Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Laboratorio 3: Ecuaciones no lineales
Cálculo Numérico (521230)

Observaciones

- En esta guía se plantean cuatro problemas. El **primero** es un ejemplo, los `.m` para su solución pueden ser descargados de Canvas. El **segundo** se resuelve en el video asociado al laboratorio. El **tercero** debes entregarlo. El **cuarto** problema es **solo** para tu trabajo personal, **no** debe ser entregado, sirve para complementar tu formación en el curso.
- **Todos los archivos `.m` pueden ser descargados de Canvas, del módulo Laboratorios.**
- Te recomendamos leer esta guía antes de ver el video de resolución del problema.

En este laboratorio trabajaremos con los métodos de bisección, Newton-Raphson y Newton. En el módulo Laboratorios en Canvas puedes descargar las siguientes funciones:

Función `biseccion.m`: retorna una aproximación x_{ap} a x_{ex}, cero de la función f, dados los siguientes parámetros de entrada:

- `f`: función de la que se quiere determinar un cero,
- `a`: extremo inferior del intervalo inicial que contiene a un cero de f,
- `b`: extremo superior del mismo intervalo,
- `tolerancia`: exactitud deseada en la aproximación, es decir, x_{ap} debe ser tal que $|x_{ap} - x_{ex}| \leq$`tolerancia`,
- `N`: cota para el número de iteraciones a realizar.

Función `newtonraphson.m`: retorna una aproximación x_{ap} a x_{ex}, cero de la función f, dados los siguientes parámetros de entrada:

- `f`: función de la que se quiere determinar un cero,
- `df`: derivada de función de la que se quiere determinar un cero,
- `x0`: aproximación inicial a un cero de f,
- `tolerancia`: exactitud deseada en la aproximación,
- `N`: cota para el número de iteraciones a realizar.

Función `newton.m`: descrita y utilizada en problema resuelto en video.

Ejemplo 1: Utilicemos las funciones `biseccion` y `newtonraphson` para determinar una aproximación al único cero real del polinomio cúbico $p(x) = x^3 - 2x - 5$. Para ello

1) descarga de Canvas (del módulo Laboratorios), además de las funciones mencionadas antes, las funciones `wallispol.m` y `dwallispol.m`. Ellas, dado un vector `x`, retornan vectores que contienen el resultado de evaluar a p (la primera de ellas) y su derivada (la segunda) en cada uno de los elementos de `x`.
2) Descarga el rutero `problema_wallispol.m`. En él
   - se grafica a p entre 0 y 5 para comprobar que tiene un cero cerca de 2 y que el intervalo $[1, 4]$ puede ser un intervalo inicial para el método de bisección.
   - Se llama a la funciones `biseccion` y `newtonraphson` con los parámetros de entrada
     - para `biseccion`: `@wallispol,1,4,1e-6,50`,
     - para `newtonraphson`: `@wallispol,@dwallispol,2,1e-6,50`.

   El símbolo `@` delante de `wallispol` y `dwallispol` es para indicar a Octave que ambas son funciones. Octave busca entonces los `.m` correspondientes en la carpeta de trabajo.
3) Ejecuta `problema_wallispol` en Octave . El programa debe calcular, con el método de bisección la aproximación `2.0946` al cero real de p en 22 iteraciones, mientras que con el método de Newton Raphson debe calcular, en 4 iteraciones, una aproximación similar.

Problema resuelto en video: Sea $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tal que para cada $q \in \mathbb{R}^7$, $q = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7)^{\mathrm{T}}$,

$$F(q) = \begin{pmatrix} q_1 - q_2 - q_6 \\ q_2 - q_3 - q_4, \\ q_3 + q_4 - q_5 \\ q_5 + q_6 - q_7 \\ 200q_3^2 - 75q_4^2 \\ 100q_2^2 + 75q_4^2 + 100q_5^2 - 75q_6^2 \\ 100q_1^2 + 75q_6^2 + 50q_7^2 - 5.2 \times 10^5 \dfrac{\pi^2(0.2)^5}{8(0.02)(998)} \end{pmatrix}.$$

Los valores de $q_1, q_2, \ldots, q_7$ para los que $F(q) = \mathbf{0}$ son el flujo volumétrico (en m^3/s) de agua a través de cada una de las siete tuberías (q_i es el flujo a través de la tubería i) en una red que es alimentada con agua a presión 5.2×10^5Pa.

