COMENTARIOS PARA 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II

LEONARDO FIGUEROA C.

Resumen. En este documento hago dos cosas. Primero, cito algunos resultados que no pertenecen a este curso pero son usados en él y posiblemente no sean tan conocidos. Segundo, doy demostraciones detalladas de algunas cosas que en clase quedaron parcialmente pendientes o de tarea informal.

Índice

1. Resultados previos

1.1. Análisis.

La siguiente definición fue adaptada de la glosa 'Continuity, modulus of' de la *Encyclopedia of Mathematics* en `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Continuity,_modulus_of&oldid=30705`.

Definición 1.1 (Módulo de continuidad uniforme)**.** Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Dada $f\colon X \to Y$ el módulo de continuidad uniforme de f, $\omega_f\colon R_{>0} \to R \cup \{\infty\}$, se define por

$$(\forall\, t > 0) \quad \omega_f(t) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d_X(x_1, x_2) \le t}} d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Proposición 1.2 (Propiedades de módulo de continuidad uniforme)**.** *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) y f como en la definición anterior.*

I. *Si f es uniformemente continua entonces*
   a) Existe $t_0 > 0$ tal que $\omega_f(t)$ es finito para todo $t \in (0, t_0)$,
   b) Bajo la condición adicional de que d_X es inducida por una norma $\|\cdot\|_X$, $w_f(t)$ es finito para todo $t > 0$.

II. $\lim_{t\to 0^+} \omega_f(t) = 0$ *si y solo si f es uniformemente continua.*

Fecha: 1 de abril de 2016.

III. *Si* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de reales positivos que tiende a* 0*, entonces* $\lim_{n\to\infty}\omega_f(r_n)=0$.

Demostración. Tarea (2015-I). □

Teorema 1.3 (Teorema de aproximación polinomial de Weierstrass)**.** *Sea* E *un subconjunto acotado de* R^N *y sea* $f\colon E\to R$ *uniformemente continua. Entonces existe una sucesión de polinomios* $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *que converge uniformemente a* f *en* E*.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. IV.16.1]. □

1.2. Topología.

La siguiente definición la tomé de [DiB02, § I.4].

Definición 1.4 (Base de una topología y base de una topología en un punto)**.** Sea X un conjunto y $\mathcal{U}$ una topología para X.

1. Una familia de abiertos (miembros de $\mathcal{U}$) $\mathcal{B}$ es una base para el espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ si para todo $\mathcal{O}\in\mathcal{U}$ y para todo $x\in\mathcal{O}$ existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subset\mathcal{O}$.
2. Dado $x\in X$, una familia $\mathcal{B}_x$ de abiertos es una base para el espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ en x si para todo abierto $\mathcal{O}\in\mathcal{U}$ que contiene a x existe $B\in\mathcal{B}_x$ tal que $x\in B\subset\mathcal{O}$.

Proposición 1.5 (Caracterización de base de una topología)**.**

1. *Sea* $(X,\mathcal{U})$ *un espacio topológico y* $\mathcal{B}$ *una base para* $(X,\mathcal{U})$*. Entonces,*
   a) *Todo* $x\in X$ *pertenece a algún* $B\in\mathcal{B}$*.*
   b) *Dados* B_1 *y* B_2 *en* $\mathcal{B}$ *y* $x\in B_1\cap B_2$ *existe* $B_3\in\mathcal{B}$ *tal que* $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$*.*
2. *Sea* X *un conjunto y sea* $\mathcal{B}$ *una colección de subconjuntos de* X *que satisfacen* 1a *y* 1b*. Entonces existe una topología* $\mathcal{U}$ *para* X *tal que* $\mathcal{B}$ *es una base de* $(X,\mathcal{U})$*; a saber:*
$$\mathcal{U}=\{\emptyset\}\cup\{\mathcal{O}\subset X\mid(\forall\,x\in\mathcal{O})\ (\exists\,B\in\mathcal{B})\ x\in B\subset\mathcal{O}\}\,.$$

Demostración. La primera parte sale directo de Definición 1.4 y de la definición de topología para X (a saber, una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset$ y X mismo pertenezcan a la colección y que además sea cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas). La segunda es [DiB02, Th. I.4.1]. □

Notar que directo de la definición se tiene toda base de una topología está contenida en la topología. La siguientes definiciones las tomé de [DiB02, § I.1, § I.4, § I.10].

