Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº1: Lógica y Conjuntos
Clase N°5 - 19/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Negación de Cuantificadores

Recordemos que la característica fundamental de la negación de una proposición es que posee el valor de verdad contrario al de la proposición dada. Es por esta razón que estudiaremos las negaciones de los cuantificadores, para poder analizar el valor de verdad de las proposiciones que los contengan.

Ejemplos

Determine el valor de valor de verdad y la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $p : \Big(\forall x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\Big)\Big(3(x^2+1) \leq 2x^2+7\Big)$

(b) $q : \Big(\forall a \in \mathbb{N}\Big)\Big(2a+1 \in \mathbb{N} \vee a^2+a+1 < 0\Big)$

(c) $v : \Big(\exists! x \in \mathbb{R}\Big)\Big(x^2-6=0\Big)$

(d) $r : \Big(\exists y \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\}\Big)\Big(y < 2 \rightarrow 0 < y^3 < \frac{1}{8}\Big)$

(e) $s : \Big(\forall y \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists x \in \mathbb{R}\Big)\Big(yx^2-4x-2y=0\Big)$

Ejercicios

Determine el valor de valor de verdad y la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $p: \quad \Big(\forall x \in \mathbb{R}\Big)\Big(x < 3 \to x^2 < \frac{1}{9}\Big)$

(b) $q: \quad \Big(\exists! a \in \{1, 2, 3\}\Big)\Big(a - 2 = 2 \ \vee \ a + 2 > 3\Big)$

(c) $r: \quad \Big(\forall u \in \mathbb{R}^+\Big)\Big(\forall v \in \mathbb{R}_0^+\Big)\Big(\frac{1}{u+v} \leq \frac{1}{u} \ \wedge \ u + v \geq u\Big)$

(d) $s: \quad \Big(\forall m \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists n \in \mathbb{R}\Big)\Big((x-1)(y+2) \neq 0\Big)$

(e) $t: \quad \Big(\forall x \in \mathbb{N}\Big)\Big(\exists! y \in \mathbb{N}\Big)\Big(x + y = 2\Big)$

Teoremas y Demostraciones

Un **teorema** es cualquier proposición que se desprende de otra proposición o proposiciones dadas por supuestas o previamente demostradas. Así, un teorema es una proposición cuya veracidad requiere ser demostrada a partir de otras.

La estructura de un teorema puede ser la siguiente:

- **Implicancia Lógica:** $H \Rightarrow T$
- **Equivalencia Lógica:** $H \Leftrightarrow T$ $(H \Rightarrow T \wedge T \Rightarrow H\ )$

Ejercicios

Utilice alguna de las técnicas de demostración presentadas para demostrar los siguientes teoremas:

1. Sea a un número entero. Si a^2 es un número impar, entonces a también lo es.
2. Sean a y b dos números enteros. Si a y b son números pares, entonces el producto de estos también es par.
3. Sea a un número enteros. Si a^2 es un número par, entonces a es un número par.
4. Sea a un número entero. Si a es un número impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es un número impar
5. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $1 + (-1)^n(2n - 1)$ es múltiplo de 4.

Conjuntos

Definición

Un conjunto es una colección bien definida de objetos bien definidos a los que llamamos elementos del conjunto.

.

Ejercicios

Sean A, B, C y D cuatro conjuntos definidos por:

$$A = \{a - 1 : (a \in \mathbb{N}) \wedge (a + 2 = 3 \ \vee \ 5 \leq a \leq 9)\},$$

$$B = \left\{ \frac{b-1}{2} : b \in \mathbb{N} \wedge b \text{ impar} \wedge b \text{ potencia de 3 menor que 28} \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{(-1)^c}{c} : c \in \mathbb{N} \wedge c \in [-3, 4[\right\},$$

$$D = \left\{ d : (d \in \mathbb{N}) \wedge \left(d^2 \geq 4 \wedge d^2 < 37 \right) \right\}.$$

Describa por extensión los conjuntos anteriores y determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

(a) $(-1 \notin C \vee 6 \in D) \to 4 \in A$

(b) $\sim (4 \in A \wedge 4 \in B) \leftrightarrow -\frac{1}{3} \in C$

(c) todos los elementos de D son números pares,

(d) un elemento de B es un número primo,

(e) exactamente un elemento de A es un número compuesto.