UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra II. 525148

29 de agosto de 2016
Prof.: Anahí Gajardo

Norma y producto interno

Definición 1 *Dado un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$*, con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*, decimos que la operación* $\langle\ ;\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *es un* producto interno (p. i.) *si satisface las siguientes propiedades.*

1. $(\forall u, v, w \in V)(\forall \lambda \in \mathbb{K})$
   a) $\langle \lambda u; v\rangle = \lambda \langle u; v\rangle$
   b) $\langle u + v; w\rangle = \langle u; w\rangle + \langle v; w\rangle$
2. $(\forall u, v \in V)\ \langle u; v\rangle = \overline{\langle v; u\rangle}$
3. $(\forall u \in V)\ \langle u; u\rangle \geq 0$
4. $(\forall u \in V)\ [\langle u; u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \Theta]$

Observamos que la propiedad **??** asegura que $\langle u; u\rangle \in \mathbb{R}$, lo que da sentido a la propiedad **??**. También observamos que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces el *conjugado* queda sin efecto en la propiedad **??**, y en ese caso la operación es simétrica.

Proposición 1 *Si* $\langle\ ;\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *es un producto interno, entonces se cumple lo siguiente:* $(\forall u, v, w \in V)(\forall \lambda \in \mathbb{K})$

1. $\langle u; \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u; v\rangle$
2. $\langle w; u + v\rangle = \langle w; u\rangle + \langle w; v\rangle$

Proposición 2 *Si* $\langle\ ;\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *es un producto interno, entonces se cumple la siguiente desigualdad llamada* desigualdad de Cauchy-Schwarz*.*

$$(\forall u, v \in V)\ |\langle u; v\rangle| \leq \sqrt{\langle u; u\rangle}\sqrt{\langle v; v\rangle}$$

Definición 2 *Dado un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*, con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*, decimos que la función* $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *es una* norma *si satisface las siguientes propiedades.*

1. $(\forall u \in V)\ \|u\| \geq 0$
2. $(\forall u \in V)\ [\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \Theta]$
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall u \in V)\ \|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$
4. $(\forall u, v \in V)\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ejemplo: en $V = \mathbb{R}^n$, la función $\|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ es una norma.

Proposición 3 *Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$, se cumple que la función definida por*

$$(\forall u \in V) \|u\| = \sqrt{\langle u; u \rangle},$$

es una norma. Tal norma la llamaremos norma inducida *por $\langle \ ; \ \rangle$.*

Proposición 4 *Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$ y norma inducida $\| \ \|$, se cumplen los siguientes:*

1. *(Pitágoras) $(\forall u, v \in V)$ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si $Re\langle u, v \rangle = 0$.*
2. *(Ley del Paralelógramo) $(\forall u, v \in V)$ $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.*
3. *$||u|| = ||v|| \Leftrightarrow \langle u+v; u-v \rangle = 0$.*

La primera propiedad nos sugiere que podemos considerar una noción de *ortogonalidad*, aunque será más conveniente pedir un poco más.

Definición 3 *Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$ y norma inducida $\| \ \|$, decimos que:*

1. u y v son ortogonales *si $\langle u; v \rangle = 0$ y entonces denotamos $u \perp v$,*
2. el conjunto $\{u_1, .., u_k\}$ es ortogonal *si $(\forall i \neq j)$ $u_i \perp u_j$ y $(\forall i \in \{1, .., k\})$ $u_i \neq \Theta$,*
3. el conjunto $\{u_1, .., u_k\}$ es ortonormal *si es ortogonal y $(\forall i \in \{1, .., k\})$ $\|u\| = 1$.*

Observación 1 *Una base ortonormal se obtiene de una base ortogonal dividiendo cada vector por su norma.*

Proposición 5 *Si $\{u_1, .., u_k\}$ es ortogonal, entonces es l.i.*

Proposición 6 *Si $\{u_1, .., u_k\}$ es ortogonal, entonces es base de $U = \langle \{u_1, .., u_k\} \rangle$ y para todo $v, w \in U$ se cumple que la i-ésima coordenada de v en la base $(u_1, .., u_k)$ es $\frac{\langle v; u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$ y además:*

$$\begin{aligned} \langle v; w \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v; u_i \rangle \overline{\langle w; u_i \rangle}}{\|u_i\|^2}, \ y \\ \|v\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v; u_i \rangle|^2}{\|u_i\|^2}. \end{aligned}$$

Definición 4 *Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$ y dado un conjunto $S \subseteq V$, definimos su* complemento ortogonal *por*

$$S^{\perp} = \{u \in V \mid (\forall s \in S) \ u \perp s\}.$$

Proposición 7 *Dado un espacio vectorial V con producto interior, dados dos conjuntos $S, S' \subseteq V$, y dado un s.e.v. U de V, se cumplen los siguientes.*

1. $\{\Theta\}^{\perp} = V$
2. $V^{\perp} = \{\Theta\}$
3. $S^{\perp}$ *es un s.e.v. de* V
4. $\langle S\rangle^{\perp} = S^{\perp}$
5. $S' \subseteq S \Rightarrow S^{\perp} \subseteq S'^{\perp}$
6. $U \cap U^{\perp} = \{\Theta\}$

Si U *y* W *son s.e.v. de* V*, entonces se cumplen las siguientes.*

6. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$
7. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

Definición 5 *Si* U *está generado por el conjunto ortogonal* $\{u_1, .., u_k\}$*, se define la* proyección ortogonal *de* v *en* U *por:*

$$Proy_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Proposición 8 *Dado* U*, generado por el conjunto ortogonal* $\{u_1, .., u_k\}$*, y* $v \in V$*, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $Proy_U(v) \in U$
2. $v - Proy_U(v) \in U^{\perp}$
3. $(\forall u \in U)\ ||v - Proy_U(v)|| \leq ||v - u||$

Esto nos permite definir un método para obtener un conjunto ortogonal a partir de un conjunto l.i.

Proposición 9 (Método de Gram-Schmidt) *Dado un conjunto l.i.* $\{v_1, .., v_k\}$ *en* V*, definimos el conjunto* $\{u_1, .., u_k\}$*, por recurrencia, como sigue.*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_{i+1} &= v_{i+1} - Proy_{\langle\{u_1,..,u_i\}\rangle}(v_{i+1}) \\ &= v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} u_j \frac{\langle v_{i+1}, u_j\rangle}{\|u_j\|^2} \end{aligned}$$

Resulta que para cada $i \in \{1, .., k\}$*,* $\{u_1, .., u_i\}$ *es ortogonal y genera el mismo espacio que* $\{v_1, .., v_i\}$*.*

Corolario 1 *Todo espacio de dimensión finita tiene alguna base ortonormal.*

Corolario 2 *Si además* V *tiene dimensión finita, entonces se cumple lo siguiente*

1. *Si* U *es un s.e.v. de* V*,* $U \oplus U^{\perp} = V$
2. *Si* $S \subseteq V$*,* $\langle S\rangle = (S^{\perp})^{\perp}$