

# 1. Ecuaciones No lineales

En este capitulo nos interesa resolver problemas del tipo, dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (no lineal) encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$ , para el caso de una sola ecuacion.

Ejemplo:

Resolver

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - \pi^2 = 0$$

El siguiente paso es claramente es buscar solucion a un sistema de ecuaciones no lineales es decir, dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (no lineal) encontrar  $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = 0$  para el caso de un sistema de ecuaciones.

## 1.1. Metodo de la Biseccion

Es un metodo con convergencia garantizada y basado en un teorema conocido desde **Calculo I** este es:

### Teorema del Valor Intermedio

Sea  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funcion continua en el intervalo  $[a, b]$  y supongamos que  $f(a) < f(b)$ . Entonces para cada  $z$  tal que  $f(a) < z < f(b)$ , existe un  $x \in ]a, b[$  tal que  $f(x) = z$ .

### Propiedad 1

En particular si  $f(a)f(b) < 0$  entonces  $z = 0$  es un valor medio y por tanto existe  $x \in ]a, b[$  tal que  $f(x) = 0$ .

### Teorema (Algoritmo del metodo de la biseccion)

1. Dados  $a, b$  tales que  $a < b$  y  $f \in C[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ , sean  $x_a := a$  y  $x_b := b$ . Por lo tanto  $f$  tiene una raiz en el intervalo  $(x_a, x_b)$ .
2. Sea  $x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$
3. Forzosamente se cae en uno de los siguientes casos:
  - a)  $f(x_a)f(x_c) = 0$ : en este caso se tiene que  $f(x_c) = 0$  y por tanto se ha localizado una raiz y finaliza el proceso.
  - b)  $f(x_a)f(x_c) < 0$ : por lo tanto  $f$  tiene una raiz en el intervalo  $(x_a, x_c)$  y redefinimos  $x_b$  como  $x_c$ .
  - c)  $f(x_a)f(x_c) > 0$ : por lo tanto  $f$  tiene una raiz en el intervalo  $(x_c, x_b)$  y redefinimos entonces  $x_a$  como  $x_c$ .
  - d) en los casos b) y c) anteriores  $f$  tiene una raiz en el nuevo intervalo  $(x_a, x_b)$ . Por lo tanto, el proceso se vuelve a repetir desde 2. con el nuevo intervalo  $(x_a, x_b)$ , hasta que se satisfaga algun criterio de detencion.

A partir del algoritmo se deduce que si  $x$  es la raiz de la ecuacion entonces los valores  $x_k = x_c$  calculados en cada paso satisfacen.

$$|x - x_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b - a) \quad \text{y, por lo tanto} \quad x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

### Observaciones

1. La convergencia esta garantizada (pero aveces lenta).
2. Solo aplicable al caso de una sola ecuacion.

### Definición 1

Una sucesion  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se dice convergente a  $x$ , con orden  $p \geq 1$  si

$$|x - x_{k+1}| \leq C|x - x_k|^p$$

para alguna constante  $C > 0$ , si  $p = 1$  se dice que la sucesion converge linealmente. En este caso es necesario que  $C < 1$ . y  $C$  es denominada tasa de convergencia lineal.

Segun esta definicion el metodo de la biseccion tiene convergencia lineal con tasa de convergencia  $C = \frac{1}{2}$ .

## 1.2. Newton Raphson

Se basa en el uso de una recta tangente a la grafica de  $f$  para aproximar el punto donde la funcion se anula.

Supongamos que tenemos una aproximacion  $x_k$  a la raiz  $x$  de  $f(x)$ , luego trazando la recta tangente al punto  $(x_k, f(x_k))$  obtenemos:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

nuestra siguiente aproximacion a la raiz sera cuando  $y = 0$  es decir:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

Por tanto el metodo de Newton Raphson define la sucesion

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

partiendo de una aproximacion inicial  $x_0$  y siempre que  $f'(x_k) \neq 0$ .

### Teorema Convergencia de Newton Rapshon

Sea  $f \in C^2[a, b]$  con una raiz  $x \in (a, b)$  tal que  $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ . Dado  $x_0 \in [a, b]$ , sea  $x_{kk \in \mathbb{N}}$  la sucesion obtenida por el metodo de N-R. Supongamos que  $x_k \in [a, b] \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Si  $x_0$  se escoge lo suficientemente cercano a  $x$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

con orden  $p = 2$ .

