Optimización III (525551)

Módulo I: Algoritmos polinomiales

Pr. Julio Aracena.

Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Primer semestre, 2023

Algoritmo polinomial

Definición: Un algoritmo $\mathcal{A}$, con entrada x de tamaño $size(x) = n$, se dice polinomial si su tiempo de ejecución es $O(n^k)$, con $k \in \mathbb{N}$.

Algoritmo polinomial

Definición: Un algoritmo $\mathcal{A}$, con entrada x de tamaño $size(x) = n$, se dice polinomial si su tiempo de ejecución es $O(n^k)$, con $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

- El algoritmo Burbuja recibe como entrada un arreglo a de tamaño n y su tiempo de ejecución es $O(n^2)$. Luego, Burbuja es un algoritmo polinomial (cuadrático).

Algoritmo polinomial

Definición: Un algoritmo $\mathcal{A}$, con entrada x de tamaño $size(x) = n$, se dice polinomial si su tiempo de ejecución es $O(n^k)$, con $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

- El algoritmo Burbuja recibe como entrada un arreglo a de tamaño n y su tiempo de ejecución es $O(n^2)$. Luego, Burbuja es un algoritmo polinomial (cuadrático).
- El algoritmo de Euclides del MCD recibe como entrada $n, m \in \mathbb{N}$ con tamaño $\log(n) + \log(m)$ y su tiempo de ejecución es $O(\log(n) + \log(m))$, luego es polinomial (lineal).

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

1: **for** $k = 2$ to $m - 1$ **do**
2: $r \leftarrow m$ mód k
3: **if** $r = 0$ **then**
4: **return** m no es primo
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** m es primo

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Tiempo de ejecución:

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

1: **for** $k = 2$ to $m - 1$ **do**
2: $r \leftarrow m$ mód k
3: **if** $r = 0$ **then**
4: **return** m no es primo
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** m es primo

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

```
1: for k = 2 to m − 1 do
2:     r ← m mód k
3:     if r = 0 then
4:         return m no es primo
5:     end if
6: end for
7: return m es primo
```

Tiempo de ejecución:

1. En cada iteración del ciclo for se realizan 2 operaciones elementales (ie O(1) operaciones elementales).

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

1: **for** $k = 2$ to $m - 1$ **do**
2: $r \leftarrow m$ mód k
3: **if** $r = 0$ **then**
4: **return** m no es primo
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** m es primo

Tiempo de ejecución:

1. En cada iteración del ciclo for se realizan 2 operaciones elementales (ie O(1) operaciones elementales).
2. En el peor caso se ejecutan $O(m)$ iteraciones del ciclo for.

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

1: **for** $k = 2$ to $m - 1$ **do**
2: $r \leftarrow m$ mód k
3: **if** $r = 0$ **then**
4: **return** m no es primo
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** m es primo

Tiempo de ejecución:

1. En cada iteración del ciclo for se realizan 2 operaciones elementales (ie O(1) operaciones elementales).
2. En el peor caso se ejecutan $O(m)$ iteraciones del ciclo for.
3. Por lo tanto, el tiempo de ejecución es: $O(m) \cdot O(1) = O(m)$.

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

```
1: for k = 2 to m − 1 do
2:     r ← m mód k
3:     if r = 0 then
4:         return m no es primo
5:     end if
6: end for
7: return m es primo
```

Tiempo de ejecución:

1. En cada iteración del ciclo for se realizan 2 operaciones elementales (ie O(1) operaciones elementales).
2. En el peor caso se ejecutan $O(m)$ iteraciones del ciclo for.
3. Por lo tanto, el tiempo de ejecución es: $O(m) \cdot O(1) = O(m)$.
4. Como el tamaño de la entrada es $size(m) = \log(m)$, entonces el algoritmo NO es polinomial $(O(m) \neq O(\log(m))^k)$.

Algoritmo polinomial

El siguiente algoritmo determina si un número natural es o no primo.

Algoritmo de Euclides

Algorithm Primo Básico(m)

Input: $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$

```
1: for k = 2 to m − 1 do
2:     r ← m mód k
3:     if r = 0 then
4:         return m no es primo
5:     end if
6: end for
7: return m es primo
```

Tiempo de ejecución:

1. En cada iteración del ciclo for se realizan 2 operaciones elementales (ie O(1) operaciones elementales).
2. En el peor caso se ejecutan $O(m)$ iteraciones del ciclo for.
3. Por lo tanto, el tiempo de ejecución es: $O(m) \cdot O(1) = O(m)$.
4. Como el tamaño de la entrada es $size(m) = \log(m)$, entonces el algoritmo NO es polinomial $(O(m) \neq O(\log(m))^k)$.

Observación: Hay un algoritmo polinomial que determina si un entero $m \in \mathbb{N}$ es primo o no. (Agrawal et al. "Prime is P". Annals of Mathematics 160(2) (2004), pp 781-793).

Algoritmo base de exploración de grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algoritmo base de exploración de grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.

Algoritmo base de exploración de grafos

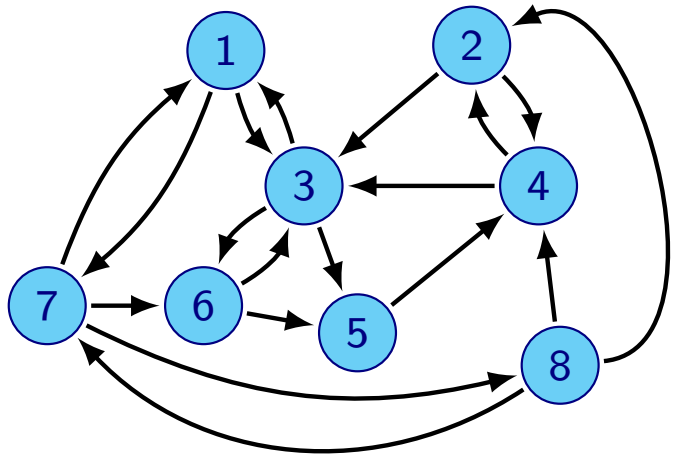
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- Inicio: $s = 1$; $pred[s] = Null$; $Q = \{1\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

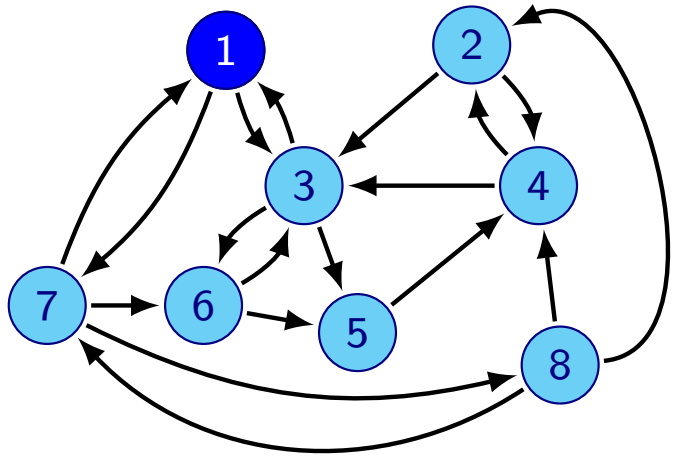
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 1$: $M = \{1\}$;
  $pred[3] = pred[7] = 1$;
  $Q = \{3, 7\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

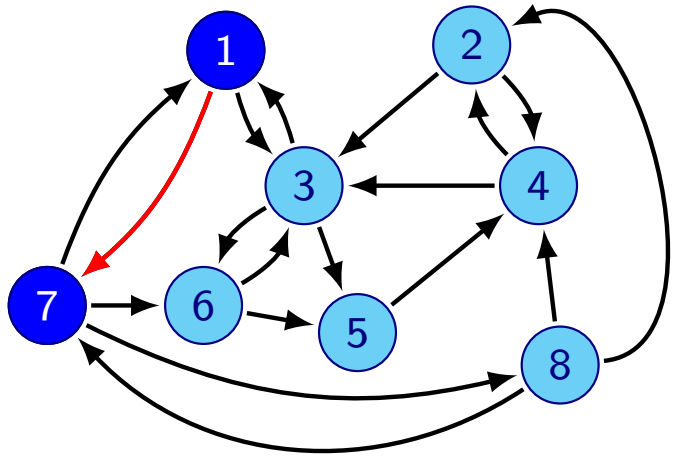
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 2$: $M = \{1, 7\}$; $pred[6] = pred[8] = 7$, $Q = \{3, 6, 8\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

