

P1 (8+8+8 pts.)

(a) Sean z_1, z_2, \dots, z_n , ($n \geq 2$) números complejos distintos. Probar

$$1. \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-z_n} \text{ donde } \sum_{i=1}^n A_i = 0;$$

$$2. \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = 0$$

para cualquier curva simple cerrada continua por tramos, γ , que encierre a todos los z_i dados;

Indicación. Considerar el coeficiente de la potencia z^{n-1} en la ecuación de coeficientes indeterminados. No se requiere conocer explícitamente los coeficientes A_i .

(b) Evaluar

$$\int_{\gamma} \frac{\ln(z+1)}{z^2+1} dz, \quad \gamma = \text{Fr}\left([- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times] - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}]\right)$$

(c) Evaluar

$$\oint_C \frac{e^{1/z}}{z+2} dz \quad \text{donde} \quad C(t) = 88e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución Propuesta

(a2) Es consecuencia directa de (a1):

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = 2\pi i \cdot (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 2\pi i \cdot 0$$

(a1) De la ecuación de coeficientes indeterminados:

$$1 = A_1 p_1(z) + A_2 p_2(z) + \cdots + A_n p_n(z), \quad p_i(z) = \prod_{k=1, k \neq i}^n (z - z_k), \quad i = 1, \dots, n$$

y luego como los p_i son polinomios monómicos de grado $n-1$:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad 0 = (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) z^{n-1} \implies \sum_{i=1}^n A_i = 0.$$

Nota. Ver video de la práctica.

(b1) La función $h(z) = \ln(z+1)$ es holomorfa en $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -1 \vee \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$. En consecuencia, lo es en el dominio encerrado por γ . Gracias al teorema de los residuos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\ln(z+1)}{z^2+1} dz &= (2\pi i) \frac{h(z)}{2z} \Big|_{z=i} + (2\pi i) \frac{h(z)}{2z} \Big|_{z=-i} \\ &= \pi \ln(1+i) - \pi \ln(1-i) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(c) Como hemos visto en dos clases de prácticas, podemos ir por el residuo a ∞

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{1/z}}{z+2} dz &= \oint_{-\Gamma} \frac{e^{\sigma}}{\sigma(1+2\sigma)} d\sigma, \text{ donde } \Gamma(t) = \frac{1}{88} e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ &= (2\pi i) \frac{e^{\sigma}}{1+2\sigma} \Big|_{\sigma=0} = 2\pi i. \end{aligned}$$

P2 (8+3+3 pts.)

- (a) Probar que si f y g son funciones holomorfas en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que f tiene un cero de orden m en z_0 y g un cero de orden $m+1$ en el mismo punto. Entonces, $h = f/g$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\text{Res}_1(h, z_0) = (m+1) \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}$$

Indicación: Si representa f y g en su serie de Taylor en torno a z_0 infiere que

$$f(z) = \frac{1}{m!} (z - z_0)^m \psi(z) \quad \wedge \quad g(z) = \frac{1}{(m+1)!} (z - z_0)^{m+1} \phi(z)$$

donde ψ y ϕ son holomorfas en z_0 y no se anulan en dicho punto.

- (b) Encontrar los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades aisladas,

$$1. \ f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(1+z^2)}$$

$$2. \ g(z) = \frac{1-e^z}{z \sin(z)}$$

Solución Propuesta

- (b1) Existen dos singularidades aisladas

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \text{Res}_1(f, 0) &= (2) \frac{\cos(z)}{2+6z^2} \Big|_{z=0} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \blacksquare \quad \text{Res}_1(f, i) &= \frac{\sin(z)}{z^2(2z)} \Big|_{z=i} \\ &= -\frac{\sinh(1)}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \blacksquare \quad \text{Res}_1(f, -i) &= \frac{\sin(z)}{z^2(2z)} \Big|_{z=-i} \\ &= \frac{\sinh(1)}{2} \end{aligned}$$

- (b2) Existe una singularidad aislada

$$\text{Res}_1(g, 0) = (2) \frac{-e^z}{2\cos(z) - z\sin(z)} \Big|_{z=0} = -1$$

- (a) Problema del Listado y en clase de Práctica se estableció un resultado similar.

Se re escriben las Series de Taylor de f y g en una vecindad conjunta de z_0 :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad f(z) &= (z - z_0)^m \phi(z), & \phi(z) &= \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m} \\ \blacksquare \quad g(z) &= (z - z_0)^{m+1} \varphi(z), & \varphi(z) &= \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m-1} \end{aligned}$$

donde las funciones ϕ y φ son holomorfas en la vecindad conjunta y no se anulan en z_0 :

$$\begin{aligned} \text{Res}_1(h, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{\varphi(z)} = \frac{\phi(z_0)}{\varphi(z_0)} \\ &= (m+1) \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)} \end{aligned}$$

P3 (10+10 pts.)

- (a) Probar el siguiente Lema de Jordan:

Si f tiene un polo simple en $a \in \mathbb{C}$ y sea γ_r ($r > 0$)

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \rightarrow C, t \mapsto \gamma_r(t) = a + re^{it}$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \text{Res}_1(f, a)$$

Indicación: La Serie de Laurent de f en a es

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{z-a} + g(z), \quad |z-a| > 0$$

donde g es holomorfa en a y $b_{-1} = \text{Res}_1(f, a)$.

- (b) Evaluar

$$(VP) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx$$

Solución Propuesta

(a) Desarrollada en clase y la redacción final se asignó a un alumno.

(b) Problema de Práctica la cual está publicada en el portal de la asignatura en TEAMs.