Vectores

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315

Contenidos

2. Resultados de aprendizaje

- Resolver problemas de suma y resta de vectores ya sea usando el método gráfico o el método de la descomposición de vectores en sus componentes escalares y los vectores unitarios.
- Resolver problemas de multiplicación de vectores a través del producto escalar o vectorial.

3. Introducción

En el estudio de la física, generalmente se trabaja con cantidades físicas que tienen tanto propiedades numéricas como propiedades direccionales.

Las cantidades con propiedades direccionales son llamadas *vectores*.

El presente capítulo está enfocado en el estudio del álgebra vectorial y de algunas propiedades generales de los vectores.

Discutiremos la adición y sustracción de vectores, tanto geométrica como analíticamente, con base en algunas aplicaciones comunes a sitiuaciones físicas.

Extenderemos el análisis a la multiplicación de vectores: En particular al producto escalar entre dos vectores (un escalar) y al producto vectorial entre dos vectores (otro vector).

Los vectores son muy importantes en física y es imperativo que sepa operar con sus propiedades gráficas y algebraicas.

4. Sistemas de coordenadas

La mayoría de las situaciones físicas requieren la descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios instantes de tiempo. Esto se logra con el uso de un sistema de *coordenadas*.

En un sistema de coordenadas *cartesianas*, también llamado sistema de coordenadas *rectangulares*, en dos dimensiones, el eje vertical (eje-y) se intersecta con el eje horizontal (eje-x) (ambos ortogonales- perpendiculares- entre sí) en un punto definido como el origen (O) del sistema (vea la Fig.1).

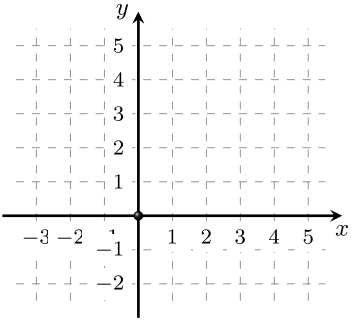


Figura 1. Sistema de coordenadas rectangulares planas.

Algunas veces es más conveniente representar un punto en un plano a través de sus coordenadas *polares* planas $(r,\, \theta)$ (vea la Fig.2).

En ese sistema de coordenadas, r es la distancia desde el origen al punto de coordenadas cartesianas $(x,\, y)$ y θ es el ángulo entre una línea dibujada desde el origen del sistema al punto en consideración y un dado eje (generalmente el eje-x positivo) y medido en la dirección anti-horaria desde ese eje.

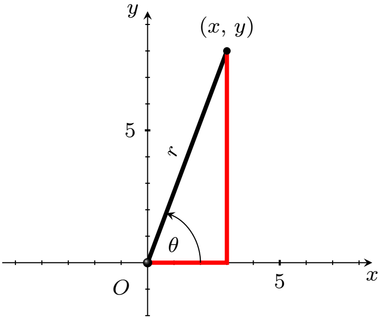


Figura 2. Coordenadas polares planas $(r,\, \theta)$ y triángulo rectángulo asociado a $(x,\, y)$.

Partiendo con las coordenadas polares planas $(r,\, \theta)$ se obtienen las coordenadas rectangulares $(x,\, y)$ del punto. Esto es:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1}$$

Además, de las definiciones de trigonometría se tiene:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

La Ec.(3) es el familiar teorema de Pitágoras.

Las Ecs.(1) a (3), relacionando $(r,\, \theta)$ a $(x,\, y)$ se aplican sólo cuando θ está definido como en la Fig.2, o sea, cuando θ positivo es un ángulo medido desde el eje-x positivo y en la dirección antihoraria, conocido como el ángulo *polar*.

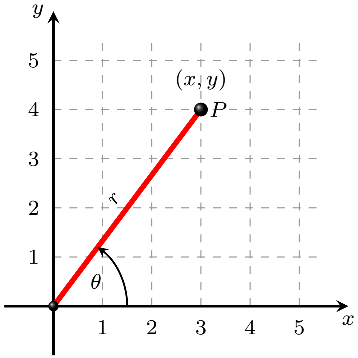


Figura 3. Punto P en un sistema de coordenadas rectangulares.

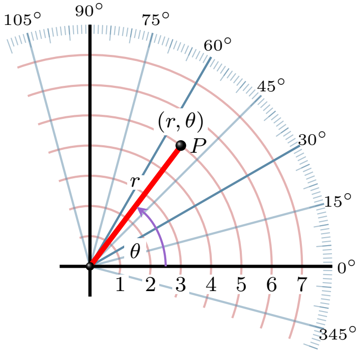


Figura 4. Punto P en un sistema de coordenadas polares planas.

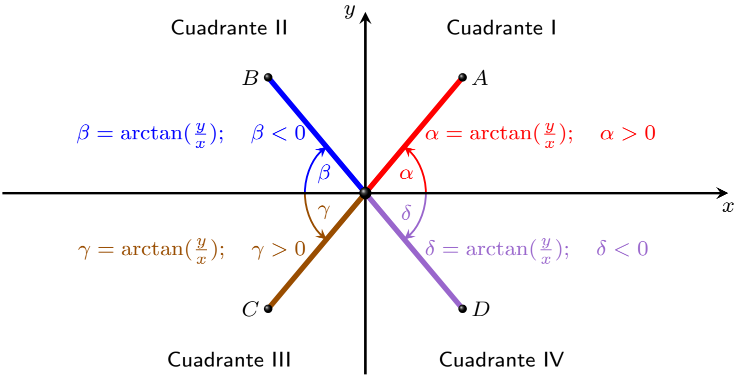


Figura 5. Ángulos y cuadrantes.

- *Cuadrante I:* $y > 0$ y $x > 0$. Ángulo polar $\theta = \alpha$.
- *Cuadrante II:* $y > 0$ y $x < 0$. Ángulo polar $\theta = \beta + 180^\circ$.
- *Cuadrante III:* $y < 0$ y $x < 0$. Ángulo polar $\theta = \gamma + 180^\circ$.
- *Cuadrante IV:* $y < 0$ y $x > 0$. Ángulo polar $\theta = \delta + 360^\circ$.

4.1. Funciones trigonométricas.

Antes de proseguir con los contenidos, mostraremos propiedades básicas de las funciones trigonométricas.

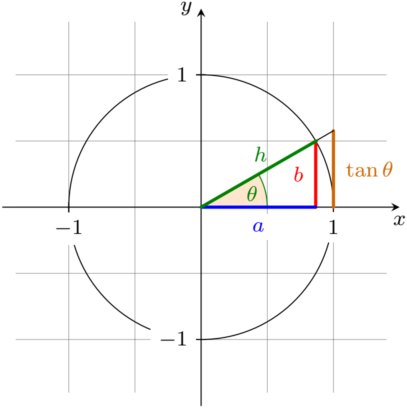


Figura 6. Círculo unitario y triángulo rectángulo.

La figura adjunta muestra una circunferencia de radio $r = 1$, la cual tiene un triángulo rectánculo inscrito en ella.

Las relaciones entre el cateto adyacente (a), el cateto opuesto (b) y la hipotenusa h son:

$$\cos\theta = \frac{a}{h}, \quad \sin\theta = \frac{b}{h}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}.$$

El teorema de Pitágoras queda definido como:

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Para un triángulo de lados a, b y c con ángulos α, β y γ como el mostrado en la Fig.5, se cumplen los siguientes teoremas.

