

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1. Este problema consta de dos partes (a) y (b), cada una independiente de la otra. En las respuestas de cada parte, escriba los pasos intermedios que utilizó para llegar a la solución.

(a) Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(b) Determine la solución general de la EDO

$$(D^2 - 8D + 41)^2(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = 0.$$

Puede utilizar que $y(t) = e^t$ es una de sus soluciones.

Solución:

(a) El polinomio asociado a la EDO homogénea anterior es $p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - 3$ cuyas raíces son $\alpha_1 = -3$ y $\alpha_2 = 1$. Por tanto, las soluciones son

$$\begin{cases} y_1(t) &= e^{-3t}, \\ y_2(t) &= e^t \end{cases}$$

y puesto que

$$W[e^{-3t}, e^t](t) := \begin{vmatrix} e^{-3t} & e^t \\ -3e^{-3t} & e^t \end{vmatrix} = 4e^{-2t}$$

estas funciones son l.i. Por el Teorema de la dimensión la solución general de la EDO dada es

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales que se determinan del sistema

$$\begin{cases} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= -1. \end{cases}$$

Esto es,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 1, \\ -3c_1 + c_2 &= -1. \end{cases}$$

de donde $c_1 = c_2 = 1/2$.

Finalmente la única solución al PVI dado, es

$$y(t) = (1/2)e^{-3t} + (1/2)e^t.$$

- (b) Puesto que la EDO involucra dos operadores diferenciales lineales a coeficientes constantes, la EDO dada, que es de orden siete, tiene las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = 0, \quad (1)$$

$$(D^2 - 8D + 41)^2 y = 0. \quad (2)$$

La ecuación característica asociada a la primera EDO es $(r^3 + 2r^2 - 13r + 10) = 0$, que tiene a $r = 1$ entre sus raíces. De esta forma obtenemos que

$$\begin{aligned} r^3 + 2r^2 - 13r + 10 &= (r - 1)(r^2 + 3r - 10) \\ &= (r - 1)(r - 2)(r + 5). \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones para la primera EDO son

$$\begin{cases} y_1(t) &= e^t, \\ y_2(t) &= e^{2t}, \\ y_3(t) &= e^{-5t}. \end{cases}$$

De otra parte, la EDO $(D^2 - 8D + 41)y = 0$ tiene polinomio asociado

$$(r^2 - 8r + 41) = [r - (4 + 5i)][r - (4 - 5i)].$$

Por tanto, la EDO $(D^2 - 8D + 41)y = 0$ tiene soluciones

$$\begin{cases} y_4(t) &= e^{4t} \cos(5t), \\ y_5(t) &= e^{4t} \sen(5t). \end{cases}$$

Así, finalmente, si $u(x)$ es una solución arbitraria de la EDO

$$(D^2 - 8D + 41)^2 (D^3 + 2D^2 - 13D + 10)y = 0,$$

entonces

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-5t} + c_4 e^{4t} \cos(5t) + c_5 e^{4t} \sen(5t) + c_6 t e^{4t} \cos(5t) + c_7 t e^{4t} \sen(5t)$$

donde $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ y c_7 son constantes reales y arbitrarias.

PROBLEMA 2. Considere la EDO lineal no homogénea de segundo orden:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1}. \quad (3)$$

1. (4 puntos) Encuentre la solución general de

$$z''(x) - 5z'(x) + 6z(x) = 0.$$

2. (2 puntos) Calcule el Wronskiano de las funciones que constituyen el Sistema Fundamental de Soluciones obtenido en el inciso anterior.

3. (12 puntos) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial (3) utilizando el método de variación de parámetros.
4. (2 puntos) Determine la solución general de la ecuación diferencial (3).

