

Solución Evaluación 1

1. Considere el conjunto $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Se define una relación \mathcal{R} en P como sigue:

$$(x_1, x_2, x_3) \mathcal{R} (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$$

- a) (10 puntos) Demuestre que \mathcal{R} es relación de orden en P .

Solución.

Refleja: Dado $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$, es claro que

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k x_i,$$

por lo tanto $(x_1, x_2, x_3) \mathcal{R} (x_1, x_2, x_3)$

Antisimétrica: Dados $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{N}^3$, suponemos que

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \wedge \sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i.$$

Usando esto con $k = 1$ tenemos que $x_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq x_1$, por lo tanto $x_1 = y_1$.

Usándolo ahora con $k = 2$ tenemos que $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 \wedge y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2$, y como $x_1 = y_1$, se cancelan en ambas desigualdades y obtenemos: $x_2 \leq y_2 \wedge y_2 \leq x_2$, por lo tanto $x_2 = y_2$.

Usándolo ahora con $k = 3$ tenemos que $x_1 + x_2 + x_3 \leq y_1 + y_2 + y_3 \wedge y_1 + y_2 + y_3 \leq x_1 + x_2 + x_3$, y igual que antes, x_1 se cancela con y_1 y x_2 se cancela con y_2 , y obtenemos: $x_3 \leq y_3 \wedge y_3 \leq x_3$, por lo tanto $x_3 = y_3$. Por lo tanto $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$.

Transitiva: Dados $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{N}^3$, suponemos que

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \wedge \sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k z_i.$$

Por transitividad de la relación \leq , se tiene que para cada $k \in \{1, 2, 3\}$ se cumple:

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k z_i,$$

así $(x_1, x_2, x_3) \mathcal{R} (z_1, z_2, z_3)$.

b) **(5 puntos)** Demuestre que $(3, 0, 0)$ es máximo y que $(0, 0, 3)$ es mínimo.

Solución. El vector $(3, 0, 0)$ es máximo para \mathcal{R} si y solo si $\forall (x_1, x_2, x_3) \in P, (x_1, x_2, x_3) \mathcal{R} (3, 0, 0)$. Sea entonces $(x_1, x_2, x_3) \in P$, esto es $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Como cada $x_i \in \mathbb{N}$, se tiene necesariamente que

$$\forall k \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^k x_i \leq 3.$$

Como $3 = 3 + 0 = 3 + 0 + 0$, se concluye que $(x_1, x_2, x_3) \mathcal{R} (3, 0, 0)$.

El vector $(0, 0, 3)$ es mínimo para \mathcal{R} si y solo si $\forall (x_1, x_2, x_3) \in P, (0, 0, 3) \mathcal{R} (x_1, x_2, x_3)$. Sea entonces $(x_1, x_2, x_3) \in P$, esto es $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Como cada $x_i \in \mathbb{N}$, se tiene necesariamente que

$$\forall k \in \{1, 2\}, 0 \leq \sum_{i=1}^k x_i \wedge 3 \leq \sum_{i=1}^3 x_i.$$

Como $0 = 0 + 0$ y $0 + 0 + 3 = 3$, se concluye que $(0, 0, 3) \mathcal{R} (x_1, x_2, x_3)$.

c) **(5 puntos)** Encuentre dos elementos de P no comparables entre sí.

Solución. Hay varios pares no comparables, por ejemplo: $(2, 0, 1)$ no es comparable con $(1, 2, 0)$, ya que

$$2 > 1 \wedge 2 + 0 < 1 + 2.$$

Otro ejemplo de elementos no comparables de P es $(1, 0, 2)$ con $(0, 2, 1)$, pues

$$1 > 0 \wedge 1 + 0 < 0 + 2.$$

2. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}$, considere la siguiente relación en \mathbb{R}^5 .

$$x R y \Leftrightarrow Ax = Ay$$

a) **(6 puntos)** Demuestre que $[\Theta] = \text{Ker}(A)$.

Solución. Sea $x \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned} x \in [\Theta] &\Leftrightarrow x R \Theta, && \text{por la definición de clase y de } R, \\ &\Leftrightarrow Ax = A\Theta, && \text{dado que } A\Theta = \Theta, \\ &\Leftrightarrow Ax = \Theta, && \text{por la definición de } \text{Ker}, \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Ker}(A). \end{aligned}$$

Así hemos demostrado que $\forall x \in \mathbb{R}^5, x \in [\Theta] \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(A)$, por lo tanto $[\Theta] = \text{Ker}(A)$.

b) **(8 puntos)** Demuestre que $[x] = \{x + n \mid n \in [\Theta]\}$.

Solución. Lo demostraremos por doble inclusión.

(\subseteq) Sea $y \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned} y \in [x] &\Leftrightarrow y R x, && \text{por la definición de clase y de } R, \\ &\Leftrightarrow Ay = Ax, && \text{sumando } -Ax \text{ y usando distributividad}, \\ &\Leftrightarrow Ay - Ax = A(y - x) = \Theta, && \text{por definición de } \text{Ker}, \\ &\Leftrightarrow y - x \in \text{Ker}(A), && \text{de la parte b)}, \\ &\Leftrightarrow y - x \in [\Theta], && \text{tomando } n = y - x, \\ &\Rightarrow \exists n \in [\Theta], y = x + n, && \text{por notación de conjunto}, \\ &\Leftrightarrow y \in \{x + n \mid n \in [\Theta]\}. \end{aligned}$$

Así $\forall y \in \mathbb{R}^5, y \in [x] \Rightarrow y \in \{x + n \mid n \in [\Theta]\}$, por lo tanto $[x] \subseteq \{x + n \mid n \in [\Theta]\}$.

