UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la Evaluación 2
ECUACIONES DIFERENCIALES II (525214, 525523), 2025-2

PROBLEMA 1. [20 puntos]
Considere el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) + h\,\partial_x T(x,t)\ ,\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ T(x,0) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\ , \end{cases}$$

donde $k > 0$, $h > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, acotada e integrable sobre $\mathbb{R}$.
Resolver este PVIF usando el método de la transformada de Fourier.
Indicación: La TF de la función gaussiana $g(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, con $a > 0$, está dada por

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\ \ ,\ \ \omega \in \mathbb{R}\ .$$

Desarrollo: Se introducen las TFs de $f(x)$ (la cual existe por la integrabilidad de f sobre $\mathbb{R}$) y de $T(x,t)$ con respecto a la variable espacial x,

$$\widehat{T}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \quad , \quad \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

Se recuerda que, bajo ciertas hipótesis sobre $x \in \mathbb{R} \mapsto T(x,t)$, se tiene

$$\widehat{(\partial_x T)}(\omega,t) = \mathrm{i}\omega\,\widehat{T}(\omega,t) \quad , \quad \widehat{(\partial_x^2 T)}(\omega,t) = \mathrm{i}\omega\,\widehat{(\partial_x T)}(\omega,t) = -\omega^2\widehat{T}(\omega,t) \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}\ .$$

Suponiendo que se puede pasar la derivada c.r.a t de la primera integral de (1) bajo el signo integral, se tiene

$$\partial_t\widehat{T}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t T(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \widehat{\partial_t T}(\omega,t)\ .$$

Paso 1: Tomando la TF de ambos miembros de la EDP, se llega a

$$\partial_t\widehat{T}(\omega,t) = (-k\omega^2 + \mathrm{i}h\,\omega)\widehat{T}(\omega,t) \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}, t > 0 \qquad \textbf{[4 puntos]}\ . \tag{2}$$

Paso 2: Al resolver la EDO de primer orden para $\widehat{T}(\omega,t)$ con ω fijo, se obtiene

$$\widehat{T}(\omega,t) = C_\omega\,\mathrm{e}^{(-k^2\omega^2+\mathrm{i}\,h\,\omega)t} \quad , \quad t \geq 0 \tag{3}$$

con $C_\omega \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. **[3 puntos]**
Paso 3: De acuerdo a (1), la CI $T(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R}$ implica

$$\widehat{T}(\omega,0) = \widehat{f}(\omega) \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}\ .$$

Reemplazando en (3), se deduce que $C_\omega = \widehat{f}(\omega)$. Luego

$$\widehat{T}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h\,\omega t}\mathrm{e}^{-kt\omega^2} \quad , \quad t \geq 0 \qquad\qquad \textbf{[3 puntos]}\ . \tag{4}$$

Paso 4: Necesitamos tomar la TF inversa del miembro derecho de (4). Para eso, usamos la propiedad

$$(\widehat{\mathcal{T}_{x_0} g_t})(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\widehat{g_t}(\omega)$$

con $\mathcal{T}_{x_0} g_t(x) = g_t(x - x_0)$ la traslada de $g_t(x)$ por $x_0 = -h\,t$, para inferir que

$$(\widehat{\mathcal{T}_{-h\,t}\, g_t})(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h\,\omega t}\mathrm{e}^{-kt\omega^2}$$

con $g_t(x)$ la TF inversa de $\widehat{g_t}(\omega) = \mathrm{e}^{-kt\omega^2}$. Por la indicación y la linealidad de la TF, esta TF inversa es la función gaussiana

$$g_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Comparando con (4) se llega a

$$\widehat{T}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)(\widehat{\mathcal{T}_{-h\,t}\, g_t})(\omega)\ . \tag{5}$$

Ahora podemos usar la propiedad de la TF del producto de convolución,

$$(\widehat{f * h})(\omega) = 2\pi\widehat{f}(\omega)\widehat{h}(\omega)$$

y la linealidad de la TF para inferir que la TF inversa de (5) está dada por

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}(f * \mathcal{T}_{-h\,t}\, g_t)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')g_t(x - x' + ht)\,\mathrm{d}x\ ,$$

esto es,

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')G(x,x';t)\mathrm{d}x' \quad , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0\ ,$$

donde la función de Green $G(x,x';t)$ está definida por

$$G(x,x';t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp\Big(-\frac{(x - x' + ht)^2}{4kt}\Big)\ . \tag{6}$$

[10 puntos]

NOTA: en el caso $h = 0$ está solución coincide con la solución del PVIF para la ecuación del calor en un bara infinita unidimensional visto en cátedra.

