Extensión de medidas.

- **Medida exterior.**
- **Extensión de Carathéodory.**
- **Completitud de σ-álgebras.**
- **La medida de Lebesgue.**

Medida exterior.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X})$ es un espacio medible.

Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de subconjuntos de X y μ una medida en el álgebra $\mathscr{A}$. Vamos a ver que existen una **σ-álgebra** $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}$ y una **medida** μ^* **en** $\mathscr{A}^*$ **que extiende a** μ (vale decir, tal que $\mu^*(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathscr{A}$).

Para ello, primero vamos a extender μ a una función μ^* definida en todo $\mathscr{P}(X)$ que satisface los dos primeros axiomas de medida, pero no el de σ-aditividad; de hecho, en general, μ^* no es ni siquiera finitamente aditiva en $\mathscr{P}(X)$. Luego veremos que hay una σ-álgebra $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}$ tal que $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ es σ-aditiva y, por lo tanto, una medida.

Def.: Sea $\mathscr{A}$ un álgebra y μ una medida en el álgebra $\mathscr{A}$.
La **medida exterior generada por** μ es la función $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ definida $\forall B \subset X$ por

$$\mu^*(B) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j), \text{ con } E_j \in \mathscr{A},\ j \in \mathbb{N} :\ B \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right\}.$$

¡Cuidado! Pese a su nombre, las medidas exteriores no son en general medidas.

Lema: (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$; **(b)** $\forall B \subset X, \quad \mu^*(B) \geq 0.$

(c) [monotonía] $\forall A, B \subset X, \quad A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B).$

(d) [extensión] $\forall B \in \mathscr{A}, \quad \mu^*(B) = \mu(B).$

(e) [subaditividad] $\forall B_n \subset X,\ n \in \mathbb{N},\ \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$

Dem.: (b) $\forall E_j \in \mathscr{A},\ j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \geq 0 \overset{\textbf{Def. } \mu^*}{\Longrightarrow}$ **(b)**

(c) $A \subset B$ y $B \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \implies A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \overset{\textbf{Def. } \mu^*}{\Longrightarrow}$ **(c)**

(d) Sea $B \in \mathscr{A}$. $\quad B \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \overset{\textbf{Def. } \mu^*}{\Longrightarrow} \mu^*(B) \leq \mu(B).$

Recíprocamente, $\forall E_j \in \mathscr{A} : B \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \implies B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(B \cap E_j)$

$\overset{\textbf{Def. } \mu}{\Longrightarrow} \mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B \cap E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \overset{\textbf{Def. } \mu^*}{\Longrightarrow} \mu(B) \leq \mu^*(B).$

(a) Caso particular de **(d).**

(e) Sean $B_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, sean $E_{nk} \in \mathscr{A},\ k \in \mathbb{N}$:

$$B_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{nk} \quad \text{y} \quad \mu^*(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{nk}) \leq \mu^*(B_n) + \varepsilon 2^{-n}$$

$\implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{nk}\right)$ y

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \overset{\textbf{Def. } \mu^*}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(B_n) + \varepsilon 2^{-n}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n). \quad \blacksquare$$

Extensión de Carathéodory.

La medida exterior μ^* está definida para todo subconjunto de X, satisface los dos primeros axiomas de la definición de medida (**(a)** y **(b)**) y es subaditiva, pero en general no es una medida, ya que ni siquiera es finitamente aditiva.

El próximo paso es restringir μ^* a una familia $\mathscr{A}^*$: $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^* \subset \mathscr{P}(X)$, que va a resultar una σ-álgebra, sobre la que μ^* va a ser σ-aditiva.

Def.: $\mathscr{A}^* := \big\{E \subset X : \forall A \subset X,\ \ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)\big\}.$

Teor. [extensión de Carathéodory]: Sea μ una medida en el álgebra $\mathscr{A}$.
Entonces, $\mathscr{A}^*$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{A}$ y

$$\forall E_j \in \mathscr{A}^*,\ j \in \mathbb{N}, \quad \mu^*\Big(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Ej\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j).$$

Por lo tanto, μ^* es una medida en la σ-álgebra $\mathscr{A}^*$.

Dem.: Lo demostramos en varios pasos:

- **Paso 1:** $\mathscr{A}^*$ es un álgebra.
- **Paso 2:** μ^* es finitamente aditiva en el álgebra $\mathscr{A}^*$.
- **Paso 3:** $\mathscr{A}^*$ es una σ-álgebra.
- **Paso 4:** μ^* es σ-aditiva y por lo tanto una medida en la σ-álgebra $\mathscr{A}^*$.
- **Paso 5:** $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}$.

- Paso 1: Veamos que $\mathscr{A}^*$ es un álgebra.