1) Escribe una función Octave que, dado $q \in \mathbb{R}^7$, retorne $F(q)$ y $J_F(q)$ si F es la función definida antes y J_F es su Jacobiano.
2) Modifica la función `newton.m` en la página Canvas del curso o escribe una nueva función `newton.m` que reciba como argumentos:
   - función Octave que, dado $x \in \mathbb{R}^n$, retorne $f(x)$ y $J_f(x)$ si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la función de la que se quiere determinar una raíz y J_f su matriz Jacobiana,
   - una aproximación inicial a un cero de f,
   - un valor de tolerancia para utilizar como criterio de parada del método de Newton,
   - un valor N que representa el máximo número de iteraciones a realizar por el método de Newton para aproximar un cero de f.
3) Llama, desde la ventana de comandos de Octave , a la función `newton.m` para calcular el flujo en cada una de las tuberías en la red antes descrita. Toma $q^{[0]} = (0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1)^{\mathrm{T}}$ como aproximación inicial y tolerancia 10^{-8}.
4) ¿Cuál de las siete tuberías es la de menor flujo? ¿Cuál es la de mayor flujo?

Problema a entregar: La concentración en sangre de un cierto químico t horas después de una inyección intramuscular está dada por la siguiente fórmula

$$C(t) = \frac{3t^2 + t}{50 + t^3}.$$

Determina cuántas horas después de la inyección la concentración del químico en sangre alcanza su máximo valor. ¿Cuál es ese valor?

Este problema debes resolverlo con los métodos de bisección o Newton Raphson, **con uno de ellos, no con los dos.**

Forma de entrega: Todos los archivos .m que escribas para resolver el problema. Uno de ellos debe ser el rutero `problema_concentracion.m`, en él debes:

- determinar un intervalo inicial para bisección o un valor inicial para Newton-Raphson. Podrías, por ejemplo, graficar la función de la que quieres determinar un cero y, con ayuda del gráfico, determinar un intervalo inicial para bisección o una aproximación inicial para Newton-Raphson, de manera similar a como se hizo en `problema_wallispol`.
- Calcular, con el método escogido, una aproximación al valor de t donde C alcanza un máximo con una tolerancia de 10^{-8}.
- Evaluar a C en el valor determinado de t.

Problemas adicionales para el trabajo con Octave , no debes entregarlos:

1) Modifica la función `newton.m` con la que fue resuelto el problema en video para que el método de Newton utilice como criterio de parada

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_2 < \text{tol} \qquad \vee \qquad i > \text{nmax},$$

donde $x^{(k)}$ representa el k-ésimo iterando del método de Newton. Resuelve el problema en video con este nuevo criterio de parada, ¿cambia el comportamiento del método?

2) Dada $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el método de la secante se construye a partir del método de Newton reemplazando el valor de $f'(x_{k-1})$ por la aproximación

$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}. \tag{1.1}$$

De manera similar podemos generalizar el método de la secante al problema de determinar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^*) = \theta$ cuando $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Supongamos que para cada $x \in \mathcal{D}$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

y sea A_{k-1} una aproximación a la matriz jacobiana de f en $x^{(k-1)}$, $J_f\left(x^{(k-1)}\right)$. Si llamamos J^i a la columna i-ésima de $J_f\left(x^{(k-1)}\right)$, es decir,

$$J^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x^{(k-1)}) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x^{(k-1)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x^{(k-1)}) \end{pmatrix},$$

utilizando una expresión similar a (1.1), un posible valor para la columna i-ésima de A_{k-1} es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{f_1\left(x^{(k-1)}+\delta e_i\right)-f_1\left(x^{(k-1)}\right)}{\delta} \\ \\ \dfrac{f_2\left(x^{(k-1)}+\delta e_i\right)-f_2\left(x^{(k-1)}\right)}{\delta} \\ \vdots \\ \dfrac{f_n\left(x^{(k-1)}+\delta e_i\right)-f_n\left(x^{(k-1)}\right)}{\delta} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{posición } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

y $\delta \in]0,1[$, por ejemplo, $\delta = 10^{-6}$.

Modifica la función `newton.m` para que, en lugar de calcular $x^{(k)}$ como en el método de Newton, lo haga a través de

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - A_{k-1}^{-1} f\left(x^{(k-1)}\right),$$

siendo A_{k-1} la aproximación anterior a $J_f\left(x^{(k-1)}\right)$. Resuelve el problema resuelto en video con esta nueva función, ¿cuál es la norma de la diferencia entre la aproximación obtenida con el método de Newton y la aproximación con este nuevo método?