Subsucesiones. Sucesiones de Cauchy.

- Subsucesiones. Límites subsecuenciales.
- Sucesiones de Cauchy.
- Completitud.
- Sucesiones numéricas monótonas.

Subsucesiones. Límites subsecuenciales.

Sea X un espacio métrico con métrica d.

Def.: Dadas una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y otra sucesión **estrictamente creciente** de naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$, entonces p es un **límite subsecuencial** de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo: $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero $\{(-1)^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{(-1)^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ son dos subsecesiones **constantes** que convergen a 1 y -1, respectivamente.
Por lo tanto, 1 y -1 son dos límites subsecuenciales de $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
De hecho, 1 y -1 son los únicos límites subsecuenciales de $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\boxed{\text{Ej.}}$

Ejemplo: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ par,} \\ n, & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$

- $\{x_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, $x_{2k} = \frac{1}{2k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$
  $\implies x_{2k} \xrightarrow{k} 0$. Por lo tanto 0 es un límite subsecuencial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es otra subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_{2k-1} = 2k-1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
  Entonces, $\{x_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es **no acotada**. Por lo tanto, no converge en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q}$. Entonces, todo $x \in \mathbb{R}$ es límite subsecuencial de esa sucesión

Dem.: • Como hay racionales en $B_1(x)$, sea $n_1 \in \mathbb{N} : |q_{n_1} - x| < 1$.

- Como hay **infinitos** racionales en $B_{1/2}(x)$, sea $n_2 > n_1 : |q_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$.
- Procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que, $|q_{n_k} - x| < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x. $\square$

Prop.: Una sucesión converge a un límite si y sólo si todas sus subsucesiones convergen al mismo límite.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} : p_n \xrightarrow{n} p$ y $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión.
Veamos que $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.
Sea $\varepsilon > 0$. $p_n \xrightarrow{n} p \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ d(p_n, p) < \varepsilon$.
Sea $K \in \mathbb{N} : n_K \geq N$. Entonces, $\forall k \geq K,\ n_k \geq n_K \geq N$.
Por lo tanto, $d(p_{n_k}, p) < \varepsilon$. Entonces, $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se cumple pues $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de si misma. $\square$

Teor.: Toda sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un compacto K, tiene una subsucesión convergente a algún punto de K.

Dem.: Sea $E := \{p_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset K$. E puede ser **finito o infinito.**

(i) **Si E es finito**, al menos uno de los términos p_n se repite infinitas veces.
Sea $p \in K$ ese valor que se repite y sean $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ los índices tales que $p_{n_k} = p,\ k \in \mathbb{N}$.
Entonces $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión **constante** que converge a p.

(ii) **Si E es infinito**, como $E \subset K$ y K es un compacto, entonces E tiene un **punto de acumulación** $p \in K$. Por lo tanto:

- como $E \cap B_1(p) \neq \emptyset,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}:\ d(p_{n_1}, p) < 1$;
- como $E \cap B_{1/2}(p)$ es **infinito**, $\exists n_2 > n_1 :\ d(p_{n_2}, p) < \frac{1}{2}$;
- procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que $d(p_{n_k}, p) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a p. $\square$

Corol.: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente.

Dem.: Toda sucesión acotada cae en una bola cerrada, que en $\mathbb{R}^k$ es compacta. Entonces el corolario es consecuencia del teorema anterior. $\square$

Teor.: El conjunto de límites subsecuenciales de una sucesión es **cerrado**.

Dem.: Sea E el conjunto de límites subsecuenciales de una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Veremos que $E \supset \overline{E}$. Sea $q \in \overline{E} \implies \forall r > 0,\ B_r(q) \cap E \neq \emptyset$.

- $B_{1/2}(q) \cap E \neq \emptyset \implies \exists p \in E :\ d(p,q) < \frac{1}{2}$.
  Como $p \in E$, hay una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a p
  $\implies \exists n_1 \in \mathbb{N} :\ d(p_{n_1}, p) < \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $d(p_{n_1}, q) < 1$.
- $B_{1/4}(q) \cap E \neq \emptyset \implies \exists p \in E :\ d(p,q) < \frac{1}{4}$.
  Como $p \in E$, hay una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a p
  $\implies \exists n_2 > n_1 :\ d(p_{n_2}, p) < \frac{1}{4}$ y, por lo tanto, $d(p_{n_2}, q) < \frac{1}{2}$.
- Procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que, $d(p_{n_k}, q) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a q.
Entonces, $q \in E \implies \overline{E} \subset E$. $\square$

Sucesiones de Cauchy.

Sea X un espacio métrico con métrica d.

Def.: Una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ d(p_n, p_m) < \varepsilon.}$$

- En términos intuitivos, una sucesión **converge**, si, de uno en adelante, todos sus términos **se acercan al límite** tanto como se quiera.
- En cambio, una sucesión **es de Cauchy**, si, de uno en adelante, todos sus términos **se acercan entre si** tanto como se quiera.

Ejemplo: La sucesión de aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$

$$\{1,\ 1.1,\ 1.14,\ 1.141,\ \dots\}$$

converge a $\sqrt{2}$ en $\mathbb{R}$, pero no converge en $\mathbb{Q}$.
Sin embargo es una sucesión de Cauchy tanto en en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{Q}$.

Prop.: a) Las sucesiones convergentes son de Cauchy.

b) Las sucesiones de Cauchy son acotadas.

c) Las sucesiones de Cauchy que tienen una subsucesión convergente, convergen.

