsymbol{x} = (x_i) \in \operatorname{dom} f) \;\; f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p$$

[1]Recuerde que toda función es medible en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, las cuales corresponden a sucesiones.

Problema 13 Considere que $\mu(X) < +\infty$. Sean $p \in [1, +\infty]$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos por

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; E_n = \{x \in X \mid n - 1 \leq |f(x)| < n\}$$

a) Demuestre que, si $p < +\infty$, entonces $f \in L^p$ si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(E_n) < +\infty$.

b) Demuestre que, si $p = +\infty$, entonces $f \in L^\infty$ si y sólo si $(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N)\; \mu(E_n) = 0$.

Problema 14 Considere el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. Determine para qué valores de $p \in [1, +\infty)$ se verifica que la función $f \in L^p$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Problema 15 Determine para qué valores de $p \in [1, +\infty)$ se verifica que $x = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.

---

6 de Octubre de 2014