

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS MAT 521218

*RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN
DE EDO LINEALES DEL SEGUNDO ORDEN
(PRÁCTICO N°7)*

Problema 1

Fco. Gajardo C.

A. Ayudante sección 3

Problema 2

S. Dominguez R.

A. Ayudante sección 1

Problema 3

P. Vega R.

A. Ayudante sección 4

Problema 4

H. Sanhueza J.

A. Ayudante sección 2

F. Paiva V.

Coordinador Asignatura

PROBLEMA 1.

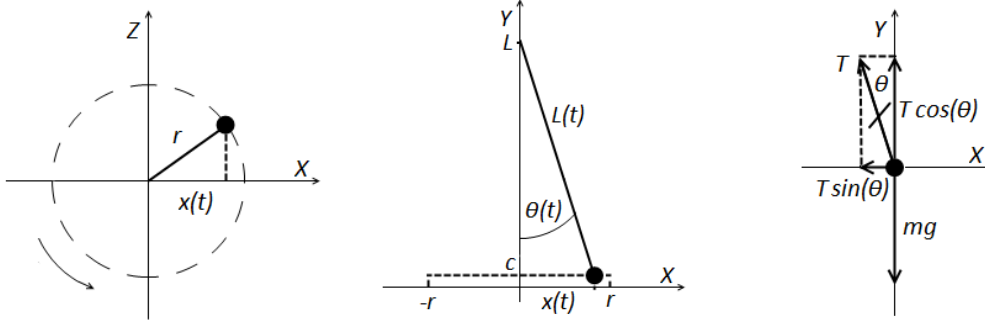
I. Determine los coeficientes \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_0 si

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

modela el desplazamiento de un péndulo rígido de longitud L , el cual puede rotar libremente alrededor de un punto $P = P(0, L)$. Se supone que la masa del brazo del péndulo es despreciable respecto a la masa m al final. La masa se mueve a lo largo de un círculo. Supóngase que el ángulo θ entre la vertical y la *proyección sobre el plano XY* de la cuerda del péndulo se mantiene siempre tan pequeño que, sin apreciable error, se puede sustituir $\sin(\theta)$ por θ .

Desarrollo:

Del enunciado es posible suponer que la masa al final del péndulo posee una trayectoria circular de radio $r \ll L$ sobre algún plano $y = c$, paralelo al plano XZ . Con esta información se construyen los siguientes esquemas:



(a) Proyección en el plano XZ de la posición de la masa m en el tiempo t . (b) Proyección en el plano XY de la posición de la masa m en el tiempo t . (c) Diagrama de fuerzas para la masa m en el instante t .

Figura 1: Posición y diagrama de fuerzas para m en el instante t .

Aplicando la **Segunda Ley de Newton** sobre lo que se observa en el diagrama de fuerzas¹ que se encuentra en la Figura 1. (c), se tiene:

$$\sum F_x = -T \sin(\theta(t)) = ma \quad \text{y} \quad \sum F_y = T \cos(\theta(t)) = ma.$$

Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones:

$$m\ddot{x}(t) + T \sin(\theta(t)) = 0 \tag{1}$$

$$T = \frac{mg}{\cos(\theta(t))} \tag{2}$$

Al considerar θ lo suficientemente pequeño² se puede sustituir $\sin(\theta)$ por θ , $L(t)$ por la constante L , que define el largo del péndulo, y $\cos(\theta)$ por 1, de donde, observando en la Figura 1. (b) que $x(t) = L(t) \sin(\theta(t))$, se tiene:

$$mL\ddot{\theta} + T\theta = 0 \tag{3}$$

¹Notar que la componente X de la fuerza que ejerce el brazo del péndulo sobre la masa (que aquí se ha designado como T) se constituye en una fuerza restauradora, es decir siempre apunta hacia el origen.

²Esto implica también que c es aproximadamente 0.

$$T = mg \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) y dividiendo todo por mL se llega finalmente a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

de donde los valores solicitados por el enunciado son $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a}_0 = \frac{g}{L}$.

II. Determine los coeficientes \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_0 si

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

modela la corriente $i = i(t)$ de un circuito serie RLC donde se ha aplicado una fuente de voltaje $e(t)$ [voltios].

Desarrollo:

Para poder encontrar la ecuación diferencial que rige el comportamiento del circuito que se observa en la Figura 2, es necesario conocer ciertos conceptos dados por la Teoría de Circuitos Eléctricos:

- La Ley de Ohm afirma que la corriente que circula por un conductor eléctrico es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia siempre y cuando su temperatura se mantenga constante, o equivalentemente

$$V_R = i(t) R. \quad (5)$$

- La caída de voltaje, V_c a través de un condensador de capacitancia C , es determinada por la Ley

$$V_c = \frac{q(t)}{C}. \quad (6)$$

donde $q(t)$ es la carga eléctrica del condensador en el instant t .

