UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

OPTIMIZACIÓN III (525151)

Ejercicios del Problema del Flujo Máximo (PFM)

P1) Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

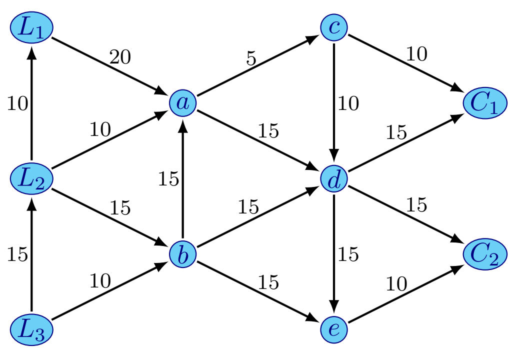
a) En una red, si la capacidad de cada arco se incrementa en $\alpha > 0$ unidades, entonces el valor máximo de un s-t-flujo también se incrementa en α unidades.

b) Toda red tiene un arco tal que el valor máximo de un s-t-flujo aumenta si sólo se incrementa su capacidad.

c) Toda red con capacidades positivas tiene un arco que al ser eliminado de la red el máximo valor de los s-t-flujos cambia.

d) Si todas las capacidades de una red son enteros positivos pares, entonces el valor de un s-t-flujo máximo es también un entero positivo par.

P2) Los laboratorios L_1, L_2 y L_3 producen un insumo médico necesario para las clínicas C_1 y C_2. Si los laboratorios producen 15, 20 y 25 unidades cada uno respectivamente ¿Es posible satisfacer la demanda de las clínicas de 25 unidades cada una, usando la siguiente red de transporte y capacidades?



P3) En la Universidad de Concepción se desea formar un comité de estudiantes, pertenecientes a diferentes carreras y de dos generaciones distintas dadas, para tratar las condiciones actuales de estudio durante la pandemia. De cada carrera se elegirá un estudiante que representará a solo una carrera. Algunos estudiantes pertenecen a más de un carrera. Por otro lado, se quiere que este comité esté integrado por igual cantidad de estudiantes de cada generación. Modele matemáticamente este problema como un problema de flujo máximo en una red y determine cuándo es posible formar dicho comité según la solución al problema de flujo máximo planteado. Suponga para ello que el número de carreras es par y que cada estudiante pertenece a sólo una generación.

P4) **(Problema del Flujo Máximo con capacidades superiores e inferiores en los arcos)**. Sea $G = (V, E)$ una red con nodo fuente $s \in V$ y nodo sumidero $t \in V$. Sean $c, l : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dos funciones de capacidad superior e inferior, respectivamente. Se desea encontrar un flujo f factible en G, es decir, un flujo tal que $l(i,j) \leq \ f(i,j) \ \leq c(i,j),\ \forall (i,j) \in E$ y además cuyo valor sea máximo.

a) Pruebe que si f es un flujo factible en G, entonces $Val(f) \leq c(S,T) - l(T,S)$ para todo corte (S,T) de G, donde $l(T,S) = \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} l(v,u)$.

b) Considere ahora red $G' = (V', E')$ con nodo fuente $s' \in V'$ y nodo sumidero $t' \in V$ construída a partir de G como sigue:

$$\begin{array}{rcl} V' & = & V \cup \{s', t'\}, \\ E' & = & E \cup \{(s',v) :\ v \in V\} \cup \{(u,t') :\ u \in V\} \cup \ \{(s,t),(t,s)\}. \end{array}$$

Además se define la función capacidad c' en G' como: $\forall (u,v) \in E$, $c'(u,v) = c(u,v) - l(u,v)$; $\forall u \in V$, $c'(s',u) = l(V, \{u\})$ y $c'(u,t') = l(\{u\}, V)$, donde $\forall A, B \subseteq V$, $l(A,B) = \sum_{u \in A, v \in B} l(u,v)$. Además, $c'(s,t) = c'(t,s) = \infty$.

Pruebe que existe un flujo factible en G si y sólo si existe un flujo máximo en G' tal que todos los arcos incidentes en t' son saturados. (Ind: considere el flujo factible f en G y el flujo máximo $f' = f - l$ en G').

c) De un algoritmo que encuentre un flujo máximo en una red con capacidades superiores e inferiores en los arcos o determine que tal flujo no existe.

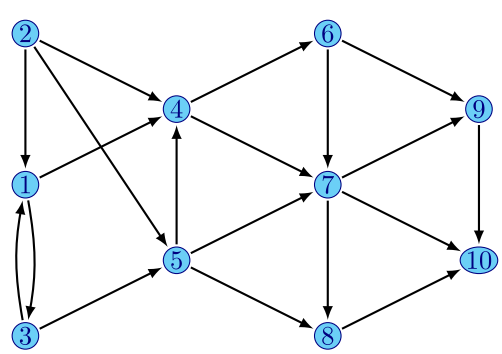
P5) **Problema de la arco-conectividad.**

Sea $G = (V, E)$ un digrafo y $u, v \in V$. Se define la u-v arco-conectividad de G como el máximo número de caminos de u a v en G tal que todo par de caminos distintos no tiene un arco en común.

a) Muestre que el problema de determinar la u-v arco-conectividad de un digrafo puede ser modelado matemáticamente como un problema de flujo máximo en una red.

b) Pruebe que la u-v arco-conectividad de G es igual al mínimo número de arcos que se requiere remover de G para eliminar los caminos de u a v.

c) Determine la 1-10 arco-conectividad en el digrafo G de la siguiente figura ¿Cuál es un conjunto mínimo de arcos que se requiere remover de G para eliminar los caminos del vértice 1 al vértice 10? Justifique sus repuestas.



