Cálculo III – 525211
Cápsula 02: Límites y continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Contenidos

1 Límites

2 Continuidad

3 Continuidad sobre compactos de $\mathbb{R}^n$

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ una función, $\mathbf{x}_0 \in A'$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, escribiremos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$$

cuando la siguiente proposición se verdadera:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que}$$

$$\mathbf{x} \in (B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{y}_0)$$

<u>Observaciones</u>:

1. La existencia del vector $\mathbf{y}_0$ dado en la defínción no está garantizada;
2. Cuando el límite existe entonces único.

Note que podemos escribir

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in A,$$

donde $f_j : A \to \mathbb{R}$ para cada $j = 1, \ldots, m$, y definimos $\mathbf{y}_0 = (y_1, \ldots, y_m)$. Podemos probar que

$$\left(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = y_j \\ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{array} \right)$$

por lo tanto en adelante nos interesaremos principalmente en construir resultados para funciones de valores reales $f : A \to \mathbb{R}$ ya que su extensión a funciones de valores vectoriales está garantizada por la observación anterior.

Teorema

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in A'$, considere $T_1, T_2 \subseteq B$ tales que $\mathbf{x}_0 \in T_1', T_2'$ y defina las restricciones $f_1 = f|_{T_1}$ y $f_2 = f|_{T_2}$, satisfaciendo $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = L_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = L_2$. Si $L_1 \neq L_2$ entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ **no existe**.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, de la definición de límite aseguramos la existencia de $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\mathbf{x} \in (B_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow f_1(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L_1)$$

$$\mathbf{x} \in (B_{\delta_2}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow f_2(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L_2)$$

si definimos $0 < \rho \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que

$$\mathbf{x} \in (B_\rho(\mathbf{x}_0)\setminus\{\mathbf{x}_0\})\cap A \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L_1)\cap B_\varepsilon(L_2)$$

si tomamos $\epsilon = \frac{1}{2}|L_2 - L_1| > 0$, tenemos $B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset$. Lo anterior contradice la definición de limite. $\square$

Aplicación: Estudiar el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$.

Si definimos $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ y $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\,x\}$, tenemos

$$\lim_{(x,y)\overset{(x,y)\in T_1}{\to}(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\overset{(x,y)\in T_2}{\to}(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,x^2}{x^2+4\,x^2} = \frac{2}{5}$$

de lo anterior podemos concluir que el límite no existe.

Teorema

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $B \subseteq A$, sean $\mathbf{x}_0 \in A'$. $L \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$. Si existe $r > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x}) - L| \leq |g(\mathbf{x})|, \forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$$

entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L\,.$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$\mathbf{x} \in (B_\rho(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow g(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$

definamos ahora $\delta = \min\{\rho, r\}$, luego

$\mathbf{x} \in (B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (|f(\mathbf{x}) - L| < |g(\mathbf{x})|) \wedge (g(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{0})) \\ &\Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L)\,, \quad \therefore \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L\,. \quad \square \end{aligned}$$

Aplicación: Estudiar el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$.

Debido a que el númerador *tiende* a cero con orden cúbico alrededor del origen y el denomidador lo hace con orden cuadrático, conjeturamos que límite del cuociente es cero. Ahora observemos que

$$\left|\frac{x\,y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x\,y^2}{y^2}\right| = |x|\,,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{con } y \neq 0$$

Teorema

Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in A'$. Si se satisface que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$, entonces:

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = L + M$
2. Para $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (c\, f(\mathbf{x})) = c\, L$
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})) = L\, M$
4. Para $M \neq 0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L}{M}$

<u>Demostración:</u> Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ de las definiciones de límite sabemos que existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ t.q.

$$\mathbf{x} \in (B_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(L)$$

$$\mathbf{x} \in (B_{\delta_2}(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \Rightarrow g(\mathbf{x}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(M)$$

definamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $\mathbf{x} \in (B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A$, observemos que

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (L + M)\| &= \|f(\mathbf{x}) - L + g(\mathbf{x}) - M\| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}) - L\| + \|g(\mathbf{x}) - M\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

luego, $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \in B_\epsilon(L + M)$. $\square$

Teorema (límite por sucesiones)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{x}_0 \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, y, $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = L\,,$$

cualquiera sea la elección de $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema (substitución)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, tales que $f(A) \subseteq B$, $\mathbf{x}_0 \in A'$, $L \in B'$ y $M \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ y $\lim\limits_{t\to L} g(t) = M$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = M\,.$$

Demostración: Sea $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, definamos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(A)$ a través de $t_n = f(\mathbf{x}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Del Teorema anterior y las hipótesis asumidas tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = L$, análogamente al razonamiento anterior llegamos a que $\lim\limits_{n\to\infty} g(t_n) = M$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(\mathbf{x}_n)) = M$. Usando el Teorema anterior hemos probado que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = M\,.$$

Aplicación: Para estudiar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, basta definir $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, y, $f(x,y) = x^2 + y^2$, y, luego aplicar el Teorema anterior. $\square$

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, y $\mathbf{x}_0 \in A'$, se dice que $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ es *continua* en $\mathbf{x}_0$ si se satisface la siguiente condición

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\,.$$

Si $\mathbf{f}$ no es continua $\mathbf{x}_0$ entonces diremos que $\mathbf{f}$ es discontinua en $\mathbf{x}_0$, y tal discontinuidad será *evitable* cuando $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ exista.
Sea $B \subseteq A$ si $\mathbf{f}$ es continua para todo $\mathbf{z} \in B$ entonces diremos que $\mathbf{f}$ es continua en B. Si $\mathbf{f}$ es continua en todo A, entonces diremos simplmente que $\mathbf{f}$ es continua.

<u>Ejemplo:</u> Mostrar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, es continua.

Teorema

Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas, entonces

1. $f + g$ es continua
2. Para $c \in \mathbb{R}$, $c\,f$ es continua
3. $f\,g$ es continua
4. Si g no se anula en A, $\frac{f}{g}$ es continua

<u>Demostración:</u> Ejercicio. Basta usar la defínción de continuidad y operatoria de límites.

Defnición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $f : A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$ se dice que f es *acotada* sobre B si existe $M > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x})| < M \,,\; \forall\, \mathbf{x} \in B\,,$$

es decir $f(B)$ es un conjunto acotado.

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $K \subset A$ un compacto. Si f es continua en A entonces f es acotada sobre K y además existen $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in K$ tales que $f(\mathbf{x}_0) = \inf_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x})$, y, $f(\mathbf{x}_1) = \sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x})$, es decir f alcanza su mínimo y máximo sobre K.

<u>Demostración:</u> Fuera de los alcances del curso.