

Series de términos positivos.

- Series de términos positivos.
- Criterio lacunar de Cauchy.
- Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.
- El número e .

Series de términos positivos.

Teor.: Una serie de términos positivos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada.

Dem.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ una serie de términos positivos.

Sean $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$, sus sumas parciales.

Entonces, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{S_n\}$ es una sucesión monótona creciente y ya demostramos que las sucesiones monótonas convergen si y sólo si están acotadas. \square

Criterio lacunar de Cauchy.

Teor. [Criterio lacunar de Cauchy]: Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

Dem.: Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0.$$

Sean

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$T_k := a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

las sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, respectivamente.

\Leftarrow Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k+1} > n$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_2 + \cdots + \underbrace{(a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k} \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como por hipótesis $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge

$\implies \{T_k\}$ acotada $\implies \{S_n\}$ acotada $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

\Rightarrow Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2^k$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_2 + \cdots + \underbrace{(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})}_{2^{k-1}} \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2}T_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\Rightarrow \{S_n\}$ acotada $\Rightarrow \{T_k\}$ acotada $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge. \square

Aplicaciones del criterio lacunar de Cauchy.

Teor.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

Dem.: Si $p \leq 0$, entonces $\frac{1}{n^p} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$
 $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ no converge.

Si $p > 0$, entonces $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Monotonía de potencias)

$\implies \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ es una sucesión monótona decreciente de términos positivos.

Por lo tanto, se puede aplicar el criterio lacunar de Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k}_{\text{serie geométrica}} \text{ converge}$$
$$\iff \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \iff p > 1. \quad \square$$

Corol.: La **serie armónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pese a que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

No hemos definido las **funciones elementales: exp, log, sen, cos, etc.**

Sin embargo supondremos que están definidas y que satisfacen las propiedades básicas que conocemos del curso de Cálculo.

En particular, la función logaritmo natural,

$$\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

es una función biyectiva, estrictamente creciente y satisface $\log(1) = 0$.

Teor.: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

Dem.: **Ej.** (Ver el Teor. 3.29 del libro de Rudin.)

El número e.

Veamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

En efecto, $\forall n \geq 1, \quad 2^{n-1} = \underbrace{2 \cdots 2}_{n-1} \leq \underbrace{2 \cdots n}_{n-1} = n! \implies \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$

Entonces, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ es una serie geométrica convergente, por el criterio de comparación $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ también converge.

Def.: $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$

Veamos que $2 < e < 3.$

En efecto, por un lado $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots > 1 + 1 = 2$

y por el otro $e < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$

Teor.: $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Dem.: **Ej.** (Ver el Teor. 3.31 del libro de Rudin.)

El número e puede calcularse aproximadamente mediante las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ que lo define. Veamos el error que se comete si se aproxima e por la suma parcial n -ésima $S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k}}_{\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Es decir que $0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Ej. Calcula S_{10} y demuestra que $0 < e - S_{10} < 10^{-7}$.

En consecuencia, S_{10} permite determinar las primeras 7 cifras decimales de e .

Teor.: El número e es irracional.

Dem.: Por el absurdo. Supongamos que $e \in \mathbb{Q} \implies \exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$.

Sustituimos en la desigualdad anterior: $0 < \frac{m}{n} - S_n < \frac{1}{n!n}$.

Multiplicamos por $n!$: $0 < \underbrace{(n-1)!m}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} < \frac{1}{n} < 1$.

Entonces, $z := (n-1)!m - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ satisface $z \in \mathbb{N}$ y $0 < z < 1$.

Pero todos los naturales son mayores o iguales que 1. $\triangleright=\triangleleft$ \square