UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

FPV/fpv 10.10.25(13:15) **PAUTA E1** **MAT 525212/525252** **Tiempo 100 minutos**

P1 (15 pts.)

1. Encontrar el valor principal de $(2i)^{2i}$;
2. Establecer que para todo número complejo $z = x + iy$

$$\sinh(y) \leq |cos(z)| \leq \cosh(y)$$

Indicación. $\forall\, a, b \in \mathbb{C}:\ \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Solución Propuesta

1. En la definición de la potencia compleja utilizamos logaritmo principal.

$$(2i)^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}(2i)} = e^{2i\left(\ln(2)+i\frac{\pi}{2}\right)}$$

[04 pts.]

realizando la aritmética compleja

$$\begin{aligned}(2i)^{2i} &= e^{-\pi}e^{i2\ln(2)}\\ &= e^{-\pi}\left[\cos(2\ln(2)) + i\sin(2\ln(2))\right]\end{aligned}$$

[04 pts.]

2. Para establecer la desigualdad de la derecha utilizamos la desigualdad triangular leída como $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

$$\begin{aligned}|\cos(z)| &= \tfrac{1}{2}\left|e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right|\\ &\leq \tfrac{1}{2}\left(e^{-y}|e^{ix}| + e^{y}|e^{-ix}|\right)\\ &= \cosh(y) \qquad \left(\because |e^{\pm ix}| = 1\right)\end{aligned}$$

[04 pts.]

Análogamente para establecer la desigualdad de la izquierda utilizamos directamente la indicación dada.

$$\begin{aligned}|\cos(z)| &= \tfrac{1}{2}\left|e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right|\\ &\geq \tfrac{1}{2}\left(e^{-y}|e^{ix}| - e^{y}|e^{-ix}|\right)\\ &= \sinh(y) \qquad \left(\because |e^{\pm ix}| = 1\right)\end{aligned}$$

[04 pts.]

P2 **(15 pts.)** Resolver la ecuación

$$z \in \mathbb{C}: \qquad \cos(z) = 2$$

Indicación: $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Solución Propuesta

Realizamos la sustitución $w = e^{iz}$ en tal caso

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{w^2+1}{w}\right)$$

y en consecuencia se debe resolver la ecuación de segundo grado

$$w^2 - 4w + 1 = 0 \iff (w-2)^2 - 3 = 0 \iff w = (2 \pm \sqrt{3}) > 0$$

[06 pts.]

Enseguida se deben resolver dos ecuaciones logarítmicas:

1. $$\begin{aligned} e^{iz} = 2 - \sqrt{3} &\iff iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i2k\pi \\ &\iff z = 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3}) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff z = 2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3}) \qquad \left(\because (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1\right) \end{aligned}$$

   [05 pts.]

2. $$\begin{aligned} e^{iz} = 2 - \sqrt{3} &\iff iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi \\ &\iff z = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

   [05 pts.]

Respuesta:

$$z = 2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

P3 **(15 pts.)** Encuentre el dominio explícito donde la siguiente función, f, es analítica (holomorfa). Además, determine $f'(-4-7i)$:

$$f(z) = \operatorname{Log}_{\frac{\pi}{4}}(iz+3)$$

Indicación: El corte de rama está en el rayo $\theta = \frac{\pi}{4}$, es decir, en el plano $\mathbb{R}^2$ es la semi recta $y = x,\ y \geq 0$.

Solución Propuesta

Dom(f) Siguiendo la indicación:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom}(f) &= \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz+3) = \operatorname{Im}(iz+3) \geq 0\} \\
&= \mathbb{C}\setminus\{x+iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-y+3+ix) = \operatorname{Im}(-y+3+ix) \geq 0\} \\
&= \mathbb{C}\setminus\{x+iy \in \mathbb{C} : -y+3 = x \geq 0\}
\end{aligned}$$

[08 pts.]

f′(z) La derivada logarítmica no depende de la rama utilizada.
Luego por regla de la cadena

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{iz+3}\frac{d(iz+3)}{dz} \\
&= \frac{i}{iz+3} = \frac{i(-i\overline{z}+3)}{|iz+3|^2} \\
&= \frac{x+i(3-y)}{y^2+(3+x)^2}
\end{aligned}$$

[04 pts.]

f′(−4 − 7i) identificando $x = -4$ e $y = -7$:

$$f'(-4-7i) = \frac{-4+i10}{116} = -\frac{1}{29} + i\frac{5}{58}$$

[04 pts.]

P4 (15 pts.) Probar que $u(x, y) = 2e^{-y}\sin(x)$ es una función armónica y encontrar la función armónica conjugada $v = v(x, y)$ tal que la función analítica $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfaga que $f(\pi + 0i) = 2i$.
Finalmente evaluar $f'(\pi + 0i)$.

Solución Propuesta

basta observar que u es parte real de la función entera

$$f(z) = -2ie^{iz} + iC, \ \big(C \in \mathbb{R}\big).$$

[08 pts.]

En consecuencia u es armónica. Utilizando el dato complementario y recordando que $e^{i\pi} = -1$ se obtiene

$$f(\pi) = 2i \iff 2i = -2ie^{i\pi} + iC = 2i + iC \iff C = 0$$

Finalmente

$$f(z) = -2ie^{iz}$$

[04 pts.]

y

$$f'(\pi) = -2ie^{iz}(i)\Big|_{z=\pi} = -2.$$

[04 pts.]