Movimiento en una Dimensión

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315
e-mail:jaguirre@udec.cl

Contenidos

Resultados de aprendizaje

- Interpretar gráficas del movimiento de una partícula en una dimensión.
- Identificar, interpretar y utilizar ecuaciones cinemáticas en la resolución de problemas de partículas en movimiento unidimensional con aceleración constante.

1. Introducción

Describiremos el movimiento de un objeto en términos del espacio y el tiempo, ignorando los *agentes* que lo causaron: *Cinemática*.

Consideraremos sólo el movimiento en una dimensión: Movimiento a lo largo de una línea recta, o movimiento-1D.

Comenzaremos definiendo la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula u objeto: Esos conceptos serán aplicados a objetos que se mueven en una dimensión con aceleración constante.

En física el movimiento puede ser de tres tipos:

- Traslacional: Un automóvil moviéndose en una carretera.
- Rotacional: La rotación de la tierra en torno de su eje.
- Vibracional: El movimiento de un péndulo.

Este y el próximo capítulo serán dedicados al movimiento traslacional.

Usaremos el modelo *particular*- el objeto en movimiento es descrito como una *partícula* independiente de su masa.

En general, una *partícula* es un objeto puntual- esto es, un objeto de masa y tamaño infinitesimalmente pequeño.

2. Posición, velocidad y rapidez

El movimiento de una partícula se conoce completamente si su posición en el espacio es conocida durante todo el tiempo.

La *posición* de una partícula es la ubicación de la partícula con respecto a un punto de referencia que consideraremos el origen del sistema de coordenadas.

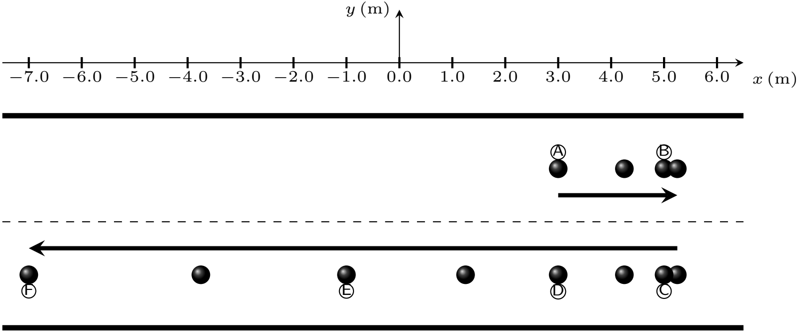

Figura 1. Partícula moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda; eje- x.

Al iniciar la toma de datos de la posición del auto en función del tiempo él se encuentraba en la posición A a $3.0\,\mathrm{m}$ y a la derecha del origen $(0,\,0)$ del sistema de coordenadas, y se movía hacia la derecha.

Posición	$t\,(\mathrm{s})$	$x\,(\mathrm{m})$
A	0.00	3.00
	0.50	4.25
B	1.00	5.00
	1.50	5.25
C	2.00	5.00
	2.50	4.25
D	3.00	3.00
	3.50	1.25
E	4.00	-1.00
	4.50	-3.75
F	5.0	-7.00

Cuadro 1. Posición de la partícula esquematizada en la Fig.1 en función del tiempo.

Las madidas de la posición de la partícula se registraron cada $0.50\,\mathrm{s}$.

Del Cuadro 1, la partícula se mueve hacia la derecha (eje $+x$) hasta al canzar la máxima posición $x = 5.25\,\mathrm{m}$ en el tiempo $t = 1.50\,\mathrm{s}$.

Después de la máxima posición alcanzada por la partícula los valores de la posición disminuyen; la partícula se mueve hacia la izquierda, hasta la posición F, cuando se paró el cronometraje del tiempo.

Si el tiempo se hubiera tomado en intervalos cada vez menores se tendría una descripción mucho más detallada del movimiento de la partícula.

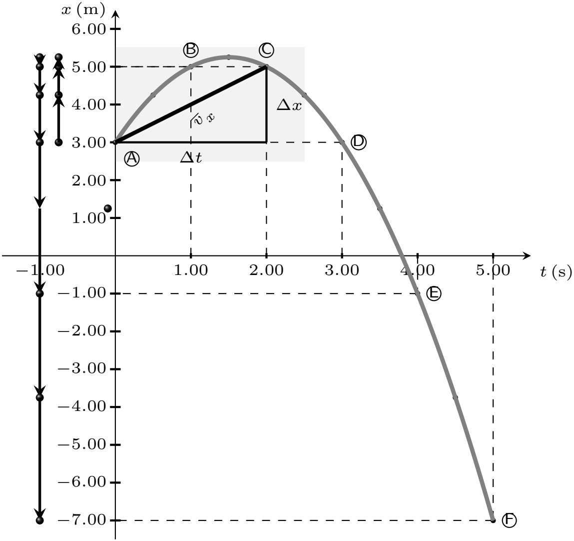

Figura 2. Gráfico $x(t)$ para el movimiento de la "partícula" de la Fig.1.

El **desplazamiento** (Δx) de una partícula se define como su cambio de posición por intervalo de tiempo (Δt).

Para un movimiento desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f, el desplazamiento de la partícula es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i, \quad \Delta\text{- letra griega ``Delta'' denota } \textit{cambio}. \tag{1}$$

De la Ec.(1): $\Delta x > 0$ (positivo), si $x_f > x_i$ y $\Delta x < 0$ (negativo), si $x_f < x_i$.

La **distancia** es la longitud de un camino seguido por la partícula (es representada siempre con un número positivo).

El **desplazamiento** es un vector: Tiene magnitud y dirección, y en una dimensión puede ser positivo o negativo.

En este capítulo usaremos los signos positivo $(+)$ y negativo $(-)$ para indicar la dirección de los vectores (sólo debido a que el movimiento es en una dimensión, es decir, a lo largo de una línea recta).

Por ejemplo, para movimiento horizontal el sentido positivo es hacia la derecha (arbitrariamente).

- Cualquier objeto moviéndose siempre hacia la derecha sufre un desplazamiento positivo; $\Delta x > 0$, $x_f > x_i$.
- Cualquier objeto moviéndose siempre hacia la izquierda sufre un desplazamiento negativo; $\Delta x < 0$, $x_f < x_i$.

En la gráfica de la Fig.2, los datos mostrados corresponden sólo a los seis punto del Cuadro 1: La curva suave es sólo una *posibilidad* del movimiento real del automóvil; una *suposición* acerca del movimiento del automóvil. Mantenga eso en mente!

Si la curva suave representa el movimiento "real" del automóvil, la gráfica contiene información acerca del intervalo total del movimiento.

2.1. Velocidad media

La velocidad media $\overline{v}_x$ de una partícula se define como el desplazamiento de la partícula Δx dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre dicho desplazamiento:

$$\overline{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}, \tag{2}$$

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x. Las dimensiones de la velocidad media son longitud dividido por tiempo $\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-1}$ y las unidades en el sistema SI son metros por segundo $(\mathrm{m/s})$.

En un movimiento en una dimensión $\overline{v}_x$ puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo del desplazamiento:

- Si $x_f > x_i \rightarrow \Delta x > 0 \rightarrow \overline{v}_x > 0$ (movimiento hacia la derecha: a valores de x mayores).
- Si $x_f < x_i \rightarrow \Delta x < 0$ y $\overline{v}_x < 0$ (movimiento hacia la izquierda, hacia menores valores de x).

Geométricamente, la velocidad media se interpreta dibujando una línea recta entre dos puntos cualquieras del gráfico posición-tiempo (ver la Fig.2). La línea recta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt.

La pendiente de esa línea es la razón $\Delta x / \Delta t$, o sea la definición de velocidad media, Ec.(2).

Por ejemplo, entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ de la Fig.2, se tiene:

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{5.00\,\mathrm{m} - 3.00\,\mathrm{m}}{1.00\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = 2.00\,\mathrm{m/s}.$$

Cotidianamente, los términos *rapidez* y *velocidad* son intercambiables: En física, existe una clara distinción entre ellos.

