Máquinas de Turing Una máquina de Turing (TM) consiste en un *control-lector* que puede estar en cualquier estado dentro de un conjunto finito de estados. Dicho control-lector está leyendo una *cinta* infinita que está dividida en *celdas*. Cada celda contiene sólo un símbolo dentro de un conjunto finito de posibles símbolos.

Inicialmente, una palabra en un *alfabeto*, llamada *input*, está escrita en la cinta (un símbolo del input por celda, en celdas consecutivas). El resto de la cinta, infinitamente hacia la derecha e infinitamente hacia la izquierda, contiene un símbolo especial llamado *blanco*. Este símbolo es un símbolo de la cinta, pero no del input. El control-lector tiene una *cabeza* lectora que está sobre una de las celdas de la cinta. Diremos que la TM está *leyendo* dicha celda. Inicialmente la cabeza lectora de la TM está en la celda más a la izquierda que tiene el input.

Un *movimiento* de la TM se realiza en función del estado en que está el control-lector y el símbolo que está leyendo la cabeza lectora. En un movimiento la TM puede hacer una de las siguientes acciones:

- Cambiar el estado del control-lector.
- Escribir un símbolo de la cinta en la celda que está leyendo la cabeza lectora. Este símbolo reemplaza cualquier símbolo que haya estado escrito en la celda.
- Mueve la cabeza lectora una celda a la derecha o una celda a la izquierda.

Una descripción formal de una TM es similar a la descripción formal que usamos para los autómatas, es decir, usamos una 7-tupla. Sea M una TM descrita como sigue:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F),$$

donde Q es el conjunto finito de estados del control-lector, Σ es el alfabeto del input, Γ es el alfabeto de la cinta (Σ es un subconjunto de Γ), δ es la función de transición, q_0 es el estado inicial, $B \in \Gamma$ es el símbolo de la cinta para denotar el blanco, y $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados de aceptación.

La función de transición se describe como sigue: $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R, L\}$, donde por ejemplo, para un estado $q \in Q$ y un símbolo de la cinta X, la función de transición determina $\delta(q, X) = (p, Y, L)$ que el nuevo estado del control-lector es p, la cabeza lectora escribe Y en la celda que está leyendo, y la cabeza lectora se mueve a la celda que está directamente a la izquierda de la celda que está leyendo (R indica la derecha).

Para describir formalmente lo que hace una TM usaremos la siguiente notación. Lo primero es ver que en la notación que usaremos se describirá el estado de la cinta sólo en un conjunto finito de celdas, las celdas que contienen símbolos distintos al blanco o que en una vecindad cercana tienen símbolos distintos al blanco. Además esta notación describirá la posición de la cabeza lectora, y el estado del control-lector. La siguiente notación nos dará una *descripción de un instante* para una TM.

Entonces, usaremos una palabra de la forma

$$X_1 X_2 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n$$

que significa:

- El control-lector está en estado q,
- La cabeza lectora está leyendo el estado i (el estado inmediatamente a la derecha de donde se describe al estado),
- $X_1X_2\cdots X_n$ son los símbolos en Γ que contiene la cinta entre las celdas de más a la izquierda y más a la derecha que contienen un símbolo distinto al blanco.

Ahora, describiremos los movimientos de una TM mediante una secuencia de descripción de un instante de la máquina, concatenadas por el símbolo $\vdash$. Supongamos que $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, entonces:

$$X_1X_2\cdots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\cdots X_n \vdash X_1X_2\cdots X_{i-2}pX_{i-1}YX_{i+1}\cdots X_n,$$

es decir, la máquina movió su cabeza lectora a la izquierda, pasó del estado q al estado p, y escribió Y en la celda que estaba leyendo.

Si $i = 1$ entonces tendríamos lo siguiente:

$$qX_1X_2\cdots X_n \vdash pBYX_2\cdots X_n.$$

Este caso se podría considerar como una excepción ya que la descripción resultante describe más celdas que las que se encuentran entre las celdas de más a la izquierda y más a la derecha que contienen un símbolo distinto al blanco. Sin embargo, nos permitimos este tipo de excepciones.

