

Transformaciones Lineales

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 20, 2020



Definición

Sean $(V, +, \cdot)$ y (W, \oplus, \odot) e.v. sobre \mathbb{K} . Una función $T : V \rightarrow W$ se llama **transformación lineal** si se verifica:

- a) $\forall u, v \in V : T(u + v) = T(u) \oplus T(v)$.
- b) $\forall u \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda \cdot u) = \lambda \odot T(u)$.

Observación:

- 1 Las propiedades a) y b) juntas son equivalentes a
 $\forall u, v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \odot T(u) \oplus T(v)$.
- 2 Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces $T(\Theta_V) = \Theta_W$. En efecto,
 $T(\Theta_V) = T(\Theta_V + \Theta_V) = T(\Theta_V) + T(\Theta_V) \Rightarrow T(\Theta_V) = \Theta_W$.
- 3 Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces $\forall u \in V : T(-u) = -T(u)$.

Observación:

2) y 3) son **condiciones necesarias pero no suficientes** para que $T : U \rightarrow W$ sea lineal.

CONTRA EJEMPLO: $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $T(x) := \sin(x)$. Se verifica que
 $T(0) = \sin(0) = 0$ y $\forall x \in U := \mathbb{R} : T(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -T(x)$.
Como $1 = \sin(\pi/2) = \sin(2(\pi/4)) \neq 2\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$, T no es lineal.

Núcleo e Imagen

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define el **Núcleo (Kernel) de T** como el conjunto

$$\text{Ker}(T) := \{v \in V : T(v) = \Theta_W\} \subseteq V.$$

Además, se define el **conjunto imagen de T** por

$$\text{Im}(T) := \{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\} \subseteq W.$$

Proposición:

Sea $T : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, \oplus, \odot)$ una transformación lineal. Entonces, $(\text{Ker}(T), +, \cdot)$ y $(\text{Im}(T), \oplus, \odot)$ son s.e.v. de $(V, +, \cdot)$ y (W, \oplus, \odot) , respectivamente.

Pauta de la demostración:

Como T es lineal, $T(\Theta_V) = \Theta_W$, de donde se deduce que $\Theta_V \in \text{Ker}(T)$ y $\Theta_W \in \text{Im}(T)$. Esto implica que $\text{Ker}(T) \neq \emptyset$ y $\text{Im}(T) \neq \emptyset$.

Veamos que $\text{Im}(T)$ es s.e.v. de W :

Sean $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$. Luego, $\exists v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$.

Considerando $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$T(\lambda \cdot v_1 + v_2) = \lambda \odot T(v_1) \oplus T(v_2) = \lambda \odot w_1 \oplus w_2 \in W$. Esto permite concluir que $\lambda \odot w_1 \oplus w_2 \in \text{Im}(T)$.

Proposición:

Sea $T : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, \oplus, \odot)$ una transformación lineal. Entonces,
 T es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.

Demostración:

(\Rightarrow): HIPÓTESIS: T es inyectiva, i.e.

$(\forall u, v \in V : T(u) = T(v) \Rightarrow u = v) \Leftrightarrow (\forall u, v \in V : u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v))$.

Sea $v \in \text{Ker}(T)$. Esto significa que $T(v) = \Theta_W = T(\Theta_V)$. Como T es inyectiva, se infiere que $v = \Theta_V$. Así, $\text{Ker}(T) \subseteq \{\Theta_V\}$. Dado que $\{\Theta_V\} \subseteq \text{Ker}(T)$ siempre, se concluye que $\text{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.

(\Leftarrow): HIPÓTESIS: $\text{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.

Sean $u, v \in V$ tales que $T(u) = T(v)$. Esto implica que $T(u - v) = \Theta_W$, lo cual nos dice que $u - v \in \text{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$, y entonces $u = v$. De aquí, se concluye que T es inyectiva.

Observación

$T : V \rightarrow W$ es **sobreyectiva** si $\text{Im}(T) = W$.



Definición:

Una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es **isomorfismo** si es biyectiva. Un isomorfismo $L : V \rightarrow V$ (i.e. $W := V$) se llama **automorfismo**.

Proposición:

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

T es un isomorfismo $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{\Theta_V\} \wedge \text{Im}(T) = W$.

Proposición:

Si $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo, entonces $\exists T^{-1} : W \rightarrow V$ (inversa de T), la cual es también lineal y biyectiva, i.e. T^{-1} es también un isomorfismo.

Pauta de demostración:

Primero, como T es biyección, $\exists T^{-1} : W \rightarrow V$.

Veamos que T^{-1} es transformación lineal. Sean $w_1, w_2 \in W$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Luego, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $T^{-1}(w_1) = v_1$ (i.e. $T(v_1) = w_1$) y $T^{-1}(w_2) = v_2$ (i.e.

$T(v_2) = w_2$). Como T es transformación lineal, se tiene

$T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \odot T(v_1) \oplus T(v_2) = \lambda \odot w_1 \oplus w_2$. Esto último nos dice que $T^{-1}(\lambda \odot w_1 \oplus w_2) = \lambda v_1 + v_2 = \lambda T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$, y se concluye que T^{-1} es t.l.