- La intensidad de corriente sobre el capacitor está dada por la tasa da cambio de la carga de éste con respecto del tiempo, esto es

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t). \quad (7)$$

- La caída de voltaje sobre un un inductor de inductancia L es determinada por la ecuación:

$$V_L = L \frac{d}{dt} i(t). \quad (8)$$

- La **Ley de Kirchhof para Voltajes**, la cual expresa que la sumatoria signada de los voltajes sobre un circuito cerrado es nula, o

$$\sum V = 0 \quad (9)$$

En la siguiente figura se observa el circuito que se encuentra bajo análisis.

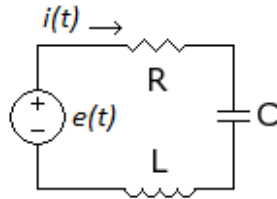


Figura 2: Diagrama de un circuito RCL en serie con entrada de voltaje $e(t)$.

Es claro que el circuito RCL en serie mostrado arriba se constituye en una red cerrada, por lo que podemos aplicar la **Ley de Kirchhoff para Voltajes** sobre éste, de donde obtenemos la ecuación:

$$\sum V = e(t) - V_R - V_C - V_L = e(t) - i(t)R - \frac{q(t)}{C} - L \frac{d}{dt} i(t) = 0 \quad (10)$$

Así utilizando la ecuación (7), dividiendo por L y reordenando se consigue

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{CL} q(t) = \frac{e(t)}{L},$$

por lo que los valores buscados en el problema corresponden a $\mathbf{a}_1 = \frac{R}{L}$ y $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{CL}$.

III. Determine los coeficientes \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_0 si

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

modela el voltaje $e(t)$ de un circuito paralelo RLC donde existe una fuente de corriente de $i(t)$ [amperios].

Desarrollo:

Para encontrar el modelo que rige el sistema, además de utilizar las relaciones expuestas en el ítem anterior, debemos considerar el siguiente principio conocido como:

- La **Ley de Kirchhoff para la Intensidad de la Corriente**, establece que la suma signada de las intensidades sobre un nodo es nula, es decir:

$$\sum I = 0.$$

La siguiente figura ilustra el sistema bajo estudio. Se considera que el segmento superior de la red es un único nodo del circuito que llamaremos (a) .

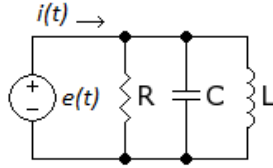


Figura 3: Diagrama de un circuito RCL en paralelo con entrada de intensidad de corriente $i(t)$.

Como la diferencia de potencial eléctrico sobre cada uno de los elementos del circuito es la misma, se tiene que:

- De la ecuación (5) se deduce que la intensidad sobre la resistencia viene dada por:

$$I_R = \frac{e(t)}{R} \quad (11)$$

- Derivando la ecuación (6), utilizando (7) y reordenando se concluye que la intensidad sobre el capacitor es:

$$I_C = C \frac{d}{dt} e(t) \quad (12)$$

- Integrando (8) con respecto del tiempo y despejando se concluye que la intensidad sobre el inductor se escribe:

$$I_L = \frac{1}{L} \int e(t) dt \quad (13)$$

Finalmente, usando la **Ley de Kirchhoff para la Intensidad de la Corriente** sobre el nodo (a) queda:

$$I_R + I_C + I_L - e(t) = \frac{e(t)}{R} + C \frac{d}{dt} e(t) + \frac{1}{L} \int e(t) dt - i(t) = 0$$

Derivando con respecto del tiempo esta última relación dividiendo por C y reordenado queda:

$$\frac{d^2}{dt^2} e(t) + \frac{1}{RC} \frac{d}{dt} e(t) + \frac{1}{LC} e(t) = \frac{d}{dt} i(t)$$

Con esto, las constantes requeridas son $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{RC}$ y $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{LC}$.

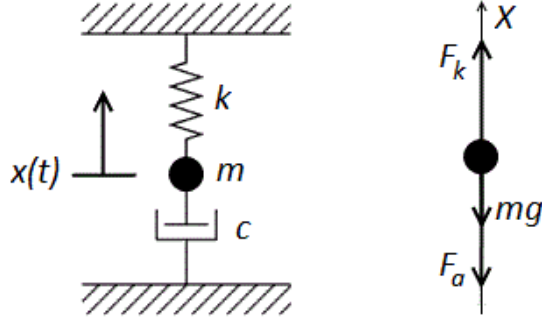
IV. Determine los coeficientes \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_0 si

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

modela el desplazamiento de una masa m en un sistema masa-resorte-amortiguador.

Desarrollo:

Las siguientes figuras ilustran el sistema en estudio.



(a) Diagrama del sistema resorte-amortiguador para la masa m . (b) Fuerzas que actúan sobre m en el sistema.

Figura 4: Esquema del sistema resorte-amortiguador y diagrama de fuerzas para m .

Observando el diagrama de fuerzas³ sobre la masa m , es posible aplicar la **Segunda Ley de Newton**, obteniéndose así

$$\sum F_x = -F_k - F_a - mg = ma \quad (14)$$

Utilizando la **Ley de Hooke** y el hecho de que la fuerza F_a ejercida por un amortiguador es proporcional a la velocidad de la masa en cuestión (de constante aquí llamada c), la ecuación (11) se puede reescribir como:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -mg,$$

de donde es claro que $a_1 = \frac{c}{m}$ y $a_0 = \frac{k}{m}$.