Definición 1.6 (Axiomas de enumerabilidad)**.** Se dice que un espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ satisface el primer axioma de enumerabilidad si para cada punto $x\in X$ existe una base numerable para el espacio topológico en x. Se dice que un espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ satisface el segundo axioma de enumerabilidad si posee una base numerable.

Definición 1.7 (Continuidad)**.** Sean $(X,\mathcal{U}_X)$ e $(Y,\mathcal{U}_Y)$ dos espacios topológicos y sea $f\colon X\to Y$ una función.

1. f es continua en un punto $x\in X$ si para cada abierto $\mathcal{O}_Y\in\mathcal{U}_Y$ que contenga a $f(x)$ existe un abierto $\mathcal{O}_X\in\mathcal{U}_X$ tal que $x\in\mathcal{O}_X$ y $f(\mathcal{O}_X)\subset\mathcal{O}_Y$.

2. f es continua si es continua en x para todo $x \in X$; equivalentemente, para todo $\mathcal{O}_Y \in \mathcal{U}_Y$ se tiene $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \in \mathcal{U}_X$.

Definición 1.8 (Topología producto)**.** Si (X_1, U_1) y (X_2, U_2) son espacios topológicos la topología producto para el producto Cartesiano $X_1 \times X_2$ es aquella generada por la base

$$\{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \mid \mathcal{O}_1 \in \mathcal{U}_1,\ \mathcal{O}_2 \in \mathcal{U}_2\}.$$

Definición 1.9 (Espacio vectorial topológico)**.** Un espacio vectorial X equipado con una topología $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial topológico si sus operaciones de suma y multiplicación por escalar,

$$+\colon X \times X \to X \quad \text{and} \quad \cdot\colon R \times X \to X,$$

son continuas respecto a las topologías producto de $X \times X$ y $R \times X$ (para R, a menos que digamos otra cosa, siempre usaremos su topología convencional generada por los intervalos abiertos).

Teorema 1.10 (Teorema de extensión de Tietze)**.** *Sea X un espacio topológico normal, C un cerrado de X y $f\colon C \to R$ continua. Entonces f posee una extensión continua $f_*\colon X \to R$. Si existe una cota $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in C$ entonces la extensión f_* puede tomarse de modo que $|f_*(x)| \leq M$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. I.3.1]. □

1.3. Análisis Funcional.

La siguiente definición aparece [Bre11, § 3.4].

Definición 1.11 (Topología débil-$\star$)**.** Sea E un espacio de Banach. La topología débil-$\star$ es la topología definida sobre E' más gruesa (esto es, con la menor cantidad de conjuntos abiertos) que hace continuos a los funcionales $(\mathcal{J}(x))_{x\in E}$ definidos por

$$(\forall\, x \in E)\ (\forall\, F \in E') \quad \mathcal{J}(x)(F) := F(x).$$

Proposición 1.12 (Topología debil-$\star$ es Hausdorff)**.** *Sea E un espacio de Banach. Entonces la topología débil-$\star$ de E' es Hausdorff.*

Demostración. Esto es [Bre11, Prop. 3.11]. □

Proposición 1.13 (Convergencia en topología débil-$\star$)**.** *Sea E un espacio de Banach y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con miembros en E'. Entonces*

I. *$F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil-$\star$ si y solo si para todo $x \in E$, $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$.*
II. *Si $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ fuerte (esto es, en la norma para funcionales $E' \ni G \mapsto \|G\|_{E'} := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|G(x)|}{\|x\|_E} \in R$) entonces $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil (esto es, dado cualquier $\mathcal{G} \in (E')'$, $\mathcal{G}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{G}(F)$) y si $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil entonces $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil-$\star$.*
III. *Si $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil-$\star$ entonces $(\|F_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\|F\|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{E'}$.*
IV. *Si $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ en E'-débil-$\star$ y $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en E entonces $F_n(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$.*

Demostración. Esto es [Bre11, Prop. 3.13] □

1.4. Teoría de la Medida.

Teorema 1.14 (Teorema de Lusin). *Sea E un conjunto medible y acotado en R^N y sea $f\colon E \to R$ medible. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $E_\varepsilon \subset E$ tal que $|E \setminus E_\varepsilon| \leq \varepsilon$ y $f|_{E_\varepsilon}$ es continua.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. III.5.2]. □

Particularizamos la definición de convergencia en medida y un resultado que usa este concepto desde [Bog07] a los casos de nuestro interés. La siguiente definición fue particularizada desde [Bog07, Def. 2.2.2].