En caso que $i = n$ y $Y = B$ entonces ocurre lo siguiente.

$$X_1X_2\cdots X_{n-1}qX_n \vdash X_1X_2\cdots X_{n-2}pX_{n-1},$$

es decir, reducimos el largo de la descripción.

Ejemplo 2.19. Veamos un ejemplo de una TM para un lenguaje que sabemos que no es regular, el lenguaje $\{0^n1^n\colon\ n \geq 1\}$. Mostraremos una TM que hará lo siguiente: irá leyendo un 0 y lo marcará como leído escribiendo una X encima, luego se moverá a la derecha hasta encontrar un 1 y lo marcará como leído escribiendo encima una Y. Repetirá este proceso hasta que ya haya leído todo el input, o hasta que una de las siguientes cosas ocurra:

- Leyó todos los 0's, si aún quedan 1's sin leer, entonces rechaza.
- Leyó todos los 1's, si aún quedan 0's sin leer, entonces rechaza.
- Leyó todo el input, entonces acepta.

La descripción de la TM es la siguiente:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\}).$$

Donde la función de transición se muestra en la Tabla 7:

	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)			(q_3, Y, R)	
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	$(q_2, 0, L)$		(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	
q_3				(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4					

Table 7: Tabla que describe la función de transición de la TM que acepta a $\{0^n1^n : \ n \geq 1\}$.

Notemos que q_0 es el estado inicial y la TM entra a q_0 cada vez que vuelve al 0 de más a la izquierda que aún no ha leído. Si M está en el estado q_0 y lee un 0, la función de transición nos dice que M pasa al estado q_1, escribe X sobre el 0 y se mueve a la derecha. Cuando M está en estado q_1 la cabeza lectora se mueve a la derecha por sobre los 0's y las Y's que vaya encontrando, sin cambiar de estado. Si encuentra una X o una B, la TM se detiene. Si M encuentra un 1, escribe una Y, pasa al estado q_2, y se mueve la izquierda. En el estado q_2, la TM se mueve sobre 0's e Y's sin cambiar de estado. Cuando encuentra una X, M pasa al estado q_0 y se mueve a la derecha. Si M encuentra en 0, entonces repite el proceso. Si M encuentra una Y, entonces cambió todos los 1 por Y's , y entonces el input era de la forma 0^n1^n, por lo tanto debería aceptar. Entonces M pasa al estado q_3 y se mueve a la derecha sobre las Y's. Si el primer símbolo distinto a una Y que M encuentra es una B, entonces todo es correcto y M pasa al estado q_4, y se detiene. En otro caso, si M encuentra un 1, entonces M se detiene sin aceptar (hay demasiados 1). Si encuentra un 0, entonces el input tenía un formato equivocado, y también se detiene sin aceptar.

Veamos el caso particular de lo que ocurre cuando el input es 0011.

$$\begin{aligned}
&q_0 0011 \vdash Xq_1011 \vdash X0q_111 \vdash Xq_20Y1 \vdash q_2X0Y1 \vdash \\
&Xq_00Y1 \vdash XXq_1Y1 \vdash XXYq_11 \vdash XXq_2YY \vdash Xq_2XYY \vdash \\
&XXq_0YY \vdash XXYq_3Y \vdash XXYYq_3B \vdash XXYYBq_4B.
\end{aligned}$$

Una TM puede ser representada por un grafo de transición similar al grafo de transición que definimos para los autómatas. En el caso de las TM las etiquetas que acompañan a los arcos deberán contener mayor información. El *grafo de transición* de una TM consiste en un conjunto de nodos que corresponden a los estados de la TM. Un arco irá del estado p al estado q si existe una transición de p a q, es decir, si para algún símbolo de la cinta X, $\delta(p, X) = (q, Y, D)$, donde Y es otro símbolo de la cinta y $D \in \{L, R\}$ es una dirección. Dicho arco será etiquetado X/YD. El estado inicial estará demarcado con una arco entrante con la etiqueta *start*. Los estados de aceptación serán demarcados con un doble círculo. De esta forma, lo único que queda sin definir en un grafo de transición para una TM es el símbolo para el *blanco*, que, a no ser que se diga algo distinto, siempre asumiremos que se denota con B. En la Figura 17 podemos ver el grafo de transición de la TM descrita en el Ejemplo 2.19.

