Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Espacios Vectoriales
Algebra Lineal (527108)

1. Espacios Vectoriales

Definición:

1) Una **operación binaria** $\star$ sobre un conjunto G es una función $\star : G \times G \to G$. Para cada par de elementos $a, b \in G$ escribiremos $a \star b$ para denotar a la imagen del par (a, b) bajo la función $\star$, es decir: $a \star b = \star(a, b)$.

2) Una operación binaria sobre G es **asociativa** si para todo $a, b, c \in G$ se tiene que $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

3) Si $\star$ es una operación binaria sobre G, decimos que los elementos a y b **conmutan** si $a \star b = b \star a$. Asimismo, decimos que G es conmutativo si para todo $a, b \in G$ se tiene que $a \star b = b \star a$.

Definición:

1) Un **grupo** es un conjunto no vacío G con una operación binaria $\star : G \times G \to G$ que satisfacen los siguientes axiomas:
   - $\star$ es asocitativa.
   - Existe un elemento $e \in G$, que llamaremos el **neutro** o la **identidad** de G si para cualquier $a \in G$, se tiene que $a \star e = e \star a = a$.
   - Para cada elemento $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$, que llamaremos el **inverso** de a que cumple $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

2) El grupo $(G, \star)$ se dice **abeliano** (o conmmutativo) si$a \star b = b \star a, \forall a, b \in G$

3) El grupo $(G, \star)$ se dice **finito** si el conjunto G tiene finitos elementos.

Ejemplos:

1) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}^n, +)$ son todos grupos abelianos.

2) $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo: no existe el neutro aditivo.

3) $(\mathbb{R}, \cdot)$ no es un grupo: el 0 no tiene inverso.

4) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ son todos grupos abelianos.

5) $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ no es un grupo: el 2 no tiene inverso en $\mathbb{Z}$.

6) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, las matrices de orden $m \times n$ forman un grupo abeliano con la suma: $(M_{mn}(\mathbb{R}), +)$.

7) Las matrices invertibles de orden n forman un grupo no abeliano con la multiplicación.

8) Las funciones biyectivas $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición de funciones $f \circ g = f(g(x))$ definen un grupo **no abeliano**.

9) El conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ y la operación $\oplus$ definida por las reglas:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0$$

es un grupo abeliano finito.

Definición: Un conjunto K no vacío se llama un **cuerpo** si los conjuntos $(K, +)$ y $(K - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos, y además se cumple la ley de distribución:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplos:

1) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son cuerpos.

2) $\mathbb{Z}$ no es cuerpo, porque $(\mathbb{Z} - 0, \cdot)$ no es grupo.

3) El conjunto $\mathbb{Z}_2$ definido en el ejemplo anterior es un cuerpo.

Definición: Sea V un conjunto no vacío. V se dice un **espacio vectorial sobre el cuerpo** K si:

1) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

2) En V se puede definir una **ponderación por escalar**, $\cdot :\ K \times V \to V$ que satisface las siguientes propiedades:

   a) $\alpha v \in V,\ \forall\ \alpha \in K, v \in V$
   b) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w,\ \forall v, w \in V,\ \forall \alpha \in K$
   c) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,\ \forall v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K$
   d) $0 \cdot v = \vec{0},\ \forall v \in V$, donde $\vec{0}$ es el neutro del grupo $(V, +)$.
   e) $1 \cdot v = v,\ \forall v \in V$.

Observación:

- Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, los elementos de V se llaman ahora **vectores**.
- En este curso trabajaremos usualmente con espacios vectoriales donde el cuerpo de base serán los números reales, por lo que generalmente hablaremos de **espacios vectoriales reales**.

Ejemplos:

1) $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real.

2) El conjunto de los polinomios con grado menor o igual a k, que denotaremos $\mathbb{P}_k[x]$ es un espacio vectorial.

3) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ es un espacio vectorial.

4) Las funciones continuas definidas sobre un intervalo I, $f : I \to \mathbb{R}$ forman un espacio vectorial.

5) Cualquier cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo.

6) Para un $k \in \mathbb{N}$ fijo, los polinomios de grado exactamente k no forman un espacio vectorial real. Para ejemplificar, al sumar los polinomios $p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = -x^3 + x^2$ se obtiene un polinomio cuyo grado es estrictamente menor, y por lo tanto la suma no es una operación binaria.