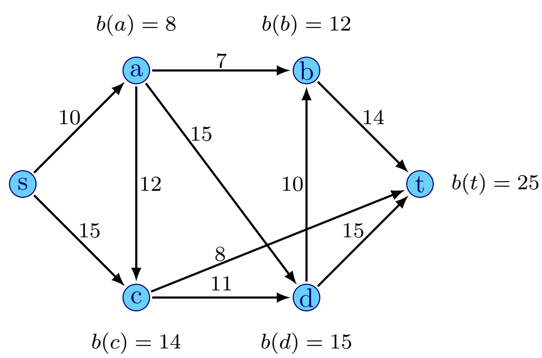
P6) **PFM con capacidades en los nodos.** Sea $G = (V, E)$ una red con función de capacidad $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ y $s, t \in V$ un nodo fuente y un nodo sumidero, respectivamente. Sea además $b : V \to \mathbb{R}_0^+$, una función capacidad en los nodos de G. El problema de Flujo Máximo con capacidad en los nodos consiste en encontrar un $s - t$ flujo $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ que verifique además la condición de capacidad en los nodos, es decir,

$$\forall u \in V \setminus \{s\} : \sum_{v:\, (v,u) \in E} f(v, u) \leq b(u),$$

y que sea de máximo valor posible.

a) Modele matemáticamente el problema PFM con capacidades en los nodos como un PFM standard.

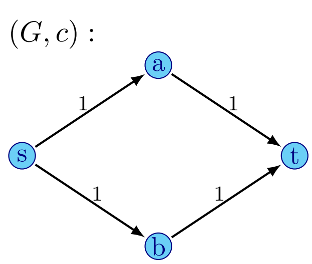
b) Para la siguiente red con capacidades en los arcos y en los nodos dados por la siguiente figura encuentre un $s - t$ flujo de valor máximo que satisfaga además las capacidades de los nodos. ¿El valor máximo de un $s - t$ flujo encontrado varía si no se consideran las capacidades en los nodos? Justifique su respuesta.

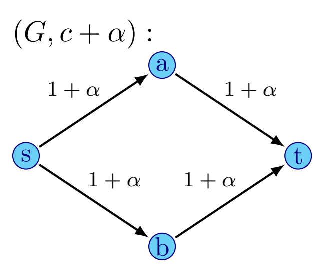


P7) *** Problema de recubrimiento de los unos de una matriz**. Dado una matriz $A \in M_n(\{0, 1\})$ se desea determinar un conjunto de cardinalidad mínima de líneas necesarias de A (donde una línea es una fila o una columna) tal que sus elementos de valor igual a 1 pertenecen a alguna de ellas. Modele este problema como un problema de flujo máximo y determine un algoritmo que encuentre una solución.

Solución

P1) *a*) **Falso.** Para la red con capacidades (G, c) dada por la siguiente figura se tiene que el valor máximo de un s-t flujo es igual a 2. Si se incrementa en $\alpha > 0$ la capacidad de cada arco, entonces el nuevo valor máximo de un s-t flujo es igual a $2 + 2\alpha \neq 2 + \alpha$.





b) **Falso.** Para la siguiente red con sus capacidades todas igual a 1, si se incrementa la capacidad de sólo uno de sus arcos (cualquiera), el valor máximo de un s-t-flujo no se incrementa y permanece igual a 1.

(G, c) :

$$s \xrightarrow{1} a \xrightarrow{1} t$$

c) **Verdadero.** Sea $(G = (V, E), c)$ una red con capacidades en los arcos y f^* un s-t flujo de valor máximo. Por el teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo sabemos que existe un (S^*, T^*) corte de la red tal que:

$$Val(f^*) = c(S^*, T^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u, v).$$

Sea $(u, v) \in E \cap S^* \times T^*$. Como por hipótesis $c(u, v) > 0$, entonces para la nueva red $G' := G - (u, v)$ con función capacidad c' dado por $\forall (a, b) \in E - \{(u, v)\},\ c'(a, b) = c(a, b)$, se tiene que (S^*, T^*) es un corte de G' con capacidad

$$c'(S^*, T^*) = \sum_{a \in S^*} \sum_{b \in T^*} c'(a, b) = c(S^*, T^*) - c(u, v) < c(S^*, T^*).$$

Luego, por teorema Flujo Máximo - Corte Mńimo se tiene en la red (G', c'):

$$\max_f Val(f) = \min_{(S,T)} c'(S, T) < c(S^*, T^*).$$

Por lo tanto, el máximo valor de un s-t flujo en (G', c') cambia (disminuye) respecto a su valor original (i.e. $Val(f^*)$).

d) **Verdadero.** Sea $(G = (V, E), c)$ una red con todas sus capacidades en los arcos igual a un entero positivo par, entonces por teorema de Flujo Máximo - Corte Mínimo se tiene que:

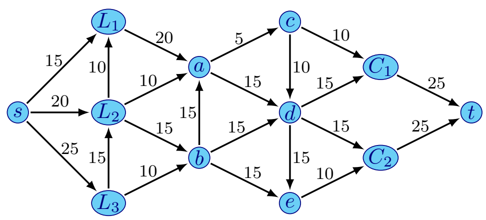
$$\max_f Val(f) = \min_{(S,T)} c(S, T) = c(S^*, T^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u, v),$$

donde (S^*, T^*) es un corte de capacidad mínima. Luego, como por hipótesis $\forall (u, v) \in E, c(u, v)$ es un entero positivo par, entonces $c(S^*, T^*)$ es también un entero positivo par, y por consiguiente también lo es el valor máximo de un s-t-flujo.

