UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 9

1. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T = Id$. Pruebe que:

   a) T es automorfismo.

   b) $V = Ker(T + Id) \oplus Ker(T - Id)$

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación definida por: $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $T(x) = Ax$.

   a) Pruebe que T es lineal.

   b) Pruebe que si B es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, entonces $[T]_{BB} = A$.

   c) Muestre que si $[T]_{BB} = A$, no necesariamente B es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

3. Sea $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) = \{e^{cx}p(x) \, : \, p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n multiplicados por la función e^{cx}. Sea $\varphi : \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$ la transformación lineal $\varphi(u) = \frac{du}{dx}$.

   a) Demuestre que $\beta = \{e^{cx}, e^{cx}x, \ldots, e^{cx}x^{n-1}, e^{cx}x^n\}$ es una base para $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$.

   b) Calcule la matriz representante de la transformación lineal $\varphi - bI$ usando la base β en el espacio de partida y de llegada.

   c) Encuentre los valores propios de φ. Concluya si φ es o no diagonalizable.

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y B una base de V. Sean además $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Pruebe que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

   b) Muestre que no necesariamente $[T \circ S]_{BB}$ es similar a $[S \circ T]_{BB}$.
   INDICACIÓN: Defina las aplicaciones S y T en función de las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
