UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION II: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 521218/525221

P1 1. Encuentre la función $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ que satisface: (i) $y(0) = 0$; (ii) Para todo $t \geq 0$,

$$y'(t) - \int_0^t y(t-\tau)\,\tau d\tau = \delta_2(t).$$

Solución: Recordando la definición del producto de convolución el problema se escribe:

$$y' + y * t = \delta(t-2), \quad y(0) = 0$$

y si $\hat{y}(s) = L[y](s)$ entonces la ecuación en el plano s se transforma en

$$s\,\hat{y}(s) - \hat{y}(s)\,\frac{1}{s^2} = \exp(-2s)\,.$$

Despejando $\hat{y}(s)$ llegamos a

$$\hat{y}(s) = \exp(-2s)\frac{s^2}{s^3-1} = \exp(-2s)\frac{s^2}{(s-1)(s^2+s+1)}.$$

[0.5 puntos]

De acuerdo al método de fracciones parciales existen constantes A, B y C tales que

$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B+Cs}{s^2+s+1}.$$

Luego

$$s^2 = A(s^2+s+1) + (B+Cs)(s-1).$$

Evaluando en $s = 1$ encontramos $A = 1/3$; de donde

$$\frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{3}s - \frac{1}{3} = Cs^2 + (B-C)s - B;$$

así que $C = 2/3$ y $B = 1/3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \exp(-2s)\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{3}\frac{1/2+s}{s^2+s+1}\right) \\
&= \exp(-2s)\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{3}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= e^{-2s}\left(\frac{1}{3}\mathcal{L}\left(e^{t}\right)(s)+\frac{2}{3}\mathcal{L}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)(s+1/2)\right)\\
&= e^{-2s}\left(\frac{1}{3}\mathcal{L}\left(e^{t}\right)(s)+\frac{2}{3}\mathcal{L}\left(e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)(s)\right).
\end{aligned}$$

Lo que implica **[0.5 puntos]**

$$y(t)=u_2(t)\left(\frac{1}{3}e^{t-2}+\frac{2}{3}e^{-t/2+1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\right)\right).$$

[0.5 puntos]

Nota:
Observar que también podemos realizar la Descomposición en Fracciones parciales de la siguiente forma:

$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+s+1)}=\frac{\mathcal{A}}{s-1}+\frac{\mathcal{B}(s+\frac{1}{2})+\mathcal{C}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Para determinar los coeficientes, denominaremos $X(s)$ a la función racional del lado izquierdo, y procedemos a realizar la *doble evaluación* de Heaviside[1].:

- Determinación de $\mathcal{A}$:

$$\left.\begin{array}{rcl}(s-1)X(s)|_{s\to 1} &=& \frac{1}{3}\\ (s-1)X(s)|_{s\to 1} &=& \mathcal{A}\end{array}\right\}\Longrightarrow \quad \mathcal{A}=\frac{1}{3}$$

- Determinación de $\mathcal{B}$:

$$\left.\begin{array}{rcl}sX(s)|_{s\to\infty} &=& 1\\ sX(s)|_{s\to\infty} &=& \mathcal{A}+\mathcal{B}\end{array}\right\}\Longrightarrow \quad \mathcal{B}=\frac{2}{3}$$

- Determinación de $\mathcal{C}$:

$$\left.\begin{array}{rcl}X(-\frac{1}{2}) &=& -\frac{2}{9}\\ X(-\frac{1}{2}) &=& \frac{-2}{3}\mathcal{A}+\frac{4}{3}\mathcal{C}\end{array}\right\}\Longrightarrow \quad \mathcal{C}=0$$

[1] En realidad el siguiente cálculo se ha ideado a partir de la primera Fórmula de Heaviside, también conocida como *Cover-up Method*, existen dos fórmulas descubiertas por este prolífico autodidacta inglés. Buscar *webgrafías* para conocer las ventajas y limitaciones, de los métodos de ayuda para el cálculo rápido de descomposición de fracciones parciales .

