UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2
Análisis Real II (525302)

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

- Envíe las soluciones en PDF escritas correctamente en LaTeX al correo `jorgeaguayo@udec.cl` a más tardar el sábado 22 de septiembre a las 23:59 horas (se considerarán hasta 15 minutos de atraso). Se castigarán las tareas que se entreguen atrasadas con 2 puntos de nota por cada 12 horas de atraso.
- Mencione apropiadamente los resultados que aplique en sus soluciones. Sea claro y ordenado. Se aplicarán descuentos en fallas de redacción, ortografía y digitación.
- Trabaje a conciencia. Este trabajo pretende medir cómo se ha preparado para las evaluaciones del curso.
- Los primeros 5 problemas son obligatorios y su valor es de 1.2 puntos. Los problemas 6 y 7 podrán bonificar la nota de esta tarea o, en su defecto, de las otras tareas. Sin embargo, SÓLO SE REVISARÁ UNO.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue.

Problema 1 Sea $f \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$. Demuestre que

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{g \in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu) \\ g \neq 0}} \frac{\displaystyle\int fg \, d\mu}{\|g\|_\infty}$$

Para ello, siga los siguientes pasos.

a) Una parte de la desigualdad de Hölden no fue demostrada en clase. Demuestre que $(\forall g \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu))$ $fg \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$ y

$$\int fg \, d\mu \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

b) Sea $g_0(x) = \operatorname{sgn}(f(x))$, donde

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $g_0 \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$

c) Luego, pruebe que $\displaystyle\int fg \, d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ y concluya.

Problema 2 Se define la sucesión de funciones reales $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathbb{R})\;\; f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,n]}(x)$$

a) Demuestre que la sucesión converge en medida en el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ a una función f.

b) Demuestre que no converge en $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$.

Problema 3 Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $(X, \mathcal{X}, \nu)$, $(Y, \mathcal{Y}, \mu')$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu')$ espacios de medida $\sigma-$finita, tales que $\mu' \ll \mu$ y $\nu' \ll \nu$, y los espacios de medida producto $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ y $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu' \times \nu')$.

a) Demuestre que $\mu' \times \nu' \ll \mu \times \nu$.

b) Demuestre que $\dfrac{d(\mu' \times \nu')}{d(\mu \times \nu)}(x, y) = \dfrac{d\mu'}{d\mu}(x)\,\dfrac{d\nu'}{d\nu}(y)$.

Problema 4 Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\, dxdy$$

usando la teoría de Lebesgue.

Problema 5 Sea $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se denota $\mathcal{A}(F)$ como el álgebra generada por F, es decir, el álegrba más pequeña (en el sentido de la inclusión) que contiene a F. Sean $\tilde{\mathcal{I}} = \{(a, b]\,; (-\infty, b]\,; (a, +\infty)\,; \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que $\mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}}\right) \subseteq \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}} \cup \{\{x\}\}\right)$ y que la inclusión es estricta, y que $\sigma\left(\tilde{\mathcal{I}}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{I}} \cup \{\{x\}\}\right)$.

b) Sean $\mu : \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}}\right) \to [0, +\infty]$ y $\mu_x : \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}} \cup \{\{x\}\}\right) \to [0, +\infty]$ las funciones definidas por

$$\left(\forall A \in \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}}\right)\right)\;\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ +\infty & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\left(\forall A \in \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}} \cup \{\{x\}\}\right)\right)\;\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \text{ ó } A = \{x\} \\ +\infty & \text{si } A \setminus \{x\} \neq \emptyset \end{cases}$$

Demuestre que μ y μ_x son medidas tales que $\left(\forall A \in \mathcal{A}\left(\tilde{\mathcal{I}}\right)\right)\;\mu(A) = \mu_x(A)$.

c) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$, y $\tilde{\mu}_x, \tilde{\mu}_y : \sigma\left(\tilde{\mathcal{I}}\right) \to [0, +\infty]$ las extensiones de medidas de μ_x y μ_y, respectivamente. Demuestre que $\mu_x \neq \mu_y$.

d) ¿Por qué no es posible asegurar una única extensión de μ sonre una $\sigma-$Álgebra? Justifique en función de los teoremas revisados en la clase teórica.

Problema 6 (Bonus) Sean $p \in (0, 1)$ y $q < 0$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f : X \to \mathbb{R}^+$ y $g : X \to \mathbb{R}^+$ dos funciones tales que $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Demuestre que

$$\|f\|_p \|g\|_q \leq \int fg\, d\mu$$

Indicación: Considere los casos $fg \in L^1$ y $fg \notin L^1$.

Problema 7 (Bonus) Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida $\sigma-$finita y completa, y $f, g \in L^2(X, \mathcal{X}, \mu)$. Se define la función $h : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$(\forall (x,y) \in X \times X) \;\; h(x,y) = f(x)\, g(y)\, f(y)\, g(x)$$

a) Demuestre que $h \in L^1(X \times X, \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mu \times \mu)$ y que

$$\int |h| \;\, d(\mu \times \mu) \le \|f\|_2^2 \, \|g\|_2^2$$

b) Concluya que la función $\tilde{h}(x,y) = (f(x)\, g(y) - f(y)\, g(x))^2 \in L^1(X \times X, \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}, \mu \times \mu)$.

---

7 de Noviembre de 2014