### Propiedad Criterio de Detencion.

Sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y suponga que el metodo de N-R converge. El criterio de detencion

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

asegura que el error al calcular la raiz  $\alpha$  es menor que  $\varepsilon$ .

## 1.3. Metodo de la Secante

Cuando la derivada de la funcion  $f$  es dificil de evaluar conviene utilizar el **metodo de la secante** el cual consta en aproximar la derivada  $f'(x_k)$  por:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

es decir

### Teorema Metodo de la Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

con  $x_0, x_1$  dados

### Teorema 1

Sea  $f \in C([a, b])$  con una raiz  $\alpha \in (a, b)$  tal que  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Dados  $x_0, x_1 \in [a, b]$ , sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  la sucesion obtenida por el metodo de la secante. Supongamos que  $x_k \in [a, b] \forall k \in \mathbb{N}$ . Si  $x_0, x_1$  se escogen suficientemente cercano a  $\alpha$ , entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

con orden  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

## 2. Metodo de Newton

El metodo de **Newton-Raphson** se puede generalizar facilmente a sistemas de ecuaciones no lineales.

### Teorema Metotodo de Newton

El metodo de Newton consiste en, dada la aproximacion de la solucion  $x^{(k)}$ , tomar como nueva aproximacion a  $x^{(k+1)}$  definida por:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (Df(x^{(k)}))^{-1}f(x^{(k)}) , k = 0, 1, \dots$$

donde  $x^{(0)}$  es la aproximacion inicial.

En la practica no se invierte la matriz, si no que se resuelve el sistema

$$Df(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}).$$

### 3. Interpolacion

Sean  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ,  $n+1$  puntos en el plano tales que  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ . Diremos que el polinomio  $p(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$  interpola al conjunto de datos si:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

#### Teorema 1

Dados  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ,  $n+1$  puntos tales que  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ , entonces existe un unico polinomio  $p$  de grado menor o igual a  $n$  tal que:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

#### 3.1. Polinomios de Lagrange

##### Definición Polinomios de Lagrange

Una manera de calcular el polinomio de interpolacion  $p$ , sin tener que resolver el sistema de ecuaciones es a travez de los polinomios de **Lagrange**  $\ell_i$ , con  $i = 0, \dots, n$  asociados a los puntos  $x_0, \dots, x_n$ . Estos polinomios de grado  $n$  estan definidos por:

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

el conjunto  $\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\}$  es una base del espacio de polinomios de grado menor o igual a  $n$  asi el polinomio de interpolacion se puede escribir como

$$p(x) = \alpha_0 \ell_0(x) + \alpha_1 \ell_1(x) + \dots + \alpha_n \ell_n(x)$$

y por las propiedades de estos polinomios se puede deducir que

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x)$$

#### Teorema 1

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funcion tal que  $y_i = f(x_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, n$ . Una manera de aproximar la funcion  $f$  es a traves del polinomio de interpolacion, respecto a  $x_0, \dots, x_n$ , el que en este caso esta dado por:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) \quad , i = 0, 1, \dots, n.$$

##### Teorema Error al aproximar

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$  numeros reales distintos y  $f$  una funcion real en  $C^{n+1}(a, b)$  donde  $a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y  $b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Entonces para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi_x \in (a, b)$  tal que

$$E(x) := f(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

## 3.2. Spline Cubicas

### 3.2.1. Fenomeno de Runge

Al realizar una interpolación polinomial para un valor de  $n$  grande con puntos  $x_i$  equiespaciados, se puede comprobar que se producen grandes oscilaciones del polinomio de interpolación  $p$  entre dos puntos consecutivos, especialmente cerca de los extremos del intervalo de interpolación  $[a, b]$ .

Es en base a este problema que nacen las **Splines Cubicas**

#### Definición 1

Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  tales que  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Una función  $s$  es una **interpolante spline cubica** en  $[x_0, x_n]$ , si existen polinomios  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  de grado a lo mas 3, tales que:

1.  $s(x) = q_k(x)$  en  $[x_k, x_{k+1}]$
2.  $q_k(x_k) = y_k, \quad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$
3.  $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) = s'(x_k)$
4.  $q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k) = s''(x_k)$

### 3.2.2. Tipos de Spline Cubicos

#### Definición 1

1. **Natural:**  $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$
2. **Completo:**  $s'(x_0) = \alpha$  y  $s'(x_n) = \beta$
3. **No-nodo:**  $q'''_0(x_1) = q'''_1(x_1)$  y  $q'''_{n-2}(x_{n-1}) = q'''_{n-1}(x_{n-1})$

## 4. Minimos Cuadrados

Dado un conjunto de puntos

$$(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$$

nos proponemos encontrar el polinomio

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

con  $n < m$  que este mas cerca de estos puntos en el sentido que

$$\sum_{i=1}^m |p(x_i) - y_i|^2$$

sea minima.