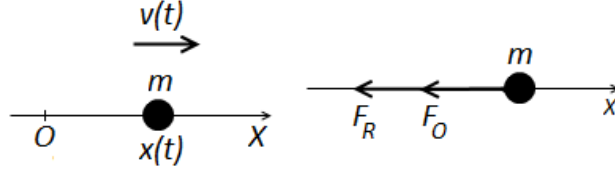
³Observe que F_k es una fuerza restauradora, lo que explica su signo en la sumatoria.

V. Determine los coeficientes \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_0 si

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

modela el movimiento rectilíneo de una partícula afecta a una fuerza que la atrae desde el origen con una magnitud igual a un múltiplo k con ($k > 0$) de su distancia al origen y afecta también a una fuerza resistiva proporcional a su velocidad con constante de proporcionalidad $\mu > 0$.

Desarrollo: Los siguientes esquemas ilustran la dinámica del proceso descrito por el enunciado.



(a) Posición y velocidad de la partícula m en el instante de tiempo t .
(b) Fuerzas que actúan sobre la partícula m .

Figura 5: Posición y diagrama de fuerzas para m en el instante de tiempo t .

En el diagrama de fuerzas de la Figura 5 se ha designado por F_O a la fuerza que atrae desde el origen a la partícula con una magnitud igual a un múltiplo k de su distancia al origen, la cual es numéricamente igual a $kx(t)$, además de llamar F_R a la fuerza resistiva proporcional a velocidad de la partícula, y que es igual a $\mu \dot{x}(t)$.

Así, aplicando la **Segunda Ley de Newton** a lo expuesto inmediatamente mas arriba se deduce la siguiente ecuación:

$$\sum F_x = -F_O - F_R = -kx(t) - \mu \dot{x}(t) = ma$$

Reescribiendo la ecuación anterior, y dividiendo por m , se obtiene:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

de donde los valores de las constates buscadas son $\mathbf{a}_1 = \frac{\mu}{m}$ y $\mathbf{a}_0 = \frac{k}{m}$.

PROBLEMA 2.

Se sabe que la solución del PVI cuando $w_0 \neq w$

$$\ddot{y} + w_0^2 y = \frac{E}{m} \cos(wt), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (15)$$

es

$$y(t) = \left(\frac{E}{m} \right) \frac{\cos(wt) - \cos(w_0 t)}{w_0^2 - w^2}.$$

Determine $\lim_{w \rightarrow w_0} y(t)$ ¿Cómo se compara este límite con la solución del PVI

$$\ddot{y} + w_0^2 y = \frac{E}{m} \cos(w_0 t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (16)$$

Si y modela el movimiento armónico simple de un sistema masa resorte

- ¿Qué puede establecer con respecto al fenómeno de resonancia (pura)?
- ¿Qué dato se requiere para estimar el tiempo en que el resorte se rompe?

Resolución

Para facilitar la comprensión precederemos a construir la solución general del PVI (15):

1º Sabemos que la solución general homogénea es

$$y_h(t) = a_0 \cos(w_0 t) + a_1 \sin(w_0 t), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

es decir, el conjunto $\{\cos(w_0 t), \sin(w_0 t)\}$ es una base para el $\ker(D^2 + w^2)$, pues

$$W(\cos(w_0 t), \sin(w_0 t)) = 1$$

2º Para construir la solución particular, aplicamos el método de los coeficiente indeterminados, pues, $w \neq w_0$ y en consecuencia $f(t) = \frac{E}{m} \cos(wt)$ no es solución homogénea y dado que el operador diferencial sólo involucra derivada pares, podemos construir $y_p(t) = A \cos(wt)$. En tal caso:

$$-Aw^2 \cos(wt) + Aw_0^2 \cos(wt) = \frac{E}{m} \cos(wt)$$

infiere que

$$A = \frac{E}{m(w_0^2 - w^2)}$$

3º La solución general es

$$y(t) = a_0 \cos(w_0 t) + a_1 \sin(w_0 t) + \frac{E}{m(w_0^2 - w^2)} \cos(wt), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

donde la condición inicial $y'(0) = 0$ infiere que $a_1 = 0$, mientras que la posición inicial nula exige que $a_0 = -\frac{E}{m(w_0^2 - w^2)}$. Así la única solución del PVI (15), se puede escribir:

$$y(t) = \left(\frac{tE}{m(w + w_0)} \right) \frac{\cos(wt) - \cos(w_0 t)}{w_0 t - wt}. \quad (17)$$

Ahora procedemos a responder la primera pregunta. La regla de L'Hopital permite establecer que

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\cos(w_0 t) - \cos(w t)}{w t - w_0 t} = \sin(w_0 t)$$

y como en (17) hemos escrito convenientemente la única solución del primer PVI, se tiene directamente que

$$\lim_{w \rightarrow w_0} y(t) = \left(\frac{E}{m} \right) \frac{t \sin(w_0 t)}{2w_0} \quad (18)$$

