UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo III
525211
Certamen 1

1. **[20 puntos]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)\,(y-2)^2}{|x-1|^5+(y-2)^2} & , \quad (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & , \quad (x,y) = (1,2) \end{cases} .$$

   Determinar:

   a) Si f es continua en el punto $(1,2)$;

   b) Si f es diferenciable en el punto $(1,2)$;

   c) El valor mínimo, si existe, de la derivada direccional de f en el punto $(0,4)$.

2. **[20 puntos]** Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = g(u,v)$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y asuma que todos las derivadas parciales de segundo orden de g existen y son continuas. Considere el cambio de variables $u = x - y$, $v = x + y$.

   a) Decida si z verifica la relación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u^2};$$

   b) Defina ahora $g(u,v) = u\,cos(u\,v) - v$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y decida si la ecuación $g(u,v) = 0$ define implícitamente a $u = h(v)$ en una vecindad del punto $(0,0)$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(0,0)$.

3. **[20 puntos]** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = 4\,(x-1)^2\,e^y - 2\,(x-1)^4 - e^{4\,y} - (z-2)^2\,,\ \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

   Hallar todos los puntos críticos para f e identificarlos según su naturaleza. Además, determinar si f posee mínimo absoluto.

Concepción, jueves 6 de mayo de 2021.
DPC/dpc.