UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2 - Análisis $\mathbb{R}$eal I

Katiusca Cordero[1]
Brayan Sandoval[2]

Atención: A una función $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la llamaremos ψ-continua en el punto $\hat{x} \in X$ si, para $k < g(\hat{x})$, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > k$ si $d_X(x, \hat{x}) < \delta$.

1. *(10 puntos)* Dados los puntos $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^k$ con $k \in \mathbb{N}$, para $r > 0$ sea $\Omega_r := \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_r[p_i]$ y sean $\Psi : \Omega_r \to \mathbb{R}$ una función continua y $\Phi : \mho_r \to \mathbb{R}$ una función, donde $\mho_r$ es el recorrido (imagen) de la función Ψ.

a) Demuestre que si para cualquier conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}$ se cumple que $\Phi^{-1}(C^c)$ es un conjunto abierto, entonces Ψ y Φ son uniformemente continuas.

Demostración. En primer lugar notemos que el conjunto Ω_r es compacto, pues es cerrado y acotado, esto se deduce de notar que Ω_r es la unión finita de bolas cerradas y acotadas. Así, por teorema (Clase 20 pagina 14) como Ω_r es compacto y dado que Ψ es continua, se tiene que Ψ es uniformemente continua. Por otro lado, sea C un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ arbitrario, entonces $V := C^c \subset \mathbb{R}$ es abierto, por hipótesis se tiene que $\Phi^{-1}(V)$ es un conjunto abierto, esto es equivalente a decir que Φ es continua (Clase 19 pagina 9). Para demostrar que Ψ es uniformemente continua veamos que $\mho_r = \Psi(\Omega_r)$ es compacto, en efecto, por teorema visto en clases (Clase 20 pagina 6) se sabe que si una función es continua y su dominio es compacto entonces, su recorrido es un conjunto compacto. Así, se tiene que Φ es continua y además $\mho_r$ es compacto lo cual por teorema implica que Φ es uniformemente continua. ∎

b) Pruebe que $\exists m, M \in D$ tales que

$$\mathcal{F}(m) \leq \mathcal{F}(d) \leq \mathcal{F}(M), \ \ \forall d \in D$$

Donde $\mathcal{F} := \Phi \circ \Psi$ y $D := \mathrm{Dom}(\mathcal{F})$.

Demostración. Del apartado anterior se dedujo que las funciones $\Psi : \Omega_r \longrightarrow \mho_r$ y $\Phi : \mho_r \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces, por teorema (Clase 19 pagina 8) se tiene que $\mathcal{F} := \Phi \circ \Psi : \Omega_r \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Además, $D := \mathrm{Dom}(\mathcal{F}) = \Omega_r$ el cual es un conjunto compacto, entonces por teorema visto en clases (Clase 20 pagina 7) se tiene que $\mathcal{F}$ alcanza su máximo y su mínimo en D, es decir

$$\exists m, M \in D : \mathcal{F}(m) \leq \mathcal{F}(d) \leq \mathcal{F}(M), \ \ \forall d \in D$$

∎

[1] kcordero2018@udec.cl
[2] bsandoval2018@udec.cl

2. *(20 puntos)* Sean las sucesiones de números reales no negativos $\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left\{a_n^{(m)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $m \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, m\}, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_n^{(i)}} \text{ converge.}$$

Sugerencia: Demostrar mediante inducción matemática.

Demostración. Procederemos mediante inducción sobre m. Para el caso base $m = 1$, se debe mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n} \text{ converge.}$$

Sea la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $b_n := \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$, luego

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{n}\sqrt{a_n} = \frac{2}{2}\frac{1}{n}\sqrt{a_n} = \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{n}\sqrt{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + a_n\right)$$

Notemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + a_n\right)$ converge, pues por álgebra de series se sabe que la suma de series convergentes es una serie convergente. Así, por criterio de comparación se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$ converge.