### Definición 1

El vector  $x$  que minimiza  $r = \|b - Ax\|_2$  es la solucion en el sentido de minimos cuadrados del sistema rectangular.

### Teorema 1

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ( $m \geq n$ ) y  $b \in \mathbb{R}^m$ . un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  minimiza la norma del residuo  $\|r\|_2 = \|b - Ax\|_2$  si y solo si el residuo  $r$  es ortogonal a la imagen de  $A$  esto es

$$A^t r = 0$$

De esto ultimo se deduce que  $x$  debe satisfacer

$$A^t r = 0 \iff A^t(b - Ax) = 0 \iff A^t Ax = A^t b$$

estas ultimas reciben el nombre de **ecuaciones normales**.

Las ecuaciones normales tienen solucion unica si y solo si todas las columnas de  $A$  son l.i es decir  $rg(A) = n$ .

## 5. Integracion

Para aproximar una integral de la forma

$$\int_a^b f(x) dx$$

puede aproximarse usando el polinomio  $p \in P_n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx := I_n(f)$$

Luego el valor aproximado de  $I_n(f)$ , se calcula explicitamente como:

$$I_n(f) = \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n \left( \int_a^b \ell_i(x) dx \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

El error de integracion numerica puede ser deducido del error de interpolacion:

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) dx \\ \Rightarrow R_n(f) &= \int_a^b E(x) dx \end{aligned}$$

## 5.1. Punto medio

### Teorema Regla del punto medio elemental

Con  $n = 0$  y  $x_0 = (a + b)/2$

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) =: I_0(f)$$

el error de integracion, denotado por  $R_0(f)$ , se define como:

$$R_0(f) := \int_a^b f(x) dx - I_0(f)$$

Si  $f \in C^2([a, b])$ , se puede demostrar que el error de integracion esta acotado por:

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3$$

donde  $M_2 := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

### Teorema Regla del punto medio Compuesta

Tomando una particion regular del intervalo  $[a, b]$

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{con} \quad h := (b - a)/n$$

la regla del punto media compuesta se obtiene aplicando la integral de la regla del punto medio elemental en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) =: I_m$$

Cuando  $f \in C^2([a, b])$ , para el error

$$R_M(f) := \int_a^b f(x) dx - I_m(f)$$

se tiene:

$$|R_M(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)h^2 \quad \text{con} \quad M_2 := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Como consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios menor o igual a 1.

## 5.2. Relga de Trapecios

### Teorema Regla del Trapecio elemental

$n = 1$  con  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)) =: I_1(f)$$

el error de integracion, denotado por  $R_1(f)$ , se define como:

$$R_1(f) := \int_a^b f(x) dx - I_1(f)$$

Si  $f \in C^2([a, b])$ , se puede demostrar que el error de integracion esta acotado por:

$$|R_1(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3$$

donde  $M_2 := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

### Teorema Regla de Trapecios Compuesta

Tomando una particion regular del intervalo  $[a, b]$

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{con} \quad h := (b-a)/n$$

la relga de trapecios compuesta se obtiene aplicando la integral de la regla del trapecio elemental en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) =: I_T$$

Cuando  $f \in C^2([a, b])$ , para el error

$$R_T(f) := \int_a^b f(x) dx - I_T(f)$$

se tiene:

$$|R_M(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2 \quad \text{con} \quad M_2 := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Como consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios menor o igual a 1.

### 5.3. Regla de Simpson

#### Teorema Regla de Simpson elemental

$n = 2$  con  $(a, f(a)), (b, f(b))$  y  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ , con  $\bar{x} = (a + b)/2$ .