Ejercicio: Sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ se define una nueva ponderación por escalar, por

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0),\ \forall c \in K,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Con esta nueva operación, ¿es $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial?

2. Subespacios Vectoriales

Definición: Sea $W \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Se dice que W es un **subespacio vectorial de** V, y simbolizaremos $W \leq V$, si W es por si mismo un espacio vectorial, al usar las mismas operaciones $+, \cdot$ de V.

Teorema 1 (Criterio del Subespacio) *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $W \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Entonces, $W \leq V$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $\vec{0} \in W$

2) Si $\alpha \in K$, y $w_1, w_2 \in W$, entonces $w_1 + \alpha w_2 \in W$.

Ejemplo: Sea $W \subseteq \mathbb{P}_3[x]$ el subconjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3, cuyo término constante es 0. Muestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3[x]$.

Solución: Utilizamos el Criterio del Subespacio:

1) Claramente, $\vec{0} \in W$ pues el término constante del polinomio nulo es 0.

2) Sea $\alpha \in K$ un escalar, y sean $w_1, w_2 \in W$, esto es, w_1, w_2 son polinomios (de grado menor o igual a 3) cuyo término constante es 0. Podemos caracterizar genéricamente a estos elementos por $w_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ y $w_2(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x$. Luego,

$$w_1 + \alpha w_2 = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x) + \alpha(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x)$$

Agrupando,

$$w_1 + \alpha w_2 = (a_3 + \alpha b_3)x^3 + (a_2 + \alpha b_2x^2 + (a_1 + \alpha b_1)x$$

es también un polinomio cuyo término constante es 0, y por lo tanto, es un polinomio que pertenece a W.

Como se cumplen las dos condiciones del Criterio, podemos asegurar que $W \leq \mathbb{P}_3[x]$.

Ejemplo: Muestre que el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solución: También podemos utilizar el Criterio del Subespacio. A diferencia del ejercicio anterior, debemos exhibir un contraejemplo donde una de las dos condiciones del teorema (o ambas) no se cumpla. En este caso, mostramos que la segunda condición no se cumple. En efecto, consideremos $w_1 = (1, 0)$. Claramente, $w_1 \in W$, pero al ponderar por un escalar negativo, por ejemplo, $-2(1, 0) = (-2, 0)$ obtenemos un vector que no pertenece a W. Esto contradice la segunda condición, por lo cual podemos asegurar que $W \leq V$.

Ejercicio: Decida, utilizando el Criterio del Subespacio, si los siguientes conjuntos son o no subespacios vectoriales:

1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y + z = 1\}$

2) $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr(A)} = 0\}$

2.1. Combinaciones Lineales

Definición: Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Se dice que el vector u es una **combinación lineal** de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Ejemplo: Decida si el vector $(-1, 0, 2)$ es combinación lineal de los vectores $(2, 0, 1), (-1, 1, 1)$.

Solución: Si el vector $(-1, 0, 2)$ es combinación lineal, entonces existen escalares α_1, α_2 tales que

$$(-1, 0, 2) = \alpha_1(2, 0, 1) + \alpha_2(-1, 1, 1)$$

$$(-1, 0, 2) = (2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

Esta última igualdad define un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} 2\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{array}\right|$$

Observamos que este sistema de ecuaciones no tiene solución, por lo tanto, el vector $(-1, 0, 2)$ no es combinación lineal de $\{(2, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$.

Ejemplo: Decida si el polinomio $x^2 + 3x + 5$ es combinación lineal de los polinomios $x^2, x^2 + x + 1, x - 1$.

Solución: Si el polinomio $x^2 + 3x + 5$ es combinación lineal, entonces existen algunos escalares $\alpha_1, \alpha_2.\alpha_3$ tales que

$$x^2 + 3x + 5 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x - 1)$$

Agrupando los términos por las potencias de x, obtenemos:

$$x^2 + 3x + 5 = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_2 - \alpha_3$$

Esta última igualdad define un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 5 \end{array}\right|$$

Cuya solución es $\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = -1$. En consecuencia, el polinomio $x^2 + 3x + 5$ sí es combinación lineal de $\{x^2, x^2 + x + 1, x - 1\}$

2.2. Subspacios Generados y Conjunto Generador

Definición: Sea V un espacio vectorial, y sean $v_1, v_2, \dots v_n$ vectores de V. El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \dots v_n$ se denomina el **espacio generado** por $v_1, v_2, \dots v_n$ y se denota $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle$

Teorema 2 *Sea V un espacio vectorial, y sea $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una colección de vectores de V. Entonces $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle$ es un subespacio vectorial de V.*

Definición: Si todo elemento del espacio vectorial V se puede escribir como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots v_n$ (es decir, si $V = \langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle$) se dice que éste es un **conjunto generador** de V, o que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ **genera** a V.

