UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
4 de abril de 2007
Duración: 1h 40min
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación 1

1. Tres sospechosos de un grave delito son interrogados. Asuma que si un sujeto es inocente entonces lo que dice es verdadero, y si es culpable entonces lo que dice es falso.

   Durante la interrogación los distintos sospechosos -que aquí llamaremos s1, s2 y s3 para resguardar sus identidades- hacen las siguientes afirmaciones:

   s1 afirma: Si no fue s3 entonces tampoco fue s2.
   s2 afirma: Lo hice en complicidad con s1.
   s3 afirma: Soy inocente.

   Determine quién o quiénes son culpables.

2. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere el conjunto $B_i = [i, i^2]$. Demuestre la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \phi$$

3. Dada una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, se define la relación $\mathcal{R}^2$ por:

$$a \, \mathcal{R}^2 \, b \;\Leftrightarrow\; (\exists c \in A) \; a \, \mathcal{R} \, c \wedge c \, \mathcal{R} \, b$$

   Demuestre que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R}^2$ también.

4. Se define una relación $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ como sigue: Dados $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\vec{x} \, \mathcal{S} \, \vec{y} \;\Leftrightarrow\; (\forall k \in \{1,2,3\}) \; \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

   Demuestre que es antisimétrica.