UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PAUTA ER: MAT 521218 Sección 2

P1 Verifique que $y_1(x) = e^{-x}$ es solución homogénea de la ecuación

$$xy'' + (x-1)y' - y = 3, \quad x > 0$$

y que $y_p(x) = -3$ es una solución particular. Construir la *solución general* de dicha ecuación.

Solución: Procedemos por etapas

1º Como $y_1'' = y_1$ e $y_1' = -y_1$ se tiene

$$xy_1 - (x-1)y_1 - y_1 = 0.$$

como $y_p''(x) = y_p'(x) = 0$, se tiene que $-y_p(x) = 3$.

2º Para construir la solución general homogénea, aplicamos el método de reducción de orden (o alternativamente la fórmula de Abel para el Wronskiano). Definimos la segunda solución homogénea linealmente independiente de y_1 como $y_2(x) = v(x)e^{-x}$, cuyas primeras dos derivadas son:

- $y_2'(x) = -v(x)e^{-x} + v'(x)e^{-x}$
- $y_2''(x) = v(x)e^{-x} - 2v'(x)e^{-x} + v''(x)e^{-x}$

reemplazando estas derivadas en la ecuación homogénea se tiene:

$$x(v(x) - 2v'(x) + v''(x))e^{-x} + (x-1)(-v(x) + v'(x))e^{-x} - v(x)e^{-x} = 0$$

es decir la función v satisface la ecuación:

$$xv'' - (x+1)v' = 0$$

de cuya solución general elegimos $v(x) = (x-1)e^{x}$. Luego la solución general homogénea es

$$y_h(x) = ae^{-x} + b(x-1), \qquad a, b \quad \text{constantes arbitrarias.}$$

3º La solución general es

$$y(x) = -3 + ae^{-x} + b(x-1) \quad \text{constantes arbitrarias}$$

P2 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} x''(t) + x(t) + y'(t) & = & u(t-1)(t-1) \\ x'(t) + \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau & = & y(t) \end{array}\right|$$

si los datos iniciales son $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

Solución: Sean $\hat{x}(s) = L[x](s)$ e $\hat{y}(s) = L[y](s)$ las transformadas de Laplace de las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Luego en el plano s, el sistema propuesto se escribe

$$\left.\begin{array}{rcl} (s^2+1)\hat{x} + s\hat{y} & = & 1 + \frac{e^{-s}}{s^2} \\ (s + \frac{1}{s})\hat{x}(s) - \hat{y}(s) & = & 0 \end{array}\right|$$

el cual se puede re-escribir como

$$\left.\begin{array}{rcl} (s^2+1)\hat{x} + s\hat{y} & = & 1 + \frac{e^{-s}}{s^2} \\ (s^2+1)\hat{x}(s) - s\hat{y}(s) & = & 0 \end{array}\right|$$

enseguida sumando las dos ecuaciones se obtiene una expresión para $\hat{x}(s)$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) &= \frac{1}{2(s^2+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} \\ &= \frac{1}{2(s^2+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2+1} \end{aligned}$$

y restando la segunda ecuación del sistema de la primera se infiere que $\hat{y}(s)$

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{2s} + \frac{e^{-s}}{2s^3}$$

Finalmente recordando pares de transformadas se concluye que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\sin(t) + u(t-1)(t-1) - u(t-1)\sin(t-1) \\ y(t) &= \frac{1}{2} + u(t-1)(t-1)^2 \end{aligned}$$

tienen transformadas de Laplace coincidentes con las deducidas más arriba.

P3 Resuelva el siguiente sistema de EDO.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= y(t) - z(t) \\ z'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Desarrollo:

Definimos $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Entonces el sistema considerado se puede escribir como

$$X'(t) = AX(t), \tag{1}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es

$$p(\lambda) := |A - \lambda I| \, = \, -\lambda(1-\lambda)^2,$$

cuyas raíces son 0 y 1 con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

El sistema $Ax = 0x$, o sea $Ax = 0$, tiene como soluciones a $c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $c \in \mathbb{R}$. Luego, el sistema fundamental de soluciones (dado en clases) de (1) contiene a la función

$$X_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora vemos que todas las soluciones del sistema $Ax = 1x = x$ son de la forma $c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, 1 es un valor propio degenerado para el cual el sistema $Ax = 1x$ tiene una única solución (salvo multiplicación por una constante). Como consecuencia, el sistema fundamental de soluciones (dado en clases) de (1) contiene a las funciones

$$X_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$X_3(t) \, = \mathrm{e}^t \left(t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \right),$$

donde $(A - 1I)u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una solución de $(A - 1I)u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego

$$X_3(t) \, = \mathrm{e}^t \left(t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Así, toda solución del sistema está dada por

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 - 2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix},$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.