

Elementos Finitos 521537

Tarea 3

Sea $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}^n$ acotado, considere los datos $\epsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ tal que existe $\sigma_0 > 0$ que satisface $\sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.), y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, definimos la siguiente EDO:
Encontrar $u \in H^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\epsilon \psi'' + \alpha \psi' + \sigma \psi &= f, \text{ en } \Omega \\ \psi(0) &= 0 \\ -\epsilon \psi'(1) + \frac{\alpha}{2} \psi(1) &= 1. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide lo siguiente:

1. [5 puntos] Defina una formulación variacional para (1);
2. [10 puntos] Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional de (1). (Indicación: mantenga explícitamente la dependencia de las constantes respecto a los datos);
3. [5 puntos] Defina una formulación variacional discreta para (1) sobre el espacio V_h^1 ;
4. [5 puntos] Analice existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional de (1);
5. [15 puntos] Estudie bajo qué condiciones de ϵ , α y σ la solución discreta es la *mejor aproximación* de la solución continua;
6. [10 puntos] Construya las tasas de convergencia para el error entre solución discreta y continua en la norma de $L^2(\Omega)$ y la semi-norma de $H^1(\Omega)$;
7. [10 puntos] Considere $\epsilon = 1$, $\alpha = 6$, $\sigma = 9$ y $f = 1$. Defina una malla sobre Ω tal que $h = \frac{1}{3}$. Construya el sistema lineal que determina la solución discreta, resuelvalo y grafique los resultados. (Indicación: al aplicar la condición de Dirichlet sobre el espacio discreto el sistema resultante debe estar definido por una matriz de 3×3 .)