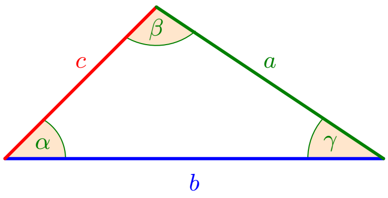


Figura 7. Triángulo de lados a, b y c y ángulos α, β y γ.

Teorema del Coseno: Una generalización del teorema de Pitágoras para triángulos que no son rectángulos. Los catetos se relacionan de acuerdo a la siguiente ecuación

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\gamma.$$

Teorema del Seno: Relaciona los lados del triángulo con el seno de los ángulos opuestos a ellos. Matemáticamente se enuncia como

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

4.2. Funciones trigonométricas inversas

Sea f una función real y biyectiva cuyo dominio es el conjunto X y su codominio es el conjunto Y, la cual está definida como

$$f : x \in X \to y \in Y,$$
$$f(x) = y \quad \to \quad f(x) = y = x^3.$$

Así, la función inversa f^{-1} está definida como,

$$f^{-1} : y \in Y \to x \in X,$$
$$f^{-1}(y) = x. \quad \to \quad f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y}$$

Observación

Es importante destacar que:

$$f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$$

Las funciones trigonométricas también poseen inversa y éstas se etiquetan con el prefijo *arc*. Por ejemplo, dada la función coseno del ángulo θ

$$\cos\theta = x.$$

Su inversa se obtiene aplicando a ambos lados de la igualdad $\arccos$,

$$\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(x), \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos(x).$$

A continuación se muestran las funciones trigonométricas y sus inversas más usadas en este curso

Función trigonométrica	Función trigonométrica inversa
$a = \cos(\alpha)$	$\alpha = \arccos(a)$
$b = \sin(\beta)$	$\beta = \arcsin(b)$
$c = \tan(\gamma)$	$\gamma = \arctan(c)$

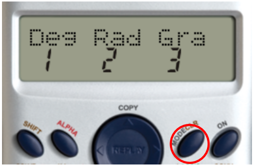
Por ejemplo:

$$\cos(\alpha) = 0.50 \to \alpha = \arccos(0.50) = 60^\circ$$
$$\sin(\beta) = 0.50 \to \beta = \arcsin(0.50) = 30^\circ$$
$$\tan(\gamma) = 0.500 \to \gamma = \arctan(0.500) = 26.6^\circ$$

4.3. Uso de la calculadora para las funciones trigonométricas

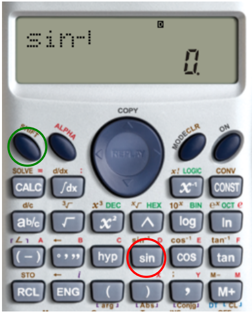
Para configurar una calculadora tradicional en *grados* (Deg) o *radianes* (Rad) presione dos veces el botón MODE.

Para establecer la calculadora en grados (Deg) seleccione 1, para radianes (Rad), presiones 2.



Para calcular funciones trigonométricas inversas, presione el botón SHIFT y luego la función deseada. En el ejemplo mostrado se calcula la función $\arcsin$ presionando SHIFT y luego $\sin$.

Es importante señalar que $\arcsin = \sin^{-1}$, es decir, $\sin^{-1} \neq \frac{1}{\sin}$ y eso ocurre para todas las funciones trigonométricas.



4.4. Nota sobre ángulos y sus medidas

Al configurarla una calculadora para trabajar con ángulos tiene tres opciones: Deg., Rad. y Gra.

Deg. Grados *sexagesimales*. Un círculo es dividido en 360 partes iguales y a cada una de ellas se llama un grado sexagesimal (1°). Cada grado se divide en 60 partes iguales y cada una de ellas se denomina un minuto sexagesimal $(1')$. Cada minuto se devide en 60 partes iguales y a cada una de ellas se llama segundo sexagesimal $(1'')$.

Rad. Para una circunferencia de centro O y radio r, se denomina radián $(1\,\mathrm{rad})$ al ángulo central cuyo arco coincide en longitud con el radio. Dado que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, entonces un ángulo completo equivale a $2\pi\,\mathrm{rad}$.

Gra. Grados *centesimales* o *gradianes*. Un círculo es dividido en 400 partes iguales y cada una de ellas se llama un grado centesimal (1^{g}). Cada grado se divide en 100 partes iguales, dando origen al minuto centesimal (1^{m}). Cada minuto centesimal se divide en 100 partes iguales, dando origen al segundo centesimal (1^{s}).

$$360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad} = 400^{\mathrm{g}}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = 100^{\mathrm{g}}$$

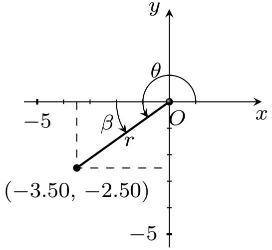


Figura 8. Punto $(-3.50,\ -2.50)\,\mathrm{m}$ en coordenadas rectangulares.

Ejemplo

Sea $(x,\ y) = (-3.50,\ -2.50)\,\mathrm{m}$ en el plano xy, vea la Fig.6. Calcule r y θ.

Solución

Primero calculamos la coordenada polar r usando la Ec.(3), esto es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\,\mathrm{m})^2 + (-2.50\,\mathrm{m})^2}$$
$$= \sqrt{12.2\,\mathrm{m}^2 + 6.25\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{18.4\,\mathrm{m}^2} = 4.29\,\mathrm{m}.$$

Continuación

Ahora calculamos $\tan\beta$ *usando la Ec.(2), esto es:*

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\,\mathrm{m}}{-3.50\,\mathrm{m}} = 0.714.$$

Del resultado anterior obtenemos:

$$\beta = \arctan(0.714) = 35.5^\circ$$

Ahora, note que el punto está en el tercer cuadrante de modo que el ángulo polar θ *se obtiene a partir de*

$$\theta = 180^\circ + \beta = 180^\circ + 35.5^\circ = 215.5^\circ.$$

Así, el punto de coordenadas Cartesianas $(x,\,y) = (-3.50,\,-2.50)\,\mathrm{m}$, *en el plano* xy, *equivale al punto de coordenadas polares planas*

$$(r,\,\theta) = (4.29\,\mathrm{m},\,215.5^\circ).$$

5. Escalares y vectores

Los *escalares* son especificados completamente por un único valor con una unidad apropiada. Por ejemplo, temperatura, volumen, masa, energía, potencia, rapidez, intervalo de tiempo, etc.

Los *vectores* son especificados completamente por un número y una unidad apropiada además de una dirección. Por ejemplo, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, etc.

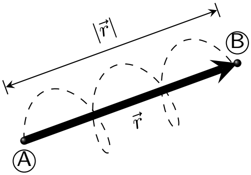


Figura 9. Movimiento de una partícula desde Ⓐ hasta Ⓑ (línea segmentada) y vector $\vec{AB}$.

En la Fig.9, el vector desplazamiento de la partícula desde Ⓐ a Ⓑ es una flecha con origen en Ⓐ y punta en Ⓑ; $\vec{r}$.

