

# Integrales de Lebesgue de funciones dependientes de un parámetro.

- Límite y continuidad respecto del parámetro.
- Derivabilidad respecto del parámetro.
- Sumas de Riemann.
- Integral de Riemann respecto del parámetro.

## Límite y continuidad respecto del parámetro.

A lo largo de esta clase, sean  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  un espacio de medida,  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$  y  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f(\cdot, t)$  es medible  $\forall t \in [a, b]$ .

**Teor.:** Sea  $t_0 \in [a, b]$ . Si (i)  $\forall x \in X, \exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) =: h(x)$  y

(ii)  $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$ ,

entonces,  $h \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$  y

$$\int h(x) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x).$$

**Dem.:** Lo demostramos usando la caracterización secuencial del límite.

Sea  $\{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t_0$ , con  $t_n \neq t_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(i)  $\implies f(x, t_n) \xrightarrow{n} h(x) \quad \forall x \in X \implies h$  medible.

(ii)  $\implies f(\cdot, t_n) \leq g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  T.C.D.  $\implies h \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$  y

$$\lim_n \int f(x, t_n) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x).$$

Como esto vale  $\forall \{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t_0$ , con  $t_n \neq t_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x). \quad \blacksquare$$

A lo largo del resto de la clase, dada  $f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$ ,  
 sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(t) := \int f(x, t) d\mu(x), \quad t \in [a, b]$ .

**Corol.**: Si (i)  $f(x, t)$  es continua respecto de  $t \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$   
 y (ii)  $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$ ,  
 entonces  $F$  es continua en  $[a, b]$ .

**Dem.**: (ii)  $\implies f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b] \implies F$  bien definida.

Sea  $t_0 \in [a, b]$  arbitrario. Veamos que  $F$  es continua en  $t_0$ .

$\forall x \in X, \quad f(x, \cdot)$  es continua en  $t_0 \implies f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$ . Entonces,

$$F(t_0) := \int f(x, t_0) d\mu(x) = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x)$$

$$\stackrel{\text{Teor.}}{=} \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t)$$

$\implies F$  es continua en  $t_0$ . ■

**Ej.** Calcula  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} dx$ .

**Ej.** Estudia la continuidad de  $F(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^t dx, \quad t > 0$ .

## Derivabilidad respecto del parámetro.

**Teor.:** Si (i)  $\exists t_0 \in [a, b] : f(\cdot, t_0) \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ ,

(ii)  $f(x, t)$  es derivable respecto de  $t$   $\forall t \in [a, b], \forall x \in X$  y

(iii)  $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \forall x \in X$ ,

entonces,  $\forall t \in [a, b]$ , se tiene que: •  $f(\cdot, t)$  y  $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ ,

•  $F$  es derivable y

•  $\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x) \quad \forall t \in [a, b]$ .

**Dem.:** Dado  $t \in [a, b]$ , sea  $\{t_n\} \subset [a, b] : t_n \xrightarrow{n} t$ , con  $t_n \neq t \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\implies \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_n \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \implies \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$  es medible  
y, por lo tanto, (iii)  $\implies \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$ .

Por otra parte, **T.V.M.**  $\implies \forall t \in [a, b], \forall x \in X, \exists \xi$  entre  $t$  y  $t_0$  tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi)$$

$$\implies |f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| g(x)$$

$\stackrel{(i),(iii)}{\implies} f(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b] \implies F$  bien definida.

Para ver que  $F$  es derivable, consideremos los cocientes incrementales

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x).$$

$$(ii) \implies \exists \lim_n \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t).$$

Otra vez **T.V.M.**  $\implies \forall x \in X, \exists \zeta$  entre  $t_n$  y  $t$  tal que

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \zeta) \right| \stackrel{(iii)}{\leq} g(x).$$

Entonces, **T.C.D.**  $\implies \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) \xrightarrow{n} \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x),$

de manera que  $F$  es derivable y,  $\forall t \in [a, b],$

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_n \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x). \blacksquare$$

**Ej.**

Demuestra que  $\frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} = - \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0.$

## Sumas de Riemann.

En lo que sigue, recordarémos la noción de **sumas de Riemann**, que no hemos introducido en la revisión de la integral de Riemann.

