PAUTA ER

EDO (521218-525221)

Problema 1 ([15 puntos])
Esta pregunta consta de dos item:

(i) (7 puntos) ¿Tendrá una única solución el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\dfrac{y(x)}{x}} \\ y(-1) = -2\,? \end{cases}$$

Justifique su respuesta.

(ii) (8 puntos) (8 puntos) Solucione el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\dfrac{y(x)}{x}} \\ y(1) = 4 \end{cases}.$$

Solución

(i) La EDO se reescribe como

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

con

$$f(x, y) = \sqrt{y/x}.$$

Tenemos que todos los puntos en $]-\infty, 0[\times]-\infty, 0]$ pertenecen al dominio de f. Además, f es continua en todo punto de $]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$. La derivada parcial con respecto a y de la función $(x, y) \mapsto y/x$ existe y es continua para todo $y \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$. Aplicando la regla de la cadena obtenemos que $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ existe y es continua en $]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$.

Ya que $(-1, -2) \in]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$ y que f y $\frac{\partial}{\partial y} f$ son continuas en todos los puntos del rectángulo abierto $]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$, aplicando el teorema de existencia y unicidad deducimos que

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\dfrac{y(x)}{x}} \\ y(-1) = -2 \end{cases} ?$$

tiene una única solución definida alrededor de -1.

(ii) Como $1 > 0$ y $4 > 0$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\dfrac{y(x)}{x}} \\ y(1) = 4 \end{cases}.$$

tiene una única solución definida en un intervalo que contiene a 1 y está incluido en $]0,+\infty[$. Luego, $y(x)>0$. Por lo tanto,

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

[3 **puntos**]

Integrando llegamos a

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

de donde

$$2\sqrt{y(x)}=2\sqrt{x}+C,$$

con $C\in\mathbb{R}$. Así que

$$y(x)=\left(\sqrt{x}+K\right)^2,$$

con $K\in\mathbb{R}$. [3 **puntos**]

Como $y(1)=4$,

$$4=y(1)=(1+K)^2.$$

Entonces, $2=1+K$. Luego, $K=1$. [2 **puntos**]

Problema 2 ([15 puntos])
Usando el método de aniquiladores encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$Y''(x)-4\,Y'(x)+4\,Y(x)=2\,e^{2x} \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Solución

Tenemos que

$$Y(x)=Y_h(x)+Y_p(x),$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de la EDO

$$Y_h''(x)-4\,Y_h'(x)+4\,Y_h(x)=0 \tag{1}$$

y $Y_p(x)$ es una solución (cualquiera) de la EDO

$$Y_p''(x)-4\,Y_p'(x)+4\,Y_p(x)=2\,e^{2x}$$

[2 **puntos**]

El polinomio característico asociado a (1) es:

$$p(\lambda)=\lambda^2-4\,\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$

Por lo tanto,

$$Y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2\,x\,e^{2x},$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. [3 **puntos**]

A continuación, aplicaremos el método de Aniquiladores para encontrar $Y_p(x)$. Definimos $D = d/dx$. Como $e^{2x} \in Kern\,(D-2)$ y

$$(D-2)^2\, Y_p(x) = 2\, e^{2x},$$

$$(D-2)^3\, Y_p(x) = 0.$$

Por lo tanto,

$$Y_p(x) = K_1 e^{2x} + K_2 x\, e^{2x} + K_3 x^2\, e^{2x}$$

para ciertos valores de $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$. [5 **puntos**]

Ya que $(D-2)^2\left(K_1 e^{2x} + K_2 x\, e^{2x}\right) = 0$,

$$K_3\,(D-2)^2\left(x^2 e^{2x}\right) = 2\, e^{2x}$$

y K_1, K_2 pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Luego, elegimos $K_1 = K_2 = 0$. Además

$$K_3\left(4x^2 + 8x + 2 - 4\left(2x + 2x^2\right) + 4x^2\right)\right) e^{2x} = 2\, e^{2x},$$

de donde obtenemos $K_3 = 1$. Así que

$$Y_p(x) = x^2 e^{2x}.$$

[5 **puntos**]

Finalmente, todas las soluciones buscadas son:

$$Y(x) = C_1 e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x} + x^2 e^{2x}.$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Problema 3. ([**15 puntos**])

Usando valores y vectores propios, determine la solución general del sistema de EDO

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Desarrollo: En este caso la matriz asociada al sistema homogéneo dado es: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Sabemos que los autovalores de A son los ceros de

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I}) = (2-\lambda)^2 + 16$$

de donde obtenemos $\lambda_1 = 2 \,-\, 4\,i$ y $\lambda_2 = 2 \,+\, 4\,i$.