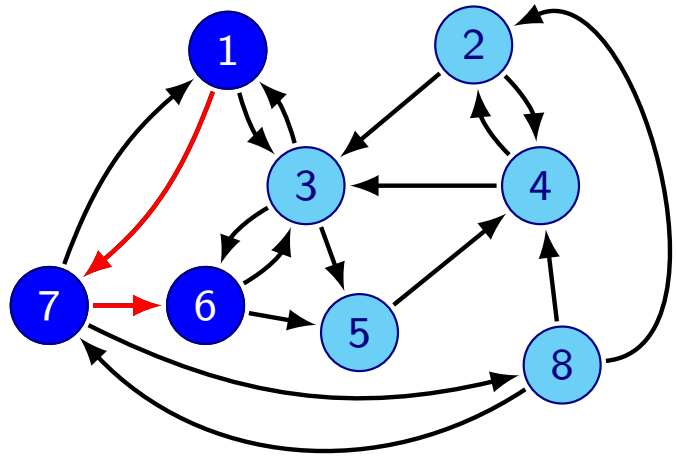
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 3$: $M = \{1, 7, 6\}$; $pred[5] = pred[3] = 6$; $Q = \{3, 5, 8\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

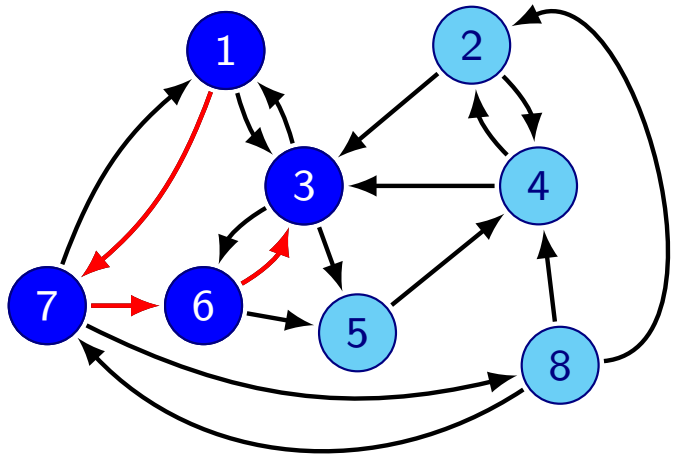
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 4$: $M = \{1, 7, 6, 3\}$; $pred[5] = 3$; $Q = \{5, 8\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

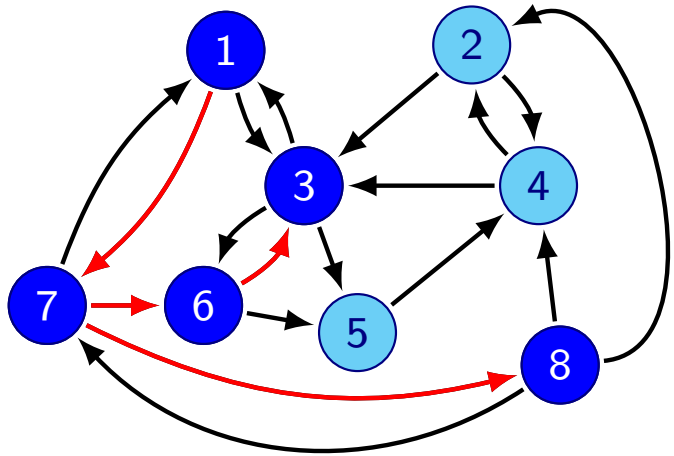
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 5$: $M = \{1, 7, 6, 3, 8\}$; $pred[2] = pred[4] = 8$; $Q = \{2, 4, 5\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

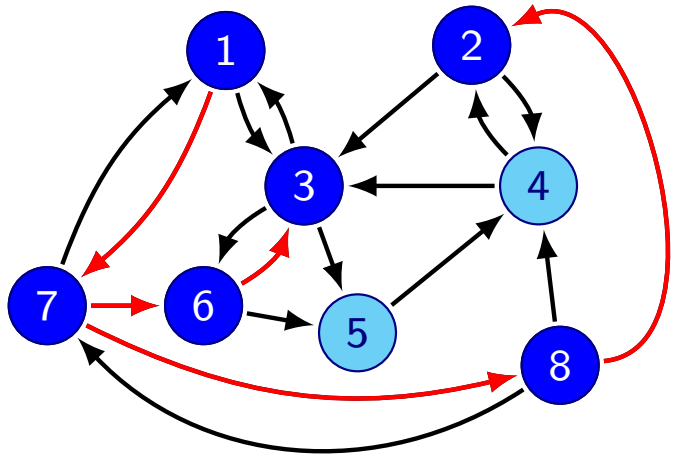
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 6$: $M = \{1, 7, 6, 3, 8, 2\}$; $pred[4] = 2$; $Q = \{4, 5\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

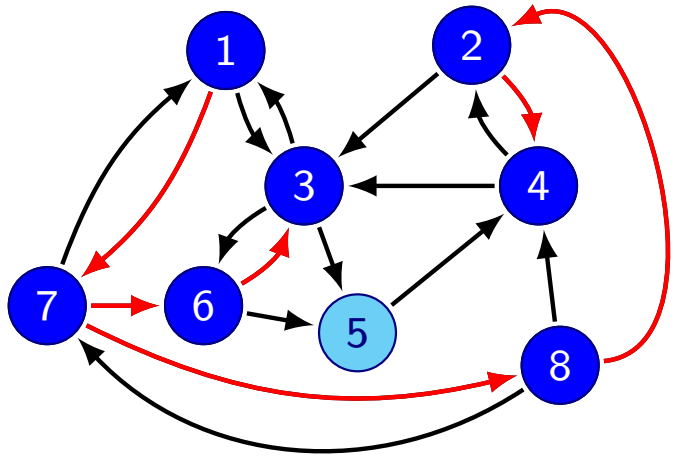
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 7$: $M = \{1, 7, 6, 3, 8, 2, 4\}$; $Q = \{5\}$

Algoritmo base de exploración de grafos

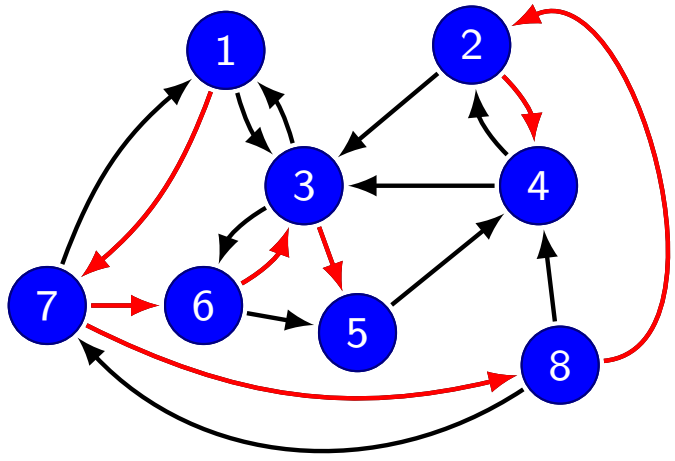
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no) con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas. El siguiente es una algoritmo base de exploración o de búsqueda en G a partir de un vértice $s \in V$.