Ejercicios:

1) Muestre que el conjunto
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
es un conjunto generador para las matrices simétricas de 2×2.

2) Dé un ejemplo de una matriz que no pertenezca al conjunto generado por estas matrices.

3. Independencia Lineal

Definición:

1) Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son **linealmente independientes** si la única solución para la ecuación
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_n v_n = 0 \tag{1}$$
es $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

2) Si la ecuación anterior (1) tiene más soluciones, entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes**.

Ejercicio: Mostrar que el conjunto de vectores $\{(3, 2, 0), (1, 0, 0), (9, -4, 0)\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicio: Mostrar que el conjunto de polinomios $\{1 + x + x^2,\ 1 + 2x - x^2,\ 1 + x^2\}$ es linealmente independiente.

Teorema 3 *Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un conjunto de vectores linealmente dependiente. Si para la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots c_nv_n = 0$ se tiene que $c_i \neq 0$, entonces el vector v_i puede ser eliminado del conjunto generador sin alterar el espacio generado. En otras palabras, si por ejemplo $c_1 \neq 0$, entonces*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_2, \ldots, v_n \rangle .$$

Ejemplo: El conjunto de vectores $\{(3,2,0),(1,0,0),(9,-4,0)\}$ es linealmente dependiente. Además, tenemos que

$$2(3,2,0) + 3(1,0,0) - (9,-4,0) = 0$$

lo que significa que

$$\langle (3,2,0),(1,0,0),(9,-4,0) \rangle = \langle (3,2,0),(1,0,0) \rangle = \langle (1,0,0),(9,-4,0) \rangle = \langle (3,2,0),(9,-4,0) \rangle$$

Ejercicio:

- Muestre que el conjunto de matrices

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \right\}$$

  es linealmente dependiente.

- ¿Podemos sacar A_2 sin alterar el subespacio generado $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$?

3.1. Base y Dimensión

Definición: El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base** para el espacio vectorial V si:

1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

2) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto generador para V, es decir, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V$.

Teorema 4 *Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para el espacio vectorial V. Entonces:*

1) Cualquier conjunto de m vectores, con $m > n$, es linealmente dependiente.

2) Cualquier conjunto generado por k vetores, donde $k < n$, es un subespacio propio de V.

3) Cualquier otra base de V debe tener exactamente n vectores linealmente independientes.

Definición: Se define la **dimensión** del espacio vectorial como la cardinalidad de cualquier base de V. Si una base de V tiene n elementos, simbolizamos la dimensión por $dim(V) = n$.

Observación:

1) El subespacio $U = \{0\}$ tiene dimensión 0.

2) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$. Por este motivo, $\{(1,0),(0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$. Además, es un conjunto linealmente independiente porque

$$(0,0) = c_1(1,0) + c_2(0,1) \implies (0,0) = (c_1, c_2) \implies c_1 = 0, c_2 = 0$$

   En consecuencia, $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$, y nos referiremos a ella como la **base canónica** para $\mathbb{R}^2$. Note además que $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

3) En general, $dim(\mathbb{R}^n) = n$, y la base canónica para $\mathbb{R}^n$ es $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \ldots \hat{\mathbf{e}}_n\}$, donde

4) La base canónica para las matrices de orden 2×3 es:

$$\hat{\mathbf{e}}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $dim(M_{2\times 3}) = 6$

5) El conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^k\}$ es la base canónica de los polinomios de grado menor o igual a k. Tenemos entonces que $dim(\mathbb{P}_k[x]) = k + 1$.

Teorema 5 *Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces cada vector $w \in V$ puede escribirse de manera* **única** *como combinación lineal de la base B.*

Ejemplo: Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, y sea $W = \left\{ X \in M_{2\times 2} : \ A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determine una base para W, y su dimensión.