Enseguida debemos comparar este límite con la solución del segundo PVI (16), el cual tiene la misma solución general homogénea pero en este caso el término fuente $f(t) = \frac{E}{m} \cos(w_0 t)$ es solución homogénea y sabemos que si utilizamos el método de los coeficientes indeterminados para construir y_p debemos considerar como solución particular:

$$y_p(t) = t \cdot (A \cos(w_0 t) + B \sin(w_0 t))$$

la cual reemplazada en la ecuación no homogénea, nos permite concluir que $A = 0$ y

$$B = \frac{E}{2w_0 m}.$$

Así,

$$y(t) = a_0 \cos(w_0 t) + a_1 \sin(w_0 t) + \left(\frac{E}{m} \right) \frac{t \sin(w_0 t)}{2w_0}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

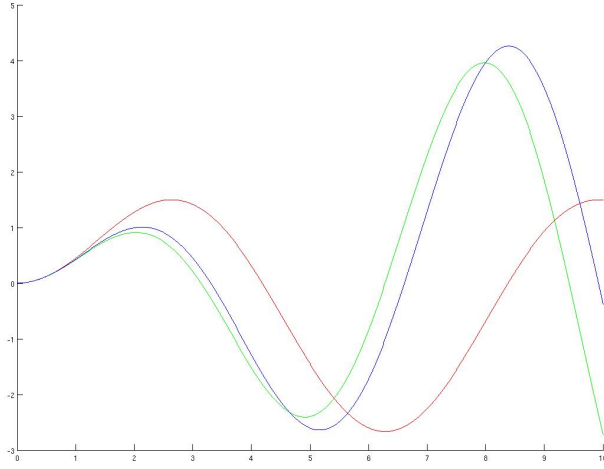
Aplicando ahora las condiciones iniciales: $y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, $y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. De aquí obtenemos la solución del PVI (2)

$$y(t) = \left(\frac{E}{m} \right) \frac{t \sin(w_0 t)}{2w_0}$$

es decir, (18).

Conclusión: Hemos establecido que la solución del PVI (2), en el cual hay resonancia, es límite de la solución del PVI (1), sin resonancia pues $w_0 \neq w$, cuando la frecuencia del término fuente se acerca a la frecuencia del armónico puro. Luego podemos afirmar que este fenómeno de resonancia puede ser aproximado por problemas sin resonancia pero con frecuencias muy cercanas a la del término fuente. La siguiente figura muestra tres soluciones distintas.

Figura 1. Curvas de las soluciones de los PVI (1) y (2). La curva de color verde muestra la solución del PVI (2) para $w_0 = 1$, mientras las curvas de color rojo y azul muestran la solución del PVI (1) para $w_0 = 1$, $w = \frac{1}{2}$ y $w_0 = 1$, $w = \frac{9}{10}$ respectivamente. Vemos gráficamente que la solución al PVI (1) se va aproximando a la solución del PVI (2) cuando w se aproxima a w_0 .



Finalmente respondemos la última pregunta. Sea L_c el largo crítico de estiramiento del resorte, es decir, este es el largo con el cual el resorte se rompe. Luego, el problema es encontrar $t_c \geq 0$ tal que $y(t_c) = L_c$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 y(t_c) = L_c &\Leftrightarrow L_c = \left(\frac{E}{m}\right) \frac{t_c \sin(w_0 t_c)}{2w_0} \\
 \Rightarrow L_c &= \left| \left(\frac{E}{m}\right) \frac{t_c \sin(w_0 t_c)}{2w_0} \right| \leq \left| \left(\frac{E}{m}\right) \frac{t_c}{2w_0} \right| = \left(\frac{|E|}{m}\right) \frac{t_c}{2w_0} \\
 &\Rightarrow t_c \geq \frac{2mw_0 L_c}{|E|}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para un tiempo mayor a $t = \frac{2mw_0 L_c}{|E|}$ la cuerda se romperá.

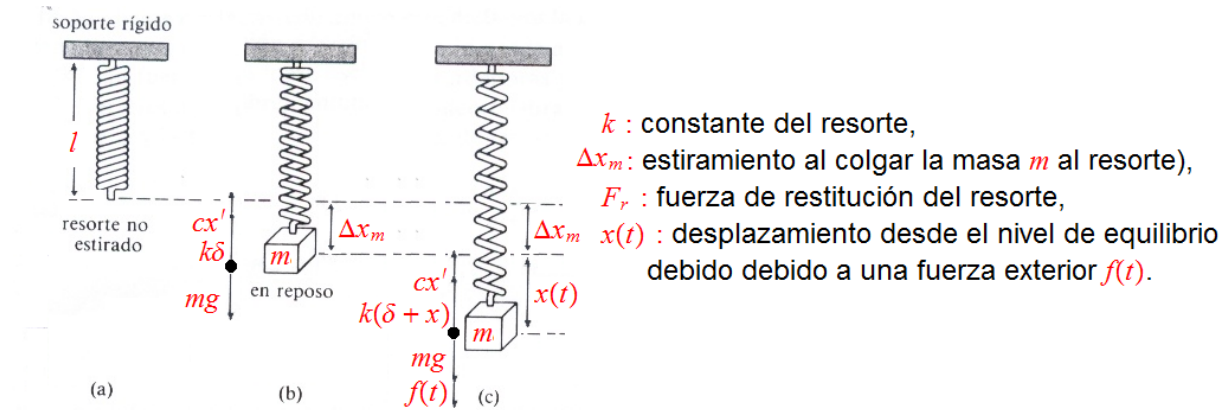
PROBLEMA 3.