PROBLEMA 2. [18 puntos]

Determine la solución del siguiente PVIF modelando una cuerda vibrante semi-infinita inicialmente al reposo con un desplazamiento oscilatorio en su extermidad

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2\partial_x^2 y(x,t) = 0 \quad , \quad x > 0\ ,\ t > 0 \\ y(0,t) = \sin(\pi t) \quad , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ \partial_t y(x,0) = 0 \quad , \ x \geq 0\ . \end{cases}$$

Esboze la gráfica de la solución al tiempo $t = 1$ para $c = 1$.

Indicación: usar la solución de la ecuación de ondas del teorema de d'Alembert, $y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, donde $F : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase C^2.

Desarrollo: Se puede sin perdida de generalidad suponer $F(0) = 0$, visto que si k es una constante, la transformación $F(x) \longrightarrow F(x) - k$, $G(x) \longrightarrow G(x) + k$ no cambia la solución $y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. Las CIs implican

$$\begin{aligned} y(x,0) &= F(x) + G(x) = 0 \quad , \qquad x \geq 0 \\ \partial_t y(x,0) &= c(F'(x) - G'(x)) = 0 \quad , \quad x \geq 0 \qquad\qquad \textbf{[3 puntos]} . \end{aligned}$$

Integrando la segunda ecuación se obtiene $F(x) - G(x) = \text{cte}$ para todo $x \geq 0$. Por la primera ecuación sigue que $F(x) = -G(x) = \text{cte}$ para todo $x \geq 0$. Como $F(0) = 0$, se tiene

$$F(x) = G(x) = 0 \quad , \quad x \geq 0 \qquad\qquad \textbf{[4 puntos]} .$$

Si bien eso implica que $F = 0$ (pues la función F está definida en $\mathbb{R}_+$), eso no es el caso para G, pues esta última función está definida en todo $\mathbb{R}$. Con el fin de obtener los valores de $G(x)$ para $x \leq 0$ usamos la CF:

$$y(0,t) = F(ct) + G(-ct) = G(-ct) = \sin(\pi t) \quad , \quad t \geq 0 \qquad\qquad \textbf{[2 puntos]} .$$

Por lo tanto $G(-x) = \sin(\pi x/c)$ para todo $x \geq 0$. Así

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -\sin(x\pi/c) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad\qquad \textbf{[4 puntos]} .$$

La solución del PVIF es

$$y(x,t) = G(x-ct) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq ct \\ \sin\left(\dfrac{\pi(ct-x)}{c}\right) & \text{si } x \leq ct. \end{cases} \qquad\qquad \textbf{[3 puntos]} .$$

Gráfica de la solución para $c = t = 1$: **[2 puntos]**

PROBLEMA 3. [**22 puntos** (Preguntas 1 y 2) + **bonus 6 puntos** (Pregunta 3)]
Sea $c > 0$ y $0 \leq \kappa < 1$.

1. Considere el siguiente PVIF

$$\text{(PVIF)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = c^2\kappa^2\, y(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \; , \; t > 0 \\ y(0,t) = 0 \quad , \qquad t \geq 0 \\ y(\pi,t) = 0 \quad , \qquad t \geq 0 \\ y(x,0) = \sin(x) + \sin(3x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \partial_t y(x,0) - c\kappa\, y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

   Usando el método de separación de variables y el principio de superposición, halle una solución del PVF (tres primeras ecuaciones de (PVIF)) de la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \Big[A_n \cos(\mu_n t) + B_n \sin(\mu_n t) \Big] \sin(nx) \; , \tag{7}$$

donde $N \in \mathbb{N}^\star$, μ_n son coeficientes por determinar y $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ son constantes arbitarias.
Indicación: Se podrá usar sin demostrarlo el siguiente resultado visto en clase: los valores propios λ_n y funciones propias $u_n(x)$ del Problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

están dados por $\lambda_n = n^2$ y $u_n(x) = C_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, con $C_n \in \mathbb{R}, C_n \neq 0$.