Dem.: (a) Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_n \to p$. Sea $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N,\ d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \forall m, n \geq N,\ d(p_m, p_n) \leq d(p_m, p) + d(p, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Entonces, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **es de Cauchy.**

(b) Sea $\{p_n\}$ de Cauchy. Sea $\varepsilon = 1$.

$\implies \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m, n \geq N,\ d(p_m, p_n) < \varepsilon = 1$.

$\implies \forall n \geq N,\ d(p_n, p_N) < \varepsilon = 1 \implies p_n \in B_1(p_N)$.

Sea $R > \max\{d(p_1, p_N), \ldots, d(p_{N-1}, p_N), 1\}$.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in B_R(p_N)$. Por lo tanto, $\{p_n\}$ **acotada.**

(c) Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy tal que hay una subsucesión $p_{n_k} \xrightarrow{k} p$.

Veremos que $p_n \xrightarrow{n} p$. Sea $\varepsilon > 0$.

- $p_{n_k} \xrightarrow{k} p \implies \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall k \geq K,\ d(p_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy $\implies \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m, n \geq N,\ d(p_m, p_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Sea $k \geq K:\ n_k \geq N \implies \forall n \geq N,\ d(p_{n_k}, p_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n \geq N,\ d(p_n, p) \leq d(p_n, p_{n_k}) + d(p_{n_k}, p) < \varepsilon$. Entonces, $p_n \xrightarrow{n} p$. $\square$

Teor.: a) Las sucesiones de Cauchy en un espacio métrico compacto convergen.

b) [criterio de Cauchy] Las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}^k$ convergen.

Dem.: (a) Sea X un espacio métrico compacto y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **de Cauchy.**

Teor. clase anterior $\Longrightarrow$ $\exists \{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (subsucesión) tal que $p_{n_k} \xrightarrow{k} p \in X.$

Prop. anterior (c) $\Longrightarrow$ $p_n \xrightarrow{n} p.$

(b) Sea $\{p_n\} \subset \mathbb{R}^k$ de Cauchy.

Prop. anterior (b) $\Longrightarrow$ $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ acotada

$\Longrightarrow$ hay una bola cerrada B : $p_n \in B \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Como la bola B es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^k$, es compacta.

Entonces (a) $\Longrightarrow$ $\{p_n\}$ **converge.** $\square$

Completitud.

Def.: Un espacio métrico es **completo** si las sucesiones de Cauchy en ese espacio convergen a un elemento del mismo espacio.

El teorema anterior muestra que cualquier **espacio métrico compacto** y **el espacio euclideo** $\mathbb{R}^k$ son **completos.**

En cambio, $\mathbb{Q}$ **no es completo**. En efecto, por ejemplo, la sucesión de aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ que ya usamos, es una sucesión en $\mathbb{Q}$ que converge en $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Como converge en $\mathbb{R}$, es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por ende en $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$, ya que si convergiera a $q \in \mathbb{Q}$, tendría dos límites distintos en $\mathbb{R}$: q y $\sqrt{2}$.

La completitud de un espacio métrico es una propiedad muy útil, pues permite demostrar la covergencia de una sucesión chequeando que la sucesión es de Cauchy, sin necesidad de conocer su límite a priori, lo cual en cambio hace falta si se quiere demostrar la convergencia directamente.

Sucesiones numéricas monótonas.

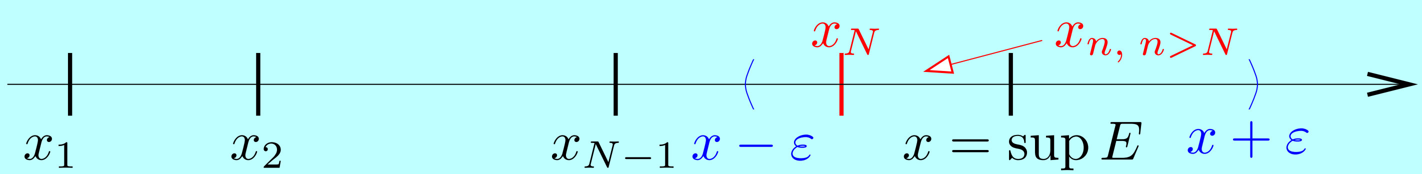
Def.: Una sucesión de números reales $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ es:

- **monótona creciente**, si $x_n \leq x_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$;
- **monótona decreciente**, si $x_n \geq x_{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$;
- **monótona**, si es monótona creciente o monótona decreciente.

Teor.: Las sucesiones monótonas en $\mathbb{R}$ convergen si y sólo si son acotadas.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Ya demostramos que cualquier sucesión convergente, es acotada.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ monótona creciente. (Si es decreciente, la demostración es esencialmente la misma $\boxed{\textbf{Ej.}}$) Entonces, $E := \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es acotado. Sea $x := \sup E$. Veremos que $x_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$.



$x := \sup E \implies \exists N \in \mathbb{N} :\ x - \varepsilon < x_N \leq x$ (si no, $x - \varepsilon$ cota sup. de E).

$\{x_n\}$ monótona creciente $\implies \forall n \geq N,\ x_N \leq x_n \leq x$

$\implies x - \varepsilon < x_n \leq x \implies |x_n - x| < \varepsilon$. Por lo tanto, $x_n \to x$. $\square$