Transformaciones Lineales

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 4, 2021

Transformaciones Lineales

Definición

Sean $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ e.v. sobre $\mathbb{K}$. Una función $T : V \to W$ se llama transformación lineal si se verifica:

a) $\forall\, u, v \in V : T(u + w) = T(u) \oplus T(v)$.

b) $\forall\, u \in V : \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda \cdot u) = \lambda \odot T(u)$.

Observación:

1. Las propiedades a) y b) juntas son equivalentes a $\forall\, u, v \in V : \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \odot T(u) \oplus T(v)$.
2. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $T(\Theta_V) = \Theta_W$. En efecto, $T(\Theta_V) = T(\Theta_V + \Theta_V) = T(\Theta_V) + T(\Theta_V) \Rightarrow T(\Theta_V) = \Theta_W$.
3. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $\forall\, u \in V : T(-u) = -T(u)$.

Observación:

2) y 3) son condiciones necesarias pero no suficientes para que $T : U \to W$ sea lineal.
Contra ejemplo: $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T(x) := \mathrm{sen}(x)$. Se verifica que $T(0) = \mathrm{sen}(0) = 0$ y $\forall\, x \in U := \mathbb{R} : T(-x) = \mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x) = -T(x)$.
Como $1 = \mathrm{sen}(\pi/2) = \mathrm{sen}(2(\pi/4)) \neq 2\,\mathrm{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}$, T no es lineal.

Núcleo e Imagen

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define el Núcleo (Kernel) de T como el conjunto

$$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in V : T(v) = \Theta_W\} \subseteq V .$$

Además, se define el conjunto imagen de T por

$$\mathrm{Im}(T) := \{w \in W : \exists\, v \in V : T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\} \subseteq W .$$

Proposición:

Sea $T : (V, +, \cdot) \to (W, \oplus, \odot)$ una transformación lineal. Entonces, $(\mathrm{Ker}(T), +, \cdot)$ y $(\mathrm{Im}(T), \oplus, \odot)$ son s.e.v. de $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$, respectivamente.

Pauta de la demostración:

Como T es lineal, $T(\Theta_V) = \Theta_W$, de donde se deduce que $\Theta_V \in \mathrm{Ker}(T)$ y $\Theta_W \in \mathrm{Im}(T)$. Esto implica que $\mathrm{Ker}(T) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$.

Veamos que $\mathrm{Im}(T)$ es s.e.v. de W:

Sean $w_1 , w_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Luego, $\exists\, v_1 , v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$.

Considerando $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$T(\lambda \cdot v_1 + v_2) = \lambda \odot T(v_1) \oplus T(v_2) = \lambda \odot w_1 \oplus w_2 \in W$. Esto permite concluir que $\lambda \odot w_1 \oplus w_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

Proposición:

Sea $T : (V,+,\cdot) \to (W,\oplus,\odot)$ una transformación lineal. Entonces,

$$T \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}.$$

Demostración:

$(\Rightarrow)$: HIPÓTESIS: T es inyectiva, i.e.
$(\forall\, u\,, v \in V \,:\, T(u) = T(v) \Rightarrow u = v) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, u\,, v \in V \,:\, u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v))$.
Sea $v \in \mathrm{Ker}(T)$. Esto significa que $T(v) = \Theta_W = T(\Theta_V)$. Como T es inyectiva, se infiere que $v = \Theta_V$. Así, $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \{\Theta_V\}$. Dado que $\{\Theta_V\} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ siempre, se concluye que $\mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.
$(\Leftarrow)$: HIPÓTESIS: $\mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.
Sean $u\,, v \in V$ tales que $T(u) = T(v)$. Esto implica que $T(u - v) = \Theta_W$, lo cual nos dice que $u - v \in \mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$, y entonces $u = v$. De aquí, se concluye que T es inyectiva.

Definiciones y notaciones:

1. $T : V \to W$ es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(T) = W$.
2. $\mathcal{L}(V, W)$ denota el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.
3. $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$.

