Teorema de representación de Riesz.
Medidas en álgebras.

- **Teorema de representación de Riesz.**
- **Medidas en álgebras.**

Teorema de representación de Riesz.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida.

Def.: Sea $G \in L_p'$, $1 \le p \le \infty$. G es un funcional **positivo** si

$$Gf \ge 0 \quad \forall f \in L_p : \ f \ge 0.$$

Lema: $\forall G \in L_p', \ \exists G^+, G^- \in L_p'$ positivos, tales que $G = G^+ - G^-$.

Dem.: Ver la demostración del Lema 8.3.

Teor. [representación de Riesz $(p = 1)$]: Sea μ σ-finita. Entonces,

$$\forall G \in L_1', \ \exists g \in L_\infty : \ Gf = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L_1$$

y $\|G\|_1' = \|g\|_\infty$. Además, si G es positivo, entonces $g \ge 0$.

Dem.: Lo demostramos en varios pasos:

- **Paso 1:** Suponiendo μ finita y G positivo.
- **Paso 2:** Suponiendo μ σ-finita y G positivo.
- **Paso 3:** Suponiendo μ σ-finita y G cualquiera.
- **Paso 4:** Demostración de que $g \in L_\infty$ y $\|g\|_\infty = \|G\|_1'$.

- Paso 1: Sea $\mu(X) < \infty$ y $G \in L_1'$ positivo.

○ Caso 1. Funciones características de conjuntos medibles.

$$\forall E \in \mathscr{X}, \ \int \chi_E \, d\mu = \mu(E) \leq \mu(X) < \infty \implies \chi_E \in L_1.$$

Sea $\lambda : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ definida por $\lambda(E) := G\chi_E, \ E \in \mathscr{X}$.

Veamos que λ es una medida.

(a) $\chi_\emptyset = 0 \implies \lambda(\emptyset) = G\chi_\emptyset = 0.$

(b) G positivo y $\chi_E \geq 0 \implies \lambda(E) = G\chi_E \geq 0 \quad \forall E \in \mathscr{X}$.

(c) Sean $E := \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $F_n := \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} E_k \implies E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$ **(1)**

$$\lambda(F_n) = G\chi_{F_n} = G\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} G\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k). \qquad \textbf{(2)}$$

$$\overset{(1)}{\implies} \chi_{F_n} \nearrow \chi_E \in L_1 \overset{\text{T.C.D. en } L_1}{\implies} \left\|\chi_{F_n} - \chi_E\right\|_1 \xrightarrow{n} 0$$

$$\implies |\lambda(E) - \lambda(F_n)| = \left|G\chi_E - G\chi_{F_n}\right| \leq \|G\|_1' \left\|\chi_{F_n} - \chi_E\right\|_1 \xrightarrow{n} 0.$$

$$\overset{(2)}{\implies} \left|\lambda(E) - \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)\right| \xrightarrow{n} 0 \implies \lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).$$

(a), (b) y (c) $\implies$ λ medida

y $\lambda \ll \mu$, pues $\mu(E) = 0 \implies \chi_E = 0$ μ-c.t.p. $\implies \lambda(E) = G\chi_E = 0.$

$$\overset{\text{(T.R.N.)}}{\implies} \exists g : X \to \mathbb{R}^+ \text{ medible: } G\chi_E = \lambda(E) = \int \chi_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathscr{X}.$$

◦ Caso 2. Funciones simples, medibles, positivas.

Sea φ simple, medible, positiva $\Longrightarrow \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, \; E_k \in \mathscr{X}, \; c_k \geq 0$

$$\Longrightarrow G\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k G\chi_{E_k} \overset{\text{Caso 1}}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \int \chi_{E_k} g \, d\mu = \int \varphi g \, d\mu.$$

◦ Caso 3. Funciones integrables, positivas.