Una pesa de 16 libras queda suspendida de un resorte, alargándolo 6 pulgadas. La pesa es jalada otras 3 pulgadas abajo de esta posición de equilibrio y liberada. En este instante se aplica al sistema una fuerza igual a $\frac{1}{4} \cos(6t)$. Calcule y trace una gráfica de la función desplazamiento, suponiendo que no hay amortiguamiento, y en seguida que hay una fuerza de amortiguamiento de $8v$ [libras], donde v es la velocidad de la pesa.

Resolución

Usaremos dos leyes fundamentales de la mecánica clásica:

$$\begin{aligned} \text{Ley de Hooke:} & \quad F_r = k\xi, (\xi \text{ estiramiento}) \\ 2^{\text{da}} \text{ Ley de Newton:} & \quad \sum F = ma = mx''(t) \end{aligned}$$



Cuando colgamos una masa, en la posición de equilibrio (b) usamos 2^{da} Ley de Newton:

$$F_r - mg = 0 \iff k\Delta x_m - mg = 0 \implies k = \frac{mg}{\Delta x_m}$$

Consideraremos una fuerza exterior de la forma $f(t) = E \cos(\omega t)$

Puede haber una fuerza amortiguada (que se considera proporcional a la velocidad):

$$F_a = cx'(t)$$

Usando ley de Newton (en c):

$$\begin{aligned}
\sum F &= mx'' \\
\iff mg + f(t) - k(\Delta x_m + x) - cx' &= mx'' \\
\iff mg + f(t) - \frac{mg}{\Delta x_m}(\Delta x_m + x) - cx' &= mx'' \\
\iff mg + f(t) - \frac{mg}{\Delta x_m}\Delta x_m - \frac{mg}{\Delta x_m}x - cx' &= mx'' \\
\iff mg + f(t) - mg - kx - cx' &= mx'' \\
\iff f(t) - kx - cx' &= mx'' \\
\iff mx'' + cx' + kx &= f(t) \\
\iff x'' + \frac{c}{m}x' + \omega_0^2 x &= E \cos(\omega t), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

ω_0 es conocida como la frecuencia de vibración natural del sistema y ω del término forzante.

La ecuación recién encontrada (ecuación del movimiento), es una EDO de 2° orden de coeficientes constantes y lineal.

La solución general para el caso forzado no amortiguado está dada por:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{E \cos(\omega t)}{m \omega_0^2 - \omega^2}, \omega \neq \omega_0$$

En nuestro caso, (considerando como origen del sistema de referencia la posición en (b) y el eje x positivo hacia abajo y que parte del reposo):

$$m = 16 \text{ lb}, \Delta x_m = \frac{8}{11} \text{ in}, E = \frac{1}{4} \text{ lbf}, \omega = 6 \text{ Hz}, k = \frac{mg}{\Delta x_m} = \frac{16 \text{ lb}}{\frac{8}{11} \text{ in}} g = 22g \frac{\text{lb}}{\text{in}},$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{11}}{4} \sqrt{2g} \text{ Hz}$$

Evaluando la condiciones iniciales $x(0) = 3 \text{ in}$, $x'(0) = 0 \frac{\text{in}}{\text{s}}$:

$$x(t) = \left(3 - \frac{E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \cos(\omega t)$$

Evaluando los parámetros y $g = 385.83 \frac{\text{in}}{\text{s}^2}$ ($= 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$):

