UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Algunos ejercicios desarrollados de relaciones del Listado 3 ALGEBRA III 525201-1

Problema 1. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}^+$ dada por:

$$\forall\, a\,,b \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^m\,.$$

1.1) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{Z}^+$.

Veamos que $\mathcal{R}$ es refleja: Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, dado que $a = a^1$, se tiene validado que $\exists\, m = 1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a = a^m$, lo cual equivale a decir que $a\mathcal{R}a$. Siendo a fijo pero arbitrario, queda establecido que $\mathcal{R}$ es refleja.

Veamos que $\mathcal{R}$ es antisimétrica: Sean $a\,,b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a$. Esto implica que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^{m_1} \quad \wedge \quad \exists\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, b \,=\, a^{m_2} \quad \Rightarrow \quad a \,=\, (a^{m_2})^{m_1} \,=\, a^{m_1\, m_2} \quad \Rightarrow \quad m_1\, m_2 \,=\, 1\,,$$

lo cual sucede (en $\mathbb{Z}_0^+$) cuando $m_1 \,=\, m_2 \,=\, 1$. Esto conduce a afirmar que $a = b$, y esto conlleva a decir que la relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

Veamos que $\mathcal{R}$ es transitiva: Sean $a\,,b\,,c \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,c$. Esto implica que

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, b^{m_1} \quad \wedge \quad \exists\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, b \,=\, c^{m_2} \quad \Rightarrow \quad a \,=\, (c^{m_2})^{m_1} \,=\, c^{m_1\, m_2}\,.$$

Luego, $\exists\, m := m_1\, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a \,=\, c^m$, es decir $a\,\mathcal{R}\,c$. De aquí se desprende que $\mathcal{R}$ es transitiva.

Finalmente, queda probado que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, y por ello, podemos utilizar la notación $\leq$ para referirnos a ella.

1.2) Determine si $\mathcal{R}$ es de orden parcial o total en $\mathbb{Z}^+$.

Consideremos $2\,,3 \in \mathbb{Z}^+$. Como

$$2 \,=\, 3^m \Leftrightarrow m \,=\, \log_3(2) \notin \mathbb{Z}_0^+ \quad \wedge \quad 3 \,=\, 2^n \Leftrightarrow n \,=\, \log_2(3) \notin \mathbb{Z}_0^+\,,$$

se desprende que $\exists\, 2\,,3 \in \mathbb{Z}^+ \,:\, 2 \not\leq 3 \wedge 3 \not\leq 2$. En consecuencia, $\leq$ es relación de orden parcial.

1.3) Además, determine si $\mathcal{R}$ tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo. En caso de existir, indique cuál(es) es/son tal(es) elemento(s).

Maximal. Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Si $a = 1$, se observa que $1 \neq 2$ y $1 \,\leq\, 2$, pues $1 = 2^0$, con $m = 0 \in \mathbb{Z}_0^+$. Esto descarta a 1 como candidato a elemento maximal.

Sea $a > 1$ tal que es una potencia perfecta, es decir $\exists\, b \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{a\} \,:\, \exists\, m \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a \,=\, b^m$. Esto nos dice que $a \,\leq\, b$, con $b \neq a$, con lo cual estos elementos a también se descartan como elementos maximales.

Sea $a > 1$ que no es potencia perfecta (i.e. $\forall\, b \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{a\} \,:\, \forall\, m \in \mathbb{Z}^+ \,:\, a \,\neq\, b^m$). Esto permite reconocer que a es un elemento maximal. De esta manera, el conjunto de maximales de $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ es el conjunto $S := \{a \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\} \,:\, a \text{ no es potencia perfecta}\}$.

Máximo. Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Por lo discutido en clases, quedan descartados como candidato a máximo, $a = 1$ y aquellos $a \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$ que son potencia perfecta. Por otro lado, si $a \in S$, los únicos elementos que se relacionan con a son sus potencias no negativas, es decir $\forall\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, a^m \,\leq\, a$. Esto descarta a a como candidato a máximo. En consecuencia, en $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ no hay máximo.