Resta probar que T^{-1} es biyectiva (EJERCICIO).

Ejemplo de isomorfismo

Sea $T : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, definido para cada $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, $p(x) := a_0 + \cdots + a_m x^m$, por $T(p) := (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Se prueba que T es una transformación lineal biyectiva. En consecuencia, T es un isomorfismo.

Espacios isomorfos

Dos espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} , $(V, +, \cdot)$ y (W, \oplus, \odot) , se dicen ser **espacios isomorfos**, denotado por $(V, +, \cdot) \cong (W, \oplus, \odot)$, si $\exists T : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, \oplus, \odot)$ isomorfismo.

Del ejemplo anterior, se puede decir que $(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}), +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^{m+1}, +, \cdot)$ (con sus operaciones usuales, respectivamente).

Teorema

La relación de isomorfismo entre espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo \mathbb{K} , es una **relación de equivalencia**.

Pauta de demostración:

Sea A el conjunto de los espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} . Se define la relación \mathcal{R} en A por:

$$\forall (V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot) \in A : (V, +, \cdot) \mathcal{R} (W, \oplus, \odot) \Leftrightarrow (V, +, \cdot) \cong (W, \oplus, \odot).$$

\mathcal{R} es refleja

En vista que para cualquier $(V, +, \cdot) \in A$, la **función identidad** $J : V \rightarrow V$, definido por $J(v) := v, \forall v \in V$, es lineal y biyectiva. En consecuencia J es un automorfismo. Luego, $(V, +, \cdot) \cong (V, +, \cdot)$, es decir $(V, +, \cdot) \mathcal{R} (V, +, \cdot)$.

\mathcal{R} es simétrica

Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot) \in A$ tal que $(V, +, \cdot) \mathcal{R} (W, \oplus, \odot)$, es decir $(V, +, \cdot) \cong (W, \oplus, \odot)$, lo cual a su vez equivale a decir que $\exists T : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, \oplus, \odot)$ isomorfismo. Por un resulta previo, se tiene que $T^{-1} : (W, \oplus, \odot) \rightarrow (V, +, \cdot)$ existe y es también un isomorfismo. Por tanto $(W, \oplus, \odot) \cong (V, +, \cdot)$, es decir $(W, \oplus, \odot) \mathcal{R} (V, +, \cdot)$.

\mathcal{R} es transitiva

Sean $(U, \boxplus, \boxdot), (V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot) \in A$ tales que $(U, \boxplus, \boxdot) \mathcal{R} (V, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot) \mathcal{R} (W, \oplus, \odot)$. Esto significa que $\exists T_1 : U \rightarrow V$ y $\exists T_2 : V \rightarrow W$ ambos isomorfismos.

AFIRMACIÓN: $T_3 := T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$ es un isomorfismo

En efecto, **veamos que T_3 es lineal**: Sean $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} T_3(\lambda \boxdot u_1 \boxplus u_2) &= T_2(T_1(\lambda \boxdot u_1 \boxplus u_2)) \\ &= T_2(\lambda \cdot T_1(u_1) + T_1(u_2)) \\ &= \lambda \odot T_2(T_1(u_1)) \oplus T_2(T_1(u_2)) \\ &= \lambda \odot (T_2 \circ T_1)(u_1) \oplus (T_2 \circ T_1)(u_2) \\ &= \lambda \odot T_3(u_1) \oplus T_3(u_2). \end{aligned}$$

De esta manera, se deduce que T_3 es una transformación lineal.

Veamos que T_3 es inyectiva: Sea $u \in \text{Ker}(T_3)$. Entonces

$$T_3(u) = \Theta_W \Rightarrow T_2(T_1(u)) = \Theta_W \Rightarrow T_1(u) = \Theta_V \Rightarrow u = \Theta_U,$$

lo cual permite inferir que $\text{Ker}(T_3) = \{\Theta_U\}$, y por tanto T_3 es inyectiva.

Veamos que T_3 es sobreyectiva: Sea $w \in W$. Como T_2 es sobreyectiva, $\exists v \in V$ tal que $T_2(v) = w$. A su vez, como T_1 es sobreyectiva también, $\exists u \in U$ tal que $T_1(u) = v$. De esta manera, se ha probado que $\exists u \in U : T_3(u) = (T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) = w$. Así, T_3 es sobreyectiva.

De esta manera: T_3 es transformación lineal biyectiva, i.e. un isomorfismo. Así, $(U, \boxplus, \boxdot) \mathcal{R} (W, \oplus, \odot)$.

Esto asegura que \mathcal{R} es transitiva.

CONCLUSIÓN: \mathcal{R} es una relación de equivalencia en A .



Nulidad y Rango

Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre \mathbb{K} , y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define

- 1 La **nulidad de T** por $n(T) := \dim(\text{Ker}(T))$.
- 2 El **rango de T** por $r(T) := \dim(\text{Im}(T))$.

