Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº1: Lógica y Conjuntos
Clase N°4 - 14/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Función Proposicional y Cuantificadores

Definición

Una **función proposicional** es una expresión descrita en función de algún o algunas variables que satisfacen lo siguiente: cada vez que se reemplazan valores de las variables en la función esta se transforma en una proposición.

Función Proposicional y Cuantificadores

Definición

Una **función proposicional** es una expresión descrita en función de algún o algunas variables que satisfacen lo siguiente: cada vez que se reemplazan valores de las variables en la función esta se transforma en una proposición.

Definición

Se llama **conjunto validez** de una función proposicional al conjunto de valores para los cuales resulta ser un proposición verdadera.

Ejemplos

Considere las siguientes funciones proposicionales:

$$p(t) : t + 2 \leq 3 - (t + 1); \qquad q(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2xy;$$
$$s(m) : m^2 + 5m + 6 = 0$$

Determine:

(a) el valor de verdad de las siguientes proposiciones $p(-1)$ $p(1)$, $q(0, 2)$, $q(\sqrt{2}, 3)$, $s(-2)$ y $s(\frac{1}{2})$.

(b) los siguientes conjuntos validez:

(b.1) $V_p = \{t \in \mathbb{Z} : p(t)\}$ y $V_p = \{t \in \mathbb{R} : p(t)\}$.
(b.2) $V_q = \{x, y \in \mathbb{R} : q(x, y)\}$.
(b.3) $V_s = \{m \in \mathbb{R} : s(m)\}$ y $V_s = \{m \in \mathbb{N} : s(m)\}$

Tipos de Cuantificadores

1. **Cuantificador Universal**

2. **Cuantificador existencial**

3. **Cuantificador existencia y unicidad**

Negación de Cuantificadores

Recordemos que la característica fundamental de la negación de una proposición es que posee el valor de verdad contrario al de la proposición dada. Es por esta razón que estudiaremos las negaciones de los cuantificadores, para poder analizar el valor de verdad de las proposiciones que los contengan.

Ejemplos

Determine el valor de valor de verdad y la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $p : \Big(\forall x \in \{-2,-1,0,1,2\}\Big)\Big(3(x^2+1) \leq 2x^2+7\Big)$

(b) $q : \Big(\forall a \in \mathbb{N}\Big)\Big(2a+1 \in \mathbb{N} \vee a^2+a+1 < 0\Big)$

(c) $v : \Big(\exists! x \in \mathbb{R}\Big)\Big(x^2 - 6 = 0\Big)$

(d) $r : \Big(\exists y \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\}\Big)\Big(y < 2 \rightarrow 0 < y^3 < \frac{1}{8}\Big)$

(e) $s : \Big(\forall y \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists x \in \mathbb{R}\Big)\Big(yx^2 - 4x - 2y = 0\Big)$

Ejercicios

Determine el valor de valor de verdad y la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $p: \ \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\left(x < 3 \to x^2 < \frac{1}{9}\right)$

(b) $q: \ \left(\exists! a \in \{1,2,3\}\right)\left(a - 2 = 2 \ \vee \ a + 2 > 3\right)$

(c) $r: \ \left(\forall u \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall v \in \mathbb{R}_0^+\right)\left(\frac{1}{u+v} \leq \frac{1}{u} \ \wedge \ u + v \geq u\right)$

(d) $s: \ \left(\forall m \in \mathbb{R}\right)\left(\exists n \in \mathbb{R}\right)\left((x-1)(y+2) \neq 0\right)$

(e) $t: \ \left(\forall x \in \mathbb{N}\right)\left(\exists! y \in \mathbb{N}\right)\left(x + y = 2\right)$