# Elementos Finitos – 521537
# Cápsula 04 - Problemas variacionales para EDP (PARTE I)

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

# Definiciones y Resultados Previos

Sea $\Omega$ un abierto acotado con frontera Lipchitz continua $\Gamma$. Definamos el espacio test extendido

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \left\{ f|_{\Omega} : \begin{array}{c} f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ \mathcal{A} \text{ es abierto} \\ \mathcal{A} \text{ es acotado} \\ \bar{\Omega} \subset \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

consideremos el siguiente resultado clásico

## Proposición

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.

Demostración: Ejercicio.

## Teorema

Sea $\gamma : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to L^2(\Gamma)$ tal que

$$\gamma(\psi) = \psi|_{\Gamma}\,, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\,,$$

existe $C > 0$ que satisface

$$\|\gamma(\psi)\|_{0,\Gamma} \leq C\, \|\psi\|_{1,\Omega}\,, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\,.$$

Demostración: *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, J. Nečas, pág. 79.

### Teorema (trazas en $H^1(\Omega)$)

Existe $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ lineal y acotada tal que

$$\gamma_0(\psi) = \psi|_\Gamma \,, \; \forall \psi \in H^1(\Omega)\,.$$

Demostración: Sea $\psi \in H^1(\Omega)$, existe $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ en $H^1(\Omega)$, como $\gamma$ es lineal

$$\|\gamma(\psi_m) - \gamma(\psi_n)\|_{0,\Gamma} \leq C\,\|\psi_m - \psi_n\|_{1,\Omega}$$

luego, $\{\gamma(\psi_n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Gamma)$ entonces existe $z \in L^2(\Gamma)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\psi_n) = z$ en $L^2(\Gamma)$.

Al repetir el procedimiento con $\{\tilde{\psi}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ y $\tilde{z} \in L^2(\Gamma)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\psi}_n = \psi$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\tilde{\psi}_n) = \tilde{z}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{z} - z\|_{0,\Gamma} &= \lim_{n\to\infty} \left\|\gamma(\tilde{\psi}_n - \psi_n)\right\|_{0,\Gamma} \\
&\leq C \left\| \lim_{n\to\infty} \left(\tilde{\psi}_n - \psi_n\right)\right\|_{1,\Omega} = 0
\end{aligned}$$

entonces, $\tilde{z} = z$. Podemos definir $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ a través de $\gamma_0(\psi) = z$. Note que $\gamma_0$ es acotada:

$$\|\gamma_0(\psi)\|_{0,\Gamma} = \left\| \lim_{n\to\infty} \gamma(\psi_n)\right\|_{0,\Gamma} \leq C\,\|\psi\|_{1,\Omega}$$

Mostrar la linealidad de $\gamma_0$ (Ejercicio). $\square$

# Espacios $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $H_0^1(\Omega)$

## Definición

Definimos el espacio vectorial

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{\gamma_0(v) : v \in H^1(\Omega)\}$$

y lo dotamos de la norma

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma} := \inf_{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v) = \mu} \|v\|_{1,\Omega}, \ \forall \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

## Proposición

$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ es acotada y sobreyectiva

Demostración: Evidente.

## Definición

$H_0^1(\Omega) := \ker(\gamma_0)$

## Proposición

$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$ respecto a $\|\cdot\|_{1,\Omega}$

Demostración: Ejercicio .

## Proposición

$H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert

Demostración: Ejercicio 3 .

# Espacios $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $H_0^1(\Omega)$

**Proposición**

$\tilde{\gamma}_0 : (H_0^1(\Omega))^{\perp} \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ con $\tilde{\gamma}_0 := \gamma_0|_{(H_0^1(\Omega))^{\perp}}$, es una biyección

Demostración: Ejercicio.

**Proposición**

Se tiene la siguiente identidad

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \|\tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)\|_{1,\Omega}\,,\ \forall\, \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Demostración: Sea $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(v) = \mu$, podemos descomponer $v = v_0 + \tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)$ con $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ dado por $v_0 = v - \tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)$, además tenemos

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left(\|v_0\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)\|_{1,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

luego,

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \inf_{v_0 \in H_0^1(\Omega)} \left(\|v_0\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)\|_{1,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\tilde{\gamma}_0^{-1}(\mu)\|_{1,\Omega} \qquad \square\end{aligned}$$

**Corolario**

$(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma})$ es un espacio de Banach

Demostración: Ejercicio.