(\supseteq) Sea $y \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned}
 y \in \{x + n \mid n \in [\Theta]\} &\Leftrightarrow \exists n \in [\Theta], y = x + n, && \text{sumando } -x \\
 &\Leftrightarrow \exists n \in [\Theta], y - x = n, \\
 &\Rightarrow y - x \in [\Theta], && \text{de la parte b),} \\
 &\Leftrightarrow y - x \in \text{Ker}(A), && \text{por definición de Ker,} \\
 &\Leftrightarrow A(y - x) = \Theta, && \text{sumando } +Ax, \\
 &\Leftrightarrow Ay = Ax, && \text{por la definición de R,} \\
 &\Leftrightarrow y R x, && \text{por la definición de clase,} \\
 &\Leftrightarrow y \in [x].
 \end{aligned}$$

Así $\forall y \in \mathbb{R}^5, y \in \{x + n \mid n \in [\Theta]\} \Rightarrow y \in [x]$, por lo tanto $\{x + n \mid n \in [\Theta]\} \subseteq [x]$.

c) **(6 puntos)** Considere la función $\varphi : \text{Im}(A) \rightarrow \mathbb{R}^5 / \sim$, definida por

$$\varphi(b) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = b\}.$$

Justifique por qué $\varphi(b)$ es en efecto un elemento de \mathbb{R}^5 / \sim , y demuestre que toda clase de equivalencia de \mathbb{R}^5 / \sim es imagen por φ de algún $b \in \text{Im}(A)$.

Solución. Vemos que $\varphi(b)$ es el conjunto de soluciones del sistema $Ax = b$. Debemos demostrar que este conjunto coincide con una de las clases de equivalencia de la relación. Como $b \in \text{Im}(A)$, existe $x^* \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax^* = b$, vamos a demostrar que $S = [x^*]$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 x \in \varphi(b) &\Leftrightarrow Ax = b = Ax^*, && \text{por la definición de R,} \\
 &\Leftrightarrow x R x^*, && \text{por la definición de clase,} \\
 &\Leftrightarrow x \in [x^*],
 \end{aligned}$$

con lo cual $\varphi(b) = [x^*]$.

Ahora bien, si tomamos $y \in \mathbb{R}^5$ cualquiera, basta tomar $b = Ay$, se cumplirá que $[y] = \varphi(b)$, con lo cual φ es sobreyectiva.

3. Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal fijo dado, y sea $O : V \rightarrow V$ el operador nulo, definido por $O(v) = \Theta$, para todo $v \in V$. Considere conjunto siguiente:

$$\mathcal{I} = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(T) = O\}.$$

a) **(5 puntos)** Demuestre que si $p(x) \in \mathcal{I}$ y $r(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces $p(x)r(x) \in \mathcal{I}$.

Solución. Asumiendo que $p(T) = O$, debemos demostrar que $(pr)(T) = O$, para esto usamos que $(pr)(T) = p(T) \circ r(T)$, la cual es una propiedad vista en clases, y demostramos que para todo $v \in V$ se cumple $(p(T) \circ r(T))(v) = O(v)$, en efecto:

$$\begin{aligned}
 (p(T) \circ r(T))(v) &= (O \circ r(T))(v), && \text{por definición de } \circ \\
 &= O(r(T)(v)), && \text{por definición de } O \\
 &= \Theta, && \text{por definición de } O \\
 &= O(v).
 \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $v \in V$, se concluye que $(pr)(T) = O$, y por lo tanto $p(x)r(x) \in \mathcal{I}$.

b) **(5 puntos)** Demuestre que si $p(x)$ y $q(x) \in \mathcal{I}$ entonces $p(x) + q(x) \in \mathcal{I}$.

Solución. Asumiendo que $p(T) = q(T) = O$, debemos demostrar que $p(T) + q(T) = O$. Sea $v \in V$, se tiene:

$$\begin{aligned}(p(T) + q(T))(v) &= p(T)(v) + q(T)(v), && \text{por definición de suma de operadores} \\ &= O(v) + O(v), && \text{por definición de } \mathcal{I} \\ &= \Theta + \Theta, && \text{por definición de } O \\ &= \Theta, && \text{por definición de } O \\ &= O(v).\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $v \in V$, se concluye que $p(T) + q(T) = O$.

c) **(10 puntos)** Demuestre que si $q(x)$ y $s(x) \in \mathcal{I}$ entonces $g(x) = \text{MCD}(q(x), s(x)) \in \mathcal{I}$.

Solución. Para esta parte, usaremos el Teorema de Bézout, que nos dice que existen $e(x), f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $q(x)e(x) + s(x)f(x) = g(x)$. Asumiendo que $q(x), s(x) \in \mathcal{I}$, debemos demostrar que $g(x) \in \mathcal{I}$.

De la parte a), tenemos que, dado que $q(x), s(x) \in \mathcal{I}$, también $q(x)e(x)$ y $s(x)f(x) \in \mathcal{I}$. Luego usando la parte b), esto implica que $q(x)e(x) + s(x)f(x) \in \mathcal{I}$. Como $g(x) = q(x)e(x) + s(x)f(x)$, concluimos que $g(x) \in \mathcal{I}$.