UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 5 ALGEBRA III 525201-1 Transformaciones Lineales

Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Sea $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función definida por $S(A) := A + A^{\mathrm{t}} \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Muestre que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
   b) Determine si S es un automorfismo.
   c) Determine $\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, S^k(A)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\forall\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, T(x,y,z,t) := (x+y, y-t, x+z)$.
   a) Demuestre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.
   b) Determine bases para $\mathrm{Ker}(T)$ y para $\mathrm{Im}(T)$. Además, determinar $r(T)$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $T \in \mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V)$ para la cual $\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, v_0 \in V \,:\, \Big(T^m(v_0) = \Theta_V \,\wedge\, T^{m-1}(v_0) \neq \Theta_V\Big)$. Demuestre que el conjunto $\{v_0, ..., T^{m-1}(v_0)\}$ es l.i.

4. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (a) T es inyectiva si y sólo si T transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes.
   (b) T es sobreyectiva si y sólo si T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.
   (c) T es isomorfismo si y sólo si T transforma bases de V en bases de W.

5. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T, S \in \mathcal{L}(V,W)$, y sea $\{v_i\}_{i\in I}$ un conjunto generador de V. Demuestre que si $\forall\, i \in I \,:\, T(v_i) = S(v_i)$, entonces $T = S$.

6. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 := T \circ T = T$. Sabiendo que $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ denota la transformación identidad, demuestre que

$$a)\; V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)\,, \quad b)\; T + \tilde{I} \text{ es un automorfismo.}$$

7. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$ un automorfismo. Es sabido que existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que ésta es única.

8. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita cada uno de ellos. Demuestre que
   (a) si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces no puede existir una transformación lineal de V en W que sea inyectiva.
   (b) si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces no puede existir una transformación lineal de V en W que sea sobreyectiva.

9. Se define $\mathbb{K}^\infty$ como el conjunto de todas las sucesiones de elementos en $\mathbb{K}$, i.e.

$$\mathbb{K}^\infty := \{x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \,:\, \forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, x_j \in \mathbb{K}\}\,.$$

   Las operaciones de adición y multiplicación por escalar sobre $\mathbb{K}^\infty$ se definen como se espera:

$$\forall\, x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,,\, y := (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \,:\, x + y := (x_j + y_j)_{j\in\mathbb{N}}\,,$$
$$\forall\, x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,, \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,:\, \lambda \cdot x := (\lambda\, x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,.$$

   (a) Demuestre que $(\mathbb{K}^\infty, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Identifique los elementos principales.
   (b) Sea $T : \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}^\infty$ la llamada transformación *backward shift*, definida como $\mathbb{K}^\infty \ni x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto T(x) := (x_{j+1})_{j\in\mathbb{N}}$. Demuestre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^\infty)$ y determine $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$. ¿Es T un isomorfismo? Justifique apropiadamente su respuesta.

Ejercicios propuestos:

1. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Demuestre que $(\mathcal{L}(V,W),+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Después, pruebe que $\mathcal{L}(V,W)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(V,W)$.

2. Sea $B := \{g_j\}_{j=1}^{3} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tales que $\forall\, x \in \mathbb{R} : g_1(x) := \mathrm{e}^x,\ g_2(x) := x\,\mathrm{e}^x,\ g_3(x) := x^2\,\mathrm{e}^x$. Consideremos el operador derivada $D : \langle B\rangle \to \langle B\rangle$, definido por $D(f) := \dfrac{df}{dx}, \quad \forall\, f \in \langle B\rangle$.

   a) Muestre que B es l.i.
   b) Pruebe que D es un automorfismo.
   c) Determine D^{-1}.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T\,,S \in \mathcal{L}(V)$. Demostrar que $\mathrm{Ker}(ST) = T^{-1}(\mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T))$ (aquí, T^{-1} denota conjunto imagen inversa, y $ST := S \circ T$).

4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T\,,S \in \mathcal{L}(V)$.
   Demostrar que ST es inyectiva si y sólo si $\Big(\mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\Theta_V\} \wedge \mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}\Big)$.

5. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que
$$a)\ \mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2)\,, \quad b)\ \mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)\,, \quad c)\ T^2 = \Theta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T)\,.$$

6. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ sobreyectiva si y sólo si $\dim(W) \leq \dim(V)$.

7. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Dos transformaciones lineales $S\,,T \in \mathcal{L}(V)$ se dicen Similares, denotado por $S \sim T$, si $\exists\, P \in \mathcal{L}(V)$ automorfismo tal que $T = P^{-1} \circ S \circ P$.

   a) Muestre que la relación de similaridad definida por $\forall\, S\,,T \in \mathcal{L}(V) : S \sim T \Leftrightarrow S \wedge T$ son similares, es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}(V)$.
   b) Determine $[\tilde{I}]_\sim$, siendo $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la transformación identidad.

8. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim(V) = \dim(W)$. Demuestre que V y W son espacios isomorfos.

9. Sean U, V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $S \in \mathcal{L}(U,V)$. Entonces $T \circ S \in \mathcal{L}(U,W)$. Además, la aplicación $T \mapsto T \circ S$ es una transformación lineal de $\mathcal{L}(V,W)$ en $\mathcal{L}(U,W)$, y la aplicación $S \mapsto T \circ S$ es una transformación lineal de $\mathcal{L}(U,V)$ en $\mathcal{L}(U,W)$.

10. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V,W)$, y U un subespacio vectorial de V. Se define la *función restricción de T a U* por $\widetilde{T} := T|_U$.

    a) Aplique el Ejercicio anterior para concluir que la restricción $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(U,W)$.
    b) $\widetilde{T}$ es monomorfismo si y sólo si $U \cap \mathrm{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.
    c) $\mathrm{Im}(\widetilde{T}) = \mathrm{Im}(T)$ si y sólo si $V = U + \mathrm{Ker}(T)$.
    d) $\widetilde{T}$ es un isomorfismo si y sólo si $V = U \oplus \mathrm{Ker}(T)$.

11. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $U \subseteq V$ un subespacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Se sabe (ver Ejercicio 6 en Listado 4) que V/U es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (llamado *espacio (vectorial) cuociente*).

    a) Muestre que la aplicación $\pi : V \to V/U$, definido por $v \mapsto [v] \quad \forall\, v \in V$, es una transformación lineal sobreyectiva, llamada *epimorfismo canónico*.

    Suponga ahora que además $U \subseteq \mathrm{Ker}(T)$. Demuestre que

    b) $\exists\,!\,\overline{T} \in \mathcal{L}(V/U,W)$ tal que $\overline{T} \circ \pi = T$.
    c) $\mathrm{Ker}(\overline{T}) = \mathrm{Ker}(T)/U \wedge \mathrm{Im}(\overline{T}) = \mathrm{Im}(T)$.
    d) $\overline{T}$ es un monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Ker}(T) = U$.
    e) $\overline{T}$ es un epimorfismo si sólo si T es un epimorfismo.
    f) $\overline{T}$ es un isomorfismo si y sólo si T es un epimorfismo y $\mathrm{Ker}(T) = U$.
    g) $V/\mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$ son isomorfos (Se conoce como el *Primer teorema del isomorfismo*).