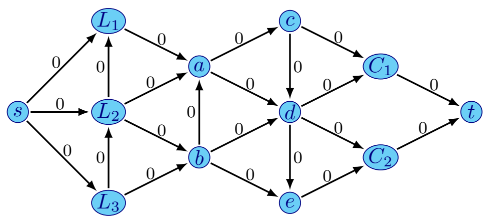
P2) Para resolver el problema construiremos la red (G, c) descrita en la siguiente figura, obtenida por agregar a la red de transporte original los vértices s y t y los arcos de la forma (s, L_i), tal que el flujo que pasará por cada uno de estos arcos corresponderá a la cantidad producida del insumo en el laboratorio L_i, y los arcos (C_j, t), donde el flujo que pase por estos arcos corresponderá a la cantidad de insumo recibida por la clínica C_j respectivamente. De esta forma, las clínicas podrán satisfacer sus demandas bajo las restricciones dadas si y solo si existe un s-t flujo de valor máximo que sature los arcos (C_1, t) y (C_2, t).

Para determinar un s-t flujo de valor máximo en (G, c) usaremos el algoritmo de Edmonds-Karp cuya ejecucción en cada iteración se muestra a continuación.

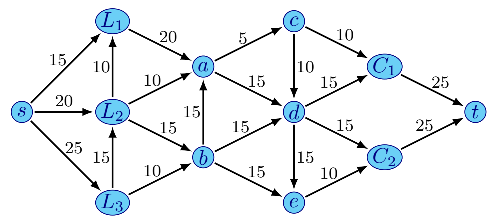
$(G, c):$



$t = 0.$ $(G, f):$

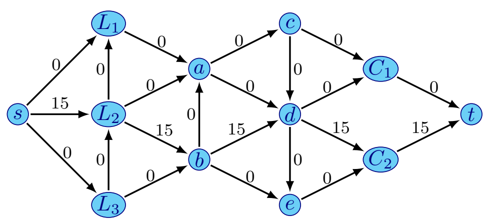


$(G_f, c_f):$

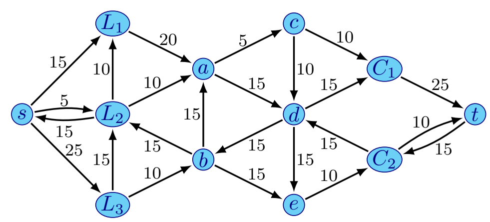


$p : s, L_2, b, d, C_2, t$
$\bar{c} = 15$

$t = 1.$ $(G, f):$

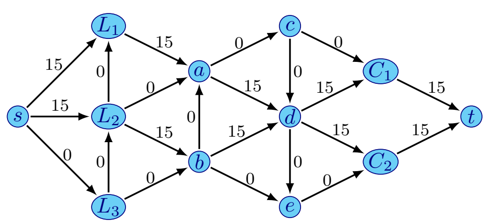


$(G_f, c_f):$

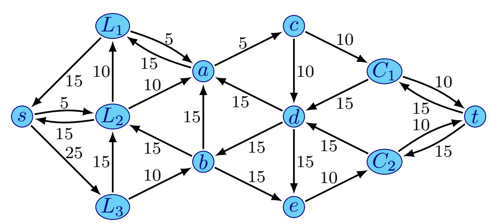


$p : s, L_1, a, d, C_1, t$
$\bar{c} = 15$

$t = 2.$ $(G, f):$

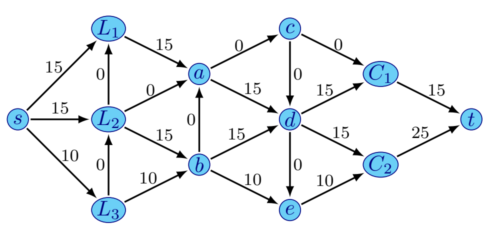


$(G_f, c_f):$

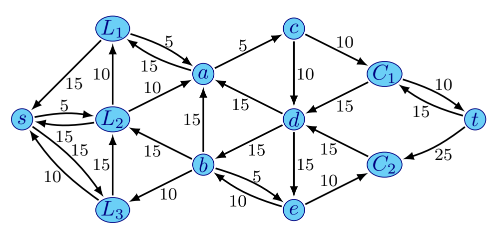


$p : s, L_3, b, e, C_2, t$
$\bar{c} = 10$

$t = 3.$ $(G, f):$

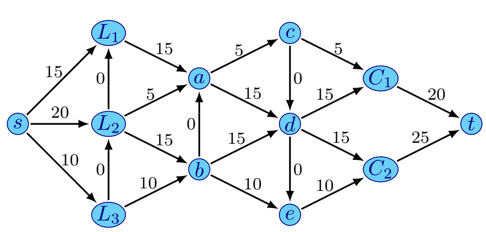


$(G_f, c_f):$

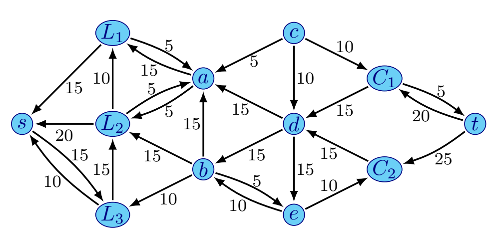


$p : s, L_2, a, c, C_1, t$
$\bar{c} = 5$

$t = 4.$ $(G, f):$



$(G_f, c_f):$



$\nexists p$

Como la última red residual no tiene camino de aumento de flujo, entonces el flujo mostrado en la red G de la iteración $t = 4$ es un s-t flujo de valor máximo. Podemos observar que este flujo no satura el arco (C_1, t) y por lo tanto no es posible satisfacer la demanda de las clinícas.

P3) Sea $C = \{c_1, \dots, c_{2p}\}$ el conjunto de carreras, $A = \{a_1, \dots, a_q\}$ el conjunto de alumnos o estudiantes pertenecientes a las generaciones dadas: g_1 y g_2. Se define la red $G = (V, A)$ por:

$$
\begin{aligned}
V =& C \cup A \cup \{g_1, g_2, s, t\} \\
E =& \{(s, c_i) : \ i = 1, \dots, p\} \ \cup \ \{(c_i, a_j) : \ c_i \in C, \ a_j \in A, \ \text{ tal que } a_j \text{ pertenece a la carrera } c_i\} \\
&\cup \{(a_i, g_k) : \ a_i \in A, \ k \in \{1, 2\}, \ \text{ tal que } a_i \text{ pertenece a la generación } g_k\} \\