Definición 1.15 (Convergencia en medida). Sea E un conjunto medible y acotado de R^N y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre E y medibles. Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a una función medible f si, cualquiera sea $c > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \in E \,|\, |f(x) - f_n(x)| \geq c\}| = 0.$$

Teorema 1.16 (Convergencia en medida implica convergencia casi en todas partes de subsucesión). *Sea E un conjunto medible y acotado de R^N. Si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas sobre E y medibles converge en medida a una función medible f, entonces la sucesión posee una subsucesión $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f puntualmente casi en todas partes.*

Demostración. Esto es una particularización de [Bog07, Th. 2.2.5]. □

El resultado siguiente podría citarse tal como los anteriores (aparece, por ejemplo, en [DiB02, Prob. V.7.1–2]), pero su demostración ilustra el nivel de familiaridad con las técnicas de teoría de la medida que es necesario para este curso.

Corolario 1.17 (Convergencia en $L^p(R^N)$ implica convergencia casi en todas partes de subsucesión). *Sea $p \in [1, \infty]$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con miembros en $L^p(R^N)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$ entonces existe una subsucesión $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f puntualmente casi en todas partes.*

Demostración. $\boxed{\text{Caso } p = \infty}$ En este caso la sucesión original $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la tesis deseada; en efecto, de la definición de norma $L^\infty(R^N)$ y de la noción de supremo esencial,

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty &= \text{ess-supp}\, |f - f_n| \\ &= \inf \left\{ a \in R \,\middle|\, \mu\left(\left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > a\right\}\right) = 0\right\}. \end{aligned}$$

donde hemos denotado a la medida de Lebesgue por μ para evitar el exceso de líneas verticales. Combinando la definición de la noción de límite con el hecho de que el ínfimo que aparece en la expresión anterior es menor o igual a su distancia al número 0 y el hecho de que si un número es mayor que el ínfimo de un conjunto entonces es una cota superior para el conjunto obtenemos

$$(\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N})\ n \geq N_\epsilon \implies \mu\left(\left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > \epsilon\right\}\right) = 0.$$

Definamos al conjunto

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N_{2^{-j}}} \left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > 2^{-j}\right\}.$$

Al ser X unión numerable de conjuntos de medida nula, X es de medida nula. Ahora, si $z \notin X$, como el complemento de una unión es la intersección de los complementos

$$(\forall\, j \in \mathbb{N})\ n \geq N_{2^{-j}} \implies |f(z) - f_n(z)| \leq 2^{-j}.$$

Esto es, $f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z)$ cuando z está fuera del conjunto de medida nula X.

$\boxed{\text{Caso } p \in [1,\infty)}$ Comenzaremos tratando el caso ligeramente distinto en el que f y cada uno de los f_n pertenece a $L^p(Q)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(Q)$, donde Q es un hipercubo de la forma $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N) \subset R^N$ donde los a_i y los b_i son tales que la medida de Q es 1. Como para cualquier $g \in L^p(Q)$ se tiene

$$\|g\|_{L^1(Q)} \leq \|1\|_{L^{p'}(Q)} \|g\|_{L^p(Q)} = \|g\|_{L^p(Q)}$$

(donde p' es el conjugado de p; esto es, $1/p + 1/p' = 1$), tenemos que f y los f_n pertenecen a $L^1(Q)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^1(Q)$. Sea ahora $c > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} c\,\mu\left(\{x \in Q \,|\, |f - f_n| \geq c\}\right) &= \int_{\{x\in Q \,|\, |f-f_n|\geq c\}} c\, dy \\ &\leq \int_{\{x\in Q \,|\, |f-f_n|\geq c\}} |f - f_n|\ dy \leq \int_Q |f - f_n|\ dy \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Como $c > 0$ esto implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a f en el conjunto acotado Q de acuerdo a la Definición 1.15. Por lo tanto, podemos apelar al Teorema 1.16 para concluir que existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f en casi todas partes de Q. Nos conviene expresar esto de la siguiente manera: Existe una función estrictamente creciente $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto $W \subset Q$ tal que $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q \setminus W$.

