A Teorema de Picar-Lindelöf (bosquejo de demostración)

Para demostrar la unicidad de la solución es necesario el siguiente resultado preliminar:

Teorema A.1 (Lema de Gronwall). *Sean α, β dos funciones no-negativas definidas en el intervalo $[0, a]$. Si u es una función que satisface*

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_0^x \beta(z)u(z)dz,$$

entonces se tiene que

$$u(x) \leq \alpha(x)e^{\int_0^x \beta(z)dz}.$$

Idea de la demostración del Teorema de Picar-Lindelöf. La EDO puede escribirse en forma integral como:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z))dz.$$

Dado que f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el compacto R, existen constantes $M, L > 0$ tales que

$$|f(x,y)| \leq M, \quad |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq L, \forall (x,y) \in R_1 \subseteq R.$$

Sea $S = \{g \in C(I, \mathbb{R}) : \sup_{x \in I} |g(x) - y_0| \leq \alpha\}$. Si $g \in S$, entonces para todo $(x, y) \in R_1 = [x_0 - h_1, x_0 + h_1] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$ tenemos que

$$|T[g](x) - y_0| \leq M|x - x_0|.$$

Podemos escoger h suficientemente pequeño, por ejemplo, $0 < h < \min\{h_1, \alpha/M, 1/L\}$. De esta manera, el operador lineal $T : S \longrightarrow S$ mapea una función $y \in S$ a una función:

$$T[y](x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z))ds,$$

que está también en S.

Luego, cualquier solución del PVI debe ser un punto fijo del operador T.

Definimos ahora el esquema de Picard para la EDO como:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x)y_0, \\ &\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, \varphi_k(z))dz. \end{aligned}$$

Si esta sucesión de funciones converge, el límite es un punto fijo de T, y por tanto una solución del PVI.

Luego,

$$\begin{aligned} \|T[y_1](x) - T[y_2](x)\| &= \sup_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| \\ &\leq L \int_{x_0}^b |y_1(z) - y_2(z)|dz \leq Lh \sup_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|T[y_1] - T[y_2]\| \leq Lh\|y_1 - y_2\|.$$

Dado que $h \leq 1/L$, tenemos que T define una contracción. Con esto podemos aplicar el Teorema de punto fijo de Banach obteniendo la existencia de un punto fijo para T, cuya solución es el límite uniforme de la sucesión de Picard.

Respecto a la unicidad, si consideramos y_1 e y_2 dos soluciones del PVI, tenemos por regla de la cadena:

$$\frac{d(y_1 - y_2)^2}{dx} = 2(y_1 - y_2)(f(x, y_1) - f(x, y_2))$$

Por hipótesis, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en un compacto, por lo que es acotada. De aquí se deduce que f satisface la propiedad de Lipschitz en su segunda variable. De donde:

$$\frac{d(y_1 - y_2)^2}{dx} \leq K_x(y_1 - y_2)^2.$$

Integrando con respecto a x a ambos lados de la desigualdad

$$(y_1(x) - y_2(x))^2 \leq (y_1(x_0) - y_2(x_0))^2 + \int_{x_0}^{x} K_z(y_1(z) - y_2(z))^2 dz.$$

Luego, usando que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, por Lema de Gronwall deducimos que

$$0 \leq (y_1(x) - y_2(x))^2 \leq 0$$

Así que $y_1 \equiv y_2$, i.e. tenemos unicidad de la solución. $\square$

Ejemplo A.1. *Consideremos el problema de valor inicial*

$$y' = 3y, \quad y(0) = 1,$$

que es equivalente a

$$y(x) = 1 + \int_0^x 3y(z)\, dz.$$

Las iteraciones de Picard quedan como

$$\begin{aligned}
y_0(x) &\equiv 1, \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x 3y_0(z)\, dz = 1 + 3x, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x 3(1 + 3z)\, dz = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Por inducción se puede verificar que la n-ésima iteración es

$$y_k(x) = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(3x)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(3x)^i}{i!},$$

que es la k-ésima suma parcial de la serie de Maclaurin para e^{3x}. Por lo tanto, cuando $k \to \infty$, $y_k(x) \to e^{3x}$, que es la solución del PVI.

B Interpretación geométrica de EDOs

En lo que sigue, veremos algunas técnicas para estudiar el comportamiento de la solución de un PVI.

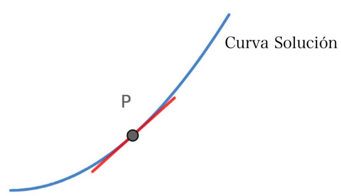
B.1 Campos Direccionales

Debemos recordar de cursos previos de cálculo que: "La derivada de una función en un punto, geométricamente se interpreta como la pendiente de la recta tangente de la función en dicho punto."