Algorithm Exploración Grafo (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  pred[s] ← Null
2:  Q ← {s},  M ← ∅
3:  while Q ≠ ∅ do
4:      Extraer v ∈ Q
5:      Marcar v (M ← M ∪ {v})
6:      for all u ∈ V sucesor de v do
7:          if u no está marcado then
8:              pred[u] ← v
9:              Q ← Q ∪ {u}
10:         end if
11:     end for
12: end while
13: return (M,pred)
```

Observación: Cuando ocurre $pred[u] \leftarrow v$ y $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ en las línea 8 y 9, se dice que u es "visitado" por v.



- $t = 8$:
  $M = \{1, 7, 6, 3, 8, 2, 4, 5\}$;
  $Q = \emptyset$.

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

- *Determinar si un grafo es conexo y sus componentes conexas.*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

- *Determinar si un grafo es conexo y sus componentes conexas.*
- *Determinar si un grafo dirigido es fuertemente conexo y sus componentes fuertemente conexas.*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

- *Determinar si un grafo es conexo y sus componentes conexas.*
- *Determinar si un grafo dirigido es fuertemente conexo y sus componentes fuertemente conexas.*
- *Determinar si existe un camino de un vértice a otro en un grafo dado.*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

- *Determinar si un grafo es conexo y sus componentes conexas.*
- *Determinar si un grafo dirigido es fuertemente conexo y sus componentes fuertemente conexas.*
- *Determinar si existe un camino de un vértice a otro en un grafo dado.*
- *Determinar si un grafo tiene un ciclo (dirigido o no dirigido).*

Algoritmo base de exploración de grafos

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Un nodo $v \in V$ se dice alcanzable desde s, o equivalentemente s alcanza v, si existe un camino en G de s a v.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y $s \in V$. Entonces, en tiempo $O(|V| + |E|)$ el algoritmo Exploración Grafo entrega un conjunto de nodos marcados que corresponde exactamente a los nodos alcanzables desde s en G.*

Corolario: *El algoritmo Exploración Grafo es polinomial. Consecuentemente, los siguientes problemas en grafos (dirigido o no dirigido) pueden ser resueltos por un algoritmo polinomial.*

- *Determinar si un grafo es conexo y sus componentes conexas.*
- *Determinar si un grafo dirigido es fuertemente conexo y sus componentes fuertemente conexas.*
- *Determinar si existe un camino de un vértice a otro en un grafo dado.*
- *Determinar si un grafo tiene un ciclo (dirigido o no dirigido).*

Algoritmo base de exploración de grafos

Hay dos variantes importantes del algoritmo base de exploración de grafos, dependiendo de cómo se escoge $v \in Q$ para ser marcado:

Algoritmo base de exploración de grafos

Hay dos variantes importantes del algoritmo base de exploración de grafos, dependiendo de cómo se escoge $v \in Q$ para ser marcado:

Definición:

- Algorithmo de búsqueda en amplitud (o por capas) (**BFS**: Bread First Search)

Algoritmo base de exploración de grafos