&\cup \{(g_1, t), (g_2, t)\}.
\end{aligned}
$$

Además se define la función capacidad $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (s, c_i), \ (c_i, a_j), \ (a_i, g_k) \in E : \ c(s, c_i) = c(c_i, a_j) = c(a_i, g_k) = 1 \ \wedge \ c(g_1, t) = c(g_2, t) = p.$$

Mostremos ahora que es posible formar un comité de estudiantes con las restricciones dadas si y solo si (G, c) tiene un $s - t$ flujo f tal que $Val(f) = 2p$ (i.e. f es de valor máximo y satura los arcos que entran a t). En efecto, supongamos que es posible formar un comité con las condiciones descritas, entonces para cada carrera $c_i \in C$ existe un único o una única estudiante, que denotaremos $a_{j(i)}$, perteneciente a la carrera que la representa. Sea $A' \subseteq A$ el conjunto de estudiantes seleccionados que formarán el comité. Luego, $|A'| = |C| = 2p$. Para todo $a_j \in A'$ denotaremos $c_{i(j)}$ y $g_{k(j)}$ la carrera y la generación a la que pertenece a_j respectivamente. Definamos entonces la función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$
\begin{aligned}
&\forall (s, c_i) \in E : \ f(s, c_i) = 1, \\
&\forall (c_i, a_j) \in E : f(c_i, a_j) = 1 \text{ si } a_j = a_{j(i)} \in A' \ \wedge \ f(c_i, a_j) = 0 \text{ en caso contrario}, \\
&\forall (a_j, g_k) \in E : f(a_j, g_k) = 1 \text{ si } a_j \in A' \ \wedge \ f(a_j, g_k) = 0 \text{ si } a_j \notin A', \\
&f(g_1, t) = f(g_2, t) = p.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que $\forall (u, v) \in E, \ 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$. Además, se tiene que:

$$\forall c_i \in C : \sum_{u \in V} f(u, c_i) = f(s, c_i) = 1 = f(c_i, a_{j(i)}) = \sum_{a_j \in A} f(c_i, a_j),$$

es decir f es conservativo en c_i. Por otro lado, se tiene que:

$$\forall a_j \in A' : \sum_{c_i \in V} f(c_i, a_j) = f(c_{i(j)}, a_j) = 1 = f(a_j, g_{k(j)}).$$

Es decir, f es conservativo en $a_j \in A'$. Además, se tiene:

$$\forall a_j \in A \setminus A' : \sum_{c_i \in V} f(c_i, a_j) = 0 = f(a_j, g_k).$$

Es decir, f es también conservativo en $a_j \in A \setminus A'$. Por último, como hay igual cantidad de estudiantes seleccionados en cada generación que carreras, i.e. $|A'| = |C| = p$, entonces se tiene que:

$$\forall k = 1, 2 : \sum_{a_j \in V} f(a_j, g_k) = \sum_{a_j \in A'} f(a_j, g_k) = p = f(g_k, t).$$

Es decir, f es conservativo en g_k.

Por lo tanto, f es un s-t flujo y con $Val(f) = f(g_1, t) + f(g_2, t) = p + p = 2p$.

