Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 11: Números Complejos

Este listado de problemas se ha dividido en tres secciones: problemas básicos, problemas intermedios y problemas avanzados.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Exprese en forma polar los siguientes números complejos:

   (a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$,
   (b) $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$,
   (c) $z_3 = 1 - i$,
   (d) $z_4 = (\sqrt{3} - i)(1 + i)$,
   (e) $z_5 = \dfrac{(1-i)^2}{4+i}$.
   (f) $-3\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
   (g) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Represente en el plano de Argand los siguientes números complejos.

   (a) $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
   (b) $5\text{cis}\,(560°)$.
   (c) $3\text{cis}\,(-210°)$.
   (d) $4\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   (e) $\text{cis}\,(90°)$.

   De cada uno de ellos determine argumento principal y, sin cambiarlos a forma binomial, escriba sus inversos aditivo y multiplicativo y conjugado, también en forma polar.

   Escríbalos en forma binomial.

2. Problemas intermedios

1. Considere el siguiente número complejo $z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})^{-1}$.

   (a) Exprese z en forma binomial.
   (b) Pruebe que $z^4 = z$.
   (c) Determine las raíces cuartas de z.

2. Resuelva las ecuaciones en $\mathbb{C}$.

   (a) $z^2 - 1 + 2i = 0$.
   (b) $3iz^2 + 2\sqrt{6}iz - 2 = 0$.
   (c) $(1 + z)^5 = z^5$.
   (d) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.
   (e) $5z^2 + 2z + 10 = 0$.
   (f) $z^8 - \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = 0$.
   (g) $\left(1 + i^{-8}\right) z^4 = -2 + 2\,i$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

   (a) $z = \overline{z}$,

   (b) $z + i = 2 + i + \overline{2i}$,

   (c) $z^2 = 3 - 4i$,

   (d) $z^2 = 2z - 1$.

4. **(A)** Sea $\mathcal{C}$ el subconjunto de los números complejos cuyo argumento principal es $\frac{\pi}{6}$, es decir:

$$\mathcal{C} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \text{Arg}(w) = \frac{\pi}{6} \right\}$$

   (a) Represente el conjunto $\mathcal{C}$ en plano de Argand.

   (b) Sea z un número complejo en $\mathcal{C}$, determine $\text{Arg}(-z)$ y $\text{Arg}(\overline{z})$.

   (c) Escriba $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$ en forma polar.

   (d) Sea

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathcal{C} \ : \ \left| z \frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}} \right| < 2^{10} \right\}.$$

   Represente $\mathcal{D}$ en plano de Argand.

5. **(A)** Sea $a = \text{cis}(\frac{\pi}{6})$.

   (a) Calcule el número complejo $z = (1 + \sqrt{3}i)^5 a^{17}$.

   (b) Pruebe que $\text{Re}(z) = 0$.

   (c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $w^5 = 32$.

6. Encuentre todos los valores posibles de $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6(1+i) = 1 - i$.

7. Dado $z = 2(1 - i\sqrt{3})$, calcule las raíces cuartas de z^3.

8. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\text{Re}(z + 1 - i) \leq 2 \ \text{ y } \ z^4 - 81 = 0.$$

9. Calcule $\overline{\left(\frac{7+i}{3+4i}\right)}^{43}$.

10. Calcule:

   (a) raíces sextas de 8.

   (b) raíces sextas de $8\text{cis}\,(60°)$.

   (c) raíces quintas de i.

   (d) raíces sextas de $16\text{cis}\,(90°)$.

   (e) **(A)** raíces novenas de $1 + \sqrt{3}\,i$.

11. **(A)** Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

12. Represente los siguientes conjuntos de números complejos en plano de Argand.

   (a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re}(z) \geq 2\}$.

   (b) $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ -\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4}\right\}$.

   (c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$.

   (d) $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 2 \ \wedge \ \text{Arg}(z) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$.

13. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba los siguientes números en forma polar.

(a) $z_1 = \dfrac{1+\alpha\, i}{1-\alpha\, i}$.

(b) $z_2 = \dfrac{\alpha + i}{\alpha - i}$.

(c) $z_3 = \dfrac{-1+\alpha\, i}{-1-\alpha\, i}$.

(d) $z_4 = \overline{\left(\dfrac{-1+\alpha\, i}{-1-\alpha\, i}\right)}$.

(e) $z_5 = \overline{\left(\dfrac{\alpha + i}{\alpha - i}\right)}$.

3. Problemas avanzados

1. Determine
$$\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n},\ n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ par} .$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, determine la forma polar de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

3. Considere el número complejo $w = 1 + i \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   (a) Escriba w y $\overline{w}$ en forma polar.

   (b) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$w^n + \overline{w}^n = 2\left(\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right).$$

   Observación: Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ se cumple que $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

4. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R} - \{x \,:\, \cos(x) = 0\}$, se cumple la siguiente identidad:
$$\left(\frac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}\right)^n = \frac{1 + i\tan(n\theta)}{1 - i\tan(n\theta)}$$

   Indicación: Puede utilizar que para todo número natural n y todo $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple que
$$(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   (a) Si z es un complejo real mayor que cero, entonces cada raíz cuarta de z es un complejo real o un imaginario puro.

   (b) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y w es una raíz n-ésima, entonces $-w$ es raíz n-ésima de $-z$.

   (c) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y w es una raíz n-ésima, entonces $\overline{w}$ es raíz n-ésima de $\overline{z}$.

   (d) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ es imaginario puro, entonces una de las raíces cúbicas de z también es un número imaginario puro. Si $|z| = r$, la raíz cúbica de z que es imaginario puro tiene mismo argumento principal que z y su módulo es $\sqrt[3]{r}$.