Definición:

Una transformación lineal $T : V \to W$ es isomorfismo si es biyectiva. Un isomorfismo lineal $L : V \to V$ (i.e. $W := V$) se llama automorfismo.

Proposición:

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
T es un isomorfismo $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\} \wedge \mathrm{Im}(T) = W$.

Proposición:

Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es un isomorfismo, entonces $\exists\, T^{-1} : W \to V$ (inversa de T), la cual es también lineal y biyectiva, i.e. $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ es también un isomorfismo.

Pauta de demostración:

Primero, como T es biyección, $\exists\, T^{-1} : W \to V$.
Veamos que T^{-1} es transformación lineal. Sean $w_1\,, w_2 \in W$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego, existen $v_1\,, v_2 \in V$ tales que $T^{-1}(w_1) = v_1$ (i.e. $T(v_1) = w_1$) y $T^{-1}(w_2) = v_2$ (i.e. $T(v_2) = w_2$). Como T es transformación lineal, se tiene
$T(\lambda\, v_1 + v_2) = \lambda \odot T(v_1) \oplus T(v_2) = \lambda \odot w_1 \oplus w_2$. Esto úlimo nos dice que
$T^{-1}(\lambda \odot w_1 \oplus w_2) = \lambda\, v_1 + v_2 = \lambda\, T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$, y se concluye que T^{-1} es t.l.
Resta probar que T^{-1} es biyectiva ($\textsc{Ejercicio}$).

Ejemplo de isomorfismo lineal: Sea $T : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{m+1}$, definido para cada $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, tal que $\exists \{a_j\}_{j=0}^{m} \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + \cdots + a_m x^m$, por $T(p) := (a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Se prueba que T es una transformación lineal biyectiva. En consecuencia, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{m+1})$ es un isomorfismo.

Espacios isomorfos

Dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$, se dicen ser espacios isomorfos, denotado por $(V, +, \cdot) \cong (W, \oplus, \odot)$, si $\exists\, T \in \mathcal{L}(V, W)$ que es isomorfismo.

Del ejemplo anterior, se puede decir que $(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}), +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^{m+1}, +, \cdot)$ (con sus operaciones usuales, respectivamente).

Teorema

La relación de isomorfismo entre espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, es una relación de equivalencia.

Pauta de demostración:

Sea A el conjunto de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$\forall (V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot) \in A : (V, +, \cdot)\, \mathcal{R}\, (W, \oplus, \odot) \Leftrightarrow (V, +, \cdot) \cong (W, \oplus, \odot).$$

Pauta de demostración ...

$\mathcal{R}$ es refleja

En vista que para cualquier $(V,+,\cdot)\in A$, la función identidad $J : V \to V$, definido por $J(v) := v, \forall\, v \in V$, es lineal y biyectiva. En consecuencia J es un automorfismo. Luego, $(V,+,\cdot) \cong (V,+,\cdot)$, es decir $(V,+,\cdot)\,\mathcal{R}\,(V,+,\cdot)$.

$\mathcal{R}$ es simétrica

Sean $(V,+,\cdot),(W,\oplus,\odot)\in A$ tal que $(V,+,\cdot)\,\mathcal{R}\,(W,\oplus,\odot)$, es decir $(V,+,\cdot) \cong (W,\oplus,\odot)$, lo cual a su vez equivale a decir que $\exists\, T : (V,+,\cdot) \to (W,\oplus,\odot)$ lineal e isomorfismo. Por un resulta previo, se tiene que $T^{-1} : (W,\oplus,\odot) \to (V,+,\cdot)$ existe y es también lineal e isomorfismo. Por tanto $(W,\oplus,\odot) \cong (V,+,\cdot)$, es decir $(W,\oplus,\odot)\,\mathcal{R}\,(V,+,\cdot)$.

