

PAUTA DE CORRECCIÓN EXAMEN.  
 CÁLCULO III. 525211.

1. (30 ptos.) Sea  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$  con respecto de  $x$  e  $y$ , y de clase  $\mathcal{C}^2$  con respecto de  $\rho$  y  $\theta$ , con  $x = \rho \cos \theta$ , e  $y = \rho \sin \theta$  (coordenadas polares). Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \rho}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta}$  en coordenadas cartesianas ¿qué podría pasar con el cálculo anterior si  $f$  es de dos veces diferenciable pero no es de clase  $\mathcal{C}^2$  con respecto de  $\rho$  y  $\theta$ ?

**Solución**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\rho \cos \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \sin \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\rho \cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \sin \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

(10 ptos.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= -\rho \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \rho \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \rho \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &\quad + \rho \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( xy \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

(10 ptos.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta} \text{ (por el Teorema de Schwarz, pues } f \text{ es de clase } \mathcal{C}^2\text{).}$$

(5 ptos.)

¿qué podría pasar con el cálculo anterior si  $f$  es de dos veces diferenciable pero no es de clase  $\mathcal{C}^2$  con respecto de  $\rho$  y  $\theta$ ?

Respuesta : no necesariamente  $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta}$ , pues ser de clase  $\mathcal{C}^2$  es una de las hipótesis del Teorema de Schwarz para que la igualdad se verifique (condición suficiente).

(5 ptos.)

2. **(40 ptos.)** Una compañía fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. Se ha estimado que la función que determina las pérdidas al fabricar esos productos es :

$$f(x, y, z) = x^3 + 2yz$$

Los compromisos que la compañía debe cumplir por contratos con otras firmas son :

$$x + y = \alpha,$$

$$y + z = \beta, \quad \text{donde } \beta > 2\alpha > 0 \text{ son dos parámetros reales positivos.}$$

- Calcule las producciones óptimas  $x_0, y_0, z_0$  que minimizan las pérdidas, y los Multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1, \lambda_2$  asociados al problema.
- Pruebe usando las condiciones suficientes de optimalidad que  $f(x_0, y_0, z_0)$  es mínimo.
- Sea la función pérdidas mínimas en términos de  $\alpha$  y  $\beta$  :  $\varphi(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0, z_0)$ . Pruebe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \lambda_1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \lambda_2.$$

### Solución

- Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + 2yz + \lambda_1(\alpha - x - y) + \lambda_2(\beta - y - z)$$

**(5 ptos.)**

Luego los puntos críticos se obtienen de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 3x^2 - \lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = 3x^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2y - \lambda_2 = 0 \implies \lambda_2 = 2y \end{aligned}$$

**(5 ptos.)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 &\implies 2z = \lambda_1 + \lambda_2 = 3x^2 + 2y \\ &\implies 3x^2 + 2(y - z) = 0 \implies 3x^2 + 2(2y - \beta) = 0 \\ &\implies 3x^2 + 4(\alpha - x) - 2\beta = 0 \implies 3x^2 - 4x + 4\alpha - 2\beta = 0 \\ &\implies x = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)}}{3} \\ &\quad (2 \text{ raíces reales, } x_1 < 0 \text{ y } x_2 > 0 \text{ pues } \beta > 2\alpha > 0) \end{aligned}$$

**(5 ptos.)**

Escogemos  $x_0 = x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)}}{3} > 0$  pues es la única de las dos que tiene sentido práctico económico (la cantidad de un producto debe ser positiva). Luego  $y_0 = \alpha - x_0, z_0 = \beta - y_0, \lambda_1 = 3x_0^2$ , y  $\lambda_2 = 2y_0$ .

**(5 ptos.)**

- 1er Método : Condición suficiente de extremos condicionados. Necesitamos el cálculo de la segunda derivada del Lagrangiano ( $Hess(\mathcal{L}) \equiv d^2\mathcal{L}$ ) y de la derivada de las restricciones ( $dg \equiv Jacob(g)^t$ ).

$$Hess(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} 6x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad Jacob(g)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donde las restricciones están dadas por  $g(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - x - y \\ \beta - y - z \end{pmatrix}$ . (5 pts.)

