Ecuaciones no lineales: Parte I

- **Método de Convergencia Garantizada:** Método de la Bisección.
- **Método de Convergencia Veloz:** Método de Newton-Raphson.

En este capítulo nos interesamos por algunos métodos básicos de resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales.

Los problemas que abordaremos son:

- dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (no lineal), encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, para el caso de una sola ecuación.
  Por ejemplo: resolver
  $$\underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - \pi^2}_{f(x)} = 0.$$
  Para este caso escalar (una sola ecuación), la solución x se denomina **raíz** de la función f.

- dada $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (no lineal), encontrar $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, para el caso de un sistema de ecuaciones. Por ejemplo: resolver
  $$\underbrace{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(2x_1) + x_2^2 + x_3^4 \\ e^{x_3} - x_2^3 \\ \cos\left(\dfrac{x_1}{2}\right) + x_3^5 - x_2 + 1 \end{array}}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}_{\mathbf{0}},$$

Método de la bisección

- Es un método de convergencia garantizada.
- Se basa en el conocido teorema del Cálculo:

Teorema del Valor Intermedio. *Sea* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *función continua en el intervalo* $[a, b]$ *y supongamos que* $f(a) < f(b)$*. Entonces, para cada* z *tal que* $f(a) < z < f(b)$*, existe un* $x \in]a, b[$ *tal que* $f(x) = z$*.*

Observaciones:

- La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$.
- En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (es decir, $f(a)f(b) < 0$), entonces $z = 0$ es precisamente un valor intermedio y, por lo tanto, existe por lo menos una raíz x de f en el intervalo $]a, b[$.

Algoritmo del método de la bisección.

1. Dados a y b tales que $a < b$ y $f \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$, sean $x_a := a$ y $x_b := b$. Por lo tanto f tiene una raíz en el intervalo (x_a, x_b).
2. Sea $x_c = \dfrac{x_a + x_b}{2}$.
3. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:
   (a) $f(x_a)f(x_c) = 0$: en este caso se tiene que $f(x_c) = 0$, y por lo tanto ya localizamos una raíz, x_r, y se finaliza el proceso;
   (b) $f(x_a)f(x_c) < 0$: por lo tanto f tiene una raíz en el intervalo (x_a, x_c) y redefinimos entonces x_b como x_c;
   (c) $f(x_a)f(x_c) > 0$: por lo tanto f tiene una raíz en el intervalo (x_c, x_b) y redefinimos entonces x_a como x_c;
4. En los casos (b) y (c) anteriores f tiene una raíz en el nuevo intervalo (x_a, x_b). Por lo tanto, el proceso se vuelve a repetir desde (2) con el nuevo intervalo (x_a, x_b), hasta que se satisfaga algún criterio de detención.

Es fácil comprobar a partir del algoritmo que, si x es la raíz de la ecuación, entonces los valores $x_k = x_c$ calculados en cada paso (donde k denota el número de paso) satisfacen

$$\underbrace{|x - x_k|}_{\text{error en el paso } k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) \qquad \text{y, por lo tanto,} \qquad x = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Observaciones.

1. La cota del error $\left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a)$ en el método de bisección se reduce a la mitad en cada paso.
2. El método de la bisección puede llegar a ser en algunos casos, demasiado lento, pero al menos es un método en que la convergencia está garantizada.
3. El método es sólo aplicable al caso escalar (de una sola ecuación), y no se generaliza al caso de sistemas de ecuaciones.

Definición. *Una sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *se dice convergente a* x*, con* **orden** $p \geq 1$ *si*

$$|x - x_{k+1}| \leq C|x - x_k|^p \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

para alguna constante $C > 0$.

Si $p = 1$ *se dice que la sucesión* **converge linealmente** *a* x. *En este caso es necesario que* $C < 1$; *la constante* C *es llamada* **tasa de convergencia lineal**.

Cuanto mayor es p , más velozmente se reduce el error.

Según esta definición, el método de la bisección tiene convergencia lineal con una tasa de convergencia igual a $p = 1$.

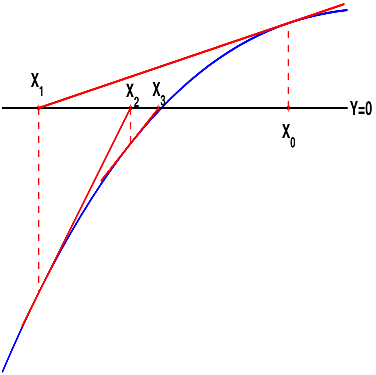
Método de Newton–Raphson

Se basa en el uso de una recta tangente a la gráfica de f para aproximar esta gráfica, cerca del punto donde la función se anula.

Supongamos que tenemos la aproximación x_k a la raíz x de $f(x)$. Trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(x_k, f(x_k))$, es decir,

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Esta recta cruza al eje de abscisas en un puntox_{k+1} que será nuestra siguiente aproximación a la raíz x.



El punto x_{k+1} donde la recta tangente

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

corta al eje de abscisas queda determinado por

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

El método de Newton-Raphson define entonces la sucesión de aproximaciones a α de la manera siguiente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a partir de una aproximación inicial x_0 dada y siempre que $f'(x_k) \neq 0$.

Teorema 1. *Sea* $f \in C^2([a,b])$ *con una raíz* $x \in (a,b)$ *tal que* $f'(x) \neq 0 \, \forall x \in [a,b]$. *Dado* $x_0 \in [a,b]$, *sea* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *la sucesión obtenida por el método de Newton–Raphson. Supongamos que* $x_k \in [a,b] \, \forall k \in \mathbb{N}$. *Si* x_0 *se escoge suficientemente cercano a* x, *entonces*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x$$

con orden $p = 2$.

Criterio de detención.

Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y suponga que el método de Newton–Raphson converge. El criterio de detención

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon,$$

asegura que el error al calcular la raíz α es menor que ϵ (tolerancia).

Ejemplo. Cálculo de $\sqrt{2}$.

Para calcular $\sqrt{2}$, podemos resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

Resultados obtenidos por los métodos de *Bisección* y *Newton–Raphson* en la resolución de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

con error menor que $\epsilon = 10^{-5}$.

	Bisección	Newton–Raphson
1	1.50000000000000	2.00000000000000
2	1.25000000000000	1.50000000000000
3	1.37500000000000	1.41666666666667
4	1.43750000000000	1.41421568627451
5	1.40625000000000	1.41421356237469
6	1.42187500000000	
7	1.41406250000000	
$\vdots$	$\vdots$	
15	1.41421508789063	
16	1.41419982910156	
17	1.41420745849609	