Supongamos ahora que f^* es un s-t-flujo con $Val(f^*) = 2p$, ie de valor máximo. Como las capacidades de la red son todas de valores enteros podemos suponer que el flujo f^* tiene solo valores enteros, obtenido por ejemplo al usar el algoritmo Edmonds-Karp. En particular, se tiene que:

$$\forall (s, c_i),\ (c_i, a_j),\ (a_i, g_k) \in E :\ f^*(s, c_i), f^*(c_i, a_j), f^*(a_i, g_k) \in \{0, 1\}.$$

Luego, necesariamente se tiene que $\forall (s, c_i) \in E, f^*(s, c_i) = 1$ y así por ser conservativo en los nodos $c_i \in C$ se tiene que $\forall c_i \in C, \exists!\, a_{j(i)} \in A$ tal que $f^*(c_i, a_{j(i)}) = 1$. De lo anterior se tiene que para cada carrera c_i podemos nombrar como su representante a $a_{j(i)}$ en el comité. Luego denotemos $A' = \{a_j 1 A :\ \exists c_i \in C, f^*(c_i, a_j) = 1\}$ el conjunto de los estudiantes seleccionados para formar el comité

Veamos ahora que un estudiante $a_j \in A'$ representa a solo una carrera. En efecto, como f^* es conservativo en cada $a_j \in A$ y $\forall a_j \in A, \exists! k \in \{1, 2\},\ (a_j, g_k) \in E$, entonces si $\sum_{c_j \in C} f^*(c_i, a_j) > 0$, se tiene que $\sum_{c_j \in C} f^*(c_i, a_j) = f^*(a_j, g_k) = 1$ y así $\forall a_j \in A', \exists! c_i \in C$ tal que $f^*(c_i, a_j) = 1$.

Por último, como $Val(f^*) = 2p$, entonces $\forall k = 1, 2,\ f^*(g_1, t) = f^*(g_2, t) = p$, y al ser f^* conservativo en los nodos g_k y con valores enteros en los arcos, entonces

$$\forall k = 1, 2 : \quad \sum_{a_j \in A} f^*(a_j, g_k) = \sum_{a_j \in A'} f^*(a_j, g_k) = f(g_k, t) = p,$$

i.e. para cada generación g_k hay exactamente p estudiantes de la generación que representan a una sola carrera, pues $f^*(a_j, g_k) \in \{0, 1\}$. Así, los estudiantes de A' pueden formar el comité buscado satisfaciendo todas las condiciones dadas.

P4) Sea $G = (V, E)$ una red con nodo fuente $s \in V$ y nodo sumidero $t \in V$. Sean además $c, l : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dos funciones de capacidad superior e inferior, respectivamente.

a) Sea f es un s-t flujo factible en G, entonces por resultado visto en clase se tiene para todo corte (S, T) de G que :

$$Val(f) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u) \leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} l(v, u) = C(S, T) - l(T, S).$$

b) Probemos que f es un s-t flujo factible en G si y sólo si $f' = f - l$ es un s'-t' flujo de valor máximo en G'.

Sea f' es un s'-t' flujo de valor máximo en G'. Luego, se tiene que $\forall (u, v) \in E',\ 0 \leq f'(u, v) \leq c'(u, v)$. En particular se tiene que $\forall (u, v) \in E$:

$$0 \leq f'(u, v) \leq c'(u, v) \iff 0 \leq f(u, v) - l(u, v) \leq c(u, v) - l(u, v) \iff l(u, v) \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

Por otro lado, para todo $v \in V - \{s, t\}$, como f' es conservativo en v entonces se tiene que:

$$\sum_{u \in V'} f'(u, v) = \sum_{u \in V'} f'(v, u) \iff \sum_{u \in V} f'(u, v) + f'(s', v) = \sum_{u \in V} f'(v, u) + f'(v, t').$$

Como f' es de valor máximo que satura todos los arcos incidentes en t' y dado que $c'(\{s'\}, V' - \{s'\}) = c'(V' - \{t'\}, \{t'\})$, entonces f' también satura todos los arcos que salen de s'. Luego, se tiene que: $f'(s', v) = c'(s', v) = \sum_{u \in V} l(u, v)$ y $f'(v, t') = c'(v, t') = \sum_{u \in V} l(v, u)$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\sum_{u\in V'} f'(u,v) = \sum_{u\in V} f'(u,v) + f'(s',v) = \sum_{u\in V}(f(u,v) - l(u,v)) + \sum_{u\in V} l(u,v) = \sum_{u\in V} f(u,v)$$

y

$$\sum_{u\in V'} f'(v,u) = \sum_{u\in V} f'(v,u) + f'(v,t') = \sum_{u\in V}(f(v,u) - l(v,u)) + \sum_{u\in V} l(v,u) = \sum_{u\in V} f(v,u).$$

De aquí,

$$\sum_{u\in V'} f'(u,v) = \sum_{u\in V'} f'(v,u) \Longleftrightarrow \sum_{u\in V} f(u,v) = \sum_{u\in V} f(v,u).$$

Luego, f es conservativo en $v \in V - \{s,t\}$ y por lo tanto f es un s-t flujo factible en G.

De forma análoga se puede probar que si f es un s-t flujo factible en G, entonces $f' = f - l$ es un s'-t' flujo de G' de valor máximo (ejercicio).

c) Para encontrar un flujo de valor máximo en una red con capacidades inferiores y superiores en los arcos podemos usar por ejemplo el algoritmo de Edmonds - Karp comenzando con un flujo factible (en lugar del flujo $f = 0$) que puede ser obtenido mediante el procedimiento descrito en *b*) e ir aumentando el valor del flujo mediante caminos de aumento de flujo de largo mínimo, hasta obtener un flujo de valor máximo. Esto último debe ser siempre realizado de manera que el nuevo flujo sea también factible para ello en caso de disminuir el flujo por un arco hay que procurar que el nuevo flujo sea mayor a su capacidad inferior.

