

# Medidas.

- Definición de medida.
- Ejemplos de medidas.
- Propiedades de medidas.
- Medidas con signo.
- C.T.P. (casi todo punto).

## Definición de medida.

Los elementos de una familia de conjuntos  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  son **mutuamente disjuntos** (o **disjuntos dos a dos**), si  $\forall \alpha, \beta \in A : \alpha \neq \beta, E_\alpha$  y  $E_\beta$  son disjuntos.

En tal caso, la unión de los  $E_\alpha$  se suele denotar así:  $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ .

**Def.:** Sea  $(X, \mathcal{X})$  un espacio medible.  $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una **medida**, si:

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- b)  $\forall E \in \mathcal{X}, \mu(E) \geq 0$  y
- c) dados  $E_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}$ , mutuamente disjuntos, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

En tal caso, a  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  se le denomina un **espacio de medida**.

Notemos que puede ocurrir que  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$ , bien sea porque para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(E_n) = \infty$  o bien porque la serie diverja.

- Def.:**
- Una medida  $\mu$  es **finita**, si  $\mu(X) < \infty$ .
  - Una medida  $\mu$  es  **$\sigma$ -finita**, si  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  con  $\mu(E_n) < \infty$ .

# Ejemplos de medidas.

Sea  $(X, \mathcal{X})$  un espacio medible. Las siguientes  $\mu$  son medidas.

**Ej.**

- $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por  $\mu(E) := 0 \ \forall E \in \mathcal{X}$  es la **medida nula**.

- $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por  $\mu(\emptyset) := 0$  y  $\mu(E) := +\infty \ \forall E \in \mathcal{X} : E \neq \emptyset$ , es una medida.

- Dado  $p \in X$ ,  $\mu_p : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida  $\forall E \in \mathcal{X}$  por

$$\mu_p(E) := \begin{cases} 1, & \text{si } p \in E, \\ 0, & \text{si } p \notin E, \end{cases} \text{ es la } \textbf{medida concentrada en } p.$$

- Sean  $X := \mathbb{N}$  y  $\mathcal{X} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida  $\forall E \subset \mathbb{N}$  por

$$\mu(E) := \begin{cases} \#E, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ +\infty, & \text{si } E \text{ es infinito,} \end{cases}$$

donde  $\#E$  denota la cantidad de elementos de  $E$ , es la **medida de contar**.

- Sean  $X := \mathbb{R}$  y  $\mathcal{X} := \mathcal{B}$ . En el Cap. 9 veremos que hay una única medida  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ ,  $\lambda((a, b)) := b - a$ , vale decir, la longitud de  $(a, b)$ . Esta medida  $\lambda$  se denomina la **medida de Lebesgue**.

# Propiedades de medidas.

A lo largo de esta sección,  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  es un espacio de medida.

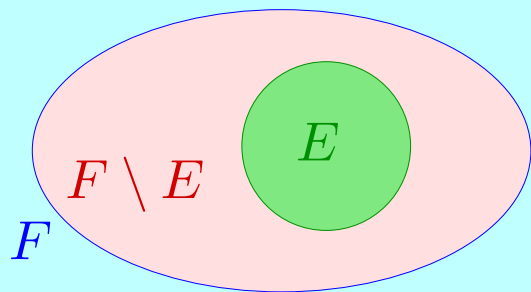
**Lema.:** Sean  $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{X}$  mutuamente disjuntos. Entonces,

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^N E_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n).$$

**Dem.:** Sean  $E_n := \emptyset \ \forall n > N$ . Entonces,

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^N E_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n). \quad \blacksquare$$

**Lema.:** Sean  $E, F \in \mathcal{X}$  tales que  $E \subset F$ . Entonces,  $\mu(E) \leq \mu(F)$  y, si  $\mu(E) < \infty$ , entonces  $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ .



**Dem.:**  $F = E \cup (F \setminus E)$

$$\implies \mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$$

Entonces  $\mu(F) \geq \mu(E)$  y

si  $\mu(E) < \infty$ ,  $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ .  $\blacksquare$

- Notemos que si  $\mu(E) = +\infty$ , entonces  $\mu(F) = +\infty$  y  $\mu(F \setminus E)$  puede tomar cualquier valor.