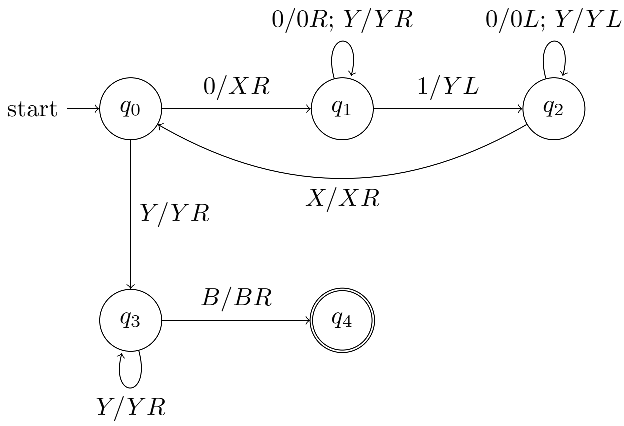

Figure 17: Grafo de transición de la TM descrita en el ejemplo dado por la Tabla 7.

Definición 2.20. Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una máquina de Turing. Entonces $L(M)$ es el conjunto de todas las palabras $w \in \Sigma^*$ tal que existe una secuencia de descripciones instantáneas de la forma $q_0 w \vdash \cdots \vdash \alpha p \beta$, para algún estado $p \in F$, donde α y β son dos palabras cualquiera en Γ^*.

Diremos que un lenguaje L es *reconocible* si existe una TM M tal que $L = L(M)$. En algunos textos los lenguajes reconocibles son llamados *enumerables* o *recursivos enumerables.*

Alternativamente, podríamos definir otra noción de *aceptación* para TM, *aceptación por detención.* Decimos que una TM se detiene cuando entra en un estado q leyendo un símbolo X y la función de transición no define ningún movimiento para este caso, es decir, $\delta(p, X)$ no está definido.

Siempre podemos suponer que una TM se detiene cuando entra en un estado de aceptación, es decir, sin modificar el lenguaje que acepta, siempre podemos hacer que $\delta(p, X)$ sea indefinido cuando p es un estado de aceptación. Entonces, podemos asumir que una TM siempre se detiene cuando entra en un estado de aceptación.

Desafortunadamente, no podemos suponer que una TM siempre se detiene en caso de no aceptar.

Definición 2.21. Diremos que un lenguaje L es *decidible* si existe una máquina de Turing M tal que $L = L(M)$, y además, M se detiene para todo input w (incluso cuando M no acepta w).

La idea ahora es ver que existen lenguajes que no son reconocibles, y lenguajes reconocibles que no son decidibles. Para esto es fundamental entender que una máquina de Turing siempre puede ser codificada como una palabra finita en binario. Para esto basta ver que cada uno de los componentes que definen una TM puede ser codificada como una palabra en $\{0,1\}^*$. Luego, en el mejor de los casos, cada palabra finita en binario representa una máquina de Turing. De esta forma, intuitivamente podemos entender que existen lenguajes que no son reconocibles ya que el número de máquinas de Turing es el número de palabras finitas en binario, es decir, el número de TM es infinito, pero numerable. Mientras que la cantidad de lenguajes es mucho más grande, uno puede hacer una biyección entre el conjunto de lenguajes en $\{0,1\}$ y un conjunto infinito *no* numerable. Por lo tanto hay muchos más lenguajes que máquinas de Turing. Luego, hay lenguajes que no son reconocibles.