

**Listado 01: integración  
 Cálculo II (527150)**

1. Determinar las siguientes integrales indefinidas.

- |  |                                      |  |
|--|--------------------------------------|--|
| (a) $\int \frac{t^5 - 5t^3 + 2}{t^3} dt$             | (j) $\int \frac{1}{9x^2 + 25} dx$    | (r) $\int s2^s ds$                         |
| (b) $\int \left( x^7 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$ | (k) $\int \frac{1}{1 - \sqrt{t}} dt$ | (s) $\int \sin(\ln u) du$                  |
| (c) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$                      | (l) $\int e^u e^{-e^u} du$           | (t) $\int u^2 \cos(3u) du$                 |
| (d) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$               | (m) $\int x \arctan x dx$            | (u) $\int \frac{3x - 1}{2x^2 - 8x + 8} dx$ |
| (e) $\int \sin^2(x) dx$                              | (n) $\int \ln^2(x) dx$               | (v) $\int \frac{1}{(9 - 4v^2)} dv$         |
| (f) $\int \tan^2(x) dx$                              | (ñ) $\int u^2 \ln(u) du$             | (w) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$    |
| (g) $\int 2t\sqrt{4t - 3} dt$                        | (o) $\int \sin^5(x) \cos^4(x) dx$    | (x) $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$       |
| (h) $\int \frac{1}{x\sqrt{x - 1}} dx$                | (p) $\int \sec(x) dx$                | (y) $\int \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$       |
| (i) $\int e^{2t} \cos(e^{2t} + 1) dt$                | (q) $\int \cos(\sqrt{y}) dy$         | (z) $\int \frac{u^2}{\sqrt{25 - 9u^6}} du$ |

2. Sea  $r$  un número real positivo.

- (a) Utilizando la sustitución  $u = x^r$ , determinar  $\int \frac{1}{x - x^{r+1}} dx$ .
- (b) Utilizando el item anterior, determinar  $\int \frac{1}{x - x^{100}} dx$ .

3. Describir todas las funciones  $f$  que satisfagan la ecuación  $f''(x) = \cos(2x)$ .

4. Considerar las siguientes funciones.

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Verificar que ambas funciones tienen el mismo dominio y la misma derivada.
- (b) Verificar que  $f_1 - f_2$  no es constante.
- (c) Concordar estas afirmaciones con la propiedad de que dos primitivas de una misma función sobre el mismo intervalo difieren entre sí en una constante.

5. Una función  $f$  satisface las propiedades siguientes.

- Su derivada es la función  $1 - 6 \operatorname{sen}(3x)$ .
- $f(\pi) = -1$ .

Determinar la función  $f$ .

6. Una función  $f$  satisface las propiedades siguientes.

- Su derivada es la función  $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ .
- Su gráfica contiene al punto  $(-5, 0)$ .

Determinar la función  $f$ .

7. Una función  $f$  satisface las propiedades siguientes.

- Su segunda derivada es la función  $\frac{x-1}{(x+1)^3}$ .
- Su recta tangente en  $x = -2$  tiene ecuación  $y = x + 5$ .

Determinar la función  $f$ .

8. Considerar el siguiente desarrollo: se desea determinar la integral indefinida

$$I = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx$$

para lo cual se realiza integración por partes:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \\ dv = \cos(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx \\ v = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Luego de reemplazar queda

$$I = 1 + \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx = 1 + I$$

así que, cancelando  $I$  en ambos extremos, se concluye  $1 = 0$ .

¿Cuál es el error en este razonamiento?

9. Con la ayuda de un computador, aproximar el valor de la integral  $\int_0^3 e^{-x^2} dx$  usando 5, 10, 20 y 50 rectángulos.
10. Interpretar cada una de los siguientes límites como sumas de Riemann. Después, obtener el valor de cada límite resolviendo la integral asociada.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left( 5 + \frac{2i}{n} \right)^{10}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \tan \left( \frac{i\pi}{4n} \right)$$

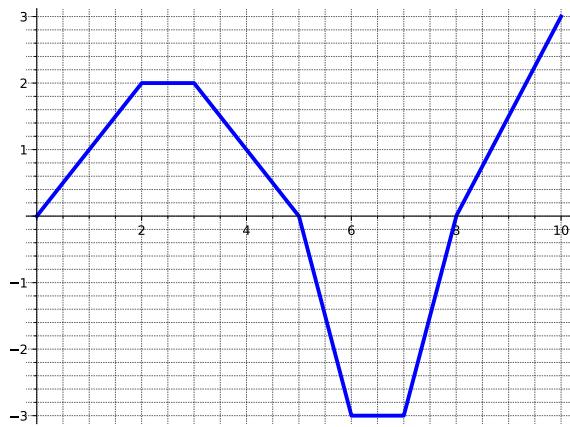
11. Sea  $f(x)$  la función graficada en la figura. Calcular las integrales siguientes.