2. Calcule la transformada de Laplace de la función $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2 & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Solución:
Utilizando las funciones de Heaviside $U_1(t)$ y $U_2(t)$, es decir, la función escalón unitario desplazado en una y dos unidades a la derecha del origen, respectivamente, la función $f(t)$ se re-escribe como

$$f(t) = (t-1)^2 \left(U_1(t) - U_2(t) \right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f(t)\right)(s) &= \mathcal{L}\left((t-1)^2 \left(U_1(t) - U_2(t)\right)\right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left((t-1)^2 \left(U_1(t)\right)\right)(s) - \mathcal{L}\left((t-1)^2 \left(U_2(t)\right)\right)(s) \\ &= e^{-s}\mathcal{L}\left(t^2\right)(s) - e^{-2s}\mathcal{L}\left((t+1)^2\right)(s). \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(s) = e^{-s}\frac{2}{s^3} - e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

[**0,5 puntos**]

P2 Usando el método de los vectores propios determine la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) - x(t) & = & 6\,e^{-t} \\ y'(t) - 4x(t) \; - \; 3y(t) & = & t\,e^{-t} \end{cases}$$

Desarrollo: El sistema dado se puede escribir como

$$\dot{X}(t) \;=\; A\,X(t) \;+\; F(t) \qquad \text{donde}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ y } \; F(t) \;=\; \begin{pmatrix} 6 \; e^{-t} \\ t \; e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, se obtienen los valores propios:

$$\boxed{\lambda_1 = 5} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\lambda_2 = -1}.$$

Los espacios propios asociado, respectivamente son:

$$\begin{cases} S_{\lambda_1} & = \; \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = < \{(1,2)\} >; \\ S_{\lambda_2} & = \; \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = < \{(1,-1)\} >; \end{cases}$$

de donde se obtiene las soluciones, $X_1(t)$ y $X_2(t)$, como

$$\begin{cases} X_1(t) \;=\; e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ X_2(t) \;=\; e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Así, la solución general del sistema homogéneo, es

$$X_h(t) = A \;\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;+\; B \;\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

donde A y B son constantes arbitrarias. **[0.8 puntos]**

Ahora buscamos una solución particular, $X_p(t)$, para el sistema no homogéneo, con

$$X_p(t) \;=\; c_1(t)\; e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;+\; c_2(t)\; e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ deben satisfacer

$$\begin{cases} c_1'(t)\; e^{5t} + c_2'(t)\; e^{-t} & = & 6\; e^{-t} \\ 2c_1'(t)\; e^{5t} - c_2'(t)\; e^{-t} & = & t\; e^{-t}. \end{cases}$$

del cual se obtiene que

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1(t) & = & -\dfrac{1}{3}\, e^{-6t}\{(1+\dfrac{1}{36})+\dfrac{1}{6}t\} \\ c_2(t) & = & 4t-\dfrac{1}{6}t^2\,. \end{array}\right.$$

[0.8 puntos]

Ahora teniendo presente los valores anteriores de $c_1(t)$ y $c_2(t)$, la solución general del sistema dado, se puede escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{X(t)} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2\, e^{5t} & -\, e^{-t} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \right\}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. **[0.4 puntos]**

P3 1. Una masa de $3\,[kg]$ que cuelga de un resorte lo alarga en 60 $[cm]$ y desde esta posición de equilibrio la masa se desplaza hacia arriba en 20 $[cm]$, y desde esta nueva posición se suelta. Establecer la posición de la masa en cualquier tiempo (asuma que $g = 10[m/seg^2]$).

