# I. Inecuaciones

## 1. Conceptos básicos

Una **inecuación** es una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas. En el caso de una variable real $x$, esta se puede escribir como

$$R(x) < 0 \ , \qquad R(x) > 0 \tag{I.1}$$

o con las desigualdades $\leq$ o $\geq$.

Resolver una inecuación consiste en determinar el conjunto de todos los reales que satisfacen la desigualdad, que llamamos **conjunto solución** y denotamos por $S$.

Una inecuación del tipo

$$R(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) > 0,$$

donde $P_1, P_2$ son polinomios, se resuelve analizando los casos en que ambos factores sean positivos o ambos negativos, mientras que si

$$R(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) < 0,$$

entonces se deben considerar los dos casos en que los factores tengan distinto signo. Esto se debe a las propiedades de los axiomas de orden en $\mathbb{R}$.

Si hay más de dos factores, estudiar sus signos y cuando su producto es positivo o negativo es más complicado por el número de casos a considerar. En este sentido, es ventajoso usar **tabla de signos** para resolver la inecuación.

**Ejemplo 1.1.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x-a)(x-b) > 0$.

De lo anterior, es equivalente determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$((x-a) > 0 \wedge (x-b) > 0) \quad \vee \quad ((x-a) < 0 \wedge (x-b) < 0) \tag{I.2}$$

$$\iff \quad (x > a \ \wedge \ x > b) \quad \vee \quad (x < a \ \wedge \ x < b) \tag{I.3}$$

[1] Luego, el conjunto solución es $S = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$.

[1] El conector lógico $\wedge$ (que se lee como "**y**") indica que las dos condiciones $x > a$ y $x > b$ se cumplen, es decir, corresponde a la **intersección** de los intervalos. El conector $\vee$ (**o**) indica que se cumple alguna (o ambas) de las dos condiciones, por lo que corresponde a la **unión** de los intervalos intersectados.

Resolver las inecuaciones de (I.2) es equivalente a construir la siguiente tabla de signos, donde $R(x)$ es el producto $(x-a)(x-b)$. En ella están los signos que toman los factores y $R(x)$ en los intervalos $x<a$, $a<x<b$ y $x>b$, y donde éstos se anulan.

| | | $a$ | | $b$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-a)$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x-b)$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $R(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Notar que para determinar el signo de $R(x)$ en cada intervalo, basta ver las columnas verticales y hacer producto de signos. De aquí, obtenemos que $S=]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$.

**Observación 1.2.** Dada una inecuación como en (I.1), es preferible descomponer la expresión $R(x)$ en factores de grado 1 porque son las inecuaciones más sencillas a resolver. Sin embargo, se puede dar el caso en que un polinomio no se pueda factorizar en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $x^2+x+1$ tiene **discriminante** $\Delta=-3<0$, por lo que no tiene soluciones reales y por tanto no se descomponer más. Pero se puede mostrar que $x^2+x+1>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (ejercicio).

En general, cualquier polinomio cuadrático $ax^2+bx+c$ que tenga discriminante $\Delta=b^2-4ac<0$ y $a>0$, cumple que $ax^2+bx+c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. De igual forma, si $\Delta<0$ y $a<0$, entonces $ax^2+bx+c<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

**Ejercicios.** Resolver las siguientes inecuaciones con $x\in\mathbb{R}$.

1. $(x+2)\left(\frac{x}{3}-x+\frac{x}{2}+1\right)\geq 0$ Solución: $S=[-2,6]$.
2. $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+1}<0$ Solución: $S=\left]\frac{1}{2},1\right[\cup]1,2[$.
3. $\frac{x^2+2}{x}<\frac{1}{x}$ Solución: $S=]-\infty,0[$.
4. $\frac{x^2+2x}{x^3+8}<1$ Solución: $S=\mathbb{R}-\{-2\}$.
5. $\frac{-5}{x^2}+\frac{3x+10}{x}+2\geq 0$

   Solución: $S=]-\infty,-1-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}-1,+\infty[$.

## 2. Valor Absoluto

Dado $x \in \mathbb{R}$, el *valor absoluto* de $x$ corresponde a la función por tramos

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De este modo, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.

Propiedades: Si $c \in \mathbb{R}^+$, notar que

1. $|x| < c \iff -c < x < c \iff -c < x \ \wedge \ x < c$
2. $|x| = c \iff x = c \ \vee \ x = -c$
3. $|x| > c \iff x > c \ \vee \ x < -c$

**Ejemplo 2.1.** Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que satisface la inecuación

$$\frac{1}{|x+1|} \geq 1 \tag{I.4}$$

Consideramos $x \neq -1$. Como $\dfrac{1}{|x+1|} = \left|\dfrac{1}{x+1}\right|$, usando la propiedad 3 obtenemos que la inecuación equivale a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x+1} \geq 1 \quad \vee \quad \frac{1}{(x+1)} \leq -1 \\ \iff & \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \geq 0 \quad \vee \quad \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} \leq 0 \\ \iff & \frac{x}{x+1} \leq 0 \quad \vee \quad \frac{x+2}{x+1} \leq 0 \end{aligned}$$

De la primera inecuación, obtenemos que $x \in ]-1, 0]$, mientras que de la segunda, $x \in [-2, -1[$. De la unión de ambos conjuntos, obtenemos que el conjunto solución de la inecuación es $S = [-2, -1[ \cup ]-1, 0]$.

