UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
Listado 7
Existencia y Unicidad de solución de EDO de 1er Orden.

Problemas a resolver en práctica

1. Considere el problema de valor inicial $\begin{cases} y'(x) = \left(\sqrt[3]{x+y(x)}\right)^2 - 1 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

   (a) Verifique que $z_1(x) := \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 - x$ y $z_2(x) := -x$ son soluciones del PVI planteado.

   (b) ¿Se contradice el teorema de existencia y unicidad en este caso? Justifique su respuesta.

Desarollo:

(a) Consiste en validar la EDO y la condición inicial, para z_1 y z_2.
Para z_1:
Haciendo los cálculos correspondientes, se tiene

$$z_1'(x) = \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - 1\,,$$

y

$$\sqrt[3]{x+z_1(x)}^2 - 1 = ... = \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - 1\,,$$

de donde se deduce que z_1 es una solución de la EDO que gobierna al PVI. Además, como $z_1(1) = -1$, se concluye que z_1 es una solución del PVI dado.
Para z_2:
Se procede de manera análoga. Tenemos que $z_2'(x) = -1$, y $\sqrt[3]{x+z_2(x)}^2 - 1 = -1$, con lo cual z_2 resuelve la EDO. Como también $z_2(1) = -1$, se concluye que z_2 es otra solución del mismo PVI.

(b) En el contexto de la teoría de existencia y unicidad, la EDO se puede expresar como $y'(x) = f(x, y(x))$, siendo $f(x,y) := (x+y)^{2/3} - 1$, la cual es continua en $\Omega_1 := \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, siendo $(x_0, y_0) = (1, -1) \in \Omega_1$, el Teorema de Peano garantiza la existencia de al menos una solución del PVI dado.
Por otro lado, se tiene $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)^{-1/3}$, la cual es continua en $\Omega_2 := \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$. Esto nos dice que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en Ω_2,

pero $(x_0, y_0) = (1, -1) \notin \Omega_2$, por lo cual no es posible aplicar el Teorema de Picard (y con ello asegurar que el PVI dado tenga una única solución). Por lo tanto, no hay contradicción alguna.

2. Analice la existencia/existencia y unicidad de los siguientes PVIs:

   (a) $y'(x) = \sqrt{x-y}$ con $y(1) = 1$.

   (b) $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x)-1}, \quad y(x_0) = y_0$.Qué condiciones debe haber sobre (x_0, y_0) para tener existencia? ¿Para tener unicidad?

Desarollo:

(a) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x,y) = \sqrt{x-y}$, la cual es continua en $\mathbb{R}^2 - D$ donde $D = \{(x,y) : x < y\}$. Por el Teorema de Existencia de EDO (Teorema de Peano) se concluye que el PVI con condición inicial $y(1) = 1$, tiene solución.
Para la unicidad, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-1/2)(x-y)^{-(1/2)}$ la cual es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$; por tanto, por el Teorema de Picard, no podemos garantizar unicidad de solución en el PVI anteriormente descrito.

(b) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x,y) = 4x - (y-1)^{(1/4)}$, la cual es continua en $\mathbb{R}^2 - A$ donde $A = \{(x,y) : y < 1\}$. Por tanto, el Teorema de Existencia de EDO (Teorema de Peano) nos dice que el correspondiente PVI con condición inicial $y(x_0) = y_0$ admite solución si $y_0 \geq 1$.
Para la unicidad, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-1/4)(y-1)^{-(3/4)}$ la cual es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$; por tanto, por el Teorema de Unicidad de Soluciones, el PVI $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x)-1}, \quad y(x_0) = y_0$ admite única solución si $y_0 > 1$.

3. Resuelva $y'(x) = \dfrac{y^2-1}{(x-1)^2}$ con $y(-1) = 0$.

Desarollo:

Observamos que la funciones $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{(x-1)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{(x-1)^2}$ son continuas en todo punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ con la condición que $x \neq 1$. Por separación de variables, se tiene la igualdad

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

realizando las integraciones, para c igual constante, resulta

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{1-x} + c, \text{ o equivalentemente, } \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2}{1-x} + 2c,$$

Se sigue

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \mathrm{e}^{2c}\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}}$$

Como $y(-1)=0$ sigue que $\dfrac{y-1}{y+1}$ es negativo en una vecinad de $x=-1$, por tanto

$$\mathrm{e}^{2c}\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}} = \frac{1-y}{y+1}.$$

De lo anterior, poniendo $K=\mathrm{e}^{2c}$, sigue $1-y=(y+1)K\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}}$, de donde

$$y(x) = \frac{1-K\mathrm{e}^{\alpha(x)}}{1+K\mathrm{e}^{\alpha(x)}} \text{ para } \alpha(x) = \frac{2}{1-x}.$$

Ahora, en la relación anterior, de $y(-1)=0$, sigue $K=\mathrm{e}^{-1}$, para obtener

$$y(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{\beta(x)}}{1+\mathrm{e}^{\beta(x)}},$$

donde $\beta(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Note que para $x=-1$, se obtiene $y(-1)=0$.

4. Resolver $y'(x) = \dfrac{1}{y^2-2y-8}$.

Desarollo:

Aquí, si escribimos $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2-2y-8}$ entonces

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2-2y}{y^2-2y-8}$. Ambas funciones resultan continuas para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ de modo que $y\in]-\infty,-2[\cup]-2,4[\cup]4,+\infty[$. De modo que si agregamos la condición inicial $y(x_0)=y_0$ la EDO dada tiene única solución cada vez que y_0 esté en algúno de los tres intervalos sealados anteriormente.

