Cálculo III

Evaluación No 1.

Nombre Completo:

P1	P2	P3	Puntaje	Nota

FPV/fpv.
24 de Mayo de 2013

P1 Sea α una constante positiva y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar la cual es nula en el origen y en cualquier otro punto, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es definida por

$$f(x, y) = |x + y|^{\alpha+1} \ln(x^2 + y^2)$$

1. Establecer que existe una constante C positiva, $(C = C(\alpha))$ tal que

$$||x + y|^{1+\alpha} \ln(x^2 + y^2)| \leq C||(x, y)||_2^{1+\alpha} \ln ||(x, y)||_2$$

   e inferir que f es continua y diferenciable en el origen.
2. Probar que f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y determinar $Df(1, 1)(a, b)$.

[2.0 puntos]

P2 1. Determinar los valores a, b y c tales que la derivada direccional de

$$f(x,y) = axy^2 + byz + cx^3z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje z. Además, determinar el plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 0$ en el punto $(0,0,1)$.

2. Considere las funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : f(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2) \qquad g(u,v,w) = (u^v, \sin(v+w))$$

Probar que f es diferenciable en $(0,0)$, que g es diferenciable en $f(0,0)$ y que $h = g \circ f$ es diferenciable en $(0,0)$. Evaluar $Dh(0,0)$.

[2.0 puntos]

P3 Establecer que el sistema

$$\begin{array}{rcrcl} xz^3 & + & y^2u^3 & = & 1 \\ 2xy^3 & + & u^2z & = & 0 \end{array}$$

define implícitamente en un entorno del punto $(0,1,1,0)$ a x e y en función de u y z, a saber, $(x,y) = (g_1(u,z), g_2(u,z))$ donde $g = (g_1, g_2)$ es continuamente diferenciable en un entorno del punto $(0,1)$. Además probar que g admite una inversa diferenciable en el entorno del punto $(u_0, z_0) = (1,0)$.

[2.0 puntos]