¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea?

Caso: Polinomio característico con raíces complejas

Carlos M. Mora

Solución general de una EDO lineal de orden n homogénea

Considere la EDO

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x)\, Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, Y'(x) + a_n(x)\, Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]\alpha, \beta[\quad (1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n : \,]\alpha, \beta[\, \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Un conjunto de n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linealmente independientes de (1) es llamado sistema fundamental de soluciones de (1).

Asumamos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (1). Entonces, para toda solución de (1) existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$Y(x) = C_1\, f_1(x) + C_2\, f_2(x) + \cdots + C_n\, f_n(x)\,.$$

Escritura con operador Derivada

Fijemos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Considere la EDO lineal de coeficientes constantes

$$Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$D = \frac{d}{dx}$

$$D^n\, Y(x) + a_1 D^{n-1}\, Y(x) + \cdots + a_{n-1} D\, Y(x) + a_n\, Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Polinomio característico

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Factorización

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ números diferentes

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_q)^{m_q}$$

Función exponencial

Fije $\lambda = a + b\,i$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(\lambda\, x) = \exp(a\, x)\,(cos\,(b\, x) + i\, sen\,(b\, x))\,.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\exp(a\, x)\,(cos\,(b\, x) + i\, sen\,(b\, x)) &= a\,\exp(a\, x)\,(cos\,(b\, x) + i\, sen\,(b\, x)) \\
&\quad + \exp(a\, x)\,(-b\, sen\,(b\, x) + i\, b\, cos\,(b\, x)) \\
&= a\,\exp(\lambda\, x) + b\, i\,\exp(a\, x)\,(i\, sen\,(b\, x) + cos\,(b\, x)) \\
&= a\,\exp(\lambda\, x) + b\, i\,\exp(\lambda\, x) \\
&= (a + b\, i)\exp(\lambda\, x)
\end{aligned}$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dx}\exp(\lambda\, x) = \lambda\,\exp(\lambda\, x)$$

Solución general

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $p, q \in \mathbb{R}$.

Caso: polinomio característico con dos raíces reales diferentes ($\frac{p^2}{4} - q > 0$)

$$Y(x) = C_1\ \exp\left(\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) x\right) + C_2\ \exp\left(\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) x\right)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Caso: polinomio característico con dos raíces complejas ($\frac{p^2}{4} - q < 0$)

$$Y(x) = C_1\ \exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) cos(\alpha\,x) + C_2\ \exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) sen(\alpha\,x)$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha = \sqrt{q - p^2/4}$.

Caso: polinomio característico con una única raíz ($\frac{p^2}{4} - q = 0$)

$$Y(x) = C_1\ \exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) + C_2\,x\ \exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Núcleo del operador $(D-\lambda)^m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

Las funciones $e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x}$ son linealmente independientes y son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$, o sea, para $k = 0, \ldots, m-1$,

$$(D-\lambda)^m \left(x^k e^{\lambda x}\right) = 0$$

Independencia lineal

$$k_1\, e^{\lambda x} + k_2\, x\, e^{\lambda x} + \cdots + k_m\, x^{m-1}\, e^{\lambda x} = 0$$

$$k_1 + k_2\, x + \cdots + k_m\, x^{m-1} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0.$$

Inicio: $m = 1$

$$(D-\lambda)\left(e^{\lambda x}\right) = D\left(e^{\lambda x}\right) - \lambda e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0.$$

Paso de inducción

Asumamos que $e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$.

Para $k = 0, \ldots, m-1$, $(D-\lambda)^{m+1}\left(x^k\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)\,(D-\lambda)^m\left(x^k\, e^{\lambda x}\right) = 0.$

$$(D-\lambda)^{m+1}\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)^m\,(D-\lambda)\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) = (D-\lambda)^m\left(D\left(x^m e^{\lambda x}\right) - \lambda\, x^m\, e^{\lambda x}\right)$$

$$\begin{aligned}(D-\lambda)^{m+1}\left(x^m\, e^{\lambda x}\right) &= (D-\lambda)^m\left(m\, x^{m-1} e^{\lambda x} + x^m \lambda\, e^{\lambda x} - \lambda\, x^m\, e^{\lambda x}\right) \\ &= m\,(D-\lambda)^m\left(x^{m-1} e^{\lambda x}\right) = 0\end{aligned}$$

$$(D-\lambda)^m\,(D-\bar{\lambda})^m = \left(D^2 - 2\,\alpha\,D + \alpha^2 + \beta^2\right)^m$$

Núcleo del operador $(D-\lambda)^m\,(D-\bar{\lambda})^m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $\lambda = \alpha + \beta\,i$ siendo $\beta \neq 0$

Las funciones $e^{\lambda x}, x\,e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\,e^{\lambda x}$ son linealmente independientes y son aniquiladas por $(D-\lambda)^m$

Las funciones $e^{\bar{\lambda} x}, x\,e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, x^{m-1}\,e^{\bar{\lambda} x}$ son linealmente independientes y son aniquiladas por $(D-\bar{\lambda})^m$

Las funciones $\frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}, x\,\frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}, \ldots, x^{m-1}\,\frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m\,(D-\bar{\lambda})^m$

Las funciones $\frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}, x\,\frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}, \ldots, x^{m-1}\,\frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m\,(D-\bar{\lambda})^m$

Las funciones $\frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}, x\, \frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}, \ldots, x^{m-1}\, \frac{e^{\lambda x}+e^{\bar{\lambda} x}}{2}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m \left(D-\bar{\lambda}\right)^m$

