

Certamen 2: Optimización 2

Problema 1 Resolver el siguiente problema por el método simplex, formato tabla (con todos los detalles)

$$\begin{aligned}
 \text{max } & (-x_1 + 3x_2 - 2x_3) \\
 \text{s.a } & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\
 & -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\
 & x_i \geq 0, i=1,2,3
 \end{aligned}$$

Solución:

añadimos 3 variables de holgura para convertir el problema en su forma estándar y cambiaremos max por -min

$$\begin{aligned}
 \text{min } & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.a } & 3x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\
 & -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10 \\
 & x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5,6
 \end{aligned}$$

Ahora tenemos la Tabla del método Simplex:

llamaremos las filas:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
Fila FZ	z	-1	3	-2	0	0	0
Fila F4	x_4	3	-1	0	1	0	7
Fila F5	x_5	-2	4	0	0	1	12
Fila F6	x_6	4	3	8	0	0	10

*Según su componente

Test de optimidad

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \{ z_j - c_j > 0 \} = 3 = z_2 - c_2$$

Por lo que nuestro pivot se encontrará en la columna 2

Calculo de cociente para elección de pivot

$$\min \left\{ \frac{x_i}{a_i} : a_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{12}{4}, \frac{10}{3} \right\} = \frac{12}{4} = 3$$

Por lo que nuestro pivot se encontrará en la fila F5 que corresponde a la fila del x_5

$$\text{Pivot} = 4$$

Entra x_2 y Sale x_5

OPERACIONES POR FILA

Fila pivot: F2 ex F5

$$F2 \rightarrow \frac{F2}{4}$$

$$\text{columna } x_1: \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{columna } x_2: \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{columna } x_3: \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{columna } x_4: \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{columna } x_5: \frac{1}{4}$$

$$\text{columna } x_6: \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{columna LD: } \frac{12}{4} = 3$$

Fila F4

$$F4 \rightarrow F4 + F2$$

$$\text{columna } x_1: 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{columna } x_2: -1 + 1 = 0$$

$$\text{columna } x_3: 0 + 0 = 0$$

$$\text{columna } x_4: 1 + 0 = 1$$

$$\text{columna } x_5: 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{columna } x_6: 0 + 0 = 0$$

$$\text{columna LD: } 7 + 3 = 10$$

Fila F6

$$F6 \rightarrow F6 - 3 * F2$$

$$\text{columna } x_1: 4 - 3 * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$$

$$\text{columna } x_2: 3 - 3 * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_3: 8 - 3 * 0 = 8$$

$$\text{columna } x_4: 0 - 3 * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_5: 0 - 3 * \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{columna } x_6: 1 - 3 * 0 = 1$$

$$\text{columna } LD: 10 - 3 * 3 = 1$$

Fila F2

$$F2 \rightarrow F2 - 3 * F1$$

$$\text{columna } x_1: 1 - 3 * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{columna } x_2: 3 - 3 * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_3: -2 - 3 * 0 = -2$$

$$\text{columna } x_4: 0 - 3 * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_5: 0 - 3 * \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{columna } x_6: 0 - 3 * 0 = 0$$

$$\text{columna } LD: 0 - 3 * 3 = -9$$

Con las operaciones por fila así queda nuestra tabla Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
Z	$\frac{1}{2}$	0	-2	0	$-\frac{3}{4}$	0	-9
x_4	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
x_5	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	6	3
x_6	$\frac{11}{2}$	0	8	0	$-\frac{3}{4}$	1	1

Test de optimidad

$$\max_{j=1,2,3} \{Z_j - C_j > 0\} = \frac{1}{2} = Z_1 - C_1$$

Por lo que nuestro pivot se encontrará en la columna 1

Calculo de cociente para elección de pivot

$$\min \left\{ \frac{x_i}{a_{i1}} : a_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{10}{\frac{5}{2}}, \frac{1}{\frac{1}{2}} \right\} = \min \left\{ \frac{10 \cdot 2}{5}, \frac{2}{1} \right\} = \min \left\{ 4, \frac{2}{1} \right\} = \frac{2}{1}$$

Por lo que nuestro pivot se encontrará en la fila F6 que corresponde a la fila del x_6

$$\text{Pivot} = \frac{11}{2}$$

Entra x_1 y Sale x_6

OPERACIONES POR FILA

Fila Pivot: F1 ex F6

$$F1 \rightarrow \frac{F1}{2}$$

$$\text{columna } x_1: \frac{11}{2} / \frac{11}{2} = 1$$

$$\text{columna } x_2: 0 / \frac{11}{2} = 0$$

$$\text{columna } x_3: 8 / \frac{11}{2} = \frac{16}{11}$$

$$\text{columna } x_4: 0 / \frac{11}{2} = 0$$

$$\text{columna } x_5: -\frac{3}{4} / \frac{11}{2} = \frac{-6}{44} = \frac{-3}{22}$$

