Tema Nº2: Vectores, Rectas y Planos

Espacio $\mathbb{R}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}$, espacio $\mathbb{R}^n$ se define por:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

este espacio no posee una representación cartesiana como los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los cuales están dados por:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que en el caso de $\mathbb{R}^2$, este se representa grafícamente en el plano cartesiano XY, En en el caso del espacio $\mathbb{R}^3$, este se puede representar por tres rectas mutuamente ortogonales que se intersectan en un punto, llamado origen del sistema, y dichas rectas dividen al espacio en ocho octantes.

Operatoria en $\mathbb{R}^n$

Definición

Sean $A(a_1, ..., a_n)$ y $B(b_1, ..., b_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. La suma de A y B, la cual es denotada por $A + B$, se define por:

$$A + B = (a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

Definición

Sean $A(a_1, ..., a_n)$ un punto de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto del escalar α y el punto A, el cual se denota por αA, se define por:

$$\alpha A = \alpha(a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

Propiedades

Sean A, B y C tres puntos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \theta = \theta + A = A$, siendo $\theta = (0, ..., 0)$.
4. $A + (-A) = (-A) + A = \theta$, siendo $-A$ el inverso de A.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
8. $1 \cdot A = A$

Distancia en $\mathbb{R}^n$

Definición:

Sean $A = (x_1, x_2..., x_n)$ y $B = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. La distancia entre A y B, denotada por $d(A, B)$, se define por:

$$d(A, B) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Propiedades: Dados los puntos $A, B \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

1. $d(A, B) \geq 0$
2. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $d(A, B) = d(B, A)$
4. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, donde C es cualquier punto de $\mathbb{R}^n$.

Distancia en $\mathbb{R}^n$

Demostración 2): Consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(A,B)=0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}=0 \\ &\Leftrightarrow (x_i-y_i)^2=0, \text{ para cada } i\in\{1,..,n\} \\ &\Leftrightarrow x_i=y_i, \text{ para cada } i\in\{1,..,n\} \\ &\Leftrightarrow A=B \end{aligned}$$

Dado lo anterior, se puede concluir que:

$$\forall A,B\in\mathbb{R}^n:\ \ d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$$

Demostración 3): Consideremos lo siguiente:

$$d(A,B)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}=d(B,A)$$

Dado lo anterior, se puede concluir que:

$$\forall A,B\in\mathbb{R}^n:\ \ d(A,B)=d(B,A)$$

Demostración 4):

La demostración de esta propiedad en $\mathbb{R}^n$ no la podemos realizar todavía.

Distancia en $\mathbb{R}^n$

Observación: Notemos que si consideramos los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, la definición de distancia es la misma que se definió en $\mathbb{R}^n$, de hecho:

1. si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$, se define la distancia $d(A, B)$, como sigue:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^3$, se define la distancia $d(A, B)$, como sigue:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Además, como es la misma definición podemos concluir que las propiedades enunciadas, también se cumplen en los respectivos espacios.

Vectores en $\mathbb{R}^3$

Definición

Dados los puntos $A, B \in \mathbb{R}^3$, definimos como el vector $\overrightarrow{AB}$ al segmento de recta que se inicia en el punto A y que termina en el punto B.

Observaciones:

1. Para definir un vector hay que respetar el orden en que se asignan los extremos, es decir $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.
2. Diremos que el sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ es de A a B, que su dirección es la del segmento de extremos A y B, y que su magnitud es igual a $d(A, B)$.
3. Denotaremos el vector $\overrightarrow{AB}$, como:
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^t$$
4. Si $P(a, b, c)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$, el vector de origen O y extremos P, se puede denotar por $(a, b, c)^t$.
5. A los vectores que inician en el origen, se les denomina vectores anclados al origen o en el origen y usualmente se denotan por $\vec{u}$.

Vectores en $\mathbb{R}^3$

Definición: Igualdad de Vectores

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)^t$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)^t$ en el origen de $\mathbb{R}^3$, luego:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \;\; y_1 = y_2, \;\; z_1 = z_2$$

Operatoria entre vectores

Definición

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)^t$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)^t$ dos vectores en el origen y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

1. **Producto de un escalar por un vector:**
$$\alpha\vec{u} = \alpha(x_1, y_1, z_1)^t = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)^t$$
2. **Suma de vectores:**
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1)^t + (x_2, y_2, z_2)^t = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)^t$$

Observación: se puede notar que las operaciones definidas cumplen las mismas 8 propiedades, ya que cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$ le corresponde un vector anclado al origen.