Por ejemplo, en un viaje de ida y vuelta de $40\,\mathrm{m}$, punto de partida igual al punto de llegada, el desplazamiento total es cero, así la velocidad media es cero! Sin embargo, la distancia total recorrida es $40\,\mathrm{m}$. ¿Cuán rápido se realizó el viaje?

La *rapidez* media de una partícula, una cantidad escalar, se define como:

$$\text{rapidez media} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo empleado en recorrerla}}. \tag{3}$$

Al igual que la velocidad, las unidades en el sistema SI de la rapidez media son metro por segundo $(\mathrm{m/s})$: Como no tiene dirección no posee signo algebraico.

El conocimiento de la velocidad media o de la rapidez media de la partícula no entrega información acerca de los detalles del movimiento.

Por ejemplo, suponga que le lleva $45\,\mathrm{s}$ viajar $100\,\mathrm{m}$ en línea recta hacia el portón de embarque en un aeropuerto. En la marca de los $100\,\mathrm{m}$, tiene ganas de ir al baño, y retrocede $25\,\mathrm{m}$ a lo largo de la misma línea recta, haciendo ese recorrido en $10\,\mathrm{s}$. La magnitud de la *velocidad media* (suma de vectores) para ese viaje es:

$$\overline{v} = \frac{75\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s} - 0.0\,\mathrm{s}} = \frac{75\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} = 1.4\,\mathrm{m/s}.$$

La *rapidez media* para ese viajes es

$$\text{rapidez media} = \frac{100\,\mathrm{m} + 25\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s}} = \frac{125\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} = 2.3\,\mathrm{m/s}.$$

Ejemplo

Calcule el desplazamiento, la velocidad media y la rapidez media del auto de la Fig.2 entre las posiciones Ⓐ y Ⓕ.

Solución

Del gráfico de la Fig.2 y del Cuadro 1 se tiene: $x_{\mathsf{A}} = 3.00\,\mathrm{m}$ *y* $t_{\mathsf{A}} = 0.00\,\mathrm{s}$*;* $x_{\mathsf{F}} = -7.00\,\mathrm{m}$ *y* $t_{\mathsf{F}} = 5.00\,\mathrm{s}$*. Usando la Ec.(1), encontramos:*

$$\Delta x_{\mathsf{AF}} = x_{\mathsf{F}} - x_{\mathsf{A}} = -7.00\,\mathrm{m} - 3.00\,\mathrm{m} = -10.00\,\mathrm{m},$$

o sea, el auto se ancuentra a $10.00\,\mathrm{m}$ *a la izquierda de la posición* x_{A}*.*

Usando la Ec.(2), se encuentra, con $\Delta t_{\mathsf{AF}} = t_{\mathsf{F}} - t_{\mathsf{A}} = 5.00\,\mathrm{s}$*:*

$$\overline{v}_{x,\mathsf{AF}} = \frac{\Delta x_{\mathsf{AF}}}{\Delta t_{\mathsf{AF}}} = \frac{-10.00\,\mathrm{m}}{5.00\,\mathrm{s}} = -2.00\,\mathrm{m/s}.$$

Continuación

La distancia total recorrida es realizada en el tiempo total: El tiempo para ir desde la posición Ⓐ hasta la posición máxima más el tiempo para ir desde la posición máxima hasta la posición Ⓕ. De lo anterior, usando la Ec.(3), encontramos:

$$\begin{aligned}\textit{rapidez media} &= \frac{\textit{distancia total}}{\textit{tiempo total}} = \frac{2.25\,\mathrm{m} + 5.25\,\mathrm{m} + 7.00\,\mathrm{m}}{5.00\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{14.50\,\mathrm{m}}{5.00\,\mathrm{s}} = 2.90\,\mathrm{m/s}.\end{aligned}$$

3. Velocidad y rapidez instantánea

¿Qué significa o se quiere decir cuando se habla de cuan rápido algo se está moviendo si "congelamos el tiempo" y hablamos acerca de un instante individual?

Esta es una cuestión que sólo se aclaró a finales de 1600. En esa época, científicos ayudados con la invención del cálculo infinitesimal comenzaron a entender un objeto en movimiento en cualquier instante de tiempo.

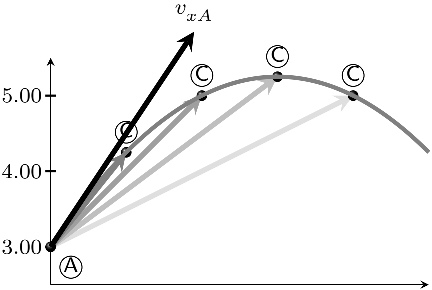

Figura 3. Zoom de la parte superior de la Fig.2.

A medida que la posición Ⓒ se mueve hacia la posición Ⓐ, las líneas se aproximan a la tangente.

La pendiente de la tangente a la curva $x(t)$ en Ⓐ representa la velocidad del auto en ese punto.

3.1. Velocidad instantánea

La velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ a medida que Δt se aproxima a cero:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{4}$$

En la notación del cálculo, este límite es llamado la *derivada* de x con respecto a t, escrita como dx/dt;

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa o cero.

- Si la pendiente de $x(t)$ es positiva, $v_x > 0$: Movimiento hacia valores de x mayores.
- Si la pendiente es negativa, $v_x < 0$: Movimiento hacia valores de x menores.

- En la posición máxima la pendiente de $x(t)$ y la velocidad instantánea del auto son cero (línea horizontal)- el auto está en reposo momentáneo.

Desde ahora en adelante usaremos la palabra *velocidad* para referirnos a la velocidad *instantánea*.

3.2. Rapidez instantánea

Se define como la *magnitud* o *módulo* de su velocidad instantánea.

Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de $+25\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de una dada línea y otra partícula tiene una velocidad instantánea de $-25\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de la misma línea, ambas partículas tienen una rapidez de $25\,\mathrm{m/s}$.

Así como para la velocidad, usaremos **rapidez** de una partícula para referirnos a su rapidez *instantánea*.

Ejemplo

Considere los siguientes movimientos en una dimensión:

1. Una bola lanzada directamente hacia arriba alcanza su máxima posición y cae hasta llegar a su mano.
2. Un auto de carrera parte desde el reposo y aumenta su rapidez hasta $100\,\mathrm{m/s}$.
3. Una nave espacial se mueve en el espacio con velocidad constante.

¿Existe(n) cualquier punto(s) en el movimiento de esos objetos en los que la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad media a lo largo del movimiento? Si la respuesta es sí, identifique el (los) punto (puntos)

Solución

Para responder esas preguntas recuerde que la velocidad media de una partícula en un movimiento unidimensional se define como Δx (desplazamiento) dividido por el intervalo de tiempo (Δt) en el que ocurre ese desplazamiento. Y velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se hace infinitesimalmente pequeño $\Delta t \to 0$.

Continuación

1. *Sí. Sea el movimiento hacia arriba* $+y$*, hacia abajo* $-y$*. En este caso* $\Delta y = 0$ *(la bola sale de la mano y llega a la mano) de modo que* $\overline{v}_y = 0$*. En el punto más alto del movimiento su velocidad instantánea es* $v_y = 0$ *(la bola está momentáneamente en reposo y comienza a caer).*
2. *Sí. La velocidad media del auto no puede ser determinada con precisión a partir de la información dada, pero puede estar entre* 0 *y* $100\,\mathrm{m/s}$*. Dado que el auto puede tener cualquier velocidad entre* 0 *y* $100\,\mathrm{m/s}$ *en algún instante durante el intervalo, debe haber algún instante en el que la velocidad instantánea sea igual a la velocidad media del automóvil.*
3. *Sí. Dado que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante y su velocidad media sobre cualquier intervalo de tiempo son la misma.*

Ejemplo

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo a la expresión

$$x(t) = -\left(4.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t + \left(2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2,$$

donde x es medido en metros y t, en segundos. El gráfico $x(t)$ para ese movimiento es mostrado en la Fig.4 (página siguiente).