# Integración por partes

**Teorema**

Sean $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$(\partial_{x_i} u, v)_{0,\Omega} = -\,(u, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$

Demostración: Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_n = v$. Tenemos

$$(\partial_{x_i} u, \phi_n)_{0,\Omega} = -\,(u, \partial_{x_i} \phi_n)_{0,\Omega}\,.$$

Primero mostraremos que $(\partial_{x_i} u, v)_{0,\Omega} = \lim_{n\to\infty} (\partial_{x_i} u, \phi_n)_{0,\Omega}$, en efecto

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \left|\, (\partial_{x_i} u, v)_{0,\Omega} - (\partial_{x_i} u, \phi_n)_{0,\Omega} \,\right| \\ = \; & \lim_{n\to\infty} \left|\, (\partial_{x_i} u, v - \phi_n)_{0,\Omega} \,\right| \\ \leq \; & \|\partial_{x_i} u\|_{0,\Omega} \lim_{n\to\infty} \|v - \phi_n\|_{1,\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Similarmente podemos mostrar que $(u, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega} = \lim_{n\to\infty} (u, \partial_{x_i} \phi_n)_{0,\Omega}$.
Finalmente,

$$\begin{aligned} (\partial_{x_i} u, v)_{0,\Omega} &= \lim_{n\to\infty} (\partial_{x_i} u, \phi_n)_{0,\Omega} \\ &= -\lim_{n\to\infty} (u, \partial_{x_i} \phi_n)_{0,\Omega} \\ &= -\,(u, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega} \qquad \square \end{aligned}$$

## Corolario

Sean $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$(\Delta u, v)_{0,\Omega} = -\,(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega}$$

Demostración: Sea $i \in \{1, \ldots, d\}$, defina $w = \partial_{x_i} u \in H^1(\Omega)$ y del Teorema anterior

$$(\partial_{x_i} w, v)_{0,\Omega} = -\,(w, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega}$$

luego,

$$\left(\partial^2_{x_i x_i} u, v\right)_{0,\Omega} = -\,(\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega}$$

al sumar sobre $i$ se obtiene los deseado

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i x_i} u, v\right)_{0,\Omega} = -\sum_{i=1}^{d} (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{0,\Omega}$$

$\square$

Aplicación: Sea $f \in L^2(\Omega)$, considere el problema de buscar $\psi \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\psi & = & f\,, \text{ en } \Omega \\ \psi & = & 0\,, \text{ en } \Gamma \end{array} \right. \tag{1}$$

Es claro que $\psi$ también satiface

$$-(\Delta\psi, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}\,,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

luego, del Corolario se desprende que

$$(\nabla\psi, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}, \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

lo que induce el PV: *Sea* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}, \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Decimos que $u$ es la **solución débil** de (1).

# Petree-Tartar

## Definición (operador compacto)

Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ es una secuencia acotada. Si existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T\, x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge en $Y$, entonces diremos que $T$ es compacto.

## Lema (Petree - Tartar)

Sean $X$, $Y$, $Z$ espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ inyectivo y $T \in \mathcal{L}(X;Z)$ compacto. Si existe $c > 0$ tal que

$$c\,\|x\|_X \leq \|A\,x\|_Y + \|Tx\|_Z\,,\ \forall\, x \in X\,,$$

entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\,\|x\|_X \leq \|A\,x\|_Y\,,\ \forall\, x \in X\,.$$

# Petree - Tartar (demostración)

Demostración: Suponga que para todo $\alpha > 0$ existe $x \in X$ t.q. $\alpha \|x\|_X > \|A\,x\|_Y$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $w_n \in X$ no nulo tal que $\frac{1}{n}\|w_n\|_X > \|A\,w_n\|_Y$, definimos ahora $x_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_X}$ y obtenemos una sucesión tal que $\|x_n\|_X = 1$ y $\frac{1}{n}\|x_n\|_X > \|A\,x_n\|_Y$, luego

$$\lim_{n\to\infty} A\,x_n = 0\,.$$

Como $T$ es compacto existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{T\,x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge en $Z$ y por lo tanto es de Cauchy.

