Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº1: Lógica y Conjuntos
Clase N°3 - 12/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Expresiones Lógicas

Definición

Una expresión lógica se dice:

1. **tautología** si resulta verdadera cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.
2. **contradicción** si resulta falsa cualquiera sea el valor de verdad que se asigne a las proposiciones variables que la componen.
3. **contingencia** si no es tautología ni contradicción.

Propiedades

1. Doble negación: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2. Conmutatividad de la conjunción: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. Conmutatividad de la disyunción: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
4. Asociatividad de la conjunción: $(p \wedge q) \wedge t \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge t)$
5. Asociatividad de la disyunción: $(p \vee q) \vee t \Leftrightarrow p \vee (q \vee t)$
6. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. Leyes de De Morgan: $\begin{cases} 8.1.\ \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ 8.2.\ \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \end{cases}$
9. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Ejercicios

1. Demuestre sin usar tabla de verdad las siguientes propiedades.
   (a) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
   (b) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
2. Si p y q son proposiciones cualesquiera y $\barwedge$ es un conectivo lógico definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \barwedge q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

   (a) Decida si la proposición $p \rightarrow [\sim p \barwedge (\sim p \wedge q)]$ es tautología.
   (b) ¿El conectivo $\barwedge$ cumple con las leyes de conmutatividad y asociatividad?

Conjuntos

Definición

- Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos distintos.
- Los conjunto se denotan con letras mayúsculas.
- Cada objeto de la colección es un elemento del conjunto. La frase “ser un elemento de” se denota con el símbolo “$\in$”.
- El conjunto universal denotado por U es el conjunto que contine todos los elementos.
- El conjunto $\varnothing$ no tiene elementos.

Ejemplos

1. Definir los siguientes conjuntos por comprensión y extensión:
   (a) El conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (b) El conjunto de números impares.

   (b) El conjunto formado por todos los números reales cuyo cuadrado menos su quíntuplo más seis es cero.

   (c) El conjunto de los múltiplos de 12 que son menores que 65.

2. Defina por comprensión el siguiente conjunto:

$$P = \{3, 9, 27, 81\}$$

3. Describa los elementos que se encuentran en el conjunto:

$$A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Función Proposicional y Cuantificadores

Definición

Una **función proposicional** es una expresión descrita en función de algún o algunas variables que satisfacen lo siguiente: cada vez que se reemplazan valores de las variables en la función esta se transforma en una proposición.

Función Proposicional y Cuantificadores

Definición

Una **función proposicional** es una expresión descrita en función de algún o algunas variables que satisfacen lo siguiente: cada vez que se reemplazan valores de las variables en la función esta se transforma en una proposición.

Definición

Se llama **conjunto validez** de una función proposicional al conjunto de valores para los cuales resulta ser un proposición verdadera.

Ejemplos

Considere las siguientes funciones proposicionales:

$$p(t) : t + 2 \leq 3 - (t + 1); \qquad q(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2xy;$$
$$s(m) : m^2 + 5m + 6 = 0$$

Determine:

(a) el valor de verdad de las siguientes proposiciones $p(-1)$ $p(1)$, $q(0, 2)$, $q(\sqrt{2}, 3)$, $s(-2)$ y $s(\frac{1}{2})$.

(b) los siguientes conjuntos validez:

(b.1) $V_p = \{t \in \mathbb{Z} : p(t)\}$ y $V_p = \{t \in \mathbb{R} : p(t)\}$.

(b.2) $V_q = \{x, y \in \mathbb{R} : q(x, y)\}$.

(b.3) $V_s = \{m \in \mathbb{R} : s(m)\}$ y $V_s = \{m \in \mathbb{N} : s(m)\}$