

**525043 - Taller de Razonamiento Matemático II**

*Listado 12*

**Ejercicio 1.** En tu casa tienes una fila bi-infinita de cajas (una caja por cada número entero). Inicialmente, tienes  $n$  piedras en la caja 0. Una jugada consiste en tomar una caja  $i$  con al menos dos piedras, quitar dos piedras de la caja  $i$ , y agregar una piedra en la caja  $i - 1$  y otra en la caja  $i + 1$ . Tu vecino llegó y accidentalmente realizó una jugada. ¿Puedes volver a la configuración inicial realizando algún número de jugadas?

**Ejercicio 2.** Un tablero de  $n \times n$  tiene una persona en cada casilla. Inicialmente,  $n - 1$  de esas personas tienen COVID. Cada segundo ocurre lo siguiente: si una persona está al lado de al menos dos personas infectadas, se contagia. Muestre que existe una persona que nunca se contagia, sin importar cuánto tiempo pase.

**Ejercicio 3.** Tienes un tablero de ajedrez de  $m \times n$  y en cada casilla hay escrito un número real. En un paso, puedes cambiar los signos de todos los números de una fila o de una columna. Muestre que, partiendo desde cualquier tablero, existe una serie de pasos que hace que la suma de toda fila y casilla no sea negativa.

**Ejercicio 4.** Tienes un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$ , con casillas coloreadas negras y blancas, de la manera usual. En cada paso, puedes elegir una fila, una columna, o un subcuadrado de  $2 \times 2$ ; y cambiar todos los colores de esas casillas por el color opuesto. ¿Puedes terminar con exactamente 1 casilla negra?

**Ejercicio 5.** Tienes los números enteros del 1 al 100 escritos en el pizarrón. Una jugada consiste en elegir dos números  $a, b$  escritos en la pizarra, borrarlos, y agregar el número  $a + b - 1$ . Después de realizar 99 jugadas, solo queda un número en el pizarrón. ¿Puedes hacer que ese número sea 5000?

*Canción de la semana:* Miguel Bosé - Teorema (1980)