Volvemos ahora al caso en el que f y los f_n pertenecen a $L^p(R^N)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$. Como $\mathbb{Z}^N$ es numerable existe una biyección $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^N$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos entonces el hipercubo

$$Q_m := [\beta(m)_1, \beta(m)_1 + 1) \times \cdots \times [\beta(m)_N, \beta(m)_N + 1).$$

Entonces $R^N = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. Esta unión es numerable y disjunta. La función $f|_{Q_1}$ y los $f_n|_{Q_1}$ pertenecen a $L^p(Q_1)$ y heredan la propiedad $f_n|_{Q_1} \xrightarrow{n\to\infty} f|_{Q_1}$ en $L^p(Q_1)$. Por lo tanto, de la discusión anterior sabemos que existen una función creciente $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto de medida nula $W_1 \subset Q_1$ tales que $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q_1 \setminus W_1$ (pues la restricción a $Q_1 \setminus W_1$ de la restricción a Q_1 de f es sencillamente $f|_{Q_1\setminus W_1}$ y similarmente para los $f_{\phi_1(n)}$). Ahora, $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, al ser subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, también converge en $L^p(R^N)$ a f. Por lo tanto, la función $f|_{Q_2}$ y los $f_{\phi_1(n)}\big|_{Q_2}$ pertencen a $L^p(Q_2)$ y heredan la propiedad $f_{\phi_1(n)}\big|_{Q_2} \xrightarrow{n\to\infty} f|_{Q_2}$. De nuevo existen una sucesión creciente $\phi_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto de medida nula $W_2 \subset Q_2$ tales que $(f_{\phi_1(\phi_2(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q_2 \setminus W_2$. Importantemente, por ser $(f_{\phi_1(\phi_2(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, la primera converge a f en $Q_1 \setminus W_1$ también. Continuando con este procedimiento tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existen funciones crecientes $\phi_m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y conjuntos de medida nula $W_m \subset Q_m$ tales que $(f_{(\phi_1\circ\cdots\circ\phi_m)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\bigcup_{l\leq m} (Q_l \setminus W_l)$.

Sea $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función seleccionadora diagonal definida por

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \psi(n) := (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)(n).$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 12 & \cdots \\
3 & \mathbf{3} & 3 & 3 & 3 & 12 & 23 & \cdots \\
4 & 4 & \mathbf{4} & 8 & 9 & 23 & 27 & \cdots \\
6 & 6 & 8 & \mathbf{9} & 12 & 27 & 36 & \cdots \\
8 & 8 & 9 & 11 & \mathbf{23} & 35 & 42 & \cdots \\
9 & 9 & 11 & 12 & 27 & \mathbf{36} & 44 & \cdots \\
10 & 10 & 12 & 18 & 32 & 42 & \mathbf{49} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Figura 1. Ilustración de subsucesión diagonal. La columna j (numerada a partir de 1) contiene los valores que asume $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_j$ donde cada $\phi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es un ejemplo de función estrictamente creciente. Los valores en la columna $j+1$ fueron seleccionados desde la columna j y la sucesión diagonal, a partir de su m-ésima entrada, obtiene todos sus valores, en último término, desde la columna m.

Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, la subsucesión diagonal $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, a partir de su m-ésima entrada, es subsucesión de $(f_{(\phi_1\circ\cdots\circ\phi_m)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. Figura 1) y por lo tanto hereda de ésta la propiedad de que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\bigcup_{l\leq m}(Q_l \setminus W_l)$. Como esto sucede cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}} (Q_l \setminus W_l) = R^N \setminus \bigcup_{l\in\mathbb{N}} W_l.$$

Como $W := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} W_l$ es unión numerable de conjuntos de medida nula, W es de medida nula y hemos obtenido el resultado deseado. □

Teorema 1.18 (Cambio de variable lineal e invertible)**.** *Sea $L\colon R^N \to R^N$ lineal e invertible. Entonces, $g \in L^1(R^N)$ si y solo si $g \circ L \in L^1(R^N)$. Además,*

$$\int_{R^N} g(L(y))\, |\det(\nabla L(y))|\, dy = \int_{R^N} g(x)\, dx$$

Demostración. Esto sale de combinar [Bog07, Th. 3.6.1], [Bog07, Cor. 3.6.4] y de descomponer R^N en una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos. □

Observación 1.19 (Respecto a los cambios de variable). Para cambios de variable no lineales ver, por ejemplo, [Bog07, § 3.7] o [Rud66, Th. 8.26–28]. Un resultado muy general que ni siquiera exige invertibilidad de la transformación aparece en [EG92, Th. 3.3.3/2], pero involucra otras medidas que no se suelen estudiar en los cursos anteriores.

2. Resultados relevantes para el capítulo 2 de [Tar07]

Este resultado aparece mencionado la página 11 de [Tar07] pero en su momento no lo pude encontrar entre los libros que suelo usar para encontrar resultados de análisis real o teoría de la medida.

Teorema 2.1 (Densidad débil-$\star$-secuencial de $C_c(R^N)$ en $L^\infty(R^N)$)**.** *$C_c(R^N)$ es secuencialmente denso en la topología débil-$\star$ de $L^\infty(R^N)$.*

Demostración. Esta demostración la construí a partir de una para un resultado ligeramente distinto que hallé en `http://math.stackexchange.com/questions/23387/on-the-density-of-c0-1-in-the-space-l-infty0-1`.

Sea $f \in L^\infty(R^N)$ y asumimos sin pérdida de generalidad que $|f| \le \|f\|_\infty$ en todo R^N. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos f_n mediante la fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| < n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $|f_n| \le \|f\|_\infty$. Por el teorema de Lusin (teorema 1.14, usando $E = B(0,n)$ y $f = f_n$) sabemos que, dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un cerrado $E_{n,m} \subset B(0,n)$ tal que $f_n|_{E_{n,m}}$ es continua y $|B(0,n) \setminus E_{n,m}| \le 1/m$.

Definimos los conjuntos $A_{n,m} = \{x \in R^N \,|\, n + \zeta(m) \le |x| \le n+1\}$ y $A'_{n,m} = \{x \in R^N \,|\, n \le |x| < n + \zeta(m)\}$ donde $\zeta(m) \in (0,1)$ se elige de tal manera que $\left|A'_{n,m}\right| \le 1/m$ y notamos que $A_{n,m}$ es cerrado. Entonces $f_{n,m} := f_n|_{E_{n,m} \cup A_{n,m}}$ también es continua (pues lo es en $E_{n,m}$ y en $A_{n,m}$ (donde es nula) y esos conjuntos son disjuntos entre sí) y definida sobre un dominio cerrado. Por su condición de restricción de f_n, $|f_{n,m}| \le \|f\|_\infty$. Por el teorema de extensión de Tietze (teorema 1.10) se puede extender cada $f_{n,m}$ a una función continua $\hat{f}_{n,m} \colon \overline{B(0,n+1)} \to R$ que también es acotada por $\|f\|_\infty$. Como $A_{n,m}$ está contenido en el dominio de la función que fue extendida, $\hat{f}_{n,m}$ se anula ahí también. Por lo tanto, la extensión por cero de $\hat{f}_{n,m}$ a todo R^N, que denotamos por $\tilde{f}_{n,m}$, pertenece a $C_c(R^N)$. Notamos que $\tilde{f}_{n,m}$ difiere de f_n solamente en un subconjunto de $(B(0,n) \setminus E_{n,m}) \cup A'_{n,m}$, el cual tiene medida menor o igual que $2/m$ y que hereda $\|\tilde{f}_{n,m}\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

Sea ahora $g \in L^1(R^N)$. Entonces

$$\int_{R^N} (f - \tilde{f}_{n,n})\, g = \int_{R^N} (f - f_n)\, g + \int_{R^N} (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g.$$