La dirección y punta de la flecha representan la dirección del desplazamiento y la longitud, su magnitud o módulo; $|\vec{r}|$.

El vector *desplazamiento* no depende del camino seguido entre dos puntos.

En este curso un vector será representado, generalmente, en letra itálica con una flecha sobre él, por ejemplo, el vector $\vec{r}$ de la Fig.9. La magnitud del vector será escrita $|\vec{r}|$ o simplemente r. La magnitud del vector tiene unidades físicas y es *siempre* de valor positivo.

5.1. Algunas Propiedades de los vectores

5.1.1. Igualdad de dos vectores

Se dice que dos vectores, por ejemplo, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales, $\vec{A} = \vec{B}$, si ellos tienen la misma magnitud,

$$A = B \quad \text{o} \quad |\vec{A}| = |\vec{B}|$$

y si apuntan en la misma dirección. Por ejemplo, los dos vectores representados en la Fig.10 son iguales.

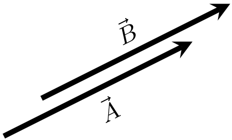


Figura 10. Dos vectores iguales $\vec{A} = \vec{B}$.

5.1.2. Adición (suma) de dos vectores

Las reglas para adicionar vectores son descritas convenientemente a través de métodos gráficos.

Para sumar el vector $\vec{B}$ al vector $\vec{A}$, primero dibuje el vector $\vec{A}$ en un papel, con su magnitud representada por una escala de longitud adecuada, luego dibuje el vector $\vec{B}$, bajo la misma escala, con su inicio (cola) en el final (punta) del vector $\vec{A}$ (vea la Fig.11).

El vector *resultante*,

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

es el vector dibujado desde el inicio del vector $\vec{A}$ hasta la punta del vector $\vec{B}$.

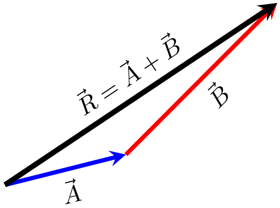


Figura 11. Suma del vector $\vec{B}$ al vector $\vec{A}$.

Por ejemplo, caminó $3.0\,\mathrm{m}$ hacia el este (eje $+x$) y luego $4.0\,\mathrm{m}$ hacia el norte (eje $+y$), como mostrado en la Fig.12. Usted se encuentra a $5.0\,\mathrm{m}$ desde el punto que inició la caminada, en una dirección de 53° al norte del este. Su vector desplazamiento es el vector suma de los desplazamientos individuales.

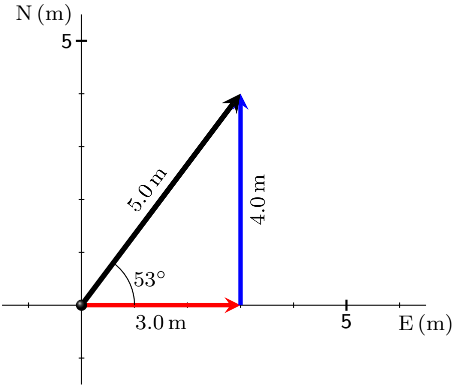


Figura 12. Suma de dos desplazamientos consecutivos.

Para adicionar más de dos vectores podemos valernos, por el momento, de una construcción geométrica. En la Fig.13 se muestra la suma de tres vectores.

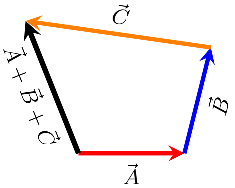


Figura 13. Suma de tres vectores.

El vector resultante

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C};$$

vector que *completa* el polígono: Une la cola del primer vector con la punta del último vector.

La adición de vectores *es* conmutativa.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \qquad (4)$$

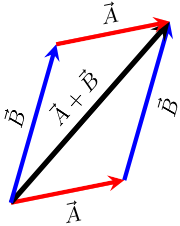


Figura 14. Conmutatividad de la suma de vectores: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

La suma de vectores *es* asociativa: No depende de la manera en que los vectores son agrupados. Por ejemplo, para los tres vectores mostrados en la Fig.15:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{B} \tag{5}$$

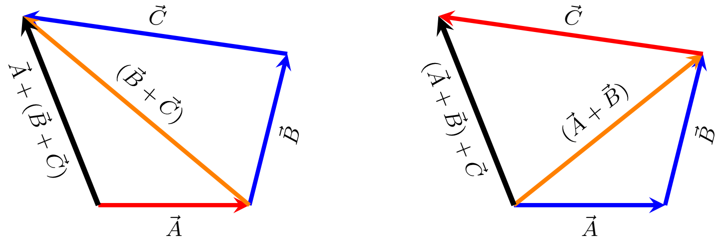


Figura 15. Asociatividad de la suma de vectore.

Los vectores sumados debe tener las mismas unidades y deben ser del mismo tipo de la cantidad representada.

No tiene sentido sumar un vector de velocidad a un vector de desplazamiento, ni sumar intervalos de tiempo a cambios de temperatura.

5.1.3. Negativo de un vector

Sea $\vec{A}$ un vector. Su negativo, $-\vec{A}$, es un vector tal que:

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}.$$

Los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{A}$ tienen la *misma* magnitud y apuntan en direcciones *opuestas*.

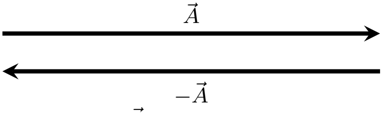


Figura 16. Vector $\vec{A}$ y su negativo; $-\vec{A}$.

5.1.4. Resta de vectores

En este caso se aplica la definición del negativo de un vector.

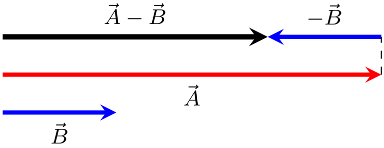


Figura 17. Resta geométrica de dos vectores.

La operación $\vec{A}-\vec{B}$ es equivalente a la suma del vector $-\vec{B}$ al vector $\vec{A}$ (vea la Fig.17):

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}). \tag{6}$$

Otra forma de ver la resta de vectores es notar que la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es lo que se debe adicionar al segundo vector $\vec{B}$ para obtener el primero $\vec{A}$ (vea la Fig.17).

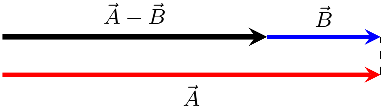


Figura 18. Resta de $\vec{B}$ a $\vec{A}$ como $\vec{A}-\vec{B}+\vec{B}=\vec{A}$.

Ejemplo

Viaja 20.0 km hacia el norte y luego 35.0 km en una dirección 60.0° al oeste del norte (vea la Fig.19). Calcule la magnitud y la dirección de su desplazamiento resultante.

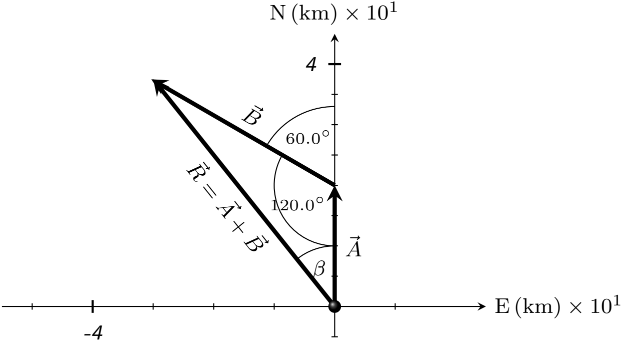


Figura 19. Método gráfico para encontrar su desplazamiento resultante.