2. Determine los coeficientes A_n y B_n de modo que $y(x,t)$ satisfaga las CIs de (PVIF) (dos últimas ecuaciones). Deduzca la solución de (PVIF).
¿ Para estos valores de A_n y B_n, la serie (7) converge cuando $N \to \infty$ y puede ser derivada término a término ? Justifique su respuesta.

3. [**6 puntos bonus**] Deduzca del resultado de la pregunta 2 una solución del siguiente PVIF modelando una cuerda vibrante de longitud π inicialmente inmóbil en presencia de fricción

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(x,t) - c^2 \partial_x^2 z(x,t) + 2\,\kappa\, c\, \partial_t z(x,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ z(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ z(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ z(x,0) = \sin(x) + \sin(3x) \quad , \quad 0 \leq x \geq \pi \\ \partial_t z(x,0) = 0 \quad , \qquad\qquad 0 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

Muestre que esta solución satisface $\lim_{t\to\infty} z(x,t) = 0$ para todo $x \in [0,\pi]$.

Indicación: hacer el cambio de variables $z(x,t) = \mathrm{e}^{-\kappa c t} y(x,t)$.

Desarrollo: 1. Aplicando separación de variables, buscamos una solución de la forma

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

donde u es una función de la variable x y v una función de la variable t. Reemplazando en la EDP, se obtiene

$$u(x)v''(t) - c^2 u''(x)v(t) = c^2\kappa^2 u(x)v(t) \ .$$

Suponga que $u(x) \neq 0 \ \forall\, x \in]0,\pi[$ y $v(t) \neq 0 \ \forall\, t > 0$. Dividiendo por $u(x)v(t)$ se llega a

$$\frac{v''(t)}{v(t)} - c^2\kappa^2 = c^2 \frac{u''(x)}{u(x)} = -c^2\lambda \ \ \forall\, x \in]0,\pi[\, , \forall\, t > 0 \ , \tag{8}$$

donde se observa que el miembro izquierdo es una función de t y el segundo miembro una función de x, de modo que ambos miembros son iguales a una constante $c^2\lambda \in \mathbb{R}$. [**3 puntos**]

Las CF implican $u(0)v(t) = u(\pi)v(t) = 0 \ \forall\ t > 0$, esto es, $u(0) = u(\pi) = 0$. Por lo tanto, $u(x)$ satisface el PSL

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases} \ . \tag{9}$$

De acuerdo con la indicación, los valores propios del PSL (9) están dados por $\lambda_n = n^2 > 0$ con $n \in \mathbb{N}^\star$ y las funciones propias son

$$u_n(x) = C_n \sin(nx) \tag{10}$$

con $C_n \in \mathbb{R}, C_n \neq 0$. **[3 puntos]**

La EDO para la función $v(t)$ en (8) se re-escribe

$$v''(t) + c^2(n^2 - \kappa^2)v(t) = 0 \,.$$

Como $n^2 \geq 1 > \kappa^2$ (recuerda que $n \in \mathbb{N}^\star$ y $0 \leq \kappa < 1$), su solución general es

$$v_n(t) = A_n \cos\big(\mu_n\, t\big) + B_n \sin\big(\mu_n\, t\big) \tag{11}$$

con $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias y $\mu_n = c\sqrt{n^2 - \kappa^2} \in \mathbb{R}$. **[4 puntos]**

Por ende, una solución del PVF es

$$y_n(x,t) = u_n(x)v_n(t) = \big[A_n \cos\big(\mu_n\, t\big) + B_n \sin\big(\mu_n\, t\big)\big] \sin(nx) \,,$$

donde tomamos sin perdida de generalidad $C_n = 1$ en (10). Visto que el PVF es homogéneo, podemos aplicar el principio de superposición. Se deduce que

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \Big[A_n \cos\big(\mu_n\, t\big) + B_n \sin\big(\mu_n\, t\big)\Big] \sin(nx) \tag{12}$$

es solución del PVF para todo $N \in \mathbb{N}^\star$ y $A_n, B_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, N$. **[3 puntos]**