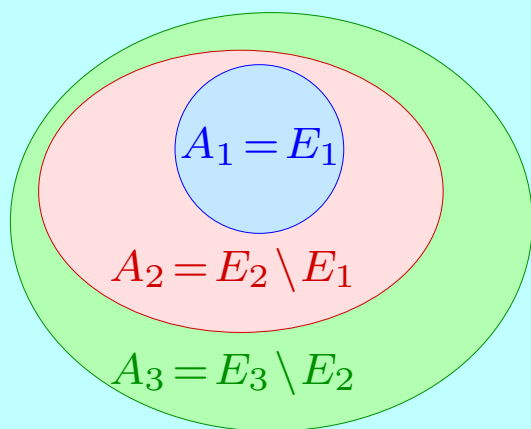
## Notación:

- Si  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de conjuntos (es decir, tal que  $E_n \subset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ), entonces su unión se denota  $\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .
- Si  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente de conjuntos (es decir, tal que  $E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ), entonces su intersección se denota  $\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .

**Lema.:** Sean  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$  sucesiones creciente y decreciente, resp.

a)  $\mu \left( \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_n \mu(E_n)$ .

b) Si  $\mu(F_1) < \infty$ , entonces  $\mu \left( \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \lim_n \mu(F_n)$ .



**Dem.: (a)** Sean  $A_n := \begin{cases} E_1, & \text{si } n = 1, \\ E_n \setminus E_{n-1}, & \text{si } n > 1. \end{cases}$

- $A_n, n \in \mathbb{N}$ , son mutuamente disjuntos,
- $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$  Ej.
- $\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ . Ej.

Entonces,  $\mu(E_n) = \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y

$$\mu \left( \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_n \mu(E_n).$$

**(b)** Sean  $E_n := F_1 \setminus F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots \implies \emptyset = E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

$$\begin{aligned} \implies \mu\left(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) &\stackrel{(a)}{=} \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(F_1 \setminus F_n) \\ &= \lim_n [\mu(F_1) - \mu(F_n)] = \mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n), \end{aligned}$$

donde, en la anteúltima igualdad, hemos usado que  $\mu(F_1) < \infty$  y por lo tanto  $\mu(F_n) < \infty$ , para aplicar el lema anterior.

$$\text{Por otra parte, } \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_1 \setminus F_n) = F_1 \setminus \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

$$\implies \mu\left(\uparrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right).$$

donde hemos vuelto a usar que  $\mu(F_1) < \infty$  y por lo tanto  $\mu\left(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) < \infty$ , para aplicar el lema anterior.

$$\text{Entonces, } \mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu\left(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right),$$

por lo que usando una vez más que  $\mu(F_1) < \infty$ ,

$$\mu\left(\downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \lim_n \mu(F_n). \quad \blacksquare$$

## Medidas con signo.

**Def.:** Sea  $(X, \mathcal{X})$  un espacio medible.  $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es una **medida con signo** o **medida signada**, si:

a)  $\lambda(\emptyset) = 0$  y

b) dados  $E_n \in \mathcal{X}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mutuamente disjuntos, se tiene que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

- Notemos que en la definición anterior, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$  **converge absolutamente**. En efecto, como la unión  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  no depende del orden de los  $E_n$ , entonces todos los reordenamientos de la serie convergen al mismo número real. Por lo tanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$  converge absolutamente.

**Ej.**

Demuestra que las medidas con signo conforman un espacio vectorial.

## C.T.P. (casi todo punto).

**Def.:** Sea  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  un espacio de medida.

Una propiedad se cumple **c.t.p.** (o **en casi todo punto** o  **$\mu$ -c.t.p.**), si  $\exists N \in \mathcal{X}$  con  $\mu(N) = 0$  tal que la propiedad se cumple  $\forall x \in X \setminus N$ .

**Ejemplo:** Considera el espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ .

La función característica de los racionales,  $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$  c.t.p.

**Dem.:** Ej. • Demuestra que  $\forall x \in \mathbb{R}, \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ .  
• Usa el resultado anterior para demostrar que  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = 0$ .  
• Usa que  $\mathbb{Q}$  es numerable para demostrar que  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$  y concluye que

$$\chi_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

**Ejemplo:** Considera el espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n := (-1)^n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$  con  $\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$  la función característica de  $[0, \frac{1}{n}]$ .

Demuestra que  $\{f_n\}$  no convergen puntualmente, pero  $f_n \xrightarrow{n} 0$  c.t.p.

**Dem.:** Ej.