P5) Sea $G = (V,E)$ un digrafo y $x, y \in V$.

a) Se define la red $G' = (V', E')$ por $V' := V \cup \{s,t\}$ y $E' := E \cup \{(s,x),(y,t)\}$. Sea además $c : E' \to \mathbb{R}_0^+$ la función capacidad defina por $\forall (u,v) \in E' \setminus \{(s,x),(y,t)\},\ c(u,v) = 1$ y $c(s,x) = \infty = c(y,t)$.

Mostremos que existe f un s-t flujo en (G',c) con $Val(f) = m$ si y sólo existen m caminos de x a y en G disjuntos por arcos dos a dos.

Sea $P = \{p_i\}_{i=1}^m$ un conjunto de m caminos disjuntos por arcos dos a dos de x a y en G. Denotemos, $E(p_i)$ el conjunto de arcos de p_i y por $E(P)$ el conjunto de arcos de todos los caminos de P. Luego, se define la función $f :\ E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E, \quad f(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) \in E(P), \\ 0 & \text{si } (u,v) \notin E(P). \end{cases}$$

Además, se define $f(s,x) = \sum_{u\in V} f(x,u)$ y $f(y,t) = \sum_{u\in V} f(u,y)$.

Por construcción se tiene que $\forall (u,v) \in E',\ 0 \le f(u,v) \le c(u,v)$. Por otro lado, sea $v \in V \setminus \{s,t,x,y\}$, luego

$$\sum_{u\in V'} f(u,v) = \sum_{u\in V} f(u,v) = \sum_{(u,v)\in E(P)} 1 = \sum_{(v,u)\in E(P)} 1 = \sum_{u\in V'} f(v,u).$$

Notar que $\sum_{(u,v)\in E(P)} 1 = \sum_{(v,u)\in E(P)} 1$ pues cada arco $(u,v) \in E(P)$ pertenece a un camino diferente que contiene a v y por ser caminos que no comparten arcos se tiene entonces que $\forall (u,v) \neq (u',v) \in E(P), \exists! (v,w) \neq (v,w') \in E(P)$ tal que cada conjunto de arcos $\{(u,v),(v,w)\}$ y $\{(u,v),(v,w)\}$ pertenece a un mismo camino. De aquí, f es conservativo en v.

Además, por definición se tiene que f es conservativo en x y en y. Por lo tanto f es un s-t flujo en (G', c). Por otro lado,

$$Val(f) = \sum_{u \in V'} f(s,u) = f(s,x) = \sum_{u \in V} f(x,u) = \sum_{(x,u) \in E(P)} f(x,u) = |P| = m.$$

Por otro lado, dado $f : E' \to \mathbb{R}_0^+$ un s-t flujo de (G', c), como $\forall (u,v) \in E' \backslash \{(s,x),(y,t)\},\ c(u,v) = 1$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\forall (u,v) \in E \backslash \{(s,x),(y,t)\},\ f(u,v) \in \{0,1\}$.

Sea $G^f = (V, E^f)$ el digrafo cuyos arcos son aquellos con flujo igual a 1, i .e. $E^f = \{(u,v) \in E : \ f(u,v) = 1\}$. Mostremos que por inducción sobre los valores de los flujos que si f es un s-t flujo de (G', c) de valor k, entonces G^f, y por consiguiente también G, tiene k caminos de x a y disjuntos por arcos dos a dos.

En efecto, sea $k = 1$ y f un s-t flujo de (G', c) con $Val(f) = 1$. Luego, $f(s,x) = 1 = \sum_{u \in V} f(x,u) = f(x, u_1)$, i. e. $(s,x), (x,u_1) \in E^f$. Supongamos que no existe un camino de s a t en G^f. Definamos $S^f := \{v \in V' : \ v \text{ es alcanzable desde } s \text{ en } G^f\}$ y $T^f := V' - S^f$. Luego, (S^f, T^f) es un corte de G', de aquí se tiene:

$$Val(f) = 1 = \sum_{u \in S^f} \sum_{v \in T^f} f(u,v) - \sum_{v \in T^f} \sum_{u \in S^f} f(v,u) \Longrightarrow \exists (u,v) \in (S^f \times T^f) \cap E.$$

Es decir, v es alcanzables desde s en G^f, lo cual es una contradicción con $v \notin S^f$. Por lo tanto, existe un camino de s a t, y por consiguiente de x a y, en G^f y así en G.

Supongamos ahora que f es un s-t flujo con $Val(f) = k + 1$. Usando el mismo argumento anterior, se puede probar que existe un camino p de s a t en G^f. Definamos $f' : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E', \quad f'(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,v) \in E(p), \\ f(u,v) & \text{si } (u,v) \notin E(p), \\ k-1 & \text{si } (u,v) \in \{(s,x),(y,t)\}. \end{cases}$$

Es fácil ver que f' es un s-t flujo en G' y que $Val(f') = k - 1$. Luego, por hipótesis de inducción, existe un conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$ de caminos de x a y en G disjuntos por arcos dos a dos y tal que $E(P) \subseteq E^{f'}$. Como $E(p) \cap E^{f'} = \emptyset$, entonces $P \cup \{p\}$ es un conjunto de $k + 1$ caminos de x a y disjuntos por arcos dos a dos.

