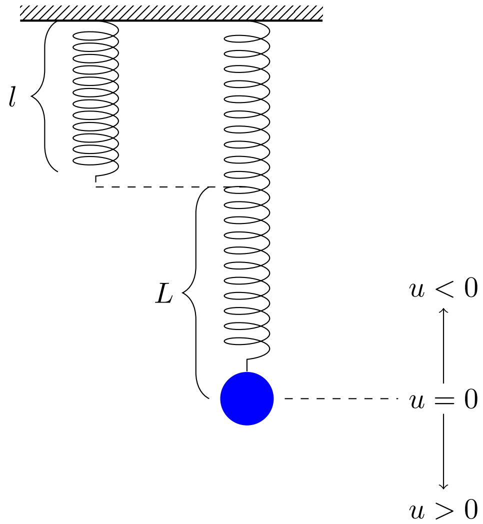
Contents

1 Sistemas masa-resorte

Consideremos un resorte de longitud natural (sin estirar) l, sujeto al techo. Luego, unamos a uno de sus extremos un objeto de masa m, cuando este objeto esté enganchado el resorte se estirará una longitud L. LLamaremos **posición de equilibrio** a la posición en la cual el peso se equilibra en el resorte sin moverse:



En el dibujo, $u(t)$ denota la posición del objeto en el instante de tiempo t. Como se indica, todas las fuerzas, velocidades y desplazamientos hacia abajo de la posición de equilibrio ($u = 0$) serán positivas y todas las fuerzas, velocidades y desplazamientos hacia arriba serán negativas.

Ley de Hooke. Objetos con masas diferentes alargan el resorte en cantidades diferentes, por lo que la cantidad de alargamiento L del resorte depende naturalmente de la masa. La ley de Hooke indica que el resorte ejerce una fuerza restauradora F_r *opuesta a la dirección de elongación* y *proporcional a la cantidad de elongación* L. Esta fuerza es expresada como:

$$F_r = k \cdot L,$$

donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante de resorte** y en esta sección **se considera constante** (supuesto que no es necesariamente realista).

La variación de la posición del objeto puede ser descrito como un sistema dinámico y puede modelarse a través de una EDO. Para esto, recordamos que la segunda Ley de Newton nos dice que

$$m\ a(t) = \text{Suma de fuerzas},$$

donde la aceleración a puede escribirse en función de la posición como:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a(t).$$

Escribiendo entonces la suma de fuerzas ejercidas sobre el objeto como una función que depende del tiempo, posición y velocidad, nos queda que

$$m\ u'' = F(t, u, u').$$

Lo que se reduce a hallar una expresión para las fuerzas ejercidas. En este sentido, sabemos que el peso del objeto (que es constante pues no hay variación de masa) está dado por $P = mg$, donde g es la constante de aceleración gravitacional estándar.

Notemos que en la posición de equilibrio debe pasar que $P = F_r(0)$, es decir,

$$mg = kL.$$

Si la masa se desplaza una cantidad $u(t)$ de la posición de equilibrio, entonces $F_r(t) = k(u(t) + L)$. Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúan sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas, la aplicación de la Ley de Newton nos queda como:

$$\begin{aligned} m\ u''(t) &= -k(u(t) + L) + mg \\ &= -k\ u(t). \end{aligned}$$

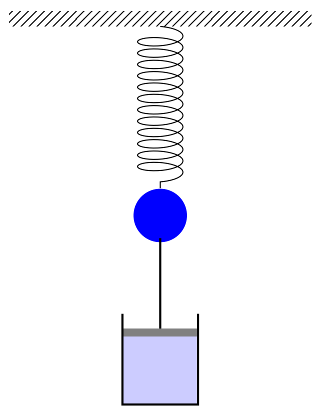
El signo negativo en la ecuación anterior, indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento.

Fuerzas Amortiguadoras. Los amortiguadores contrarrestan cualquier movimiento del objeto y la describimos como:

$$F_a(t) = -\gamma u'(t),$$

donde $\gamma > 0$ es la constante de amortiguación.