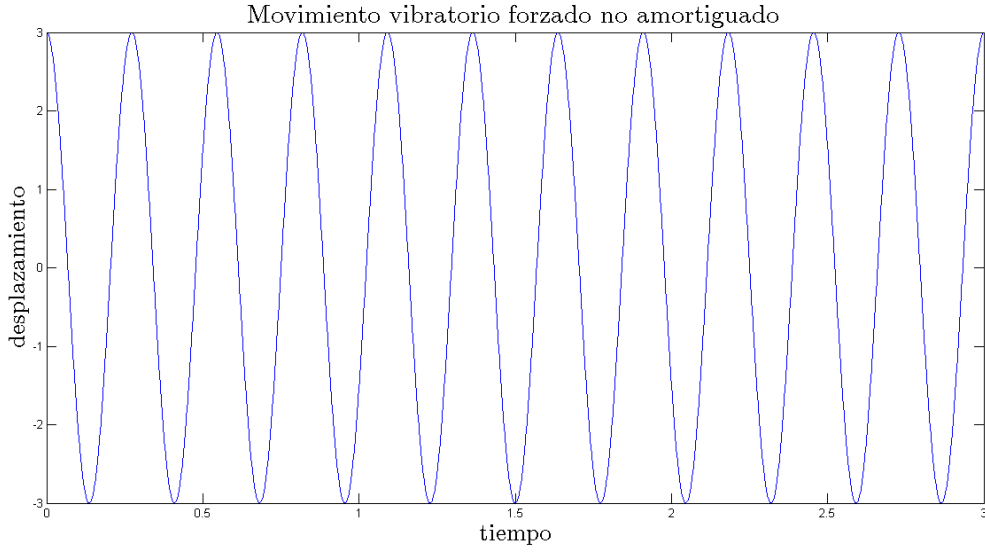
$$x(t) = \left(3 - \frac{1/4}{16 \left(\frac{\sqrt{11}}{4} \sqrt{2g} - 6\right)^2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{4} \sqrt{2g} t\right) + \left(\frac{1/4}{16 \left(\frac{\sqrt{11}}{4} \sqrt{2g} - 6\right)^2}\right) \cos(6t)$$

Cuya gráfica es:

A la información anterior agregamos la constante de amortiguación, $c = 8 \frac{\text{lb}}{\text{s}}$

La solución general para el caso forzado amortiguado está dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\frac{c}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right) + Be^{-\frac{c}{2m}t} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right) \\
&+ \frac{E}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t + \theta)
\end{aligned}$$



de donde

$$\tan \theta = \frac{k - m\omega^2}{c\omega}$$

El último término (solución particular) corresponde al término estacionario y el resto (solución homogénea) al término transiente.

Evaluando la condiciones iniciales $x(0) = 3 \text{ in}$, $x'(0) = 0 \frac{\text{in}}{\text{s}}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(3 - \frac{E(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right) e^{-\frac{c}{2m}t} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \left(\frac{1}{2} \left(3 - \frac{E(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right) \frac{c}{m} - \frac{E c \omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right) e^{-\frac{c}{2m}t} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t \right) \\ &+ \frac{E}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

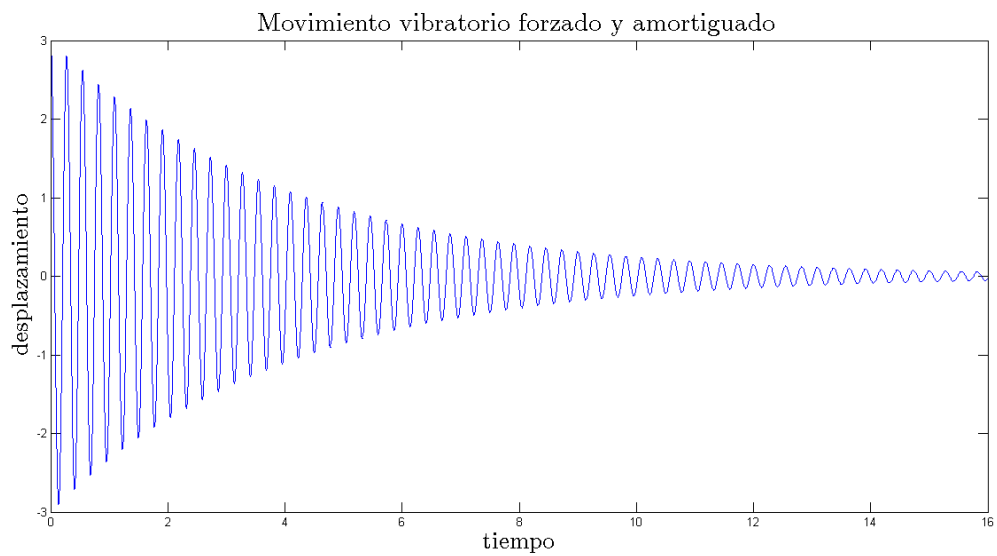
Evaluando los parámetros:

$$\begin{aligned} x(t) &= C e^{-\frac{8}{2(16)}t} \cos \left(\sqrt{\frac{22g}{16} - \left(\frac{8}{2(16)}\right)^2} t \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\frac{22g}{16} - \left(\frac{8}{2(16)}\right)^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{8}{16} C - \frac{(1/4)(8)(6)^2}{(22g - 16(6)^2)^2 + (8(6))^2} \right) e^{-\frac{8}{2(16)}t} \sin \left(\sqrt{\frac{22g}{16} - \left(\frac{8}{2(16)}\right)^2} t \right) \\ &+ \frac{(1/4)}{\sqrt{(22g - 16(6)^2)^2 + (8(6))^2}} \sin(6t + \theta) \end{aligned}$$

con

$$C = \left(3 - \frac{(1/4) (22g - 16 (6)^2)}{(22g - 16 (6)^2)^2 + (8 (6))^2} \right), \theta = \arctan \left(\frac{22g - 16 (6)^2}{8 (6)} \right)$$

Cuya gráfica es:



PROBLEMA 4.