$$(a) \int_3^5 f(t) dt$$

$$(b) \int_0^{10} f(t) dt$$

$$(c) \int_2^0 f(t) dt$$

$$(d) \int_8^5 f(t) dt$$



12. Explicar por qué el siguiente desarrollo es incorrecto.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} = -1 - 2 = -3$$

13. Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales.

$$(a) \int_1^3 (3x^4 - 2x) dx$$

$$(k) \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$(b) \int_0^1 y^2 (y^3 + 1)^5 dy$$

$$(l) \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$$

$$(c) \int_{-1}^K (1-t)^6 dt$$

$$(m) \int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5} dx$$

$$(d) \int_r^1 e^r \cos(2t) dt$$

$$(n) \int_0^\pi t \sin(3t) dt$$

$$(e) \int_{-16}^{-8} \frac{5}{x} dx$$

$$(\tilde{n}) \int_{16}^{25} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(f) \int_0^5 (|x-2|+1) dx$$

$$(o) \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{t^3}{(4t^2+9)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$(g) \int_0^1 \cos(3\pi t) dt$$

$$(p) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(h) \int_1^5 \frac{x}{x^2-4} dx$$

$$(q) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx$$

$$(i) \int_1^3 \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

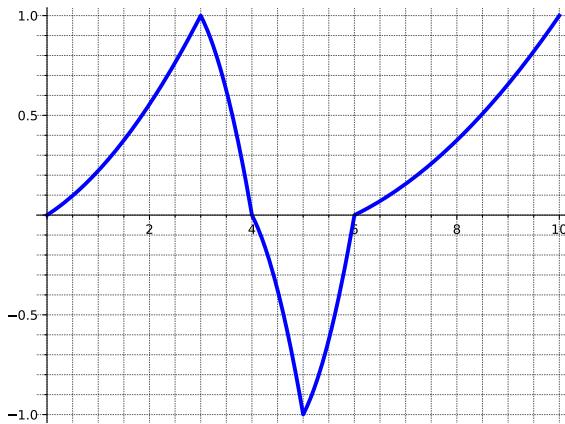
$$(r) \int_1^3 t^4 \ln(t) dt$$

$$(j) \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t} dt$$

$$(s) \int_0^t e^s \sin(t-s) ds$$

14. Sea  $f(x)$  la función graficada en la figura. Definimos  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- (a) Determinar los puntos de extremo relativo de  $g$ .
- (b) Determinar los intervalos de crecimiento de  $g$ .
- (c) Determinar los intervalos de concavidad de  $g$ .
- (d) Esbozar la gráfica de  $g$ .



15. Determinar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) \int_1^x \cos(t^2) dt$$

$$(d) \int_{2x+1}^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du$$

$$(b) \int_x^1 \sin(t^2) dt$$

$$(e) \int_x^{x^3} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$(c) \int_{-2}^2 e^{x^2} dx$$

$$(f) \int_x^{2x} \frac{e^u}{e^{u^2}} du$$

16. Considerar la función  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} du$ , definida para  $x > 0$ . Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

17. Evaluar el límite  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{2-x} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right)$ .

18. Sea  $f$  una función continua tal que  $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ . Determinar  $f(4)$ .

19. Usar la función  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  para justificar que la siguiente identidad es **falsa**.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

20. Decidir cuáles de las siguientes integrales son convergentes. Para las que lo sean, determinar su valor.

$$(a) \int_0^{\infty} 5^{-x} dx$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 xe^x dx$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

21. Determinar para cuáles valores de  $p$  la integral siguiente converge.

$$\int_0^\infty xe^{-px} dx$$

22. Determinar cuáles de las siguientes integrales son convergentes.

(a)  $\int_1^\infty \frac{e^{-t} + 2}{t} dt$

(c)  $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3} dx$

(b)  $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^8 + 1} dx$

(d)  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

23. Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. La *transformada de Laplace de  $f$*  es la función  $F$  definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

para los valores de  $s$  donde esta integral converja.

Determinar la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

(a)  $f(t) = 1$

(b)  $f(t) = e^t$

(c)  $f(t) = \cos(t)$

24. (*Desafío.*) A partir de un esbozo de la gráfica de  $y = \frac{\sin x}{x}$ , argumentar una justificación para la propiedad siguiente: si  $x > 0$ , entonces  $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt > 0$ .

25. (*Desafío.*) Calcular el valor del límite siguiente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$$

*Pista:* manipular esta suma para convertirla en una suma de Riemann.

26. (*Desafío.*) Considerar la función  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  con  $x > 0$ . De entre todos los intervalos cerrados y de largo  $\frac{3}{2}$  del dominio de  $f$ , determinar sobre cuál es el área bajo de gráfica de  $f$  lo más pequeña posible.

27. (*Desafío.*) Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y decreciente. ¿Es cierto que si  $\int_0^\infty f(x) dx$  es convergente entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?