$\mathcal{R}$ es transitiva

Sean $(U,\boxplus,\boxdot),(V,+,\cdot),(W,\oplus,\odot)\in A$ tales que $(U,\boxplus,\boxdot)\,\mathcal{R}\,(V,+,\cdot)$ y $(V,+,\cdot)\,\mathcal{R}\,(W,\oplus,\odot)$. Esto significa que $\exists\, T_1 : U \to V$ y $\exists\, T_2 : V \to W$ ambos lineales e isomorfismos.

Afirmación: $T_3 := T_2 \circ T_1 : U \to W$ es lineal e isomorfismo

En efecto, veamos que T_3 es lineal: Sean $u_1\,,u_2 \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} T_3(\lambda \boxdot u_1 \boxplus u_2) &= T_2(T_1(\lambda \boxdot u_1 \boxplus u_2)) \\ &= T_2(\lambda \cdot T_1(u_1) + T_1(u_2)) \\ &= \lambda \odot T_2(T_1(u_1)) \oplus T_2(T_1(u_2)) \\ &= \lambda \odot (T_2 \circ T_1)(u_1) \oplus (T_2 \circ T_1)(u_2) \\ &= \lambda \odot T_3(u_1) \oplus T_3(u_2)\,. \end{aligned}$$

De esta manera, se deduce que $T_3 \in \mathcal{L}(U, W)$.
Veamos que T_3 es inyectiva: Sea $u \in \mathrm{Ker}(T_3)$. Entonces

$$T_3(u) = \Theta_W \Rightarrow T_2(T_1(u)) = \Theta_W \Rightarrow T_1(u) = \Theta_V \Rightarrow u = \Theta_U\,,$$

lo cual permite inferir que $\mathrm{Ker}(T_3) = \{\Theta_U\}$, y por tanto T_3 es inyectiva.
Veamos que T_3 es sobreyectiva: Sea $w \in W$. Como T_2 es sobreyectiva, $\exists\, v \in V$ tal que $T_2(v) = w$. A su vez, como T_1 es sobreyectiva también, $\exists\, u \in U$ tal que $T_1(u) = v$. De esta manera, se ha probado que $\exists\, u \in U\ :\ T_3(u) = (T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) = w$. Así, T_3 es sobreyectiva.
De esta manera: $T_3 \in \mathcal{L}(U, W)$ es biyectiva, i.e. un isomorfismo. Así, $(U, \boxplus, \boxdot)\,\mathcal{R}\,(W, \oplus, \odot)$.
Esto asegura que $\mathcal{R}$ es transitiva.
Conclusión: $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A.

Nulidad y Rango. Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se define

1. La nulidad de T por $n(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$.
2. El rango de T por $r(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$.

Proposición:

Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un isomorfismo. Si $B_V := \{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ es una base de V, entonces $T(B_V) := \{T(v_1), ..., T(v_m)\}$ es una base de W. Además, se tiene que $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración:

Veamos que $T(B_V)$ es l.i. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_m T(v_m) = \Theta_W \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) = \Theta_W$$
$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = \Theta_V \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_m = 0\,.$$

Ahora, en vista que $\langle T(B_V) \rangle := \langle \{T(v_1), ..., T(v_m)\} \rangle = \mathrm{Im}(T)$ (¿Por qué?), y en este caso $\mathrm{Im}(T) = W$, pues T es sobreyectiva, se concluye que $T(B_V)$ es una base de W. Como además, $|T(B_V)| = |B_V|$, se deduce también que $\dim(V) = \dim(W)$.

Corolario: Bajo los supuestos de la Proposición anterior, si $S := \{z_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ es l.i., entonces $T(S) := \{T(z_j)\}_{j=1}^k \subseteq W$ también lo es.

Teorema de la dimensión para transformaciones lineales (nulidad-rango)

Sean $(V,+,\cdot),(W,\oplus,\odot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces $\dim(V) = n(T) + r(T)$.

Demostración: Sea $B := \{w_j\}_{j\in J}$ una base de $\mathrm{Im}(T)$, con J un conjunto de índices finito. Esto induce otro conjunto $A := \{v_j\}_{j\in J} \subseteq V$, tal que $T(v_j) = w_j$, para $j \in J$.