Solución

Sean $\vec{A} = 20.0\,\mathrm{km}$ *(+y) y* $\vec{B} = 35.0\,\mathrm{km}$ *a* 60.0° *(al oeste del norte). Queremos calcular* $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ *y* $|\vec{R}|$.

Gráficamente: Use regla graduada y un transportador.

Analíticamente: Use la ley del coseno y la ley de los senos:

La magnitud R *se obtiene de la ley del coseno:*

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \\ &= \sqrt{(20.0\,\mathrm{km})^2 + (35.0\,\mathrm{km})^2 + 2(20.0\,\mathrm{km})(35.0\,\mathrm{km})\cos(60.0^\circ)} \\ &= \sqrt{400\,\mathrm{km}^2 + 1.22\times10^3\,\mathrm{km}^2 + 700\,\mathrm{km}^2} = \sqrt{2320\,\mathrm{km}^2} = 48.17\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

La dirección (el ángulo β*) se obtiene usando la ley de los senos:*

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin 120.0^\circ}{R} \to \sin\beta = \left(\frac{\sin 120.0^\circ}{R}\right)B = \left(\frac{\sin 120.0^\circ}{48.17\,\mathrm{km}}\right)(35.0\,\mathrm{km})$$
$$= 0.629$$

Continuación

Del resultado anterior se obtiene:

$$\beta = \arcsin(0.629) = \sin^{-1}(0.629) = 39.0^\circ.$$

El desplazamiento resultante del automóvil es $48.2\,\mathrm{km}$ *en una dirección de* 39.0° *al oeste del norte.*

Note que todos los ángulo son medidos con respecto al eje-y *positivo.*

5.1.5. Multiplicación de un vector por un escalar

Si $\vec{A}$ es multiplicado por m, $\vec{B} = m\vec{A}$ tiene la misma dirección de $\vec{A}$ y $|\vec{B}| = |mA|$.

Si $\vec{A}$ es multiplicado por $-m$, $\vec{B} = -m\vec{A}$ tiene dirección opuesta a la de $\vec{A}$ y su $|\vec{B}| = |mA|$.

Por jemplo, el vector $5\vec{A}$ es cinco veces más largo que $\vec{A}$ y tiene la misma dirección de $\vec{A}$. Por otro lado, el vector $-\frac{1}{5}\vec{A}$ tiene una longitud igual a un quinto de la longitud de $\vec{A}$, y la dirección opuesta a la de $\vec{A}$.

6. Componentes de un vector y vectores unitarios

Un método más preciso para sumar vectores usa sus proyecciones a lo largo de lo ejes coordenados.

Las proyecciones se llaman vectores *componentes* del vector. Todo vector puede ser descrito completamente por sus vectores componentes.

El vector $\vec{A}$ en el plano xy forma un ángulo θ con el eje-x positivo (ver Fig. 17(a)). Sus vectores componentes son $\vec{A}_x$ (a lo largo del eje-x) y $\vec{A}_y$ (a lo largo del eje-y). Luego

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y.$$

Frecuentemente usaremos A_x y A_y (sin flecha).

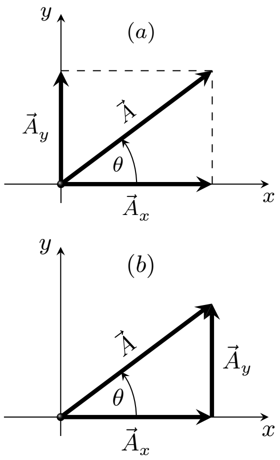


Figura 20. (a) Vector $\vec{A}$ en el plano xy y sus vectores componentes. (b) $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.

Las componentes de un vector pueden ser positivas o negativas.

La componente A_x es positiva si el vector $\vec{A}_x$ apunta en la dirección positiva del eje-x; la componente A_x es negativa, si el vector $\vec{A}_x$ apunta en la dirección negativa del eje-x.

Un análisis similar se aplica a la componente A_y del vector.

De la Fig.20 y las definiciones de seno y coseno, se obtiene:

$$A_x = A\cos\theta \tag{7}$$

$$A_y = A\sin\theta \tag{8}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{9}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right). \tag{10}$$

Los signos de las componentes A_x y A_y *dependen* del ángulo θ:

Dado θ en el: Primer cuadrante $A_x > 0$ y $A_y > 0$; segundo cuadrante $A_x < 0$ y $A_y > 0$; tercer cuadrante $A_x < 0$ y $A_y < 0$; cuarto cuadrante $A_x > 0$ y $A_y < 0$.

En muchas aplicaciones es conveniente expresar las componentes en un sistema de coordenadas con sus ejes no horizontal ni vertical, pero aún perpendiculares entre sí.

Si se eligen ejes de referencia o ángulos que no son los ejes y ángulos mostrados en la Fig. 20, las componentes del vector deben ser modificadas de manera correspondiente.

Con base en la Fig.21:

$$\vec{B} = \vec{B}_{x'} + \vec{B}_{y'}$$
$$B_{x'} = B\cos\theta'$$
$$B_{y'} = B\sin\theta'$$
$$B = \sqrt{B_{x'}^2 + B_{y'}^2}$$
$$\theta' = \arctan\left(\frac{B_{y'}}{B_{x'}}\right).$$

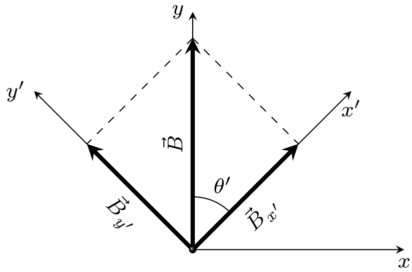


Figura 21. Vector $\vec{B}$ en el plano $x'y'$.

6.1. Vectores unitarios

Un vector *unitario* es un vector *adimensional* cuya magnitud es exactamente *uno*: Son usados para especificar una dada dirección y no tienen otro significado físico; convenientes para describir una dirección en el espacio.

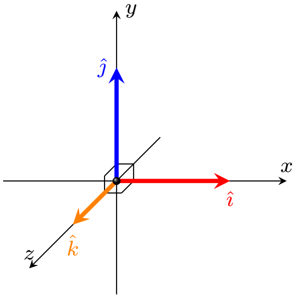


Figura 22. Vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

Usaremos los símbolos:

$\hat{\imath}$; vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje-x

$\hat{\jmath}$; vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje-y

$\hat{k}$; vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje-z

Para un sistema de coordenadas de mano *derecha* (vea la Fig.22):

$$\hat{\imath} \perp \hat{\jmath} \perp \hat{k}; \quad \text{y} \quad |\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1.$$

Considere el vector $\vec{A}$ el plano xy:

El producto de A_x con $\hat{\imath}$ es el vector $A_x\hat{\imath}$, que yace sobre el eje-x y tiene magnitud $|A_x|$ ($A_x\hat{\imath}$ es una representación alternativa del vector componente $\vec{A}_x$ del vector $\vec{A}$).