Minimal. A simple inspección, $1 \in \mathbb{Z}^+$ es un minimal, pues si $x \in \mathbb{Z}^+$ es tal que

$$x \,\leq\, 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, x \,=\, 1^m \quad \Rightarrow \quad x \,=\, 1\,.$$

Sea $a \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$ otro candidato a minimal. Como $1 \,\leq\, a$ (pues $1 \,=\, a^0$), a no puede ser minimal. Por tanto, $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ tiene un único minimal: 1.

Mínimo. Sea $b \in \mathbb{Z}^+$. Como $1 \,\leq\, b$ (pues $1 \,=\, b^0$, con $0 \in \mathbb{Z}_0^+$), se tiene que $\forall\, b \in \mathbb{Z}^+ \,:\, 1 \,\leq\, b$, lo cual garantiza que 1 es un mínimo de $(\mathbb{Z}^+, \leq)$, y es el único.

Problema 2. Sea A un conjunto no vacío, y sea $B \subseteq A$ un subconjunto fijo de A. Se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(A)$ por:

$$\forall\, X\,,Y \subseteq A \,:\, X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow B \cap X \,=\, B \cap Y\,.$$

2.1) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$.

Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva. Los detalles son dejados al lector. ¡Hacerlo!

2.2) Para $A := \{1,2,3,4,5\}$ y $B := \{1,2,3\}$, determine $[X]_{\mathcal{R}}$, siendo $X := \{1,3,5\}$.

Es seguir la definición de clases de equivalencia.

$$[X]_{\mathcal{R}} := \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap X = \{1,3\}\} = \{\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,4,5\}\}.$$

2.3) Para $A := \{1,2,3\}$, y $B := \{1,2\}$, determine de manera **explícita** una partición de $\mathcal{P}(A)$ inducida por $\mathcal{R}$.

El ejercicio persigue calcular $A/\mathcal{R}$, para después concluir. Esto obliga a calcular todas las clases de equivalencias inducidas por $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}
[\emptyset]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \emptyset = \emptyset\} = \{\emptyset,\{3\}\} = [\{3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{1\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{1\} = \{1\}\} = \{\{1\},\{1,3\}\} = [\{1,3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{2\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{2\} = \{2\}\} = \{\{2\},\{2,3\}\} = [\{2,3\}]_{\mathcal{R}}\,,\\
[\{1,2\}]_{\mathcal{R}} &:= \{Y \subseteq A : B \cap Y = B \cap \{1,2\} = \{1,2\}\} = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\} = [\{1,2,3\}]_{\mathcal{R}}\,.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce $A/\mathcal{R}$ y se induce la partición de A.

Problema 3. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}^2$ dada por: **(15 puntos)**

$$\forall\, x := (x_1,x_2)\,, y := (y_1,y_2) \in \mathbb{N}^2 \,:\, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x_1 \le y_1 \wedge y_2 \le x_2\,.$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{N}^2$.

Esto ya fue demostrado en el horario de ayudantía (viernes 16 abril 2021). Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva. A partir de esta etapa, usaremos $\le$ para referirnos a la relación de orden $\mathcal{R}$.

b) Determine si $\mathcal{R}$ es de orden parcial o total en $\mathbb{N}^2$. Además, determine si $\mathcal{R}$ tiene elemento maximal, minimal, máximo y/o mínimo.

Esto también ha sido explicado en la sesión de ayudantía aludida.

Primero, en vista que $(2,2)\,,(3,3) \in \mathbb{N}^2$ son tales que $(2,2) \not\le (3,3)$ y $(3,3) \not\le (2,2)$, se concluye que $\le$ es una relación de orden parcial.

Existencia de Maximal: sea $a := (m,n) \in \mathbb{N}^2$. Analizando la definición de la relación, puede encontrarse otro elemento $x := (m+1,n) \in \mathbb{N}^2$ tal que $x \neq a \wedge a \le x$, lo cual descarta a a como elemento maximal. Como $a \in \mathbb{N}^2$ es fijo pero arbitrario, se concluye que No existe maximal en este caso. Por un resultado visto en clases, esto implica que tampoco existe máximo.