**Observación 2.2.** De las propiedades de axiomas de orden

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, b > 0 : \ \frac{a}{b} < c \implies a < bc$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, b < 0 : \ \frac{a}{b} < c \implies a > bc$$

Una expresión con $x \in \mathbb{R}$ puede ser positiva, negativa o nula, a excepción de que sea una raíz (que por convención del curso tomamos $\geq 0$), valor absoluto ($\geq 0$) o lo especifiquemos como caso. Luego, **no** siempre podemos multiplicar una inecuación por una expresión con $x \in \mathbb{R}$, de lo contrario podemos perder soluciones. Por ejemplo, si $x \neq 0$, de la inecuación $\dfrac{1}{x} \leq 1$ obtenemos que $x \geq 1$ multiplicando por $x$ a ambos lados de la inecuación, pero $x = -1$ también satisface la desigualdad.

**Observación 2.3.** El ejemplo 1 se puede resolver de otra forma. Como $|x+1| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, la inecuación I.4 también se puede escribir como

$$1 \geq |x+1| \quad \wedge \quad x \neq -1$$

y luego obtenemos que

$$-2 \leq x \leq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1,$$

es decir, $S = [-2, -1[ \cup ] - 1, 0]$.

**Ejemplo 2.4.** Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que satisface la inecuación

$$\frac{|x+3| - |x+2|}{|x+1|} \geq 1$$

Primero, consideramos $x \neq -1$ para que la expresión anterior no se indefina. Luego, como $|x+1| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, la inecuación equivale a

$$|x+3| - |x+2| \geq |x+1|, \qquad x \neq -1$$

Resolvemos por casos, para ello nos podemos ayudar de la siguiente tabla de signos respecto a cada término con valor absoluto de la inecuación anterior.

| | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+3)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |

De este modo, tenemos que analizar cuatro casos.

- Caso 1: $x + 1 > 0 \iff x > -1$. En particular, $x > -2$ y $x > -3$. Así, para todo $x > -1$

$$\begin{aligned} |x+3| - |x+2| \geq |x+1| &\implies x + 3 - (x+2) \geq x + 1 \\ &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

  Por tanto, el conjunto solución en este caso es $S_1 = ]-1, +\infty[ \cap ] - \infty, 0] = ] - 1, 0]$.

- Caso 2: $-2 \leq x < -1$. Luego,

$$\begin{aligned} |x+3| - |x+2| \geq |x+1| &\implies x+3-(x+2) \geq -(x+1) \\ &\iff x \geq -2 \end{aligned}$$

En este caso, el conjunto solución es $S_2 = [-2,-1[$.

- Caso 3: $-3 \leq x < -2$. Luego,

$$\begin{aligned} |x+3| - |x+2| \geq |x+1| &\implies x+3-(-(x+2)) \geq -(x+1) \\ &\iff x+3+x+2 \geq -x-1 \\ &\iff x \geq -2 \end{aligned}$$

En este caso, no hay solución, esto es $S_3 = [-3,-2[ \cap [-2,+\infty[ = \emptyset$.

- Caso 4: $x < -3$. Luego,

$$\begin{aligned} |x+3| - |x+2| \geq |x+1| &\implies -(x+3)-(-(x+2)) \geq -(x+1) \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, el conjunto solución es $S_4 = \emptyset$.

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = [-2,-1[ \cup ]-1,0].$$

**Observación 2.5.** Las Propiedades de valor absoluto se cumplen sólo para $c > 0$. Si reemplazamos $c$ por una expresión en términos de la variable $x$, esta podría ser mayor, menor o igual a 0 dependiendo del intervalo al que pertenezca $x$. A pesar de esto, las propiedades mencionadas sí son aplicables no importando el signo de la expresión. Veámoslo con un ejemplo: consideremos la inecuación

$$|x+1| < 5 - |x+2|$$

Notar que $5-|x+2|$ tiene que ser mayor a 0 para que tenga solución la inecuación (pues $|x+1| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Si usamos la propiedad 1, obtenemos

$$|x+2| - 5 < x+1 < 5 - |x+2|.$$

En este paso estamos ”forzando” a que $5 - |x+2| > 0$, ya que de lo anterior, por transitividad del orden $\geq$ se deduce que $|x+2|-5$ es menor (estricto) que $5-|x+2|$.

Ahora, si consideramos

$$|x+1| > 5 - |x+2|$$

y usamos la propiedad 3, obtenemos

$$x+1>5-|x+2| \quad \vee \quad x+1<|x+2|-5.$$

Notar que en la primera inecuación también estamos considerando el caso $5-|x+2|<0$, que obviamente satisface la inecuación ($|x+1|\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$).

Por tanto, al resolver una inecuación por este método o por casos se obtiene el mismo conjunto solución.

**Ejercicios.** Encontrar el conjunto solución con $x\in\mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones e inecuaciones

1. $x^3-x=|x|$ Solución: $S=\{0,\sqrt{2}\}$.
2. $|3x^2+9x+6|=|x+2|+x$ Solución: $S=\{-1\}$.
3. $\left|\dfrac{2}{x}\right|\geq\dfrac{x}{5}$ Solución: $S=]-\infty,0[\,\cup\,]0,\sqrt{10}]$.
4. $\left|\dfrac{x+2}{x-6}\right|<\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|$ Solución: $S=]-\infty,0[\,\cup\,(]2,4[-\{3\})$.
5. $4-|x-2|<||2x|-3|$

   Solución: $S=\left]-\infty,-\dfrac{5}{3}\right[\cup\left]-1,\dfrac{1}{3}\right[\cup\,]3,+\infty[$.
6. $|x^2+4|-|x+2|\leq|x^2-4|$

   Solución: $S=]-\infty,-10]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{4},\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]\cup[6,+\infty[$.