Continuidad. Continuidad uniforme

- Álgebra de funciones continuas.
- Ejemplos de funciones continuas.
- Continuidad y compacidad.
- Continuidad de la inversa de una función continua.
- Continuidad uniforme.

Álgebra de funciones continuas.

A lo largo de la clase de hoy, otra vez X e Y son espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente, y $E \subset X$.

Teor.: Sean $p \in X$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) continuas en p.
Entonces $(f+g)$, (fg) y, si $g(p) \neq 0$, (f/g) son continuas en p.

Dem.: Si p es un punto aislado de X, las tres funciones son continuas en p.
Si p es un punto de acumulación de X, el teorema es consecuencia de las respectivas propiedades algebraicas de límites de funciones. $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

Consideremos $\mathbb{R}^k$ dotado de la métrica inducida por la norma euclidiana $\|\cdot\|$:

dados $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_k)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \left[\sum_{i=1}^{k} |u_i - v_i|^2\right]^{1/2}.$$

Teor.: a) Sean $p \in X$ y $f_1, \dots, f_k : X \to \mathbb{R}$.

Sea $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^k$ definida por $\boldsymbol{f}(x) := (f_1(x), \dots, f_k(x))$, $x \in X$.

Entonces, $\boldsymbol{f}$ es continua en p si y sólo si $f_1, \dots, f_k$ son continuas en p.

b) Sean $p \in X$ y $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : X \to \mathbb{R}^k$ continuas en p.

Entonces, $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})$ y $(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})$ son continuas en p.

Dem.: a) $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\boldsymbol{f}$ continua en p.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X :\ d(x,p) < \delta,\ \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(p)\| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ |f_i(x) - f_i(p)| \le \left[\sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(p)|^2\right]^{1/2} = \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(p)\| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ f_i \text{ continua en } p,\ i = 1, \dots, k.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sean $f_1, \dots, f_k$ continuas en p.

$$\Longrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_i > 0 :\ \forall x \in X :\ d(x,p) < \delta_i,\ |f_i(x) - f_i(p)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\} > 0$.

Entonces, $\forall x \in X :\ d(x,p) < \delta \le \delta_i,\ i = 1, \dots, k$,

$$\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(p)\| = \left[\sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(p)|^2\right]^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{f} \text{ continua en } p.$$

b) $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

Ejemplos de funciones continuas.

Función constante: $\begin{aligned} f:\ X &\to Y, \\ x &\mapsto c. \end{aligned}$ f es Lipschitz continua.

Proyección i-ésima: $\begin{aligned} \phi_i:\ \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto x_i, \end{aligned}$ donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$.

$|\phi_i(\boldsymbol{x}) - \phi_i(\boldsymbol{y})| = |x_i - y_i| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \implies \phi_i$ es Lipschitz continua.

Función monomial: $\begin{aligned} m:\ \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}, \end{aligned}$ donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Producto de proyecciones $\implies m$ es continua.

Función polinomial: $\begin{aligned} p:\ \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto p(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$ donde p es un polinomio en $x_1, \ldots, x_k$.

Suma de funciones monomiales $\implies p$ es continua.

Función racional: $\begin{aligned} r:\ E &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto p(\boldsymbol{x})/q(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$ donde p, q son polinomios en $x_1, \ldots, x_k$ y $E \subset \mathbb{R}^k$, tales que $q(\boldsymbol{x}) \neq 0\ \forall \boldsymbol{x} \in E$.

Cociente de polinomios en el que no se anula el denominador $\implies r$ es continua.

Función distancia a un punto: $\begin{aligned} d(\cdot,p):\ E &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto d(x,p), \end{aligned}$ donde $E \subset X,\ p \in X$.

$$\forall x, y \in E,\ d(x,p) \leq d(x,y) + d(y,p) \implies d(x,p) - d(y,p) \leq d(x,y)$$

$$\forall x, y \in E,\ d(y,p) \leq d(y,x) + d(x,p) \implies -d(y,x) \leq d(x,p) - d(y,p)$$

$$\implies -d(x,y) \leq d(x,p) - d(y,p) \leq d(x,y)$$

$\implies |d(x,p) - d(y,p)| \leq d(x,y) \implies d(\cdot,p)$ es Lipschitz continua.

Función norma: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un E.V.N. $\begin{aligned} \|\cdot\|:\ X &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \|\boldsymbol{x}\|\,. \end{aligned}$

$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\| = d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \implies \|\cdot\|$ es Lipschitz continua.

Norma de una fución continua: Sea $\boldsymbol{f}:\ X \to \mathbb{R}^k$ continua. Entonces la función

$\begin{aligned} X &\to \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\,, \end{aligned}$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Continuidad y compacidad.