El producto de A_y con $\hat{\jmath}$ es el vector $A_y\hat{\jmath}$, que yace sobre el eje-y y tiene magnitud $|A_y|$ ($A_y\hat{\jmath}$ es una representación alternativa del vector componente $\vec{A}_y$ del vector $\vec{A}$).

Luego, el vector $\vec{A}$ expresado en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ es

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}. \tag{11}$$

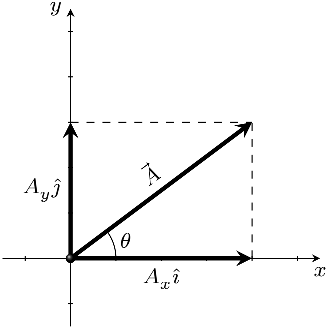


Figura 23. Vector $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$ en el plano xy.

Por ejemplo, considere un punto $(x,\, y)$ como mostrado en la Fig.24.

Ese punto puede ser especificado por el vector posición $\vec{r}$, que en término de los vectores unitarios correspondientes se escribe como:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}, \tag{12}$$

y nos dice que las componentes del vector $\vec{r}$ son las longitudes x e y.

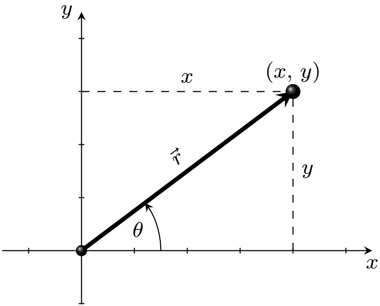


Figura 24. Punto de coordenadas $(x,\, y)$ representado por el vector posición $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$.

Suponga que desea sumar el vector $\vec{B}$ al vector $\vec{A}$ de la Ec.(11), donde el vector $\vec{B}$ tiene componentes B_x y B_y: Fácil, sume las componentes x e y separadamente:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\\ \vec{R} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\ \vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}.\end{aligned} \quad (13)$$

Dado que $\vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}$, entonces

$$R_x = A_x + B_x; \quad R_y = A_y + B_y. \quad (14)$$

Además:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\\ &= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}\end{aligned} \quad (15)$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \quad (16)$$

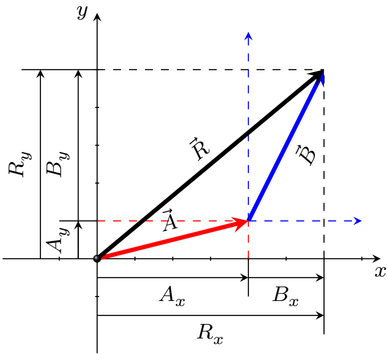


Figura 25. Suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Relación entre las componentes de los vectores.

La extensión del método anterior a vectores en el espacio tridimensional es directa. Sean:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{17}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}. \tag{18}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}. \end{aligned} \tag{19}$$

La magnitud del vector resultante $\vec{R}$ es dada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

y el ángulo θ_x que el vector resultante forma con el eje-x es dado por:

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{A_x + B_x}{R},$$

con expresiones similares para θ_y y θ_z.

Ejemplo

Calcule la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que yacen en el plano xy y son dados por: $\vec{A} = (2.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$ y $\vec{B} = (2.0\hat{\imath} - 4.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$.

Solución

Tenemos: $A_x = 2.0\,\mathrm{m}$, $A_y = 2.0\,\mathrm{m}$, $B_x = 2.0\,\mathrm{m}$ *y* $B_y = -4.0\,\mathrm{m}$.

Para calcular $\vec{R}$ *usamos la Ec.(13):*

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\
\vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} \\
\vec{R} &= [(2.0 + 2.0)\hat{\imath} + (2.0 + (-4.0))\hat{\jmath}]\,\mathrm{m} = (4.0\hat{\imath} - 2.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m},
\end{aligned}$$

con

$$R_x = 4.0\,\mathrm{m} \quad \textit{y} \quad R_y = -2.0\,\mathrm{m}.$$

Para calcular $|\vec{R}|$ *usamos la Ec.(15):*

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\,\mathrm{m})^2 + (-2.0\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{20\,\mathrm{m}} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{m} = 4.5\,\mathrm{m}.$$

Continuación

La dirección de $\vec{R}$ se calcula usando la Ec.(16):

$$\theta_R = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \arctan\left(\frac{-2.0}{4.0}\right) = \arctan(-0.50)$$

Usando la calculadora obtenemos:

$$\theta_R = -27^\circ$$

Este resultado es correcto si se interpreta como un ángulo de 27° medido desde el eje x positivo y en la dirección horaria.

De acuerdo a la convención estándar el ángulo debe ser medido desde el eje-x positivo y en la dirección anti-horaria, de modo tal que:

$$\theta_R = 360^\circ - 27^\circ = 333^\circ.$$

lo cual concuerda con la posición de $\vec{R}$ en el cuarto cuadrante.

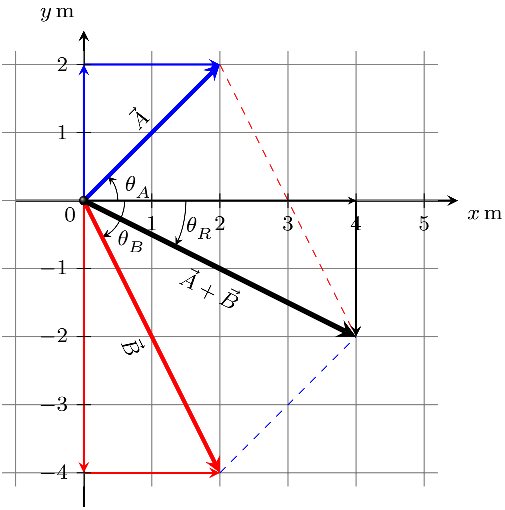


Figura 26. 1Ilustración gráfica del ejemplo.

Ejemplo

Una partícula sufre los siguientes desplazamientos consecutivos:

$$\vec{d}_1 = (15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath} + 12\hat{k})\,\text{cm}$$
$$\vec{d}_2 = (23\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 5.0\hat{k})\,\text{cm}$$
$$\vec{d}_3 = (-13\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})\,\text{cm}.$$

Calcule las componentes del desplazamiento resultante, expréselo en términos de los vectores unitarios y calcule su magnitud.

