

Valores y vectores propios

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

June 1, 2021



Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio de T** si $\exists v \in V \setminus \{\theta\} : T(v) = \lambda v$. En este caso, se dice que v es un **vector propio de T asociado a λ** .

Observación: $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \setminus \{\theta\}$ se llama **autopar de T** , si y sólo si $T(v) = \lambda v$.

Ejemplos

Sea $V := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$. Luego, $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales. Se define el operador $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que, dado $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $D(f)(x) := f'(x)$. Luego, se prueba que $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$. Así, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$, entonces

$$D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = C e^{\lambda x} \text{ con } C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tomando $C = 1$, y definiendo $g_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, se concluye que $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda, g_\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ es un autopar de D .



Espectro

El conjunto de valores propios de $T \in \mathcal{L}(V)$ se denomina **espectro de T** , y se denota por $\sigma(T)$. Así

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists v \in V \setminus \{\theta\} : T(v) = \lambda v\}.$$

Observación:

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(T) &\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{\theta\} : T(v) = \lambda v \\ &\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{\theta\} : (T - \lambda \tilde{I})(v) = \theta \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(T - \lambda \tilde{I}) \neq \{\theta\}.\end{aligned}$$

Esto motiva la definición siguiente

Definición (Subespacio propio)

Dado $\lambda \in \sigma(T)$, se define el subespacio propio de T asociado a λ , por $S_\lambda := \text{Ker}(T - \lambda \tilde{I})$.

Notar que por definición, S_λ es un subespacio vectorial de V , y cualquier vector no nulo de S_λ , es vector propio de T asociado a λ .

Proposición: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces se tiene que

- ① $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \lambda^k \in \sigma(T^k)$.
- ② T es invertible $\Rightarrow 0 \notin \sigma(T)$. (El recíproco es válido sólo en dimensión finita).
- ③ si T es invertible y $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.



Ejemplo interesante: $0 \notin \sigma(T) \not\Rightarrow T$ es invertible

Consideremos la aplicación $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, tal que para cada $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $T(p) := q$, donde $\forall x \in \mathbb{R} : q(x) := x^2 p(x)$. Se verifica:

- ① $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$,
- ② $0 \notin \sigma(T)$, i.e. T es inyectiva,
- ③ T no es sobreyectiva, pues para $q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, no existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = q \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 p(x) = q(x)$, ya que los polinomios en la igualdad son de grados distintos: $\text{gr}(T(p)) \geq 2$, mientras que $\text{gr}(q) \leq 1$.

Observación

Cuando $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, la identificación de $\sigma(T)$ y los espacios propios S_λ se pueden determinar usando la matriz representante de T con respecto a alguna base B_V de V . Esto motiva el estudio de los **valores y vectores propios de matrices**.



Valores y vectores propios de matrices

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama **valor propio de A** si $\exists v \in \mathbb{K}^{n \times 1} \setminus \{\theta\} : A v = \lambda v$. En este caso, se dice que v es un **vector propio de A** , asociado a λ . De manera análoga, se definen:

- **Espectro de A :** $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists v \in \mathbb{K}^{n \times 1} \setminus \{\theta\} : A v = \lambda v\}$.
- **Subespacio propio:** $S_\lambda := \{v \in \mathbb{K}^{n \times 1} : A v = \lambda v\}$, con $\lambda \in \sigma(A)$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- ① $\lambda \in \sigma(A)$ y $v \in S_\lambda \setminus \{\theta\}$ (i.e. v es vector propio).
- ② v es solución no trivial del sistema $(A - \lambda I_n)v = \theta$.
- ③ $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\theta\}$.
- ④ $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- ⑤ $r(A - \lambda I_n) < n$.
- ⑥ $A - \lambda I_n$ no es invertible.

La demostración es dejada como ejercicio. Recordar, por ejemplo, que un sistema cuadrado homogéneo $Bx = \theta$, con $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tiene solución única si y sólo si B es singular.