Norma de un Vector

Definición

La norma del vector $\vec{v} = (x, y, z)^t$, denotada por $\|\vec{v}\|$, se define como:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

la cual representa la distancia entre el origen y el punto $P(x, y, z)$, es decir, la longitud del vector $\vec{v}$.

Propiedades: Para vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen:

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$
2. $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0, 0)^t$
3. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Norma de un Vector

Observaciones

1. Diremos que un vector $\vec{v}$ es unitario, si $\|\vec{v}\| = 1$.
2. Si $\vec{u} = (x, y)^t$ un vector de $\mathbb{R}^2$, su norma $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa la distancia entre el origen y el punto $P(x, y)$.
3. Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos de $\mathbb{R}^3$, la distancia entre A y B es la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$, es decir,

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

4. Se llaman vectores canónicos, denotados por $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$, a los tres vectores unitarios que van del origen a los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Es importante notar que si $\vec{u} = (x, y, z)^t$, pueden ser escrito como

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ejercicios

1. Determine
   (a) el extremo del vector $\vec{u} = (-3, 4, -2)^t$ si su origen está en el punto $A(-2, 7, 0)$.
   (b) el origen del vector $\vec{v} = (2, -3, -2)^t$ si su extremo está en el punto $B(1, 1, 1)$.
2. Determine, si existen, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (según corresponda), de modo que:
   (a) $(3, 2)^t = \alpha(1, 2)^t + \beta(2, 3)^t$
   (b) $(1, 2)^t = \alpha(3, 1)^t + \beta(1, 3)^t + \gamma(4, 4)^t$
   (c) $(3, 2, 5)^t = \alpha(0, 1, 1)^t + \beta(1, 0, 1)^t + \gamma(1, 1, 0)^t$

   Represente (a) y (b) en el plano cartesiano.

Producto Interior

Definición

Dados los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)^t$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)^t$, se llama producto interior, producto punto o producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al número real, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Propiedades: Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, luego se cumplen:

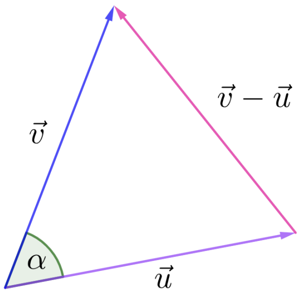
1. $\vec{u}(\lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{w}$.
2. $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
4. $\|u\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Producto Interior

Teorema

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y α la medida del menor ángulo entre ellos, entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$



Producto Interior

Demostración: Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$, vectores no nulos, como se muestra en la figura.

Luego, si aplicamos el Teorema del Coseno, en el triángulo, se tiene:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha) \qquad \cdots (1)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= \|v\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|u\|^2 \qquad \cdots (2) \end{aligned}$$

Dado lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} & \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha) \\ \Rightarrow \quad & \|v\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|u\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha) \\ \Rightarrow \quad & \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Producto Interior

Consecuencias:

1. Desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

2. Diremos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales o perpendiculares, $\vec{u} \perp \vec{v}$, si el menor ángulo que ellos forman es de 90°.

   Por el teorema anterior, se tiene que para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$ no nulos,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3. Por convenio, decimos que para todo $\vec{u}$, se tiene $\vec{0} \perp \vec{u}$.

Producto Interior

4. Sabemos que cada vector $\vec{u} = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$, se puede escribir como:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Luego, si α, β y γ son los ángulos que forman $\vec{u}$ con los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$, respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} x = \vec{u}\vec{i} = \|\vec{u}\|\|\vec{i}\| \cos(\alpha) = \|\vec{u}\| \cos(\alpha) \\ y = \vec{u}\vec{j} = \|\vec{u}\|\|\vec{j}\| \cos(\alpha) = \|\vec{u}\| \cos(\beta) \\ z = \vec{u}\vec{k} = \|\vec{u}\|\|\vec{k}\| \cos(\alpha) = \|\vec{u}\| \cos(\gamma) \end{aligned}$$

dado lo anterior, podemos notar que:

$$\vec{u} = \|u\|(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))^t = \|u\|\vec{v}$$

donde $\vec{v}$ es un vector unitario y por ende:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

finalmente, los ángulos α, β y γ se llaman ángulos directores de $\vec{u}$ y sus cosenos son los cosenos directores de $\vec{u}$.