Hay dos variantes importantes del algoritmo base de exploración de grafos, dependiendo de cómo se escoge $v \in Q$ para ser marcado:

Definición:

- Algorithmo de búsqueda en amplitud (o por capas) (**BFS**: Bread First Search)
- Algoritmo de búsqueda en profundidad (**DFS**:Depth First Search)

Algoritmo base de exploración de grafos

Hay dos variantes importantes del algoritmo base de exploración de grafos, dependiendo de cómo se escoge $v \in Q$ para ser marcado:

Definición:

- Algorithmo de búsqueda en amplitud (o por capas) (**BFS**: Bread First Search)
- Algoritmo de búsqueda en profundidad (**DFS**:Depth First Search)

En el caso de *BFS* el conjunto Q es implementado por una lista FIFO (First Input, First Output), ie. Q es una fila de elementos. En el caso de DFS, Q es una lista LIFO (Last Input, First Output), ie Q es una pila de elementos.

Algoritmo BFS

BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algoritmo BFS

BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V do
2:      π[v] ← Null,  d[v] ← ∞
3:  end for
4:  d[s] ← 0, Q ← {s}
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      Marcar v
8:      for all u ∈ V sucesor de v do
9:          if d[u] = ∞ then
10:             d[u] ← d[v] + 1, π[u] ← v
11:             Q ← Q ∪ {u}
12:         end if
13:     end for
14: end while
15: return (d,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.

Algoritmo BFS

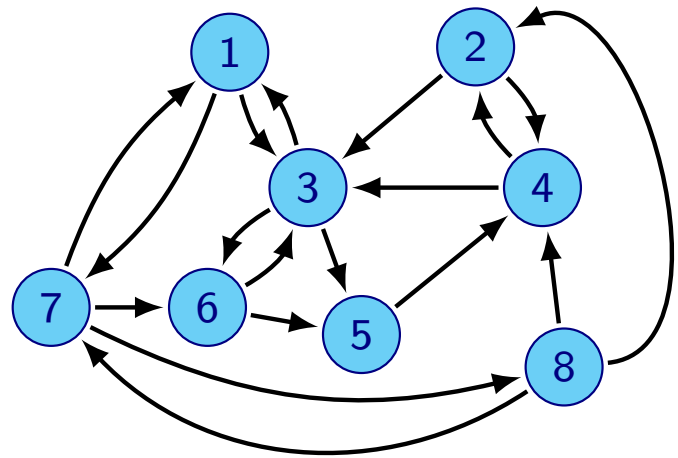
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- Inicio: $s = 1$; $d[1] = 0$; $\pi[1] = Null$; $Q = (1)$

Algoritmo BFS

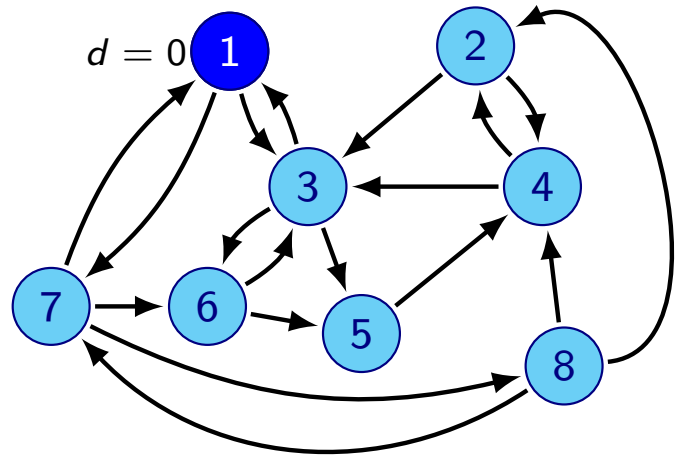
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 1$: M:1; $d[3] = d[7] = 1$; $\pi[3] = \pi[7] = 1$; $Q = (3, 7)$

Algoritmo BFS

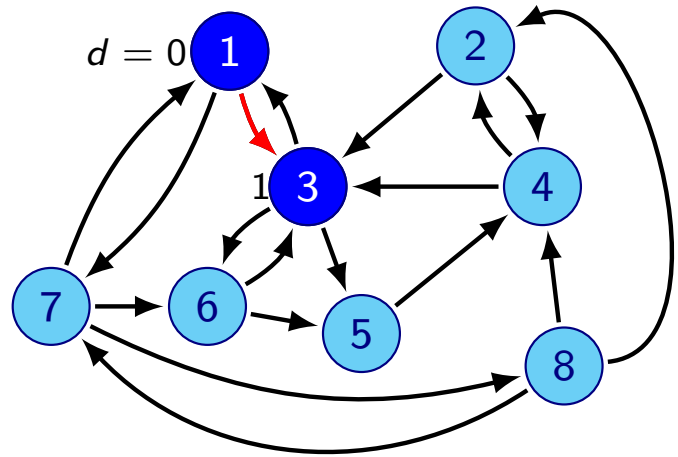
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 2$: M:1, 3; $d[5] = d[6] = 2$; $\pi[5] = \pi[6] = 3,\ Q = (7, 5, 6)$

Algoritmo BFS

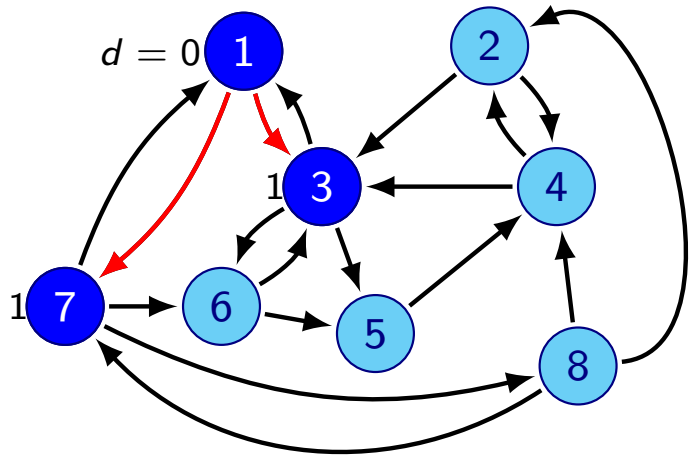
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
 1: for all v ∈ V do
 2:     π[v] ← Null,  d[v] ← ∞
 3: end for
 4: d[s] ← 0, Q ← {s}
 5: while Q ≠ ∅ do
 6:     Extraer v ∈ Q
 7:     Marcar v
 8:     for all u ∈ V sucesor de v do
 9:         if d[u] = ∞ then
10:             d[u] ← d[v] + 1, π[u] ← v
11:             Q ← Q ∪ {u}
12:         end if
13:     end for
14: end while
15: return (d,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 3$: M:1, 3, 7; $d[8] = 2$; $\pi[8] = 7$; $Q = (5, 6, 8)$

Algoritmo BFS

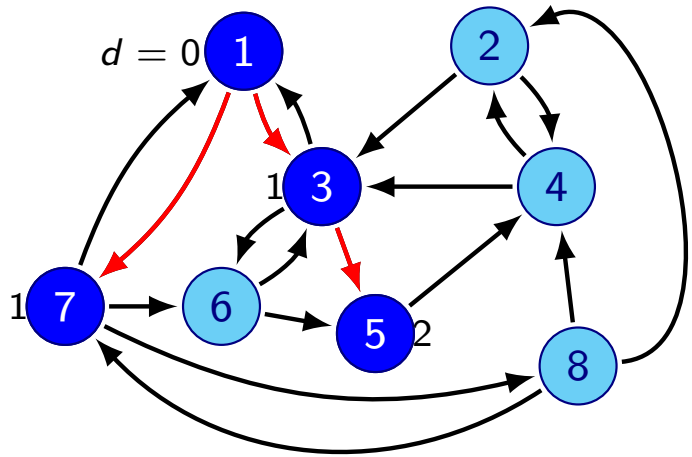
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 4$: M:1, 3, 7, 5; $d[4] = 3$; $\pi[4] = 5$; $Q = (6, 8, 4)$

Algoritmo BFS

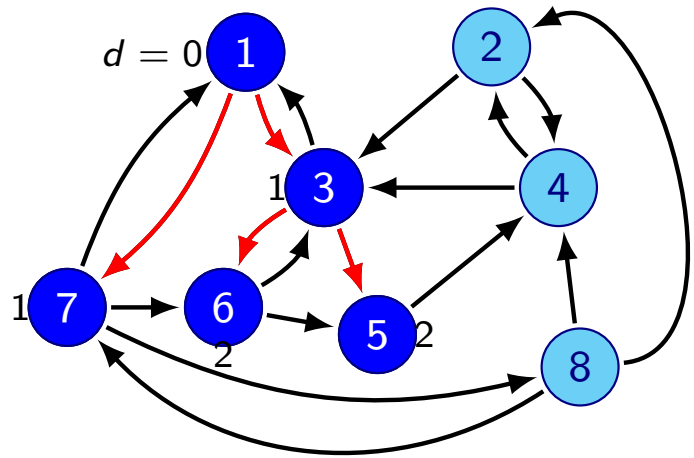
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 5$: M:1, 3, 7, 5, 6; $Q = (8, 4)$

Algoritmo BFS

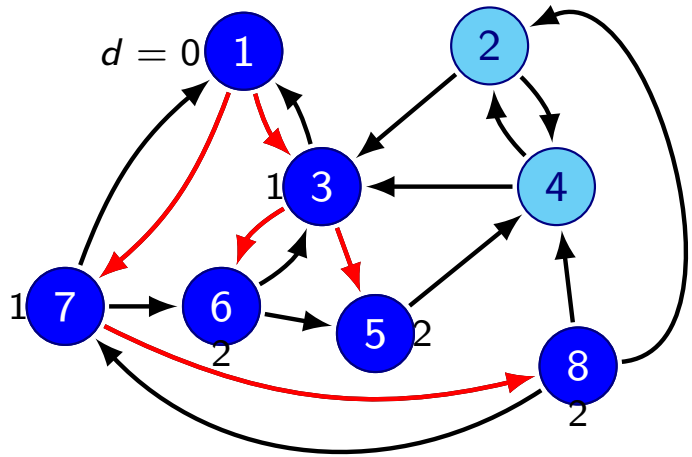
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad \pi[v] \leftarrow Null,\ d[v] \leftarrow \infty$
3: **end for**
4: $d[s] \leftarrow 0,\ Q \leftarrow \{s\}$
5: **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
6: $\quad$ Extraer $v \in Q$
