Elementos Finitos – 521537
Cápsula 06 - Método de Elementos Finitos 1D

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Definición

Definimos una *malla unidimensional* para $\Omega =]a\,,b[$ como una colección finita e indexada de intervalos $\{I_j\}_{j=1}^N = \{[a_j\,,b_j]\}_{j=1}^N$ que forman una partición para Ω, es decir

- $\bigcup_{j=1}^N I_j = \overline{\Omega}$
- $j \neq k \Rightarrow \overset{\circ}{I}_j \cap \overset{\circ}{I}_k = \emptyset$.

<u>Observación:</u> La forma más simple de construir una malla unidimensional es considerar un conjunto de $N+1$ puntos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b,$$

y definir $I_j := [x_{j-1}\,, x_j]$ para $j = 1, \ldots, N$.

<u>Notaciones:</u> Los puntos en el conjunto $\{x_0, \ldots, x_N\}$ son conocidos como *vértices* de la malla. El tamaño de cada intervalo I_j es definido por

$$h_j := b_j - a_j = x_j - x_{j-1}\,,$$

para $j = 1, \ldots, N$, con esto podemos definir el *tamaño característico* de la malla como

$$h := \max_{j\in\{1,\ldots N\}} h_j > 0$$

y denotamos la malla como $\mathcal{T}_h := \{I_j\}_{j=1}^N$, esto permite definir familias de mallas $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Los intervalos I_j también se conocen como **elementos de la malla**.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $k \in \mathbb{N}_0$, en adelante $\mathbb{P}^k(I)$ representará al espacio vectorial de los polinomios de orden menor o igual a k definidos sobre I, es decir

$$\mathbb{P}^k(I) := \left\{ \sum_{j=0}^{k} c_j\, x^j \,:\, c_j \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \in I \right\}.$$

Definición (polinomios de orden k sobre $\mathcal{T}_h$)

Dada una malla unidimensional $\mathcal{T}_h$ y $k \in \mathbb{N}_0$ definimos el espacio de *polinomios de orden k sobre $\mathcal{T}_h$ (o a trozos)* como

$$V_h^k := \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v_h|_I \in \mathbb{P}^k(I), \forall\, I \in \mathcal{T}_h\}.$$

Considere el dominio $\Omega =]0.6\,,3.9[$ y defina $\mathcal{T}_h = \{[0.6\,,1.2],[1.2\,,2.0],[2.0\,,2.7],[2.7\,,3.9]\}$

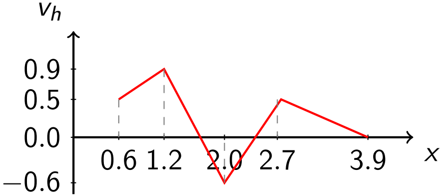


Figura: $v_h \in V_h^1$

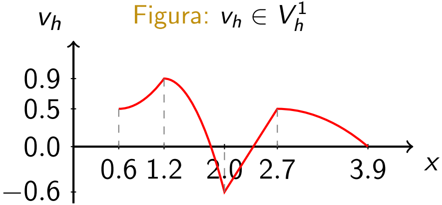
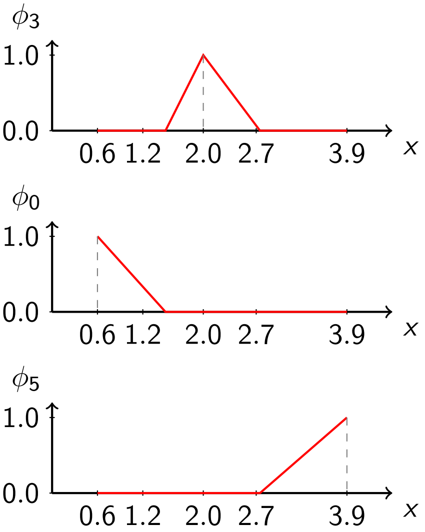


Figura: $v_h \in V_h^2$

Considere ahora el conjunto $\{\phi_0, \ldots, \phi_N\}$ de funciones $\phi_j : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{j-1}}(x - a_{j-1}), & x \in I_{j-1} \\ \frac{1}{h_j}(b_j - x), & x \in I_j \\ 0, & x \notin I_{j-1} \cup I_j \end{cases}$$

para $j = 1, \ldots, N-1$, mientras que ϕ_0 y ϕ_N tienen soporte solo en I_1 e I_N respectivamente, con un comportamiento exactamente análogo.



