Contents

1 Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Una EDO lineal de segundo orden es de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_2(x), a_1(x), a_0(x), g(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo en común.

Diremos que (1) está normalizada si se escribe como:

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = f(x),$$

sobre $\{t \in \mathbb{R} : a_2(x) > 0\}$ o sobre $\{t \in \mathbb{R} : a_2(x) < 0\}$. Aquí tenemos $b_1(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $b_0(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ y $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$.

Ejemplo 1.1. *Si consideramos la EDO*

$$(t^2 - 1)x''(t) - e^t x'(t) + tx(t) = \sin(t),$$

entonces estará bien definida sobre $t \in (-\infty, -1)$, $t \in (-1, 1)$, *o sobre* $t \in (1, \infty)$. *Luego, la ED es equivalente a la EDO normalizada:*

$$x''(t) - \frac{e^t}{t^2 - 1}x'(t) + \frac{t}{t^2 - 1}x(t) = \frac{\sin(t)}{t^2 - 1},$$

sobre alguna de estas tres regiones.

Definición

Cuando en la Ecuación (1) *el término* g *es idénticamente nulo,* $g \equiv 0$, *decimos que la EDO es* **homogénea**. *En este caso, la forma normal quedaría:*

$$y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0,$$

donde $b_1(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ *y* $b_0(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$.

1.1 Operadores Diferenciales

Definición

Sea $I \subset \mathbb{R}, O \subset \mathbb{R}$ dos intervalos en $\mathbb{R}$. Consideramos los espacios vectoriales

$$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) = \left\{ y : I \to \mathbb{R} : y \text{ es diferenciable con } y' \text{ continua} \right\}$$
$$\mathcal{C}^0(O,\mathbb{R}) = \{ y : O \to \mathbb{R} : y \text{ es continua} \}$$

Entonces definimos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} D : \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(O,\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & D[y] = \dfrac{dy}{dx} \end{array}$$

En las aplicaciones, usualmente se escribe $Dy(x)$ o $y'(x)$ en lugar de $D[y]$.

Más generalmente, definimos operadores diferenciales de orden $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \left\{ y \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) : \text{ existe } y^{(n)}(x) \text{ y es continua} \right\}.$$

De esta manera:

$$\begin{array}{rcl} D^n : \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(O,\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & D^n y = \frac{d^n y}{dx^n} \end{array}$$

que también resulta un operador lineal.

Ejemplo 1.2. *Observe que la EDO*

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = \cos(t)$$

se puede escribir como $\left(D^2 - D - 6\right)[y](t) = \cos(t)$. La EDO homogénea asociada es:

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0,$$

o equivalentemente

$$\left(D^2 - D - 6\right)[y] = 0.$$

Toda solución de la EDO homogénea asociada es un elemento del kernel del operador lineal $D^2 - D - 6$.

En general, dado que D es un operador lineal y combinación lineal de operadores lienales define nuevamente un operador lineal, **toda solución de una EDO lineal homogénea** *de segundo orden, normal y de coeficientes variables*

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0,$$

es un elelemento que pertenece al kernel del operador asociado

$$T = D^2 + p(\cdot)D + q(\cdot).$$

Ejemplo 1.3. *Consideremos la EDO de coeficientes constantes:*

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$$

Para determinar las soluciones de la EDO anterior es equivalente a determinar el kernel del operador: $T := D^2 - 2D + 1$.

Se puede comprobar que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$ pertenecen al conjunto

$$\mathtt{Ker}(T) = \{y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) : T[y](t) = 0, \forall t \in I\}.$$

Más aún, como $\mathtt{Ker}(T)$ es un espacio vectorial, resulta que cualquier combinación lineal $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, también estará en $\mathtt{Ker}(T)$.

Ejercicio: *Demuestre que $y_1(t) = e^t, y_2(t) = te^t$ son linealmente independientes.*

Teorema 1.1

[Teorema de la dimensión]

Consideremos la EDO lineal homogénea

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos funciones continuas dadas, entonces el conjunto

$$S = \left\{u \in \mathcal{C}^2\left(I, \mathbb{R}\right) : u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^2\left(I, \mathbb{R}\right)$. Además $\mathtt{dim}(S) = 2$.

Observación. *Observe que en el Teorema de la Dimensión, $S = \mathtt{Ker}(T)$ si consideramos el operador lineal $T = D^2 + p(\cdot)D + q(\cdot)$. Sabemos que el kernel de toda transformación lineal es un subespacio vectorial del espacio vectorial del dominio del operador. Por tanto, lo que el teorema afirma es que la dimensión del kernel del operador T es dos (el orden de la EDO lineal considerada). Así, toda base de $\mathtt{Ker}(T)$ debe contener dos elementos.*

Definición

Toda base para el kernel del operador asociado a la EDO lineal homogénea se denomina **conjunto fundamental** *para la EDO.*

De manera general, podemos definir el problema de valores iniciales de n-ésimo orden como:

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \; \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. *Considere el PVI dado por:*

$$\begin{cases} 2y'''(t) - 7y''(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Verifique que las soluciones del PVI son las funciones $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{3t/2}$ y $y_3(t) = e^{3t}$. Por el teorema de la dimensión se tiene que

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t)$$

es la solución general de la EDO. Determine las constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ de manera que se satisfagan las condiciones iniciales dadas.