Ahora caracterizamos el espacio propio asociado a $\lambda_1 = 2 - 4\,i$, , esto es,

$$S_{\lambda_1} := \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2 \,:\, (\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\theta} \right\}$$

Tenemos

$$\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} - (2 \,-\, 4\,i)\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4\,i & 4 \\ -4 & 4\,i \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4\,i \end{pmatrix}$$

Luego, si consideramos $\boldsymbol{v} = (a, b)^t \in \mathbb{C}^2$ sigue que

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4\,i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = b\,i$$

Así,

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

De la teoría vista en clases, en este caso, dos soluciones l.i. para el sistema de EDO homogéneo dado, vienen dadas por

$$X_1(t) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{(2-4\,\mathrm{i})\mathrm{t}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{y} \quad X_2(t) = \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{(2-4\,\mathrm{i})\mathrm{t}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Realizando los cálculos anteriores, se sigue

$$X_1(t) \;=\; e^{2t} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_2(t) \;=\; e^{2t} \begin{pmatrix} cos(4t) \\ -sen(4t) \end{pmatrix} \qquad \boxed{\textbf{8 puntos}}$$

Finalmente, la solución general del sistema dado es:

$$X(t) \;=\; C_1 X_1(t) \;+\; C_2 X_2(t)$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias. En modo explícito

$$X(t) \;=\; C_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix} \;+\; C_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} cos(4t) \\ -sen(4t) \end{pmatrix}$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Problema 4. **[15 puntos]**
Determine la solución de la siguiente ecuación integro-diferencial.

$$\begin{cases} y'\,(t) - 4y\,(t) - \displaystyle\int_0^t y\,(u) = 2 \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$$

Desarrollo
Aplicando Transformada de Laplace a ambos miembros en la igualdad del problema y denominando $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, tenemos

$$sY(s) - 1 - 4Y(s) - Y(s)\frac{1}{s} = \frac{2}{s}$$

de donde

$$Y(s)\left(s - 4 - \frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s} + 1.$$

Como $\left(s - 4 - \dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{s^2 - 4s - 1}{s}$, sigue que

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \left(\frac{s}{s^2-4s-1}\right)\left(\frac{2}{s}+1\right) \\
&= \frac{2}{s^2-4s-1} + \frac{s}{s^2-4s-1}.
\end{aligned}
$$

[7puntos]

Aplicando Transformada inversa, sigue

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-2)^2-5}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-2)^2-5}\right](t) \\
&= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-5}\right](t) + e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-5}\right](t) + e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-5}\right](t) \\
&= e^{2t}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\, senh(\sqrt{5}t) + cosh(\sqrt{5}t)\right).
\end{aligned}
$$

[8 puntos]

JMS/CMG//jms/cmg
Diciembre, 10 de 2024.

Propiedades de la Transformada de Laplace:

- $\mathcal{L}\left(f'\right)(s) = s\,\mathcal{L}\left(f\right)(s) - f\left(0\right)$
- $\mathcal{L}\left(e^{-\beta x} f\left(x\right)\right)(s) = \mathcal{L}\left(f\right)(s+\beta)$,
- $\mathcal{L}\left(x\, f\left(x\right)\right)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(f\right)(s)$
- $\mathcal{L}\left(t^k\, f\left(t\right)\right)(s) = \left(-1\right)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}\left(f\right)(s)$
- $\mathcal{L}\left(f\left(t-a\right)\mathcal{U}_a\left(t\right)\right)(s) = e^{-a\,s}\mathcal{L}\left(f\right)(s)$ cuando $a \geq 0$
- $\mathcal{L}\left(g\left(t\right)\mathcal{U}_a\left(t\right)\right)(s) = e^{-a\,s}\mathcal{L}\left(g\left(t+a\right)\right)(s)$ cuando $a \geq 0$
- $\mathcal{L}\left(a\,g + b\,h\right)(s) = a\,\mathcal{L}\left(g\right)(s) + b\,\mathcal{L}\left(h\right)(s)$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}\left(f * g\right)(s) = \mathcal{L}\left(f\right)(s)\,\mathcal{L}\left(g\right)(s)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)G\left(s\right)\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(G\left(s\right)\right)(t)$
- $\mathcal{L}\left(\int_0^t f\left(u\right)\,du\right)(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left(f\right)(s)$

Transformadas de Laplace:

- $\mathcal{L}\left(\mathbf{1}\right)(s) = \frac{1}{s}$,
- $\mathcal{L}\left(t^n\right)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathcal{L}\left(e^{\alpha\, t}\right)(s) = \frac{1}{s-\alpha}$,
- $\mathcal{L}\left(sen\left(\beta\, t\right)\right)(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

- $\mathcal{L}\left(senh\left(\beta\, t\right)\right)(s) = \frac{\beta}{s^2-\beta^2}$,
- $\mathcal{L}\left(\cos\left(\beta\, t\right)\right)(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}$
- $\mathcal{L}\left(\cosh\left(\beta\, t\right)\right)(s) = \frac{s}{s^2-\beta^2}$,
- $\mathcal{L}\left(\mathcal{U}_a\left(t\right)\right)(s) = \frac{e^{-s\,a}}{s}$ con $a \geq 0$
- $\mathcal{L}\left(\delta_a\left(t\right)\right)(s) = e^{-s\,a}$ con $a \geq 0$,
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right)(t) = \frac{1}{2a^3}\left(sen\left(a\,t\right) - a\,t\,\cos\left(a\,t\right)\right)$ cuando $a > 0$
- $f * g\left(t\right) := \int_0^t f\left(t-s\right)\, g\left(s\right)\, ds$ $\forall t \geq 0$