UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PL6: TALLER R.M. I (MAT 525115)
Tema 2: Razonamientos & Demostraciones (V).

P1 Sea X un conjunto arbitrario pero fijo. Para cada $A \subseteq X$ la función característica de A es la función $\Psi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Si A, B son dos subconjuntos de X establecer:

($\mathcal{P}$) $\Psi_A = \Psi_B \iff A = B$;

1. $\Psi_{A\cap B} = \Psi_A \Psi_B$;
2. $\Psi_{A\cup B} = \Psi_A + \Psi_B - \Psi_A \Psi_B$;
3. $\Psi_{A-B} = \Psi_A - \Psi_A \Psi_B \wedge \Psi_{A^c} = 1 - \Psi_A$

($\mathcal{P}$) $\Psi_{A\triangle B} = \Psi_A + \Psi_B - 2\Psi_A \Psi_B$;

4. $\forall x \in X : \Psi_\emptyset(x) = 0$

P2 Usando funciones características demostrar que si A, B y C son subconjuntos de un conjuntos universo $\mathcal{U}$, entonces

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

P3 Notación de K. E.Iverson

- Función piso: $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \longmapsto \lfloor x \rfloor =$ mayor entero o igual a x;
- Función techo. $\lceil\ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \longmapsto \lceil x \rceil =$ menor entero o igual a x.

Demostrar las siguientes propiedades, válidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

P4 Establecer

1. Si $cx \notin \mathbb{Z}$, entonces
$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$$
2. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil x < x + 1.$$

P5 Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Entonces

1. si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva;

($\mathcal{P}$) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva;

2. si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva;

P6 Construcción contra ejemplos:

1. Dar un ejemplo de de funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, tales que $g \circ f$ sea *inyectiva*, pero que g no lo sea.

($\mathcal{P}$) Presentar un ejemplo de funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, tales que $g \circ f$ sea *sobreyectiva*, pero que f no lo sea.

P7 Establecer que las funciones definidas de $\mathbb{Z}$ en si mismo por

$$f(n) = \begin{cases} -n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ n^2 + 1 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \qquad \wedge \qquad g(n) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ n - 1 & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

originan las siguiente funciones compuestas:

$$(a)\ \big(g \circ f\big)(n) = \begin{cases} -n - 1 & \text{si} \quad n \leq 0 \\ n^2 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \quad \wedge \quad (\mathcal{P})\ \big(f \circ g\big)(n) = \begin{cases} -2n & \text{si} \quad n < 0 \\ 1 - n & \text{si} \quad n = 0 \vee n = 1 \\ (n-1)^2 + 1 & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

P8 Sean $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por

$$f(n) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad n < 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \quad \wedge \quad g(n) = \begin{cases} -2n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ n + 1 & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$.

P9 Determinar si la función $f : \mathbb{Z} \times Z \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por

$$(a)\ f(n, m) = n + m \quad \wedge \quad (b)\ f(n, m) = nm$$

es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

P10 Establecer que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, son funciones tales que si

1. $g \circ f$ es inyectiva entonces $\mathbf{f}$ también lo es;

($\mathcal{P}$) $g \circ f$ es sobreyectiva entonces $\mathbf{g}$ también lo es;

P11 Propiedades de la función recíproca. Sean $f : A \to B$ función y $W \subseteq B$ entonces la imagen recíproca de F de subconjuntos de B verifica:

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. Si $V \subseteq W$, entonces $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$
3. Si $V \subseteq B$, entonces

$$f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \quad \wedge \quad f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W).$$

Comparar con la acción de la imagen directa por f de subconjuntos de A. Ver [P1] del PL5.