Sea $f \in L_1 : \; f \geq 0.$ Sean $\varphi_n, \; n \in \mathbb{N},$ simples, medibles, positivas tales que $\varphi_n \nearrow f \overset{\text{T.C.D. en } L_1}{\Longrightarrow} \|\varphi_n - f\|_1 \xrightarrow{n} 0$

$$\Longrightarrow Gf = \lim_n G\varphi_n \overset{\text{Caso 2}}{=} \lim_n \int \varphi_n g \, d\mu \overset{\text{T.C.M.}}{=} \int f g \, d\mu.$$

◦ Caso 4. Funciones integrables.

Sea $f \in L_1 \Longrightarrow f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \in L_1$ y $f^+, f^- \geq 0$

$$\Longrightarrow Gf = Gf^+ - Gf^- \overset{\text{Caso 3}}{=} \int f^+ g \, d\mu - \int f^- g \, d\mu = \int (f^+ - f^-) \, g \, d\mu$$
$$= \int f g \, d\mu.$$

- **Paso 2:** Sea $X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$ y $G \in L_1(X)'$ positivo.

- ○ Existencia de g_n en cada $X_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Dado $G \in L_1(X)'$, sean $G_n \in L_1(X_n)'$, $n \in \mathbb{N}$, definidos por

$$\begin{aligned} G_n :\ L_1(X_n) &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto G\widehat{f}, \end{aligned} \qquad \text{donde} \qquad \widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X_n, \\ 0, & \text{si } x \notin X_n. \end{cases}$$

Si $f \in L_1(X)$, entonces $G_n\big(f|_{X_n}\big) = G\big(\widehat{f|_{X_n}}\big) = G\big(f\chi_{X_n}\big)$. **(1)**

Entonces, como $\mu(X_n) < \infty$, por el Paso 1, $\exists g_n :\ X_n \to \mathbb{R}^+$ medible tal que

$$G\big(f\chi_{X_n}\big) \overset{(1)}{=} G_n\big(f|_{X_n}\big) = \int_{X_n} \big(f|_{X_n}\big) g_n\, d\mu = \int_{X_n} f g_n\, d\mu \quad \forall f \in L_1(X).$$

- ○ "Unicidad" de $g_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Veamos que si $m \le n$, de modo que $X_m \subset X_n$, entonces $g_n|_{X_m} = g_m$ c.t.p.

Sea $X_m = Y_m \,\dot\cup\, Z_m$ con $\begin{cases} Y_m := \{x \in X_m :\ g_n(x) \ge g_m(x)\}, \\ Z_m := \{x \in X_m :\ g_n(x) < g_m(x)\}. \end{cases}$ Entonces

$$\begin{aligned} \int_{X_m} |g_n - g_m|\ d\mu &= \int_{Y_m} (g_n - g_m)\ d\mu + \int_{Z_m} (g_m - g_n)\ d\mu \\ &= \int_{X_n} \chi_{Y_m} g_n\, d\mu - \int_{X_m} \chi_{Y_m} g_m\, d\mu + \int_{X_m} \chi_{Z_m} g_m\, d\mu - \int_{X_n} \chi_{Z_m} g_n\, d\mu \\ &= G\big(\chi_{Y_m}\chi_{X_n}\big) - G\big(\chi_{Y_m}\chi_{X_m}\big) + G\big(\chi_{Z_m}\chi_{X_m}\big) - G\big(\chi_{Z_m}\chi_{X_n}\big) \\ &= G\chi_{Y_m} - G\chi_{Y_m} + G\chi_{Z_m} - G\chi_{Z_m} = 0 \implies g_n|_{X_m} = g_m \ \ \mu\text{-c.t.p.} \end{aligned}$$

○ Existencia de g en X.