Notemos que si el objeto se mueve hacia abajo, entonces la velocidad u' será positiva y por tanto F_a será negativa y tirará del objeto hacia arriba. Por el contrario, si el objeto se mueve hacia arriba, la velocidad u' será negativa y por lo tanto F_a será positiva y empujará el objeto hacia abajo. Por lo tanto, la fuerza de amortiguación actuará para contrarrestar el movimiento del objeto.



Otras Fuerzas. En el sistema masa-resorte pueden actuar otras fuerzas sobre el objeto, las cuales agruparemos y denotaremos por $F(t)$.

Considerando todas las fuerzas y aplicando la 2da ley de Newton, tenemos la EDO:

$$mu''(t) = -ku(t) - \gamma u'(t) + F(t).$$

Esta es una EDO de 2do orden con variable dependiente u, variable independiente t y de **coeficientes constantes** . A esta ecuación se le suelen asociar las siguientes dos condiciones iniciales:

- $u(0) = u_0 \longrightarrow$ desplazamiento inicial desde la posición de equilibrio.
- $u'(0) = u_1 \longrightarrow$ velocidad inicial.

Estudiemos algunos casos particulares de este problema de valores iniciales:

1.1 Movimiento libre (no amortiguado y sin fuerzas externas)

Este es el caso más simple y la EDO está dada por:

$$mu''(t) + ku(t) = 0.$$

La solución general de este problema es:

$$u(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

con C_1, C_2 constantes. Usando las condiciones iniciales del PVI podemos hallar estas constantes.
Se suele representar esta solución como:

$$u(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \delta\right),$$

de esta manera, R representa la amplitud del desplazamiento y δ el ángulo de fase. Notemos que $C_1 = R\cos(\delta)$ y $C_2 = R\sin(\delta)$, por lo tanto, $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\delta = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$.

Ejemplo 1.1. *Considere un sistema masa-resorte sin amortiguamiento o fuerzas externas actuando, en donde se tiene un resorte y un objeto de* $10Kg$*. El objeto estira el resorte* $5m$*, y se desplaza inicialmente* $3m$ *hacia arriba de la posición de equilibrio con una velocidad inicial de* $1m/seg$ *hacia abajo. Determine la posición* u *del objeto para cualquier tiempo* t*.*

Usando el valor $g = 10\ m/s^2$ *podemos calcular la constante del resorte usando la relación* $kL = mg$*. Tenemos entonces que* $k = \frac{100}{5}$ *y la posición del objeto en el instante de tiempo* t *viene dada por la solución del PVI:*

$$\begin{cases} 10u''(t) + \frac{100}{5}u(t) = 0, \\ u(0) = -3 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

La solución general de la EDO no homogénea puede escribirse como

$$u(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{2}\, t\right),$$

o

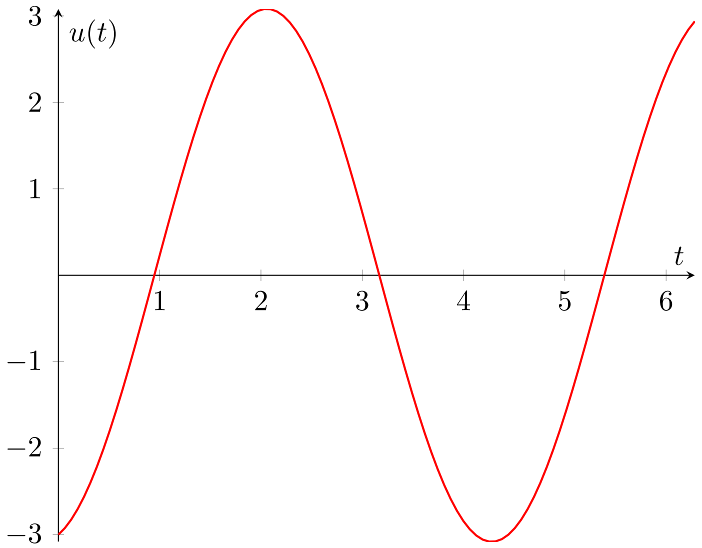
$$u(t) = R\cos\left(\sqrt{2}\, t - \delta\right).$$