El primer término del lado derecho tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por el teorema de convergencia dominada pues los $f_n\, g$ tienen puntualmente a $f\, g$ y cada $f_n\, g$ es dominada por la función $|fg| \in L^1(R^N)$. Para el segundo se tiene

$$\left| \int_{R^N} (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g \right| \le \int\limits_{(B(0,n)\setminus E_{n,n}) \cup A'_{n,n}} \left| (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g \right| \le 2\|f\|_\infty \int\limits_{(B(0,n)\setminus E_{n,n}) \cup A'_{n,n}} |g|$$

y la última expresión tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue. □

Recordamos que la función $\varrho \colon R^N \to R$ definida por

$$(\forall\, x \in R^N) \quad \varrho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_c^\infty(R^N)$.

Proposición 2.2 (Ejemplo de falla de asociatividad de convolución)**.** *Sobre R sea $f_1 \equiv 1$ (función constante), $f_2 = \varrho'$ y f_3 la función de Heaviside (esto es, $f_3(x) = 0$ si $x < 0$ y $f_3(x) = 1$ si $x \ge 0$). Entonces $(f_1 \star f_2) \star f_3 \ne f_1 \star (f_2 \star f_3)$.*

Demostración. Observamos que f_2 posee las siguientes propiedades:

$$f_2 \in C_c^\infty(R), \quad \operatorname{supp}(f_2) = [-1,1], \quad \int_R f_2(x)\, dx = 0, \quad \int_R (1-y) f_2(y)\, dy \ne 0$$

(las últimas dos se pueden demostrar observando que las integrales no cambian si se restringen a $(-1,1)$ y efectuando integración por partes). Observamos que, cualquiera sea $x \in R$, $(f_1 \star f_2)(x) = \int_R f_1(x-y) f_2(y)\, dy = \int_R f_2(y)\, dy = 0$, por lo que $f_1 \star f_2 \equiv 0$. Por otro lado, sea $f_4 := f_2 \star f_3$. Como $f_2 \in L^1(R)$ y $f_3 \in L^\infty(R)$, [Tar07, Lem. 2.1] nos dice que $f_4 \in BUC(R)$; en particular, f_4 es continua. Además, para todo $x \in R$,

$$f_4(x) = \int_R f_2(y) f_3(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\, dy,$$

de lo que se desprende que f_4 se anula si $x > 1$ o $x < -1$. Luego, $\mathrm{supp}(f_4)$ está contenido en $[-1,1]$ y así $f_4 \in C_c(R)$. Como $f_1 \in L^\infty(R)$ y $f_4 \in L^1(R)$ su convolución $f_1 \star f_4$ está bien definida y pertenece a $BUC(R)$. Además, para todo $z \in R$,

$$\begin{aligned}
(f_1 \star f_4)(z) &= \int_R f_1(z-x) f_4(x)\, dx = \int_R f_4(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f_4(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} f_2(y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,x)}(y) f_2(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} f_2(y) \int_{-1}^{1} \chi_{(-1,x)}(y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f_2(y) \int_{-1}^{1} \chi_{(y,1)}(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} f_2(y) \int_{y}^{1} 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f_2(y)(1-y)\, dy,
\end{aligned}$$

donde se usó el teorema de Fubini para $(-1,1)\times(-1,1)$ y el hecho de que si $-1 < x, y < 1$ entonces $\chi_{(-1,x)}(y) = \chi_{(y,1)}(x)$. De esta manera, $(f_1 \star f_2) \star f_3 = 0 \star f_3 \equiv 0$, pero $f_1 \star (f_2 \star f_3) = f_1 \star f_4 \equiv \int_{-1}^{1} f_2(y)\, dy \neq 0$. $\square$

Observación 2.3 (Contraejemplo viola restricciones sobre parámetros). En el ejemplo anterior $f_1 \in L^a(R)$ con $a = \infty$ solamente, $f_2 \in L^b(R)$ cualquiera sea $b \in [1,\infty]$ y $f_3 \in L^c(R)$ con $c = \infty$ solamente. De cualquier manera que se elija a b se viola al menos una de las condiciones

$$a, b, c \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1; \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2,$$

que son las que garantizan (cf. [Tar07, p. 11]) en general la asociatividad de la convolución de funciones en $L^a(R^N)$, $L^b(R^N)$ y $L^c(R^N)$.