Considere el movimiento forzado amortiguado regido por la ecuación diferencial

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A \cos(wt).$$

Demuestre que

- I. el movimiento es siempre acotado
- II. la amplitud máxima de la solución permanente se obtiene eligiendo w de modo ⁴ que

$$w^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2, \quad \frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2 > 0$$

Aplicaciones:

- a) Una pesa de 16 libras queda suspendida de un resorte, alargándolo $\frac{8}{11}$ [pie]. Luego, se sumerge la pesa en un líquido que impone una resistencia al avance de $2v$ libras. Todo el sistema queda sometido a una fuerza externa $4 \cos(wt)$. Determine el valor de w , que maximiza la amplitud de la solución estacionaria o permanente ¿Cuál es la amplitud máxima?
- b) Determinar la frecuencia de resonancia práctica para $\ddot{x} + c\dot{x} + 26x = 10 \cos(wt)$ si $c = 1, 2, 3$.

Resolución

- I. Primero construyamos un sistema fundamental de soluciones. Para ello busquemos las raíces del polinomio característico:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = \left(\lambda + \frac{c}{2m} \right)^2 + \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 = 0$$

De donde tenemos los valores:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Sea $\Delta = \left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m}$, entonces tenemos uno y solo uno de los 3 casos siguientes:

⁴Este valor también es conocido como frecuencia de resonancia práctica, en contraposición, resonancia (pura) es referida al Oscilador Armónico ideal. Este resultado tiene usos prácticos. Para construir un simple detector de vibraciones probaríamos eligiendo k, c y m de modo que w^2 esté lo más próximo posible a este valor a fin de maximizar al respuesta.

Caso 1: $\Delta > 0$ **Vibración Sobreamortiguada**

Como las constantes c, k, m son positivas, los valores propios serán negativos, en efecto:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \Rightarrow -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0$$

El valor propio restante es evidente que también es negativo. de donde la respuesta natural (problema homogéneo) estará dada por:

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \text{ negativos}$$

Por otra parte, gracias al método de los coeficientes indeterminados, la respuesta forzada del sistema (solución particular) será de la forma:

$$y_p(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ (sinusoide general)}$$

Gracias al principio de superposición de soluciones, la respuesta del sistema (solución general) está dada por:

$$y_g(t) = y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

Al conocer la respuesta del sistema, nos interesa encontrar una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|y(t)| \leq M$$

La desigualdad triangular permite inferir que:

$$|y(t)| \leq |y_h(t)| + |y_p(t)|$$

Observemos que la solución homogénea comprende dos exponenciales decrecientes, y por tanto:

$$|y_h(t)| \leq |C_1| + |C_2|$$

Mientras que:

$$|y_p(t)| \leq |A|$$

De donde sigue que el movimiento es acotado ■

Caso 2: $\Delta = 0$ **Vibración críticamente amortiguada**

Observar previamente que la solución particular es la misma, y que para efectos de análisis es conveniente escribir en amplitud fase. Así solo debemos mayorar la solución homogénea.

En este caso tenemos que la raíz es de multiplicidad 2, esto es:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} =: \lambda$$

De donde la respuesta del sistema será:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + A \sin(\omega t + \varphi)$$

Sabemos que:

$$t \leq e^{-\lambda t} \text{ pues } \lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0$$

y multiplicando por $e^{\lambda t}$ la desigualdad tenemos:

$$t e^{\lambda t} \leq 1$$

Análogamente **Caso 1** podemos concluir que:

$$|y(t)| \leq |C_1| + |C_2| + |A|$$

De donde $y(t)$ es acotada ■

Caso 3: $\Delta < 0$ **Vibración amortiguada**

Este es el caso más simple. pues la solución homogénea corresponde a una senoide general pero amortiguada, de donde:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} \sin(\lambda_2 t + \varphi) + A_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Entonces:

$$|y(t)| \leq |A_1| + |A_2|$$

Como $y(t)$ es acotada para cada uno de los casos entonces el movimiento es siempre acotado. ■

Motivación: Dado que en la práctica nunca tendremos sistemas ideales ($c > 0$) entonces siempre las vibraciones serán acotadas, por lo cual tiene sentido hablar de frecuencia de máxima amplitud, ya que al conocer esta, se podrá determinar la respuesta del sistema asociado (por ejemplo si existe alguna oscilación de amplitud mayor al largo crítico de un resorte)

- II. En este caso la solución permanente corresponde a la solución particular, pues la respuesta natural “Desaparece” al incrementar t (la solución tiende a 0). Como notamos en el punto 1), la solución particular esta dada por:

$$y_p(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$$

Calculando las derivadas de $y_p(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= Bw \cos(wt) - Aw \sin(wt) \\ y_p''(t) &= -Aw^2 \cos(wt) - Bw^2 \sin(wt) \end{aligned}$$