Considerando la primera expresión y las condiciones iniciales tenemos que

$$-3 = u(0) = C_1,$$
$$1 = u'(0) = \sqrt{2}C_2.$$

Luego, la solución del PVI viene dada por

$$u(t) = -3\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right).$$



Note que en la gráfica anterior, los valores positivos en el eje de u es el usual (a diferencia del orden que se considera en el gráfico de fuerzas). Por lo tanto, el desplazamiento del objeto será realmente el opuesto.

Observación. *Las magnitudes del ejemplo anterior fueron escogidas para que las constantes fuesen compactas, pero no son necesariamente realistas. En general, con magnitudes realistas debemos tener cuidado con las unidades físicas.*

1.2 Movimiento amortiguado y sin fuerzas externas

En este caso la EDO será:

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0,$$

que sabemos que tiene soluciones del tipo exponencial.

El polinomio característico de la EDO es:

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0.$$

Así que las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m},$$

y distinguimos los tres casos clásicos:

1. *Discriminante nulo: $\gamma^2 - 4mk = 0$. En este caso, la solución general de la EDO homogénea de coeficientes constantes es:*

$$u(t) = C_1 \exp\left\{-\frac{\gamma}{2m}t\right\} + C_2 t \exp\left\{-\frac{\gamma}{2m}t\right\}.$$

Observación. *Note que cuando $t \to \infty$ se tiene que $u(t) \to 0$, por lo que el amortiguamiento hace que el objeto vuelva a la posición de equilibrio.* **De hecho, este comportamiento se puede ver en tiempo finito (una posición suficientemente cercana al equilibrio).**

Este caso es conocido como **amortiguamiento crítico** *y $\gamma_{cr} = 2\sqrt{mk}$ es el coeficiente de amortiguamiento crítico.*

2. *Discriminante positivo: $\gamma^2 - 4mk > 0$. En este caso, la solución general de la EDO es:*

$$u(t) = C_1 \exp\{\lambda_1 t\} + C_2 \exp\{\lambda_2 t\},$$

para C_1, C_2 constantes.

Esto ocurrirá cuando $\gamma > \gamma_{cr}$, y se conoce como sistema **sobreamortiguado**.

Observación. *Note que automáticamente $\lambda_2 < 0$. Respecto a λ_1, dado que $\gamma^2 - 4mk < \gamma^2$, se puede demostrar fácilmente que $\lambda_1 < 0$. Por lo tanto, cuando $t \to \infty$ se tiene que $u(t) \to 0$, por lo que el amortiguamiento hace que el objeto nuevamente vuelva a la posición de equilibrio.*

Ejemplo 1.2. *Se podrá considerar $\gamma \to +\infty$? Qué pasa en este caso?*

Discriminante negativo: $\gamma^2 - 4mk < 0$. Notemos que las raíces λ_1 y λ_2 corresponden a complejos conjugados con parte real $\alpha = \frac{-\gamma}{2m}$ y parte imaginaria $\beta = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}$. Luego, escribimos la solución general de la EDO homogénea como

$$u(t) = e^{\frac{-\gamma}{2m}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\gamma\, t}{2m}\sqrt{\frac{4mk}{\gamma^2} - 1}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\gamma\, t}{2m}\sqrt{\frac{4mk}{\gamma^2} - 1}\right)\right).$$

Esto ocurrirá cuando $\gamma < \gamma_{cr}$, y se conoce como sistema **subamortiguado**.