3. Resultados relevantes para el capítulo 4 de [Tar07]

Si Ω es un abierto de R^N y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, en [Tar07, p. 18-19] se define la distribución inducida por f (que se denota también por f) por $\varphi \ni C_c^\infty(\Omega) \mapsto \langle f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\, \varphi \in R$. Las distribuciones de esta forma son llamadas distribuciones regulares. Demostraremos que cada distribución regular es inducida por una única función en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Antes demostraremos un corolario de la primera parte del lema 3.2 de [Tar07].

Corolario 3.1 (Convergencia en $L^p_{\mathrm{loc}}(R^N)$ de convolución con sucesión suavizante)**.** *Sean $p \in [1,\infty)$, $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(R^N)$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante. Entonces, para todo compacto $K \subset R^N$, $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(K)$.*

Demostración. Sea K un compacto de R^N. Como todos los soportes de los ρ_n están contenidos en bolas con centro en el origen cuyos radios tienden a cero a medida que n tiende a infinito, existe $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B(0,r)$. El conjunto $K^{(r)} := K + \overline{B(0,r)}$ sigue siendo un compacto de R^N. Luego, $f|_{K^{(r)}} \in L^p(K^{(r)})$. Sea $\hat{f}$ la extensión por cero a todo R^N de esta última función. Se sigue que $\hat{f} \in L^p(R^N)$. Así,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_K |f(x) - (f \star \rho_n)(x)|^p \, dx &= \textstyle\int_K \left|\hat{f}(x) - (\hat{f} \star \rho_n)(x)\right|^p \, dx \\ &\leq \textstyle\int_{R^N} \left|\hat{f}(x) - (\hat{f} \star \rho_n)(x)\right|^p \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se justifica porque todas las evaluaciones de f que se hacen en la primera integral ocurren dentro de $K^{(r)}$ y el límite sale de [Tar07, Lem 3.2(i)]. □

Corolario 3.2 (Convergencia en $L^p_{\text{loc}}(R^N)$ implica convergencia casi en todas partes de subsucesión)**.** *Sea $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p_{\text{loc}}(R^N)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con miembros en $L^p_{\text{loc}}(R^N)$ tal que para todo compacto $K \subset R^N$, $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(K)$. Entonces existe una subsucesión $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{\phi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f$ puntualmente casi en todas partes.*

Demostración. Dada cualquier función a definida en cualquier subconjunto de R^N denotaremos por $\tilde{a}$ a su extensión por cero a todo R^N. Sea $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados de R^N tal que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m = R^N$ (podrían ser, por ejemplo, las clausuras de los hipercubos usados en la demostración del Corolario 1.17). Por hipótesis $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(Q_1)$. Luego, $\widetilde{f_n} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{f}$ en $L^p(R^N)$ y por el Corolario 1.17 obtenemos que existe una subsucesión $(\tilde{f}_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto $W_1 \subset R^N$ de medida nula tal que $\tilde{f}_{\phi_1(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{f}$ puntualmente en $R^N \setminus W_1$. Luego, $f_{\phi_1(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f$ puntualmente en $Q_1 \setminus W_1$. Por hipótesis y porque las subsucesiones heredan los límites de las sucesiones madre tenemos que $f_{\phi_1(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(Q_2)$. Podemos argumentar similarmente a como recién hicimos para afimar que existe una subsucesión $(f_{\phi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{\phi_2(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $Q_1 \setminus W_1$ todavía y también en $Q_2 \setminus W_2$ donde W_2 es de medida nula. Podemos continuar con este argumento para afirmar que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen funciones seleccionadoras $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y conjuntos de medida nula W_k tales que cada $(f_{\phi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(f_{\phi_j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ y converge puntualmente en $Q_j \setminus W_j$ para todo $j \leq k$. Por el argumento diagonal usado también en la demostración del Corolario 1.17 tenemos que la sucesión diagonal $(f_{\phi_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de la sucesión original $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y cumple con $f_{\phi_n(n)} \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Q_n \setminus W_n) = R^N \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ donde $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, por ser unión numerable de conjuntos de medida nula, es de medida nula también. □

Proposición 3.3 (Unicidad de función que induce cada distribución regular)**.** *Sean $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tales que inducen la misma distribución; esto es,*

$$(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \qquad \int_\Omega f\,\varphi = \int_\Omega g\,\varphi. \tag{3.1}$$

Entonces $f = g$ casi en todas partes.