7: $\quad$ Marcar v
8: $\quad$ **for all** $u \in V$ sucesor de v **do**
9: $\quad\quad$ **if** $d[u] = \infty$ **then**
10: $\quad\quad\quad d[u] \leftarrow d[v] + 1,\ \pi[u] \leftarrow v$
11: $\quad\quad\quad Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
12: $\quad\quad$ **end if**
13: $\quad$ **end for**
14: **end while**
15: **return** (d,π)

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 6$: M:1, 3, 7, 5, 6, 8;
  $d[2] = 3;\ \pi[2] = 8;\ Q = (4, 2)$

Algoritmo BFS

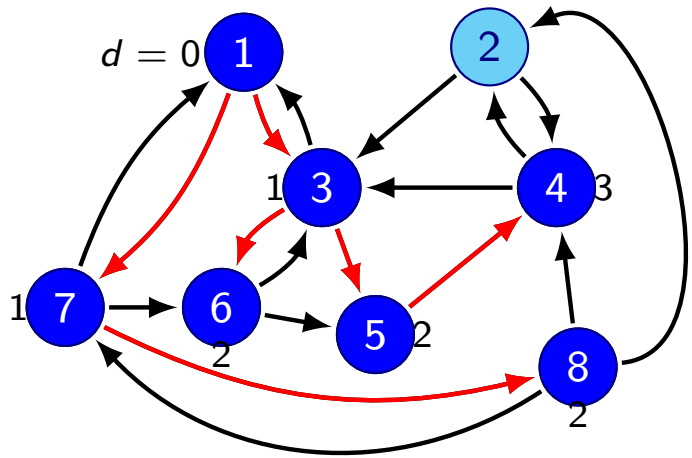
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
 1: for all v ∈ V do
 2:     π[v] ← Null,  d[v] ← ∞
 3: end for
 4: d[s] ← 0, Q ← {s}
 5: while Q ≠ ∅ do
 6:     Extraer v ∈ Q
 7:     Marcar v
 8:     for all u ∈ V sucesor de v do
 9:         if d[u] = ∞ then
10:             d[u] ← d[v] + 1, π[u] ← v
11:             Q ← Q ∪ {u}
12:         end if
13:     end for
14: end while
15: return (d,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 7$: M:1, 3, 7, 5, 6, 8, 4; $Q = (2)$

Algoritmo BFS

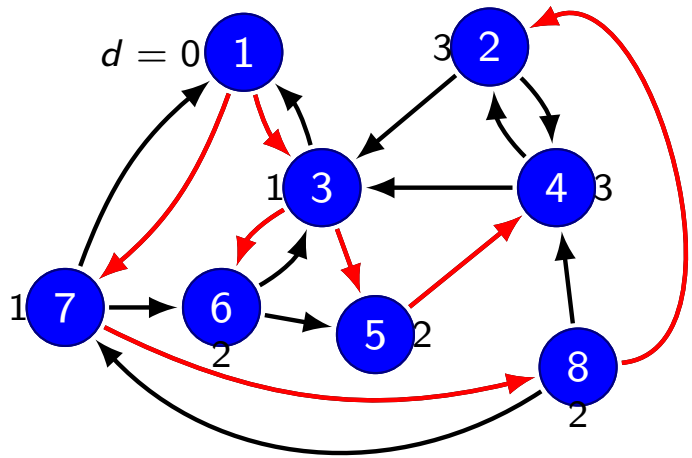
BFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de BFS es dos arreglos: d y π, donde $\forall v \in V$, si v es descendiente de s, $d[v]$ contiene la distancia (número de aristas de un camino más corto) de s a v y $\pi[v]$ el predecesor marcado de v. En caso contrario, $d[v] = \infty$ y $\pi[v] = Null$.

Algorithm BFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
 1: for all v ∈ V do
 2:     π[v] ← Null,  d[v] ← ∞
 3: end for
 4: d[s] ← 0, Q ← {s}
 5: while Q ≠ ∅ do
 6:     Extraer v ∈ Q
 7:     Marcar v
 8:     for all u ∈ V sucesor de v do
 9:         if d[u] = ∞ then
10:             d[u] ← d[v] + 1, π[u] ← v
11:             Q ← Q ∪ {u}
12:         end if
13:     end for
14: end while
15: return (d,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado solo una vez.



- $t = 8$: M:1, 3, 7, 5, 6, 8, 4, 2; $Q = \emptyset$.

Algoritmo BFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega BFS con entrada G y $s \in V$. Se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

Algoritmo BFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega BFS con entrada G y $s \in V$. Se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y

Algoritmo BFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega BFS con entrada G y $s \in V$. Se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

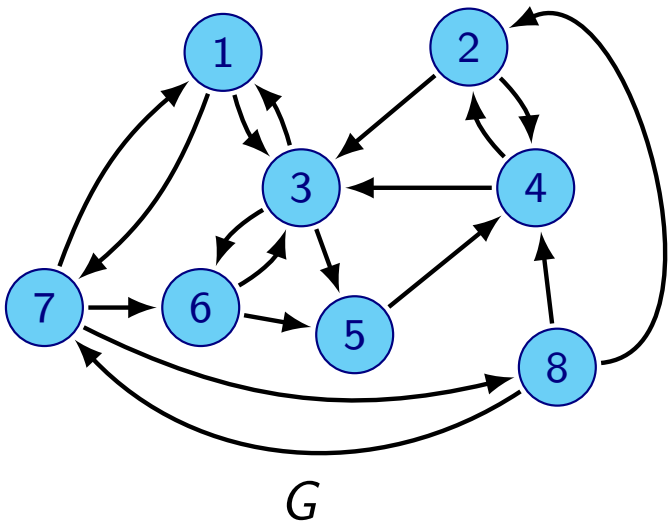
- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y
- $E_\pi = \{(\pi(v), v) \in E : \ v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$.

Algoritmo BFS

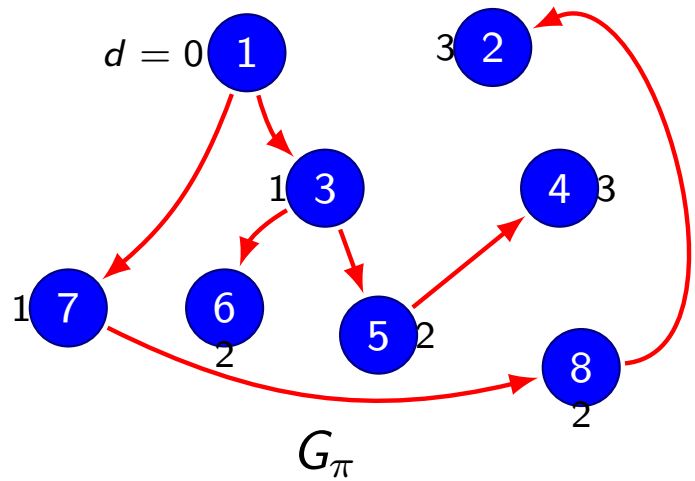
Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega BFS con entrada G y $s \in V$. Se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y
- $E_\pi = \{(\pi(v), v) \in E : \ v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$.

Ejemplo:



G



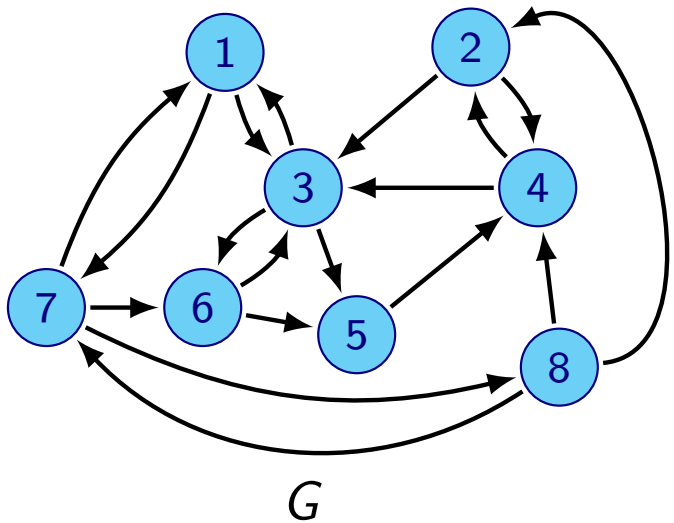
G_π

Algoritmo BFS

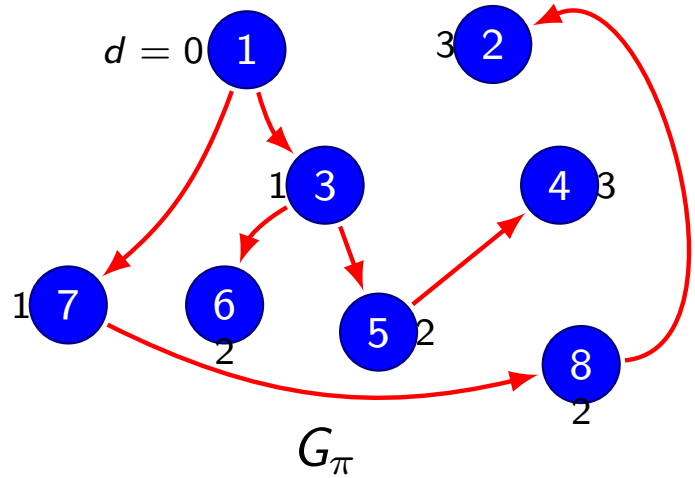
Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega BFS con entrada G y $s \in V$. Se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y
- $E_\pi = \{(\pi(v), v) \in E : \ v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$.

Ejemplo:



G



G_π

Obs: Para G dado, G_π no es necesariamente único (depende de π).

Algoritmo BFS

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) conexo, $s \in V$ y (d, π) la salida de BFS con entrada G y $s \in V$. Entonces se tiene que:*

1. *G_π es un árbol dirigido (no dirigido) cubridor de G (ie $V(G_\pi) = V$).*
2. *$\forall v \in V,\ d[v]$ es la distancia de s a v en G.*

Algoritmo BFS

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) conexo, $s \in V$ y (d, π) la salida de BFS con entrada G y $s \in V$. Entonces se tiene que:*

1. *G_π es un árbol dirigido (no dirigido) cubridor de G (ie $V(G_\pi) = V$).*
2. *$\forall v \in V,\ d[v]$ es la distancia de s a v en G.*

Demo (idea): Se puede probar por inducción, sobre el número de iteración t del ciclo While de BFS, que para todo $v \in V$ marcado en una iteración anterior o igual a $t = k$:

Algoritmo BFS

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) conexo, $s \in V$ y (d, π) la salida de BFS con entrada G y $s \in V$. Entonces se tiene que:*

1. *G_π es un árbol dirigido (no dirigido) cubridor de G (ie $V(G_\pi) = V$).*
2. *$\forall v \in V,\ d[v]$ es la distancia de s a v en G.*

Demo (idea): Se puede probar por inducción, sobre el número de iteración t del ciclo While de BFS, que para todo $v \in V$ marcado en una iteración anterior o igual a $t = k$:

1. Hay un camino en G_π de s a v.

Algoritmo BFS

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) conexo, $s \in V$ y (d, π) la salida de BFS con entrada G y $s \in V$. Entonces se tiene que:*

1. *G_π es un árbol dirigido (no dirigido) cubridor de G (ie $V(G_\pi) = V$).*
2. *$\forall v \in V,\ d[v]$ es la distancia de s a v en G.*

Demo (idea): Se puede probar por inducción, sobre el número de iteración t del ciclo While de BFS, que para todo $v \in V$ marcado en una iteración anterior o igual a $t = k$:

1. Hay un camino en G_π de s a v.
2. $d_G(s, v) = d[v]$.

Algoritmo BFS

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) conexo, $s \in V$ y (d, π) la salida de BFS con entrada G y $s \in V$. Entonces se tiene que:*

1. *G_π es un árbol dirigido (no dirigido) cubridor de G (ie $V(G_\pi) = V$).*
2. *$\forall v \in V,\ d[v]$ es la distancia de s a v en G.*

Demo (idea): Se puede probar por inducción, sobre el número de iteración t del ciclo While de BFS, que para todo $v \in V$ marcado en una iteración anterior o igual a $t = k$:

1. Hay un camino en G_π de s a v.
2. $d_G(s, v) = d[v]$.

Sabemos que BFS marca todos los nodos alcanzables de s en G. Luego, de i) se tiene que G_π es conexo cubridor. Si además se prueba que G_π no tiene ciclos, entonces G_π es árbol (dirigido o no dirigido) cubridor.

Algoritmo DFS

DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algoritmo DFS

DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1: for all v ∈ V − {s} do
2:     π[v] ← Null
