UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 11 - Álgebra III (525201)

Ejercicio 1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal. Pruebe que:

1. $Det(A) \in \{-1, +1\}$.
2. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $\lambda = -1 \ \vee \lambda = 1$.

Ejercicio 2. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador simétrico tal que $\forall u \in V, \langle T(u), u\rangle = 0$.

1. Pruebe que $\forall u, v \in V, \langle T(u), v\rangle = 0$.
2. Use $a)$ para concluir que $T = \theta$.

Ejercicio 3. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^k(v) = \theta$, pero $T^{k-1}(v) \neq \theta$ donde $v \in V$ es dado y $k \in \mathbb{N}$. Pruebe que:

1. El conjunto $B = \{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ es l.i.
2. $W = \langle B\rangle$ es invariante para T.
3. $T|_W$ es nilpotente de índice k, i.e. $(T|_W)^k = \theta$.
4. La matriz respresentante de $T|_W$ con respecto a B es:

$$[T|_W]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

Ejercicio 4. Sea V un e.v. real de dimensión n y $T : V \to V$ una aplicación lineal simétrica. Pruebe que si no existe W, s.e.v no trivial de V (i.e. $W \neq V$ y $W \neq \{\theta\}$), invariante para T, entonces T tiene sólo un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T = \lambda I_n$.

Ejercicio 5. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y $S \subseteq V$ (no necesariamente un s.e.v. de V). Se define el espacio ortogonal a S por:

$$S^\perp = \{u \in V : \forall s \in V, \ \langle s, u\rangle = 0\}.$$

Pruebe que:

1. $S^\perp$ es s.e.v. de V.
2. $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$.
3. $S' \subseteq S \implies S^\perp \subseteq S'^\perp$.
4. $\langle S\rangle = (S^\perp)^\perp$.
5. Si V es de dimensión finita, entonces $V = \langle S\rangle \oplus \langle S\rangle^\perp$.