Observación. *Dado que las funciones sinusoidales son acotadas y $\frac{-\gamma}{2m} < 0$, es fácil ver que también se cumple que* **a tiempo largo** *el amortiguamiento hace que el objeto nuevamente vuelva a la posición de equilibrio.*

Ejemplo 1.3. *Considere el sistema masa-resorte del primer ejemplo y añada un amortiguador que ejerza una fuerza de $10N$ cuando la velocidad es $2m/s$. Encuentre el desplazamiento en cualquier instante de tiempo t, es decir, $u(t)$.*

Antes de plantear la EDO y hallar la solución , calculemos el coeficiente de amortiguamiento:

$$10 = F_a(t) = 2\gamma \Rightarrow \gamma = 5.$$

Además, $\gamma_{cr} = 2\sqrt{mk} = 20\sqrt{2} > \gamma$. Por lo tanto, se trata de un caso subamortiguado.
El PVI para este ejemplo es:

$$\begin{cases} 10u''(t) + 5u'(t) + 20u(t) = 0, \\ u(0) = -3 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

Las raíces del polinomio característico son:

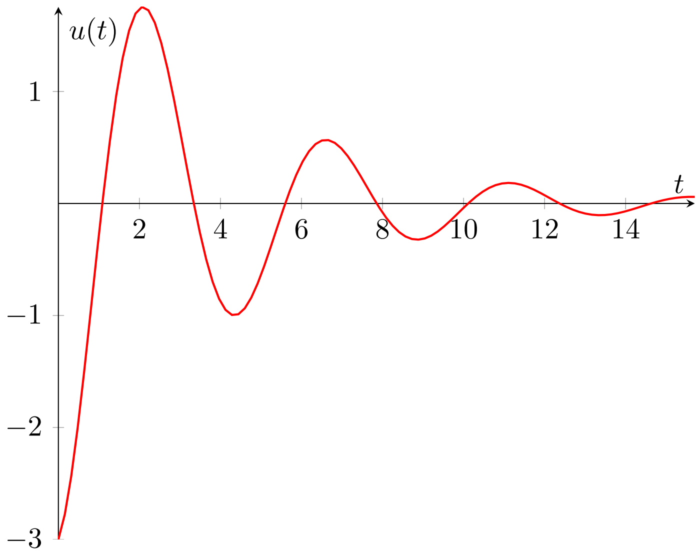
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}i.$$

La solución general de la EDO es entonces:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{4}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right).$$

Usando además las condiciones iniciales, nos queda que el desplazamiento del objeto en cualquier instante t viene dado por

$$u(t) = e^{-\frac{t}{4}} \left(-3\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right) + \frac{1}{\sqrt{31}}\sin\left(\frac{\sqrt{31}}{4}t\right)\right).$$



En el caso subamortiguado (al igual que el caso sin amortiguamiento) podemos ver oscilaciones (que se van o no apagando). Sin embargo, en el caso de amortiguamiento crítico o sobreamortiguado estas oscilaciones desaparecen (y la fuerza del resorte es amortiguada rápidamente). Desde el punto de vista físico, el amortiguamiento crítico (y también el sobreamortiguamiento) suele ser preferido al subamortiguamiento. Piensa en los amortiguadores de tu auto: cuando pasas por un bache, no quieres pasar los siguientes minutos rebotando mientras se disipan las vibraciones provocadas por el golpe.

1.3 Movimiento con fuerzas externas y NO amortiguado

La ecuación diferencial en este caso es:

$$mu''(t) + ku(t) = F(t)$$

Esta es simplemente una ecuación diferencial no-homogénea cuya solución general es de la forma

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t),$$

con u_h la solución de la EDO homogénea asociada y u_p una solución particular que podemos hallar usando, por ejemplo, variación de parámetros o aniquiladores.

Imaginemos que el forzamiento externo viene dado por una función periódica del tipo:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t).$$

Es decir, tenemos la EDO no-homogénea:

$$mu'' + ku = F_0 \sin(\omega t).$$

La solución de la EDO homogénea asociada ya la hemos calculado:

$$u_h(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

con C_1, C_2 constantes.

Hallemos ahora la solución particular usando variación de parámetros, proponiendo una solución particular de la forma

$$u_p(t) = c_1(t)\underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}_{u_1(t)} + c_2(t)\underbrace{\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}_{u_2(t)},$$

para c_1 y c_2 functiones a calcular.