Existencia de Minimal: sea $a := (m,n) \in \mathbb{N}^2$. Analizando la definición de la relación, puede encontrarse otro elemento $x := (m,n+1) \in \mathbb{N}^2$ tal que $x \neq a \wedge x \le a$, lo cual descarta a a como elemento minimal. Como $a \in \mathbb{N}^2$ es fijo pero arbitrario, se concluye que No existe minimal en este caso. Por un resultado visto en clases, esto implica que tampoco existe mínimo.

Problema 4. Considere el conjunto ordenado $(A,|)$, siendo $A := \{2,4,5,7,8,16,32,40,48,160,240\}$, y los subconjuntos (de A) $B := \{8,16,40\}$ y $C := \{160,240\}$.

a) Determinar, si existen, los elementos característicos de B con respecto a $(A,|)$.

b) Determinar, si existen, los elementos característicos de C con respecto a $(A,|)$.

c) Determinar, si existen, los elementos maximal, minimal, máximo, mínimo de $(A,|)$.

Primero, en vista que el conjunto A es finito, construimos el Diagrama de Hasse que representa a $(A,|)$. Esto conduce a la Figura 1 (¡Hacerlo!) A partir de este diagrama, podemos responder de manera más rápida lo que se nos pide en cada item. A continuación, se discutirá el item a). El desarrollo de los demas ítemes es dejada a cuenta del lector.

- Mayorantes de B en A: 160, 240. Estos son los únicos elementos de A que son posteriores a todos los elementos de B.
- Conjunto de mayorantes de B en A: $\{160,240\}$.
- Supremo de B en A: por definición, es el mínimo del conjunto de mayorantes de B, si existe. Teniendo en cuenta la relación de orden $|$, el candidato a ser tal elemento mínimo es 160. Sin embargo, a pesar que 160 es cota superior de B, se tiene $160 \nmid 240$. Por tanto, en este caso, el conjunto B no admite supremo en A. Esto a su vez nos dice que B no admite máximo en A.

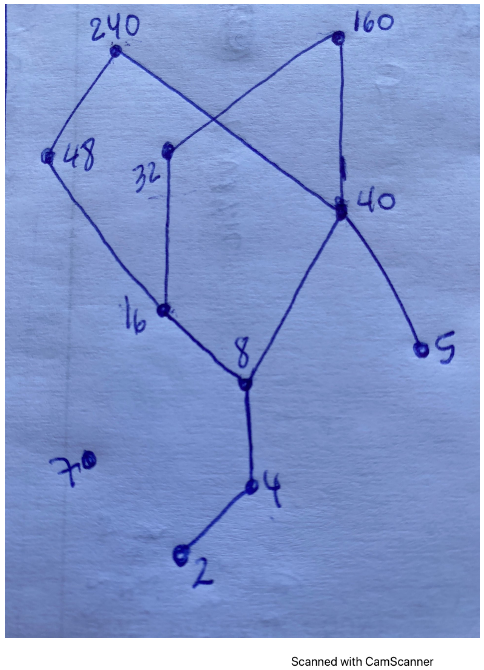

Figure 1: Diagrama de Hasse de $(\,A, |\,)$

- Minorantes de B en A: 2,4,8 (¿por qué?)
- Conjunto de minorantes de B en A: $\{2, 4, 8\}$.
- Ínfimo de B en A: debiera ser el máximo del conjunto de minorantes de B, si existe. En este caso, tal elemento es 8 (Justificar!). Como $8 \in B$, entonces B admite elemento mínimo, el cual es 8.
- Minimal(es) de B: $16 \in B$ no puede ser minimal de B, pues $8 \in B$ es Anterior a él. Asimismo, en vista que $8 \mid 40$, se descarta 40 como minimal de B. Por otro lado, $8 \in B$ es el único elemento de B que es Anterior a $8 \in B$. En consecuencia, 8 es el único minimal de B.
- Maximal(es) de B: 16,40. (La justificación es dejada de ejercicio al lector).

RBP/rbp 16.04.2021