Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Álgebra 1 (525140)
Semestre 2 - 2023, Pauta de Evaluación 3

Problema 1. (18 puntos)

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica para $\theta \in [0, \pi[$.

$$\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta).$$

Respuesta a problema 1.

Alternativa 1:
Utilizando identidades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}
(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta) &\Leftrightarrow \cos(2\theta)\sin(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(\theta)\left(\cos(2\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \quad \vee \quad \cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Resolvemos cada una de las ecuaciones de manera individual.

- Para la ecuación $\sin(\theta) = 0$ se tiene que sus soluciones están dadas por

$$\theta = (-1)^k \text{Arcsin}(0) + k\pi = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Si $k = 0, \theta = 0$, la cual pertenece a $[0, \pi[$.
  Si $k \geq 1, \theta = k\pi \geq \pi$ y no pertenece a $[0, \pi[$.
  Si $k \leq -1, \theta = k\pi \leq -\pi < 0$ y no pertenece a $[0, \pi[$.
  Así, obtenemos que el conjunto solución de la ecuación $\sin(\theta) = 0$ en $[0, \pi[$ es

$$S_1 = \{0\}.$$

- Para la ecuación $\cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se tiene que

$$2\theta = \pm\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Se tiene entonces que $\theta = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$.

Si $k = 0, \theta = \pm\frac{3\pi}{8}$, de las cuales $\frac{3\pi}{8} \in [0, \pi[$.

Si $k = 1, \theta = \pm\frac{3\pi}{8} + \pi$, de las cuales $-\frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{5\pi}{8} \in [0, \pi[$.

Si $k \leq -1, \theta = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq \frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8} < 0$ y ninguno de ellos pertenece a $[0, \pi[$.

Si $k \geq 2, \theta = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi \geq -\frac{3\pi}{8} + 2\pi = \frac{13\pi}{8} > \pi$ y ninguno de ellos pertenece a $[0, \pi[$.

Así, el conjunto solución de la ecuación $\cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $[0, \pi[$ es

$$S_2 = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}.$$

Finalmente, la solución a la ecuación está dada por

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{0, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}.$$

Alternativa 2:
Utilizando identidades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}
(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta) &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2(\theta))\sin(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(\theta)\left(1 - 2\sin^2(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \quad \vee \quad \sin^2(\theta) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Resolvemos cada una de las ecuaciones de manera individual.

- Para la ecuación $\sin(\theta) = 0$ se tiene que sus soluciones están dadas por

  $$\theta = (-1)^k \text{Arcsin}(0) + k\pi = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Si $k = 0, \theta = 0$, la cual pertenece a $[0, \pi[$.

  Si $k \geq 1, \theta = k\pi \geq \pi$ y no pertenece a $[0, \pi[$.

  Si $k \leq -1, \theta = k\pi \leq -\pi < 0$ y no pertenece a $[0, \pi[$.

  Así, obtenemos que el conjunto solución de la ecuación $\sin(\theta) = 0$ en $[0, \pi[$ es

  $$S_1 = \{0\}.$$

- Dado que $\frac{2+\sqrt{2}}{4} \in]0, 1[$, las soluciones de la ecuación $\sin^2(\theta) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ son aquellas para las que se cumple

  $$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \vee \quad \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Llamemos s al número real $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Las soluciones de las ecuaciones $\sin(\theta) = \pm s$ son

$$\begin{gathered}\{\operatorname{Arcsin}(s) + 2\pi\, k \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{Arcsin}(s) + 2\pi\, k \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \\ \cup \{\operatorname{Arcsin}(-s) + 2\pi\, k \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{Arcsin}(-s) + 2\pi\, k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}\,,\end{gathered}$$

que, pueden escribirse en forma abreviada como,

$$\left\{(-1)^k \operatorname{Arcsin}(\pm s) + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que $s > 0$, sabemos que $\operatorname{Arcsin}(s) \in \,]0, \pi/2[$ y $\operatorname{Arcsin}(-s) \in \,] -\pi/2, 0[$.

Si $k = 0$, obtenemos las siguientes soluciones:

$$\operatorname{Arcsin}(s),\ \pi - \operatorname{Arcsin}(s),\ \operatorname{Arcsin}(-s),\ \pi - \operatorname{Arcsin}(-s).$$

De ellas, solo las dos primeras pertenecen a $[0, \pi[$. La tercera es menor que cero y la cuarta es mayor que π.