b) De la parte *a*) se tiene que x-y arco-conectividad de G es igual el valor de máximo s-t flujo de la red G' definida previamente. Por el teorema de Flujo Máximo - Capacidad Mínima se tiene que:

$$\max_f Val(f) = \min_{(S,T)} c(S,T) = c(S^*, T^*).$$

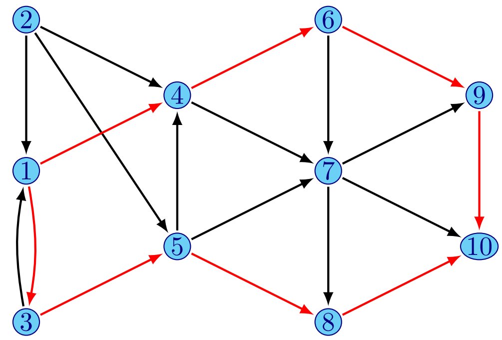
Notar que $S^* \neq \{s\}$ y $T^* \neq \{t\}$. Así se tiene que $G - \{(u,v) \in E : \ u \in S^*, \ v \in T^*\}$ no tiene camino de x a y y su capacidad

$$c(S^*, T^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u,v) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} 1 = |\{(u,v) \in E : \ u \in S^*, \ v \in T^*\}|$$

es igual al número de arcos del corte que al ser removidos de G desconecta y de x.

Por lo tanto, la x-y arco-conectividad de G es igual al mínimo número de arcos que se requiere remover de G para eliminar los caminos de x a y.

c) En la siguiente figura se muestra dos caminos (marcados en rojo) disjuntos por arcos de 1 a 10. Por otro lado, si se elimina del digrafo $(1,3)$ y $(1,4)$, entonces no existiría camino de 1 a 10. Luego por resultado en *b*) se tiene que la 1-10 arco conectividad de G es igual a 2.



P6) Sea $G = (V, E)$ una red con función de capacidad $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ y $b : V \to \mathbb{R}_0^+$. Sea además, $s, t \in V$ un nodo fuente y un nodo sumidero de G, respectivamente.

a) Se define la red $G' = (V,' E')$ por:

$$V' := V \cup \{v' : \ v \in V, \ v \neq s\},$$
$$E' := \{(s, v) : \ (s, v) \in E\} \cup \{(v, v') : \ v \in V \setminus \{s\}\} \cup \{(v', u) \in V' \times V : \ (v, u) \in E\}.$$

Además, se define $c' : E \to \mathbb{R}_0^+$, la función capacidad en los arcos de G', por:

$$\forall (s, v) \in E' : \ c'(s, v) = c(s, v),$$
$$\forall (v, v') \in E' : \ c'(v, v') = b(v),$$
$$\forall (v', u), \in E' : \ c'(v', u) = c(v, u).$$

Luego, dada $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función en los arcos de G, se define la función $f' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (s, v) \in E' : \ f'(s, v) := f(s, v),$$
$$\forall (v', u) \in E' : \ f'(v', u) := f(v, u),$$
$$\forall (v, v') \in E' : \ f'(v, v') := \sum_{u \in V} f(u, v).$$

Mostremos ahora que f es un s-t flujo de valor máximo en (G, c, b) si y sólo si f' es un s'-t' flujo de valor máximo en (G', c').
Sea f un s-t flujo de valor máximo en (G, c, b). Luego, por construcción se tiene que $\forall (s, v), (v', u), (v, u')$ E' :

$$0 \leq f'(s, v) = f(s, v) \leq c(s, v) = c'(s, v),$$
$$0 \leq f'(v', u') = f(v, u) \leq c(v, u) = c'(v, u).$$

Además, $\forall (v, v') \in E' : f'(v, v') = \sum_{u \in V} f(u, v) \leq b(v) = c(v, v')$. En resumen,

$$\forall (u, v) \in E', \ 0 \leq f'(u, v) \leq c'(u, v).$$

Por otro lado, $\forall v \in V' \setminus \{s', t'\}$, si $v \in V$ se tiene que :

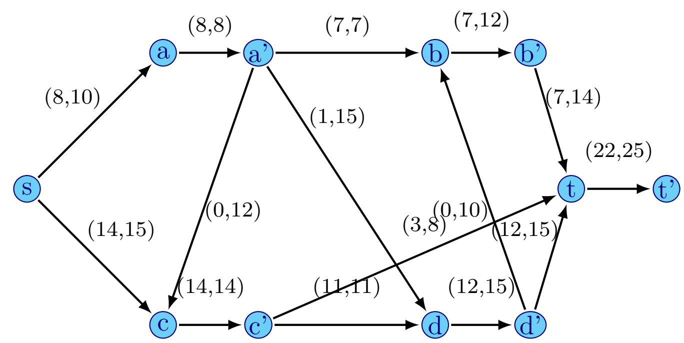
$$\sum_{u \in V'} f'(u', v) = \sum_{u \in V} f(u, v) = f'(v, v') = \sum_{u \in V'} f(v, u).$$

Es decir f' es conservativo en $v \in V$. De igual forma se prueba que f' es conservativo en $v' \in V' \setminus V$. Así, f' es conservativo en los nodos distintos de s' y t'. Por lo tanto, f' es un s'-t'

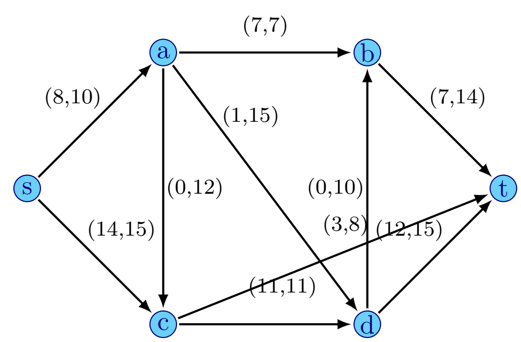
flujo en $(G,' c')$. Análogamente se puede probar que si f' es un s'-t' flujo en $(G,' c')$, entonces f es un s-t flujo factible en (G, c, b) (ejercicio).

