Elementos Finitos – 521537
Cápsula 02 - Espacios de Hilbert y Problemas Variacionales

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Espacios con Producto Interior

- Consideremos espacios vectoriales V y W
- Definamos $B : V \times W \to \mathbb{R}$
- Diremos que B es una forma *bilineal* si $v \mapsto B(v, w_0)$ y $w \mapsto B(v_0, w)$ son formas lineales para $v_0 \in V$ y $w_0 \in V$ fijos
- Si $W = V$ y $B(v, w) = B(w, v)$ para todo $w, v \in V$ entonces diremos que B es *simétrica*
- Si B bilineal y simétrica satisface
  - $B(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$
  - $B(v, v) = 0$ ssi $v = 0$

entonces B define un *producto interior*

Definición (E.P.I.)

Si $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interior entonces $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ se dice un *espacio con producto interior* (e.p.i.)

Teorema (desigualdad de Schwarz)

Sea $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ un e.p.i. entonces

$$|(u, v)_V| \leq (u, u)_V^{\frac{1}{2}} (v, v)_V^{\frac{1}{2}}, \; \forall\, u, v \in V$$

Demostración: Ejercicio propuesto

Espacios de Hilbert: Definición

Notemos que $u \mapsto \|u\|_V = (u,u)_V^{\frac{1}{2}}$ define una norma. Indicación: la desigualdad de Schwarz implica la desigualdad triangular

Definición (Espacio de Hilbert)

Sea $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ un e.p.i., si el e.v.n. $(V, \|\cdot\|_V)$ es un espacio de Banach entonces diremos que $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ es un *espacio de Hilbert*.

Ejercicios propuestos:

- Mostrar que los espacios $H^k(\Omega) := W_2^k(\Omega)$ son espacios de Hilbert respecto al producto interno

$$(f,g)_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x})\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

  para todo $k \in \mathbb{N}_0$

- Mostrar que (id. del paralelogramo)

$$\|v+w\|_V^2 + \|v-w\|_V^2 = 2\left(\|v\|_V^2 + \|w\|_V^2\right)$$

Subespacios

Definición (Subespacio)

Sea $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ un espacio de Hilbert y $S \subseteq H$ tal que, dados $u\,,v \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se satisface que $u + \alpha\, v \in S$, si además S es cerrado en H respecto a la norma $\|\cdot\|_H$, entonces diremos que S es un *subespacio* de H y denotaremos $S \leq H$.

Proposición

Si $S \leq H$ entonces $(S,(\cdot,\cdot)_H)$ es un espacio de Hilbert

Demostración: Evidente

Ejercicios propuestos: Pruebe las siguientes afirmaciones

- Sea $T : H \to V$ una transformación lineal acotada, entonces $\ker T \leq H$
- Sea $x^\perp = \{v \in H : (v,x)_H = 0\}$ entonces $x^\perp \leq H$
- Sea $M \leq H$ y defina

  $$M^\perp = \{v \in H : (x,v) = 0\,, \forall x \in M\}\,,$$

  entonces $M^\perp \leq H$

Proyecciones sobre subespacios

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert, $M \leq H$ y $v \notin M$, existe $w_0 \in M$ tal que

1. $\|v - w_0\|_H = \inf_{w \in M} \|v - w\|_H$
2. $v - w_0 \in M^{\perp}$

Demostración: Definimos

$$\delta = \inf_{w \in M} \|v - w\|_H > 0$$

luego, existe $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|v - w_n\|_H = \delta$$

Definimos $z_n = v - w_n$, luego

$$\|z_m + z_n\|_H^2 + \|z_m - z_n\|_H^2 = 2\left(\|z_m\|_H^2 + \|z_n\|_H^2\right)$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|w_m - w_n\|_H^2 \\
&= 2\left(\|z_m\|_H^2 + \|z_n\|_H^2\right) - 4\left\|\frac{1}{2}(w_m + w_n) - v\right\|_H^2 \\
&\leq 2\left(\|z_m\|_H^2 + \|z_n\|_H^2\right) - 4\,\delta^2 \\
&\to 2\left(\delta^2 + \delta^2\right) - 4\,\delta^2 = 0
\end{aligned}$$

es decir, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente a algún $w_0 \in \bar{M} = M$