Proposición:

Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre \mathbb{K} de **dimensión finita**, y sea $T : V \rightarrow W$ un isomorfismo. Si $B_V := \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ es una base de V , entonces $T(B_V) := \{T(v_1), \dots, T(v_m)\}$ es una base de W . Además, se tiene que $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración:

Veamos que $T(B_V)$ es l.i. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m) &= \Theta_W \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \Theta_W \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m &= \Theta_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.\end{aligned}$$

Ahora, en vista que $\langle T(B_V) \rangle := \langle \{T(v_1), \dots, T(v_m)\} \rangle = \text{Im}(T)$ (¿Por qué?), y en este caso $\text{Im}(T) = W$, pues T es sobreyectiva, se concluye que $T(B_V)$ es una base de W . Como además, $|T(B_V)| = |B_V|$, se deduce también que $\dim(V) = \dim(W)$.

Teorema de las dimensiones (nulidad-rango)

Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre \mathbb{K} de **dimensión finita**, y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $\dim(V) = n(T) + r(T)$.

Demostración: Sea $B := \{w_j\}_{j \in J}$ una base de $\text{Im}(T)$, con J un conjunto de índices finito. Esto induce otro conjunto $A := \{v_j\}_{j \in J} \subseteq V$, tal que $T(v_j) = w_j$, para $j \in J$.

AFIRMACIÓN: A es l.i.

En efecto, sean $\alpha_j \in \mathbb{K}, j \in J$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \alpha_j v_j = \Theta_V &\Rightarrow T\left(\sum_{j \in J} \alpha_j v_j\right) = T(\Theta_V) = \Theta_W \\ &\Rightarrow \sum_{j \in J} \alpha_j T(v_j) = \sum_{j \in J} \alpha_j w_j = \Theta_W, \end{aligned}$$

y como $B = \{w_j\}_{j \in J}$ es una base de $\text{Im}(T)$, es l.i. En consecuencia, se deduce que $\alpha_j = 0$, para todo $j \in J$, y se concluye que A es l.i.

Ahora, sea $V_1 := \langle A \rangle$, y $V_2 := \text{Ker}(T)$.

AFIRMACIÓN: $V = V_1 + V_2$

En efecto, es suficiente con probar que $V \subseteq V_1 + V_2$ (¿Por qué?). Sea $v \in V$. Como $T(v) \in \text{Im}(T) = \langle T(A) \rangle$, entonces $\exists \beta_j \in \mathbb{K}, j \in J$, tal que

$$T(v) = \sum_{j \in J} \beta_j T(v_j) \Rightarrow T\left(v - \sum_{j \in J} \beta_j v_j\right) = \Theta_W \Rightarrow v - \sum_{j \in J} \beta_j v_j \in \text{Ker}(T) = V_2$$



Como además $\sum_{j \in J} \beta_j v_j \in V_1$, se deduce que

$$v = \sum_{j \in J} \beta_j v_j + \left(v - \sum_{j \in J} \beta_j v_j \right) \in V_1 + V_2,$$

lo cual permite implicar que $V \subseteq V_1 + V_2$, y por lo tanto $V = V_1 + V_2$.

AFIRMACIÓN: $V_1 \cap V_2 = \{\Theta_V\}$

Sea $v \in V_1 \cap V_2$. Como $v \in V_1 = \langle A \rangle$, $\exists \gamma_j \in \mathbb{K}$, $j \in J$, tal que $v = \sum_{j \in J} \gamma_j v_j$. Por otro

lado, $v \in V_2 = \text{Ker}(T)$, lo cual implica que

$$T(v) = \Theta_W \Rightarrow \sum_{j \in J} \gamma_j T(v_j) = \Theta_W \Rightarrow \forall j \in J : \gamma_j = 0 \text{ (¿Por qué?)} \Rightarrow v = \Theta_V.$$

CONCLUSIÓN: $V = V_1 \oplus V_2$. De esta forma, aplicando el **Teorema de Grassmann**, se tiene

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(V_1) + \dim(V_2) = |J| + \dim(\text{Ker}(T)) \\ &= \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) \\ &= r(T) + n(T). \end{aligned}$$



Corolario

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión finita, y $T : V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces, son equivalentes:

- 1 T es automorfismo.
- 2 T es inyectiva (**monomorfismo**).
- 3 T es sobreyectiva (**epimorfismo**).

Ejercicios

- 1 Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , con $\dim(V) = 1$, y sea $T : V \rightarrow V$ transformación lineal. Demuestre que $\exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall w \in V : T(w) = \lambda w$.
- 2 Dados $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre \mathbb{K} , se define $\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W : T \text{ es t.l.}\}$. Demuestre que $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.
- 3 Sean $(V, +, \cdot), (W, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre \mathbb{K} , de dimensión finita cada uno, B un conjunto generador de V , y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que $T(B)$ es un conjunto generador de $\text{Im}(T)$. ¿Puede decirse algo más, si además se sabe que B es una base de V ? ¿Es válido el resultado en dimensión infinita?