Proposición

Dada una malla unidimensional $\mathcal{T}_h$, el conjunto $\{\phi_0, \ldots, \phi_N\}$ es una base para el espacio V_h^1.

Demostración: Sea $\{x_0,\ldots x_N\}$ el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, luego $\phi_j(x_i)=\delta_{ij}$. Asuma $c_0,\ldots,c_N\in\mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^N c_j\,\phi_j=0$, al evaluar esta expresión en x_k arbitrario obtenemos $c_k=0$, luego $c_0=\cdots=c_N=0$, por lo tanto $\{\phi_0,\ldots,\phi_N\}$ es linealmente independiente.

Considere ahora $v_h\in V_h^1$, demostraremos que

$$v_h=\sum_{j=0}^N v_h(x_j)\,\phi_j,\ \text{ en }\Omega\,.$$

Para ello es suficiente mostrar que $\psi:=v_h-(v_h(x_{k-1})\,\phi_{k-1}+v_h(x_k)\,\phi_k)|_{I_k}=0\,,$ con $I_k=[x_{k-1}\,,x_k]\in\mathcal{T}_h$ arbitrario.

En efecto, $\psi\in\mathbb{P}^1(I_k)$, además $\psi(x_{k-1})=\psi(x_k)=0$, luego $\psi=0$. □

Proposición

Se satisface que $V_h^1\leq H^1(\Omega)$

Demostración: Como V_h^1 tiene dimensión finita entonces es cerrado en $H^1(\Omega)$, basta mostrar que $V_h^1\subset H^1(\Omega)$. Sea $v_h\in V_h^1$, es claro que $v_h\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, podemos definir $w\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$w(x)|_{\overset{\circ}{I_k}}=\frac{v_h(b_k)-v_h(a_k)}{h_k}$$

para cada $I_k=[a_k\,,b_k]\in\mathcal{T}_h$, es claro que $w=\partial_x v_h$ y además que $w\in L^2(\Omega)$. □

Observación: Como $\{\phi_0, \ldots, \phi_N\}$ es una base, la representación

$$v_h = \sum_{j=0}^{N} v_h(x_j)\,\phi_j, \text{ en } \Omega\,.$$

es **única**. Sea $L \in (V_h^1)'$ y $v_h \in V_h^1$, luego

$$L(v_h) = L\left(\sum_{j=0}^{N} v_h(x_j)\,\phi_j\right) = \sum_{j=0}^{N} v_h(x_j)\,L(\phi_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{N} L(\phi_j)\,\gamma_j(v_h)\,,$$

donde cada $\gamma_j : V_h^1 \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal y acotado, definido por $v_h \mapsto \gamma_j\,(v_h) = v_h\,(x_j)$, luego $\langle\{\gamma_0, \ldots, \gamma_N\}\rangle = (V_h^1)'$. Si definimos $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=0}^{N} c_j\,\gamma_j = 0$ podemos evaluar en ϕ_k arbitrario y obtener

$$0 = \sum_{j=0}^{N} c_j\,\gamma_j\,(\phi_k) = \sum_{j=0}^{N} c_j\,\phi_k(x_j) = c_k\,,$$

con esto probamos que $c_0 = \cdots = c_N = 0$ y $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_N\}$ es una base para $(V_h^1)'$.

Definición

La base $\{\phi_0, \ldots, \phi_N\} \subset V_h^1$ se conoce como *funciones de forma* de V_h^1 mientras que la base $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_N\} \subset (V_h^1)'$ como *grados de libertad globales* de V_h^1.