Solución

Tenemos:

$$\begin{array}{lll} d_{1x} = 15\,\text{cm} & d_{1y} = 30\,\text{cm} & d_{1z} = 12\,\text{cm} \\ d_{2x} = 23\,\text{cm} & d_{2y} = -14\,\text{cm} & d_{2z} = -5.0\,\text{cm} \\ d_{3x} = -13\,\text{cm} & d_{3y} = 15\,\text{cm} & d_{3z} = 0 \end{array}.$$

El desplazamiento total $\vec{d}$, *es:* $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$,

Continuación

donde:

$$\begin{aligned} d_x &= d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = (15 + 23 - 13)\,\text{cm} = 25\,\text{cm} \\ d_y &= d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = (30 - 14 + 15)\,\text{cm} = 31\,\text{cm} \\ d_z &= d_{1z} + d_{2z} + d_{3z} = (12 - 5.0 + 0)\,\text{cm} = 7\,\text{cm} \end{aligned}$$

Así, en notación de vectores unitarios, se tiene:

$$\vec{d} = (25\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} + 7\hat{k})\,\text{cm}.$$

La magnitud del desplazamiento total es:

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{[(25)^2 + (31)^2 + (7)^2]\,\text{cm}^2} \\ &= \sqrt{[6.2 \times 10^2 + 9.6 \times 10^2 + 5 \times 10^1]\,\text{cm}^2} = \sqrt{1630\,\text{cm}^2} = 40.37\,\text{cm} \end{aligned}$$

El ángulo director θ_x es:

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} = \frac{25\,\text{cm}}{40.37\,\text{cm}} = 0.62 \quad \rightarrow \quad \theta_x = \arccos(0.62) = 52^\circ$$

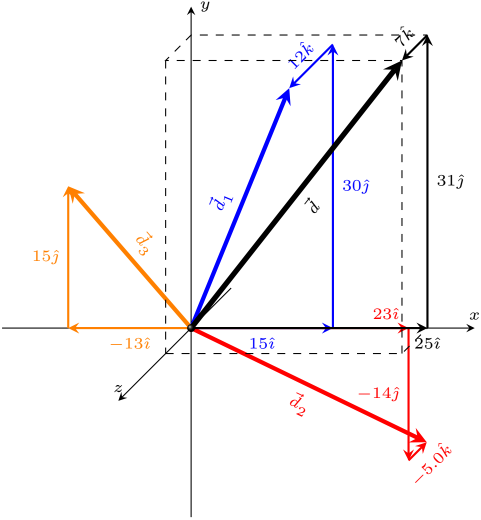


Figura 27. Suma de los vectores del ejemplo anterior.

Ejemplo

Una senderista realiza los siguientes desplazamientos: 25.0 km al sureste seguido de 40.0 km en dirección 60.0° al norte del este.

a) Calcule las componentes de los desplazamientos de la senderista

b) Calcule las componentes de su desplazamiento resultantes $\vec{d}$ (expréselo en términos de vectores unitarios).

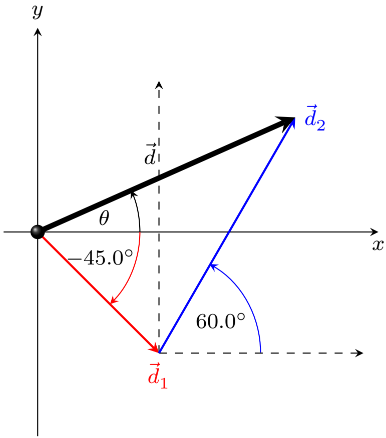


Figura 28. Desplazamientos de la senderista.

Solución

En la Fig.29 se muestra un esquema del problema.

Sea $|\vec{d}_1| = 25.0\,\mathrm{km}$ *y* $\theta_1 = -45.0^\circ$. *Así*

$$\begin{aligned} d_{1x} &= d_1 \cos\theta_1 = (25.0\,\mathrm{km})\cos(-45.0^\circ) = (25.0\,\mathrm{km})\cos(45.0^\circ) = 17.7\,\mathrm{km} \\ d_{1y} &= d_1 \sin\theta_1 = (25.0\,\mathrm{km})\sin(-45.0^\circ) = -(25.0\,\mathrm{km})\sin(45.0^\circ) = -17.7\,\mathrm{km} \\ \vec{d}_1 &= (17.7\hat{\imath} - 17.7\hat{\jmath})\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Sea $|\vec{d}_2| = 40.0\,\mathrm{km}$ *y* $\theta_2 = 60^\circ$. *Así*

$$\begin{aligned} d_{2x} &= d_2 \cos\theta_2 = (40.0\,\mathrm{km})\cos(60.0^\circ) = 20.0\,\mathrm{km} \\ d_{2y} &= d_2 \sin\theta_2 = (40.0\,\mathrm{km})\sin(60.0^\circ) = 34.6\,\mathrm{km} \\ \vec{d}_2 &= (20.0\hat{\imath} + 34.6\hat{\jmath})\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Continuación

El desplazamiento resultante de la senderista es $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$. *Las componentes de* $\vec{d}$ *son:*

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} = (17.7 + 20.0)\,\mathrm{km} = 37.7\,\mathrm{km}$$
$$d_y = d_{1y} + d_{2y} = (-17.7 + 34.6)\,\mathrm{km} = 16.9\,\mathrm{km}$$

Usando vectores unitarios, el desplazamiento resultante de la senderista $\vec{d}$, *se escribe*

$$\vec{d} = (37.7\hat{\imath} + 16.9\hat{\jmath})\,\mathrm{km}$$

Calculemos θ*:*

$$\tan\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{16.9\,\mathrm{km}}{37.7\,\mathrm{km}} = 0.448 \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan(0.448) = 24.1^\circ$$

La magnitud del desplazamiento es

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{[(37.7)^2 + (16.9)^2]\,\mathrm{km}^2} = \sqrt{[1.42 \times 10^3 + 286]\,\mathrm{km}^2}$$
$$= \sqrt{1706\,\mathrm{km}^2} = 41.30\,\mathrm{km}$$

Ejemplo

Un aeroplano conmutador toma la ruta mostrada en la Fig.29. Primero, vuela desde el origen del sistema de coordenadas mostrado hasta la ciudad A, ubicada a 175 km en una dirección 30.0° al norte del este. Luego, vuela 153 km con dirección 20.0° al oeste del norte a la ciudad B. Finalmente, vuela 195 km hacia el oeste a la ciudad C. Calcule la ubicación de la ciuidad C relativa al origen.

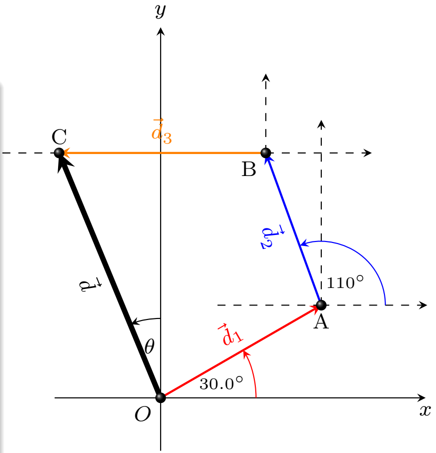


Figura 29. Viaje del aeroplano conmutador.

