Existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Carlos M. Mora

Teorema de existencia y unicidad general

Considere la EDO

$$Y'(t) = f(t,\ Y(t))$$

donde f es una función conocida para la cual existen dos intervalos $]t_i, t_f[$ y $]y_i, y_f[$ tales que:

- $]t_i, t_f[\times]y_i, y_f[$ está en el dominio de f.
- f es continua en (todos los puntos de) $]t_i, t_f[\times]y_i, y_f[$.
- $\frac{\partial}{\partial y} f$ existe y es continua en (todos los puntos de) $]t_i, t_f[\times]y_i, y_f[$.

Entonces, para cada $t_0 \in]t_i, t_f[$ y $y_0 \in]y_i, y_f[$ existe un intervalo abierto $t_0 \in I \subset]t_i, t_f[$ tal que el PVI

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t,\ Y(t)) & \forall t \in I \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en I.

Ejemplo: $Y'(t) = g(t)\ h(Y(t))$

$f(t,\ y) = g(t)\ h(y)$

- f es continua en $]t_i, t_f[\times]y_i, y_f[$ si y solo si g es continua en $]t_i, t_f[$ y h es continua en $]y_i, y_f[$.
- $\frac{\partial}{\partial y} f = g(t)\ h'(y)$
- $\frac{\partial}{\partial y} f$ es continua en $]t_i, t_f[\times]y_i, y_f[$ si y solo si g es continua en $]t_i, t_f[$ y h' es continua en $]y_i, y_f[$.

Teorema de existencia y unicidad para EDO de variables separables

Considere la EDO

$$Y'(t) = g(t)\, h(Y(t))$$

donde g y h son funciones conocidas tales que

- g es continua en $]t_i, t_f[$ con $t_f > t_i$.
- h, h' son continuas en $]y_i, y_f[$ con $y_f > y_i$.

Entonces, para cada $t_0 \in\,]t_i, t_f[$ y $y_0 \in\,]y_i, y_f[$ existe un intervalo abierto $t_0 \in I \subset\,]t_i, t_f[$ tal que el PVI

$$\begin{cases} Y'(t) = g(t)\, h(Y(t)) & \forall t \in I \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en I.

Ejemplo:

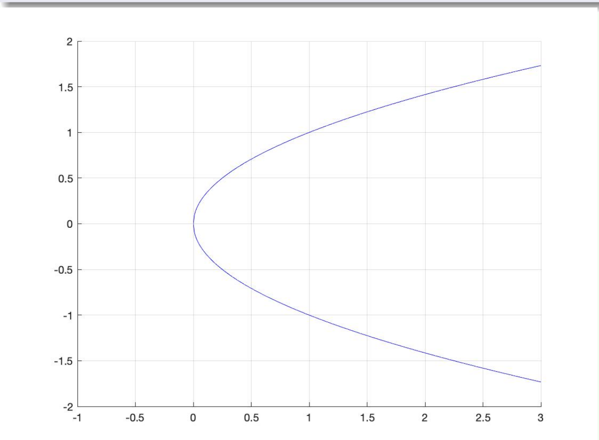
Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \left(x - y(x)^2\right) y'(x) = 2 + \operatorname{sen}(x + y(x)) \\ y(a) = b \end{cases}$$

Determinar todos los puntos a, b para los cuales se puede asegurar la existencia y la unicidad de la solución del PVI dado.

$$y'(x) = f(t,\ y(x)), \qquad \text{donde} \qquad f(t,\ y) = \frac{2 + \operatorname{sen}(x + y)}{x - y^2}$$

Como f, $\frac{\partial}{\partial y} f$ son continuas en todo punto de $Dom(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y^2\right\}$, el teorema de existencia y unicidad nos garantiza la existencia de una única solución para cada (a, b) en:



$$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}, x > 0\right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = \ &]-\infty, 0[\times \mathbb{R} \\ & \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} > y, x \geq 0\right\} \\ & \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{x}, x \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Definición

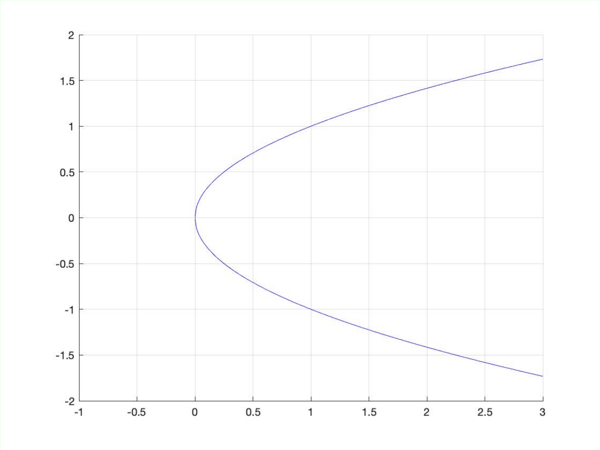
Un subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^2$ es llamado conjunto abierto y conexo si:

- Para cada $(a, b) \in \mathcal{G}$ existe un rectángulo $]x_1, x_2[\,\times\,]y_1, y_2[$ que satisface:
  - $(a, b) \in\,]x_1, x_2[\,\times\,]y_1, y_2[$;
  - $]x_1, x_2[\,\times\,]y_1, y_2[\, \subset \mathcal{G}$.
- Para todos los puntos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{G}$ existe un trazo continuo que une a (a_1, b_1) con (a_2, b_2).

Ejemplo:

Determine las componentes conexas (o sea, los mayores conjuntos abiertos y conexos) de puntos (a, b) donde se pueda asegurar la existencia y unicidad de la solución de

$$\begin{cases} \left(x - y(x)^2\right) y'(x) = 2 + \operatorname{sen}(x + y(x)) \\ y(a) = b \end{cases}$$



$$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}, x > 0\right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = \, &]-\infty, 0[\times \mathbb{R} \\ & \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} > y, x \geq 0\right\} \\ & \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{x}, x \geq 0\right\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son las componentes conexas del conjunto de condiciones iniciales donde el teorema de existencia y unicidad asegura que el PVI tiene una única solución.

Teorema de existencia y unicidad general

Considere la EDO

$$Y'(t) = f(t,\ Y(t))$$

donde f es una función conocida para la cual existe un conjunto abierto y conexo $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

- $\mathcal{G}$ está contenido en el dominio de f.
- f es continua en (todos los puntos de) $\mathcal{G}$.
- $\frac{\partial}{\partial y} f$ existe y es continua en (todos los puntos de) $\mathcal{G}$.

Entonces, para cada $(t_0, y_0) \in \mathcal{G}$ existe un intervalo abierto I que contiene a t_0 y una única función derivable $Y : I \to \mathbb{R}$ con $(t, Y(t)) \in \mathcal{G}$, para todo $t \in I$, que satisface el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t,\ Y(t)) & \forall t \in I \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Ejemplo:

Determinar todos los puntos a, b para los cuales se puede asegurar la existencia y la unicidad de la solución del PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x) - x} \\ y(a) = b \end{cases}.$$

$$y'(x) = f(t,\, y(x)), \qquad \text{donde} \qquad f(t,\, y) = \sqrt{y - x}$$

Luego, $Dom(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\right\}$.
Ya que la frontera de $Dom(f)$ es $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}$,
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\right\}$ es el mayor conjunto abierto y conexo contenido en $Dom(f)$.

Como f, $\frac{\partial}{\partial y} f$ son continuas en todo punto de $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\right\}$,

el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que
para cada $(a, b) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\right\}$
el PVI dado tiene una única solución definida en cierto intervalo abierto I ,
además de que $y(x) > x$ para todo $x \in I$