Note que la partícula se mueve en la dirección negativa del eje x para el primer segundo del movimiento, está momentáneamente en reposo en el instante $t = 1.0\,\mathrm{s}$ y se mueve en la dirección positiva del eje x para tiempos mayores $t > 1.0\,\mathrm{s}$.

a) Calcule el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo: $t = 0.0$ a $t = 1.0\,\mathrm{s}$ y $t = 1.0\,\mathrm{s}$ a $t = 3.0\,\mathrm{s}$.

b) Calcule la velocidad media durante esos dos intervalos de tiempo.

c) Derive una expresión para calcular la velocidad instantánea de la partícula y úsela para $t = 2.5\,\mathrm{s}$.

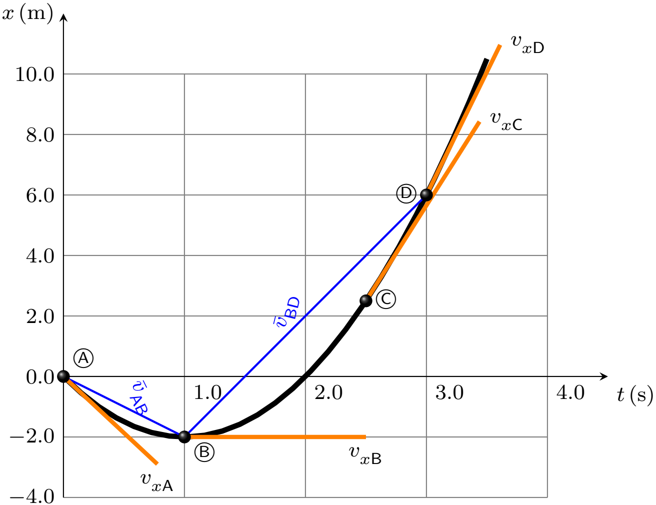

Figura 4. Gráfico $x(t)$ para el movimiento de la partícula del Ejemplo 3.

Solución

a) *En el punto de partida* Ⓐ*:* $t_{\text{A}} = 0.0\,\text{s}$ *y*

$$x_{\text{A}} = -\left(4.0\,\text{m/s}\right)\left(0.0\,\text{s}\right) + \left(2.0\,\text{m/s}^2\right)\left(0.0\,\text{s}\right)^2 = 0.0\,\text{m}.$$

En el punto Ⓑ*:* $t_{\text{B}} = 1.0\,\text{s}$ *y*

$$x_{\text{B}} = -\left(4.0\,\text{m/s}\right)\left(1.0\,\text{s}\right) + \left(2.0\,\text{m/s}^2\right)\left(1.0\,\text{s}\right)^2 = \left(-4.0 + 2.0\right)\text{m} = -2.0\,\text{m}.$$

En ese intervalo el desplazamiento de la partícula Δx_{AB} *es:*

$$\Delta x_{\text{AB}} = x_{\text{B}} - x_{\text{A}} = -2.0\,\text{m} - 0.0\,\text{m} = -2.0\,\text{m}.$$

En el punto Ⓓ*,* $t_{\text{D}} = 3.0\,\text{s}$ *y*

$$x_{\text{D}} = -\left(4.0\,\text{m/s}\right)\left(3.0\,\text{s}\right) + \left(2.0\,\text{m/s}^2\right)\left(3.0\,\text{s}\right)^2 = \left(-12 + 18\right)\text{m} = 6\,\text{m}.$$

En ese intervalo el desplazamiento de la partícula Δx_{BD} *es:*

$$\Delta x_{\text{BD}} = x_{\text{D}} - x_{\text{B}} = 6\,\text{m} - \left(-2.0\,\text{m}\right) = 8\,\text{m}.$$

Continuación

b) *La velocidad media para el intervalo* Ⓐ *a* Ⓑ, *con* $\Delta t_{\mathrm{AB}} = 1.0\,\mathrm{s}$ *es:*

$$\overline{v}_{\mathrm{AB}} = \frac{\Delta x_{\mathrm{AB}}}{\Delta t_{\mathrm{AB}}} = \frac{-2.0\,\mathrm{m}}{1.0\,\mathrm{s}} = -2.0\,\mathrm{m/s}.$$

La velocidad media para el intervalo Ⓑ *a* Ⓓ *es, con* $\Delta t_{\mathrm{BD}} = 2.0\,\mathrm{s}$*:*

$$\overline{v}_{\mathrm{BD}} = \frac{\Delta x_{\mathrm{BD}}}{\Delta t_{\mathrm{BD}}} = \frac{8\,\mathrm{m}}{2.0\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m/s}.$$

Continuación

c) *Dado que las constante de la expresión para $x(t)$ son las apropiadas, mantendremos sólo los valores numéricos de ellas en el análisis que se sigue.*

En cualquier instante de tiempo t la posición de la partícula es dada por:

$$x(t) = -4.0t + 2.0t^2,$$

Un instante de tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición de la partícula es dada por:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= -4.0(t + \Delta t) + 2.0(t + \Delta t)^2 \\ &= -4.0t - 4.0\Delta t + 2.0t^2 + 4.0t\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

El desplazamiento entre esos dos puntos es

$$\begin{aligned} \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) &= -4.0t - 4.0\Delta t + 2.0t^2 + 4.0t\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \\ &- [-4.0t + 2.0t^2] = (-4.0 + 4.0t)\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Continuación

La velocidad media para ese intervalo es, con $\Delta t = (t + \Delta t) - t$*:*

$$\overline{v}_x = \frac{(-4.0 + 4.0t)\Delta t + 2.0(\Delta t)^2}{\Delta t} = (-4.0 + 4.0t) + 2.0\Delta t.$$

Usando la definición de velocidad instantánea, es decir, haciendo $\Delta t \to 0$*, encontramos la siguiente expresión para la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo* t*:*

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_x = -4.0 + 4.0t.$$

En particular, en $t = 2.5\,\mathrm{s}$*, la velocidad instantánea es*

$$v_x(2.5\,\mathrm{s}) = -4.0 + 4.0(2.5\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m/s}.$$

4. Aceleración media e instantánea

Cuando la velocidad de una partícula cambia con el tiempo la partícula está *acelerando*.

Suponga que una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad inicial v_{xi} en t_i en la posición Ⓐ y velocidad final v_{xf} en t_f en la posición Ⓑ (vea la Fig.5).

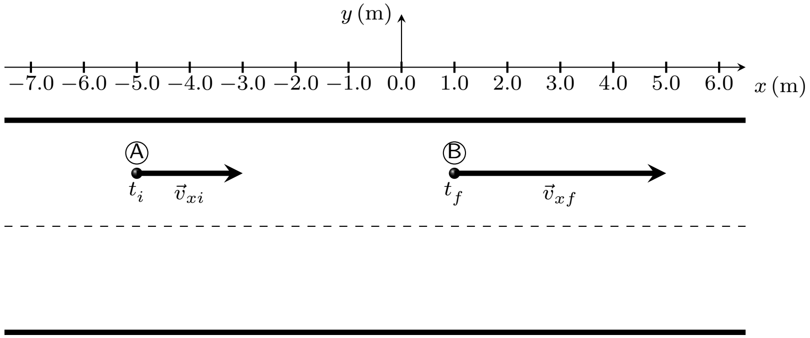

Figura 5. Movimiento con velocidad cambiante.

4.1. Aceleración media

La aceleración *media* $\overline{a}_x$ de la partícula se define como el *cambio* de la velocidad Δv_x dividida por el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre ese cambio:

$$\overline{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}. \tag{6}$$

En un movimiento unidimensional, signos positivos y negativos indican la dirección de la aceleración.

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2}$.

Las unidades en el sistema SI de la aceleración son metros por segundo cuadrado $(\mathrm{m/s^2})$.

Un carro que se mueve con una aceleración de $+2\,\mathrm{m/s^2}$, por ejemplo, significa que muda su velocidad en $2\,\mathrm{m/s}$ en cada segundo.

Al igual que el desplazamiento y la velocidad, la aceleración es un *vector*.

De la Fig.6, suponga que la posición de la partícula (B) se aproxima más y más a la posición (A), esto es, el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño; $\Delta t \to 0$.

4.2. Aceleración instantánea

Se define la aceleración instantánea a_x como el límite de $\Delta v_x/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}. \tag{7}$$

La aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo la que, por definición, es la pendiente del gráfico $v_x(t)$.

