Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/CMR/HPV/JRC/JU

Cálculo 3 (521227)

Práctica 7

1. Evaluar las integrales $\iint_R f(x,y)dA$ para las siguientes funciones f y región R:
   (a) $f(x,y) = e^x \cos y, R = [0,1] \times [0,\pi/2]$;
   (b) $f(x,y) = \frac{y}{x}, R = [1,3] \times [2,4]$;
   (c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y}, R = [0,1] \times [1,3]$.

2. Evalua las siguientes integrales iteradas. Además interpretarlas como integrales dobles y cambiar el orden de iteración.
   (a) $\int_0^1 \int_o^x (x+y)dydx$;
   (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ydxdy$;
   (c) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{1+y^2} dydx$.

3. Encontrar el volumen de los siguientes solidos:
   (a) Debajo del plano $x - 2y + z = 1$ y arriba de la región acotada por la recta $x + y = 1$ y la curva $x^2 + y = 1$.
   (b) Debajo de la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región acotada por la recta $x = 4$ y la curva $y^2 = x$.
   (c) Debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo con vertices $(1,1), (4,1)$ y $(1,2)$.
   (d) Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0, z = 0, x = y$ e $y = 1$.

4. Utilizar coordenadas polares para calcular las siguientes integrales iteradas:
   (a) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)dydx$;
   (b) $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2ydxdy$;

5. (a) Definimos una integral impropia en todo $\mathbb{R}^2$

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}$$

   donde D_a es el disco de radio a con centro en el origen. Verificar que $I = \pi$.

   (b) Una definición equivalente es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}$$

   donde C_a es el cuadrado $[-a,a] \times [-a,a]$. Utilizar esto para verificar que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \pi$$

   (c) Deducir que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

   (d) Utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2}x$, para verificar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ (Está identidad es fundamental en Probabilidad y Estadistica.)