Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Certamen 2 — jueves 18 de junio de 2009

Pauta de evaluación

Soluciones sugeridas

Problema 1 (10 puntos)**.** Calcular la integral de línea

$$\int_K \bigl((2xyz + \sin x)\,\mathrm{d}x + x^2 z\,\mathrm{d}y + x^2 y\,\mathrm{d}z\bigr),$$

donde la curva K está dada por la parametrización $(f, [0,\pi])$ con $\vec{f}(t) = \{\cos^7 t, \sin^5 t, t^4\}$.

Solución sugerida. Las derivadas parciales del campo vectorial

$$\vec{V}(x,y,z) = \{P,Q,R\}, \quad P = 2xyz + \sin x, \quad Q = x^2 z, \quad R = x^2 y$$

son

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial R}{\partial y} = x^2.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Entonces se cumplen las condiciones de integrabilidad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

por lo tanto el campo vectorial $\vec{V}$ posee un potencial φ,

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

es decir, existe una función $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{V}(x,y,z) = \operatorname{grad}\varphi(x,y,z)$. Se puede verificar facilmente que la siguiente función es un potencial en el presente caso:

$$\varphi(x,y,z) = x^2 yz - \cos x.$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Entonces, según el Teorema 6.15, la integral deseada es independiente del camino,

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

por lo tanto

$$\int_K \big((2xyz + \sin x)\,\mathrm{d}x + x^2 z\,\mathrm{d}y + x^2 y\,\mathrm{d}z\big)$$
$$= \varphi\big(\vec{f}(\pi)\big) - \varphi\big(\vec{f}(0)\big) = \varphi(-1, 0, \pi^4) - \varphi(1, 0, 0) = 0 - \cos(-1) - 0 + \cos 1 = 0.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Problema 2 (10 puntos)**.** Calcular la integral de línea

$$\int_C \big((y + z)\,\mathrm{d}x + (x + z)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z\big),$$

donde C es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ con el plano $y = z$.

Solución sugerida (Versión 1). La curva C está descrita por los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad y = z.$$

La podemos parametrizar por

$$x = \sin t, \quad y = 1 + \cos t, \quad z = y = 1 + \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Así tenemos que evaluar la siguiente integral:

$$\int_C \big((y + z)\,\mathrm{d}x + (x + z)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z\big)$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\big(y(t) + z(t)\big)x'(t) + \big(x(t) + z(t)\big)y'(t) + \big(x(t) + y(t)\big)z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \big((1 + \cos t + 1 + \cos t)\cos t + (\sin t + 1 + \cos t)(-\sin t)$$
$$+ (\sin t + 1 + \cos t)(-\sin t)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\cos^2 t - \sin^2 t - \sin t - \sin t\cos t - \sin^2 t - \sin t - \sin t - \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - 2\sin t - 2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(2\cos t + 2\cos^2 t - 2\sin t - \sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$\boxed{\textbf{8 puntos}}$

Solución sugerida (Versión 2). El campo vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = \{y + z, x + z, x + y\}$$

satisface $\operatorname{rot}\vec{V} = 0$.

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Dado que la curva C es cerrada, podemos escribir $C = \partial S$, donde S es un trozo de superficie con un vector normal $\vec{n}$, y podemos aplicar el Teorema de Stokes para concluir que

$$\int_C \big((y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = \iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

$\boxed{\textbf{7 puntos}}$

Problema 3 (10 puntos)**.** Calcular la integral de superficie

$$\iint_S xyz\,\mathrm{d}\sigma,$$

donde S es parte de $x^2 + z^2 = 4$ en el primer octante entre $y = 0$ e $y = 1$.

Solución sugerida. Utilizando coordenadas cilíndricas, podemos parametrizar la superficie como

$$x = 2\cos u, \quad z = 2\sin u, \quad 0 \le u \le \pi/2; \quad y = v, \quad 0 \le v \le 1,$$

es decir, en forma vectorial,

$$\vec{f}(u,v) = \{2\cos u, 2\sin u, v), \quad D = \big\{(u,v)\,|\,0 \le u \le \pi/2,\ 0 \le v \le 1\big\}.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Aquí calculamos

$$\vec{f}_u = \{-2\sin u, 2\cos u, 0\}, \quad \vec{f}_v = \{0,0,1\}, \quad \vec{f}_u \times \vec{f}_v = \{2\cos u, 2\sin u, 0\},$$
$$\|\vec{f}_u \times \vec{f}_v\| = \sqrt{4(\cos^2 u + \sin^2 u)} = 2.$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

Ya estamos preparados para poder integrar:

$$\begin{aligned}\iint_S xyz\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_D (2\cos u)(2\sin u)v\cdot 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^1 v\cos u\sin u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 8\int_0^{\pi/2}\cos u\sin u\underbrace{\int_0^1 v\,\mathrm{d}v}_{=1/2}\,\mathrm{d}u\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2}\sin(2u)\,\mathrm{d}u = 2.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Problema 4 (10 puntos)**.** Usando el Teorema Integral de Green determinar el trabajo que realiza la fuerza

$$\vec{F}(x,y) = \big\{2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy), -x^3\sin(xy)\big\}$$

para trasladar una partícula desde el origen hasta el punto $(\pi, 0)$ a lo largo de la curva $\Gamma : y = 1 - |\cos x|$.

Solución sugerida. El Teorema de Green nos entrega que

$$\int_{\Gamma} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_{R} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Para poder aplicar el Teorema de Green, calculamos para las funciones

$$Q(x,y) = -x^3 \sin(x,y), \quad P(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -\big(3x^2\sin(xy) + x^3 y\cos(xy)\big) = -3x^2\sin(x,y) - x^3 y \cos(xy),\\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -2x^2\sin(xy) - x^2\big(\sin(xy) + yx\cos(xy)\big)\\
&= -2x^2\sin(xy) - x^2\sin(xy) - yx^3\cos(xy) = -3x^2\sin(xy) - x^3 y\cos(xy),
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

luego

$$\iint_{R} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

$\boxed{\textbf{6 puntos}}$

Problema 5 (10 puntos)**.** Sea

$$\vec{F}(x,y,z) = \big\{x^2 + \sin(yz), y - x\mathrm{e}^{-z}, z^2\big\}$$

y S la superficie que limita al sólido determinado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, y $z = 0$. Calcular el valor de la integral

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario exterior a S.

Solución sugerida. El problema cumple las hipótesis para aplicar el Teorema Integral de Gauss porque se trata de un sólido limitado por la superficie S determinado por las gráficas

$x^2 + y^2 = 4$ (cilindro circular recto de radio 2), $x + z = 2$ (plano perpendicular a (x, y)) y $z = 0$ (el plano (x, y)). Sea V el sólido limitado por S, entonces la fórmula de Gauss es

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Aquí obtenemos

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 1 + 2z.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Sea D el dominio de de V, es decir la proyección de V sobre el plano (x, y), por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}(x, y, z) \\
&= \iiint\limits_V (2x + 1 + 2z) \, \mathrm{d}(x, y, z) = \iint\limits_D \int_0^{2-x} (2x + 1 + 2z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D \big[2xz + z^2 + z\big]_{z=0}^{z=2-x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \iint\limits_D \big(2x(2 - x) + (2 - x)^2 + (2 - x)\big) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D (-x^2 - x + 6) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Utilizando coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2,$$

podemos seguir calculando:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \big(-r^2 \cos^2\theta - r \cos\theta + 6\big) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \big(-r^3 \cos^2\theta - r^2 \cos\theta + 6r\big) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 20\pi.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$