La pendiente de la línea tangente la Fig.6 es la aceleración instantánea en el punto (B).

Así como la velocidad de una partícula en movimiento en un dado punto es la pendiente de la curva en ese punto en el gráfico $x(t)$, la aceleración de la partícula en un dado punto es igual a la pendiente del gráfico $v_x(t)$ en ese punto.

Si $a_x > 0$, la aceleración es en la dirección positiva del eje x; si $a_x < 0$, la aceleración es en la dirección negativa del eje x.

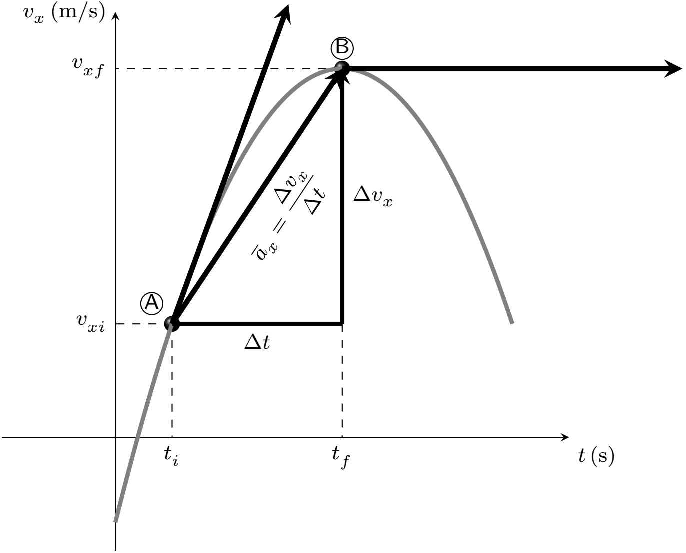

Figura 6. Gráfico $v_x(t)$ para el movimiento de la partícula del la Fig.2.

En un movimiento unidimensional:

> *Si la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto está acelerando. Por otro lado, si la dirección de la velocidad y de la aceleración son opuestas, el objeto está desacelerando.*

Desde ahora en adelante usaremos simplemente *aceleración* para aceleración *instantánea*.

Dado que $v_x = dx/dt$, la aceleración puede ser escrita como:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,: \tag{8}$$

En un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la segunda *derivada* de x con respecto al tiempo.

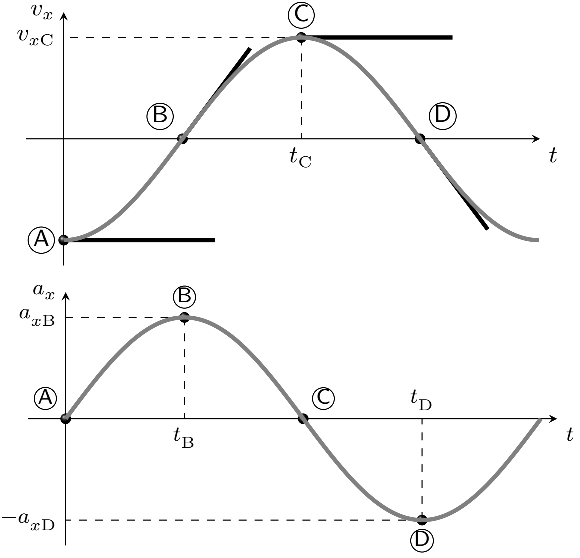

Figura 7. Gráfico $v_x(t)$ y $a_x(t)$ para el movimiento de una dada partícula.

Según la Fig.7:

- El gráfico $a_x(t)$ se obtiene del gráfico $x(t)$ mediante la pendiente de la tangente a la curva en todo instante de tiempo.
- Pictóricamente: Coloque su lápiz sobre la curva para representar la tangente de la curva en ese punto e inclínelo a medida que avanza sobre ella.
- En el gráfico $v_x(t)$ en A la partícula tiene su máxima velocidad negativa: La pendiente de la tangente es cero (línea horizontal); $a_{x\mathsf{A}} = 0$.
- Entre A y B la velocidad aumenta hasta hacerse cero en B. La pendiente de la tangente a la curva se inclina cada vez más hacia arriba y alcanza su máxima inclinación en B. En ese punto la aceleración de la partícula es máxima.
- Entre B y C la velocidad aumenta hasta hacerse máxima en C. Mas entre esos puntos la pendiente de la tangente se inclina hacia abajo hasta volverse horizontal en C; $a_{x\mathsf{C}} = 0$.
- Entre C y D la velocidad de la partícula disminuye hasta hacerse cero en D: La pendiente de la tangente a la curva alcanza su máxima inclinación hacia abajo; la aceleración alcanza su máximo valor negativo.

Los puntos mostrados en el gráfico $v_x(t)$ son mostrados en el gráfico $a_x(t)$.

Un gráfico $x(t)$ correspondiente a los de la Fig.7 es mostrado en la Fig.8.

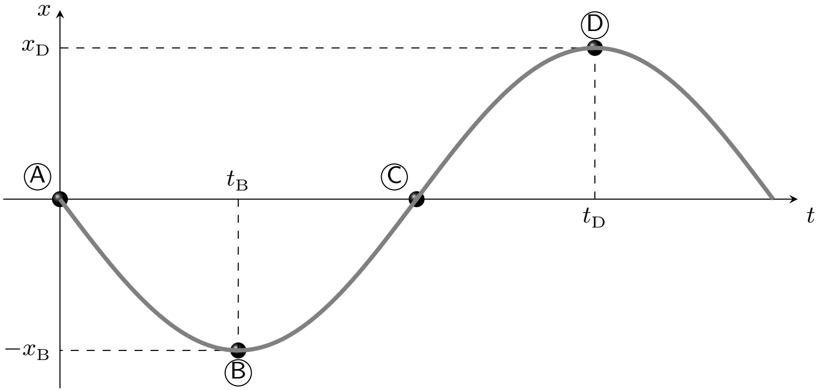

Figura 8. Gráfico $x(t)$ correspondiente a los gráficos de la Fig.7.

- En (A) la posición de la partícula es $x_{\mathrm{A}} = 0$ y se está moviendo con velocidad $v_{x\mathsf{A}}$ negativa: Se está moviendo en la dirección negativa del eje x.
- En (B) la partícula tiene velocidad $v_{x\mathrm{B}} = 0$ y ha alcanzado su máxima posición negativa, x_{B}; momentáneamente en reposo e inicia su movimiento en la dirección positiva del eje x.
- En (C) la partícula ha alcanzado su máxima velocidad $v_{x\mathsf{C}}$ positiva y nuevamente está en la posición cero, $x_{\mathsf{C}} = 0$.
- En (D) la partícula ha alcanzado su máxima posición positiva, x_{D}; momentáneamente en reposo y comienza su movimiento en la dirección negativa del eje x: $v_{x\mathsf{D}} = 0$.

El gráfico $v_x(t)$ de la Fig.7 se obtiene haciendo la pendiente de la tangente a la curva del gráfico $x(t)$ de la Fig.8.

Ejemplo

La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo de acuerdo con la Fig.9. Haga esquemas para $v_x(t)$ y $a_x(t)$ e interprételos.

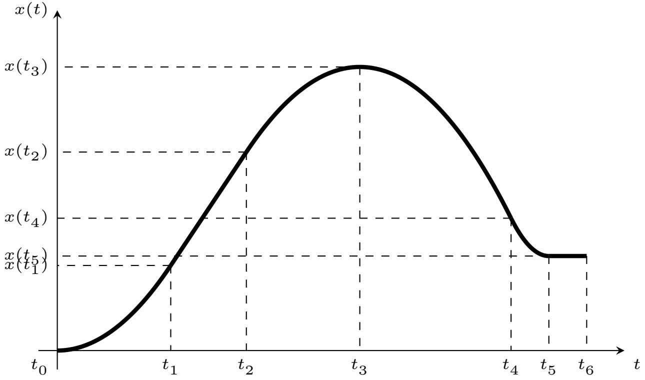

Figura 9. Gráfico $x(t)$ del movimiento de la partícula.