Por otra parte, definamos las cantidades (por comodidad en el cálculo):

$$p = \frac{c}{2m} \text{ y } w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces reemplazando $y_p(t)$ y sus derivadas en la EDO obtenemos:

$$(-Aw^2 + 2pBw + w_0^2 A) \cos(wt) + (-Bw^2 - 2pAw + w_0^2 B) \sin(wt) = \frac{F_0}{m} \cos(wt)$$

El sistema de ecuaciones para A y B :

$$\begin{aligned} -Aw^2 + 2pBw + w_0^2 A &= \frac{F_0}{m} \\ -Bw^2 - 2pAw + w_0^2 B &= 0 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} w_0^2 - w^2 & 2pw \\ -2pw & w_0^2 - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_0}{m} & 2pw \\ 0 & w_0^2 - w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_0^2 - w^2 & 2pw \\ -2pw & w_0^2 - w^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_0(w_0^2 - w^2)}{m[(w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2]} \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} w_0^2 - w^2 & \frac{F_0}{m} \\ -2pw & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_0^2 - w^2 & 2pw \\ -2pw & w_0^2 - w^2 \end{vmatrix}} = \frac{2pwF_0}{m[(w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2]} \end{aligned}$$

Entonces la amplitud de oscilación de la solución permanente estará dada por:

$$C = \sqrt{A+B} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2pw)^2 + (w_0^2 - w^2)^2}}$$

Luego, para maximizar la amplitud(C), debemos minimizar la cantidad:

$\sqrt{(2pw)^2 + (w_0^2 - w^2)^2}$, la cual sera mínima siempre que lo sea el argumento de la raíz (por monotonía de la función raíz cuadrada).

Entonces el problema se reduce a determinar w tal que el valor $(2pw)^2 + (w_0^2 - w^2)^2$ sea mínimo:

Re escribiendo el radicando:

$$\begin{aligned}(2pw)^2 + (w_0^2 - w^2)^2 &= w^4 - 2w^2w_0^2 + w_0^2 + 4p^2w^2 = \dots \\ \dots &= w^4 - 2w^2(w_0^2 - 2p^2) + w_0^4 = (w^2 - (w_0^2 - 2p^2))^2 + w_0^4 - (w_0^2 - 2p^2)^2\end{aligned}$$

Sabemos que el valor mínimo se obtiene en el vértice de la parábola que define w^2 , esto es:

$$w^2 = w_0^2 - 2p^2 = \frac{k}{m} - 2\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2$$

Aplicaciones:

a) Una pesa de 16 libras queda suspendida de un resorte, alargándolo $\frac{8}{11}$ [pie]. Luego, se sumerge la pesa en un líquido que impone una resistencia al avance de $2v$ libras. Todo el sistema queda sometido a una fuerza externa $4\cos(wt)$. determine el valor de w que maximiza la amplitud de la solución estacionaria o permanente ¿Cuál es la amplitud maxima?

Solución:

Para este problema debemos determinar primeramente el valor de k (coeficiente de restitución del resorte), esto lo hacemos teniendo el estiramiento del resorte por efecto de la pesa.

Sabemos:

$$\begin{aligned}F &= k\Delta x \\ g &= 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 32,1528\frac{\text{pie}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

De donde $k = \frac{F}{\Delta x}$, como sabemos que la masa del cuerpo suspendido es 16 libras entonces el peso del cuerpo es $514,55 \text{ libras} \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$, por otra parte el estiramiento sufrido por el resorte es de $\frac{8}{11} \text{ pie}$, de donde tenemos:

$$k = \left(\frac{514,44}{\frac{8}{11}}\right) \frac{\text{libras}}{\text{s}^2} = 707,36 \frac{\text{libras}}{\text{s}^2}$$

Sabemos que la ecuación diferencial que rige el movimiento de un resorte es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

De donde reemplazando los parámetros de este sistema en particular obtenemos:

$$16\ddot{x} + 2\dot{x} + 707,36x = 4\cos(wt)$$

Entonces del item anterior, el valor de w que maximiza la amplitud de la solución estacionaria es:

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m} \right)^2} = \sqrt{\frac{707,36}{16} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{16} \right)^2} \approx 6,6485$$

Sabemos que la amplitud máxima esta dada por:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\frac{c}{m}w_{\max}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - w_{\max}^2\right)^2}} \Rightarrow A_{\max} \approx 0,3008\text{pie}$$

b) Determinar la frecuencia de resonancia práctica para $\ddot{x} + c\dot{x} + 26x = 10\cos(wt)$ si $c = 1, 2, 3$.

Solución:

$$w_{\max}^{(i)} = \sqrt{\frac{26}{1} - \frac{c_i^2}{2}}, \quad c_i = 1, 2, 3$$

Entonces:

$$\begin{array}{lll} w_{\max}^{(1)} & = \sqrt{\frac{26}{1} - \frac{1}{2}} & w_{\max}^{(2)} = \sqrt{\frac{26}{1} - \frac{4}{2}} & w_{\max}^{(3)} = \sqrt{\frac{26}{1} - \frac{9}{2}} \\ & = 5,0498 & = 4,8990 & = 4,6368 \end{array}$$