$$\text{columna } x_6: 1 / \frac{11}{2} = \frac{2}{11}$$

$$\text{columna LD: } 1 / \frac{11}{2} = \frac{2}{11}$$

Fila F4

$$F4 \rightarrow F4 - \frac{5}{2} F1$$

$$\text{columna } x_1: \frac{5}{2} - \frac{5}{2} * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: 0 - \frac{5}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_3: 2 - \frac{5}{2} * \frac{16}{11} =$$

$$\text{columna } x_4: 1 - \frac{5}{2} * 0 = 1$$

$$\text{columna } x_5: \frac{1}{4} - \frac{5}{2} * \frac{-3}{22} =$$

$$\text{columna } x_6: 0 - \frac{5}{2} * \frac{2}{11} = -\frac{5}{11}$$

$$\text{columna LD: } 10 - \frac{5}{2} * \frac{2}{11} =$$

Fila F5

$$F5 \rightarrow F5 + \frac{1}{2} * F1$$

$$\text{columna } x_1: -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: 1 + \frac{1}{2} * 0 = 1$$

$$\text{columna } x_3: 0 + \frac{1}{2} * \frac{16}{11} = \frac{8}{11}$$

$$\text{columna } x_4: 0 + \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_5: \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \left(\frac{-3}{22} \right) = \frac{2}{11}$$

$$\text{columna } x_6: 0 + \frac{1}{2} * \frac{2}{11} = \frac{1}{11}$$

$$\text{columna LD: } 3 + \frac{1}{2} * \frac{2}{11} = \frac{100}{11}$$

Fila F2

$$F2 \rightarrow F2 - \frac{1}{2} * F1$$

$$\text{columna } x_1: \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: 0 - \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_3: -2 - \frac{1}{2} * \frac{16}{11} = -\frac{30}{11}$$

$$\text{columna } x_4: 0 - \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_5: -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} * \left(\frac{-3}{22} \right) = \frac{-30}{44}$$

$$\text{columna } x_6: 0 - \frac{1}{2} * \frac{2}{11} = -\frac{1}{11}$$

$$\text{columna LD: } -9 - \frac{1}{2} * \frac{2}{11} =$$

Con las operaciones por fila así queda nuestra tabla simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
Z	0	0	$\frac{30}{11}$	0	$\frac{15}{22}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{-100}{11}$
x_4	0	0	$\frac{-18}{11}$	1	$\frac{13}{22}$	$\frac{-5}{11}$	$\frac{105}{11}$
x_2	0	1	$\frac{0}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{34}{11}$
x_1	1	0	$\frac{16}{11}$	0	$\frac{-3}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$

Como el LD de Z es $\frac{-100}{11} < 0$

$\frac{-100}{11}$ es la solución de \min pero como en nuestro caso es $-\min$, el signo negativo se cancela y queda como solución.

La solución óptima es

$$Z = \frac{100}{11} \quad x_1 = \frac{2}{11} \quad x_2 = \frac{34}{11} \quad x_3 = 0$$


Problema 3

Analice si las condiciones de KKT se cumplen en cada vértice del políedro determinado por el conjunto factible del problema

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_i \geq 0, i=1,2$$

Encuentre una solución óptima

Solución

$$\min -2x_1 - 3x_2$$

$$-x_1 - x_2 \geq 8$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 12$$

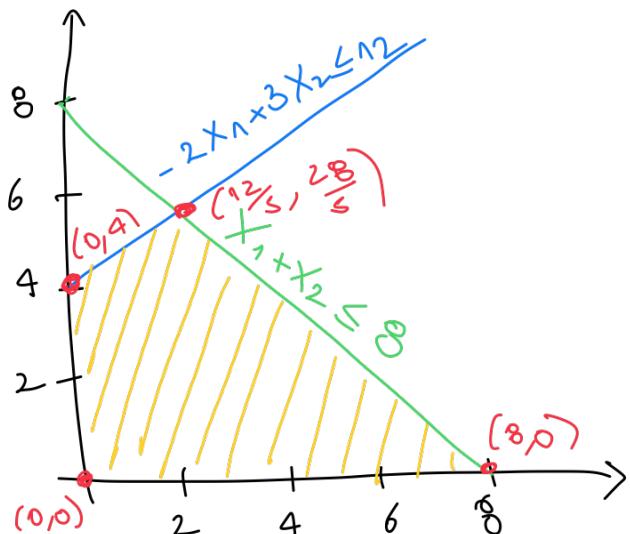
$$x_i \geq 0, i=1,2$$

Definimos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad c = (-2 \quad -3)^T$$

$$b = (8 \quad 12)$$

Primero graficamos la región factible y sus puntos extremos, los cuales son $u^1 = (0,0)$, $u^2 = (0,8)$