Solución

El gráfico $v_x(t)$ de la partícula se muestra en la Fig.10.

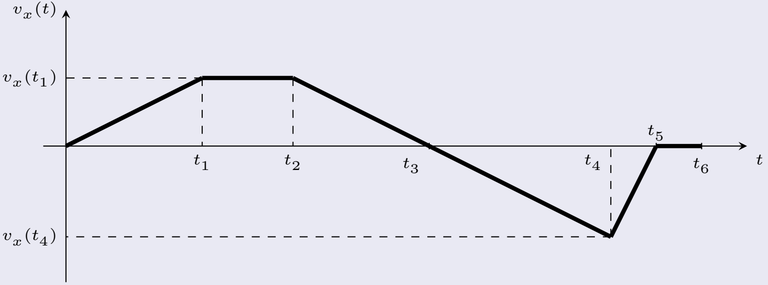

Figura 10. Gráfico $v_x(t)$ correspondiente al movimiento de la partícula.

Continuación

En $t_0 = 0$ *la partícula está en el origen* $x(t_0) = 0$*, se mueve hacia la derecha con velocidad positiva cada vez mayor (la pendiente de* $x(t)$ *se inclina más y más hacia arriba).*

En t_1 *la partícula alcanzó su máxima velocidad positiva (máxima inclinación de la pendiente de* $x(t)$*) y sigue moviéndose hacia la derecha.*

Entre t_1 *y* t_2 *la velocidad de la partícula es constante, no hay cambio de la pendiente de* $x(t)$*.*

Entre t_2 *y* t_3 *la velocida de la partícula comienza a disminuir, haciéndose cero en* t_3 *(pendiente de* $x(t)$ *igual a cero- horizontal), la partícula ha alcanzado su máxima posición a la derecha* $x(t_3)$*, está momentáneamente en reposo y comienza a viajar hacia la izquierda con una velocidad cada vez más negativa- cada vez más creciente- hasta el instante* t_4 *cuando alcanza su máximo valor negativo.*

Entre t_4 *y* t_5 *la velocidad comienza a hacerse menos negativa, haciendose cero en el instante* t_5 *(la pendiente de* $x(t)$ *se hace cero- horiznontal).*

Entre t_5 *y* t_6 *la partícula simplemente está en reposo.*

Solución

El gráfico $a_x(t)$ de la partícula se muestra en la Fig.11. Los saltos bruscos del gráfico no son efectivos, solo indican cambios en la aceleración de la partícula.

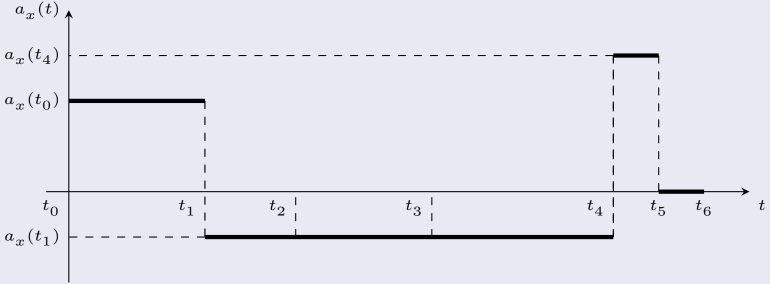

Figura 11. Gráfico $a_x(t)$ correspondiente al movimiento de la partícula.

Continuación

Entre los instantes t_0 *y* t_1 *la aceleración de la partícula es positiva y constante* $a_x(t_0)$.

En el instante t_1 *la aceleración de la partícula se vuelve negativa* $a_x(t_1)$ *y se mantiene constante hasta el instante* t_4.

Desde el instante t_4 *la aceleración nuevemante se hace positiva y adquiere su máximo valor hasta el instante* t_5*, cuando se hace cero.*

Entre los instantes t_5 *y* t_6*, la partícula simplemente tiene una velocidad y una aceleración igual a cero (está en reposo.)*

Ejemplo

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de la dirección x varía en el tiempo de acuerdo a la expresión

$$v_x(t) = 40\,\mathrm{m/s} - \left(5.0\,\mathrm{m/s^3}\right) t^2,$$

donde t es medido en segundos.

a) Calcule la aceleración media en el intervalo de tiempo entre $t = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t = 2.0\,\mathrm{s}$.

b) Calcule la aceleración en $t = 2.0\,\mathrm{s}$.

Solución

a) *Primero note que las unidades SI están correcta, así que las colocaremos solo al final de los cálculos: Hagamos*

$$t_0 = 0.0\,\mathrm{s}; \quad v_{x0} = 40 - (5.0)(0.0)^2 = 40\,\mathrm{m/s}$$
$$t_2 = 2.0\,\mathrm{s}; \quad v_{x2} = 40 - (5.0)(2.0)^2 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Continuación

Con $\Delta t_{02} = 2.0\,\mathrm{s}$ *y* $\Delta v_{x02} = v_{x2} - v_{x0} = (20 - 40)\,\mathrm{m/s} = -20\,\mathrm{m/s}$*, la aceleración media en ese intervalo es:*

$$\overline{a}_{x02} = \frac{\Delta v_{x02}}{\Delta t_{02}} = \frac{-20\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -10\,\mathrm{m/s^2}.$$

b) *La velocidad en cualquier instante de tiempo* t *es:*

$$v_x(t) = 40 - (5.0)t^2$$

La velocidad en cualquier instante de tiempo posterior $t + \Delta t$ *es:*

$$v_x(t+\Delta t) = 40 - (5.0)(t+\Delta t)^2 = 40 - (5.0)t^2 - (10t\,\Delta t - (5.0)(\Delta t)^2$$

De modo tal que:

$$\Delta v_x = v_x(t+\Delta t) - v_x(t) = -\left(10\,\mathrm{m/s^3}\right) t\,\Delta t - \left(5.0\,\mathrm{m/s^3}\right)(\Delta t)^2$$

Continuación

Dividiendo por Δt *la última expresión y haciendo* $\Delta t \to 0$ *se obtiene una expresión para la aceleración en cualquier instante, esto es:*

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\left(10\,\mathrm{m/s^3}\right) t$$

En el caso particular en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, *punto* 2,

$$a_{x2} = -(10)(2.0) = -20\,\mathrm{m/s^2}.$$

Como en $t = 2.0\,\mathrm{s}$, $v_x > 0$ *y* $a_x < 0$, *la partícula está desacelerando.*

Note que la aceleración media es la pendiente de la línea azul que conecta los puntos 0 *y* 2.

La aceleración instantánea es la pendiente de la línea naranja, tangente a la curva $v_x(t)$ *en el punto* 2.

La aceleración no es constante en este ejemplo.

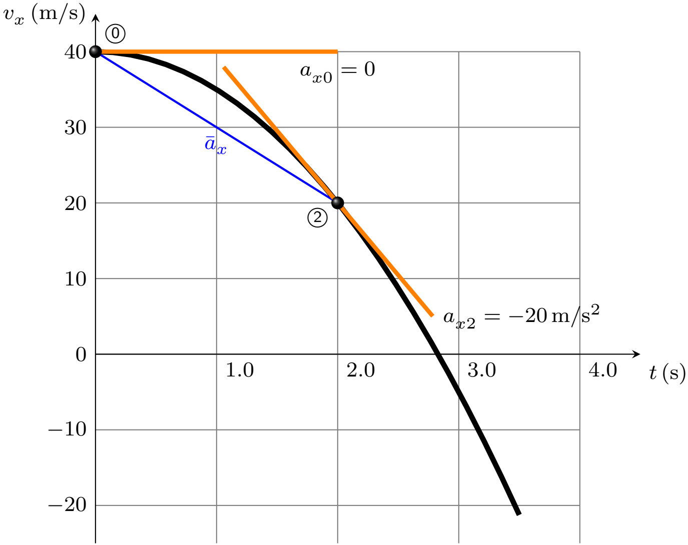

Figura 12. Gráfico $v_x(t)$ para el movimiento de la partícula.

5. Diagramas de movimientos

Los conceptos de velocidad y aceleración son comúnmente confundidos.

Los diagramas de movimiento son útiles para describir la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento.