Solución

Con $d_1 = 175\,\mathrm{km}$ *y* $\theta_1 = 30.0^\circ$*:*

$$d_{1x} = d_1 \cos\theta_1 = (175\,\mathrm{km})\cos(30.0^\circ) = 152\,\mathrm{km}$$
$$d_{1y} = d_1 \sin\theta_1 = (175\,\mathrm{km})\sin(30.0^\circ) = 87.5\,\mathrm{km}$$

Con $d_2 = 153\,\mathrm{km}$ *y* $\theta_2 = 110^\circ$*:*

$$d_{2x} = d_2 \cos\theta_2 = (153\,\mathrm{km})\cos(110^\circ) = -52.3\,\mathrm{km}$$
$$d_{2y} = d_2 \sin\theta_2 = (153\,\mathrm{km})\sin(110^\circ) = 144\,\mathrm{km},$$

y, con $d_3 = 195\,\mathrm{km}$ *y* $\theta_3 = 180^\circ$*:*

$$d_{3x} = d_3 \cos\theta_3 = (195\,\mathrm{km})\cos(180^\circ) = -195\,\mathrm{km}$$
$$d_{3y} = d_3 \sin\theta_3 = (195\,\mathrm{km})\sin(180^\circ) = 0.$$

Las componentes del vector resultante $\vec{\mathrm{d}}$ *del vuelo completo son:*

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = (152 - 52.3 - 195)\,\mathrm{km} = -95\,\mathrm{km}$$
$$d_y = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = (87.5 + 144 + 0)\,\mathrm{km} = 232\,\mathrm{km}$$

Continuación

Usando vectores unitarios $\vec{d}$ *se escribe como*

$$\vec{d} = (-95\hat{\imath} + 232\hat{\jmath})\,\mathrm{km}.$$

La magnitud de $\vec{d}$ *es, usando la Ec.(15):*

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{[(-95)^2 + (232)^2]\,\mathrm{km}^2} = \sqrt{(9.0 \times 10^3) + (5.38 \times 10^4)\,\mathrm{km}^2}$$
$$= \sqrt{62800\,\mathrm{km}^2} = 2.5060 \times 10^2\,\mathrm{km}.$$

Usando la Ec.(16) se encuentra que la dirección de $\vec{d}$ *es:*

$$\theta = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \arctan\left(\frac{232\,\mathrm{km}}{-95\,\mathrm{km}}\right) = \arctan(-2.4).$$

Usando la calculadora se obtiene $\theta = -67^\circ$*. Note que la coordenada* x *de la posición de la ciudad* C *es negativa, de modo que esa ciudad está en el segundo cuadrante. Así, siguiendo la convención para ángulo medidos en el sentido antihorario desde el eje-*x *positivo, la dirección es* $\theta = 180^\circ + (-67^\circ) = 113^\circ$*.*

Continuación

Luego, la ciudad C *está a* $2.5060 \times 10^2\,\mathrm{km}$ *a* 23° *al oeste del norte del origen o, a* $2.5060 \times 10^2\,\mathrm{km}$ *a* 112° *al oeste del este del origen.*

7. El Producto escalar de vectores

Vimos que un vector puede ser multiplicado por un escalar. Ahora veremos como se pueden multiplicar dos vectores.

En primer lugar consideraremos el producto *escalar*:

> *El resultado de la multiplicaión de los dos vectores es un escalar; un número y una unidad correspondiente*

El producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se escribirá $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

En general, el producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y al coseno del ángulo θ entre ellos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = AB\cos\theta. \tag{20}$$

En este caso, las unidades de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no necesariamente deben ser las mismas.

El producto escalar es comúnmente llamado producto *punto* entre vectores.

7.1. Algunas propiedades del producto escalar

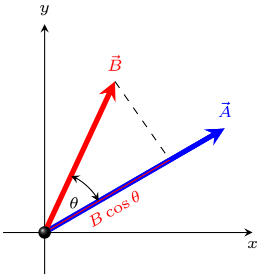


Figura 30. Producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

La Fig.30 muestra dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo entre ellos usado para la definición del producto escalar.

En esa figura $B\cos\theta$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

La Ec.(20) significa que el producto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es el producto de la magnitud de $\vec{A}$ y la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

1. Del la Ec.(20) se ve que el producto escalar es *conmutativo*:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}.$$

2. El producto escalar obededece la ley de *distributividad* de la multiplicación:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

3. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y son:
Paralelos $(\theta = 0^\circ) \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$; Anti-paralelos $(\theta = 180^\circ) \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$.

④. Si $\vec{A} \perp \vec{B} \rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Válido también cuando $\vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$.

⑤. Si $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$ y $0^\circ < \theta < 90^\circ \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} > 0$.

⑥. Si $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$ y $90^\circ < \theta \leq 180^\circ \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} < 0$.

Aplicando la Ec.(20) a los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ se tiene:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1) \cancelto{1}{\cos 0^\circ} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \tag{21}$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1) \cancelto{0}{\cos 90^\circ} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0 \tag{22}$$

Usando $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\
&= A_xB_x \cancelto{1}{\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}} + A_xB_y \cancelto{0}{\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}} + A_xB_z \cancelto{0}{\hat{\imath} \cdot \hat{k}} + A_yB_x \cancelto{0}{\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}} \\
&+ A_yB_y \cancelto{1}{\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}} + A_yB_z \cancelto{0}{\hat{\jmath} \cdot \hat{k}} + A_zB_x \cancelto{0}{\hat{k} \cdot \hat{\imath}} + A_zB_y \cancelto{0}{\hat{k} \cdot \hat{\jmath}} + A_zB_z \cancelto{1}{\hat{k} \cdot \hat{k}} \\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.
\end{aligned} \tag{23}$$

En el caso especial, cuando $\vec{A} = \vec{B}$,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \rightarrow \quad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Ejemplo

Dados $\vec{A} = 2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -1.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath}$, a) Calcule $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y b) Calcule el ángulo θ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

a) $A_x = 2.0$, $A_y = 3.0$, $B_x = -1.0$, $B_y = 2.0$ *y* $A_z = B_z = 0$*:*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = (2.0)(-1.0) + (3.0)(2.0) = 4.0$$

b) Las magnitudes de $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$ *son, respectivamente,*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \sqrt{4.0 + 9.0} = \sqrt{13.0} = 3.60$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1.0)^2 + (2.0)^2} = \sqrt{1.0 + 4.0} = \sqrt{5.0} = 2.2$$

Continuación

Usando la Ec.(20), tenemos: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4.0$, $A = 3.60$ *y* $B = 2.2$. *Despejando* $\cos\theta$, *se tiene:*

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{4.0}{(3.60)(2.2)} = \frac{4.0}{7.9} = 0.51 \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos(0.51) = 59^\circ.$$

Ejemplo

Una partícula que se mueve en el plano xy sufre un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$ cuando una fuerza constante $\vec{F} = (5.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$ es aplicada sobre ella. a) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la fuerza constante. b) Calcule el trabajo $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula.

Solución

a) La magnitud del desplazamiento (Δr) *es:*

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0\,\mathrm{m})^2 + (3.0\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{13.0\,\mathrm{m}^2} = 3.60\,\mathrm{m}$$

Continuación

y la magnitud de la fuerza (F) es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0\,\mathrm{N})^2 + (2.0\,\mathrm{N})^2} = \sqrt{29\,\mathrm{N}^2} = 5.4\,\mathrm{N}.$$

b) Usando la definición de trabajo dada $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$:

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \\ &= F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ &= (5.0\,\mathrm{N})(2.0\,\mathrm{m}) + (2.0\,\mathrm{N})(3.0\,\mathrm{m}) = 16\,\mathrm{Nm}. \end{aligned}$$

Usando la Ec.(20) encontramos $\cos\theta$, esto es:

$$\cos\theta = \frac{W}{(\Delta r)F} = \frac{16\,\mathrm{Nm}}{(3.60\,\mathrm{m})(5.4\,\mathrm{N})} = \frac{16}{19} = 0.84$$

por lo tanto,

$$\theta = \arccos(0.84) = 33^\circ$$

8. El Producto vectorial entre vectores

Dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es definido como un tercer vector $\vec{C}$, cuya magnitud es dada por el producto de las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el seno del ángulo formado entre ellos. Matemáticamente, se tiene:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \text{con} \quad |\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| \equiv AB \sin\theta. \tag{24}$$

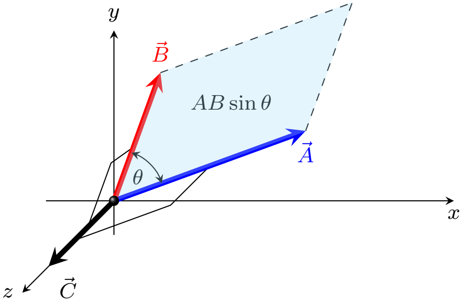


Figura 31. La magnitud $AB\sin\theta$ es igual al área del paralelógramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

De la Fig.31, $AB\sin\theta$ es igual al área del paralelógramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

La *dirección* de $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, esto es, $\vec{C}\perp\vec{A}$ y $\vec{C}\perp\vec{B}$.