Solución: Comenzamos considerando una matriz genérica $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y buscamos qué relaciones deben existir entre a, b, c, d de modo que $X \in W$. Para esto, debe cumplirse que $A \cdot X = 0$, lo que se traduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 6c & 3b + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y en definitiva, esto lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 3a + 6c = 0 \\ 3b + 6d = 0 \\ \hline \end{array}$$

que resolvemos por eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo infinitas soluciones, y dos parámetros libres. Elegimos c, d como los parámetros libres, y las soluciones dicen

$$a + 2c = 0 \implies a = -2c$$
$$b + 2d = 0 \implies b = -2d$$

Estas relaciones nos dicen finalmente la forma que deben tener las matrices que pertenezcan a W:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición anterior dice que

$$X \in W \iff X = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \in W \iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por lo tanto, $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto generador para W.
Pero además, las matrices anteriores son l.i. pues

$$\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff c = d = 0$$

Esto entonces nos dice que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W, y por lo tanto, $dim(W) = 2$.

4. De Condiciones a Generadores y viceversa

Dado un subespacio vectorial $W \leq V$, tenemos esencialmente dos formas de caraterizarlo. La primera es mostrando ciertas condiciones que satisfacen los vectores que pertenecen a dicho subespacio:

$$W = \{v \in V : \text{ cond}_1, \text{ cond}_2, \text{ ...}\}$$

Y la segunda es a través de un conjunto generador (o mejor aún, una base), pues en ese caso

$$W = \langle v_1, v_2, \dots \rangle$$

La pregunta obvia es cómo pasar de un lenguaje al otro, y lo desarrollamos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Sea $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z = 0, \ x - y + z + 2t = 0\}$. Determine una base y la dimensión de W.

Solución: Sea (x, y, z, t) un vector genérico de W. Entonces, se satisfacen simultáneamente:

$$\left. \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x - y + z + 2t = 0 \end{array} \right|$$

Sistema de ecuaciones que resolvemos vía Eliminacón Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

el cual tiene infinitas soluciones, y dos parámetros libres. Escogemos z, t libres, y entonces:

$$y - t = 0 \implies y = t \tag{2}$$
$$x + t + z = 0 \implies x = -t - z \tag{3}$$

En consecuencia,

$$(x,y,z,t) = (-t-z,\ t,\ z,\ t) = z(-1,0,1,0) + t(-1,1,0,1)$$

$$(x,y,z,t) \in \langle(-1,0,1,0),\ (-1,1,0,1)\rangle$$

Además, como $(-t-z,\ t,\ z,\ t) = (0,0,0,0) \Longleftarrow z = t = 0$, el conjunto $\{(-1,0,1,0),(-1,1,0,1)\}$ es linealmente independiente, y en definitiva, forman una base para W. Así, hemos encontrado que $W = \langle(-1,0,1,0),\ (-1,1,0,1)\rangle$, pasando desde el lenguaje de condiciones a generadores.
Ejemplo: Sea $U = \langle(1,-1,1),(1,1,0)\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Determine las condiciones bajo las cuales $(x,y,z) \in U$.

Solución: Construimos el sistema de ecuaciones asociado al problema, y procedemos vía Eliminación Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -1 & -x+z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -x+z \\ 0 & 2 & x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 2 & x+y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & -x+y+2z \end{pmatrix}$$

Lo anterior se analiza como sigue: si $-x+y+2z \neq 0$ entonces el sistema no tiene solución porque habría un pivote sobre el vector columna $(r(A) < r(A|b))$. Por lo tanto, si queremos que $(x,y,z) \in U$, necesariamente debe satisfacerse que $-x+y+2z = 0$, que es la condición buscada. Es decir:

$$U = \langle(1,-1,1),(1,1,0)\rangle$$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -x+y+2z = 0\}$$

5. Subespacios Importantes

5.1. Suma de Subespacios

Teorema 6 *Sean U, W subespacios de V. Se define el* **subespacio suma** *$U+W$, por*

$$U + W = \{u + w :\ u \in U,\ w \in W\}$$

(el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se puedan construir con elementos de U o de W). Luego, si $U, W \leq V$ entonces, $U+W$ es un subespacio vectorial de V.

Hay una forma natural de construir el subespacio suma. En primera instancia, si $U = \langle u_1, u_2, \ldots u_n\rangle$, y $W = \langle w_1, w_2, \ldots, w_m\rangle$, entonces el subespacio suma es simplemente

$$U + W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, w_1, w_2, \ldots, w_m\rangle$$

El detalle es que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es un conjunto generador del subespacio suma, y no necesariamente es base de él.