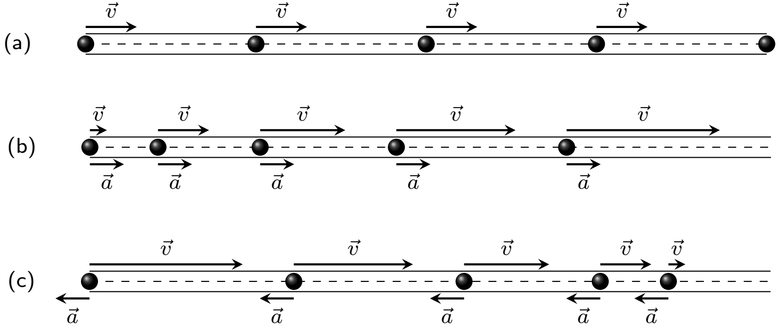

Figura 13. Diagrama de movimiento para una partícula.

La Fig.13 simula fotografías *estroboscópicas* de una partícula en movimiento: Una fuente estroboscópica emite flashes de luz a una tasa constante.

La partícula se mueve en línea recta de izquierda a derecha.

Figura 13(a): Imágenes igualmente espaciadas: Desplazamientos iguales para intervalos de tiempo iguales. Partícula con $\vec{v} =$ cte. > 0 y $\vec{a} = 0$.

Figura 13(b): Imágenes se separan cada vez más. Los vectores velocidad crecen debido a que los desplazamientos del auto aumentan entre puntos adyacentes a medida que el tiempo avanza. La partícula se mueve con $\vec{v} > 0$ y $\vec{a} =$ cte. > 0: $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección.

Figura 13(c): Imágenes se acercan cada vez más. Los vectores velocidad disminuyen debido a que los desplazamientos de la partícula disminuyen entre puntos adyacentes a medida que el tiempo avanza, pudiendo hacerse cero. La partícula se mueve hacia la derecha con $\vec{v} > 0$ y $\vec{a} =$ cte. < 0: $\vec{v}$ y $\vec{a}$ tienen direcciones opuestas.

6. Movimiento unidimensional con aceleración constante

Movimientos con aceleración variable pueden ser complejos y difíciles de analizar.

Un movimiento común y simple en una dimensión es el con aceleración constante. En ese caso $\overline{a}_x$ es numéricamente igual a a_x en cualquier instante del intervalo de tiempo: La velocidad muda a la misma tasa durante el movimiento.

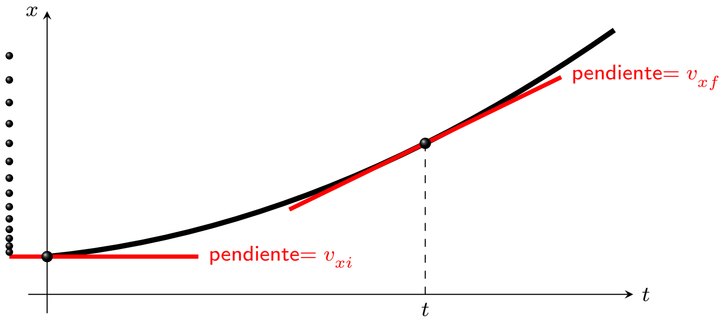

Figura 14. Gráfico $x(t)$ de una partícula moviéndose con aceleración constante.

Reemplacemos, en la Ec.(6): $a_x \equiv \overline{a}_x$; $t_i \equiv t_0 = 0$; $v_{xi} \equiv v_{x0}$, $v_{xf} \equiv v_x(t)$ y $t_f \equiv t$ como cualquier tiempo posterior. Obtenemos

$$a_x = \frac{v_x(t) - v_{x0}}{t - 0}; \quad \rightarrow \quad v_x(t) = v_{x0} + a_x t; \quad \text{para } a_x \text{ constante :} \qquad (9)$$

Si se conoce la velocidad inicial v_{x0} y la aceleración constante a_x, entonces, se puede determinar la velocidad $v_x(t)$ en cualquier instante de tiempo posterior t.

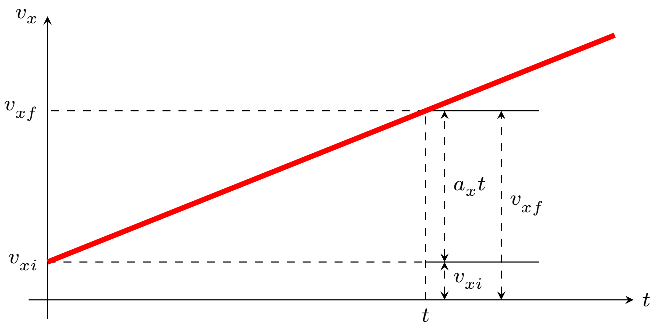

Figura 15. Gráfico $v_x(t)$ para la partícula moviéndose a lo largo del eje x de la Fig.14.

El gráfico $v_x(t)$ para este movimiento es una línea recta (vea la Fig.15), cuya pendiente (constante) es la aceleración. La pendiente positiva indica que la aceleración es positiva.

Una pendiente negativa indicaría que la aceleración es negativa.

El gráfico $a_x(t)$ para este movimiento es una línea recta de pendiente cero (vea la Fig.16).

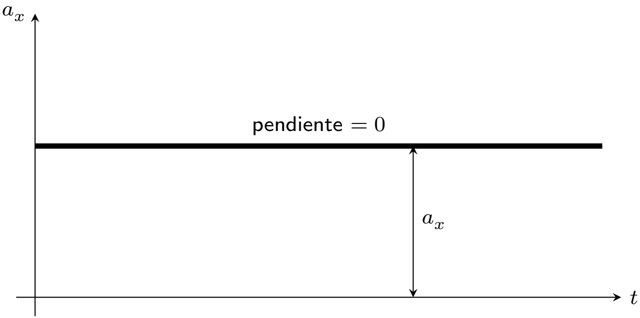

Figura 16. Gráfico $a_x(t)$ para la partícula moviéndose a lo largo del eje x de la Fig.14.

Para movimiento con aceleración constante la velocidad varía linealmente con el tiempo según la Ec.(9):

En cualquier intervalo de tiempo la velocidad media puede ser expresada como el promedio aritmético entre v_{x0} y $v_x(t)$:

$$\overline{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x(t)}{2}; \quad \text{solo cuando } a_x \text{ constante.} \tag{10}$$

Recordando la Ec.(2): $\overline{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t)-x_0}{t-t_0}$ y, usando la Ec.(10), se obtiene

$$\frac{v_{x0} + v_x(t)}{2} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$

Notando que $t_0 = 0$, entonces, $t - t_0 = t$, de modo tal que

$$\frac{v_{x0} + v_x(t)}{2} = \frac{x(t) - x_0}{t}$$

permite determinar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo t

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x(t)\right) t; \quad \text{para } a_x \text{ constante.} \tag{11}$$

Sustituyendo la Ec.(9) en la Ec.(11), encontramos:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}\left[v_{x0} + (v_{x0} + a_x t)\right] t = x_0 + \frac{1}{2}\left(2v_{x0}t + a_x t^2\right)$$

la que, después de cierta álgebra, nos permite escribir

$$x(t) = x_i 0 v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2; \quad \text{para } a_x \text{ constante.} \tag{12}$$

El gráfico posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) mostrado en la Fig.14 se obtiene con la Ec.(12): Note que es una *parábola*.

La pendiente de la línea tangente a esa curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inincial v_{x0}, y la pendiente de la línea tangente a esa curva en cualquier instante de tiempo t, es igual a la velocidad $v_x(t)$ en ese instante.