Proyecciones sobre subespacios

Sea $z_0 = v - w_0$, luego $\|z_0\|_H = \delta$, y sea $w \in M$ arbitrario. Definimos la función diferenciable $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como

$$\psi(t) = \|z_0 - t\,w\|_H^2 = \|v - (w_0 + t\,w)\|_H^2$$

luego, $0 = \psi'(0) = -2\,(z_0, w)_H$ y como $w \in M$ es arbitrario tenemos que $z_0 \in M^\perp$.
□

Corolario

Sea H un espacio de Hilbert y $M \leq H$, entonces $H = M \oplus M^\perp$

Demostración: Sea $v \in H$ si $v \in M$ entonces $v = v + 0 \in M + M^\perp$. Si $v \notin M$, entonces $v = w_0 + (v - w_0) \in M + M^\perp$. Es claro que $M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $H = M \oplus M^\perp$. □

Observación: el Corolario anterior nos dice que la descomposición

$$v = w_0 + w^\perp \in M \oplus M^\perp$$

con $w^\perp = v - w_0$, es **única**.

Proyecciones sobre subespacios

Dada la afirmación anterior podemos definir $P : H \to M$ como

$$P\,v = \begin{cases} v & , \quad v \in M \\ w_0 & , \quad v \notin M \end{cases}$$

y expresar

$$v = P\,v + (I - P)\,v \in M \oplus M^{\perp}$$

notemos que dados $u\,, v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$v + \alpha\,u = P\,(v + \alpha\,u) + (I - P)\,(v + \alpha\,u)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} v + \alpha\,u &= P\,v + (I - P)\,v + \alpha\,(P\,u + (I - P)\,u) \\ &= P\,v + \alpha\,P\,u + (I - P)\,v + \alpha\,(I - P)\,u \end{aligned}$$

luego (unicidad de descomposición)

$$P\,(v + \alpha\,u) = P\,v + \alpha\,P\,u$$

por lo tanto $P : H \to M$ es lineal. Además es evidente que $P^2 = P$ y concluimos que P es un proyección. Cuando sea neceario denotarmos la proyección por P_M para asociarla a un subespacio M específico.

Definición (Transformaciones lineales continuas)

Sean V y W e.v.n. diremos que la transformación lineal $A : V \to W$ es *continua* si existe $C > 0$ tal que

$$\|A(v)\|_W \leq C \|v\|_V , \forall v \in V.$$

El espacio de vectorial las t.l.c. $A : V \to W$ se denota por $\mathcal{L}(V; W)$ y puede ser equipado por la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

Definición (Espacios Dual y Bidual)

El espacio $V' = \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ se conoce como el *espacio dual de* V, $F \in V'$ se conoce como *forma lineal continua* y denotamos $\langle F, v\rangle_{V',V} = F(v)$ para cada $v \in V$. Análogamente definimos el *espacio bidual de* V como $V'' = \mathcal{L}(V'; \mathbb{R})$.

Definición (Espacio Reflexivo)

Un espacio de Banach V se dice *reflexivo* si $J \in \mathcal{L}(V, V'')$ definida para cada $v \in V$ como $\langle J(v), F\rangle_{V'',V'} = \langle F, v\rangle_{V',V}$, para toda $F \in V'$, es un isomorfismo.

Ejercicio propuesto: Mostrar que si H es un espacio de Hilbert entonces H es reflexivo

Sea H un espacio de Hilbert. Dado $u_0 \in H$ es claro que

$$v \mapsto (u_0, v)_H$$

es una forma lineal continua.

Teorema (de representación de Riesz)

Si $L \in H'$, entonces existe un único $u_L \in H$ tal que

$$L(v) = (u_L, v)_H \,, \forall v \in H$$

además $\|L\|_{H'} = \|u_L\|_H$.

Demostración: Sea $M = \ker L$, luego $M \leq H$.
Si $M = H$ basta definir $u_L = 0$.
Si $M \neq H$ entonces $H = M \oplus M^{\perp}$ con $M^{\perp} \neq \{0\}$ además $M^{\perp}$ es 1D, en efecto sean $z_1, z_2 \in M^{\perp}$ no nulos es claro que

$$L\left(z_2 - \frac{L(z_2)}{L(z_1)}\, z_1\right) = 0 \,,$$

luego $z_2 - \frac{L(z_2)}{L(z_1)}\, z_1 \in M$, además

$$z_2 = \left(z_2 - \frac{L(z_2)}{L(z_1)}\, z_1\right) + \frac{L(z_2)}{L(z_1)}\, z_1$$

por lo tanto $z_2 = \frac{L(z_2)}{L(z_1)}\, z_1$.