Recordemos que dada $f: X \to Y$,

$\boxed{\forall E \subset X, \quad E \subset f^{-1}(f(E))}$ y $\boxed{\forall G \subset Y, \quad f(f^{-1}(G)) \subset G.}$

Teor.: Sea $f: X \to Y$ continua.
Si $E \subset X$ es compacto, entonces $f(E)$ también es compacto.

Dem.: Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento por abiertos de $f(E)$:

$$f(E) \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

V_α abierto en $Y \implies f^{-1}(V_\alpha)$ abierto en X.
$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$
$\implies \left\{f^{-1}(V_\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$ cubrimiento por abiertos de E.

E compacto $\implies \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A: \; E \subset \bigcup_{n=1}^{N} f^{-1}(V_{\alpha_n})$
$\implies f(E) \subset f\left(\bigcup_{n=1}^{N} f^{-1}(V_{\alpha_n})\right) = \bigcup_{n=1}^{N} f(f^{-1}(V_{\alpha_n})) \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_{\alpha_n}$
$\implies f(E)$ compacto. $\square$

Teor.: Sea $f : X \to Y$ continua.
Si X es compacto, entonces $f(X)$ es cerrado y f es acotada.

Dem.: El teorema anterior $\Longrightarrow$ $f(X)$ es compacto.
$\Longrightarrow$ $f(X)$ cerrado y acotado.
$f(X)$ acotado $\Longleftrightarrow$ f es acotada. $\square$

Teor.: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en X; es decir,

$$\exists p, q \in X : \quad f(p) = \sup_{x\in X} f(x) \quad \text{y} \quad f(q) = \inf_{x\in X} f(x).$$

Dem.: El teorema anterior $\Longrightarrow$ $f(X)$ es cerrado y acotado.
$f(X) \subset \mathbb{R}$ acotado $\Longrightarrow$ $\exists M = \sup_{x\in X} f(x)$ y $m = \inf_{x\in X} f(x)$.
$f(X)$ cerrado $\Longrightarrow$ $M \in f(X)$ y $m \in f(X)$ $\Longrightarrow$
$\exists p, q \in X : f(p) = M = \sup_{x\in X} f(x)$ y $f(q) = m = \inf_{x\in X} f(x)$. $\square$

Ejemplos que muestran la necesidad de la compacidad en estos teoremas.

Ejemplo: $f : E \to \mathbb{R}$ **continua con** E **acotado pero** $f(E)$ **no acotado.**

Sea $E \subset X : \exists p \in X \setminus E$, punto de acumulación de E (de modo que E no es compacto).

Sea $f(x) := \frac{1}{d(x,p)}, \quad x \in E.$

$d(\cdot, p)$ continua y estrictamente postitiva $\Longrightarrow$ f continua.

p punto de acumulación de $E \Longrightarrow \exists \{x_n\} \subset E : x_n \xrightarrow{n} p$

$\Longrightarrow d(x_n, p) \xrightarrow{n} 0 \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{n} +\infty \Longrightarrow f$ no acotada.

Ejemplo: $g : E \to \mathbb{R}$ **continua y acotada que no alcanza su máximo.**

Sean E y p como antes (de modo que otra vez E no es compacto).

Sea $g(x) := \frac{1}{1+d(x,p)}, \quad x \in E. \Longrightarrow g$ continua.

Sea $\{x_n\} \subset E : x_n \xrightarrow{n} p$ como antes $\Longrightarrow g(x_n) \xrightarrow{n} 1.$

Como $g(x) < 1 \; \forall x \in E \Longrightarrow \sup_{x \in X} g(x) = 1$, pero $\nexists x \in E : g(x) = 1.$

En ambos casos, no hay contradicción con los teoremas anteriores, porque E no es compacto.

Continuidad de la inversa de una función continua.

Recordemos que si $f : X \to Y$ es biyectiva, existe su **función inversa:**

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto !x : f(x) = y, \qquad \text{de modo que} \quad \begin{cases} f(f^{-1}(y)) = y & \forall y \in Y, \\ f^{-1}(f(x)) = x & \forall x \in X. \end{cases}$$

¡Cuidado! El mismo símbolo, f^{-1}, se usa para dos cosas distintas:

- la función inversa de f (si f es biyectiva);
- la preimagen de f (para cualquier f).