Sea $g : X \to \mathbb{R}$ definida del siguiente modo:

$\forall x \in X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n,\ \exists m \in \mathbb{N} :\ x \in X_m.$ Sea $g(x) := g_m(x).$

La función g está bien definida, pese a que $x \in X_n\ \ \forall n \geq m,$ pues, por lo que acabamos de demostrar, $g_n(x) = g_m(x)\ \ \forall x \in X_m,$ μ-c.t.p. Entonces,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G\big(f\chi_{X_n}\big) = \int f\chi_{X_n} g\, d\mu \quad \forall f \in L_1(X).$$

Sea $f \in L_1(X)$. Entonces, $f\chi_{X_n} \xrightarrow{n} f$

$\overset{\text{T.C.D. en } L_1}{\Longrightarrow} \big\|f\chi_{X_n} - f\big\|_1 \xrightarrow{n} 0 \implies Gf = \lim_n G\big(f\chi_{X_n}\big).$

Por otra parte, $\int f g\, d\mu \overset{\text{Ej.}}{=} \lim_n \int f\chi_{X_n} g\, d\mu.$ Por lo tanto,

$$Gf = \int f g\, d\mu \quad \forall f \in L_1(X).$$

- Paso 3: Sea μ σ-finita y $G \in L_1'$.

Sean $G^+,\ G^- \in L_1$ positivos tales que $G = G^+ - G^-$.

Sean $g^+,\ g^- : X \to \mathbb{R}^+$ medibles tales que

$$G^+ f = \int f g^+\, d\mu \quad \text{y} \quad G^- f = \int f g^-\, d\mu \quad \forall f \in L_1.$$

Sea $g := g^+ - g^- : X \to \mathbb{R}.$ Entonces,

$$Gf = G^+ f - G^- f = \int f g^+\, d\mu - \int f g^-\, d\mu = \int f g\, d\mu \quad \forall f \in L_1(X).$$

- **Paso 4:** $g \in L_\infty$ y $\|g\|_\infty = \|G\|_1'$. **Ej.8.T** y **Ej.8.U.** ■

Teor. [representación de Riesz $(1 < p < \infty)$]: Sean p, q conjugados con $1 < p < \infty$. Entonces,

$$\forall G \in L_p', \quad \exists g \in L_q : \;\; Gf = \int fg \, d\mu \quad \forall f \in L_p$$

y $\|G\|_p' = \|g\|_q$.

Dem.: El caso μ σ-finita, se demuestra de manera análoga al caso $p = 1$.

La extensión al caso de una medida cualquiera, puede verse en la demostración del Teor. 8.15 del texto de Bartle. ■

Medidas en álgebras.

Hemos usado varias veces en los ejemplos y ejercicios, la **medida de Lebesgue:** una medida definida en la **σ-álgebra de Borel**, que aplicada a un intervalo da su longitud. Sin embargo, no hemos demostrado aún que tal medida exista.

En esta clase, veremos los conceptos de **álgebra** y **medida en un álgebra**.
La clase siguiente veremos un teorema de extensión que, aplicado a la medida en un álgebra inducida por la longitud de intervalos, da la medida de Lebesgue.

Def.: Sea X un conjunto cualquiera. Una familia $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ es un **álgebra** si:

a) $\emptyset \in \mathscr{A}$,

b) $E \in \mathscr{A} \implies E^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}$ y

c) $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$.

En general, un álgebra no es una σ-álgebra, porque la **unión numerable** de elementos de $\mathscr{A}$, no tiene por qué pertenecer a $\mathscr{A}$.

Ejemplo: Dado $\mathscr{G} := \{\emptyset\} \cup \{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R}:\ a < b\} \cup \{(-\infty,b],\ b \in \mathbb{R}\}$

$$\cup\,\{(a,+\infty),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}\,,$$

sea $\mathscr{F}$ la **familia de uniones finitas de intervalos de $\mathscr{G}$.** $\mathscr{F}$ es un álgebra.

Además, $\forall E \in \mathscr{A}$, E es unión finita de intervalos **disjuntos** de $\mathscr{G}$.

