UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 10: Soluciones parciales

1. Sea $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) = \{e^{cx}p(x) \,:\, p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n multiplicados por la función e^{cx}. Sea $\varphi : \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$ la transformación lineal $\varphi(u) = \frac{du}{dx}$.

   a) Demuestre que $\beta = \{e^{cx}, e^{cx}x, \ldots, e^{cx}x^{n-1}, e^{cx}x^n\}$ es una base para $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$.

   b) Calcule la matriz representante de la transformación lineal $\varphi - bI$ usando la base β en el espacio de partida y de llegada.

   c) Encuentre los valores propios de φ. Concluya si φ es o no diagonalizable.

   Solución.

   a) Notemos en primer lugar que, dadas las condiciones del enunciado, el vector nulo del espacio $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$ es de la forma $k \cdot \theta(x)$, donde $k = e^{c\tilde{x}}$ para algún $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ y θ es el polinomio nulo. En tal caso, probemos ahora que β es l.i. Para ello, sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

   $$\alpha_0 e^{cx} + \alpha_1 e^{cx}x + \cdots + \alpha_n e^{cx}x^n = \theta \iff e^{cx}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = \theta$$

   donde θ representa el nulo del espacio en cuestión. Dado que tenemos al lado izquierdo una exponencial (función) por un polinomio de grado a lo más n, la igualdad anterior es cierta si y solo si

   $$e^{cx} = 0 \quad \vee \quad (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = \theta(x)$$

   pero como la exponencial es positiva para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la condición anterior equivale a

   $$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = \theta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   y como se trata de una igualdad de polinomios en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, se deduce que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, mostrando así que β es l.i.

   Para mostrar que β es un conjunto generador de $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$, observamos que todo elemento v en dicho espacio puede ser escrito como

   $$v(x) = e^{cx}(k_0 + k_1 x + \cdots + k_n x^n) = k_0 e^{cx} + k_1 e^{cx}x + \cdots k_n e^{cx}x^n$$

   donde observamos que v es combinación lineal de los elementos de β, luego $v \in \langle \beta \rangle$, y como ya vimos que β es l.i. se concluye que es una base de $\mathcal{P}_{n,c}(\mathbb{R})$.

   b) Para calcular la matriz representante de $\varphi - bI$ con respecto a β necesitamos evaluar $\varphi - bI$ en cada elemento de β y calcular sus coordenadas respecto a la misma. Debemos tener en mente que como $|\beta| = n + 1$, la matriz resultante tendrá dimensiones $(n + 1) \times (n + 1)$. Observamos que

- Para el primer vector,

$$(\varphi - bI)(e^{cx}) = \varphi(e^{cx}) - bI(e^{cx}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{cx} - be^{cx} = ce^{cx} - be^{cx} = e^{cx}(c-b)$$

  Luego, el vector de coordenadas de $(\varphi - bI)(e^{cx})$ respecto a la base β es

$$[(\varphi - bI)(e^{cx})]_\beta = \begin{bmatrix} c-b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, consideramos el vector $e^{cx}x^i$ de la base β. Usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}(\varphi - bI)(e^{cx}x^i) &= \varphi(e^{cx}x^i) - be^{cx}x^i \\ &= ce^{cx}x^i + ie^{cx}x^{i-1} - be^{cx}x^i \\ &= ie^{cx}x^{i-1} + (c-b)e^{cx}x^i\end{aligned}$$

  De donde deducimos que el vector de coordenadas de $(\varphi - bI)(e^{cx}x^i)$ respecto a la base β es un vector que tiene el valor i en la posición i (pues el vector $e^{cx}x^{i-1}$ es el que aparece $i-$ésimo en β, ya que iniciamos con $i = 0$), y al valor $(c-b)$ en la posición $i+1$, mientras que el resto de sus componentes son cero.

En definitiva, la matriz representante de $(\varphi - bI)$ con respecto a la base β es

$$[\varphi - bI]_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} c-b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-b & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & c-b & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c-b \end{bmatrix}$$

c) Para encontrar los valores propios de φ tenemos dos opciones: la primera es utilizar la definición de los valores propios de transformaciones lineales y considerar un vector no nulo (para que pueda ser vector propio) cualquiera, y seguir de esa manera hasta encontrar que condiciones deben satisfacer tales valores propios. Esta fue la manera intentada inicialmente en la clase práctica de la ayudantía 9. Sin embargo, esto fue un poco ingenuo pues podemos aprovechar lo demostrado en el inciso b). Para ello, debemos recordar un resultado visto en clases, el cual enuncia que dada $T : V \to V$ una transformación lineal cualquiera y B una base de V se tiene que

$$\sigma(T) = \sigma([T]_{BB})$$

Esto quiere decir que los valores propios de una transformación lineal son EXACTAMENTE LOS MISMOS que los de su matriz representante respecto a cualquier base. Aplicando este resultado al contexto del ejercicio, bastaba recordar como se calculan los valores propios de una matriz. En este caso, sea $b \in \mathbb{R}$ un valor propio de φ, luego $b \in \sigma([\varphi]_{\beta\beta})$. Entonces,

$$\det([\varphi]_{\beta\beta} - bI_{n+1}) = \det([\varphi - bI]_{\beta\beta}) = (c-b)^{n+1}$$

(Recordar que el cálculo de matrices representantes es lineal, en el sentido que la matriz representante de una suma de transformaciones lineales es la suma de las matrices representantes, y eso mismo también ocurre para el producto por escalar. Además, la matriz representante de la transformación identidad, con respecto a la misma base de partida y llegada, es la matriz identidad)