Teorema

Sea $\Omega =]a\,,b[$ y $u \in H^1(\Omega)$ entonces $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ (c.t.p)

Demostración: Sea $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = u$, en $H^1(\Omega)$, además considere $x, y \in \overline{\Omega}$ arbitrarios, usando resultados clásicos se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\psi_k(y) - \psi_k(x)| &= \left| \int_x^y \psi_k'(s)\, \mathrm{d}s \right| \leq \int_x^y |\psi_k'(s)|\, \mathrm{d}s \\
&\leq |y-x|^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y |\psi_k'(s)|^2\, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |y-x|^{\frac{1}{2}}\, |\psi_k|_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

definiremos ahora una función $v : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}}$, a través de la relación $v(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, de la relación anterior obtenemos

$$
|v(y) - v(x)| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}}\, |u|_{1,\Omega}
$$

luego $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y $\tilde{v} := v|_{\Omega} \in L^{\infty}(\Omega)$, note que

$$
\begin{aligned}
\|u - \tilde{v}\|_{0,\Omega} &\leq \|u - \psi_k\|_{0,\Omega} + \|\tilde{v} - \psi_k\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|u - \psi_k\|_{1,\Omega} + \left(\int_{\Omega} |\tilde{v}(x) - \psi_k(x)|^2\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

llevando $k \to \infty$ obtenemos $\tilde{v} = u$ por lo tanto $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. $\square$

Observación: Sea $u \in H^1(\Omega)$, de la demostración anterior tenemos la relación

$$|u(y) - u(x)| \leq |b - a|^{\frac{1}{2}} \, |u|_{1,\Omega} \qquad (1)$$

como u es continua podemos definir x_0 tal que $|u(x_0)| = \min_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$, luego

$$\begin{aligned} |u(x_0)| &= |b - a|^{-\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |u(x_0)|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |b - a|^{-\frac{1}{2}} \, \|u\|_{0,\Omega} \end{aligned} \qquad (2)$$

usamos (1) con $x = x_0$ y de (2) obtenemos

$$\|u\|_\infty \leq |b-a|^{\frac{1}{2}} \, |u|_{1,\Omega} + |b-a|^{-\frac{1}{2}} \, \|u\|_{0,\Omega} \,. \qquad (3)$$

Definición

El operador $\mathcal{I}_h^1 : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to V_h^1$ definido por

$$v \mapsto \mathcal{I}_h^1(v) = \sum_{j=0}^{N} \gamma_j(v) \, \phi_j$$

para todo $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Se conoce como *operador de interpolación para* V_h^1.

Proposición

$\mathcal{I}_h^1|_{H^1(\Omega)} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega))$ y existe $C > 0$ independiente de h (acotado) tal que

$$\|\mathcal{I}_h^1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\Omega))} \leq C \,.$$

Demostración: La linealidad de $\mathcal{I}_h^1$ es evidente. Sea $u \in H^1(\Omega)$, la continuidad de u implica que $\gamma_j(u) = u(x_j)$ está bien definida para todo $j \in \{0, \dots, N\}$, luego $\mathcal{I}_h^1$ está bien definido sobre $H^1(\Omega)$, además como $V_h^1 \leq H^1(\Omega)$, entonces $\mathcal{I}_h^1\, u \in H^1(\Omega)$. Ahora note que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_h^1\, u|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} \frac{|u(b_j) - u(a_j)|^2}{h_j^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{|u(b_j) - u(a_j)|^2}{h_j} \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} |u|_{1,I_j}^2 = |u|_{1,\Omega}^2\,, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

luego, $|\mathcal{I}_h^1\, u|_{1,\Omega} \leq |u|_{1,\Omega}$. Además,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_h^1\, u\|_{\infty,\Omega} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \left|\textstyle\sum_{j=0}^{N} u(x_j)\,\phi_j(x)\right| \\
&\leq \max_{j=0,\dots,N} |u(x_j)| \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \left|\textstyle\sum_{j=0}^{N} \phi_j(x)\right| \\
&= \max_{j=0,\dots,N} |u(x_j)| \leq \|u\|_{\infty,\Omega}
\end{aligned}
$$