Ejemplo: Sean $U = \langle(1,2,0),\ (0,1,1)\rangle$ y $W = \langle(0,1,2),\ (1,0,0)\rangle$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Determine una base y la dimensión para $U+W$.

Solución: Se tiene que $\{(1,2,0),(0,1,1),(0,0,1),(1,0,0)\}$ es un conjunto generador de $U+W$. Faltaría verificar si es L.I. Verifique que una base de $U+W$ es $\{(1,2,0),(0,1,1),(0,0,1),\}$, y por lo tanto $dim(U+W) = 3$.

5.2. Intersección de Subespacios

Teorema 7 *Sean U, W subespacios de V. Entonces la intersección $U \cap W$ es también subespacio vectorial de V.*

La construcción del subespacio intersección también es relativamente natural, y se procede concatenando condiciones. Si $U = \{v \in V : \text{ cond}_{u1}, \text{ cond}_{u2}, \dots\}$ y $W = \{v \in V : \text{ cond}_{w1}, \text{ cond}_{w2}, \dots\}$, entonces

$$U \cap W = \{v \in V : \text{ cond}_{u1}, \text{ cond}_{u2}, \dots, \text{cond}_{w1}, \text{ cond}_{w2}, \dots\}$$

Ejemplo: Sean $U = \{p(x) \in \mathbb{P}_3[x] : \ p(1) = 0\}$, y $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3[x] : \ p(-1) = 0\}$. Determinar una base y la dimensión de $U \cap W$.

Solución: Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in U \cap W$. Entonces, $p(x)$ satisface simultáneamente:

$$\begin{aligned} p(1) = 0 &\implies a + b + c + d = 0 \\ p(-1) = 0 &\implies -a + b - c + d = 0 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones que resolvemos, como es habitual, por Eliminación Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sistema que tiene infinitas soluciones, y 2 parámetros libres. Escogemos c, d libres y

$$\begin{aligned} b + d = 0 &\implies b = -d \\ a + b + c + d = 0 \implies a + c = 0 &\implies a = -c \end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d \in U \cap W$ cuando

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = -cx^3 - dx^2 + cx + d = c(-x^3 + x) + d(-x^2 + 1)$$

Es decir,

$$U \cap W = \left\langle -x^3 + x, \ -x^2 + 1 \right\rangle$$

Además, es claro que $-cx^3 - dx^2 + cx + d = 0 \implies c = d = 0$, por lo que el conjunto anterior es base de $U \cap W$, con $dim(U \cap W) = 2$.

6. Teorema de la Dimensión

Dados U, W subespacios, comencemos considerando una base para la intersección $U \cap W$. Ésta se puede "ampliar" de modo de construir bases para U y para W respectivamente. En este proceso, cada nuevo elemento que se agregue a la base de uno, no puede pertenecer al otro subespacio (porque en ese caso pertenecería a la intersección, y esa parte ya está cubierta). En virtud de lo anterior, esta construcción nos permite determinar una fórmula explícita para la dimensión de la suma $U + W$:

Teorema 8 (Teorema de la Dimensión) *Sean U, W subespacios del espacio vectorial V. Entonces,*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Ejercicio: Sean $U = \langle (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rangle$ y $W = \langle (1, 2, 0, 0), (0, -1, -1, 0), (0, 1, 1, -2) \rangle$. Determine una base para $U + W$, y calcule $dim(U \cap W)$.

7. Suma Directa

Si $U, W \leq V$, en general se tiene el siguiente diagrama de inclusiones:

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, dash] & \\
 & U+W \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
U \arrow[dr, dash] & & W \arrow[dl, dash] \\
 & U \cap W \arrow[d, dash] & \\
 & \{0\} &
\end{tikzcd}
$$

El caso especial de este diagrama es cuando, simultáneamente se cumple que:

- $U + W = V$,
- $U \cap W = 0$,

en cuyo caso se dice que U, W forman una **suma directa de V**, y se denota $V = U \oplus W$.

Ejemplo: Verificar si $U = \{A \in M_{2\times 2} : \ A^t = A\}$ y $W = \{A \in M_{2\times 2} : \ A^t = -A\}$ son una suma directa del espacio vectorial de las matrices de 2×2.

Ejemplo: Verificar que $U = \left\langle x^3 - x \right\rangle$ y $W = \left\langle x^2 - 1 \right\rangle$ no forman una suma directa para el espacio $V = \{p(x) \in \mathbb{P}_3[x] : \ p(1) = 0\}$.