

**Listado N°1**

1. Considera el espacio  $V = \left\{ v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |v(x)|^2 dx < \infty \wedge \int_a^b |v'(x)|^2 dx < \infty \wedge v(a) = 0 \right\}$ , dotado de la norma  $\|v\|_{H^1(a,b)} := (\|v\|_{L^2(a,b)} + \|v'\|_{L^2(a,b)})^{1/2}$ .

a) Demostrar que existe  $C > 0$  tal que

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C\|v'\|_{L^2(a,b)} \quad \forall v \in V. \quad (1)$$

Obs.: Este resultado se conoce como desigualdad de Poincaré.

b) Utilizar el resultado anterior para concluir que existe  $\widehat{C} > 0$  tal que  $\|v\|_{H^1(a,b)} \leq \widehat{C}\|v'\|_{L^2(a,b)} \quad \forall v \in V$ .

2. Considera el espacio  $H^1(a, b) = \left\{ v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |v(x)|^2 dx < \infty \wedge \int_a^b |v'(x)|^2 dx < \infty \right\}$ . De un contraejemplo para mostrar que (1) no se cumple en este espacio.

3. Demostrar que (1) se cumple en los siguientes espacios.

a)  $V = \left\{ v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |v(x)|^2 dx < \infty \wedge \int_a^b |v'(x)|^2 dx < \infty \wedge v(b) = 0 \right\}$ .

b)  $H_0^1(a, b) = \left\{ v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |v(x)|^2 dx < \infty \wedge \int_a^b |v'(x)|^2 dx < \infty \wedge v(a) = v(b) = 0 \right\}$ .

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar una formulación variacional apropiada y demostrar que ésta posee solución única:

a)

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x), \quad x \in ]a, b[ \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta, \end{cases}$$

con  $f \in L^2(a, b)$ ,  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  dados. **Indicación:** Realizar un cambio de variables para llevar el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas.

b)

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x), \quad x \in ]a, b[ \\ u(a) &= 0, \\ u'(b) &= \beta, \end{cases}$$

con  $f \in L^2(a, b)$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  dados.

c)

$$\begin{cases} -u''(x) + \kappa u(x) &= f(x), \quad x \in ]a, b[ \\ u'(a) &= 0, \\ u'(b) &= 0, \end{cases}$$

con  $f \in L^2(a, b)$  y  $\kappa > 0$ . dados.

d)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -u^{(iv)}(x) & = & f(x), \quad x \in ]a, b[ \\ u(a) & = & 0, \\ u(b) & = & 0, \\ u'(a) & = & 0, \\ u'(b) & = & 0, \end{array} \right. ,$$

con  $f \in L^2(a, b)$  dado.

5. Demostrar que  $(H^1(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(a, b)})$  es un espacio de Hilbert. **Indicación:** Usar el hecho que  $(L^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(a, b)})$  es un espacio de Hilbert.