Finalmente, de la Ec.(9) podemos obtener el tiempo t

$$t = \frac{v(t) - v_{x0}}{a_x}$$

Usando la expresión anterior para t en la Ec.(11), se encuentra

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x(t)\right)\left(\frac{v_x(t) - v_{x0}}{a_x}\right) \\
&= x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{x0}v_x(t) - v_{x0}^2 + v_x^2(t) - v_{x0}v_x(t)}{a_x}\right) = x_0 + \frac{v_x^2(t) - v_{x0}^2}{2a_x}
\end{aligned}
$$

la cual reordenada, nos lleva a:

$$
v_x^2(t) = v_{x0}^2 + 2a_x\left(x(t) - x_0\right); \quad \text{para } a_x \text{ constante.} \tag{13}
$$

Para un movimiento con aceleración *cero*, las Ecs.(9) a (11) se convierten en:

$$
\left.\begin{aligned}
v_x(t) &= v_{x0} = v_x \\
x(t) &= x_0 + v_x t
\end{aligned}\right\}, \quad \text{cuando } a_x = 0.
$$

Es decir, cuando la aceleración de una partícula es cero (constante), su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo.

Ecuaciones cinemáticas para el movimiento en una dimensión de una partícula bajo aceleración constante

Ecuación	Información dada por la ecuación
$v_x(t) = v_{x0} + a_x t$	Velocidad en función del tiempo
$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x(t)\right) t$	Posición en función de la velocidad y el tiempo
$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición en función del tiempo
$x(t) = x_0 + v_x(t)t - \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición en función del tiempo
$v_x^2(t) = v_{x0}^2 + 2a_x\left(x(t) - x_0\right)$	Velocidad en función de la posición

Nota: Se ha elegido el movimiento a lo largo del eje x. Para movimiento en y o z sólo cambie la etiqueta x por la etiqueta del eje correspondiente.

Ejemplo

Un jet aterriza sobre una pista de un portaviones a $64\,\mathrm{m/s}$.

a) Calcule la aceleración (asumida constante) si el avión se detiene en $2.0\,\mathrm{s}$ debido a la acción de un cable que frena al jet y lo hace detenerse.

b) Si el jet toca el piso en la posición $x_0 = 0$, calcule la posición final del jet.

c) Si la pista tiene una longitud de $75\,\mathrm{m}$, calcule la máxima velocidad inicial con la que puede llegar el jet sobre la pista para que se detenga sobre ella con la aceleración del ítem a).

Solución

a) *Asuma el movimiento a lo largo del eje* x. *Se tiene* $v_{x0} = 64\,\mathrm{m/s}$, $v_x(t) = 0$ *y* $t = 2.0\,\mathrm{s}$. *Se nos pide calcular* a_x. *Usando la Ec.(9), se obtiene*

$$a_x = \frac{v_x(t) - v_{x0}}{t} = \frac{0 - 64\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -32\,\mathrm{m/s^2}.$$

Continuación

b) *Nos piden* $x(t)$*. Usando la Ec.(11) se encontramos*

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x(t)\right)t = 0 + \frac{1}{2}\left(64\,\mathrm{m/s} + 0\right)\left(2.0\,\mathrm{s}\right) = 64\,\mathrm{m}$$

c) *En este caso se tiene:* $x_0 = 0$, $x(t) = 75\,\mathrm{m}$, $v_x(t) = 0$ *y* $a_x = -32\,\mathrm{m/s}^2$*. Se nos pide calcular* v_{x0}*. La expresión que relaciona esas cantidades es la Ec.(13), la que podemos resolver para* v_{x0}*:*

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \sqrt{v_x^2(t) - 2a_x\left(x(t) - x_0\right)} \\ &= \sqrt{0 - 2\left(-32\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(75\,\mathrm{m} - 0\right)} = \sqrt{2(32\,\mathrm{m/s^2})(75\,\mathrm{m})} \\ v_{x0} &= \sqrt{4.8 \times 10^3}\,\mathrm{m/s} = 69\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Un automóvil viaja a una velocidad constante de $45\,\mathrm{m/s}$ y pasa frente a una patrulla de carabineros escondida detrás de un anuncio publicitario. Un segundo, $1.0\,\mathrm{s}$, después de que el automóvil pasa el anuncio, la patrulla inicia su persecución, acelerando a una tasa constanet de $3\,\mathrm{m/s^2}$. Calcular el tiempo que le toma a la patrulla alcanzar al automóvil.

Solución

Existen dos movimientos con aceleración constante: Automóvil con $a_{xA} = 0$ *y patrulla con* $a_{xP} = 3\,\mathrm{m/s^2}$.

Asuma la posición de la patrulla como el origen del eje coordenado, $x_{0P} = 0$.

Tome el instante en el que la patrulla inicia la persecución como el origen del tiempo. Existen tres posiciones claves en el problema.

- *(0); x_0 cuando el automóvil pasa por el anuncio;*
- *(1), x_1 cuando la patrulla inicia la persecución.*
- *(2), x cuando la patrulla alcanza al automóvil.*

Continuación

Cuando pasa por el anuncio la posición del automóvil es $x_{0A} = 0$. *Cuando la patrulla inicia la persecusión la posición del automóvil es:*

$$x_{1A} = x_{0A} + (45\,\mathrm{m/s})(1.0\,\mathrm{s}) = 45\,\mathrm{m}$$

En el instante t *en que la patrulla alcanza al automóvil su posición es:*

$$x_A(t) = x_{1A} + v_{xA}t = 45\,\mathrm{m} + (45\,\mathrm{m/s})\,t.$$

En ese mismo instante, la patrulla alcanzó al automóvil y su posición es

$$\begin{aligned} x_P(t) &= \cancel{x_{0P}}^{\,0} + \cancel{v_{x0P}}^{\,0}t + \frac{1}{2}a_{xP}t^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(3\,\mathrm{m/s^2}\right)t^2 \end{aligned}$$

Dado que en t *se tiene* $x_P = x_A$, *se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en* t:

$$t^2 - 30t - 30 = 0$$

Las unidades son consistentes, por eso las pondremos solo al final.

Continuación

La solución de la ecuación anterior es:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}; \quad a = 1, \quad b = -30; \quad c = -30$$

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{(9.0 \times 10^2) + (1.2 \times 10^2)}}{2} = \frac{30 \pm 32}{2}$$

de la cual se obtienen las siguientes soluciones

$$t = \frac{30 + 32}{2} = 31\,\mathrm{s} \quad \text{y} \quad t = \frac{30 - 32}{2} = -1.0\,\mathrm{s}$$

Dado que el tiempo es siempre positivo, se concluye que el tiempo que demora la patrulla en alcanzar al automóvil es $t = 31\,\mathrm{s}$.

La solución gráfica para el ejemplo se muestra en el siguiente gráfico.

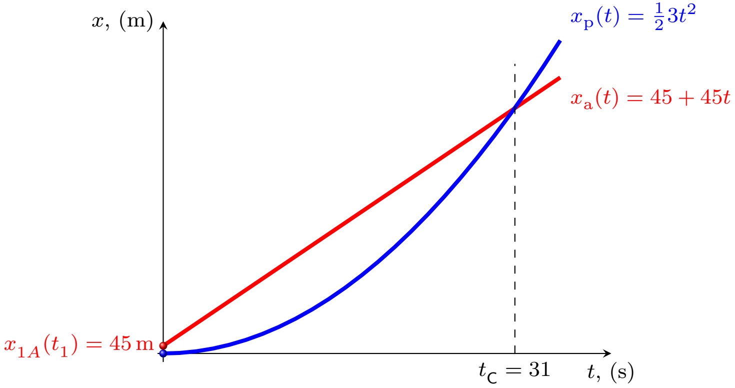

Figura 17. Gráfico $x(t)$ para el movimiento de los dos vehículos del ejemplo anterior.

7. Caída libre y lanzamiento vertical

Movimiento rectilíneo con $\vec{a}$ casi-constante.

No cosiderando efectos de resistencia del aire ni rotación de la tierra:

- Todos los cuerpos- independiente de su masa y tamaño- caen con la misma aceleración.
- La aceleración es constante.
- Modelo idealizado; caída *libre* (incluye el lanzamiento vertical y el de proyectiles).
- Aceleración de *gravedad* de magnitud g. Cerca de la superficie de la Tierra

  $$g = 9.80\,\mathrm{m/s^2} = 980\,\mathrm{cm/s^2} = 32.0\,\mathrm{ft/s^2}.$$

  Luna: $g_L = 1.60\,\mathrm{m/s^2}$;
  Sol: $g_S = 270\,\mathrm{m/s^2}$

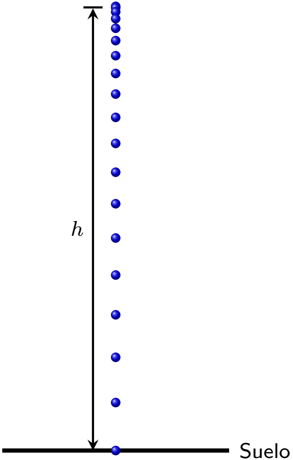

Figura 18. Partícula en cída libre.