Definiremos entonces

$$u_L = \frac{L(z_1)}{\|z_1\|_H^2} z_1 \in M^\perp$$

Sea $v \in H$, temos que

$$(u_L, v)_H = \left(u_L, \left(v - \frac{L(v)}{L(z_1)} z_1 \right) + \frac{L(v)}{L(z_1)} z_1 \right)_H$$
$$= \frac{L(v)}{L(z_1)} (u_L, z_1)_H = L(v)$$

La unicidad de u_L es evidente.

Notemos ahora que

$$\|u_L\|_H = \frac{|L(z_1)|}{\|z_1\|_H} \leq \sup_{0 \neq z \in H} \frac{L(z)}{\|z\|_H} = \|L\|_{H'}$$

y por otro lado

$$\|L\|_{H'} = \sup_{0 \neq z \in H} \frac{L(z)}{\|z\|_H}$$
$$= \sup_{0 \neq z \in H} \frac{(u_L, z)_H}{\|z\|_H} \leq \|u_L\|_H$$

por lo tanto $\|L\|_{H'} = \|u_L\|_H$. $\square$

Sean V y W e.v.n., consideremos la forma bilineal $a : V \times W \to \mathbb{R}$

Definición (continuidad)

$a(\cdot,\cdot)$ se dice *continua* si existe $C > 0$ t.q.

$a(v,w) \leq C \|v\|_V \|w\|_W \,, \forall (v,w) \in V \times W$

Definición (Problema Variacional)

Si $a(\cdot,\cdot)$ es continua, V y W espacios de Banach, W es reflexivo y $F \in W'$, entonces el problema: *Encontrar* $u \in V$ *tal que*

$$a(u,w) = F(w) \,, \forall w \in W$$

se conoce como *Problema Variacional*.

Definición (coercividad)

Si V es un espacio de Hilbert, $W = V$ y $M \leq V$, $a(\cdot,\cdot)$ se dice *coerciva sobre* M si existe $\gamma > 0$ t.q.

$$a(v,v) \geq \gamma \|v\|_V^2 \,, \forall v \in M$$

Proposición

Si $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ es un espacio de Hilbert, $W = V$, $H \leq V$ y $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, continua y coerciva sobre H, entonces, $(H, a(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert.

Demostración: Ejercicio

Teorema

Si $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ es un espacio de Hilbert, $W = V$, $H \leq V$, $a(\cdot,\cdot)$ simétrica, continua y coerciva sobre H, y $F \in H'$, entonces existe una única $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = F(v)\,, \forall v \in H$$

Demostración: Basta aplicar el Tma. de Rep. de Riesz al espacio de Hilbert $(H, a(\cdot,\cdot))$ y la forma lineal $F \in H'$. □

Corolario (Aproximación de Riesz Galerkin)

Si $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ es un espacio de Hilbert, $W = V$, $V_h \leq V$ es un espacio de dimesión finita, $a(\cdot,\cdot)$ simétrica, continua y coerciva sobre V_h, y $F \in V_h'$, entonces existe una única $u_h \in H$ tal que

$$a(u_h, v_h) = F(v_h)\,, \forall v_h \in V_h$$

Demostración: Basta demostrar que un espacio de dimensión finita es cerrado en V y aplicar el Teorema anterior. □

Bajo las hipótesis anteriores y asumiendo que $V_h \leq H$ considere la *solución continua* $u \in H$ y la *solución discreta* $u_h \in V_h$ definidas por

$$a(u, v) = F(v)\,,\ \forall v \in H$$
$$a(u_h, v_h) = F(v_h)\,,\ \forall v_h \in V_h$$

Substrayendo las relaciones anterioes obtenemos

$$a(u - u_h, v_h) = 0\,,\ \forall v_h \in V_h$$

Si definimos $\|\cdot\|_E = \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$, podemos construir la siguiente cota:

Sea $v_h \in V_h$ arbitrario

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) \\
&\leq \|u - u_h\|_E\, \|u - v_h\|_E
\end{aligned}$$

luego

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E\,, \forall v_h \in V_h$$

y por lo tanto

$$\|u - u_h\|_E \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_E$$