Si f es biyectiva, la preimagen de f es la imagen de f^{-1}:

$$\forall G \subset Y, \qquad \underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{preimagen de } G \text{ por } f} \qquad = \qquad \underbrace{\left(f^{-1}\right)(G)}_{\text{imagen de } G \text{ por } f^{-1}}.$$

Ej. Demuestra que, si f es biyectiva, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(E) = f(E) \quad \forall E \subset X.$

Teor.: Sea $f : X \to Y$ biyectiva y continua.
Si X es compacto, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

Dem.: Usaremos la caracterización topológica de la continuidad:

$$f^{-1} \text{ continua } \iff \forall F \subset X \text{ cerrado, } \left(f^{-1}\right)^{-1}(F) \text{ es cerrado.}$$

Sea $F \subset X$ cerrado. X compacto $\Longrightarrow$ F compacto.
f continua y F compacto $\Longrightarrow$ $f(F)$ compacto $\Longrightarrow$ $f(F)$ cerrado
$\Longrightarrow$ $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ cerrado $\Longrightarrow$ F continua. $\square$

Ejemplo que muestra la necesidad de la compacidad en este teorema.

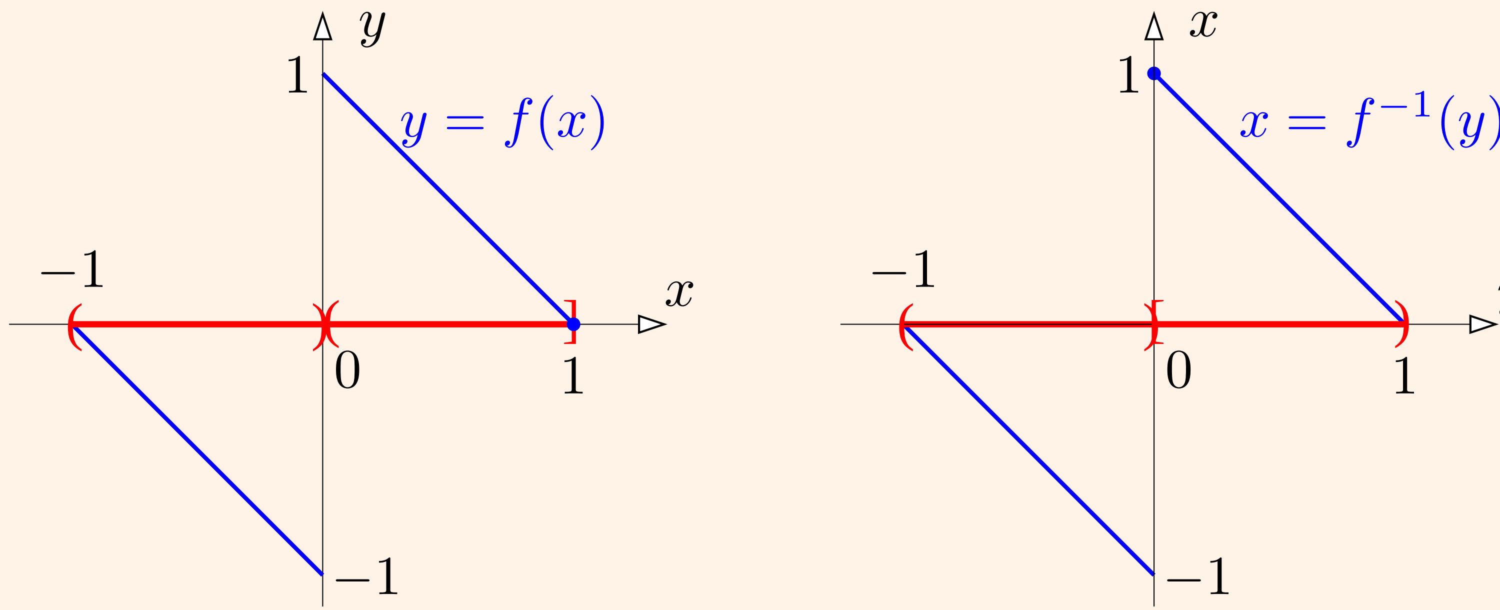
Ejemplo: **función biyectiva y continua con inversa discontinua.**

Sean $X := \underbrace{(-1,0) \cup (0,1]}_{\text{no compacto}} \subset \mathbb{R}$ y $f(x) := \begin{cases} -1-x, & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1-x, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

f es inyectiva y definiendo $Y := f(X) = (-1,1)$, $f : X \to Y$ es biyectiva.

$f|_{(-1,0)}$ y $f|_{(0,1]}$ son continuas $\Longrightarrow$ f continua. $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Su inversa $f^{-1}(y) := \begin{cases} -1-y, & \text{si } -1 < y < 0, \\ 1-y, & \text{si } 0 \leq y < 1, \end{cases}$ es discontinua en $y = 0$.



