UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS: CURSO DE REPASO (525315)
Listado Nº 5 (Teoremas integrales y análisis vectorial

1. *(Evaluación de una integral curvilinea con el teorema de Stokes).* Sea $\mathcal{C}$ la curva cerrada de $\mathbb{R}^3$ obtenida al intersectar el cilíndro de eje z y radio 1 con el plano de vector normal $\mathbf{N} = (1,1,1)^T$ pasando por el punto $(1,0,0)$. Se orienta $\mathcal{C}$ en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. Evalue la integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \big(- y^3 \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y - z^3 \mathrm{d}z \big)$$

de dos maneras distintas:

   (i) usando la definición de las integrales curvilineas;

   (ii) usando el teorema de Stokes.

2. *(Interpretación del rotacional como circulación por unidad de area).* Dados un vector unitario $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon > 0$ y un punto $M(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$, sean $\mathcal{S}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ y $\mathcal{C}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ el disco y la circunferencia de centro M y radio $\varepsilon > 0$ contenidos en el plano ortogonal a $\mathbf{n}$ pasando por M. Denotamos por $A_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ el area de $\mathcal{S}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})$. Sean $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 y continuo, respectivamente.

   (a) Use el teorema del valor intermedio para integrales de funciones vectoriales sobre superficies del ejercicio 7 para mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A_\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\ .$$

   (b) Muestre que $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A_\varepsilon} \oint_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \big(\mathbf{rot}(\mathbf{F})\big)(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$.

   (c) Recuerda que $\oint_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ es la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}_{\varepsilon,\mathbf{n}}(\mathbf{r})$. ¿ Dado un $\mathbf{r}$ fijo, para que dirección $\mathbf{n}$ la circulación por unidad de area es máxima (mínima) en el límite $\varepsilon \to 0$? ¿ Cual es el valor del máximo (mínimo)? Deduzca que $\|\mathbf{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{r})\|$ se interpreta como la circulación per unidad de area de $\mathbf{F}$ a lo largo de una pequeña circunferencia centrada en $\mathbf{r}$ en el plano perpendicular a $\mathbf{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{r})$, orientada positivamente con respeto a este vector.

3. *(Campos vectoriales de divergencia nula).* Sea $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clases C^1 y C^2, respectivamente.

   (a) Muestre que si $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$, luego $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$.

(b) Reciprocamente, suponga que $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ y define $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ por

$$\begin{aligned} A_x(x,y,z) &= \int_{\overrightarrow{M_2M}} B_y \,\mathrm{d}s - \int_{\overrightarrow{M_1M_2}} B_z \,\mathrm{d}s \\ A_y(x,y,z) &= -\int_{\overrightarrow{M_2M}} B_x \,\mathrm{d}s \quad , \quad A_z(x,y,z) = 0 \,, \end{aligned}$$

donde $M_1 = (x,0,0)$, $M_2 = (x,y,0)$ y $M = (x,y,z)$. Muestre que $\mathbf{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. Deduzca que $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ si y solo si existe un campo vectorial $\mathbf{A}$ de clase C^2 tal que $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$.

(c) Considere $\mathbf{B}(x,y,z) = xz\,\mathbf{e}_x - yz\,\mathbf{e}_y + y\,\mathbf{e}_z$, donde $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ son los vectores unitarios de los ejes x, y y z. Muestre que $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ y halle un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$.
Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada contenida en el semiplano superior $z \geq 0$ y de frontera la circunferencia de centro $(0,1,0)$ y radio 1 contenida en el plano $z = 0$, tal que $\mathcal{S}$ y este plano delimitan una región acotada de $\mathbb{R}^3$ y las normales a $\mathcal{S}$ apuntan hacia afuera de esta región.
Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}$ usando el teorema de Stokes.

4. *(Campos conservativos).* Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ para cualquiera curva orientada cerrada $\mathcal{C}$ simple C^1 por trozos de $\mathbb{R}^3$;

(ii) $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ para cualesquiera curvas orientadas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ simples C^1 por trozos que tienen el mismo punto de partida y el mismo punto de llegada;

(iii) existe una función escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(f)$.

(iv) $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$

(hemos visto en clase que (iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) por el teorema fundamental del cálculo).

Indicación: muestre que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).
Para mostrar (ii) $\Rightarrow$ (iii), definir $f(x,y,z) = \int_{\overrightarrow{OM_1}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\overrightarrow{M_1M_2}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\overrightarrow{M_2M}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, donde $M_1 = (x,0,0)$, $M_2 = (x,y,0)$ y $M = (x,y,z)$ como en el Problema 2. Notar que $f(x,y,z)$ no cambia al substituir M_1 y M_2 por $N_1 = (0,y,0)$ y $N_2 = (0,y,z)$ o por $Q_1 = (0,0,z)$ y $Q_2 = (x,0,z)$.

5. *(Evaluación de integrales de superficie con el teorema de Gauss-Ostrogradsky).* Calcule la integral $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}$ de la pregunta (c) del Problema 3 usando el teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradsky.

6. *(Identidad de Green).* Mostrar que si f y g son de clase C^2 en un abierto que contiene Ω, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es acotado y de frontera $\partial\Omega$ suave y C^1 por trozos, luego

$$\iint_{\partial\Omega} \big(f\,\mathbf{grad}(g) - g\,\mathbf{grad}(f)\big) \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma} = \iiint_{\Omega} \big(f\Delta g - g\Delta f\big)\mathrm{d}V \ .$$

7. *Ejercicio de repaso sobre integrales de superficie:*
   En este ejercicio se supone conocido el siguiente resultado (teorema del valor intermedio para funciones de más de una variable): una función f continua sobre un conjunto compacto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toma todos sus valores entre su mínimo y su máximo, es decir, $f(\Omega) = [m, M]$ con $m = \min_\Omega(f)$ y $M = \max_\Omega(f)$.

   (a) Demuestre el siguiente teorema del valor intermedio para integrales dobles: si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio cerrado acotado de tipo 1 o 2, $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tal que $g \geq 0$ y $\iint g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$, luego existe $(x_A, y_A) \in D$ tal que
   $$\iint_D fg\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_A, y_A) \iint_D g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$

   (b) Demuestre el teorema del valor intermedio para integrales triples: si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una funcion continua sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ compacto y conexo, luego existe $(x_A, y_A, z_A) \in \Omega$ tal que
   $$\iiint_\Omega f\,\mathrm{d}^3V = \mathrm{Vol}(\Omega) f(x_A, y_A, z_A) \,.$$

   (c) Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada parametrizada por $\phi : D \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 por trozos y suave, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio de tipo 1, 2 o 3. Demuestre el teorema del valor intermedio para integrales de funciones escalares sobre superficies: si $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es una función escalar continua sobre $\mathcal{S}$, luego existe un punto $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{S}$ tal que
   $$\iint_\mathcal{S} f\,\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{Area}(\mathcal{S})\, f(x_A, y_A, z_A) \,.$$

   (d) Demuestre el teorema del valor intermedio para integrales de funciones vectoriales sobre superficies: si $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, luego existe un punto $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{S}$ tal que
   $$\iint_\mathcal{S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Area}(\mathcal{S})\, \mathbf{F}(x_A, y_A, z_A) \cdot \frac{\mathbf{N}(x_A, y_A, z_A)}{\|\mathbf{N}(x_A, y_A, z_A)\|} \,,$$
   donde $\mathbf{N} = \mathbf{T}_s \wedge \mathbf{T}_t$ es el vector normal a $\mathcal{S}$ associado a la parametrización ϕ.