Relación entre valores y vectores propios de una transformación lineal y su matriz representante (en dimensión finita)

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, sea B una base de V , y $T \in \mathcal{L}(V)$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, se tiene que $\exists v \in V \setminus \{\Theta\} : T(v) = \lambda v$. Entonces, por propiedades vistas antes:

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow [T]_B^B [v]_B = [T(v)]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B \Rightarrow [T]_B^B [v]_B = \lambda [v]_B,$$
$$[T]_B^B [v]_B = \lambda [v]_B \Rightarrow \dots \Rightarrow T(v) = \lambda v.$$

Como consecuencia, se tiene

- ① $\sigma(T) = \sigma([T]_B^B)$.
- ② (λ, v) autopar de T si y sólo si $(\lambda, [v]_B)$ autopar de $A := [T]_B^B$.



Polinomio característico: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se define el polinomio característico de A , denotado por p_A , definido para cada $\mu \in \mathbb{K}$ por $p_A(\mu) := \det(A - \mu I_n)$. Puede probarse que en efecto, $p_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$. Luego, gracias al Teorema Fundamental del Álgebra, p_A tiene a lo más n raíces en \mathbb{K} . En virtud a la Proposición anterior, se establece así

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0.$$

De esta manera, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene a lo más n valores propios distintos. Como consecuencia, si $T \in \mathcal{L}(V)$, con V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces $|\sigma(T)| \leq \dim(V) = n$.

Observaciones

- ① Si V es de dimensión infinita, el espectro puede tener infinitos elementos. Tal es el caso de la aplicación lineal $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, definido para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, por $T(f) := f'$. En vista que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $g_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{\theta\}$ dada por $\forall x \in \mathbb{R} : g_\lambda(x) := e^{\lambda x}$, satisface: $T(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. Se concluye así que $\sigma(T) := \mathbb{R}$.
- ② El espectro puede ser conjunto vacío.

En efecto, si consideramos $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se deduce que

$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$, el cual no tiene raíces reales. Por tanto, $\sigma(A) = \emptyset$, con $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

Si considerásemos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, entonces en este caso $\sigma(A) := \{-i, i\}$, con $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.



Matrices similares o semejantes: Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen similares o semejantes si $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular (invertible) tal que $A = P^{-1}BP$, y se denota por $A \sim B$.

Proposición: $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \sim B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

Demuestra: Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $A \sim B$. Esto garantiza que $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = P^{-1}BP$. Entonces

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(A - \lambda I_n) = \det(P^{-1}BP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(B - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(B - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(P) p_B(\lambda) = \underbrace{\det(P^{-1}P)}_{=I_n} p_B(\lambda) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que $\sigma(A) = \sigma(B)$, y termina la demostración.

Corolario: Si $T \in \mathcal{L}(V)$, con V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, y B_1, B_2 son bases de V , entonces $[T]_{B_1}^{B_1} \sim [T]_{B_2}^{B_2}$. Luego, por la Proposición anterior, $\sigma([T]_{B_1}^{B_1}) = \sigma([T]_{B_2}^{B_2})$.

Observación: El recíproco no siempre es cierto, ie. $\sigma(A) = \sigma(B) \not\Rightarrow A \sim B$

En efecto, consideremos $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se verifica que

$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = p_B(\lambda)$, y así se deduce que $\sigma(A) = \sigma(B)$. Si supusiéramos que $A \sim B$, entonces $\exists P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular, tal que

$A = P^{-1}BP = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$, lo que es contradictorio. En consecuencia, $A \not\sim B$.



Diagonalización

- ① Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es diagonalizable si existe una base de V constituida por vectores propios de T .
- ② Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$ formada por vectores propios de A .