Solución

1. Polinomio característico:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \text{Soluciones: } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

\implies Soluciones fundamentales:

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x}$$

\implies **Solución general del problema homogéneo:**

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

2. Wronskiano de las soluciones fundamentales:

$$W[e^{2x}; e^{3x}] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

3. Por variación de parámetros

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{3x}$$

con

$$u_1'(x) = \frac{1}{W[e^{2x}; e^{3x}]} \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{-5x} \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$\implies u_1(x) = - \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+1} \stackrel{t=e^x}{=} \int \frac{t dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2} \ln|t^2+1| = -\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1)$$

y con

$$u_2'(x) = \frac{1}{W[e^{2x}; e^{3x}]} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = e^{-5x} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

$$\implies u_2(x) = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} \stackrel{t=e^x}{=} \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) = \arctan(e^x)$$

\implies **Solución particular:**

$$y_p(x) = e^{3x} \arctan(e^x) - \frac{e^{3x}}{2} \ln(e^{2x}+1)$$

4. Solución general del problema homogéneo:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{3x} \arctan(e^x) - \frac{e^{2x}}{2} \ln(e^{2x} + 1)$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

PROBLEMA 3. Resuelva el PVI
$$\begin{cases} (t+1)y'(t) + \frac{t}{1-t} y(t) = (1-t^2)^{1/2} \text{ con } -1 < t < 1. \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Desarrollo:

Normalizando la EDO, obtenemos

$$y'(t) + \frac{t}{1-t^2} y(t) = \frac{(1-t^2)^{1/2}}{1+t}$$

En este caso $A'(t) = \frac{t}{1-t^2}$ de donde $A(t) = \ln(1-t^2)^{-1/2}$ pues $-1 < t < 1$.

Por tanto, el factor de integración es

$$\mu(t) = (1-t^2)^{-1/2}.$$

Multiplicando la EDO normalizada por $\mu(t)$, sigue

$$y'(t)(1-t^2)^{-1/2} + (1-t^2)^{-1/2} \frac{t}{1-t^2} y(t) = \frac{1}{1+t},$$

esto es,

$$\frac{d}{dt} [(1-t^2)^{-1/2} y(t)] = \frac{1}{1+t}.$$

Integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{-1/2} y(t) &= \int \frac{dt}{1+t} + C \\ &= \ln(1+t) + C \text{ donde } C \text{ es una constante.} \end{aligned}$$

Así,

$$y(t) = (1-t^2)^{1/2} \ln(1+t) + C (1-t^2)^{1/2}.$$

Ahora para $t = 0$, obtenemos $y(0) = C = 1$. Por tanto, la única solución al PVI dado, es

$$y(t) = (1-t^2)^{1/2} \ln(1+t) + (1-t^2)^{1/2}.$$

PROBLEMA 4.

Aplicando el método de Aniquiladores, encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$Y''(x) + 3Y'(x) - 4Y(x) = 6e^{2x} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Solución

Tenemos que

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x),$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de la EDO

$$Y_h''(x) + 3Y_h'(x) - 4Y_h(x) = 0 \quad (4)$$

y $Y_p(x)$ es una solución (cualquiera) de la EDO

$$Y_p''(x) + 3Y_p'(x) - 4Y_p(x) = 6e^{2x}$$

El polinomio característico asociado a (4) es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1).$$

Por lo tanto,

$$Y_h(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x,$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A continuación, aplicaremos el método de Aniquiladores para encontrar $Y_p(x)$.

Observe que buscamos una función $Y_p(x)$ de modo que

$$(D + 4)(D - 1)Y_p(x) = 6e^{2x}$$

donde $D = d/dx$.

Como $e^{2x} \in \text{Ker}(D - 2)$ sigue que

$$(D + 4)(D - 1)(D - 2)Y_p(x) = 0.$$

Por lo tanto, buscamos una solución particular, Y_p , del tipo

$$Y_p(x) = K_1e^{-4x} + K_2e^x + K_3e^{2x}$$

para ciertos valores de $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$.