con lo que construiremos la siguiente cota

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_h^1\, u\|_{0,\Omega} &\leq |b-a|^{\frac{1}{2}}\, \|\mathcal{I}_h^1\, u\|_{\infty,\Omega} \\
&\leq |b-a|^{\frac{1}{2}}\, \|u\|_{\infty,\Omega} \\
&\leq |b-a|\, |u|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \\
&\leq (1 + |b-a|)\, \|u\|_{1,\Omega}\,. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Usando (4) y (5) llegamos a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_h^1 u\|_{1,\Omega}^2 &= \|\mathcal{I}_h^1 u\|_{0,\Omega}^2 + |\mathcal{I}_h^1 u|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq (1+|b-a|)^2 \|u\|_{1,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq (2+2|b-a|+|b-a|^2) \|u\|_{1,\Omega}^2 \\ &= C^2 \|u\|_{1,\Omega}^2 . \quad \square\end{aligned}$$

Proposición

Sea $h>0$ y $u \in H^2(\Omega)$, entonces se satisfacen las siguiente estimaciones de interpolación

$$\|u-\mathcal{I}_h^1 u\|_{0,\Omega} \leq h^2 |v|_{2,\Omega}$$
$$|u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,\Omega} \leq h |v|_{2,\Omega} .$$

Demostración: Sea $I_i \in \mathcal{T}_h$ y sean $w \in H^1(I_i)$ y $x_0 \in I_k$ tal que $w(x_0)=0$, de (1) obtenemos $\|w\|_{0,I_k} \leq h_k |w|_{1,I_k}$. Defina $w_k = (u-\mathcal{I}_h^1 u)'|_{I_k}$, de la observación anterior, tenemos que $|u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,I_k} \leq h_k |u|_{2,I_k}$, luego

$$\begin{aligned}|u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,\Omega}^2 &= \textstyle\sum_{j=1}^N |u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,I_j}^2 \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^N h_j^2 |u|_{2,I_j}^2 \leq h^2 |u|_{2,\Omega}^2 .\end{aligned}$$

Si ahora definimos $w_k = (u-\mathcal{I}_h^1 u)|_{I_k}$ tenemos $\|u-\mathcal{I}_h^1 u\|_{0,I_k} \leq h_k |u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,I_k}$, sumando los términos como antes y usando el resultado anterior obtenemos

$$\|u-\mathcal{I}_h^1 u\|_{0,\Omega} \leq h|u-\mathcal{I}_h^1 u|_{1,\Omega} \leq h^2 |u|_{2,\Omega} . \quad \square$$

Aplicación: Sea $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, continua y coerciva y $F \in H^1(\Omega)'$. Sean $u \in H^1(\Omega)$ y $u_h \in V_h^1$ la respectivas soluciones de

$$\begin{aligned} a(u,v) &= F(v)\,,\ \forall\, v \in H^1(\Omega) \\ a(u_h,v_h) &= F(v_h)\,,\ \forall\, v_h \in V_h^1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

A través de la ortogonlidad $a(u-u_h,v_h)=0$ para todo $v_h \in V_h^1$, llegamos a probar que $\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le \frac{M}{\gamma} \inf\limits_{v_h \in V_h^1} \|u-v_h\|_{1,\Omega}$, luego

$$\begin{aligned} \|u-u_h\|_{1,\Omega} &\le \frac{M}{\gamma}\,\|u-\mathcal{I}_h^1\,u\|_{1,\Omega} \\ &\le \frac{M}{\gamma}\sqrt{(h^4+h^2)}\,|u|_{2,\Omega} \le C\,h\,|u|_{2,\Omega}\,, \end{aligned}$$

con $\sqrt{2}\,\frac{M}{\gamma} > 0$.

