UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

GAJ/JRC/JAG/CMR/HPV. 18/04/2019. Tiempo: 40 minutos

Pauta corrección Test N° 2.
Cálculo III 521227

Dada la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2+x^5y}{|x|^5+|y|^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1. Decida si f es diferenciable en $(0,0)$.
2. Decida si f es diferenciable en $(1,-1)$. En caso afirmativo, encuentre la aproximación afín de f en una vecindad del punto $(1,-1)$.

Solución.-

1. Se calculan las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{0}{|h|^5}-0}{h}\right]=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{0}{|h|^3}-0}{h}\right]=0$$

(10 puntos)

Por definición, f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y}{\|(x,y)\|}=0$$

(5 puntos)

$$\text{o sea,}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2+x^5y}{\left(|x|^5+|y|^3\right)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Considerando el subconjunto (trayectoria)

$$B: y=x,\ \text{con } x>0$$

resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}}\frac{xy^2+x^5y}{\left(|x|^5+|y|^3\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+x^6}{x\left(x^5+x^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\frac{1+x^3}{1+x^2}=+\infty$$

lo que muestra que f **no es diferenciable** en $(0,0)$.

(10 puntos)

Alternativa: Usando el mismo subconjunto B anterior, se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^6}{x^5+x^3} = 1$$

lo que muestra que f **no es continua** en $(0,0)$ y por tanto no es diferenciable en este punto.

2. Para la diferenciabilidad en $(1,-1)$, se puede considerar la f definida en el abierto $A: x>0 \wedge y<0$ (cuarto cuadrante), por

$$f(x,y) = \frac{xy^2+x^5y}{x^5-y^3}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2+x^5y}{x^5-y^3}\right) = \frac{\left(y^2+5x^4y\right)\left(x^5-y^3\right)-5x^4\left(xy^2+x^5y\right)}{\left(x^5-y^3\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2+x^5y}{x^5-y^3}\right) = \frac{\left(2xy+x^5\right)\left(x^5-y^3\right)+3y^2\left(xy^2+x^5y\right)}{\left(x^5-y^3\right)^2}$$

son funciones continuas en el abierto A (cuociente de polinomios con denominador no nulo).

Siendo f de clase C^1 en el abierto A, ella es diferenciable en todo punto de A, en particular en $(1,-1)$.

(20 puntos)

La aproximación afín de f en una vecindad de $(1,-1)$ está definida por

$$g(x,y) = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1)$$

Evaluando $f(1,-1)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -\frac{1}{2}$

se obtiene

$$g(x,y) = -2(x-1) - \frac{1}{2}(y+1)$$ (15 puntos)