UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo propuesto Test 2 Taller de Razonamiento Matemático I 525041-1

1. (a) Determine el valor de verdad de la siguiente proposición: $\forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + y = 5$. **10 puntos**

   DESARROLLO: La proposición dada nos dice que "Para cualquier valor real de y, la ecuación (en x): $x^2 + y = 5$, tiene solución real."

   En particular, para $y = 6 \in \mathbb{R}$, la ecuación resulta ser $x^2 = -1$, la cual no tiene solución en $\mathbb{R}$. De esta manera, la propiedad no se satisface para $y = 6 \in \mathbb{R}$, y en consecuencia, la proposición resulta ser FALSA.

   Otro razonamiento: Supongamos que la proposición es cierta. Luego, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, la ecuación $x^2 + y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5 - y$, tiene solución $x \in \mathbb{R}$. Como $x^2 \geq 0$ siempre (propiedad en $\mathbb{R}$), se debe requerir que $5 - y \geq 0$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$. En particular, eligiendo $y = 6 \in \mathbb{R}$, nos queda $-1 \geq 0$ ($\rightarrow\leftarrow$). En consecuencia, la proposición dada es FALSA.

   (b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. La distancia entre x e y viene dada por el valor de $|x - y|$.
   A continuación se da una caracterización de PUNTO AISLADO con respecto a un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$: Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto aislado* de S si y sólo si "existe un número real positivo ϵ tal que para todo punto/elemento y de S, la distancia entre x e y es mayor o igual que ϵ."
   Expresar la caracterización de punto aislado en lenguaje formal / matemático, usando cuantificadores. **10 puntos**

   DESARROLLO: Tenemos

$$x \in \mathbb{R} \text{ es un } \textit{punto aislado} \text{ de } S \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \,:\, \forall\, y \in S \,:\, |x - y| \geq \epsilon\,.$$

   (c) Negar la proposición siguiente, en términos de los cuantificadores universal y existencial. **10 puntos**

$$\exists!\, y \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, xy = x + y\,.$$

   DESARROLLO: Tenemos

$$\begin{aligned} \exists!\, y \in \mathbb{R} \,:\, \underbrace{\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, xy = x + y}_{q(x,y)} \Leftrightarrow\ & (\exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, q(x,y)) \\ & \wedge\ (\forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, z \in \mathbb{R} \,:\, q(x,y) \wedge q(x,z) \rightarrow y = z)\,. \end{aligned}$$

   La negación será:

$$\begin{aligned} & \sim (\exists!\, y \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, xy = x + y) \\ \Leftrightarrow\ & \sim (\exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, q(x,y)) \vee \sim (\forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, z \in \mathbb{R} \,:\, q(x,y) \wedge q(x,z) \rightarrow y = z) \\ \Leftrightarrow\ & (\forall\, y \in \mathbb{R} :\sim q(x,y)) \vee \Big(\exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, z \in \mathbb{R} \,:\, q(x,y) \wedge q(x,z) \wedge y \neq z\Big) \\ \Leftrightarrow\ & \Big(\forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, xy \neq x + y\Big) \\ & \vee \Big(\exists\, y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, z \in \mathbb{R} \,:\, y \neq z \wedge [\,(\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, xy = x + y) \wedge (\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, xz = x + z)\,]\Big)\,. \end{aligned}$$

2. Demostrar por Método Directo: $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, 1 + (-1)^m(2m-1) \,=\overset{\circ}{4}$. **10 puntos**

   Hint: Analizar dos casos posibles: cuando m es par y cuando m es impar.

   Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$ fija, pero arbitraria. Tenemos dos casos por analizar:
   Caso m es par: esto implica que $\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, m = 2k$. Luego,

$$1 + (-1)^m(2m-1) = 1 + (-1)^{2k}(2(2k)-1) = 1 + (4k-1) = 4(\underbrace{k}_{\in\mathbb{Z}})\,,$$

   de donde se infiere que $1 + (-1)^m(2m-1)$ es múltiplo de 4.

   Caso m es impar: esto significa que $\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, m = 2k+1$. De esta manera,

$$1 + (-1)^m(2m-1) = 1 + (-1)^{2k+1}(2(2k+1)-1) = 1 - (4k+1) = -4k = 4(\underbrace{-k}_{\in\mathbb{Z}})\,,$$

   lo cual implica que $1 + (-1)^m(2m-1)$ es un múltiplo de 4.

   De esta manera, como $m \in \mathbb{N}$ es fija pero arbitraria, se concluye que
   $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, 1 + (-1)^m(2m-1) \,=\overset{\circ}{4}$. $\square$

3. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$ no vacíos. Demuestre que: $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B$. **10 puntos**

   Demostración:
   Primera Forma: Sabemos que $A \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, se infiere que $A \in \mathcal{P}(B)$. Esto implica que $A \subseteq B$. $\square$

   Segunda Forma: La Tesis es equivalente a $\forall\, x \in \mathcal{U} \,:\, (x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B)$.

   Sea $x \in \mathcal{U}$ fijo pero arbitrario, tal que $x \in A$. Esto equivale a decir que $\{x\} \subseteq A$, lo que a su vez es equivalente a afirmar que $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Como por Hipótesis, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, se infiere que $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$. De aquí se deduce que $x \in B$. Así, dado que $x \in \mathcal{U}$ es fijo pero arbitrario, se ha establecido la Tesis

$$\forall\, x \in \mathcal{U} \,:\, (x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B)\,,$$

   En consecuencia, la propiedad planteada queda demostrada. $\square$

4. Se sabe que la proposición: $\forall\, A \subseteq \mathcal{U} \,:\, A \subseteq \mathcal{P}(A)$, es Falsa.
   Explicite dos elecciones posibles del conjunto A, que satisfaga $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. **10 puntos**

   Desarrollo: Recordando lo discutido en clase de Ayudantía (en otro contexto):

   - como el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, la inclusión planteada se satisface para $A := \emptyset$.
   - para $A := \{\emptyset\}$, se tiene que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, A\}$. Aquí también el conjunto A definido satisface la inclusión indicada.

- $x = \overset{\circ}{4}$ se lee: "x es un múltiplo de 4".
- $\mathcal{U}^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \mathcal{U}$,
- $(A^c)^c = A$,
- $A \cap A^c = \emptyset$,
- $A \cup A^c = \mathcal{U}$.
- $A \cup A = A$,
- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap \mathcal{U} = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- Dado un conjunto no vacío $M \subseteq \mathcal{U}$, se verifica: $a \in M \quad \Leftrightarrow \quad \{a\} \subseteq M$.