Ecuaciones cinemáticas para el movimiento de caida libre o lanzamiento vertical hacia arriba

Ecuación	Información dada por la ecuación
$v_y(t) = v_{y0} - gt$	Velocidad en función del tiempo.
$y(t) = y_0 + \dfrac{1}{2}\left(v_{y0} + v_y(t)\right)t$	Posición en función de la velocidad y el tiempo.
$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$	Posición en función del tiempo.
$y(t) = y_0 + v_y(t)t + \frac{1}{2}gt^2$	Posición en función del tiempo.
$v_y^2(t) = v_{y0}^2 - 2g\left(y(t) - y_0\right)$	Velocidad en función de la posición.

Ejemplo

Se deja caer una moneda de \$100 desde la parte superior del Campanil de la UdeC; la moneda parte del reposo y cae libremente. Calcule la posición y la velocidad de la momenda después de 1.0, 2.0 y 3.0 s de soltarla.

Solución

Sea el punto desde donde se suelta la moneda el origen de coordenadas. La posición de la moneda para un instante t cualquiera, usando $v_{y0} = 0$, es dada por:

$$y(t) = \cancelto{0}{y_i} + \cancelto{0}{v_{yi}} t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2}\left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right) t^2 = -\left(4.90\,\mathrm{m/s^2}\right) t^2.$$

y su velocidad en esa posición es dada por:

$$v_y(t) = \cancelto{0}{v_{yi}} - g t = -\left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right) t.$$

Continuación

Para $t = 1.0\,\mathrm{s}$

$$y(t_1) = -\left(4.90\,\mathrm{m/s^2}\right)(1.0\,\mathrm{s})^2 = -4.9\,\mathrm{m}$$
$$v_y(t_1) = -\left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right)(1.0\,\mathrm{s}) = -9.8\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 2.0\,\mathrm{s}$

$$y(t_2) = -\left(4.90\,\mathrm{m/s^2}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2 = -20\,\mathrm{m}$$
$$v_y(t_2) = -\left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -20\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 3.0\,\mathrm{s}$

$$y(t_3) = -\left(4.90\,\mathrm{m/s^2}\right)(3.0\,\mathrm{s})^2 = -44\,\mathrm{m}$$
$$v_y(t_3) = -\left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right)(3.0\,\mathrm{s}) = -29\,\mathrm{m/s}.$$

Ejemplo

Lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura de la baranda de la azotea, con rapidez ascendente de $15.0\,\mathrm{m/s}$, quedando luego en caida libre. Al bajar, la pelota libra apenas la baranda. Calcule:

a) La posición y velocidad de la pelota en $t = 1.00\,\mathrm{s}$ y $t = 4.00\,\mathrm{s}$ después de lanzarla.

b) La velocidad de la pelota cuando está a $5.00\,\mathrm{m}$ sobre la baranda.

c) La altura máxima alcanzada por la pelota y el tiempo en que la alcanza.

d) La aceleración de la pelota en su altura máxima.

e) El tiempo t para el cual la pelota está $5.00\,\mathrm{m}$ por debajo de la baranda. Existen varias alternativas para calcular ese tiempo.

Solución

Sea el cero en la azotea del edificio. En este caso: $y_0 = 0$, $v_{y0} = 15.0\,\mathrm{m/s}$ *y* $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$. *Dada la consistencia de las unidades, las colocaremos solo al final de los cálculos.*

a) *En cualquier instante después de lanzada, la posición* $y(t)$ *y la velocidad* $v_y(t)$ *de la pelota son dadas por*

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = [(15.0)t - (4.90)t^2]\,\mathrm{m}$$
$$v_y(t) = v_{y0} - gt = [15.0 - (9.80)t]\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 1.00\,\mathrm{s}$ *esas expresiones dan*

$$y(t_1) = 10.1\,\mathrm{m}, \quad v_y(t_1) = +5.2\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 4.00\,\mathrm{s}$ *esas expresiones dan*

$$y(t_4) = -18.4\,\mathrm{m}, \quad v_y(t_4) = -24.2\,\mathrm{m/s}.$$

Continuación

b) *En este caso se tiene* $y(t) = 5.00\,\mathrm{m}$, y_0, v_{yi} *y* g *y se pide* $v_y(t)$. *Del cuadro de ecuaciones para caida libre usamos la última ecuación*

$$v_y^2(t) = v_{y0}^2 - 2g(y(t) - y_0) = [(15.0)^2 - 2(9.80)(5.00)]\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$
$$v_y^2(t) = 127\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \quad \rightarrow \quad v_y(t) = \sqrt{127\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = \pm 11.3\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad $v_y(t) = +11.3\,\mathrm{m/s}$ *es la que lleva la pelota cuando pasa por esa posición en su viaje de subida y,* $v_{yf} = -11.3\,\mathrm{m/s}$, *cuando pasa por la misma posición en su viaje de caida.*

c) *Cuando la pelota alcanza la máxima altura,* $y(t_{\text{máx}})$, *su velocidad es* $v_y(t_{\text{máx}}) = 0$. *Podemos usar la misma expresión usada en el ítem anterior, con* $v_y(t_{\text{máx}}) = 0$, *de la cual se obtiene*

$$0 = v_{y0}^2 - 2gy(t_{\text{máx}}) \quad \rightarrow \quad y(t_{\text{máx}}) = \frac{v_{yi}^2}{2g} = \frac{(15.0)^2}{2(9.80)} = +11.5\,\mathrm{m}$$

Continuación

Otra, sería usar la primera ecuación para determinar el instante $t_{\text{máx}}$ *en el cual* $v_y(t_{\text{máx}}) = 0$ *y luego sustituir ese valor en la tercera ecuación para determinar* $y(t_{\text{máx}})$. *Esto es,*

$$0 = v_{y0} - g t_{\text{máx}} \quad \rightarrow \quad t_{\text{máx}} = \frac{v_{y0}}{g} = \left[\frac{15.0}{9.80}\right] \mathrm{s} = 1.53\,\mathrm{s}$$

$$y(t_{\text{máx}}) = v_{y0} t_{\text{máx}} - \frac{1}{2} g t_{\text{máx}}^2 = \left[(15.0)(1.53) - \frac{1}{2}(9.80)(1.53)^2\right] \mathrm{m} = +11.6\,\mathrm{m}.$$

d) *En el punto más alto, así como en cualquier otro punto, la aceleración sigue siendo* $-g = -9.80\,\mathrm{m/s^2}$.

Ejemplo

Calcule el tiempo t para el cual la pelota del ejemplo anterior está $5.00\,\mathrm{m}$ por debajo del barandal. ¡Existen varias alternativas para determinar ese tiempo!

Solución

① *Podemos usar la tercera ecuación y resolver la ecuación cuadrática para* t. *Como las unidades son las correctas sólo resolveremos esa ecuación numéricamente:*

$$-5.00 = 15.0t - 4.90t^2 \quad \rightarrow \quad -1.02 = 3.06t - t^2$$

$$t = \frac{3.06 \pm \sqrt{(3.06)^2 - 4(-1.02)}}{2} = \frac{3.06 \pm \sqrt{13.4}}{2} = \frac{3.06 \pm 3.66}{2}$$

$$t_1 = \frac{3.06 + 3.66}{2} = 3.36\,\mathrm{s} \quad ; \quad t_2 = \frac{3.06 - 3.66}{2} = -0.30\,\mathrm{s}$$

② *Resuelva la última ecuación para* $v_y(t)$. *Use ese valor en la primera ecuación y resuelva para* t. *Nota: En este caso la velocidad es negativa, la pelota está ¡bajando!*