Ya que $(D + 4)(D - 1)(K_1e^{-4x} + K_2e^x) = 0$,

$$K_3(D + 4)(D - 1)e^{2x} = 6e^{2x} \quad (5)$$

y K_1, K_2 pueden tomar cualquier valor en \mathbb{R} . Luego, elegimos $K_1 = K_2 = 0$. Además, realizando el cálculo en la ecuación (5) sigue

$$K_3(4e^{2x} + 3 \times 2e^{2x} - 4e^{2x}) = 6e^{2x},$$

de donde obtenemos $K_3 = 1$. Así que

$$Y_p(x) = e^{2x}.$$

Finalmente, todas las soluciones buscadas son:

$$Y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x + e^{2x}.$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 5.

Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$Y''(x) - 4Y'(x) + 8Y(x) = -2\frac{e^{2x}}{\operatorname{sen}(2x)} \quad \text{para todo } x \in]0, \pi/2[.$$

Sugerencia: Utilice el método de variación de la constante (también llamado variación de parámetros).

Solución

Tenemos que

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x),$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de la EDO

$$Y_h''(x) - 4Y_h'(x) + 8Y_h(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in]0, \pi/2[\quad (6)$$

y $Y_p(x)$ es una solución (cualquiera) de la EDO

$$Y_p''(x) - 4Y_p'(x) + 8Y_p(x) = -2\frac{e^{2x}}{\operatorname{sen}(2x)} \quad \text{para todo } x \in]0, \pi/2[.$$

El polinomio característico asociado a (6) es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8,$$

cuyas raíces son $2 \pm 2i$ con multiplicidad 1. Por lo tanto,

$$Y_h(x) = C_1 e^{2x} \cos(2x) + C_2 e^{2x} \operatorname{sen}(2x),$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando el método de variación de la constante, obtenemos la solución particular

$$Y_p(x) = C_1(x) e^{2x} \cos(2x) + C_2(x) e^{2x} \operatorname{sen}(2x),$$

donde

$$\begin{cases} e^{2x} \cos(2x) C_1'(x) + e^{2x} \operatorname{sen}(2x) C_2'(x) = 0 \\ (2e^{2x} \cos(2x) - 2e^{2x} \operatorname{sen}(2x)) C_1'(x) + (2e^{2x} \operatorname{sen}(2x) + 2e^{2x} \cos(2x)) C_2'(x) = -2\frac{e^{2x}}{\operatorname{sen}(2x)} \end{cases}.$$

Dividiendo la primera ecuación por e^{2x} y la segunda por $2e^{2x}$ se llega a

$$\begin{cases} \cos(2x) C_1'(x) + \operatorname{sen}(2x) C_2'(x) = 0 \\ (\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)) C_1'(x) + (\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)) C_2'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \end{cases}.$$

De la primera nueva ecuación tenemos que

$$C_2'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} C_1'(x),$$

pues $x \in]0, \pi/2[$. Sustituyendo en la segunda nueva ecuación obtenemos

$$(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)) C_1'(x) - (\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)) \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} C_1'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}.$$

Luego,

$$(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)) C_1'(x) - \left(\cos(2x) + \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} \right) C_1'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$$

de donde

$$C_1'(x) = 1.$$

Por lo tanto

$$C_2'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}.$$

Integrando se llega a

$$C_1(x) = \int 1 dx = x$$

y

$$C_2(x) = -\int \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} dx = -\frac{1}{2} \ln(\operatorname{sen}(2x)),$$

donde hemos tomado las constantes de integración iguales a 0. Entonces,

$$Y_p(x) = x e^{2x} \cos(2x) - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{sen}(2x)) e^{2x} \operatorname{sen}(2x).$$

Finalmente, la solución general buscada es

$$Y(x) = C_1 e^{2x} \cos(2x) + C_2 e^{2x} \operatorname{sen}(2x) + x e^{2x} \cos(2x) - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{sen}(2x)) e^{2x} \operatorname{sen}(2x),$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.