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: I_2(f)$$

el error de integracion, denotado por  $R_2(f)$ , se define como:

$$R_2(f) := \int_a^b f(x) dx - I_2(f)$$

Si  $f \in C^4([a, b])$ , se puede demostrar que el error de integracion esta acotado por:

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{12}(b-a)^3$$

donde  $M_4 := \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$

#### Teorema Regla de Simpson Compuesta

El intervalo  $[a, b]$  se divide en  $2n$  subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, 2n \quad \text{con} \quad h := (b-a)/2n$$

la regla de Simpson compuesta se obtiene aplicando la regla de Simpson elemental en cada subintervalo  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{2h}{6} \sum_{i=1}^n f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) =: I_S(f)$$

Cuando  $f \in C^4([a, b])$ , el error de esta

$$R_S(f) := \int_a^b f(x) dx - I_S(f)$$

se tiene:

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4 \quad \text{con} \quad M_4 := \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

Como consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios menor o igual a tres.

### 5.4. Observaciones

1. Existen versiones de las Reglas para nodos no equidispaciados.
2. Se dice que una regla es de orden  $h^p$  y se escribe  $\mathcal{O}(h^p)$ , cuando el error satisface  $|R(f)| \leq Ch^p$ , para alguna constante  $C > 0$  independiente de  $h$ .

Las reglas del punto medio y de los trapecios son  $\mathcal{O}(h^2)$ , la regla de Simpson es  $\mathcal{O}(h^4)$

## 6. EDO

Para aproximar soluciones a **EDOs** intenta aproximar la solución exacta en  $n$  nodos, ademas approximando la derivada con el metodo de la tangente, se obtiene el **Algoritmo de Euler**

---

**Algorithm 1** Método de Euler Explicito

---

```

1: for  $i = 0$  to  $N - 1$  do
2:    $x_i = a + ih$ 
3:    $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ 
4: end for

```

---

### Definición Error

Se define el *error global* como

$$E := \max_{0 \leq i \leq N-1} |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|,$$

donde  $y(x_{i+1})$  es el valor de la solución exacta del P.V.I. en el nodo  $x_{i+1}$  e  $y_{i+1}$  es el valor obtenido por el método numérico.

---

**Algorithm 2** Método de Euler Implicito

---

```

1: for  $i = 0$  to  $N - 1$  do
2:    $x_i = a + ih$ 
3:    $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$ 
4: end for

```

---

Una **EDO** se dice estable si  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$  pues dadas dos soluciones de la edo con distintas condiciones iniciales se demuestra que:

$$|y(x) - \hat{y}(x)| < |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a$$

Reciprocamente una **EDO** se dice inestable si  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$  y en tal caso se muestra que

$$|y(x) - \hat{y}(x)| > |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a$$

Al aplicar un metodo numerico a una **EDO** inestable es natural que los errores crezcan con las iteraciones.

### Definición Estabilidad de Metodos Numericos

Los metodos numericos que **NO** aumentan el error al aumentar las iteraciones se dicen **Estables** y en caso contrario **Inestables**.

Se puede mostrar que el metodo de **Euler explicito** es estable solo si  $h$  es suficientemente chico, en cambio **Euler Implicito** es siempre estable.

### Definición EDO Stiff

Una **EDO Stiff** cumple que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ muy grande}$$

Para las **EDO Stiff** Los metodos explicitos dan resultados solo cuando  $h$  es suficientemente pequeño.

## 6.1. Sistemas de EDO

Un sistema de EDO de primer orden se escribe como:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in [a, b] \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}^0 \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

Los metodos numericos vistos se generalizan directamente para un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden, por ejemplo Euler ( $RK_{11}$ )

$$\begin{cases} \mathbf{y}^0 : \text{dato,} \\ \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), & i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

## 6.2. EDO de orden superior

Como se aprendio en **EDO** se puede convertir una EDO de orden superior, en un sistema de EDOS de primer orden, por tanto la solucion de estas viene dada por la seccion anterior

## 7. Sistemas Lineales

Para resolver un sistema  $Ax = b$  existen varias maneras, en general durante este capitulo buscamos no solo resolver un sistema sino que tomar en cuenta los siguientes topicos

1. Costo Operacional
2. Costo de Almacenamiento
3. Precision de los Resultados

Ejemplos

- Regla de Cramer  $(n + 1)!$  flops
- Eliminacion Gaussiana  $(\frac{2}{3}n^3)$  flops, si es simetrica  $n^2$  flops

### 7.1. Factorizacion $LU$

Si  $\mathbf{A}$  una matriz de  $n \times n$  invertible.

