

Evaluación 1, versión de práctica
Teoría de Números (527288)

Instrucciones. Desarrollar justificadamente las respuestas a los problemas planteados.

Tiempo. 90 minutos.

Problema 1. (XX puntos)

Mostrar: para cualquier primo p , cualquier exponente $i \geq 1$ y cualquier entero n ,

$$(x + np^e)^i - x^i \equiv ix^{i-1} \cdot np^e \pmod{p^{e+1}}$$

Problema 2. (XX puntos)

Sea $n > 1$ un número natural.

1. Mostrar: su segundo menor divisor es primo.
2. Usando el item anterior, mostrar: n se puede factorizar como producto de primos.

Problema 3. (XX puntos)

Reduciendo cada una de las siguientes ecuaciones a módulos apropiados, mostrar que no tienen soluciones enteras:

1. $x^4 - 3x + 10 = 0$
2. $x^5 - x^2 + x - 3 = 0$

Problema 4. (XX puntos)

Resolver la ecuación $x^2 \equiv 4 \pmod{45}$, resolviéndola primero en módulo 3 y módulo 5 y luego, a partir de dichas soluciones, construyendo las soluciones módulo $45 = 3^2 \cdot 5$.