Observación: representar el espacio V_h a través de una base lleva a expresar (6) como un sistema lineal. En efecto, primero note que (6) es equivalente con

$$a(u_h,\phi_i) = F(\phi_i)\,,\ \forall\, i \in \{1,\ldots,N\}\,,$$

si ahora expresamos $u_h = \sum_{j=1}^N u_j\,\phi$ donde $u_j = u_h(x_j)$, entonces (6) se expresa como: *encontar $u_1,\ldots,u_N \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{j=1}^N u_j\,a(\phi_j,\phi_i) = F(\phi_i)\,,\ \forall\, i \in \{1,\ldots,N\}\,.$$

Esto define un sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A_{ij} = a(\phi_j,\phi_i)$, $x_j = u_j$ y $b_j = F(\phi_j)$.

Polinomios de Lagrange de orden k

Sea $k \geq 1$ y sean $s_0 < s_1 < \cdots < s_k \in \mathbb{R}$. Los polinomios de Langrage de orden k se definen a través del conjunto $\{\mathcal{L}_0^k, \ldots, \mathcal{L}_k^k\}$, donde

$$\mathcal{L}_m^k(x) = \frac{\prod_{\ell=0,\,\ell\neq m}^k (x - s_\ell)}{\prod_{\ell=0,\,\ell\neq m}^k (s_m - s_\ell)}$$

para $m \in \{0, \ldots, k\}$.

Note que los polinomios de lagrange siempre satisfacen la siguiente importante propiedad

$$\mathcal{L}_m^k(s_\ell) = \delta_{m\ell}\,,$$

para $m, \ell \in \{0, \ldots, k\}$.

Sea $\mathcal{T}_h$ una malla unidimensional y $I_j \in \mathcal{T}_h$ dado por $I_j = [x_{j-1}\,, x_j]$ definimos los nodos de Lagrange de orden k como

$$x_{j,m} := x_{j-1} + \frac{m}{k}\,h_j$$

para $m \in \{0, \ldots, k\}$. Note que $x_{j,0} = x_{j-1}$ y $x_{j,k} = x_j$. Consideremos entonces los polinomios de Lagrange $\{\mathcal{L}_{j,0}^k, \ldots, \mathcal{L}_{j,k}^k\}$ asociados a los nodos $\{x_{j,0}, \ldots, x_{j,k}\}$. Sea $i \in \{0, \ldots, N\,k\}$ con $i = j\,k + m$, y $m \in \{0, \ldots, k-1\}$, si $m > 0$ (nodo de Lagrange interior al elemento I_j) entonces

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \mathcal{L}_{j,m}^k(x), & \text{si } x \in I_j \\ 0, & \text{si } x \notin I_j\,, \end{cases}$$

si $m = 0$ (nodo de Lagrange coincide con un vértice de la malla), entonces

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^k_{j-1,k}(x), & \text{si } x \in I_{j-1} \\ \mathcal{L}^k_{j,0}(x), & \text{si } x \in I_j \\ 0, & \text{si } x \in I_{j-1} \cup I_j \,, \end{cases}$$

con la modificación obvia para $j = 0$.

Lema

$\{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\}$ es una base para V_h^k.

<u>Demostración:</u> Sea $i = j\,k + m$, con $j \in \{1, \ldots, N\}$, y $m \in \{0, \ldots, k-1\}$, primero mostraremos que $\phi_i \in V_h^k$, por construcción tenemos que $\phi_i|_I \in \mathbb{P}^k(I)$ para cada $I \in \mathcal{T}_h$, bastaría mostrar que ϕ_i es continua Ω.

Para el caso $m > 0$ basta notar que $\phi_i(x_{j-1}^{(+)}) = \mathcal{L}^k_{j,m}(x_{j-1}) = 0 = \phi_i(x_{j-1}^{(-)})$, y $\phi_i(x_{j+1}^{(-)}) = \mathcal{L}^k_{j,m}(x_j) = 0 = \phi_i(x_j^{(+)})$. Para el caso $m = 0$ similarmente notamos que $\phi_i(x_{j-2}^{(+)}) = \mathcal{L}^k_{j-1,k}(x_{j-2}) = 0 = \phi_i(x_{j-2}^{(-)})$, y $\phi_i(x_j^{(-)}) = \mathcal{L}^k_{j,0}(x_j) = 0 = \phi_i(x_j^{(+)})$, además

$$\begin{aligned} \phi_i(x_{j-1}^{(-)}) &= \mathcal{L}^k_{j-1,k}(x_{j-1}) = 1 \\ &= \mathcal{L}^k_{j,0}(x_{j-1}) = \phi_i(x_{j-1}^{(+)}) \,. \end{aligned}$$