3: end for
4: Q ← {s}, M ← ∅
5: while Q ≠ ∅ do
6:     Extraer v ∈ Q
7:     if v no está marcado then
8:         Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:         for all u ∈ V sucesor de v do
10:            if u no está marcado then
11:                π[u] ← v
12:                Q ← Q ∪ {u}
13:            end if
14:        end for
15:    end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.

Algoritmo DFS

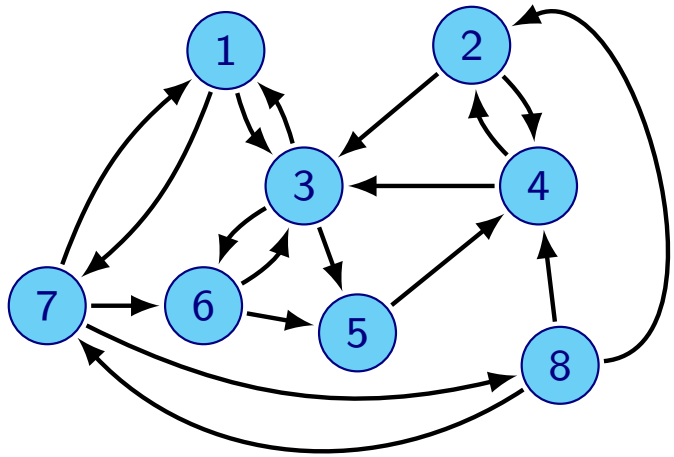
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- Inicio: $s = 1$; $\pi[1] = Null$; $Q = (1)$

Algoritmo DFS

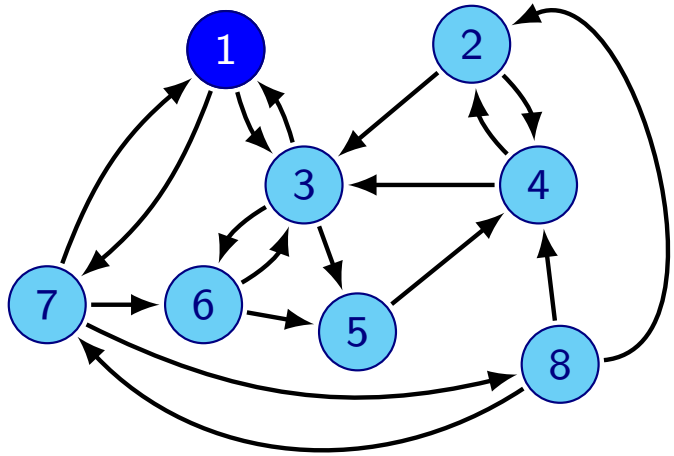
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 1$: M:1; $\pi[3] = \pi[7] = 1$; $Q = (3, 7)$

Algoritmo DFS

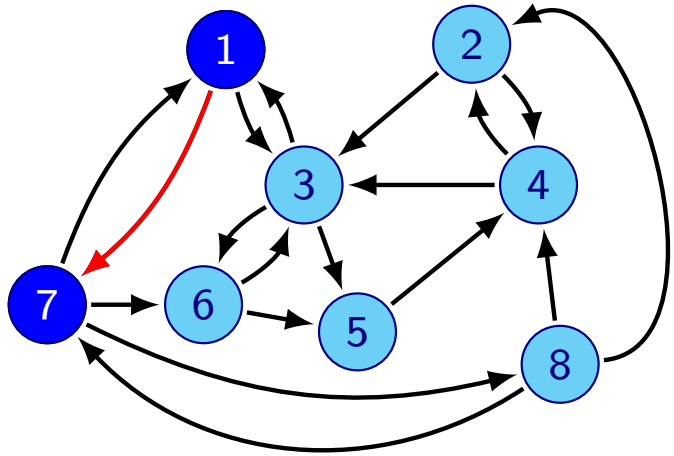
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 2$: M:1, 7; $\pi[6] = \pi[8] = 7$, $Q = (3, 6, 8)$

Algoritmo DFS

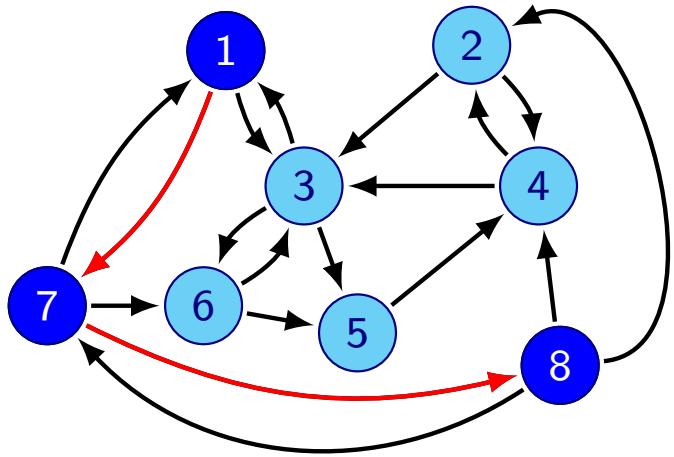
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 3$: M:1, 7, 8;
  $\pi[2] = \pi[4] = 8$;
  $Q = (3, 6, 2, 4)$

Algoritmo DFS

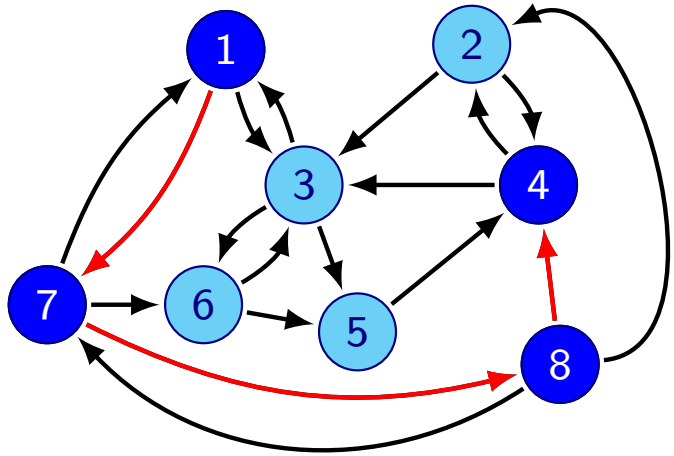
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 4$: M:1, 7, 8, 4;
  $\pi[2] = \pi[3] = 4$;
  $Q = (3, 6, 2, 2, 3)$

Algoritmo DFS

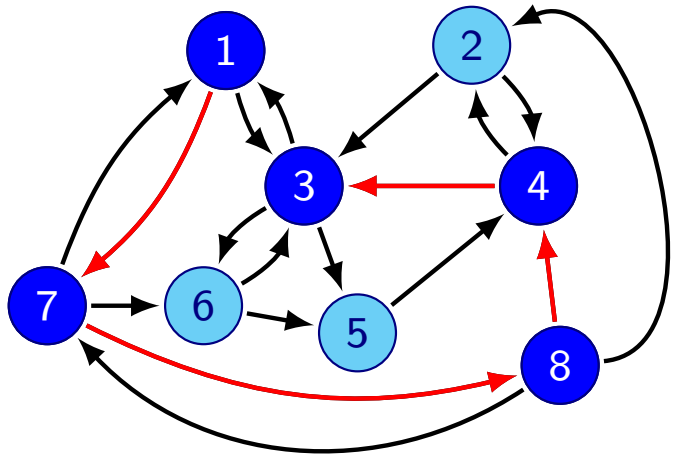
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 5$: M:1, 7, 8, 4, 3;
  $\pi[5] = \pi[6] = 3$;
  $Q = (3, 6, 2, 2, 5, 6)$

Algoritmo DFS

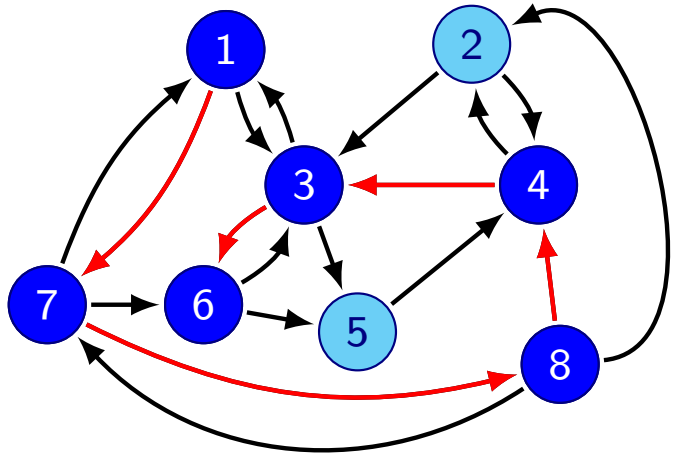
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 6$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6;
  $\pi[5] = 6$;
  $Q = (3, 6, 2, 2, 5, 3, 5)$

Algoritmo DFS

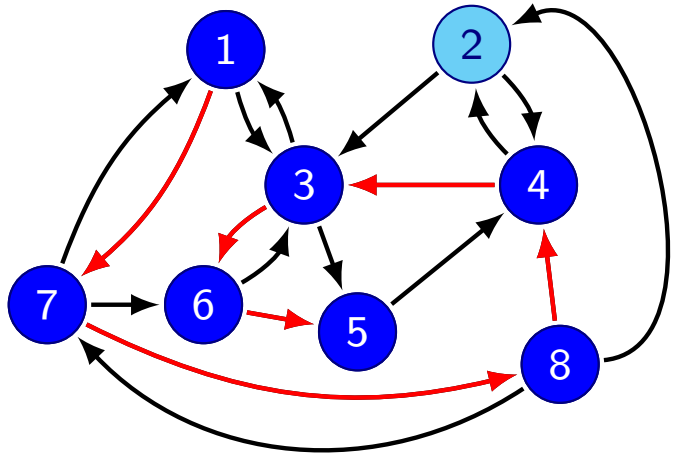
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 7$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5; $Q = (3, 6, 2, 2, 5, 3)$

Algoritmo DFS

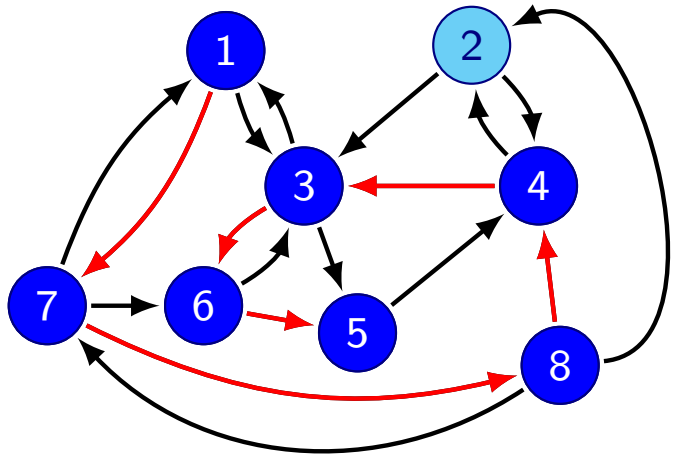
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 8$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5; $Q = (3, 6, 2, 2, 5)$.

Algoritmo DFS

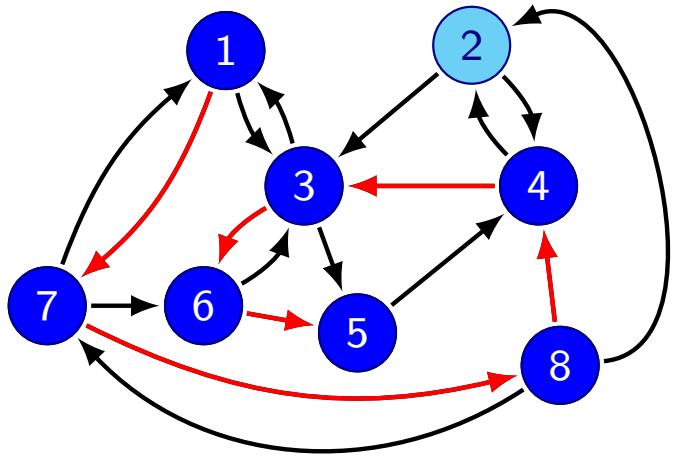
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 9$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5; $Q = (3, 6, 2, 2)$.

Algoritmo DFS

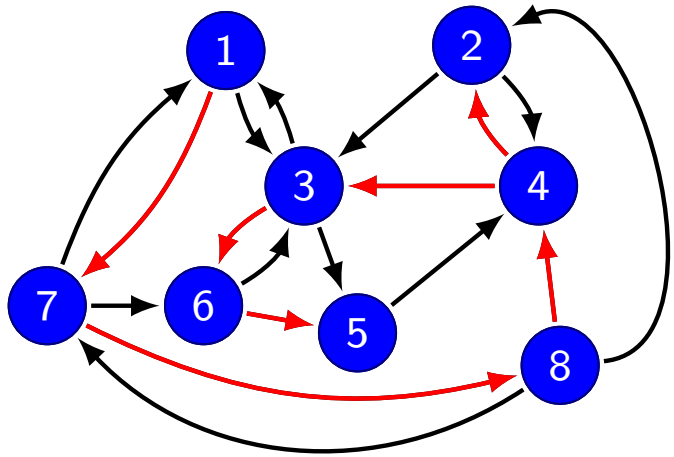
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 10$: M:$1, 7, 8, 4, 3, 6, 5, 2$; $Q = (3, 6, 2)$.

Algoritmo DFS

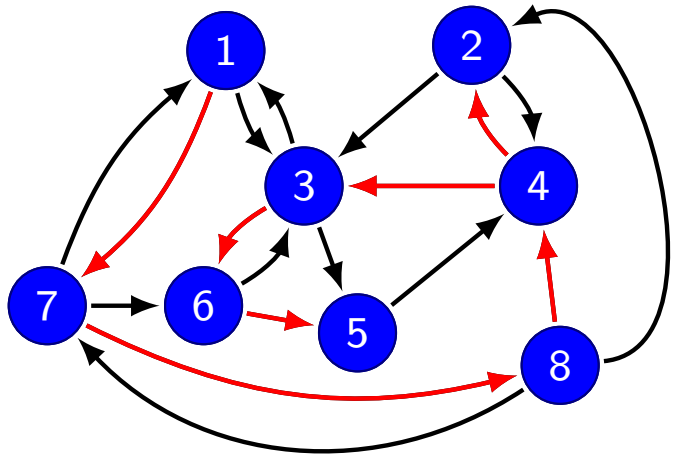
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 11$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5, 2; $Q = (3, 6)$.

Algoritmo DFS

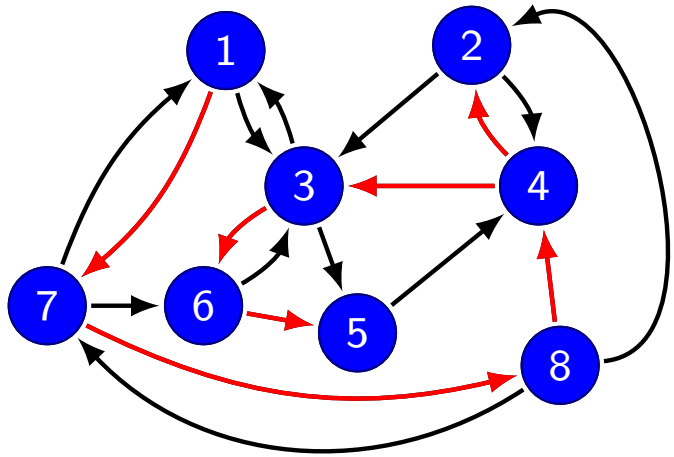
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 12$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5, 3, 2; $Q = (3)$.

Algoritmo DFS

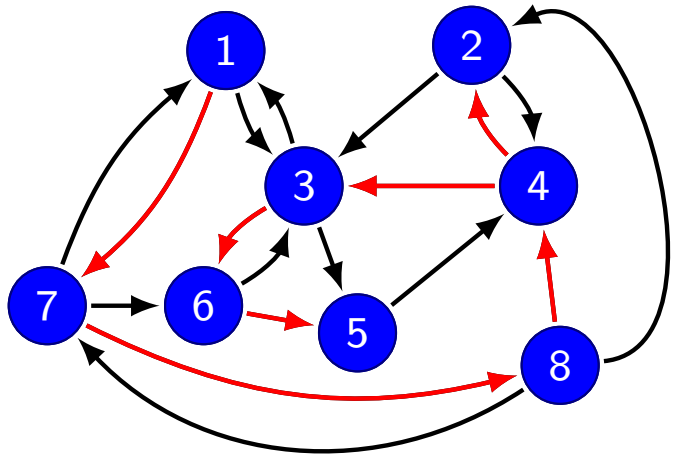
DFS recibe como entrada un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$ y $s \in V$. La salida de DFS es un arreglo π, donde $\forall v \in V$, $\pi[v]$ es el último predecesor marcado de v.

Algorithm DFS (G,s)

Input: $G = (V, E)$ un grafo y $s \in V$.

