UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Evaluación 1

1. [**40 puntos**] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) un conjunto abierto, limitado, conexo y con frontera Lipchitz Γ que puede ser descompuesta de forma disjunta en Γ_D y Γ_N. Además definimos $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\sigma \geq 0$ (c.t.p.), $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$. Considere la siguiente EDP: *Encontrar* $\psi \in H^2(\Omega)$ *tal que*
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\epsilon \nabla \psi + \boldsymbol{\alpha}\, \psi) + \sigma \psi &= f\,, \quad \textit{en } \Omega \\ \psi &= 0\,, \quad \textit{en } \Gamma_D \\ -\epsilon \nabla \psi \cdot \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})\, \psi &= g\,, \quad \textit{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$
   a) Defina una formulación variacional para la EDP propuesta, a través de una forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y una forma lineal $F : V \to \mathbb{R}$ donde V es un espacio de Hilbert apropiado.
   b) Muestre que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $F : V \to \mathbb{R}$ son continuas. **Indicación:** considere que todos los paramétros pueden ser nulos excepto $\epsilon > 0$.
   c) Estudie la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ sobre $V \times V$ en las siguientes situaciones:
      1) $|\Gamma_N| = 0$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$;
      2) $|\Gamma_D| > 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ y $\langle (v\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\Gamma_N} > 0$ para todo, $v \in H^1(\Omega)$;
      3) $|\Gamma_D| = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}$ y existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\frac{1}{2}\,\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.);
      4) $|\Gamma_D| = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$, $\langle (v\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{n}, v \rangle_{\Gamma_N} < 0$ para todo, $v \in H^1(\Omega)$ y existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\sigma \geq \sigma_0$ (c.t.p.).
   d) Estudie existencia, unicidad y estabilidad de solución para la formulación variacional propuesta y una versión discreta definida sobre $V_h \leq V$;
   e) Enuncie una cota para el error $||u - u_h||_V$ donde $u \in V$ es solución de la formulación variacional propuesta y u_h de su versión discreta.

2. [**20 puntos**] Sea $\Omega =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_h$ una malla unidimensional sobre Ω, considere el espacio discreto
$$V_h^2 = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}^2(K), \forall\, K \in \mathcal{T}_h\}$$
y $\mathcal{I}_h^2 : H^2(\Omega) \to V_h^2$ el operador de interpolación para V_h^2. Sea $v \in H^3(\Omega)$, demuestre que
$$|v - \mathcal{I}_h^2\, v|_{2,\Omega} \leq h\, |v|_{3,\Omega}\,,$$
para todo $h > 0$.

Concepción, viernes 7 de mayo de 2021. DPC/dpc .