2. Para que (12) satisfaga las CI, es necesario que

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(nx) &&= \sin(x) + \sin(3x) \\ \partial_t y(x,0) - c\kappa\, y(x,0) &= \sum_{n=1}^{N} (B_n\mu_n - c\kappa A_n) \sin(nx) &&= 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in [0,\pi]$. Tomando $N \to \infty$, los miembros izquierdos de estas ecuaciones son series de Fourier de funciones 2π-periódicas impares (series de senos). La función $f(x) = \sin(x) + \sin(3x)$ siendo un polinomio trigonométrico 2π-periódico impar, es igual a su serie de senos para todo $x \in \mathbb{R}$ y sus coeficientes están dados por $a_1 = a_3 = 1$, $a_n = 0$ si $n \neq 1, 3$, y $b_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$. Claramente esta serie de senos converge ya que se reduce a dos términos. Por consiguiente, la primera CI se cumple si $N \geq 3$ y

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, 3 \\ 0 & \text{si } n = 2, 4, \ldots, N. \end{cases}$$

De manera similar, $g(x) = 0$ tiene todos sus coeficientes de Fourier iguales a cero. Se deduce que $B_n\mu_n - c\kappa A_n = 0\ \forall\, n = 1, \ldots, N$. Por ende, la segunda CI se cumple si $N \geq 3$ y

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{c\kappa}{\mu_n} & \text{si } n = 1, 3 \\ 0 & \text{si } n = 2, 4, \ldots, N. \end{cases}$$ **[5 puntos]** .

Así, la serie (12) tiene dos términos no nulos ($n = 1$ y $n = 3$), por tanto ella converge cuando $N \to \infty$ y puede ser derivida término a término. **[2 puntos]**

Por lo anterior, la solución de (PVIF) está dada por

$$\begin{aligned} y(x,t) \quad = \quad & \left[\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}\,ct\right) + \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}\,ct\right)\right]\sin(x) \\ & + \left[\cos\left(\sqrt{9-\kappa^2}\,ct\right) + \frac{\kappa}{\sqrt{9-\kappa^2}}\sin\left(\sqrt{9-\kappa^2}\,ct\right)\right]\sin(3x)\;. \qquad \textbf{[2 puntos]}\;. \end{aligned} \tag{13}$$

3. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t z(x,t) \quad &= \quad \mathrm{e}^{-\kappa ct}\big(-\kappa c\, y(x,t) + \partial_t y(x,t)\big) \\ \partial_t^2 z(x,t) \quad &= \quad \mathrm{e}^{-\kappa ct}\big(\kappa^2 c^2\, y(x,t) - 2\kappa c\,\partial_t y(x,t) + \partial_t^2 y(x,t)\big)\;. \end{aligned}$$

Luego la EDP para $z(x,t)$ se transforma como

$$\mathrm{e}^{-\kappa ct}\big(-\kappa^2 c^2\, y(x,t) + \partial_t^2 y(x,t) - c^2\partial_x^2 y(x,t)\big) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi, t > 0\;,$$

esto es, en la EDP del PVIF de las preguntas anteriores. Además, las CF para z se transforman en $y(0,t) = y(\pi,t) = 0\ \forall\, t \geq 0$, ya que $\mathrm{e}^{-\kappa ct} > 0$. Finalmente, como $z(x,0) = y(x,0)$ y $\partial_t z(x,0) = -\kappa c\, y(x,0) + \partial_t y(x,0)$, las CIs se transforman en $y(x,0) = \sin(x) + \sin(3x)$ y $\partial_t y(x,0) - \kappa c\, y(x,0) = 0, 0 \leq x \leq \pi$. Así, $y(x,t)$ es solución de (PVIF).

Por (13) se deduce que

$$\begin{aligned} z(x,t) \quad = \quad & \mathrm{e}^{-\kappa ct}\left[\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}\,ct\right) + \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}\,ct\right)\right]\sin(x) \\ & + \mathrm{e}^{-\kappa ct}\left[\cos\left(\sqrt{9-\kappa^2}\,t\right) + \frac{\kappa}{\sqrt{9-\kappa^2}}\sin\left(\sqrt{9-\kappa^2}\,ct\right)\right]\sin(3x) \qquad \textbf{[4 puntos]}\;. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad del triangulo y acotando los valores absolutos de los cosenos y senos por 1, se tiene

$$|z(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-\kappa ct}\left[2 + \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{9-\kappa^2}}\right] \to 0\;,$$

mostrando que $z(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todo $x \in [0,\pi]$. **[2 puntos]**