UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra II. 525148

12 de mayo de 2015
Prof.: Anahí Gajardo

Vectores y valores propios

En este capítulo trabajamos con transformaciones lineales de un espacio en sí mismo.

Definición 1. *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal $T : V \to V$, decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un* valor propio *de T si existe $v \neq \Theta$ tal que*

$$T(v) = \lambda v,$$

en tal caso, decimos que v es un vector propio *de T asociado a λ.*
El conjunto de valores propios de T se llama espectro *de T y se denota por $\sigma(T)$.*
Si λ es un valor propio de T, se define el espacio propio asociado a λ *por*

- $S_\lambda = \{v \mid T(v) = \lambda v\}$.

Observación 1. *Dado λ un valor propio de T, se cumple:*

$$S_\lambda \;=\; Ker(T - \lambda id)$$

Por lo tanto S_λ es un sub espacio vectorial de V.
Los elementos de S_λ son todos vectores propios de T, con excepción de Θ, que en ningún caso es un vector propio.

Proposición 1. *Dada $T : V \to V$ lineal y B es una base de V, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *λ es valor propio de T*
2. *$Ker(T - \lambda id) \neq \{\Theta\}$*
3. *$n(T - \lambda id) \neq 0$*
4. *$n([T]_B^B - \lambda I) \neq 0$*
5. *$det([T]_B^B - \lambda I) = 0$*

Definición 2. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un* valor propio *de A si existe $y \neq \Theta$ tal que*

$$Ay = \lambda y,$$

en tal caso, decimos que y es un vector propio *de A asociado a λ.*
El conjunto de valores propios de A se llama espectro *de A y se denota por $\sigma(A)$.*

Proposición 2. *Dada $T : V \to V$ lineal y B una base de V, entonces*

- $\lambda \in \sigma([T]_B^B) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$
- *v es vector propio de T asociado a λ si y solo si $[u]_B$ es vector propio de $[T]_B^B$ asociado a λ.*

Proposición 3. *Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces λ es valor propio de $A \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$.*

Definición 3. *Dado que el determinante de una matriz se obtiene a partir de multiplicaciones y sumas de sus coeficientes, resulta que $det(A - xI)$ es un polinomio en la variable x; lo llamamos* polinomio característico de A, *y lo denotamos por $p_A(x)$.*

Proposición 4. *Si A y B son semejantes, entonces:*

- $p_A(x) = p_B(x)$,
- $\sigma(A) = \sigma(B)$,
- *Si M cumple $A = M^{-1}BM$ e y es vector propio de A, entonces My es vector propio de B.*

Definición 4. *Dada $T : V \to V$ lineal y B una base de V, entonces $det([T]_B^B - xI)$ es el polinomio característico de T y se denota $p_T(x)$.*

Definición 5. *Si el polinomio característico de T se factoriza como sigue:*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2}..(x - \lambda_k)^{r_k}q(x),$$

donde $q(x)$ es un polinomio sin raíces en $\mathbb{K}$, entonces r_i se llama multiplicidad algebraica del valor propio λ_i de T.
Por otra parte, la multiplicidad geométrica de λ_i se define como $g_i = dim(S_{\lambda_i})$.

Teorema 1. *Si λ es un valor propio de T, y r y g son su multiplicidad algebraica y geométrica, respectivamente, entonces:*

$$1 \leq g \leq r.$$

Proposición 5. *Si $v_1, .., v_k$ son vectores propios asociados a $\lambda_1 < \lambda_2 < .. < \lambda_k$, entonces $\{v_1, .., v_k\}$ es l.i.*
Además, S_{λ_1}, ..,S_{λ_k} están en suma directa.

Observación 2.

$$T \text{ es invertible } \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(T)$$

Definición 6. *Una transformación lineal $T : V \to V$ se dice diagonalizable si existe una base B de V tal que $[T]_B^B$ es diagonal.*

Teorema 2. *T es diagonalizable si y solo si existe una base de V formada solo por vectores propios de T.*

Teorema 3. *Si $g_1, .., g_k$ son las multiplicidades geométricas de los valores propios de T, entonces T es diagonalizable si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} g_i = dim(V)$.*

Teorema 4. *T es diagonalizable si y solo si $p_T(x)$ se factoriza en factores lineales y para cada valor propio λ de T se cumple $g_\lambda = r_\lambda$.*