OBSERVACIÓN: Si V es de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$, y $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable, con $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V de vectores propios de T . Considerando que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, (λ_j, v_j) es un autopar de T , resulta

$$\begin{aligned}[T]_B^B &= \left([T(v_1)]_B \mid [T(v_2)]_B \mid \cdots \mid [T(v_n)]_B \right) = \left([\lambda_1 v_1]_B \mid [\lambda_2 v_2]_B \mid \cdots \mid [\lambda_n v_n]_B \right) \\ &= \left(\lambda_1 [v_1]_B \mid \lambda_2 [v_2]_B \mid \cdots \mid \lambda_n [v_n]_B \right) = \left(\lambda_1 e_1 \mid \lambda_2 e_2 \mid \cdots \mid \lambda_n e_n \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Proposición: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si es similar a una matriz diagonal.

Demostración:

(\Rightarrow) **HIPÓTESIS:** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable. Esto significa que $\exists B := \{v_1, \dots, v_n\}$

base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$ de vectores propios de A . Esto a su vez implica que

$\forall j \in \{1, \dots, n\} : (\exists \lambda_j \in \mathbb{K} \text{ tal que } A v_j = \lambda_j v_j)$. De aquí se infiere que

$\sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Definimos ahora la matriz diagonal

$D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y la matriz no singular $P := (v_1 | \dots | v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Recordando **propiedades del álgebra matricial**, se tiene

$$AP = A(v_1 | \dots | v_n) = (Av_1 | \dots | Av_n) = (\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n) = PD,$$

y en vista que P es no singular, se desprende $D = P^{-1}AP$, i.e. $D \sim A$, y se concluye.

(\Leftarrow) **HIPÓTESIS:** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es similar a una matriz diagonal. Sea

$D := \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A \sim D$, o equivalentemente $D \sim A$. Esto implica que $\exists Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular, tal que $D = Q^{-1}AQ$. De esta forma se tiene que $AQ = QD$. Expresando $Q = (w_1 | \dots | w_n)$, se observa que $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq \mathbb{K}^{n \times 1}$ es l.i. (¿Por qué?). Luego, invocando una vez más a las **propiedades del álgebra matricial**, resulta

$$(Aw_1 | \dots | Aw_n) = AQ = (w_1 | \dots | w_n)D = (\alpha_1 w_1 | \dots | \alpha_n w_n).$$

Finalmente, se deduce (por la igualdad de matrices): $\forall j \in \{1, \dots, n\} : Aw_j = \alpha_j w_j$. De esta manera se deduce que $B := \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$ conformada por vectores propios de A . Por tanto, A es diagonalizable.



Observación: La demostración del resultado anterior muestra que cuando $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable, la matriz que la diagonaliza $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que sus columnas son los vectores propios de A que constituyen la base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$, i.e. $P := (v_1 | \cdots | v_n)$. En tal caso, $P^{-1}AP = D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable, con $A = R^{-1}DR$, siendo $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular. Entonces se cumple:

$$\textcircled{1} \quad \det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

- \textcircled{2} Si A es no singular, entonces $A^{-1} = R D^{-1} R^{-1}$ (i.e. A^{-1} es diagonalizable).
- \textcircled{3} $\forall m \in \mathbb{N} : A^m = R^{-1}D^mR$, siendo $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\textcircled{4} \quad \text{tr}(A) := \sum_{j=1}^n a_{jj} = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y $\mu \in \sigma(A)$. Luego,

- \textcircled{1} la multiplicidad algebraica de μ es la multiplicidad de μ como raíz de p_A ,
- \textcircled{2} la multiplicidad geométrica de μ es la dimensión del espacio propio S_μ .

Observación: Las definiciones de multiplicidad algebraica y geométrica se pueden adaptar para valores propios de $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita.



Teorema: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \sigma(T)$ (o bien, sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\mu \in \sigma(A)$), de multiplicidad algebraica y geométrica m y d , respectivamente. Entonces, se verifica $1 \leq d \leq m$.