Sea  $\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$  tal que  $d\varphi \Delta X = 0$ . Entonces  $\Delta X = \Delta x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Luego

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\Delta X, \Delta X) &= \Delta X^t Hess(\mathcal{L}) \Delta X = 6x_0 \Delta x^2 + 4\Delta y \Delta z \\ &= (6x_0 - 4)\Delta x^2 = (2\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)} - 4)\Delta x^2 > 0 \\ &\quad (\text{pues } \beta > 2\alpha) \end{aligned}$$

Luego  $(x_0, y_0, z_0)$  es mínimo.

(5 pts.)

(b.2) 2do Método : Como  $y = \alpha - x$  y  $z = \beta - y$  se define

$$\tilde{f}(x) = f(x, y(x), z(x)) = x^3 + 2(\alpha - x)(\beta - \alpha + x)$$

Luego  $\tilde{f}''(x_0) = 6x_0 - 4 = 2\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)} - 4 > 0$ , pues  $\beta > 2\alpha$ .

Luego  $(x_0, y_0, z_0)$  es mínimo.

(10 pts.)

(c) Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  cualquiera (no necesariamente los multiplicadores que resultan de la solución óptima), y sean  $x_0 = x_0(\alpha, \beta)$ ,  $y_0 = y_0(\alpha, \beta)$  solución del problema. Entonces,

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0, z_0) = \mathcal{L}(x_0(\alpha, \beta), y_0(\alpha, \beta), z_0(\alpha, \beta), \lambda_1, \lambda_2)$$

pues  $x_0$  e  $y_0$  verifican las restricciones (con lo cual los términos multiplicados por  $\lambda_1$   $\lambda_2$  son cero). Entonces por regla de la cadena

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$$

Luego escogiendo como  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , los Multiplicadores de Lagrange, es decir tales que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$  se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\lambda_1(\alpha - x - y)) = \lambda_1$$

De igual modo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2.$$

Nota : La resolución de este problema también se puede hacer reemplazando las soluciones  $x_0 = x_0(\alpha, \beta)$ ,  $y_0 = y_0(\alpha, \beta)$ , de manera explícita, pero sale más largo.

(10 pts.)

3. **(30 ptos.)** Un satélite de masa  $m$  que gira en torno a la tierra, está sometido a la suma de dos fuerzas  $F = F_G + F_E$  donde  $F_G$  es la fuerza de gravedad de la Tierra, y  $F_E$  una fuerza externa dada.

$$F_G(x, y, z) = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z), \quad \text{y} \quad F_E(x, y, z) = (0, x, 0),$$

- (a) Calcule  $\nabla \times F_E$ , y deduzca que  $F_E$  define un campo vectorial no conservativo.  
 (b) Sabiendo que  $F_G$  es conservativo, calcule el trabajo realizado por el satélite al recorrer la elipse  $C$  ubicada en el plano XY, y con foco  $f$  en  $(0, 0, 0)$  (es decir, en el centro de la Tierra) :

$$C = \{(c + a \cos \theta, b \sin \theta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$$

con  $a > b > 0$  constantes positivas y  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

### Solución

(a)

$$\nabla \times F_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Luego  $F_E$  no es conservativo.

**(10 ptos.)**

(b) El trabajo  $W$  está dado por

$$W = \int_C F \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (F_G + F_E) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C F_E \cdot d\mathbf{r}$$

pues el campo  $F_G$  es conservativo y  $C$  es una curva cerrada.

**(10 ptos.)**

Luego

$$\begin{aligned} W &= \oint_C F_E \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (0, c + a \cos \theta, 0) \cdot (-a \sin \theta, b \cos \theta, 0) d\theta \\ &= cb \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + ab \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

**(10 ptos.)**

(15-Julio-2004)

MSC/msc