Ahora, para el paso inductivo se supondrá que se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, m\}, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_n^{(i)}} \text{ converge.}$$

Veamos que ocurre en el caso $m + 1$. Debemos mostrar que

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, m+1\}, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m+1} a_n^{(i)}} \text{ converge.}$$

Sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m+1} a_n^{(i)}}$, luego

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m+1} a_k^{(i)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_k^{(i)} a_k^{(m+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_k^{(i)}}\sqrt{a_k^{(m+1)}}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m+1)}$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^{(m+1)} = 0$, entonces la sucesión $\{a_n^{(m+1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir

$$\exists L > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n^{(m+1)} \leq L \Longrightarrow \sqrt{a_n^{(m+1)}} \leq \sqrt{L} \ \text{ (Monotonía de la raíz)}$$

Luego

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_k^{(i)}}\sqrt{a_k^{(m+1)}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_k^{(i)}}\sqrt{L} = \sqrt{L}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m} a_k^{(i)}}}_{t_n}$$

Notemos que la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge por hipótesis de inducción, ya que es la sucesión de las sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m}a_n^{(i)}}$, entonces la sucesión es acotada, es decir

$$\exists R>0:\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{m}a_k^{(i)}}\leq R$$

Así, se tiene

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ S_n\leq\sqrt{L}R=:T$$

Por lo que la sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{m+1}a_n^{(i)}}$ es acotada y como la serie es de términos positivos, se tiene que por teorema la serie converge demostrando lo pedido.

■

b) Muestre un ejemplo en donde se cumpla que

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(i)}\text{ diverge para todo }i\in\{1,\ldots,4\},\text{ pero }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{4}a_n^{(i)}}\text{ converge.}$$

Demostración. Sea $a_n^{(i)}:=\frac{i}{n}$ con $i\in\{1,2,3,4\}$ y $n\in\mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Notar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, entonces

$$i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ diverge para todo }i\in\{1,2,3,4\}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4!}{n^4}}=2\sqrt{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Como $p=3>1$, se tiene por teorema que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ converge, entonces

$$2\sqrt{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\text{ converge}$$

■

c) Muestre un ejemplo en donde se cumpla que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} \text{ converge para todo } i \in \{1, \ldots, 3\}, \text{ pero } \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\prod_{i=1}^{3} a_n^{(i)}} \text{ diverge.}$$

Demostración. Sea $a_n^{(i)} = \frac{i}{n^{4/3}}$ con $i \in \{1,2,3\}$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n^{4/3}} = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

Como $p = 4/3 > 1$, se tiene por teorema que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ converge, entonces

$$i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \text{ converge para todo } i \in \{1,2,3\}$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt{\prod_{i=1}^{3} \frac{i}{n^{4/3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6}}{n} = \sqrt{6} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{diverge}} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6}}{n} \text{ diverge}$$

■

3. *(30 Puntos)* Pruebe que $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es ψ-continua en $\hat{x} \in X$ si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ se cumple que $g(\hat{x}) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} g(x_n)$.

Demostración. Antes de empezar con la demostración notemos que si $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es ψ-continua en $\hat{x} \in X$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $g(\hat{x}) - \varepsilon < g(x)$ si $d_X(x, \hat{x}) < \delta$. Para mostrar esto basta definir $k = g(\hat{x}) - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario y aplicar la definición de ψ-continuidad en un punto.

$\Longrightarrow$) Supongamos la función $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es ψ-continua en $\hat{x} \in X$, además sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, como g es ψ-continua en $\hat{x} \in X$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta_N > 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ donde $g(x_n) > g(\hat{x}) - \varepsilon$ si $d_X(x_n, \hat{x}) < \delta_N$, de lo anterior se deduce que $g(\hat{x}) - \varepsilon$ es una cota inferior del conjunto $\{n \geq N : g(x_n)\}$ entonces

$$g(\hat{x}) - \varepsilon \leq \inf_{n\geq N} g(x_n) \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} (g(\hat{x}) - \varepsilon) \leq \lim_{N\to\infty} \left(\inf_{n\geq N} g(x_n) \right) \iff g(\hat{x}) - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$$

Como la desigualdad anterior se vale para todo $\varepsilon > 0$, se deduce

$$g(\hat{x}) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$$

$\Longleftarrow$) Por reducción al absurdo. Suponga que la función $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ no es $\psi-$continua en $\hat{x} \in X$. Notar que si g no es $\psi-$continua en $\hat{x} \in X$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0, \exists x \in \mathcal{B}_\delta(\hat{x}) \cap X : g(x) < g(\hat{x}) - \varepsilon$, en particular, para $\delta = 1/n$, se tiene que existe un $x_n \in \mathcal{B}_{1/n}(\hat{x}) \cap X : g(x_n) < g(\hat{x}) - \varepsilon$, es decir se tiene una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $\hat{x}$ y una sucesión $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual esta acotada por $g(\hat{x}) - \varepsilon$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} g(x_n) \leq g(\hat{x}) - \varepsilon < g(\hat{x}) \quad \longrightarrow\!\longleftarrow$$

La contradicción surge de suponer que la función g no es ψ-continua, entonces se tiene que la función g es ψ-continua. ■