De las hipótesis del Lema tenemos

$$\begin{aligned} c\,\|x_{n_k} - x_{n_\ell}\|_X &\leq \|A\,x_{n_k} - A\,x_{n_\ell}\|_Y \\ &\quad + \|T\,x_{n_k} - T\,x_{n_\ell}\|_Z \end{aligned}$$

luego $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por lo tanto converge a un elemento $x \in X$, además como $A$ es continua tenemos que

$$A\,x = \lim_{k\to\infty} A\,x_{n_k} = 0\,,$$

de la inyectividad de $A$ obtenemos $x = 0$ y por otro lado $\|x\|_X = \lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}\|_X = 1$, una contradicción. $\square$

## Defnción

Si $\Omega$ **no** puede ser representado como la unión de abiertos disjuntos entonces diremos que $\Omega$ es *conectado*.

## Teorema

Sea $\Omega$ un abierto, acotado y conectado. Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces $\nabla u = 0$ si y solo si $u$ es una constante.

Demostración: ver *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations*, F. Sayas, T.S. Brown M. E. Hassell. pág. 21.

## Rellich - Kondrachov

Sea $\Omega$ un abierto acotado con frontera Lipchitz. La inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definida por $x \mapsto i(x) = x$, es compacta.

Demostración: ver *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations*, F. Sayas, T.S. Brown M. E. Hassell. pág. 128. (Note que la hipótesis de de $\Omega$ tener frontera Lipchitz implica la propiedad de extensión $H^1$.)

**Teorema (Deny-Lions)**

Sea $\Omega$ abierto, acotado, conectado y con frontera Lipchitz y sea $f \in H^1(\Omega)'$ tal que $f(1) \neq 0$. Entonces, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)|\right)$, $\forall\, u \in H^1(\Omega)$.

Demostración: Aplicaremos el Lema de Petree - Tartar sobre los espacios de Banach:

- $X := H^1(\Omega)$
- $Y := [L^2(\Omega)]^d \times \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{0,\Omega} + |\cdot|$
- $Z := L^2(\Omega)$

sobre los cuales definimos $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X;Z)$, a través de:

$$X \ni v \overset{A}{\longmapsto} (\nabla v, f(v)) \in Y$$
$$X \ni v \overset{T}{\longmapsto} v \in Z\,.$$

Es claro que $A$ es lineal, acotada e inyectiva. $T$ es lineal y acotada y por el Teorema de R.K. sabemos que es compacta. Además, dada $u \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|u\|_X^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2 &= \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2 \\
&= \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|T\,u\|_Z^2 \\
&\leq \left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + \|T\,u\|_Z\right)^2 \\
&\leq \left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)| + \|T\,u\|_Z\right)^2 \\
&= \left(\|A\,u\|_Y + \|T\,u\|_Z\right)^2\,.
\end{aligned}$$

Luego, el Lema de Petree - Tartar asegura que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\,\|u\|_{1,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)|$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \leq C\left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)|\right)$$

con $C = \alpha^{-1} > 0$. $\square$

**Lema (desig. de Poincaré - Friedrichs)**

Sea $\Omega$ abierto, acotado, conectado y con frontera Lipchitz. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\,\|\nabla u\|_{0,\Omega}\,, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Demostración: Sea $f \in H^1(\Omega)'$ definida por $f(v) = \frac{1}{|\Gamma|}\,(\gamma_0(v), 1)_{0,\Gamma}$, luego $f(1) = 1 \neq 0$. El Teorema de Deny-Lions asegura la existencia de $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + |f(u)|\right), \ \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$

dado que $u \in H_0^1(\Omega)$ implica $f(u) = 0$, tenemos

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\,\|\nabla u\|_{0,\Omega}\,, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega)\,. \qquad \square$$

Observaciones:

1. Defina $c_P := \sqrt{C^2 + 1}$, usaremos $\|u\|_{1,\Omega} \leq c_P\,\|\nabla u\|_{0,\Omega}$, para $u \in H_0^1(\Omega)$
2. $|\cdot|_{1,\Omega} = \|\nabla\cdot\|_{0,\Omega}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ y es equivalente a $\|\cdot\|_{1,\Omega}$

Aplicación: La forma bilineal definida por $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \ni (u, v) \mapsto (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega}$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, sea $v \in V$, de la desigualdad de Poincaré tenemos

$$(\nabla v, \nabla v)_{0,\Omega} = |v|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{1}{c_P^2} \|v\|_{1,\Omega}^2$$

luego por el Teorema de L. M. sabemos que una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}\,, \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

con $f \in L^2(\Omega)$. En este punto surgen naturalmente dos preguntas de interés:

1. ¿$u \in H^2(\Omega)$?
2. ¿$-\Delta u = f$ en $\Omega$?