Si $k \geq 1$, obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(s) + 2k\pi &\geq 2\pi > \pi, \\ \pi - \operatorname{Arcsin}(s) + 2k\pi &\geq \frac{5\pi}{2} > \pi, \\ \operatorname{Arcsin}(-s) + 2k\pi &\geq \frac{3\pi}{2} > \pi, \\ \pi - \operatorname{Arcsin}(-s) + 2k\pi &\geq 3\pi > \pi.\end{aligned}$$

Ninguna de ellas pertenece a $[0, \pi[$.

Si $k \leq -1$, obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(s) + 2k\pi &\leq -\frac{3\pi}{2} < 0, \\ \pi - \operatorname{Arcsin}(s) + 2k\pi &\leq -\pi < 0, \\ \operatorname{Arcsin}(-s) + 2k\pi &\leq -2\pi < 0, \\ \pi - \operatorname{Arcsin}(-s) + 2k\pi &\leq -\frac{\pi}{2} < 0.\end{aligned}$$

Así, el conjunto solución de la ecuación $\sin^2(\theta) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ en $[0, \pi[$ es

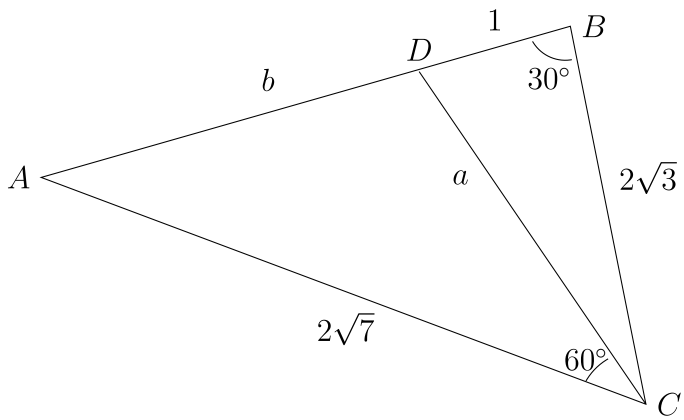
$$S_2 = \Big\{\operatorname{Arcsin}(s),\ \pi - \operatorname{Arcsin}(s)\Big\}.$$

Finalmente, la solución a la ecuación está dada por

$$S = S_1 \cup S_2 = \Big\{0, \operatorname{Arcsin}(s),\ \pi - \operatorname{Arcsin}(s)\Big\}.$$

Problema 2. (16 puntos)

Calcule las longitudes de los lados a (segmento DC) y b (segmento AD) en la figura:



Observación: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Respuesta a problema 2.

De los datos de la figura y utilizando el teorema del coseno podemos determinar la longitud a.

$$\begin{aligned} a^2 &= 1^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{3})\cos(30^\circ) \\ &= 1 + 12 - 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7 \\ \implies a &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

Opción 1:
Luego, determinamos b usando nuevamente el teorema del coseno.

$$\begin{aligned} b^2 &= (2\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2(2\sqrt{7})\sqrt{7}\cos(60^\circ) \\ &= 4\cdot 7 + 7 - 2\cdot 7 \\ &= 21 \\ \implies b &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

Así, los segmentos DC y AD corresponden a $\sqrt{7}$ y $\sqrt{21}$ respectivamente.

Opción 2:
Si se decide utilizar el teorema del seno para hallar b se tiene el siguiente desarrollo:

$$\frac{\sin(\angle BAC)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin(30^\circ)}{2\sqrt{7}}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

Luego,

$$\frac{\sin(\angle BAC)}{a} = \frac{\sin(60^\circ)}{b}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{a\sin(60°)}{\sin(\angle BAC)} \\ &= \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Así, los segmentos DC y AD corresponden a $\sqrt{7}$ y 7 respectivamente.

Sabemos que se obtienen resultados distintos para las longitudes, lo importante es aplicar correctamente el método que decidan y que su resultado sea consistente con su desarrollo.

Problema 3. (16 puntos)

Considere $w = 2i$.

1. Calcule las raíces quintas de w. Exprese los resultados en forma polar y con su argumento principal.
2. Calcule el módulo de $\dfrac{(1+i)^8}{w}$.
3. Determine que elementos $z \in \mathbb{C}$ satisfacen
$$\left| z\,\frac{(1+i)^8}{w} \right| < 2^5$$
y grafíquelos en el Plano de Argand.

Respuesta a problema 3.