Afirmación: A es l.i.

En efecto, sean $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j \in J$, tales que

$$\sum_{j\in J} \alpha_j\, v_j = \Theta_V \Rightarrow T\left(\sum_{j\in J} \alpha_j\, v_j\right) = T(\Theta_V) = \Theta_W$$
$$\Rightarrow \sum_{j\in J} \alpha_j\, T(v_j) = \sum_{j\in J} \alpha_j\, w_j = \Theta_W\,,$$

y como $B = \{w_j\}_{j\in J}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$, es l.i. En consecuencia, se deduce que $\alpha_j = 0$, para todo $j \in J$, y se concluye que A es l.i.

Ahora, sea $V_1 := \langle A\rangle$, y $V_2 := \mathrm{Ker}(T)$.

Afirmación: $V = V_1 + V_2$

En efecto, es suficiente con probar que $V \subseteq V_1 + V_2$ (¿Por qué?). Sea $v \in V$. Como $T(v) \in \mathrm{Im}(T) = \langle T(A)\rangle$, entonces $\exists\, \beta_j \in \mathbb{K}$, $j \in J$, tal que

$$T(v) = \sum_{j\in J} \beta_j\, T(v_j) \Rightarrow T\left(v - \sum_{j\in J} \beta_j\, v_j\right) = \Theta_W \Rightarrow v - \sum_{j\in J} \beta_j\, v_j \in \mathrm{Ker}(T) = V_2$$

Como además $\sum_{j \in J} \beta_j\, v_j \in V_1$, se deduce que

$$v \,=\, \sum_{j \in J} \beta_j\, v_j \,+\, \left(v \,-\, \sum_{j \in J} \beta_j\, v_j \right) \,\in\, V_1 \,+\, V_2\,,$$

lo cual permite implicar que $V \,\subseteq\, V_1 \,+\, V_2$, y por lo tanto $V \,=\, V_1 \,+\, V_2$.
Afirmación: $V_1 \,\cap\, V_2 \,=\, \{\Theta_V\}$
Sea $v \in V_1 \,\cap\, V_2$. Como $v \in V_1 \,=\, \langle A \rangle$, $\exists\, \gamma_j \in \mathbb{K}$, $j \in J$, tal que $v \,=\, \sum_{j \in J} \gamma_j\, v_j$. Por otro lado, $v \in V_2 \,=\, \mathrm{Ker}(T)$, lo cual implica que

$$T(v) \,=\, \Theta_W \,\Rightarrow\, \sum_{j \in J} \gamma_j\, T(v_j) \,=\, \Theta_W \,\Rightarrow\, \forall\, j \in J \,:\, \gamma_j \,=\, 0 \ \text{(¿Por qué?)} \,\Rightarrow\, v \,=\, \Theta_V\,.$$

Conclusión: $V \,=\, V_1 \,\oplus\, V_2$. De esta forma, aplicando el Teorema de Grassmann, se tiene

$$\begin{aligned} \dim(V) \,=\, \dim(V_1) \,+\, \dim(V_2) \,&=\, |J| \,+\, \dim(\mathrm{Ker}(T)) \\ &=\, \dim(\mathrm{Im}(T)) \,+\, \dim(\mathrm{Ker}(T)) \\ &=\, r(T) \,+\, n(T)\,. \end{aligned}$$

Corolario

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces, son equivalentes:

1. T es automorfismo.
2. T es inyectiva (monomorfismo).
3. T es sobreyectiva (epimorfismo).

Ejercicios

1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con $\dim(V) = 1$, y sea $T : V \to V$ transformación lineal. Demuestre que $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, w \in V \,:\, T(w) = \lambda\, w$.
2. Sean V, W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
3. Sean $(V, +, \cdot)\,, (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, de dimensión finita cada uno, B un conjunto generador de V, y $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que $T(B)$ es un conjunto generador de $\mathrm{Im}(T)$. ¿Puede decirse algo más, si además se sabe que B es una base de V? ¿Es válido el resultado en dimensión infinita?