Continuidad uniforme.

Def.: $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ \forall y \in X :\ d_X(x,y) < \delta,\ d_Y(f(x), f(y) < \varepsilon.}$$

Comparemos con la definición de continuidad global (es decir, continuidad en todo punto de X):

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall y \in X :\ d_X(x,y) < \delta,\ d_Y(f(x), f(y) < \varepsilon.}$$

Notemos que en la definición de continuidad global, para cada punto $x \in X$ debe existir un δ que puede variar con x, mientras que en la de continuidad uniforme, debe haber un único δ que debe servir para todos los puntos $x \in X$.

Ejemplo: f Lipschitz continua $\Longrightarrow$ f uniformemente continua.

Dem.: Si $\exists L > 0 : \forall x, y \in X,\ d_Y(f(x)f(y)) \leq L d_X(x,y),$ entonces $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \forall x, y \in X :\ d_X(x,y) < \delta,$
$d_Y(f(x), f(y) \leq L d_X(x,y) < L\delta = \varepsilon.\quad \square$

Ejemplo: $\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$ es continua, pero no uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Por el absurdo, supongamos f uniformemente continua.

$\Longrightarrow \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta, \ \left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon.$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $y = x + \frac{\delta}{2}$, de modo que $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Longrightarrow \ \left|x^2 - y^2\right| = |x - y|\,|x + y| = \frac{\delta}{2}\,|x + y| = \frac{\delta}{2}\left|2x + \frac{\delta}{2}\right|.$

$\Longrightarrow \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{\delta}{2}\left|2x + \frac{\delta}{2}\right| < \varepsilon,$ con $\delta > 0$ independiente de x.

Pero tomando $x_n \xrightarrow{n} +\infty \Longrightarrow \frac{\delta}{2}\left|2x_n + \frac{\delta}{2}\right| \xrightarrow{n} +\infty.$ $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

Ejemplo: $\begin{aligned} f:\ (0, +\infty) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$ es continua, pero no uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Por el absurdo, supongamos f uniformemente continua.

$\Longrightarrow \ \exists \delta > 0 : \forall x, y > 0 : |x - y| < \delta, \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon.$

Para cada $x > 0$, sea $y = x + \frac{\delta}{2}$, de modo que $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Longrightarrow \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} = \frac{\delta}{x(2x+\delta)} \Longrightarrow \forall x > 0, \ \frac{\delta}{x(2x+\delta)} < \varepsilon.$

Pero, como $\delta > 0$ no depende de x, tomando $x_n \xrightarrow{n} 0$

$\Longrightarrow \ \frac{\delta}{x_n(2x_n+\delta)} \xrightarrow{n} +\infty.$ $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

Teor.: Sean $f : X \to Y$ continua y X compacto.

Entonces, f es uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$.

f continua $\implies \forall p \in X,\ \exists \delta_p > 0 : f(B^X_{\delta_p}(p)) \subset B^Y_{\varepsilon/2}(f(p))$. (1)

Consideremos el siguiente cubrimiento: $X \subset \bigcup_{p\in X} B^X_{\delta_p/2}(p)$.

X compacto $\implies \exists p_1, \ldots, p_N \in X : X \subset \bigcup_{n=1}^N B^X_{\delta_{p_n}/2}(p_n)$. (2)

Sea $\delta := \min\left\{\frac{\delta_{p_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{p_N}}{2}\right\} > 0$. (3)

Sean $p, q \in X : d_X(p,q) < \delta$. (4)

(2) $\implies \exists n \in \{1, \ldots, N\} : p \in B^X_{\delta_{p_n}/2}(p_n) \implies d_X(p, p_n) < \delta_{p_n}/2$

$\implies d_X(p_n, q) \le d_X(p_n, p) + d_X(p, q) \overset{(4)}{<} (\delta_{p_n}/2) + \delta \overset{(3)}{\le} \delta_{p_n}$

$\implies q \in B^X_{\delta_{p_n}}(p_n)$. Como $p \in B^X_{\delta_{p_n}/2}(p_n) \subset B^X_{\delta_{p_n}}(p_n)$, entonces

$\overset{(1)}{\implies} f(q) \in B^Y_{\varepsilon/2}(f(p_n))$ y $f(p) \in B^Y_{\varepsilon/2}(f(p_n))$

$\implies d_Y(f(p), f(q)) \le \underbrace{d_Y(f(p), f(p_n))}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{d_Y(f(p_n), f(q))}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$.

Entonces, f es uniformemente continua. $\square$