TAREA 1 DE 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II

LEONARDO FIGUEROA C.

La siguiente definición fue adaptada de la glosa 'Continuity, modulus of' de la *Encyclopedia of Mathematics* en `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Continuity,_modulus_of&oldid=30705`.

Definición (Módulo de continuidad uniforme)**.** Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Dada $f\colon X \to Y$ el módulo de continuidad uniforme de f, $\omega_f\colon R_{>0} \to R \cup \{\infty\}$, se define por

$$(\forall\, t > 0) \quad \omega_f(t) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d_X(x_1, x_2) \leq t}} d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Proposición. *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) y f como en la definición anterior.*

I. *Si f es uniformemente continua entonces $\omega_f(t)$ es finito para todo $t > 0$.*
II. $\lim_{t \to 0^+} \omega_f(t) = 0$ *si y solo si f es uniformemente continua.*
III. *Si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos que tiende a 0, entonces* $\lim_{n \to \infty} \omega_f(r_n) = 0$.

Demostración. Tarea (2015-I). □