Clase 10: Función Gamma y Transformada de Laplace

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Dado $n \in \mathbb{N}$, recordamos que el factorial de n, denotado por $n!$ es

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \quad .$$

La **función Gamma** que estudiaremos a continuación, fue introducida por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler $(1707 - 1783)$, con el objetivo de extender los factoriales a cualquier número real.

Definición 10.1

Dado $t > 0$, la función Γ definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx$$

se llama **Función Gamma**.

Proposición 10.2

Para cada $t > 0$, la función $\Gamma(t)$ es convergente.

Demostración.

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx = \int_0^1 e^{-x} x^{t-1}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx$$

Luego, basta probar que los sumandos son convergentes.

Notar que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

converge por el criterio de comparación en el límite (comparando con $g(x) = \frac{1}{x^2}$).

Para ver que $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ converge, hacemos lo siguiente:

Como $0 < x \leq 1$ y la función e^{-x} es decreciente, se tiene:

$$0 < x \leq 1 \implies \frac{1}{e} \leq e^{-x} < 1$$

$$\implies \frac{x^{t-1}}{e} \leq e^{-x}x^{t-1} < x^{t-1}$$

Luego, como $\int_0^1 x^{t-1}dx = \frac{1}{t} > 0$ converge, entonces $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ es convergente por criterio de comparación.

Teorema 10.3

Las siguientes son ciertas:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\forall t > 0,\ \Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$.

Corolario 10.4

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Demostración.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Demostración (Teorema 10.3).

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}x^t dx$$

Sea $u = x^t$ y $dv = e^{-x}dx$. Luego, $du = tx^{t-1}dx$ y $v = -e^{-x}$. Así,

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-x}x^t dx &= (-x^t e^{-x})\big|_0^b + \int_0^b e^{-x}\cdot t\cdot x^{t-1}dx \\ &= -\frac{b^t}{e^b} + t\int_0^b e^{-x}x^{t-1}dx\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Gamma(t+1) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^t}{e^b} + t\int_0^b e^{-x}x^{t-1}dx\right) = t\Gamma(t)$$

Como la función Γ proporciona el factorial de un número natural $n \in \mathbb{N}$, esto es, $\Gamma(n+1) = n!$, podemos definir para cada número real $x > 0$, el factorial de x, denotado por $x!$ como

$$x! = \Gamma(x+1) \ .$$

Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

Una herramienta de gran utilidad para la resolución de ecuaciones diferenciales (mas adelante estudiará esto en detalle) es la Transformada de Laplace.

Definición 10.5

Se define la **Transformada de Laplace** de $f(t)$, denotada por $\mathscr{L}[f]$, como la función

$$\mathscr{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

definida para todos los $s \in \mathbb{R}$, tales que la integral impropia converge.

Transformada de Laplace

Ejemplos

1. $\mathscr{L}[c](s) = \frac{c}{s},\ s > 0$
2. $\mathscr{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1},\ s > 1$
3. $\mathscr{L}[\cos(t)](s) = \frac{s}{s^2+1},\ s > 0$
4. $\mathscr{L}[\operatorname{sen}(t)](s) = \frac{1}{s^2+1},\ s > 0$
5. $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0.$

Observación. La transformada de Laplace es un operador lineal, es decir, si $\mathscr{L}[f], \mathscr{L}[g]$ están definidas, entonces

$$\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathscr{L}[f] + \beta \mathscr{L}[f] \quad , \text{ para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, .$$

(esto viene de la linealidad de la integral). Por ejemplo, calcule

$$\mathscr{L}[11 + 5e^t - 6\operatorname{sen}(t)](s)$$