Demostración. Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante especial y para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\Omega_m := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \overline{B(x, 1/m)} \subset \Omega \right\}.$$

Cada Ω_m es un abierto contenido en Ω y $\bigcup_{M\in\mathbb{N}}\Omega_M = \Omega$. Fijemos por el momento un $M \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $x \in \Omega_M$ y para todo $m \geq M$ tendremos que la función $R^N \ni y \mapsto \rho_m(x-y) \in R$ hereda el tener derivadas convencionales continuas de todos los órdenes y además tiene su soporte, que es compacto, contenido en Ω. Por lo tanto ella (*sensu stricto*, su restricción a Ω) sirve como función *test*/de prueba en (3.1). Denotemos por $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ a las extensiones de f y g por cero a todo R^N. Obviamente $\tilde{f} - \tilde{g} \in L^1_{\text{loc}}(R^N)$. Para todo $x \in \Omega_M$ y $m \geq M$,

$$((\tilde{f}-\tilde{g}) \star \rho_m)(x) = \int_{R^N} (\tilde{f}(y) - \tilde{g}(y))\rho_m(x-y)\,dy = \int_\Omega (f(y)-g(y))\rho_m(x-y)\,dy \overset{(3.1)}{=} 0. \tag{3.2}$$

Por otro lado, sabemos desde el Corolario 3.1 que $(\tilde{f}-\tilde{g}) \star \rho_m \xrightarrow{m\to\infty} \tilde{f}-\tilde{g}$ en $L^1_{\text{loc}}(R^N)$. Se sigue desde el Corolario 3.2 que existe una función $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $(\tilde{f}-\tilde{g})\star\rho_{\phi(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \tilde{f}-\tilde{g}$ puntualmente en $R^N \setminus W$, con $|W| = 0$. Se sigue por (3.2) que $\tilde{f}-\tilde{g} = 0$ en $\Omega_M \setminus W$. Como ni ϕ ni W dependen de M, este argumento arroja que $\tilde{f}-\tilde{g} = 0$ en $\bigcup_{M\in\mathbb{N}}(\Omega_M \setminus W) = \Omega \setminus W$. □

Proposición 3.4 (Intersección de abierto en R^N y recta)**.** *Sea Ω un abierto de R^N. Dado $x' \in R^{N-1}$, el conjunto $\Omega_{x'} = \{x \in R \mid (x', x) \in \Omega\}$ es un abierto de R puede escribirse como unión numerable de intervalos abiertos.*

Demostración. Que $\Omega_{x'}$ es abierto de R es casi obvio. Dado $x \in \Omega_{x'}$, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \Omega_{x'}$. Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{N}$ sabemos que existen $c, \delta \in \mathbb{Q}$ que cumplen $c \in (x - r/3, x + r/3)$ y $\delta \in (r/2, 2r/3)$. Así, $x \in B(c,\delta) \subset B(x,r) \subset \Omega_{x'}$. Por lo tanto, la unión indexada por $x \in \Omega_{x'}$ de los intervalos de la forma $B(c,\delta)$ coincide con $\Omega_{x'}$. Concluimos observando que estos intervalos son a lo más una cantidad numerable porque $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Observación 3.5 (Espacios euclidianos satisfacen segundo axioma de enumerabilidad). Esencialmente el mismo argumento propuesto en la Proposición 3.4 demuestra que R^N con su topología usual satisface el segundo axioma de enumerabilidad Definición 1.6.

Referencias

[Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Volumes I and II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007. MR 2267655 (2008g:28002)

[Bre11] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)

[DiB02] Emmanuele DiBenedetto, *Real analysis*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002. MR 1897317 (2003d:00001)

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001)

[Rud66] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966. MR 0210528 (35 #1420)

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)

Lista de resultados