UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 10 - Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Integración de contorno y Aplicaciones (II).***

Algunas fórmulas de Residuos

Notación: $B^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = B(z_0, r)/\{z_0\}$.

(P) Sean f y g dos funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f no se anula en z_0 y g tiene un cero doble en z_0, esto significa

$$f(z_0) \neq 0 \quad \wedge \quad \Big[g(z_0) = g'(z_0) = 0 \ \wedge \ g''(z_0) \neq 0\Big]$$

Probar que $h = \frac{f}{g}$ tiene un polo doble en z_0 y

$$\mathrm{Res}_2\Big(h, z_0\Big) = 2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{f(z_0)g^{(3)}(z_0)}{(g''(z_0))^2}$$

Indicación: Una manera alternativa a las técnicas usuales para calcular el residuo es simplemente escribir la Serie de Taylor de g en torno a z_0:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{g^{(3)}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{g^{(4)}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \cdots \\ &= (z-z_0)^2\phi(z), \quad \phi(\mathbf{z_0}) = \frac{\mathbf{g''(z_0)}}{\mathbf{2!}},\ \phi'(\mathbf{z_0}) = \frac{\mathbf{g^{(3)}(z_0)}}{\mathbf{3!}} \ldots. \end{aligned}$$

Enseguida aplicar el criterio usual para un polo de orden 2:

$$\mathrm{Res}_2\left(h, z_0\right) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\phi(z)}\right) = \ldots$$

2. Probar que si f y g son funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g un cero de orden $m+1$ en el mismo punto.Entonces, $h = f/g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$Res_1(h, z_0) = (m+1)\frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}$$

Indicación: Observar que $f(z) = (z-z_0)^m\psi(z)$ y $g(z) = (z-z_0)^{m+1}\phi(z)$ donde ψ y ϕ son holomorfas en z_0 y no se anulan en dicho punto. Para concluir, se requiere dilucidar la existencia de los siguientes límites

$$(a)\ \lim_{z-z_0} h(z) \qquad \wedge \qquad (b)\ \lim_{z-z_0} (z-z_0)^k h(z) \quad (k \in \mathbb{N})$$

3. Probar, via dos argumentaciones diferentes la siguiente propiedad: Si $h(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es el cociente de funciones holomorfas en $B(z_0, r)$ donde $p(z_0) \neq 0$ y q tiene un cero simple en z_0. Entonces

$$\mathrm{Res}_1(h, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

4 Encontrar los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades aisladas,

(a) $\frac{1+z}{z}$

(P) $\frac{\cot(\pi z)}{z+1}$

(b) $\left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^3$

(c) $\frac{1}{z\sin(z)}$

(P) $e^{z+\frac{1}{z}}$

(d) $\csc(\pi z)\frac{z+1}{z-1}$

(e) $\frac{\sin(z^2)}{z^2(1+z^2)}$

(f) $\cos(1/z)\sin(1/z)$

(g) $\frac{\cot(\pi z)}{1+z^4}$

Evaluación de integrales impropia reales de segunda especie.

Lema A Para todo $R > 0$

$$\int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt \leq \frac{\pi}{R}.$$

Lema B Si f tiene un polo simple en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y sea γ_r el camino definido para $r > 0$

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \to C,\ t \longmapsto \gamma_r(t) = \mathbf{a} + re^{it}$$

Entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)Res_1(f, \mathbf{a})$$

5. Probar el Lema B.
Indicación: $f(z) = \frac{b_{-1}}{z-a} + g(z)$ donde g es holomorfa en a y $b_{-1} = \mathrm{Res}_1(f, a)$

(P). Establecer, fundamentado su desarrollo a la ayuda de los lemas que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ los siguiente Valores Principales de Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x-a} = \pi\cos(a) \ \wedge \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x-a} = -\pi\sin(a).$$

Inferir los VP de las siguiente integrales impropias $(b, c > 0)$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(bx)}{x-c}dx \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x-c}dx$$

6. Utilizar un dominio indentado y los lemas A y B para dilucidar si los siguiente valores principales son correctos.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(2x)}{x}dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \pi$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin(x)}{x^2-a^2}dx = 2\pi\cos(a)$

(P) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx = 2\pi\big(1-e^{-1}\big)$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-a^2}dx = -\pi\frac{\sin(a)}{a}$, $(a \neq 0)$

6. Evaluar las siguientes integrales donde los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ donde c es positiva:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}dx = \pi e^{-4}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^2+2}dx = \pi e^{-3\sqrt{2}}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(4x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{2}e^{-2}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a(x-b))}{x^2+c^2}dx = \pi e^{-a(c-b)}\cos(ab)$