Paralelismo y Proyección

Definición: Paralelismo

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{o} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

Definición: Proyección

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$, denotada por $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$, es igual a:

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

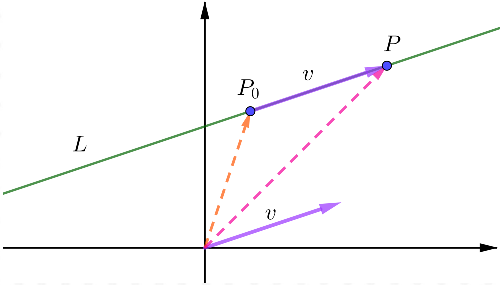
Rectas en $\mathbb{R}^3$

Definición

Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $P(x, y, z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si L es la recta que pasa por el punto P_0 y P, y es paralela al vector $\vec{v}$ ssi, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

la ecuación anterior, se denomina ecuación vectorial de la recta L.



Ejercicios

1. Determine la ecuación paramétrica de la recta L de ecuación general $2x + 3y + 6 = 0$.
2. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(1, 2, 0)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 5, 0)^t$.
3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(1, 2, 0)$ y es paralela al vector $\vec{w} = (1, 0, -1)^t$.
4. Determine la ecuación de la recta que contiene a los puntos $P_1(2, -3, 4)$ y $P_2(1, -2, 0)$.
5. Determine, si existe, la intersección entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 5t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Producto Vectorial

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Queremos determinar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, es decir, queremos encontrar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$(x, y, z) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 0 \quad \text{y} \quad (x, y, z) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0$$

Al determinar el vector $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$, se puede concluir que:

$$(x, y, z)^t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Producto Vectorial

Definición:

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial o producto cruz de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (en ese orden), denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, como el vector:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)^t$$

Propiedades Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego se cumplen:

1. $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$
3. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
4. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Producto Vectorial

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y α la medida del menor ángulo entre ellos, entonces:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$$

Aplicaciones

1. **Área de un Triángulo:**

   Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Si consideramos el triángulo que ellos determinan, su área está dada por:

   $$A_T = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

2. **Área de un Paralelogramo:**

   Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Si consideramos el paralelogramo que ellos determinan, su área está dada por:

   $$A_P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

3. **Volumen del Paralelepípedo:**

   Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, no coplanares. Si consideramos el paralelepípedo que ellos determinan, su volumen está dado por:

   $$V_P = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

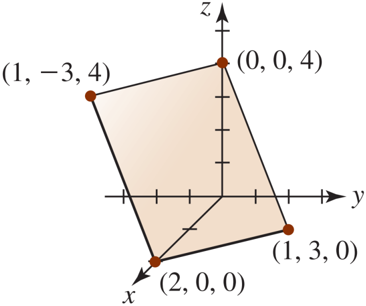
Ejercicios

1. Sea T el triángulo cuyos vértices son

$$A(1,2,1), \quad B(0,0,3) \quad \text{y} \quad C(1,-1,1)$$

   (a) Calcule el perímetro y área del triángulo T.
   (b) ¿Es T un triángulo rectángulo?

2. Muestre que el cuadrilátero es un paralelogramo



luego, determine su área.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Definición

Sea Π el plano con vector normal $\vec{n}$ y $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano Π. Entonces para todo punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

Si $\vec{n} = (a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3$, con $\vec{n} \neq \theta$, el vector normal del plano, luego para todo punto $P(x, y, z)$ del espacio $\mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P \in \Pi &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = d \end{aligned}$$

esta ecuación se conoce como ecuación cartesiana del plano.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Observación: Si consideramos los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tres puntos del espacio $\mathbb{R}^3$, tales que $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ no son paralelos, el producto cruz entre ellos $\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$, es ortogonal al plano. Luego, la ecuación del plano que pasa por P_0, P_1 y P_2, es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal con $\vec{n} = (a, b, c)^t$, es decir:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

Ejercicios

1. Determine la ecuación cartesiana del plano que contiene el punto $P(4,-1,3)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}=(2,8,-5)^t$.
2. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,2,0)$ y $C(1,1,2)$
3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es paralela a la recta que resulta de intersectar los planos
$$\Pi_1 : x+y+2z=1 \quad \text{y} \quad \Pi_2 : 2x+y+z=2$$
4. Encuentre, si existe, el punto de intersección del plano
$$\Pi : 3x-2y+z=-5$$
y la recta $L : x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{4}$.

Ejercicios

5. Determine la distancia entre el punto $P(2,1,4)$ y el plano

$$\Pi : x - 3y + z - 6 = 0$$

6. Determine la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $A(1,-3,2)$ y que contiene a dos rectas cuyos vectores directores son $\vec{v} = (2,1,0)^t$ y $\vec{w} = (-1,0,3)^t$.

7. Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,1,2)$ y a la recta $x - 2 = 3 - y = \frac{4-z}{3}$.

8. Dada la recta L_a definida por:

$$L_a : \begin{cases} 3x + ay + z & = 1 \\ 2x + 6y - 2z & = 6 \end{cases}$$

determine, si existe, el valor de a de modo que L_a este incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 1$.

Ejercicios

Solución 2: Para determinar la ecuación del plano necesitamos el vector normal, dado por:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,2,0)^t \times (1,1,2)^t = (4,-4,0)^t$$

luego, como el plano pasa por A, B y C podemos escribir el plano en función de cualquiera de ellos, como sigue:

- que pase por A:

$$\Pi : 4x - 4y = 0$$

- que pase por B:

$$\Pi : 4(x-2) - 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow \Pi : 4x - 4y = 0$$

- que pase por C:

$$\Pi : 4(x-1) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow \Pi : 4x - 4y = 0$$

Ejercicios

Solución 3: Primero debemos determinar la recta que resulta de intersectar los planos, para esto consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

ahora bien, aplicando la siguiente operación elemental a la matriz ampliada, $-2f_1 + f_2 \to f_2$, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Así, de la ecuación (2) se tiene que $y = -3z$ y luego reemplazando en (1), se tiene $x - 3z + 2z = 1 \Leftrightarrow x = 1 + z$.

Ejercicios

Por último la recta queda dada por:

$$L : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Finalmente, para determinar una recta L_1 paralela a L, debemos considerar el mismo vector director de L y el punto que nos entregan, $P(2, 3, 4)$. Por lo tanto:

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicios

Solución 6: Notemos que de acuerdo a la información entregada ya tenemos dos vectores que estan contenidos en el plano, por ende podemos hacer producto cruz entre ellos y obtener el vector normal del plano, es decir,

$$\vec{n} = (2,1,0)^t \times (-1,0,3)^t = (3,-6,1)^t$$

Luego, la ecuación del plano está dada por:

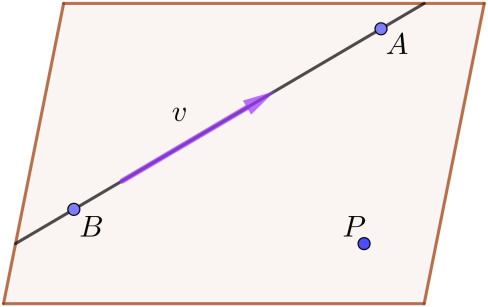
$$\begin{aligned} \Pi : \vec{n} \cdot (x-1, y+3, z-2)^t = 0 \\ &\Leftrightarrow \Pi : 3(x-1) - 6(y+3) + 1(z-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Pi : 3x - 6y + z = 23 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación del plano está dada por:

$$\Pi : 3x - 6y + z = 23$$

Ejercicios

Solución 7: La situación se puede observar en la siguiente figura:



Para resolver este ejercicios debemos determinar dos vectores contenidos en el plano con los cuales podemos calcular el vector normal del plano.

Ejercicios

Primero determinemos la ecuación paramétrica de la recta, como sigue:

$$L : x - 2 = 3 - y = \frac{4 - z}{3} = t \Leftrightarrow L : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

si $t = 0$ podemos definir $A(2,3,4)$ y si $t = 1$ definimos $B(3,2,1)$, luego determinamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BP}$, como sigue:

$$\overrightarrow{AB} = (3,2,1)^t - (2,3,4)^t = (1,-1,-3)^t$$
$$\overrightarrow{BP} = (2,1,2)^t - (3,2,1)^t = (-1,-1,1)^t$$

Ejercicios

Ahora bien, ambos vectores están sobre el plano y con ellos podemos determinar el vector normal del plano, como sigue:

$$\vec{n} = (1,-1,-3)^t \times (-1,-1,1)^t = (-4,2,-2)^t$$

Finalmente, la ecuación del plano que pasa por $B(3,2,1)$ cuyo vector normal es $(-4,2,-2)^t$ está dada por:

$$\Pi : -4(x-3) + 2(y-2) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow \Pi : 2x - y + z = 5$$

Observación: calcular el vector $\overrightarrow{OP}$ y hacer producto cruz con el vector director de la recta no es correcto, ya que $\overrightarrow{OP}$ al ser anclado al origen ya no es paralelo al plano (si lo escalas quedaría sobre el plano).