UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°5

Álgebra 2 - 525150

Considere la siguiente definición:

Definición:

Dados $\vec{a}, \vec{b}$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y solo si $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$.

1. Una empresa de construcción está planificando un proyecto para construir tres edificios en un complejo residencial. Cada edificio requiere diferentes cantidades de materiales de construcción: el Edificio 1 necesita 150 m^3 de hormigón, 20 toneladas de acero y 30 m^3 de madera; el Edificio 2 requiere 200 m^3 de hormigón, 25 toneladas de acero y 40 m^3 de madera; y el Edificio 3 demanda 180 m^3 de hormigón, 22 toneladas de acero y 35 m^3 de madera. La duración del proyecto varía para cada edificio, siendo 4 semanas para el Edificio 1, 5 semanas para el Edificio 2 y 3 semanas para el Edificio 3. Determina la cantidad de materiales que necesita la empresa para poder construir los tres edificios.

2. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinar los valores de α, β y γ de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$. Muestre que existen únicos valores de α, β y γ de modo que:

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Determine los valores de α, β y γ en función de a, b y c.

3. Dados los vectores $\vec{a} = (5, -2, 1)^t$, $\vec{b} = (6, 1, -4)^t$ y $\vec{c} = (1, 2, 1)^t$. Determinar el vector $\vec{x}$ de modo que $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = 62$ y $\vec{c} \cdot \vec{x} = 15$.

4. Sean $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ y $C(-4, 0, 3)$ puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

   (a) Muestre que existe un triángulo cuyos vértices sean A, B y C.

   (b) Determine la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

5. Dados $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Muestre que:

   (a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$