Def.: Dada un álgebra $\mathscr{A}$, $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una **medida en el álgebra $\mathscr{A}$** si:

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) $\forall E \in \mathscr{A}, \quad \mu(E) \geq 0$ y

c) $E_n \in \mathscr{A},\ n \in \mathbb{N}:\ \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{A} \implies \mu\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

La longitud usual ℓ de los intervalos de $\mathscr{G}$:

- $\ell(\emptyset) = 0$,
- $\ell((a,b]) = b - a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}:\ a < b$,
- $\ell((-\infty,b] = \ell((a,+\infty)) = \ell(\mathbb{R}) = +\infty \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$,

se extiende de modo natural al álgebra $\mathscr{F}$.

En efecto, como $\forall E \in \mathscr{A}$, E es unión finita de intervalos **disjuntos** de $\mathscr{G}$,

entonces $\ell(E)$ es la suma de las respectivas longitudes.

Esta extensión de la longitud de intervalos de $\mathscr{G}$ es una medida en el álgebra $\mathscr{F}$, como se demuestra en el siguiente teorema:

Teor.: $\mathscr{F}$ es un álgebra en $\mathbb{R}$ y ℓ es una medida en $\mathscr{F}$.

Dem.: Está claro que $\mathscr{F}$ es un álgebra y que ℓ satisface los axiomas (a) y (b) de la definición de medida en $\mathscr{F}$. Para ver que satisface (c), basta demostrar que:

$$E \in \mathscr{G} : \ E = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n \text{ con } E_n \in \mathscr{G} \implies \ell\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(E_n).$$

Lo demostramos para $E = (a, b], \ a < b$. Para otros $E \in \mathscr{G}$ queda como $\boxed{\textbf{Ej.}}$

Sea $(a, b] = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]$. Hay que demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = b - a$.

Tomemos los primeros n intervalos $(a_j, b_j]$ y reordenémoslos de modo que

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b$$

$$\implies (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \leq b - a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\implies \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) \leq b - a$. Falta demostrar la otra desigualdad.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_j := \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N} \implies \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \varepsilon.$

Sean $I_j := (a_j, b_j + \varepsilon_j) \supset (a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N} \implies$

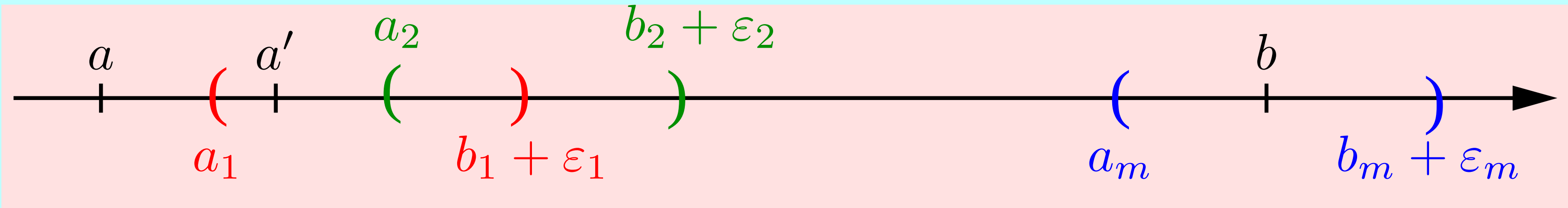
$$(a, b] = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j.$$

Sea $a' \in (a, b)$.

$[a', b] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ es un **cubrimiento por abiertos del compacto** $[a', b]$

$\implies$ hay un subcubrimiento finito $[a', b] \subset \bigcup_{j=1}^{m} I_j$.

Reordenamos los intervalos I_j, como se ve en la figura:



Entonces, $\boxed{a_1 < a'}$, $\boxed{a_j < b_{j-1} + \varepsilon_{j-1},\ j = 2, \ldots, m}$, $\boxed{b < b_m + \varepsilon_m}$

$$\implies b - a' \le b_m + \varepsilon_m - a_1 \le \sum_{j=1}^{m} (b_j + \varepsilon_j - a_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) + \varepsilon.$$

Como esto vale $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall a' \in (a, b)$, entonces

$$b - a = \lim_{a' \to a+} (b - a') \le \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$$

que, con la desigualdad ya demostrada $\implies \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = b - a.$ ■