(a) $\forall A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \setminus \emptyset) \implies \emptyset \in \mathscr{A}^*$

(b) Sea $E \in \mathscr{A}^*$. $\forall A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(\underbrace{A \cap E}_{A \setminus E^{\mathrm{c}}}) + \mu^*(\underbrace{A \setminus E}_{A \cap E^{\mathrm{c}}})$

$\implies E^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}^*$.

(c) Veamos que $\mathscr{A}^*$ es cerrado por intersección finita, pues eso y (b)

$\implies \mathscr{A}^*$ es cerrado por unión finita.

Sean $E, F \in \mathscr{A}^*$. Para demostrar que $E \cap F \in \mathscr{A}^*$, debemos ver que

$$\forall A \subset X, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \setminus (E \cap F)). \qquad \textbf{(1)}$$

Sea $A \subset X$.

$F \in \mathscr{A}^* \implies \mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F)$.

$E \in \mathscr{A}^* \implies \mu^*(A \cap F) = \mu^*((A \cap F) \cap E) + \mu^*((A \cap F) \setminus F)$.

$$\implies \mu^*(A) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \setminus F) + \mu^*(A \setminus F). \qquad \textbf{(2)}$$

Comparando **(1)** y **(2)**, se ve que hay que demostrar que

$$\mu^*(A \setminus (E \cap F)) = \mu^*((A \cap F) \setminus F) + \mu^*(A \setminus F). \qquad \textbf{(3)}$$

Reiteramos lo que hay que demostrar:

$$\mu^*(A \setminus (E \cap F)) = \mu^*((A \cap F) \setminus F) + \mu^*(A \setminus F). \qquad \textbf{(3)}$$

Sea $B := A \setminus (E \cap F) \overset{\boxed{\text{Ej.}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} B \cap F = (A \cap F) \setminus E, \\ B \setminus F = A \setminus F. \end{cases}$

$F \in \mathscr{A}^* \implies \mu^*(B) = \mu^*(B \cap F) + \mu^*(B \setminus F) \iff$ **(3)**

(a), (b), (c) $\implies$ $\mathscr{A}^*$ es un álgebra.

- Paso 2: Veamos que μ^* es finitamente aditiva en el álgebra $\mathscr{A}^*$.

Sean $E, F \in \mathscr{A}^* : E \cap F = \emptyset \implies E \,\dot\cup F \in \mathscr{A}^* \implies$

$$\mu^*(E \,\dot\cup F) = \mu^*(\underbrace{(E \,\dot\cup F) \cap E}_{E}) + \mu^*(\underbrace{(E \,\dot\cup F) \setminus E}_{F}) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

- Paso 3: Veamos que el álgebra $\mathscr{A}^*$ es una σ-álgebra.

Como $\mathscr{A}^*$ es un álgebra, basta demostrar que es cerrada por uniones numerables.
Más aún, basta considerar uniones numerables de conjuntos disjuntos. **Ej.**

Sea $E = \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ con $E_k \in \mathscr{A}^*,\ k \in \mathbb{N}$. Sean $F_n = \dot\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathscr{A}^*$.

Sea $A \subset X$. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu^*(A) \overset{F_n\in\mathscr{A}^*}{=} \mu^*(A\cap F_n) + \mu^*(A \setminus F_n)$.

μ^* finitamente aditiva $\implies \mu^*(A\cap F_n) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A\cap E_k)$.

$A\setminus F_n \supset A\setminus E \implies \mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies \mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus E)$. **(4)**

Por otra parte, como μ^* es subaditiva,

$$\mu^*(A\cap E) = \mu^*\left(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A\cap E_k)\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A\cap E_k)$$

y, por lo tanto, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E)$

$$\leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus E) \overset{(4)}{\leq} \mu^*(A) \qquad \textbf{(5)}$$

$\implies \mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E) \implies E \in \mathscr{A}^*$.

Entonces, el álgebra $\mathscr{A}^*$ es σ-aditiva y, por lo tanto, una σ-álgebra.

- Paso 4: Veamos que μ^* es σ-aditiva en $\mathscr{A}^*$.

Como en el Paso 3, sea $E = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} E_k$ con $E_k \in \mathscr{A}^*$, $k \in \mathbb{N}$,

De la desigualdad **(5)** en ese paso, se deduce que

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \setminus E) \quad \forall A \subset X,$$

de donde, tomando $A = E$, se tiene que $\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$.

- Paso 5: Veamos que $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}$.

Sea $E \in \mathscr{A}$. Para ver que $E \in \mathscr{A}^*$ debemos demostrar que

$$\forall A \subset X, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Por subaditividad, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \quad \forall A \subset X$.

Para demostrar la otra desigualdad, sean $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$.

