

PL 5 - CÁLCULO IV (MAT 225212)

**Tema: Problemas de Holomorfía y de potencias generalizadas.**

1. Encontrar las soluciones complejas de  $z^i = -1$ .
- (P) Encontrar las dos determinaciones posibles de  $r(z) = z^{1/2}$  y encontrar para cada rama holomorfa la derivada  $r'(z)$
3. Sean  $w = f(z)$  una función definida  $f(x+iy) = u(x)+iv(y)$  tal que ella es holomorfa sobre  $\mathbb{C}$ . Encontrar la expresión de  $w = f(z)$ .
- (P) Si  $f = u + iv$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , al igual que  $f'$  y las funciones componente verifican

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Probar que  $f(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $\text{Re}(a) = 0$

5. Todo afijo  $(x, y)$  de un complejo  $z = x + iy$  se puede escribir  $(x, y) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$  y en consecuencia se infiere que  $w(x, y) = w(z, \bar{z})$ . Probar que si  $w(x, y) = f(z)$  es holomorfa en  $z_0$  entonces  $f'(z_0) = \frac{\partial w}{\partial z}((x_0, y_0))$ .
6. Probar que la función  $f$  definida en  $\mathbb{C}$  por

$$f(z) = \begin{cases} (1+i) \frac{\text{Im}(z^2)}{|z^2|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en  $z = 0$  pero no existe la  $\mathbb{C}$ -derivada en dicho punto.

- (P) Sea  $D \subset \mathbb{C}$  u abierto denso y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Demostrar que cada una de las siguientes condiciones implica que  $f$  es constante en  $D$ :
  - (a) Sobre  $D$  la función  $f$  es real;
  - (b)  $\bar{f}$  es holomorfa en  $D$ ;
  - (c) Sobre  $D$  se verifica  $|f(z)| = c \in \mathbb{R}^+$
8. Sea  $D \subset \mathbb{C}$  u abierto denso y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Si  $u$  y  $v$  son las funciones componentes de  $f$ . Demostrar que cada una de las siguientes condiciones implica que  $f$  es constante en  $D$ :
  - (a)  $f'(z) = 0, (z \in D)$ ;
  - (b) Cualquiera de las funciones componentes es constante en  $D$ ;
  - (c) Existen constantes complejas  $a, b, c$  con  $a \cdot b \neq 0$  tales que cualquiera sea el afijo  $(x, y)$  de  $z \in D$  se verifica  $au(x, y) + b(v(x, y)) = c$ .
  - (d) Existe  $k \neq 0$  tal que para todo afijo  $(x, y)$  de  $z \in D$  se verifica que  $u(x, y)v(x, y) = k$
  - (e) Existe una función real de variable real tal que para todo afijo  $(x, y)$  de  $z \in D$  se tiene la relación funcional  $u(x, y) = h(v(x, y))$ .

9. Sean  $D$  un abierto conexo del plano complejo y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua tal que para cada  $z \in D$  se verifica  $e^{f(z)} = 1$ . Probar que  $f$  es constante

10. Sea  $f$  una función holomorfa en  $B(1, 1)$  (bola abierta con centro en  $z = 1$  y radio 1) tal que para cada  $z \in B(1, 1)$

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

con la condición inicial  $f(1) = 0$ . Probar que la rama principal de Logaritmo satisface este PVI ¿Existen otras determinaciones de logaritmo complejo que verifiquen este PVI?

11. (a) Probar que las soluciones de

$$(z + i)^7 + (z - i)^7 = 0$$

son  $z_k = \cot\left(\frac{2k+1}{14}\pi\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ .

(b) Escribir la ecuación como una función polinomial de grado 3 y resolver.

12. Encontrar la solución particular de la EDO cuya incógnita es una función real.

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \cos(x)$$

usando la EDO con incógnita una función de variable real a valores complejos:

$$\varphi''(x) + 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = e^{ix}$$

Aplice el método de coeficientes indeterminados para encontrar  $A \in \mathbb{C}$  tal que  $\varphi_p(x) = Ae^{ix}$ . La solución particular es  $f_p = \text{Re}(\varphi_p)$

13. ((P)) Mostrar que  $f(z) = e^{2z} \cos(z)$  satisface el PVI

$$f''(z) - 4f'(z) + 5f(z) = 0 \quad s/a \quad f(0) = 1, \quad f'(z) = 2$$

(b) Encontrar la funciones componente de  $f$ .

14. Encontrar los valores principales de

(a)  $(-4)^i$

(b)  $(-4i)^{2i}$

(c)  $(1+i)^{3/2}$

(d)  $(1-i)^{2i}$

15. Encontrar el valor principal de  $\cos(z) = i$  y de  $e^z = -i$ .

16. Resolver el problema 7 enunciado en página 55 de [1]

17. Resolver los problemas 2 y 4 enunciados en la página 62 de [1]

18. Resolver el problema 5 enunciado en página 62 de [1].