Además, observe que sin determinar la solución de la EDO misma, podemos afirmar analizando el signo de la expresión $g(y)=y^2-2y-8$, que la derivada de la solución de la EDO dada, es:

- positiva si $y\in]-\infty,-2[$,
- negativa si $y\in]-2,4[$,
- positiva si $y\in]4,+\infty[$.

Para determinar la solución, usamos separación de variables para obtener:

$$(y^2-2y-8)dy = dx,$$

de donde se obtienen las soluciones implícitas

$$y^3-3y^2-24y = 3x+c.$$

con c constante arbitraria, determinada univocamente en presencia de una condición inicial $y(x_0)=y_0$ (con y_0 en uno de los tres intervalos definidos anteriormente).

5. **Ecuación de Bernoulli** Son EDO no lineales del tipo $y'(t) + p(t)y(t) = h(t)y^n(t)$ con $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Para determinar soluciones no triviales haga el cambio de variable $v = y^{1-n}$.

   (a) $y'(x) + \frac{1}{x}\, y = y^4$, con $y(1) = 2$.

   (b) $y'(x) = y + e^{2x}y^3$.

Desarollo:

(a) Observe que la EDO dada tiene por solución a $y \equiv 0$, pero esta no satisface la coindición inicial $y(1) = 2$. Además, de la condición inicial, consideramos $x > 0$.

Entoces teniendo presente el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, la solución no trivial buscada no puede ser cero en ningún punto. Entonces dividiendo la EDO por $y^4(x)$, sigue

$$y^{-4}(x)y'(x) \;+\; \frac{1}{x}\, y^{-3}(x) \;=\; 1.$$

Haciendo $v(x) = y^{-3}(x)$, se obtiene:

$$v'(x) - \frac{3}{x}v(x) = -3$$

de donde, sigue equivalentemente

$$\frac{d}{dx}[x^{-3}v(x)] = -3x^{-3}.$$

Integrando se obtiene $v(x) = \dfrac{3}{2}x + cx^3$, entonces

$$y^{-3}(x) = \frac{3}{2}x + cx^3.$$

Puesto que $y(1) = 2$, sigue que

$$y^{-3}(1) = \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + c,$$

de donde $c = -\frac{11}{8}$. Así, la solución al PVI, es:

$$y^{-3}(x) = \frac{3}{4x} - \frac{5}{8}x^3.$$

Equivalentemente,

$$y^3(x) = \frac{8}{12x - 11x^3}.$$

(b) Teniendo presente el análisis en el item anterior, para determinar soluciones no triviales, iniciamos dividiendo la EDO dada por y^3:

$$\frac{y'(x)}{y^3} - y^{-2}(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

e introduciendo la función auxiliar $v(x) = y^{-2}(x)$, se obtiene

$$v'(x) + 2v(x) = -2\mathrm{e}^{2x},$$

la cual escribimos como:

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{e}^{2x} v(x)] = -2\mathrm{e}^{4x}.$$

Integrando, obtenemos

$$v(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{-2x}$$

de donde

$$y^2(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2c - \mathrm{e}^{4x}}$$

con c constante arbitraria.

Problemas para el Estudiante

1. Resolver

(a) $y'(x) = \dfrac{x}{y}$.

(b) $y'(x) = (y-1)(x+1)$.

(c) $y'(x) = \dfrac{y-x}{x}$.

(d) $y'(x) = \dfrac{x}{y-1}$.

(e) $y'(x) = x^2\, y$.

2. Analice la existencia/existencia y unicidad de los siguientes PVIs:

(a) $y'(x) = \dfrac{1}{2x - y(x)^2}$, $y(x_0) = y_0$.

(b) $y'(t) = \dfrac{2}{y^2 + 2y - 15}$, $z(t_0) = z_0$. (**Obs:** la EDO es autónoma)

3. Considere la EDO $y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)}$,
a) Muestre que $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{1}{9}x^6$ son soluciones de la EDO dada.
b) Considere los PVI (P_1) y (P_2) respectivamente definidos por

$$\begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Verifique que el PVI (P_1) tiene al menos dos soluciones y que (P_2) tiene solución única ¿Cómo puede explicar esta situación?

4. Considere el PVI (P), definido por $\begin{cases} y'(x) &= \sqrt{x^2 + y(x)^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Muestre que:

   (a) Para todo $r > 0$, el PVI (P) admite única solución cuando (x_0, y_0) es tal que $x_0^2 + y_0^2 = r^2$.

   (b) Muestre que sobre cualquier punto (x_0, y_0) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$, pasa una única curva integral que admite recta tangente de pendiente r en ese punto.

5. Considere los PVI, definidos por

$$(P_1)\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{y(5y-7)^2}{4x(x-25)^2} \\ y(-3) &= 0\,. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (P_2)\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(5y-7)^2}{4x(x-25)^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

   (a) Determine las soluciones de (P_1) y (P_2).

   (b) ¿En qué difieren las soluciones anteriores? ¿O son iguales?

6. **Ecuación de Bernoulli** Son EDO no lineales del tipo $y'(t) + p(t)y(t) = h(t)y^n(t)$ con $n \in \mathbb{R}$. Para su solución haga el cambio de variable $v = y^{1-n}$.

   (a) $y'(x) = y + e^{2x}y^3$. ;   (b) $y'(x) + \frac{1}{x}\,y = y^4$

05/08/2020
MD/JM/CM/DS//jms