Luego, como los valores propios son los ceros del polinomio característico, concluimos que el único valor propio de φ es c. Es decir, $\sigma(\varphi) = \{c\}$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y B una base de V. Sean además $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Pruebe que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

   b) Muestre que no necesariamente $[T \circ S]_{BB}$ es similar a $[S \circ T]_{BB}$.
   Indicación: Defina las aplicaciones S y T en función de las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

a) Sea $\lambda \in \sigma(T \circ S)$. Esto es, existe $v \in V$ no nulo tal que

$$T \circ S(v) = \lambda v$$

Supongamos $\lambda \neq 0$. En tal caso,

$$\begin{aligned} T \circ S(v) &= \lambda v \\ \implies S \circ T(S(v)) &= \lambda S(v) \end{aligned}$$

Observamos acá que $S(v) \neq \theta$, pues de lo contrario $T \circ S(v) = T(\theta) = \theta$ y por lo tanto $\lambda = 0$ (contradicción), entonces λ es valor propio de $S \circ T$ con vector propio $S(v)$.
Sea ahora $\lambda = 0$. Luego, existe $v \in V$ no nulo tal que

$$T \circ S(v) = \theta$$

Supongamos que T es inyectiva. De lo anterior tenemos que $S(v) = \theta$. Como V es de dimensión finita, se sigue que T es sobreyectiva y por tanto existe $w \in V$ tal que $T(w) = v$. Luego,

$$S \circ T(w) = \theta$$

y como T es inyectiva y $T(w) = v$ y $v \neq \theta$, se tiene que $w \neq \theta$ es vector propio de $S \circ T$ asociado a $\lambda = 0$. Supongamos que T no es inyectiva. Luego, existe $w \in \operatorname{Ker}(T)$ no nulo tal que

$$\begin{aligned} S \circ T(w) &= S(\theta) \\ &= \theta \end{aligned}$$

Por tanto $\lambda \in \sigma(S \circ T)$ y $\sigma(T \circ S) \subseteq \sigma(S \circ T)$. Invirtiendo los roles de S y T concluimos que $\sigma(T \circ S) = \sigma(S \circ T)$.

b) Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y consideremos las transformaciones lineales $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$S(x) = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(x) = Dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

En tal caso, por ejercicio realizado la ayudantía anterior sabemos que

$$[S]_{BB} = C \quad \wedge \quad [T]_{BB} = D$$

Luego, por resultado visto en clases, se tiene que

$$[S \circ T]_{BB} = [S]_{BB}[T]_{BB} = CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mientras que

$$[T \circ S]_{BB} = [T]_{BB}[S]_{BB} = DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Son las matrices $[S \circ T]_{BB}$ y $[T \circ S]_{BB}$ similares? Supongamos que sí los son. Luego, existe una matriz $P \in M_2(\mathbb{R})$ no singular tal que

$$[S \circ T]_{BB} = P^{-1}[T \circ S]_{BB}P \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Pero es fácil mostrar que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{cof}(A))^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Así, ambas matrices en cuestión son similares ssi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} -2b & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} -2ab & -2b^2 \\ 2a^2 & 2ab \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de lo anterior, se deduce que $a^2 = b^2 = 0$, lo que implicaría que $\det(P) = ad - bc = 0$, lo que es una contradicción pues P debe ser invertible.

En práctica observamos que es mucho más corto trabajar la contradicción escribiendo $DC = P(CD)P^{-1}$, pues al ser CD la matriz nula, $P(CD)P^{-1}$ también lo es, pero DC no.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A y sea λ_i el valor propio asociado a v_i. Sea $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tal que $L(B) = A \cdot B$. Sea $B_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que su j-ésima columna es el vector v_i y las demás son nulas.

   a) Pruebe que $L(B_{ij}) = \lambda_i B_{ij}$.

   b) Demuestre que L es diagonalizable, es decir, existe una base de vectores propios de L.

   Solución.

   a) Notemos que

$$\begin{aligned} L(B_{ij}) = AB_{ij} &= A \begin{bmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ \theta & \cdots & v_i & \cdots & \theta \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ A\theta & \cdots & Av_i & \cdots & A\theta \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ \theta & \cdots & \lambda_i v_i & \cdots & \theta \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{bmatrix} \\ &= \lambda_i B_{ij} \end{aligned}$$

   b) Sea $\beta = \{B_{11}, B_{12}, B_{21}, \ldots, B_{nn}\} \subseteq M_n(\mathbb{R})$. Por lo mostrado en a), todos los elementos de β son vectores propios de L. Más aún, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos n vectores propios asociados al valor propio λ_i. Probemos que β en efecto es base de $M_n(\mathbb{R})$. Sea $C \in M_n(\mathbb{R})$ arbitraria. Luego, como cada columna C_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ de C es un vector de $\mathbb{R}^n$, existen escalares α_j^i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i v_j$$

   Luego, la matriz C se puede escribir como

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j^1 v_j & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j^i v_j & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j^n v_j \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1^1 B_{11} + \alpha_2^1 B_{21} + \cdots + \alpha_n^1 B_{n1} + \cdots \alpha_1^n B_{1n} + \alpha_2^n B_{2n} + \cdots \alpha_n^n B_{nn} \\ &= \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \alpha_j^i B_{ij} \end{aligned}$$

   Dado que C era una matriz cuadrada de tamaño n arbitraria, lo anterior permite concluir que $\langle \beta \rangle = M_n(\mathbb{R})$. Veamos ahora que β es l.i. Sean γ_{ij} con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$B := \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \gamma_{ij} B_{ij} = \theta$$

Observamos que la columna j de B es la columna $j-$ésima de

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} B_{ij} = \theta$$

es decir, la columna j de B es

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} v_i = \theta$$

y como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ es l.i. y por lo tanto $\gamma_{ij} = 0$ para todo j, $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que β es base de $M_n(\mathbb{R})$ compuesta de vectores propios de L. Luego, L es diagonalizable.