$$u^3 = \left(\frac{12}{5}, \frac{28}{5}\right), \quad u^4 = (8, 0)$$

Escríbimos

$$A^T = ((\alpha^1)^T \quad (\alpha^2)^T)$$

donde

$$(\alpha^1)^T = (-1, -1)$$

$$(\alpha^2)^T = (2, -3)$$

Denotamos

L_1 la recta $x_1 + x_2 = 8$

L_2 la recta $-2x_1 + 3x_2 = 12$

Analizamos en

■ $u^1 = (0, 0)$ se obtiene que $I = \emptyset$, $J = \{1, 2\}$

como se muestra en la figura que $c = (-2, -3)$

no puede ser una combinación positiva de

$e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ pues $c = -2e_1 - 3e_2$

■ $u^2 = (0, 4)$ se obtiene $I = \{2\}$, $J = \{1\}$

y tampoco puede escribirse como combinación positiva de $(a^2)^T = (2, -3)$ y e_1 , ya que

$$c = (a^2)^T - 4e_1$$

■ $u^3 = \left(\frac{12}{5}, \frac{28}{5}\right)$ se obtiene $I = \{1, 2\}$, $J = \emptyset$

se puede escribir c como combinación positiva de $(a^1)^T$, $(a^2)^T$, pues

$$c = \frac{12}{5}(a^1)^T + \frac{1}{5}(a^2)^T$$

■ $u^4 = (8, 0)$ se obtiene $I = \{1\}$, $J = \{2\}$

y c no puede ser escrito como combinación positiva de $(a^1)^T$ y e_2

$$c = 2(a^1)^T - e_2$$

Problema 4 | Usar la regla de Bland si es necesario para romper cualquier ciclo en problemas siguientes (debido a K.T. Marshall y J.W. Suurballe)

$$\min -x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_6 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \quad \leftarrow x_7 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$$

Solución

Escríbimos la tabla Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
Z	1	7	-1	-2	0	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	0	0	1
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	0	1	0	0
x_7	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	0

Test de optimidad

$$\max_{1 \leq j \leq 4} \{ z_j - c_j > 0 \} = 1 = Z_1 - C_1$$

Por lo que nuestro pivot se encontrará en la columna 1

Calculo de cociente para elección de pivot

$$\min \left\{ \frac{x_i}{a_{i1}} : a_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}} \right\} = \min \{ 1, 0 \}$$

Notamos que tenemos 2 mínimos de 0 por la regla de Bland elegiremos la fila que tenga el subíndice mayor y como $x_7 > x_6$ el pivot estará en la fila x_7

$$\text{PIVOT} = \frac{1}{2}$$

Sale x_7 entra x_1

OPERACIONES | POR FILA

Fila pivot: F1 ex F7

$$F1 \rightarrow F1 * 2$$

$$\text{columna } x_1: \frac{1}{2} * 2 = 1$$

$$\text{columna } x_2: -\frac{3}{2} * 2 = -3$$

$$\text{columna } x_3: -\frac{1}{2} * 2 = -1$$

$$\text{columna } x_4: 1 * 2 = 2$$

$$\text{columna } x_5: 0 * 2 = 0$$

$$\text{columna } x_6: 0 * 2 = 0$$

$$\text{columna } x_7: 1 * 2 = 2$$

$$\text{columna } LD: 0 * 2 = 0$$

Fila F5

$$F5 \rightarrow F5 - F1$$

$$\text{columna } x_1: 1 - 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: 1 + 3 = 4$$

$$\text{columna } x_3: 1 + 1 = 2$$

$$\text{columna } x_4: 1 - 2 = -1$$

$$\text{columna } x_5: 1 - 0 = 1$$

$$\text{columna } x_6: 0 - 0 = 0$$

$$\text{columna } x_7: 0 - 2 = -2$$

$$\text{columna } LD: 1 - 0 = 1$$

Fila F6

$$F6 \rightarrow F6 - \frac{1}{2} F1$$

$$\text{columna } x_1: \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} * -3 = -4$$

$$\text{columna } x_3: -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} * -1 = -2$$

$$\text{columna } x_4: 9 - \frac{1}{2} * 2 = 8$$

$$\text{columna } x_5: 0 - \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_6: 0 - \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$\text{columna } x_7: 1 - \frac{1}{2} * 2 = 0$$

$$\text{columna } LD: 0 - \frac{1}{2} * 0 = 0$$

Fila F2

$$F2 \rightarrow F2 - F1$$

$$\text{columna } x_1: 1 - 1 = 0$$

$$\text{columna } x_2: 7 + 3 = -4$$

$$\text{columna } x_3: -1 + 1 = 0$$

$$\text{columna } x_4: -2 - 2 = -4$$

$$\text{columna } x_5: 0 - 0 = 0$$

$$\text{columna } x_6: 0 - 0 = 0$$

$$\text{columna } x_7: 0 - 2 = -2$$

$$\text{columna } LD: 0 - 0 = 0$$

Así la tabla Simplex es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
Z	0	-4	0	-4	0	0	-2	0
x_5	0	4	2	-1	1	0	-2	1
x_6	0	-4	-2	8	0	0	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	0	2	0

Como $\left\{ Z_j - C_j \right\}_{j=2,3,4,7} < 0$

La solución óptima es

$$Z = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

