Ayudantía 8.

1. Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que:

a). $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$.

Dem: Sea $v \in Ker(T) \Leftrightarrow T(v) = \theta_v$

$\overset{\text{Aplicando } T}{\Rightarrow} (T \circ T)(v) = T(\theta_v)$

$= \theta_v$.

$\Leftrightarrow v \in Ker(T^2)$.

b) $Im(T^2) \subseteq Im(T)$.

Dem: sea $T^2(u) \in Im(T^2)$, $u \in V$, es decir, $T(T(u)) \in Im(T^2)$. X

↳ Sea $v \in Im(T^2)$, luego $\exists u \in V$ tq $v = T^2(u)$.

$v = T(T(u))$.

Ahora Notamos que $\exists \tilde{u} \in V : \tilde{u} := T(u)$ Tal que $v = T(\tilde{u})$.

Conclusión: $v \in Im(T)$.

$A : U \to V$

Recordar: $Im(A) = \{v \in V \ \exists u \in U : v = Au\}$

c) $T^2 = \theta \iff Im(T) \subseteq Ker(T)$,

Dem: Para la implicancia directa ($\Rightarrow$), supongamos $T^2 = \theta$ y sea $v \in Im(T)$. Luego, $\exists u \in V$ tal que $v = T(u)$. Aplicando T se tiene $T(v) = T^2(u) = \theta_V$.

Por lo tanto $v \in Ker(T)$.

Recíprocamente ($\Leftarrow$), supongamos $Im(T) \subseteq Ker(T)$. Sea $v \in V$.

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\theta_V) = \theta_V$$

Pues como $T(v) \in Im(T) \subseteq Ker(T)$.

$\Rightarrow T(T(v)) = \theta_V$

Problema 2: Sean U y W s.e.v de V sobre $\mathbb{K}$, dim finita, y B_U, B_W bases de U y W respectivamente. Sea además $T: V \to V$ un automorfismo.

a) Pruebe que $V = U \oplus W$ si y solo si $B_U \sqcup B_W$ es base de V. (unión disjunta)

b) Demuestre que si $V = U \oplus W$, entonces $V = T(U) \oplus T(W)$.

Dem:

a) $\Rightarrow$) Supongamos $V = U \oplus W$. Denotamos $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Sean $B_U \sqcup B_W = \{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$.

Sea $v \in V$. Como $V = U \oplus W$, $\exists u \in U$, $w \in W$ tal que $v = u + w$. Pero como $u \in U$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, y como $w \in W$, $\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ tal que $w = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j$. Así, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j$
$\Leftrightarrow v \in \langle B_U \cup B_W \rangle$

Sea $x \in B_U \cap B_W$, $x \in U \cap W \Rightarrow x \in \{\theta\}$.
Como las bases no tienen a θ, $(\rightarrow\leftarrow)$.

Conclusión, $B_U \cap B_W = \emptyset$. Denotemos $B_U \sqcup B_W$. Queda por ver que $B_U \sqcup B_W$ es l.i.

Sean $\{\mu_i\}_{i=1}^{n+m}$ escalares tales que:

$$\overbrace{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n}^{:= \tilde{u}} + \overbrace{\mu_{n+1} w_1 + \mu_{n+2} w_2 + \dots + \mu_m w_m}^{:= \tilde{w}} = \Theta_V$$

$$\Leftrightarrow \tilde{u} + \tilde{w} = \Theta_V \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u} = -\tilde{w} \in U \cap W = \{\Theta_V\} \\ \tilde{w} = -\tilde{u} \in U \cap W = \{\Theta_V\}. \end{cases}$$

Conclusión:

1) $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n = \Theta_V$
2) $\mu_{n+1} w_1 + \dots + \mu_m w_m = \Theta_V$.

Como B_U y B_W son bases, son l.i. (cada uno). Luego,

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$$
$$\wedge\ \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \dots = \mu_m = 0.$$

$\therefore$ $B_U \sqcup B_W$ es l.i. y como ya vimos $V = \langle B_U \sqcup B_W \rangle$.
Se tiene que $B_U \sqcup B_W$ es base de V.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $B_U \cap B_W = \emptyset$ y $B_U \cup B_W$ es base de V. Denotamos

$$B_U \cup B_W = \{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}.$$

Sea $v \in V$, como $B_U \cup B_W$ es base de V, $\exists \{\varphi_i\}_{i=1}^{n+m} \subset \mathbb{K}$ tal que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \varphi_{n+j} w_j.$$

$\therefore \exists\, u = \sum \varphi_i u_i,\ w$

tal que $v = u + w$. Como $v \in V$ era arbitrario se concluye que $V = U + W$.

Más aún, sea $v \in U \cap W$, $\exists \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}, \{\varphi_i\}_{i=n+1}^{m} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_i \in U.$$
$$v = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{n+j} w_j \in W.$$

Al restar
$$\Rightarrow \theta_V = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_i - \sum_{j=1}^{m} \varphi_{n+j} w_j$$

Por esto, es una combinación lineal de los elementos de $B_U \cup B_W$

Luego, $\varphi_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n+m\}$.

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u = \theta_V.$$

$\therefore \quad U \cap W = \{\theta_V\}$ y así $V = U \oplus W$.

$\square$

b) Dem: Supongamos $V = U \oplus W$. Como T es biyectiva, $\forall v \in V$, $\exists!\ v' \in V$ tal que $v = T(v')$. Como $v' \in V$, $v'_u + v'_w$, con $v'_u \in U$ y $v'_w \in W$. (que tambien son unicos).
En definitiva $\exists!\ v'_u, v'_w$ tal que.

$$v = \underbrace{T(v'_u)}_{\in T(U)} + \underbrace{T(v'_w)}_{\in T(W)}.$$

$\therefore\ V = T(U) \oplus T(W).$