- Responder la primera pregunta implica el uso de construcciones teóricas fuera del alcance de este curso. Por ejemplo, si $\Omega$ tiene una frontera de tipo $\mathcal{C}^2$, en *Partial Differential Equations (second edition)*, L. C. Evans, pág. 336, se demuestra que $u \in H^2(\Omega)$. **En adelante asumiremos que esta propiedad se satisface para cualquier E.D. de segundo orden definada sobre un dominio abierto, limitado y con frontera Lipchitz.**
- A continuación construiremos lo necesario para responder la segunda pregunta asumiendo que $u \in H^2(\Omega)$.

**Proposición (Lema Variacional)**

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y se satisface

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = 0\,,\ \forall\,\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

entonces $f = 0$ (c.t.p.) en $\Omega$.

Demostración: ver *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations*, F. Sayas, T.S. Brown M. E. Hassell, pág. 22.

Aplicación: Sea $u \in H^1(\Omega)$ la solución de

$$(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}\,,\ \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,. \quad (2)$$

Si **asumimos** que $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ podemos integrar por partes para obtener:

$$-(\Delta u, v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}\,,\ \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,,$$

lo que implica

$$(\Delta u + f, \phi)_{0,\Omega} = 0\,,\ \forall\,\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

y del Lema Variacional, obtenemos

$$-\Delta u = f\,,\ \text{ en } \Omega$$

y diremos que $u$ coincide con la **solución fuerte** de la EDP (1). Además, si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ y **en caso de existir** $\bar{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $-\Delta\bar{u}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ (**solución clásica**) la unicidad de solución para el problema variacional (2) prueba que $\bar{u} = u$.

Sea $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ considere el problema de encontrar $\psi \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\psi & = & f\,, \text{ en } \Omega \\ \psi & = & g\,, \text{ en } \Gamma\,. \end{array} \right. \tag{3}$$

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$, podemos integrar por partes

$$-(\Delta\psi, v)_{0,\Omega} = (\nabla\psi, \nabla v)_{0,\Omega}\,,$$

esto induce a buscar $u \in V_g$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}\,, \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

donde, $V_g := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v) = g\}$. Sin embargo la formulación anterior **no define** un problema variacional. Dado que $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $u$ se puede descomponer de manera **única** como $u = u_0 + u_g \in H_0^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)^{\perp}$, con $u_g = \tilde{\gamma}_0^{-1}(g)$ y $u_0 = u - u_g$, además $\|u_g\|_{1,\Omega} = \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$. Luego, para caracterizar $u$ basta encontrar $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u_0, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega} - (\nabla u_g, \nabla v)_{0,\Omega}\,,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Anteriormente mostramos que $(u, v) \mapsto (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega}$ es coerciva, así para usar el Teorema de L.M. debemos mostrar que $F \in H_0^1(\Omega)'$ definida por

$$F(v) = (f, v)_{0,\Omega} - (\nabla u_g, \nabla v)_{0,\Omega}\,,$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$, es continua. En efecto, sea $v \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|F(v)| &= \left| (f, v)_{0,\Omega} - (\nabla u_g, \nabla v)_{0,\Omega} \right| \\
&\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|\nabla u_g\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \\
&\leq (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega} .
\end{aligned}
$$

Así hemos probado la exist. y unicidad (Tma. de L.M.) de $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = u_0 + u_g \in V_g$ resuelve (4) y es única (¿por qué?). Además

$$
\|u_0\|_{1,\Omega} \leq c_P^2 (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma})
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{1,\Omega} &\leq \|u_0\|_{1,\Omega} + \|u_g\|_{1,\Omega} \\
&\leq c_P^2 \|f\|_{0,\Omega} + (c_P^2 + 1) \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el problema está bien definido.

<u>Ejercicio:</u> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, limitado, conectado, con frontera Lipchitz $\Gamma$. Considere los datos $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Analice la existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil de las siguientes EDP:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\epsilon \Delta \psi + \sigma \psi &=& 0 \,, \text{ en } \Omega \\
\psi &=& g \,, \text{ en } \Gamma
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\epsilon \Delta \psi + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi &=& f \,, \text{ en } \Omega \\
\psi &=& 0 \,, \text{ en } \Gamma
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\epsilon \Delta \psi + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + \sigma \psi &=& f \,, \text{ en } \Omega \\
\psi &=& g \,, \text{ en } \Gamma .
\end{array}
\right.
$$