De lo anterior concluímos que $\phi_i \in V_h^k$. Ahora resta mostrar que $\langle\{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\}\rangle = V_h^k$ y que $\{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\}$ es l.i., para ello procederemos de forma análoga al caso $k = 1$.

Sea $v_h \in V_h^k$, sea $j \in \{1, \ldots, N\}$, luego

$$r(x) = v_h(x) - \sum_{m=0}^{k} v_h(x_{j,m})\, \phi_{j\,k+m}(x) = 0$$

para todo $x \in I_j$, en efecto $r \in \mathbb{P}^k(I_j)$ y además noramos que $r(x_{j,m}) = 0$ para todo $m \in \{0, \ldots, k\}$, luego $r = 0$ en I_j, de lo anterior concluimos que

$$\langle \{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\} \rangle = V_h^k\,.$$

Para mostrar la independencia lineal de $\{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\}$ denotaremos los nodos de Lagrange globales como

$$\tilde{x}_i = x_{j,m}, \;\text{ para } i = j\,k + m\,.$$

Es fácil notar que

$$\phi_\ell\,(\tilde{x}_i) = \delta_{i\ell}\,, \forall\, i, \ell \in \{1, \ldots, N\,k\}\,.$$

Considere ahora $c_0, \ldots\, c_{N\,k} \in \mathbb{R}$ tales que $c_0\,\phi_0 + \cdots + c_{N\,k}\,\phi_{N\,k} = 0$, si evaluamos en $\tilde{x}_i$ obtenemos $c_i = 0$, luego $c_0 = \cdots = c_{N\,k} = 0$, entonces $\{\phi_0, \ldots, \phi_{N\,k}\}$ es l.i. $\square$

Observación: análogamente al caso $k = 1$ podemos definir $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{N\,k}\}$ a través de $\gamma_i(v_h) = v_h(\tilde{x}_i)$ para todo $v_h \in V_h^k$ para obtener una base de $(V_h^k)'$, de esta manera podemos definir también un operador de interpolación $\mathcal{I}_h^k : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \to V_h^k$ a través de

$$\mathcal{I}_h^k(v) = \sum_{i=0}^{N\,k} \gamma_i(v)\,\phi_j\,.$$

Lema

$V_h^k \subset H^1(\Omega)$

Demostración: Seguir caso $k = 1$ (ejercicio).

Definición

Sea $I_j \in \mathcal{T}_h$ definimos los *grados de libertad local* como las $k+1$ formas lineales $\{\sigma_{j,0}, \ldots \sigma_{j,k}\} := \Sigma_j$, definidas por

$$\sigma_{j,m}(p) = p(x_{j,m}) \, , \forall \, p \in \mathbb{P}^k(I_j)$$

con $m \in \{0, \ldots, k\}$.
El trio $\{I_j, \mathbb{P}^k(I_j), \Sigma_j\}$ se conoce como *elemento finito* $\mathbb{P}^k$ y los puntos $x_{j,0}, \ldots, x_{j,m}$ como los *nodos* del elementos finito.

Proposición

$\mathcal{I}_h^k|_{H^1(\Omega)} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega))$ y existe $C > 0$ independiente de h (acotado) tal que

$$\|\mathcal{I}_h^k\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^1(\Omega))} \leq C \, .$$

Demostración: Ejericicio

Proposición

Sea $v \in H^{k+1}(\Omega)$
$\|v - \mathcal{I}_h^k v\|_{0,\Omega} + h \, |v - \mathcal{I}_h^k v|_{1,\Omega} \leq C \, h^{k+1} |v|_{k+1,\Omega}$
donde $C > 0$ no depende de h.

Demostración: Ejericicio