Demostración: Sea $\mu \in \sigma(T)$ tal que $\dim(S_\mu) = d \geq 1$ (¿Por qué?). Esto garantiza la existencia de al menos una base $B_\mu := \{v_1, \dots, v_d\}$ de S_μ el cual es subespacio de V de dimensión n . Sabemos que esta base se puede completar hasta obtener una base de V , la cual denotaremos por $B := \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$. Ahora analizamos la matriz asociada a T respecto de la base B .

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \mu I_d & L \\ \Theta & M \end{pmatrix}, \quad L \in \mathcal{M}_{d \times (n-d)}(\mathbb{K}), \Theta \in \mathcal{M}_{(n-d) \times d}(\mathbb{K}), M \in \mathcal{M}_{(n-d) \times (n-d)}(\mathbb{K}).$$

Como $\mu \in \sigma(T)$, entonces μ es raíz del polinomio característico de $[T]_B^B$, el cual es

$$\begin{aligned} p_{[T]_B^B}(\lambda) &:= \det([T]_B^B - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} (\mu - \lambda) I_d & L \\ \Theta & M - \lambda I_{n-d} \end{pmatrix} \\ &= (\mu - \lambda)^d \underbrace{\det(M - \lambda I_{n-d})}_{=: q(\lambda)} = (\mu - \lambda)^d q(\lambda), \quad q \in \mathcal{P}_{n-d}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

De aquí se deduce que μ es raíz de $p_{[T]_B^B}$ con multiplicidad $m \geq d$. Será de multiplicidad d si μ no es raíz de q , de multiplicidad $> d$ si μ es raíz de q .

Para el caso matricial, definir $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n \times 1})$ por $\forall v \in \mathbb{K}^{n \times 1} : T(v) := Av$, y seguir la demostración descrita.



Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ ($m \in \{1, \dots, n\}$) es un conjunto de valores propios distintos de A y $\{v_j\}_{j=1}^m$ es un conjunto de vectores propios de A , tal que $\forall j \in \{1, \dots, m\} : A v_j = \lambda_j v_j$, entonces $\{v_j\}_{j=1}^m$ es l.i.

Demostración (por reducción al absurdo): Supongamos que la TESIS es falsa, i.e. $\{v_j\}_{j=1}^m$ es linealmente dependiente. Sea $r \in \mathbb{N}$ el primer índice tal que v_{r+1} es el primer vector que depende linealmente de los que le preceden: v_1, \dots, v_r , los cuales son linealmente independientes. Esto significa que $\exists \{\alpha_j\}_{j=1}^r \subseteq \mathbb{K}$ tal que:

$$v_{r+1} = \sum_{j=1}^r \alpha_j v_j, \quad (1)$$

$$\Rightarrow \lambda_{r+1} v_{r+1} = A v_{r+1} = A \sum_{j=1}^r \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^r \alpha_j A v_j = \sum_{j=1}^r \alpha_j \lambda_j v_j. \quad (2)$$

Si $\lambda_{r+1} = 0$, sucede que $\forall j \in \{1, \dots, r\} : \lambda_j \neq 0$, y así, de (2) se desprende que $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \dots, r\}$, con lo que de (1) se deduce que $v_{r+1} = \theta$ ($\rightarrow \leftarrow$).

Si $\lambda_{r+1} \neq 0$, de $\lambda_{r+1} (1) - (2)$, se tiene que $\sum_{j=1}^r \alpha_j (\lambda_{r+1} - \lambda_j) v_j = \theta$. Como

$\forall j \in \{1, \dots, r\} : \lambda_{r+1} \neq \lambda_j$, se infiere que $\forall j \in \{1, \dots, r\} : \alpha_j = 0$, con lo que de (1) se deduce que $v_{r+1} = \theta$ ($\rightarrow \leftarrow$).

En consecuencia, la TESIS es verdadera, y se concluye la demostración.

Observación: La proposición también es cierta para $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n . Además: $\sum_{j=1}^r S_{\lambda_j} = \bigoplus_{j=1}^r S_{\lambda_j}$.



Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Demostración: Sea $\sigma(A) := \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ el espectro de A , con todos sus elementos distintos. Esto induce la existencia de n vectores propios, cada uno de ellos asociado a cada valor propio. Invocando la [proposición anterior](#), este conjunto de n vectores propios es l.i., por tanto una base de $\mathbb{K}^{n \times 1}$. En consecuencia, A es diagonalizable.

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ distintos. Entonces $S_\lambda \cap S_\mu = \{\theta\}$.

Demostración: Sea $v \in S_\lambda \cap S_\mu$. Tenemos así

$$\lambda v = A v = \mu v \quad \Rightarrow \quad (\underbrace{\lambda - \mu}_{\neq 0}) v = \theta \quad \Rightarrow \quad v = \theta,$$

y se concluye el resultado.

Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que $|\sigma(A)| = n$ (i.e. el espectro de A tiene n elementos distintos). Entonces $\forall \lambda \in \sigma(A) : \dim(S_\lambda) = 1$.

Demostración: En este caso, cada valor propio de A es de multiplicidad algebraica 1. Luego, aplicando el Teorema (página 12), se deduce que la multiplicidad geométrica de cada espacio propio también es 1.



Corolario: Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ (o $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si los valores propios distintos que tiene $T \in \mathcal{L}(V)$ (o A) son $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$, y las multiplicidades geométricas de éstos se denotan por $d_j := \dim(S_{\lambda_j})$, $j \in \{1, \dots, r\}$, entonces el número máximo de vectores propios linealmente independientes que tiene T (o A), es $d_1 + d_2 + \dots + d_r$. Además, si m_j indica la multiplicidad algebraica de λ_j , $j \in \{1, \dots, r\}$, se verifica

$$r = \sum_{j=1}^r 1 \leq \sum_{j=1}^r d_j \leq \sum_{j=1}^r m_j \leq n.$$

Teorema: Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, (o $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si los valores propios distintos de $T \in \mathcal{L}(V)$ (o de A) son $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$, y para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, m_j y d_j representan su multiplicidad algebraica y geométrica, respectivamente, entonces T (o A) es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\sum_{j=1}^r m_j = n \quad \wedge \quad \forall j \in \{1, \dots, r\} : d_j = m_j.$$

PROOF (PARA EL CASO MATRICIAL):

(\Rightarrow) Como A es diagonalizable, entonces $n = \sum_{j=1}^r d_j \leq \sum_{j=1}^r m_j \leq n$ (¿POR QUÉ?), con

lo cual $\sum_{j=1}^r m_j = n = \sum_{j=1}^r d_j$. Así, $\sum_{j=1}^r (\underbrace{m_j - d_j}_{\geq 0}) = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, r\} : d_j = m_j$.

(\Leftarrow) ES INMEDIATO. SE DEJA COMO EJERCICIO AL LECTOR.



COROLARIO: Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, (o $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si los valores propios distintos de $T \in \mathcal{L}(V)$ (o de A) son $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$, y para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, m_j y d_j representan su multiplicidad algebraica y geométrica, respectivamente, entonces T (o A) es diagonalizable si y sólo si $\sum_{j=1}^r d_j = n$.

PROOF (PARA EL CASO MATRICIAL):

(\Rightarrow) Como A es diagonalizable, entonces $\sum_{j=1}^r d_j = n$.

(\Leftarrow) Como $\sum_{j=1}^r d_j = n$, entonces resulta $n = \sum_{j=1}^r d_j \leq \sum_{j=1}^r m_j \leq n$ (*¿POR QUÉ?*), con lo cual $\sum_{j=1}^r m_j = n = \sum_{j=1}^r d_j$. Así, $\sum_{j=1}^r (\underbrace{m_j - d_j}_{\geq 0}) = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, r\} : d_j = m_j$.

Luego, invocando el **TEOREMA PREVIO**, se concluye que A es diagonalizable. \square

Ejemplo: Consideremos la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ① Determine los valores propios de A .
- ② Determine los espacios propios de A , según los valores que puede tomar α .