Estas funciones c_1, c_2 deben resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Es decir, se debe cumplir que

$$\begin{cases} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) c_1'(t) + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) c_2'(t) & = 0 \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) c_1'(t) + \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) c_2'(t) & = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$\begin{cases} c_1'(t) & = -\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ c_2'(t) & = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

Para resolver las integrales y hallar c_1 y c_2 debemos considerar dos casos:

Caso $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Calculamos la integrales asociadas a c_2 y c_1:

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F_0}{m}\int \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt \\ &= \frac{F_0}{2m\omega}\int \sin(2\omega t)dt \\ &= -\frac{F_0}{4m\omega^2}\cos(2\omega t) + K_1 \Rightarrow c_2(t) = -\frac{F_0}{4k}\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{F_0}{m\omega}\int \sin^2(\omega t)dt \\ &= -\frac{F_0}{2m\omega}\int (1-\cos(2\omega t))dt \\ &= -\frac{F_0}{2m\omega}t + \frac{F_0}{4\omega^2}\sin(2\omega t) + K_2 \Rightarrow c_1(t) = -\frac{F_0}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\,t + \frac{F_0}{4k}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \end{aligned}$$

Tomando las constantes de integración como cero, nos queda que la solución particular en el caso $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *es:*

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \left(-\frac{F_0}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\ t + \frac{F_0}{4k}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) - \frac{F_0}{4k}\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \\ &= -\frac{F_0}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\ t\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + \frac{F_0}{4k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \end{aligned}$$

Así que, la solución general del sistema masa-resorte sin amortiguación y con un forzamiento $F_0\sin(\omega t)$, *para* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, *viene dada por:*

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) + u_p(t) \\ u(t) &= C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) - \frac{F_0}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\ t\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right). \end{aligned}$$

Observe que la amplitud de la onda aumentará con el tiempo, lo que se conoce como **resonancia**.

Caso $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Seguimos el mismo procedimiento que en el caso anterior, recordando que:

$$\cos((\alpha-\beta)t) - \cos((\alpha+\beta)t) = 2\sin(\beta t)\sin(\alpha t),$$

$$\sin((\alpha+\beta)t) + \sin((\alpha-\beta)t) = 2\sin(\alpha t)\cos(\beta t),$$

para cualquier α, β.

Si por simplicidad de notación escribimos $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, *podemos calcular* $c_1(t)$ *y* $c_2(t)$ *como:*

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F_0}{m}\int \sin(\omega t)\sin(\omega_0\ t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F_0}{m}\int \left\{\cos\left((\omega_0-\omega)\,t\right) - \cos\left((\omega_0+\omega)\,t\right)\right\}dt \\ c_1(t) &= -\frac{F_0}{2(\omega_0-\omega)\omega_0 m}\sin\left((\omega_0-\omega)\,t\right) + \frac{F_0}{2(\omega_0+\omega)\omega_0 m}\sin\left((\omega_0+\omega)\,t\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0}\int \sin(\omega t)\cos(\omega_0\ t)\,dt \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0}\int \sin((\omega+\omega_0)t) + \sin\left((\omega-\omega_0)\ t\right)dt \\ c_2(t) &= -\frac{F_0}{2(\omega+\omega_0)\omega_0 m}\cos\left((\omega+\omega_0)\,t\right) - \frac{F_0}{2(\omega-\omega_0)\omega_0 m}\cos\left((\omega-\omega_0)\,t\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en u_p *y usando propiedades trigonométricas podemos ver que:*

$$u_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\omega\ t),$$

lo que nos da la solución general del sistema masa-resorte sin amortiguación y con un forzamiento $F_0 \sin(\omega t)$, *para* $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) + u_p(t) \\ u(t) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \omega^2)} \sin\left(\omega\ t\right). \end{aligned}$$

1.4 Movimiento con fuerzas externas y amortiguado