UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Pauta Evaluación 3

1. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (1-\lambda)$.

   a) Pruebe que $\mathbb{R}^3 = Ker(A^2) \oplus Ker(A - I_3)$.

   b) Suponga que A no es diagonalizable. Determine en este caso todas las matrices de Jordan que pueden ser similares a A.

   c) Muestre que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \{A^n, A^{n+1}\}$ es linealmente dependiente.

Soln:

a) Las raíces de $p_A(\lambda)$ son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ con multiplicidades algebraicas: $m_0 = 2$ y $m_1 = 1$, respectivamente. Luego, $\sigma(A) = \{0, 1\}$.

Por otro lado, sea para todo $j \in \mathbb{N}$, $E_j(0) = Ker((A - 0I_3)^j) = Ker(A^j)$ y $E_j(1) = Ker((A - I_3)^j)$. Por Teorema de Descomposición de Jordan, sabemos que existen $j_0, j_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathbb{R}^3 = E_{j_0}(0) \oplus E_{j_1}(1),$$

donde $\forall j \geq j_0,\ E_j(0) = E_{j_0}(0)$, $\forall j \geq j_1,\ E_j(1) = E_{j_1}(1)$, $dim(E_{j_0}(0)) = m_0 = 2$ y $dim(E_{j_1}(1)) = m_1 = 1$. Como $j_0 \leq m_0 = 2$, entonces $j_0 \in \{1, 2\}$. Si $j_0 = 1$, entonces $dim(E_1(0)) = 2 = dim(E_2(0)) = dim(Ker(A^2)) = 2$. Si $j_0 = 2$, entonces $1 = dim(E_1(0)) < dim(E_2(0)) = 2$. Luego, en ambos casos se tiene que:

$$dim(E_2(0) = dim(Ker(A^2)) = 2.$$

Análogamente, como $1 \leq dim(E_1(1)) \leq m_1 = 1$, se concluye que $dim(E_1(1)) = 1$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbb{R}^3 = Ker(A^2) \oplus Ker(A - I_3).$$

b) Notar que A no es diagonalizable si y sólo si $E_1(0) = Ker(A) \subsetneq Ker(A^2) = E_2(0)$. Luego por Teorema de Descomposición de Jordan, en este caso todo vector propio v de A asociado a $\lambda = 0$ tiene un vector cola. Además, como $Ker((A - I_3)^2) = Ker(A - I_3)$, entonces todo vector propio de A asociado a $\lambda = 1$ no tiene vector cola. Luego las matrices de Jordan posibles similares a A, cuando A no es diagonalizable, son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vee \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Por teorema de Cayley-Hamilton, $p_A(A) = A^2(A - I) = \theta \iff A^3 - A^2 = \theta \iff A^3 = A^2$. Luego, por indución se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A^{n+1} = A^n = A^2 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \{A^n, A^{n+1}\}$ es l.d.

2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una función bilineal simétrica.

   a) Muestre que si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V tal que $\forall i = 1, 2, 3,\ f(v_i, v_i) = 0$, entonces no necesariamente f es degenerada.

   b) Suponga que $\exists v \in V$ no nulo tal que $f(v, v) = 0$. Determine en este caso si existe B' base de V tal que la matriz representante de f con respecto a B' sea:

$$A_{f,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soln:

   a) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V tal que $\forall i = 1, 2, 3,\ f(v_i, v_i) = 0$. Leugo, la matriz representante de f con respecto a B es:

$$A_{f,B} = \begin{pmatrix} 0 & f(v_1, v_2) & f(v_1, v_3) \\ f(v_2, v_1) & 0 & f(v_2, v_3) \\ f(v_3, v_1) & f(v_3, v_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

   Como f es simétrica, es decir $A_{f,B}$ es simétrica, entonces $Det(A_{f,B}) = 2f(v_1, v_2)f(v_2, v_3)f(v_3, v_1)$. Así, f es degenerada si y sólo si $f(v_1, v_2)f(v_2, v_3)f(v_3, v_1) = 0$. De aquí, si por ejemplo: $f(v_1, v_2) \neq 0$, $f(v_2, v_3) \neq 0$ y $f(v_3, v_1) \neq 0$, entonces f es no degenerada.

   b) Notar que $A_{f,B'}$ es definida positiva. Luego, $\forall x \in \mathbb{R}^3, x \neq \theta : x^t A_{f,B'} x > 0$. De aquí, como $[v]_{B'} \neq \theta$, entonces $f(v, v) = [v]_{B'}^t A_{f,B'} [v]_{B'} > 0$, lo cual es una contradicción.

3. Dada una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define la función $f_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2,\ f_q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

   a) Pruebe que la función f_q es bilineal y simétrica.

   b) Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2.$$

   Muestre que f_q no es un producto interior en $\mathbb{R}^2$, y determine el lugar geométrico de la cónica de ecuación: $q(x, y) = 1$.

Soln:

   a) Notar primero que:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2,\ f_q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)) = \frac{1}{2}(q(v + u) - q(v) - q(u)) = f_q(v, u).$$

   Por lo tanto, f_q es simétrica.
   Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, entonces $\exists A \in M_2(\mathbb{R})$ simétrica tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = x^t A x = \langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Así, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$:

$$f_q(u,v) = \frac{1}{2}(\langle u+v, A(u+v)\rangle_{\mathbb{R}^2} - \langle u, Au\rangle_{\mathbb{R}^2} - \langle v, Av\rangle_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{2}(\langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^2} + \langle v, Au\rangle_{\mathbb{R}^2}).$$

Como A es simétrica, entonces $\langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle v, Au\rangle_{\mathbb{R}^2}$. De aquí, se tiene que:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \ f_q(u,v) = \langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^2} = u^t Av.$$

Luego, $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$f_q(\alpha u + v, w) = \langle \alpha u + v, Aw\rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha\langle u, Aw\rangle_{\mathbb{R}^2} + \langle v, Aw\rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha f_q(u,w) + f_q(v,w).$$

Análogamente y dado que f_q es simétrica, entonces se tiene que $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$f_q(w, \alpha u + v) = \alpha f_q(w,u) + f_q(w,v).$$

Por lo tanto, f_q es una forma bilineal simétrica.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz simétrica. Luego, se tiene que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ q(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2 = (x,y)^t A(x,y).$$

Así, $\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f_q((x,y),(a,b)) = (x,y)^t A(a,b)$. Como $Det(A) = -1 < 0$, entonces A no es definida positiva y así f_q no es producto interior en $\mathbb{R}^2$.
Por último, el polinomio característico de A es:

$$p_A(\lambda) = Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

De aquí, $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 + \sqrt{5}\}$. Luego, $\exists P \in M_2(\mathbb{R})$ invertible tal que:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot P^t.$$

Haciendo el cambio de variable: $y = P^t x$, se tiene que $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$q(x_1,x_2) = x^t Ax = x^t P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot P^t x = y^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2,$$

donde $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, la cónica de ecuación: $q(x_1,x_2) = 1$ es equivalente a la cónica: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ en ejes rotados según P, la que corresponde a una hipérbola pues $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$.