Por la definición de μ^*, $\exists F_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}:$

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \quad \text{y} \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow A \cap E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap E) \quad \text{y} \quad A \setminus E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \setminus E)$$

$$\overset{\text{Subad.}}{\Longrightarrow} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu^*(F_n \cap E) + \mu^*(F_n \setminus E)\big)$$

$$\overset{\text{Paso 2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n) \overset{F_n \in \mathscr{A}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \subset X.$$

Entonces, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \quad \forall A \subset X \Longrightarrow E \in \mathscr{A}^*$. ■

Teor. [extensión de Hahn]: Si μ es una medida σ-finita en el álgebra $\mathscr{A}$, entonces hay una única extensión de μ a una medida en $\mathscr{A}^*$.

Dem.: T.E.C. $\Longrightarrow$ μ^* es una medida en $\mathscr{A}^*$ que extiende a μ.

Sea ν otra medida en $\mathscr{A}^*$ que extiende a μ. Vamos a demostrar que $\nu = \mu^*$.

- Paso 1: Supongamos que $\mu(X) < \infty \Longrightarrow \mu^*(X) = \mu(X) = \nu(X) < \infty$.

Sea $E \in \mathscr{A}^*$. $\forall E_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N} :\ E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ se tiene que

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

$\overset{\text{Def. } \mu^*}{\Longrightarrow}$ $\nu(E) \leq \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathscr{A}^*$. Por otra parte,

$$\mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E) = \mu^*(X) = \mu(X) = \nu(X) = \nu(E) + \nu(X \setminus E)$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq \mu^*(E) - \underbrace{\nu(E)}_{<\infty} = \nu(X \setminus E) - \underbrace{\mu^*(X \setminus E)}_{<\infty} \leq 0$$

$$\Longrightarrow\ \mu^*(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathscr{A}^* \Longrightarrow \mu^* = \nu \text{ en } \mathscr{A}^*.$$

- Paso 2: Sea μ σ-finita. Sea $X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con $X_n \in \mathscr{A}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

$$\mu(X_n) < \infty \overset{\text{Paso 1}}{\Longrightarrow} \forall E \in \mathscr{A}^*, \quad \mu^*(E \cap X_n) = \nu(E \cap X_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow\ \mu^*(E) = \lim_n \mu^*(E \cap X_n) = \lim_n \nu(E \cap X_n) = \nu(E).$$

$$\Longrightarrow\ \mu^* = \nu \text{ en } \mathscr{A}^*. \quad \blacksquare$$

Completitud de σ-álgebras.

Def.: Sea $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espacio de medida. $\mathscr{X}$ es una σ-álgebra **completa** si

$$E \in \mathscr{X} \text{ y } \mu(E) = 0 \implies \forall B \subset E,\ B \in \mathscr{X}.$$

Teor.: Dada una medida μ en el álgebra $\mathscr{A}$, la extensión de Carathéodory $\mathscr{A}^*$ es una σ-álgebra completa.

Dem.: Sea $E \in \mathscr{A}^* : \mu(E) = 0$. Sea $B \subset E$.

$$\forall A \subset X,\ \ \mu^*(A) = \underbrace{\mu^*(E)}_{=0} + \mu^*(A) \overset{\textbf{Monot.}}{\geq} \underbrace{\mu^*(A \cap B)}_{\subset B \subset E} + \mu^*(\underbrace{A \setminus B}_{\subset A}) \overset{\textbf{Subad.}}{\geq} \mu^*(A)$$

$$\implies \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \geq \mu^*(A) \quad \forall A \subset X \implies B \in \mathscr{A}^*.$$

Por lo tanto, $\mathscr{A}^*$ es completa. ■

La medida de Lebesgue.

Recordemos:

Ejemplo: Dado $\mathscr{G} := \{\emptyset\} \cup \{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R} :\ a < b\} \cup \{(-\infty, b],\ b \in \mathbb{R}\}$
$$\cup\{(a,+\infty),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\},$$
sea $\mathscr{F}$ la **familia de uniones finitas de intervalos de $\mathscr{G}$.** $\mathscr{F}$ es un álgebra.

- La longitud usual ℓ de los intervalos de $\mathscr{G}$ extendida de modo natural a $\mathscr{F}$, es una medida en el álgebra $\mathscr{F}$.

- Aplicando el Teorema de Carathéodory, se obtiene una σ-álgebra $\mathscr{F}^*$ y una medida ℓ^* en esa σ-álgebra, que extienden a $\mathscr{F}$ y a ℓ, respectivamente.

- $\mathscr{F}^*$ se denota $\mathscr{L}$ y se denomina la **σ-álgebra de Lebesgue**. A su vez, ℓ^* se denota λ y se denomina la **medida de Lebesgue.**

- Ya vimos que $\mathscr{L}$ es completa y que λ es la única extensión de ℓ a $\mathscr{L}$.

- Se tiene que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{B} \subsetneq \mathscr{L} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. (Las demostraciones de que $\mathscr{B} \neq \mathscr{L} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ pueden verse en el Cap. 17 del texto de Bartle.)

- La restricción de la medida de Lebesgue λ a la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$ también es una medida. Usualmente, se trabaja en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$.