1. Realizar la descomposicion  $LU$  de la matriz  $\mathbf{A}$ . Entonces

$$Ax = b \iff L(Ux) = b \iff \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

2. Resolver  $Ly = b$
3. Resolver  $Ux = y$

### 7.2. Pivoteo Parcial

### 7.3. Factorizacion de Cholesky

#### Teorema Matrices Definidas Positivas

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz **simétrica**.  $A$  es definida positiva si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

1. los valores propios de  $A$  son todos positivos;
2. los determinantes de las submatrices principales de  $A$  son todos positivos;
3. existe una matriz  $L$ , triangular inferior y no singular, tal que  $A = LL^t$ .

#### Definición Método de Cholesky

- Se aplica solamente a **matrices simétricas y definidas positivas**.
- Se basa en calcular directamente la matriz  $L$  tal que  $A = LL^t$ .
- Se procede como en el caso de matrices tridiagonales y se obtiene el siguiente algoritmo:

Para  $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

para  $i = j + 1, \dots, n$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)$$

Su costo operacional es aprox de  $\frac{1}{3}n^3$  flop

Luego para resolver un sistema de ecuaciones usando este metodo de procede de la siguiente forma

$$Ax = b \iff LL^t = b \iff L(L^t x) = b \iff \begin{cases} Ly = & b \\ L^t x = & y \end{cases}$$

Para resolver lo anterior se usa la sustitucion progresiva y regresiva, por otro lado hemos visto que para matrices **definidas positivas y simetricas** los metodos de factorizacion son estables respecto a la propagacion de error sin necesidad de pivoteo

## 7.4. Metodos Iterativos

Un **Metodo Iterativo** para resolver sistemas construye, a partir de una aproximacion inicial, una sucesion de vectores

Si suponemos  $A = N - P$ , donde  $N$  es invertible, luego

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff (N - P)x = b \\ &\iff Nx = Px + b \\ &\iff x = N^{-1}Px + N^{-1}b \end{aligned}$$

Usaremos la igualdad  $Nx = Px + b$  para definir una esquema general para constituir la sucesion buscada.

Si definimos a  $M := N^{-1}P$  como la matriz de iteracion y a  $e^{(k)} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$  como el error se tiene que

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= x - x^{(k)} \\ &= N^{-1}Px + N^{-1}b - N^{-1}Px^{(k-1)} - N^{-1}b \\ &= M(x - x^{(k-1)}) = Me^{(k-1)} \end{aligned}$$

recursivamente obtenemos que  $\mathbf{e}^{(k)} = M\mathbf{e}^{(0)}$

### Teorema Convergencia

La sucesion  $\{x^{(k)}\}$  converge a la solucion  $\mathbf{x}$  de  $Ax = b$ , si y solo si,  $\rho(M) < 1$

Si la sucesion converge necesariamente lo hace a la solucion  $\mathbf{x}$ .

### Teorema 1

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada, para cualquier norma matricial se tiene que

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

### Teorema 1

Una condicion suficiente para que la sucesion  $\{x^{(k)}\}$  sea convergente a la solucion  $\mathbf{x}$  de  $Ax = b$  es que

$$\|\mathbf{M}\| < 1$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de iteracion que genera a  $\{x^{(k)}\}$ .

## 7.5. Metodo de Jacobi

Consideremos un sistema  $Ax = b$  con  $a_{ii} \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $\mathbf{x}^0 =$ , arbitrario y escribamos  $A$  de la forma

$$A = D - E - F$$

donde  $(D) = \text{diag}(A)$ ,  $-E$  es la matriz triangular inferior de  $\mathbf{A}$  y  $-F$  es la matriz triangular superior de  $\mathbf{A}$ .

El metodo de Jacobi corresponde al metodo iterativo general con

$$N := D \quad y \quad P := E + F$$

## 7.6. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel corresponde al esquema iterativo general tomando

$$N := D - E \quad \text{y} \quad P := F$$

### Definición Diagonal Dominante Estricta

Una matriz cuadrada  $A$  se dice **diagonal dominante estricta** si cumple que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad , i = 1, \dots, n$$

### Teorema Convergencia de Jacobi y G.S

Si  $A$  es diagonal dominante estricta, entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

### Teorema 1

Si  $A$  es simétrica y definida positiva, el método de Gauss-Seidel es convergente.