UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV 525412
Porf. C. Thraves Caro.
Ayudantes: V. Henríquez y C. Opazo.

Listado 1

1. Describa todos los grafos que tiene al conjunto $\{a, b, c\}$ como conjunto de vértices. Ordene la lista en dos columnas de tal manera que cada grafo aparezca al lado de su complemento. Además determine cuales son bipartitos y cuales no.

2. Llamaremos K_i al grafo con i vértices que contiene todas las aristas posibles *(nos referimos a un grafo simple, es decir, no tiene aristas paralelas ni loops)*. El grafo K_i se conoce como el *grafo completo* de tamaño i, o el *clique* de tamaño i. Haga un dibujo de K_5 y otro de $\bar{K}_5$. Determine el número de aristas de K_n y el de $\bar{K}_n$. Determine cual de estos dos grafos es conexo y cual es disconexo.

3. Sea V el producto Cartesiano de los conjuntos $\{1, 2, \ldots, p\}$ y $\{1, 2, \ldots, q\}$, es decir, el conjunto de todos los pares (i, j) donde $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Sea $G = (V, E)$ donde E se define como sigue:

$$E := \{\{(i, j), (i', j')\} :< i = i' \wedge |j - j'| = 1 > \quad \vee \quad < j = j' \wedge |i - i'| = 1 >\}.$$

   El grafo G se conoce como la *grilla* de tamaño $p \times q$. Determine el número de aristas de la grilla de tamaño $p \times q$. Determine si la grilla de 4×3 es bipartita. Haga lo mismo para la grilla de 5×3. ¿Puede generalizar el argumento para la grilla de $p \times q$, para todo p y q?.

4. Dado dos números enteros p y q, sea $V := \{1, 2, 3, \ldots, pq - 2, pq - 1, pq\}$. Sea $G = (V, E)$ el grafo donde E se define como sigue. Dados dos elementos k y k' en V, tal que $k < k'$, se tiene que $\{k, k'\} \in E$ si $k' = k + q$ o si $k \mod q \neq 0 \wedge k' = k + 1$. Haga un dibujo del grafo antes definido para los parámetros $p = 3$ y $q = 4$. Haga un dibujo del grafo antes descrito para los parámetros $p = 4$ y $q = 3$. ¿Es el grafo descrito en este ejercicio isomorfo a la grilla descrita en el ejercicio anterior?. Si es así, de un isomorfismo.

5. **Tarea*** Sea k un entero positivo. El *k-cubo* (o cubo de dimensión k) es el grafo definido como sigue. El conjunto de vértices V contiene a todos los vectores de largo k, $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, con entradas b_i en $\{0, 1\}$ para todo i. Dos vértices del grafo son adyacentes si y sólo si ellos difieren en exactamente una posición. Por ejemplo, en el 3-cubo, el vértice $(0, 0, 0)$ es adyacente a los vértices $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, y a ningún otro vértice. Si denotamos al k-cubo como Q_k, dibuje los grafos Q_1, Q_2, Q_3. Determine el número de vértices y de aristas de Q_k. Determine el número cromático de Q_k. ¿Es Q_k k-partito?. Encuentre un camino entre los vértices $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ en el 3-cubo.

6. Sea X el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea V el conjunto de todos los subconjuntos de X de tamaño 2. Dos elementos en V son adyacentes si tienen intersección igual al vacío. Dibuje el grafo descrito. Este grafo se conoce como el grafo de *Petersen* por Julius Petersen (Dinamarca 1839 -1910). Determine el número de vértices y de aristas del grafo de Petersen. ¿Es el grafo de Petersen conexo?. Determine el número cromático del grafo de Petersen. ¿Es el grafo de Petersen 3-partito?. Encuentre un ciclo en el grafo de Petersen.

7. **Tarea*** Sea V el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tienen exactamente k elementos. Dos elementos en V son adyacentes si tienen intersección igual al vacío. Esta

relación de adyacencia en V define el grafo de *Kneser* denotado $K(n,k)$. En particular, el grafo $K(5,2)$ es el grafo de Petersen descrito en el problema anterior. Dibuje los grafos $K(n,1)$, $K(n,n)$, $K(n,n-1)$, $K(4,2)$, $K(5,3)$ y $K(6,3)$.

8. Dado un conjunto V, sea E el conjunto definido como sigue: para cada par u y v de elementos en V, tirar una moneda al aire. Agregar la arista $\{u,v\}$ a E si la moneda cae cara. Si la moneda cae sello, entonces no se agrega la arista. El grafo definido es un grafo aleatorio. Dibuje un grafo aleatorio para $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ usando su moneda preferida. Repita el proceso usando una moneda viciada que tenga probabilidad $1/3$ de caer cara y probabilidad $2/3$ de caer sello. Escribas las matrices de adyacencia e incidencia de los grafos que encontró.

9. **Tarea*** Sea $\preceq$ una relación de orden parcial en un conjunto finito V. Es decir, $\preceq$ es transitiva (si $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$), antisimétrica (si $x \preceq y$ e $y \preceq x$, entonces $x = y$) y reflexiva ($x \preceq x$ para todo x). Digamos que dos elementos distintos x e y de V son adyacentes si es que ellos son comparables, es decir, si $x \preceq y$ o $y \preceq x$. Esta relación de adyacencia define el grafo de comparabilidad para la relación $\preceq$ en el conjunto V. Dibuje el grafo de comparabilidad para la relación de inclusión $\subseteq$ sobre el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1,2,3\}$. Escribas las matrices de adyacencia e incidencia del grafo de comparabilidad encontrado.

10. Sea $G = (V,E)$ un grafo. Definimos el *grafo de línea* de G, denotado $L(G)$, como sigue: $V(L(G)) := E$; $E(L(G)) := \{\{e,f\} : |e \cap f| = 1\}$ (notar que e y f son subconjuntos de tamaño dos del conjunto V, por lo tanto tiene sentido hacer una intersección entre esos dos conjuntos). Dibuje $L(K_4)$. Sea P el grafo de Petersen. Dibuje $L(P)$. Determine las matrices de adyacencia e incidencia de $L(P)$.