4 EDOs homogéneas de Alto Orden con Coeficientes Constantes

Consideremos la EDO homogénea de n-ésimo orden:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{6}$$

donde los coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes reales. La EDO anterior en notación de operadores diferenciales queda como:

$$T[y](x) := (D^n + a_{n-1}D^{(n-1)} + \ldots + a_1 D + a_0)y(x) = 0.$$

Para encontrar el conjunto fundamental para (6), buscamos soluciones del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$.

Reemplazando en la EDO, tenemos:

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

Lo que implica que buscamos valores de λ tales que

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Llamamos al polinomio P **polinomio característico***.*

> *En resumen, $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ es una solución de la EDO (6), con λ_i raíz del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Problema: *debemos recordar que para que estas funciones formen un conjunto fundamental, ellas deben ser linealmente independientes.*

Sabemos que todo polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces (pero ellas se pueden repetir) no necesariamente reales. Es usual entonces partir con el caso $n = 2$, i.e. considerando $P(\lambda)$ un polinomio de segundo grado con coeficientes reales.

Observación. *Este caso NO es suficiente pues el polinomio*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 1,$$

no puede factorizarse como producto de polinomios de segundo grado con coeficientes reales. En efecto, podemos escribir

$$\lambda^4 + 1 = (\lambda^2 + i)(\lambda^2 - i),$$

pero estos dos polinomios tienen coeficientes complejos.

Caso $n = 2$ *Sabemos que las raíces de*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

vienen dadas por:

$$\lambda_i = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Observación. *Observe que en el caso $\lambda_1 = \lambda_2$ (raíces repetidas) no podríamos aseverar que $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ sea un conjunto fundamental pues estas funciones claramente serían linealmente dependientes.*

Caso 1 *Si las raíces del polinomio característico son distintas y reales, tenemos dos soluciones $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ linealmente independientes. Por lo que, la solución general es de la forma*

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{7}$$

Dicho de otro modo, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es un conjunto fundamental para la EDO, o cualquier elemento $y \in Ker(T)$ se escribe como (7).

Caso 2 *Si las raíces del polinomio característico son iguales (y reales), entonces $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}$ son funciones linealmente dependientes. Por lo que la solución general es de la forma*

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}. \tag{8}$$

Para esto basta ver que $xe^{\lambda_1 x} \in Ker(T)$ y que $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio: *Deduzca la forma de la solución $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ desde la fórmula de Abel cuando el polinomio característico de la EDO tiene raíces repetidas.*

Caso 3 *Si las raíces del polinomio característico son complejas, ellas deben ser de la forma*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad y \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

De donde concluimos:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(\tilde{c}_1 e^{i\beta x} + \tilde{c}_2 e^{-i\beta x}\right)$$

Usando la fórmula de Euler, sabemos que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

obtenemos dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

y por tanto un conjunto fundamental de la EDO. Finalmente, concluimos que la solución general de la EDO en este caso viene dada por

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right), \tag{9}$$

El procedimiento es análogo cuando tenemos un orden mayor a 2. Si una raíz λ tiene multiplicidad k, entonces las soluciones correspondientes a λ se hacen linealmente independientes al agregar potencias de x:

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{\lambda x}$$

.

Ejemplo 4.1. *Encuentre la solución general de las siguientes ED:*

1. $y'' + 2y' + y = 0$

   Como es una EDO lineal de alto orden con coeficientes constantes, sabemos que la solución viene dada por $y(x) = e^{\lambda x}$. Sustituyendo, obtenemos el polinomio característico

   $$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Es decir, $\lambda = -1$ es una raíz de P con multiplicidad 2. De lo anterior, sabemos que el conjunto fundamental viene dado por

$$\{e^{-x}, xe^{-x}\},$$

i.e. cualquier solución de la ecuación homogénea $y'' + 2y' + y = 0$ puede escribirse como

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

2. $3y'' - 7y' + 2y = 0$

Sabemos que la solución viene dada por $y(x) = e^{\lambda x}$. En este caso, el polinomio característico es

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - 7\lambda + 2.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}.$$

Obtenemos las raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, que corresponde al caso 1; por lo que la solución general de la EDO es

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/3},$$

para C_1, C_2 constantes arbitrarias.

3. $2y'' + y' + y = 0$ *El polinomio característico asociado a la EDO lineal homogénea de segundo orden es*

$$P(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática observamos que las raíces del polinomio son complejas:

$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}.$$

Luego,

$$\{e^{-x/4} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right), e^{-x/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\}$$

es un conjunto fundamental para la EDO y la solución general se puede representar como

$$y(x) = e^{-x/4}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right).$$

4. $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0$ *El polinomio característico asociado a esta EDO es:*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 \\ &= \lambda^2(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Entonces, P tiene una raíz real de multiplicidad 2 $\lambda_1 = 0$, y dos raíces complejas de multiplicidad 2 cada una $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.

La solución general de la EDO toma la forma:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + C_5 x \cos(x) + C_6 x \sin(x).$$