UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS: CURSO DE REPASO (525315)
Listado Nº 3 (Funciones de varias variables: integrales dobles y triples)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas por trozos. Muestre que

$$\iint_R f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right) \ , \quad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d].$$

2. Usando una integral doble, halle el area de una elipse de semieje mayor a y semieje menor b, $0 < b < a$.

3. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una funcion continua en $R = [a, b] \times [c, d]$. Para $a < x < b$ y $c < y < d$, definimos

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \ .$$

   (a) Muestre que F tiene derivadas parciales de primer orden y exprese $\partial_x F$ y $\partial_y F$ como integrales simples de f.
   (b) Muestre que F tiene derivadas segundas mixtas y que $\partial_x\partial_y F(x, y) = \partial_y\partial_x F(x, y)$.
   (c) Use este ejemplo para estudiar la relación entre el teorema de Fubini y el teorema de Clairaut-Schwarz.

4. Sea $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ el disco de centro $(0, 0)$ y radio 1. Para $p > -2$, calcule la integral

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ .$$

5. Evalue la integral $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

6. Usando el cambio de variables $x = u(1 - v)$, $y = uv$, evalue la siguiente integral sobre el dominio D delimitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ y $x + y = 4$:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x + y} \ .$$

7. La temperatura (en ^oC) en un punto (x, y, z) de una bola B_1 de centro el origen y radio 1 está dada por $T(x, y, z) = T_1(|x| + |y| + |z|)$ con $T_1 > 0$. Determine la temperatura promedia en la bola.

8. Determine el momento de inercia de un sólido en forma de cono recto con base circular al respeto a su eje de simetría, suponiendo una densidad uniforme.

Mayo 4, 2022.
DS/ds