**Def.:** Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $P$  una partición de  $[a, b]$  :

$$P := \{t_0, \dots, t_N\} \text{ con } a = t_0 < \dots < t_N = b.$$

Para  $j = 1, \dots, N$ , sean  $\hat{t}_j \in [t_{j-1}, t_j]$  **arbitrarios**. Entonces

$$S(P, f) := \sum_{j=1}^N f(\hat{t}_j) (t_j - t_{j-1})$$

es una **suma de Riemann** de  $f$  en la partición  $P$ .

Como  $m_j := \inf_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} f(t) \leq f(\hat{t}_j) \leq \sup_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} f(t) =: M_j$ , entonces

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f).$$

Por lo tanto, si  $f$  es integrable Riemann y  $\{P_n\}$  es una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\lim_n L(P_n, f) = \int_a^b f(t) dt = \lim_n U(P_n, f)$ , entonces

$$\lim_n S(P_n, f) = \int_a^b f(t) dt.$$

# Integral de Riemann respecto del parámetro.

**Teor.:** Si (i)  $f(x, t)$  es continua respecto de  $t \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X$  y

(ii)  $\exists g \in L(X, \mathcal{X}, \mu) : |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in X,$

entonces: •  $F$  es integrable Riemann,

•  $\int_a^b f(\cdot, t) dt \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$  y

•  $\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \left[ \int f(x, t) d\mu(x) \right] dt = \int \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x).$

**Dem.:** (i) – (ii)  $\xrightarrow{\text{Corol.}}$   $F$  es continua y por lo tanto **integrable Riemann**.

(i)  $\implies f$  es integrable Riemann respecto de  $t$ . Por lo tanto, sea

$$h(x, t) := \int_a^t f(x, s) ds, \quad t \in [a, b], \quad x \in X.$$

La integral de Riemann es límite de sumas de Riemann:

$h(x, t) = \lim_n S(P_n^t, f(x, \cdot))$ , con  $P_n^t := \{t_0, \dots, t_N\}$  particiones de  $[a, t]$ .

A su vez, las sumas de Riemann  $S(P_n^t, f(x, \cdot)) = \sum_{j=1}^N f(x, \hat{t}_j) (t_j - t_{j-1})$  son combinaciones lineales de funciones medibles  $f(\cdot, \hat{t}_j)$ .

Por lo tanto,  $h(\cdot, t)$  es medible  $\forall t \in [a, b]$ .

Por otra parte,  $|h(x, t)| = \left| \int_a^t f(x, s) ds \right| \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} \int_a^t g(x) ds = g(x)(b - a)$ .

Entonces, (ii)  $\implies h(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu) \quad \forall t \in [a, b]$

y, en particular,  $h(\cdot, b) = \int_a^b f(\cdot, t) dt \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ .

Sean  $t \in [a, b]$  y  $x \in X$ . (i)  $\stackrel{\text{T.F.C.}}{\implies} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = f(x, t)$

$\implies \left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} g(x) \stackrel{\text{(ii)}}{\implies} \frac{\partial h}{\partial t}(\cdot, t) \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ .

Finalmente, sea  $H(t) := \int h(x, t) d\mu(x)$ . Aplicando el teorema anterior,

$\frac{\partial H}{\partial t}(t) = \int \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t) d\mu(x) =: F(t)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(t) dt &\stackrel{\text{Barrow}}{=} H(b) - H(a) = \int [h(x, b) - h(x, a)] d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{Barrow}}{=} \int \left[ \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt \right] d\mu(x) = \int \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Calcula  $\int_0^\infty \left[ \int_1^4 e^{-x\sqrt{t}} dt \right] dx$ .