Solución

Como la masa de $3\,[kg]$ alarga en 60 $[cm]$, la constante del resorte es $k = 50$, donde se asume que la fuerza de gravedad $g = 10[m/seg^2]$.
Considerando el sistema coordenado inercial, donde $x(t)$ es dirigida hacia abajo, gracias a la segunda Ley de Newton inferimos:

$$3\ddot{x} + 50x = 0, \qquad x(0) = -0{,}2, \quad \dot{x}(0) = 0$$

es decir,

$$x(t) = -0{,}2\cos(\sqrt{\frac{50}{3}}t)$$

[0.5 puntos]

2. En un sistema industrial hay tres estanques, **A**, **B** y **C**, cada uno con capacidad de 300 litros. Inicialmente,

   - **A** contiene 100 litros de agua pura
   - **B** contiene 50 litros de mezcla de agua con sal (salmuera) al $0,3$ [kg/llitro]
   - **C** 30 litros de mezcla de salmuera al $0,2$ [Kg/litro]

   Al estanque **A** están entrando 20 litros por minuto de salmuera al $0,5$ [Kg/litro]. De la mezcla de **A** están pasando al **B** 6 litros por minuto, y de la de **B** al **C** 5 litros por minuto. Del **C** al **B** están pasando 2 litros por minuto, y del **B** al **A** 3 litros por minuto. Además, desde el **A** al **C** están pasando 4 litros por minuto. Hacia el *exterior* están saliendo 11 litros por minuto desde el **A** y 4 litros por minuto desde el **C**.

   a) Calcule los volúmenes de mezcla en **A**, **B**, y **C**, y determine cuál estanque rebalsa primero y en qué tiempo.

   Desarrollo:

   Las variaciones de volumen en cada tanque vienen dadas por :

   - $\begin{aligned} \Delta V_A &= (20+3)-(6+11+4) \\ &= 2 \end{aligned}$
   - $\Delta V_B = 0$
   - $\begin{aligned} \Delta V_C &= (5+4)-(2+4) \\ &= 3 \end{aligned}$

   De donde se obtiene que el volumen respectivamente en los tanques A, B y C es:

   $$\boxed{V_A(t) = 2t + 100} \quad \boxed{V_B(t) = 50} \quad \boxed{V_C(t) = 3t + 30}$$

   ¿ Qué tanque se llena primero ?

   Haciendo $300 = 2t_A + 100$ y $300 = 3t_C + 30$,
   se concluye que el Tanque C se llena primero, y lo hace a $t_C = 90$ minutos.
   [0.5 puntos]

b) Establezca además el PVI que modela este sistema, hasta el tiempo de rebalse determinado en la pregunta anterior. (`no se pide resolverlo`).

Desarrollo:

Sean $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ respectivamente, la cantidad de sal en el tanque A, B y C; entonces el problema viene modelado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 10 + \dfrac{3}{50}y(t) - \dfrac{6+11+4}{2t+100}x(t); \quad t \in [0,90] \\ \\ y'(t) = \dfrac{6}{2t+100}x(t) \; + \; \dfrac{2}{3t+30}z(t) - \dfrac{5+3}{50}y(t); \quad t \in [0,90] \\ \\ z'(t) = \dfrac{5}{50}y(t) + \dfrac{4}{2t+100}x(t) \; - \; \dfrac{2+4}{3t+30}z(t); \quad t \in [0,90] \\ \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0{,}3 \cdot 50, \quad z(0) = 0{,}2 \cdot 30 \end{cases}$$

Esto es, las cantidades de sal $x(t), \; y(t)$ y $z(t)$ para $0 \leq t <\leq 90$ satisfacen el sistema de ecuaciones lineales de coeficientes variables:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \\ \dot{y}(t) \\ \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{21}{2t+100} & \dfrac{3}{50} & \mathbf{0} \\ \dfrac{6}{2t+100} & -\dfrac{8}{50} & \dfrac{2}{3t+30} \\ \dfrac{4}{2t+100} & \dfrac{1}{10} & -\dfrac{6}{3t+30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \\ \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

y la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \\ y(0) \\ \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 15 \\ \\ 6 \end{pmatrix}$$

[**0.3 + 0.3 + 0.3 + 0.1 puntos**]

CMG/JMS/HMM/FPV/fpv.