Por último, notar que $Val(f) = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f'(s, v) = \sum_{v \in V'} f'(s, v) = Val(f')$. Por lo tanto, f es un flujo de valor máximo si y solo si f' es de valor máximo.

$b)$ La siguiente figura corresponde a la red G' descrita en $a)$. En cada arco el par ordenado correponde al flujo y capacidad del arco (f', c'). Se observar que $Val(f') = f'(s, a) + f'(s, c) = 22$. Además, como el corte $(S = \{s, a, c\}, T = V' - S)$ tiene capacidad $c' = (S, T) = c'(a, a') + c(c, c') = 22 = Val(f')$, entonces f' es un s'-t' flujo de valor máximo.



Luego, un s-t f flujo en la red original se muestra en la siguiente figura, donde cada arco tiene el par (f, c) asociado.



Es fácil chequear que los valores dados en arcos en la red G y G' corresponden efectivamente a un flujo. Además, si no consideramos la capacidad en los nodos en la red original, entonces el máximo s-t flujo tiene un valor igual a $Val(f) = 25$ mayor que el anterior.

P7) Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\{0, 1\})$, denotaremos por f_i y c_j la fila i y columna j de A respectivamente. Así, se define la red $G = (V, E)$ por:

$V :=\{f_i : \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{c_j : \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{s, t\}.$
$E :=\{(s, f_i) : \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{(f_i, c_j) : \ i, j \in \{1, \ldots, n\} \wedge a_{ij} = 1\} \cup \{(c_j, t) : \ j \in \{1, \ldots, n\}\}.$

Por otro lado, se define la función capacidad $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u, v) \in E, \quad c(u, v) = 1.$$

Dados $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y I^c, J^c sus complementos, se define $L := \{f_i : \ i \in I\} \cup \{c_j : \ j \in J\}$ un conjunto de líneas de A y (S^*, T^*) un corte de G donde $S^* := \{s\} \cup \{f_i : \ i \in I^c\} \cup \{c_j : \ i \in J\}$

y $T^* := V - S^*$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} c(S^*, T^*) = \sum_{u \in S^*} \sum_{v \in T^*} c(u, v) &= \sum_{i \in I} c(s, f_i) + \sum_{i \in I^c} \sum_{i \in J^c} c(u, v) + \sum_{j \in J} c(c_j, t) \\ &= \sum_{i \in I} 1 + \sum_{i \in I^c} \sum_{i \in J^c} (c, v) + \sum_{j \in J} 1 \\ &= |I| + \sum_{i \in I^c} \sum_{i \in J^c} c(f_i, c_j) + |J|. \end{aligned}$$

Así, L es un conjunto de líneas que cubre todos los unos de la matriz A si y sólo si $\forall\, i \in I^c$, $j \in J^c$, $(f_i, c_j) \notin E$ si y sólo si $\forall\, i \in I^c$, $j \in J^c$, $\sum_{i \in I^c} \sum_{i \in J^c} c(f_i, c_j) = 0$ si y sólo si $c(S^*, T^*) = |I| + |J|$.

Luego, si L es un conjunto de líneas que cubre todos los unos de la matriz A de cardinalidad mínima, entonces $|L| = c(S^*, T^*) = |I| + |J|$.

Por otro lado si (S, T) es un corte de G, entonces $\exists I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $S = \{s\} \cup \{f_i :\ i \in I^c\} \cup \{c_j :\ i$ y $T = V - S$ y por lo anterior $c(S, T) = |I| + \sum_{i \in I^c} \sum_{i \in J^c} c(f_i, c_j) + |J|$. Luego, si $I' = \{i \in I^c :$ $(f_i, c_j) \in E\}$, entonces para el corte (S', T') dado por $S' = \{s\} \cup \{f_i :\ i \in I^c\} \cup I' \cup \{c_j :\ i \in J\}$ y $T' = V - S'$ se tiene que $c(S', T') = |I \cup I'| + |J|$. De esta forma si (S^*, T^*) es un corte de G de capacidad mínima, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen $\exists I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $S^* = \{s\} \cup \{f_i :\ i \in I^c\} \cup \{c_j :\ i \in J\}$, $T^* = V - S^*$ y $c(S^*, T^*) = |I| + |J|$. Luego, $L = \{f_i :\ i \in I\} \cup \{c_j :\ j \in J\}$ es un conjunto de líneas que cubre todos los unos de la matriz A y de cardinalidad mínima igual a $|L| = c(S^*, T^*)$.

En resumen, determinar un conjunto L de líneas de A que contenga todos sus valores igual a 1 y que sea de cardinalidad mínima es equivalente a encontrar un corte de capacidad mínima en G. Esto último puede ser encontrado, usando por ejemplo Edmonds-Karp para determinar un s-t flujo de valor máximo en la red (G, c) y de ahí definir el corte de capacidad mínima asociado como visto en clase.