Ahora veremos una nueva extensión para los autómatas finitos no deterministas. Esta nueva extensión permite transiciones para el símbolo ϵ (la palabra vacía). De hecho, en este caso el autómata podrá hacer transiciones espontáneas, sin procesar ningún símbolo. Denotaremos ϵ-NFA a un autómata no determinista que tenga este nuevo tipo de transiciones. Esta nueva propiedad no extiende las capacidades de cómputo de los autómatas, simplemente ayuda a diseñar autómatas con mayor facilidad. Es decir, si A es un ϵ-NFA, entonces $L(A)$ es un lenguaje regular.

Informalmente, lo que hace una transición con el símbilo ϵ es cambiar el estado del autómata de la cola a la punta del arco con símbolo ϵ de forma autóamtica, sin evaluar ningún símbolo de la palabra que se está procesando.

Un ϵ-NFA A se define igual que un NFA, es decir, A está definido por la tupla $(Q, \Sigma_\epsilon, \delta, q_0, F)$, donde $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \epsilon$. La única diferencia es que ahora debemos incluir el símbolo ϵ en el alfabeto (vamos a suponer que originalmente dicho símbolo no estaba en el alfabeto). Sin embargo, dicho símbolo no se usa en las palabras de dicho alfabeto ya que ese símbolo es el símbolo vacío. Por otro lado, la función de transición δ sí estará definida para cuando es evaluado en un estado y el símbolo ϵ. Para definir formalmente cómo evoluciona un ϵ-NFA debemos introducir la *ϵ-clausura* de un estado.

Definición 2.15. Sea A un ϵ-NFA. Sea q un estado de A. La *ϵ-clausura*, denotada $ECLOSE(q)$, es un conjunto de estados de A que definimos recursivamente como sigue:

- $q \in ECLOSE(q)$
- Si un estado p pertenece a $ECLOSE(q)$, entonces $\delta(p, \epsilon) \subseteq ECLOSE(q)$.

Ahora, la función de transición extendida de ϵ-NFA se define como sigue:

Definición 2.16. Sea A un ϵ-NFA.

- Para todo estado q de A, se tiene que $\hat{\delta}(q, \epsilon) = ECLOSE(q)$.
- Supongamos que $w = xa$, donde a es el último símbolo de w. Luego, a es distinto de ϵ ya que es un símbolo de Σ y ϵ no está contenido en Σ. Calculamos $\hat{\delta}(q, w)$ como sigue:
  - Sea $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.
  - Sea $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.
  - Entonces $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j)$.

De esta forma, el lenguaje de un ϵ-NFA es el conjunto de todas las palabras w tal que $\hat{\delta}(q_0, w) \subseteq F$.

Ahora usaremos los ϵ-NFA para demostrar que el conjunto de lenguajes regulares es cerrado para la concatenación y la estrella de Kleene.

Lema 2.17. *Sean L y M dos lenguajes regulares. Entonces la concatenación de ambos, LM es un lenguaje regular.*

Proof. Sean $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0^A, F_A)$ y $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_0^B, F_B)$ los DFA cuyos lenguajes son L y M respectivamente.

Entonces definimos el siguiente ϵ-NFA $(Q, \Sigma_\epsilon, \delta, q_0, F)$:

- $Q = Q_A \cup Q_B$
- $\delta : Q_A \cup Q_B \times \Sigma_\epsilon \to Q_A \cup Q_B$

$$\delta(q,\sigma) = \begin{cases} \delta_A(q,\sigma), & \text{si } q \in Q_A \wedge \sigma \neq \epsilon \\ \delta_A(q,\sigma), & \text{si } q \in Q_A \setminus F_A \wedge \sigma = \epsilon \\ \delta_A(q,\sigma) \cup \{q_0^B\}, & \text{si } q \in F_A \wedge \sigma = \epsilon \\ \delta_B(q,\sigma), & \text{si } q \in Q_B. \end{cases}$$

- $q_0 = q_0^A$
- $F = F_B$

Este autómata acepta LM. □

Lema 2.18. *Sean L un lenguaje regular. Entonces la estrella de Kleene de L, L^* es un lenguaje regular.*

Proof. Sean $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0^A, F_A)$ y un DFA cuyo lenguaje es L.

Entonces definimos el siguiente ϵ-NFA $(Q, \Sigma_\epsilon, \delta, q_0, F)$:

- $Q = Q_A \cup \{q_0\}$
- $\delta : Q_A \cup \{q_0\} \times \Sigma_\epsilon \to Q_A \cup \{q_0\}$

$$\delta(q,\sigma) = \begin{cases} \delta_A(q,\sigma), & \text{si } q \in Q_A \wedge \sigma \neq \epsilon \\ \delta_A(q,\sigma), & \text{si } q \in Q_A \setminus F_A \wedge \sigma = \epsilon \\ \delta_A(q,\sigma) \cup \{q_0^A\}, & \text{si } q \in F_A \wedge \sigma = \epsilon \\ \{q_0^A\}, & \text{si } q = q_0 \wedge \sigma = \epsilon \\ \emptyset, & \text{si } q = q_0 \wedge \sigma \neq \epsilon. \end{cases}$$

- $q_0 = q_0$
- $F = F_A \cup \{q_0\}$

Este autómata acepta L^*. □