UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PRÁCTICA 7: INTEGRALES DE LINEA
CÁLCULO III (525211)

Problema 1. Calcule la integral de linea sobre los siguientes campos.

1. $f(x,y) = x + y$, donde $\mathcal{C}$ es el borde del triangulo con vértices $(0,0), (1,0), (0,1)$.

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

3. $\vec{F}(x,y,z) = \left(yz, x^2, xz\right)$, y $\mathcal{C}$ la porción de la curva $y = x^2, z = x^3$ del punto $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$

4. $\vec{F}(x,y,z) = (x - y, x + y)$, y $\mathcal{C}$ es el circulo $x^2 + y^2 = 1$ orientado en sentido horario.

Problema 2. Determine si los siguientes campos son conservativos. Ademas, de ser posible encontrar un potencial:

1. $\vec{F}(x,y) = \left(e^x y^2 + 1, 2e^x y\right)$.

2. $\vec{F}(x,y) = \left(2x \sin y, x^2 \cos y - 3y^2\right)$.

3. $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy\right)$.

Problema 3. Sea el campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} - yz\hat{k}$$

1. Pruebe que F es conservativo.

2. Calcular el trabajo efectuado al mover una partícula desde el punto $\left(2, 0, \sqrt{5}\right)$ hasta el punto $\left(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{5}\right)$, con $y \geq 0$, a lo largo de la curva de intersección $\mathcal{C}$ entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $z = \sqrt{5}$ bajo la influencia del campo F.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 4. Calcule las siguientes integrales de linea:

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,dr$, donde $f(x,y,z)=xyz$ y $\mathcal{C}$ una vuelta de la hélice de radio r y de paso 2π.

2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(x^3 y + \frac{y^3 x}{3}\right) dx + ax^2\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ el contorno de la region definida por $x^2+y^2-2ay<0$, $y>a$.

3. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(y^2+z^2\right) dx + \left(z^2+x^2\right) dy + \left(x^2+y^2\right) dz$, a lo largo de $\mathcal{C}:\ x^2+y^2=2z,\ x+y-z+1=0$.

4. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sin z\,dx + \cos z\,dy - (xy)^{1/3}\ dz$, sobre la parametrización $\mathcal{C}:\ (x,y,z)=\left(\cos^3 t, \sin^3 t, t\right)$, $t\in\left[0,\frac{7\pi}{2}\right]$.

Problema 5. Determine si los siguientes campos son conservativos. Ademas, de ser posible encontrar un potencial:

1. $\vec{F}(x,y)=\left(x^2+y^2, 2xy\right)$.
2. $\vec{F}(x,y,z)=(y,x,-xz)$.
3. $\vec{F}(x,y,z)=\left(x,y^2,z\right)$.
4. $\vec{F}(x,y,z)=\left(y^2 z, 2xyz+\sin z, xy^2+y\cos z\right)$

Problema 6. Sea $F(x,y,z)=\left(z^3+2xy, x^2, 3xz^2\right)$. Probar que $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} F\cdot dr=0$, si $\mathcal{C}$ es el perímetro de cualquier cuadrado unitario.

Problema 7 (Análisis del trabajo de un satélite). Un satélite de masa m órbita alrededor de la Tierra, la cual posee una masa M. De acuerdo a la Ley de Gravitación Universal de Newton, la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite esta dada por la expresión

$$F_G(x,y,z)=-\frac{G\,M\,m}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

donde $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ es la posición del satélite respecto al centro de la Tierra, centrada en el origen del sistema. El satélite recibe una fuerza externa dada por $F_E(x,y,z)=(0,x,0)$.

1. Prueba que F_E no es un campo conservativo, pero F_G si lo es.

2. Suponga que la órbita que el satélite describe sigue la trayectoria de la elipse, parametrizada por

$$(\forall t\in[0,2\pi[)\ :\ \mathcal{C}(t)=(c+a\cos t, b\sin t, 0)$$

donde a, b y c son constantes no negativas, con $0<b<a$ y $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Notar que $(0,0,0)$ es un foco de la elipse (o sea, la Tierra). Calcule el trabajo del satélite sobre su órbita.