Las funciones $\frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}, x\, \frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}, \ldots, x^{m-1}\, \frac{e^{\lambda x}-e^{\bar{\lambda} x}}{2\,i}$ son aniquiladas por $(D-\lambda)^m \left(D-\bar{\lambda}\right)^m$

$$\exp(\lambda\, x) = \exp(\alpha\, x)\left(cos(\beta\, x) + i\, sen(\beta\, x)\right)$$

$$\exp\left(\bar{\lambda}\, x\right) = \exp(\alpha\, x)\left(cos(\beta\, x) - i\, sen(\beta\, x)\right)$$

$$\frac{\exp(\lambda\, x)+\exp\left(\bar{\lambda}\, x\right)}{2} = \exp(\alpha\, x)\, cos(\beta\, x), \qquad \frac{\exp(\lambda\, x)-\exp\left(\bar{\lambda}\, x\right)}{2\,i} = \exp(\alpha\, x)\, sen(\beta\, x)$$

$$\exp(\alpha\, x)\, cos(\beta\, x), x\, \exp(\alpha\, x)\, cos(\beta\, x), \ldots, x^{m-1}\, \exp(\alpha\, x)\, cos(\beta\, x)$$

$$\exp(\alpha\, x)\, sen(\beta\, x), x\, \exp(\alpha\, x)\, sen(\beta\, x), \ldots, x^{m-1}\, \exp(\alpha\, x)\, sen(\beta\, x)$$

son linealmente independientes y son aniquiladas por

$$(D-\lambda)^m \left(D-\bar{\lambda}\right)^m = \left(D^2 - 2\,\alpha\, D + \alpha^2 + \beta^2\right)^m$$

Ejemplo (raíces reales y complejas simples)

Encuentre la solución general de

$$Y^{(4)}(x) - Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(D^4 - 1\right) Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$.

$D^4 - 1 = (D - 1)(D + 1)(D - i)(D + i)$

La solución general es

$$Y(x) = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x) + C_3 \exp(0\,x)\, cos(x) + C_4 \exp(0\,x)\, sen(x)$$

$$Y(x) = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x) + C_3\, cos(x) + C_4\, sen(x)$$

Aquí $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo (raíces complejas múltiples)

¿Cómo se comportan para valores grandes del tiempo t las funciones cinco veces continuamente derivables $X(t)$ que satisfacen

$$D^2\left(D^2+2\,D+2\right)^2 X(t)=0 \qquad \forall t\in\mathbb{R},$$

donde $D=\frac{d}{dt}$?

Polinomio característico: $p(\lambda)=\lambda^2\,\left(\lambda^2+2\,\lambda+2\right)^2=\lambda^2\,\left((\lambda+1)^2+1\right)^2$

$$D^2\left(D^2+2\,D+2\right)=D^2\left((D+1)^2+1\right)^2=D^2\left(\left(D-(-1-i)\right)\left(D-(-1+i)\right)\right)^2$$

La solución general es

$$X(t)=C_1+C_2\,t+C_3\,e^{-t}cos(t)+C_4\,e^{-t}sen(t)+C_5\,t\,e^{-t}cos(t)+C_6\,t\,e^{-t}sen(t)\,,$$

donde $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\in\mathbb{R}$.

Para valores grandes del tiempo t, $X(t)$ se comporta como una función lineal debido a que existen constantes $C_1, C_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$\left|X(t)-(C_1+C_2\,t)\right|\le\left(|C_3|+|C_4|\right)e^{-t}+\left(|C_5|+|C_6|\right)t\,e^{-t}\longrightarrow_{t\to+\infty}0.$$

Resumen Aniquiladores

Cuando $\lambda \in \mathbb{R}$, el núcleo del operador

$$(D-\lambda)^m$$

es generado por las funciones:

$\exp(\lambda\, x)\,, x\; \exp(\lambda\, x)\,, \ldots, x^{m-1}\; \exp(\lambda\, x)$

Cuando $\lambda = \alpha + \beta\, i$, con $\beta \neq 0$, el núcleo del operador

$$(D-\lambda)^m\,(D-\bar{\lambda})^m = \left(D^2 - 2\,\alpha\, D + \alpha^2 + \beta^2\right)^m$$

es generado por las funciones:

$\exp(\alpha\, x)\, cos\,(\beta\, x)\,, x\; \exp(\alpha\, x)\, cos\,(\beta\, x)\,, \ldots, x^{m-1}\; \exp(\alpha\, x)\, cos\,(\beta\, x)$

$\exp(\alpha\, x)\, sen\,(\beta\, x)\,, x\; \exp(\alpha\, x)\, sen\,(\beta\, x)\,, \ldots, x^{m-1}\; \exp(\alpha\, x)\, sen\,(\beta\, x)$

Fijemos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Considere la EDO lineal de coeficientes constantes

$$Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ tiene la factorización

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ números diferentes y $m_1, m_2, \ldots, m_q \in \mathbb{R}$.

Un sistema fundamental de soluciones está formado por:

- Si $\lambda_k \in \mathbb{R}$, la raíz λ_k aporta las funciones:

  $$\exp(\lambda_k x), x \exp(\lambda_k x), \ldots, x^{m_k-1} \exp(\lambda_k x)$$

- Si $\lambda_k = \alpha + \beta\, i$ con $\beta \neq 0$, el par de raíces $\alpha + \beta\, i$ y $\alpha - \beta\, i$ aportan las funciones:

  $$\exp(\alpha x)\cos(\beta x), x \exp(\alpha x)\cos(\beta x), \ldots, x^{m_k-1} \exp(\alpha x)\cos(\beta x)$$
  $$\exp(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x), x \exp(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{m_k-1} \exp(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)$$