1. Escribimos $w = 2i$ en su forma polar
$$w = 2i = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
y procedemos a calcular sus raíces quintas,
$$\hat{w}_k = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right),\ k \in \{0,1,2,3,4\}.$$
Así,
$$\begin{aligned} \hat{w}_0 &= \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ \hat{w}_1 &= \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \hat{w}_2 &= \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ \hat{w}_3 &= \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{13\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{10}\right) \\ \hat{w}_4 &= \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{17\pi}{10}\right) = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \end{aligned}$$

2. Ya tenemos w en su forma polar, así que procederemos a calcular $(1+i)^8$ en su forma polar.

$$1+i=\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

y, por tanto,

$$(1+i)^8=2^{\frac{8}{2}}\text{cis}\left(\frac{8\pi}{4}\right)=2^4\text{cis}\,(2\pi)=2^4.$$

Luego,

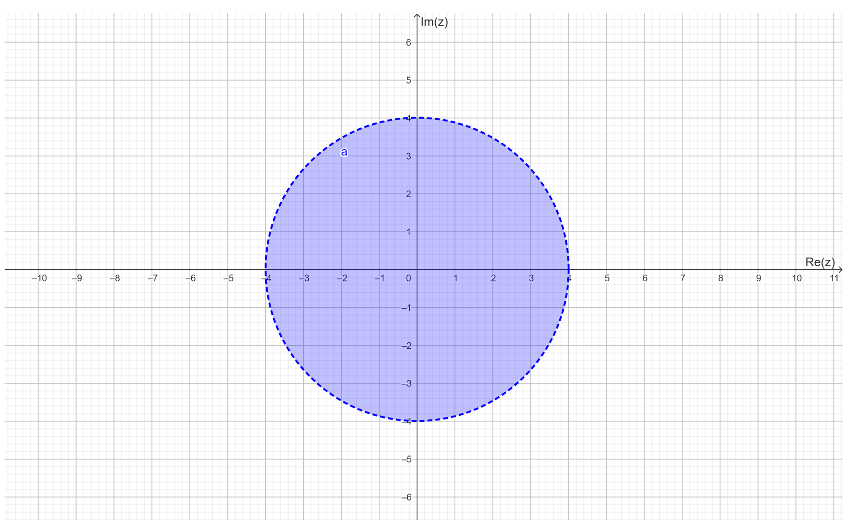
$$\frac{(1+i)^8}{w}=\frac{(1+i)^8}{2i}=\frac{2^4}{2\text{cis}(\frac{\pi}{2})}=2^3\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Finalmente el módulo de $\dfrac{(1+i)^8}{w}$ es 2^3.

3. Como ya sabemos, $\left|z\dfrac{(1+i)^8}{w}\right|=|z|\left|\dfrac{(1+i)^8}{w}\right|$ y

$$|z|\left|\frac{(1+i)^8}{w}\right|<2^5\ \Leftrightarrow\ |z|\,2^3<2^5\ \Leftrightarrow\ |z|<4$$

Finalmente los elementos $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen la condición dada son aquellos cuyo módulo es exactamente menor que 4 cuya representación en el Plano de Argand es la siguiente.



Problema 4. (10 puntos)

Defina **un** polinomio $p\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:

- p es de grado tres,
- el resto de dividir $p(x)$ por $(x+1)$ es 20,
- una de las raíces complejas de p es $-i$,

Observación: Debe definir **un** solo polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ que cumpla con estas tres características.

Respuesta a problema 4.

Como $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, si $-i$ es raíz de p, entonces i también lo es, y, como p es de grado tres, se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+i)(x-i)(a_1x+a_0) \\ &= (x^2+1)(a_1x+a_0) \end{aligned}$$

con $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
Tenemos como segunda condición que el resto de dividir $p(x)$ por $(x+1)$ es 20, lo cual es equivalente a $p(-1) = 20$, por lo tanto,

$$p(-1) = ((-1)^2+1)(a_1(-1)+a_0) = (1+1)(-a_1+a_0) = 2(-a_1+a_0)$$

De este modo, $p(-1) = 20$ si y solo si $20 = 2(-a_1+a_0)$ o, de manera equivalente, $10 = (-a_1+a_0)$.
De aquí podemos concluir, $a_1 = a_0 - 10$ o, de manera equivalente, $a_0 = 10 + a_1$.
Finalmente basta con tomar un valor de a_0 (o a_1) $\in \mathbb{R}$ y así calcular a_1(o a_0).
Si $a_0 = 0$, $a_1 = -10$ y al reemplazar obtenemos **un** polinomio que cumple con todas las condiciones solicitadas.

$$p(x) = (x^2+1)(-10x) = -10x^3 - 10x.$$