



Listado 7: Funciones reales

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas cuyo nivel de complejidad es superior al esperado en este curso, intétalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado. Los problemas marcados con **(V)** serán resueltos en videos que publicaremos en Canvas.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Sea f la siguiente relación binaria $f \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que

$$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- f es una relación funcional y la restricción de f a $\{1, 2, 3, 4\}$ es la siguiente función inyectiva
$$g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ que cumple } g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4 \text{ y } g(4) = 1.$$
- f es una función sobreyectiva.
- El recorrido de f es $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Restringiendo el codominio de f a $\{1, 2, 3, 4\}$ se obtiene una función biyectiva.

2. Problemas intermedios

1. Considere las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,
- $g :]-\infty, -3[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-3}}$.

En listado pasado usted demostró que estas funciones son inyectivas y debe haber mostrado que ninguna de las dos es sobreyectiva.

Restrinja el codominio de f y g de modo que las funciones resultantes sean biyectivas y defina la inversa de cada una estas nuevas funciones.

2. Considere las siguientes funciones:

- $g :]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$, dada por $g(x) = \sqrt{x} + 1$,
- $h : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$, dada por $h(x) = |x^2 - 1| + x^2$,

- $r :] -1, 1[\rightarrow] -\infty, -\frac{1}{2} [$, dada por $r(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$.

En listado pasado usted demostró que estas funciones son sobreyectivas, encontró cuáles son inyectivas y de ellas definió su inversa. De las que no son inyectivas, restrinja el dominio de modo que, sin cambiar su codominio, la función resultante sea biyectiva y defina su inversa.

3. Restrinja el dominio de las siguientes funciones de modo que la función resultante en cada caso sea inyectiva y su recorrido sea el mismo que el de la función original. Compruebe que las funciones resultantes son biyectivas y determine su inversa.

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[$, dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
- $g : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$, dada por $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,
- $h : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$, dada por $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

4. (A) Sean

$$f :]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

las funciones con

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{x+2}.$$

Defina, si es posible, las funciones $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $(f+g) \circ g$.

5. Considere las siguientes funciones.

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_1(x) = 2 - |x - 3|$.
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_2(x) = |2x - 3| + 5$.
- $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_3(x) = |x - 1| + |x + 1|$.
- $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_4(x) = |x + 1| + x + 2$.

Restrinja dominio y/o codominio de ellas de modo que la función resultante en cada caso sea una función biyectiva y defina su inversa.

6. Considere las siguientes funciones:

- $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.
- $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{1}{|1-x^2|}$,
- $h : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \sqrt{1-|x|}$.
- (A) $k : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $k(x) = \sqrt{-2x-x^2} - 2$.
- $m : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x|}}$.
- $p : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $p(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Restrinja dominio y/o codominio de ellas de modo que la función resultante en cada caso sea una función biyectiva y defina su inversa.

7. Sean las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descritas a continuación.

$$f(x) = \frac{x+|x|+\sqrt{x^2}}{3}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule el dominio de las siguientes composiciones y defínalas, de ser posible.

$$(a) \ f \circ g, \quad (b) \ g \circ g, \quad (c) \ (f \circ g) \circ (f \circ g).$$

8. (**A**) Sean $f : [-2, 5] \rightarrow [1, 3 - \sqrt{2}]$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = 3 - \sqrt{2x + 6}, \quad g(x) = \frac{1-x}{x}.$$

- (a) Demuestre que f es biyectiva y defina su inversa.
- (b) Defina, si es posible, $f \circ g$.

9. Sean las funciones $s : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y $t : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ descritas como:

$$s(x) = \frac{x}{x-3}, \quad t(x) = \frac{3x}{x-1}.$$

- (a) Decida si s es inyectiva y si es sobreyectiva. ¿Es s biyectiva?
- (b) Defina, si es posible, las funciones $s \circ t$ y $t \circ s$.

3. Problemas avanzados

1. Sean A , B y C conjuntos no vacíos. Sean además f y g funciones $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$. Demuestre:

- (a) (**A**) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
- (b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.
- (c) Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.
- (d) Si $f \circ g$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.
- (e) Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.