La dirección de $\vec{C}$ se determina usando la regla de la mano derecha.

Regla de la mano derecha. *Los cuatro dedos de la mano derecha son alineados a lo largo del primer vector del producto y se giran hacia el segundo vector del producto a través del ángulo θ. La dirección en la que apunta el dedo "pulgar" es la dirección del vector $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$.*

Dada la notación $\vec{A}\times\vec{B}$, se lee "$\vec{A}$ cruz $\vec{B}$", de la cual se deriva el término producto *cruz*.

8.1. Algunas propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial *no* es conmutativo. El orden en el que se multiplican los vectores es importante:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A}). \tag{25}$$

②. Si $\vec{A} \parallel \vec{B}\,(\theta = 0°)$ o $\vec{A}$ antiparalelo a $\vec{B}\,(\theta = 180°)$, entonces $\vec{A} \times \vec{B} = 0$. Se sigue que $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = 0$.

③. Si $\vec{A} \perp \vec{B}$, entonces, $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.

④. El producto vectorial obedece la ley de *distributividad* de la multiplicación:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \tag{26}$$

De las Ec.(24) y (25) y de las definiciones de los vectores unitarios, se tiene:

$$|\hat{\imath} \times \hat{\imath}| = |\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}| = |\hat{k} \times \hat{k}| = (1)(1)\cancelto{0}{\sin{}^{\circ}} = 0$$

de la cual se sigue que

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) = \hat{k}, \quad |\hat{\imath} \times \hat{\jmath}| = |\hat{\jmath} \times \hat{\imath}| = (1)(1)\sin 90^{\circ} = 1 \tag{27a}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{\jmath}) = \hat{\imath}, \quad |\hat{\jmath} \times \hat{k}| = |\hat{k} \times \hat{\jmath}| = (1)(1)\sin 90^{\circ} = 1 \tag{27b}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -(\hat{\imath} \times \hat{k}) = \hat{\jmath}, \quad |\hat{k} \times \hat{\imath}| = |\hat{\imath} \times \hat{k}| = (1)(1)\sin 90^{\circ} = 1. \tag{27c}$$

Los signos son intercambiables en los productos vectoriales. Por ejemplo:
$\vec{A} \times (-\vec{B}) = (-\vec{A}) \times \vec{B}$ e $\hat{\imath} \times (-\hat{\jmath}) = (-\hat{\imath}) \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$.

El producto vectorial entre $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ puede ser expresado en la siguiente forma de un determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}. \tag{28}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = {} & A_xB_x \cancelto{0}{(\hat{\imath} \times \hat{\imath})} + A_xB_y \cancelto{\hat{k}}{(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})} + A_xB_z \cancelto{-\hat{\jmath}}{(\hat{\imath} \times \hat{k})} \\ & + A_yB_x \cancelto{-\hat{k}}{(\hat{\jmath} \times \hat{\imath})} + A_yB_y \cancelto{0}{(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath})} + A_yB_z \cancelto{\hat{\imath}}{(\hat{\jmath} \times \hat{k})} \\ & + A_zB_x \cancelto{\hat{\jmath}}{(\hat{k} \times \hat{\imath})} + A_zB_y \cancelto{-\hat{\imath}}{(\hat{k} \times \hat{\jmath})} + A_zB_z \cancelto{0}{(\hat{k} \times \hat{k})} \\ = {} & (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{A} = 2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -1.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath}$, a) Calcule $\vec{A} \times \vec{B}$ y b) Verifique, analíticamente, que $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$.

Solución

a) Tenemos: $A_x = 2.0$, $A_y = 3.0$, $B_x = -1.0$, $B_y = 2.0$ *y* $A_z = B_z = 0$. *Usando la Ec.(28), encontramos:*

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \\ &= [(3.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{\imath} - [(2.0)(0) - (0)(-1.0)]\hat{\jmath} \\ &+ [(2.0)(2.0) - (3.0)(-1.0)]\hat{k} \\ &= 7.0\hat{k}.\end{aligned}$$

Como era de esperar, dado que los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$ *yacen en el plano* xy*, el vector resultante* $\vec{A} \times \vec{B}$ *es un vector que apunta en la dirección perpendicular a ese plano, es decir en la dirección del eje-*z*.*

Continuación

Sabemos que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \therefore \quad \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} = -(7.0\hat{k}) = -7.0\hat{k}.$$

La comprobación de eso es como sigue:

$$\begin{aligned}
\vec{B} \times \vec{A} &= (B_y A_z - B_z A_y)\hat{\imath} - (B_x A_z - B_z A_x)\hat{\jmath} + (B_x A_y - B_y A_x)\hat{k} \\
&= [(2.0)(0) - (0)(3.0)]\hat{\imath} - [(-1.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{\jmath} \\
&+ [(-1.0)(3.0) - (2.0)(2.0)]\hat{k} \\
&= -7.0\hat{k}.
\end{aligned}$$

Ejemplo

Una fuerza $\vec{F} = (2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$ es aplicada a un objeto que puede girar en torno de un punto fijo a lo largo del eje-z. Si la fuerza es aplicada en un punto colocado en $\vec{r} = (4.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$, calcule el vector torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Solución

Vemos que el torque es definido como un producto vectorial. En este caso:
$x = 4.00\,\mathrm{m}$, $y = 5.00\,\mathrm{m}$, $F_x = 2.00\,\mathrm{N}$, $F_y = 3.00\,\mathrm{N}$ *y* $z = F_z = 0$.
Aplicando la Ec.(28), se encuentra que

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
&= (yF_z - zF_y)\hat{\imath} - (xF_z - zF_x)\hat{\jmath} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \\
&= [(5.00\,\mathrm{m})(0) - (0)(3.00\,\mathrm{N})]\hat{\imath} - [(4.00\,\mathrm{m})(0) - (0)(2.00\,\mathrm{N})]\hat{\jmath} \\
&\quad + [(4.00\,\mathrm{m})(3.00\,\mathrm{N}) - (5.00\,\mathrm{m})(2.00\,\mathrm{N})]\hat{k} = [(12.0 - 10.0)\hat{k}]\,\mathrm{mN} \\
&= 2.0\hat{k}\,\mathrm{mN}.
\end{aligned}$$

El torque apunta en la dirección positiva del eje z, perpendicular al plano xy.