```
1:  for all v ∈ V − {s} do
2:      π[v] ← Null
3:  end for
4:  Q ← {s}, M ← ∅
5:  while Q ≠ ∅ do
6:      Extraer v ∈ Q
7:      if v no está marcado then
8:          Marcar v (M ← M ∪ {v})
9:          for all u ∈ V sucesor de v do
10:             if u no está marcado then
11:                 π[u] ← v
12:                 Q ← Q ∪ {u}
13:             end if
14:         end for
15:     end if
16: end while
17: return (M,π)
```

Obs: Un nodo puede ser visitado varias veces.



- $t = 13$: M:1, 7, 8, 4, 3, 6, 5, 3, 2; $Q = \emptyset$.

Algoritmo DFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega DFS con entrada G y $s \in V$. De igual forma que lo definido para BFS, se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

Algoritmo DFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega DFS con entrada G y $s \in V$. De igual forma que lo definido para BFS, se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y

Algoritmo DFS

Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega DFS con entrada G y $s \in V$. De igual forma que lo definido para BFS, se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

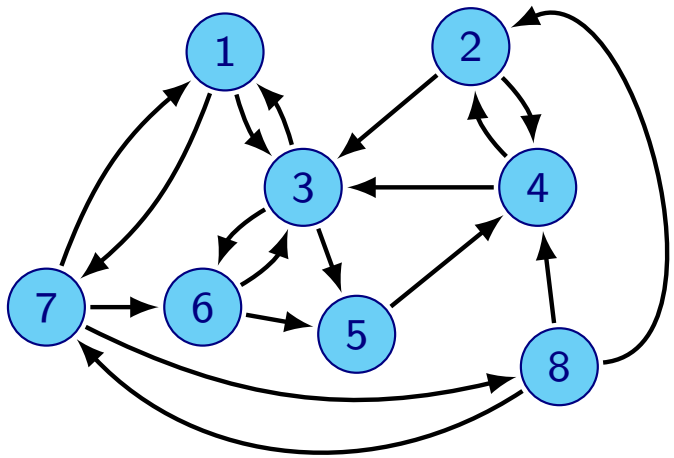
- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y
- $E_\pi = \{(\pi(v), v) \in E : \ v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$.

Algoritmo DFS

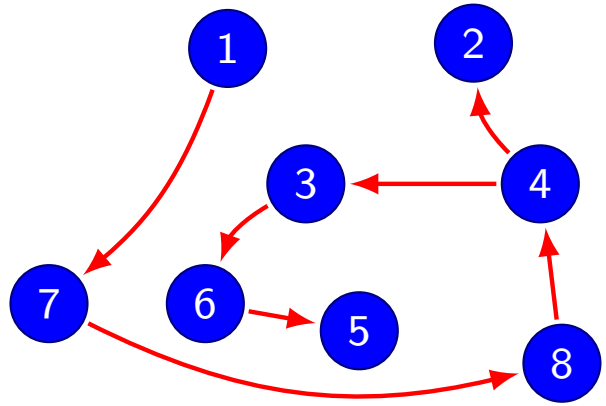
Definición: Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido (no dirigido) y π el arreglo de predecesores que entrega DFS con entrada G y $s \in V$. De igual forma que lo definido para BFS, se define el grafo dirigido (no dirigido) predecesor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ por:

- $V_\pi = \{v \in V : \ \pi[v] \neq Null\} \cup \{s\}$ y
- $E_\pi = \{(\pi(v), v) \in E : \ v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$.

Ejemplo:



G



G_π

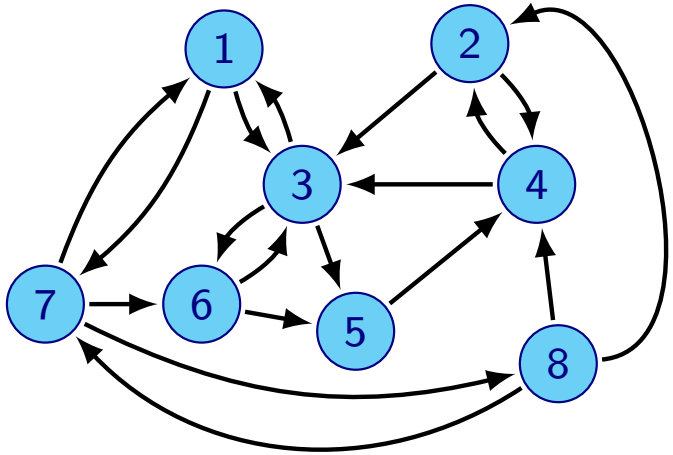
Obs: Para G dado, G_π no es necesariamente único (depende de π).

Ejemplo de BFS y DFS

Ejemplo:

Ejemplo de BFS y DFS

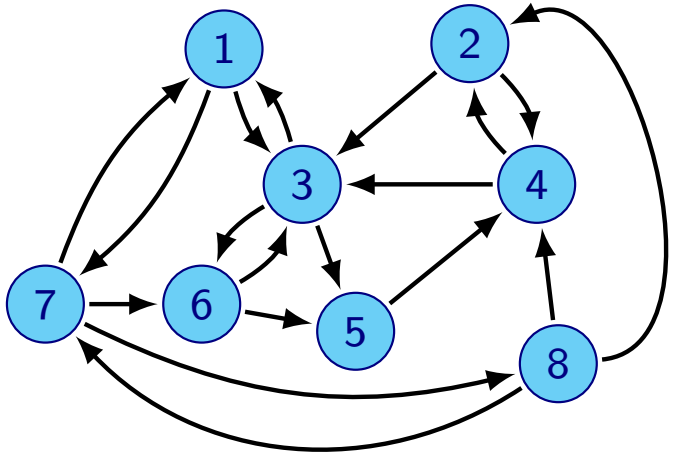
Ejemplo:



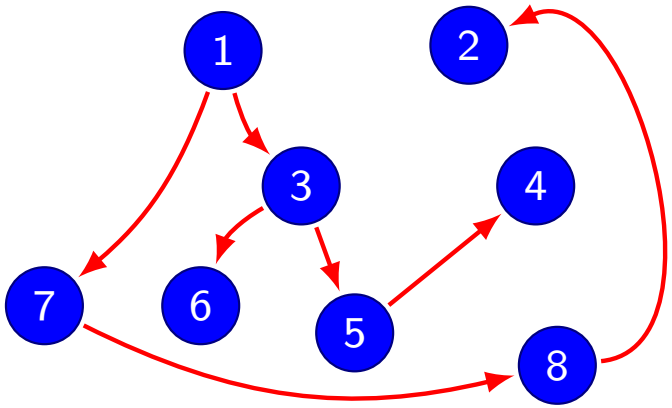
G

Ejemplo de BFS y DFS

Ejemplo:



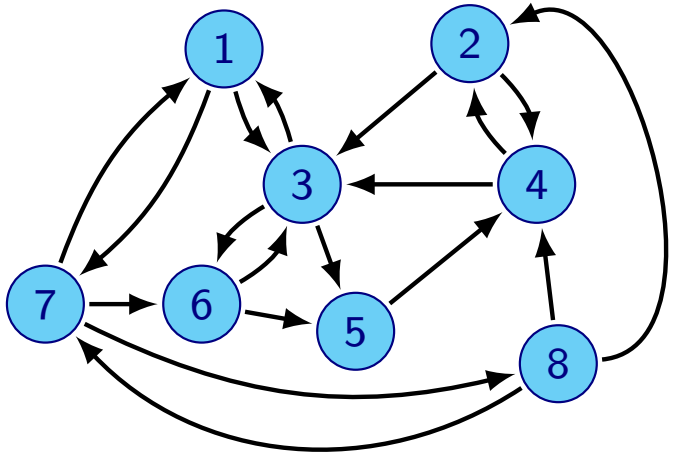
G



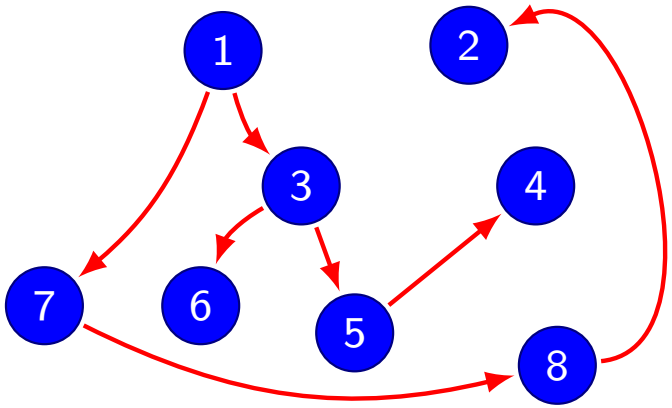
G_π obtenido con **BFS**

Ejemplo de BFS y DFS

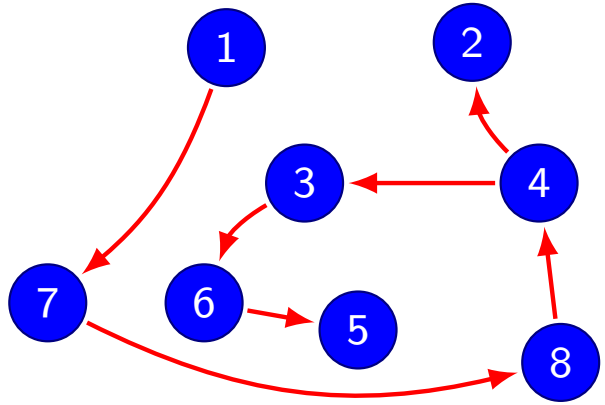
Ejemplo:



G



G_π obtenido con **BFS**



G_π obtenido con **DFS**