Sea $y = y(x)$ una solución a la ED

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7}$$

La pendiente de la recta tangente en un punto $(x, y(x))$ de la curva solución es el valor de la derivada $\dfrac{dy}{dx}$, y por la relación (7) esto es el valor de la función $f(x, y(x))$.



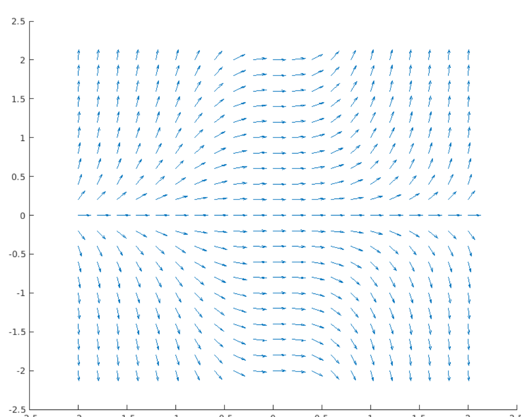
A esta función $f(x, y(x))$ se le conoce como función pendiente.

Definición

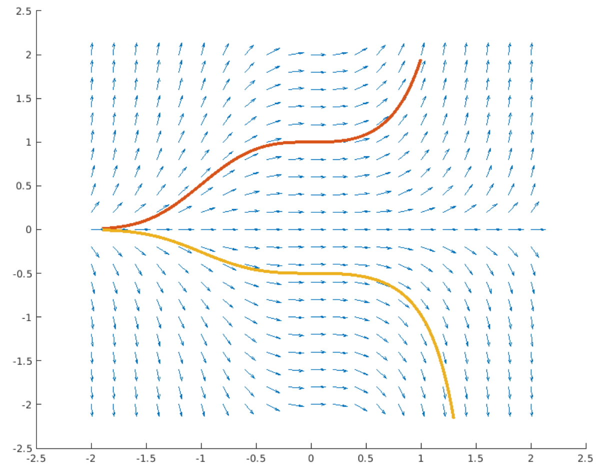
Si consideramos los puntos sobre una malla de una región rectangular del plano y dibujamos un segmento de recta en cada punto (x, y) con pendiente $f(x, y)$, entonces la colección de todas estas rectas son llamadas **campo direccional** de la ED (7).

Ejemplo B.1. *Consideremos la ecuación diferencial* $y' = 2x^2y$*, donde* $f(x, y) = 2x^2y$*. En el punto* $(1, 1)$*, tenemos que* $f(1, 1) = 2$*, lo que indica que la recta tangente en ese punto tiene pendiente 2, i.e. la curva solución es creciente alrededor de este punto.*

Si tomamos una malla de puntos y graficando pequeños segmentos de recta en cada punto, tenemos el campo direccional:



Una curva solución que pase a través del campo direccional deberá seguir el flujo del campo:



B.2 Isoclinas

Otra técnica para el estudio del comportamiento de la solución de un PVI, son las isoclinas:

Definición

Se llama **Isoclina** al lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a la curva solución tienen la misma dirección.

La familia de isoclinas de la ecuación diferencial (7) se determinan por la ecuación

$$f(x, y) = k$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es constante. Note que el estudio para $k = 0$, $k < 0$ o $k > 0$ tiene diferente interpretación.

La idea es: considerar diferentes valores de k para dibujar una red de isoclinas, a través de las cuales se pueden trazar las curvas solución de la ED (7).

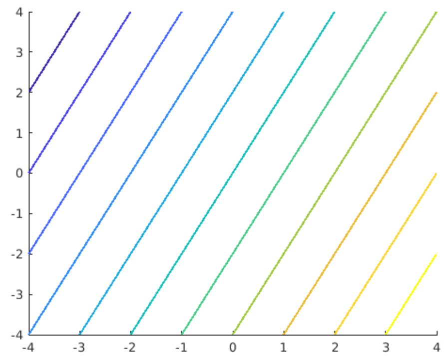
Ejemplo B.2. *Utilizaremos isoclinas para trazar aproximadamente las curvas solución a la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y.$$

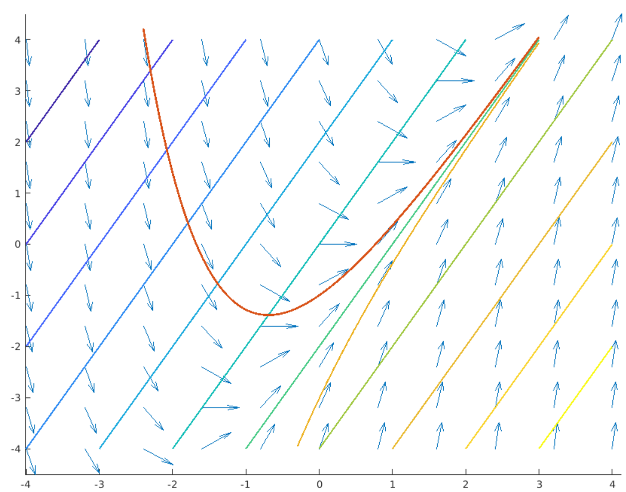
En este caso, las isoclinas representan rectas en el plano

$$2x - y = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 2x - k.$$

Para distintos valores de k, tendremos rectas distintas (siempre con pendiente 2) y punto de corte con el eje de las ordenadas igual a $(0, -k)$:



Cada una de estas rectas indica que todas las tangentes a la curva solución por encima de ella tienen la misma dirección e inclinación. En efecto, en la siguiente imagen, se puede apreciar que sobre cada recta, las direcciones (dibujadas como flechas) tienen la misma inclinación:



Además, a partir de los criterios de las derivadas podemos dar un bosquejo más preciso de la ED. En efecto, si consideramos el subespacio del plano en donde $k = 0$, $k > 0$ o $k < 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x, \\ k > 0: &\quad 2x - y > 0 \Rightarrow y < 2x, \\ k < 0: &\quad 2x - y < 0 \Rightarrow y > 2x \end{aligned}$$

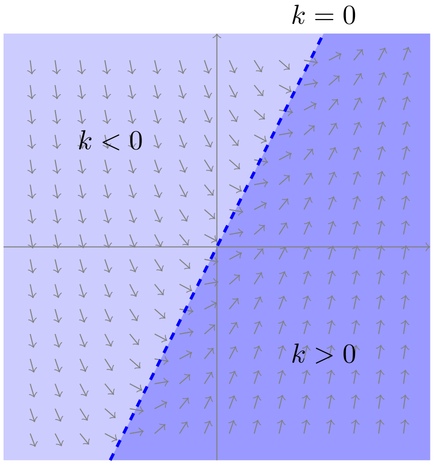
Esto nos dice que en la región del plano donde $y > 2x$ la curva solución será decreciente (derivada negativa). Si por el contrario estamos en la región del plano donde $y < 2x$, la curva será creciente (derivada positiva). Mientras que los puntos críticos estarán sobre la recta $y = 2x$.

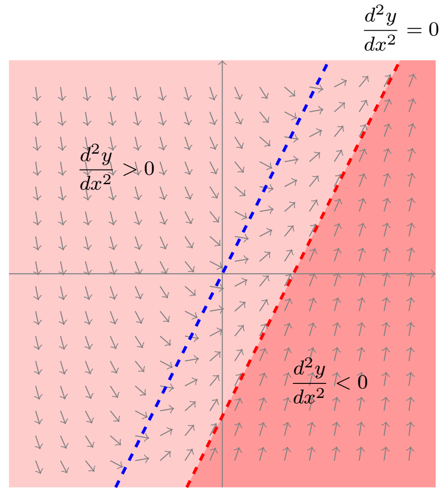
Haciendo el mismo análisis para la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(2x - y) \\ &= 2 - \frac{dy}{dx} \\ &= 2 - (2x - y). \end{aligned}$$

Luego, la convexidad o concavidad de la curva solución estará caracterizada por el signo de y *respecto de* $2x-2:$

$$y > 2x-2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow \textit{convexa},$$
$$y < 2x-2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow \textit{cóncava}$$





Ejercicio: *Compruebe que la solución de la ecuación diferencial está dada por*

$$y(x) = 2(x-1) + Ce^{-x},$$

para cualquier $C \in \mathbb{R}$.

Grafique además la solución considerando la condición inicial

a) $y(0) = -1$

b) $y(1) = -1$

y verifique el comportamiento sugerido del análisis anterior.

C Otras EDOs conocidas

C.1 Ecuación de Bernoulli

Definición

Consideramos ahora EDOs de la forma

$$y' + P(x)y = f(x)y^n, \tag{8}$$

con $n \neq 0, n \neq 1$. A estas ecuaciones se les conoce como **Ecuaciones de Bernoulli**.

Note que si $n=0$ en (8), esta ecuación es una EDO de variables separables. En el caso $n=1$ es una EDO lineal de primer orden.

La ED de Bernoulli es no es lineal, pero

Podemos convertirla en una EDO lineal con el cambio de variable:

$$u(x) = y^{1-n}(x),$$

lo que produce

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}(x)\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo el cambio en la ED (8), obtenemos:

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{1-n}P(x) &= (1-n)f(x) \\ u' + (1-n)P(x)u &= (1-n)f(x). \end{aligned}$$

Note que esta es una EDO lineal de variable dependiente u e independiente x (que ya sabemos cómo resolver).

Ejemplo C.1. *Resuelva el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} &= -\dfrac{5x^2y^3}{2} \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Por Teorema 1.1, existe una única solución en algún subintervalo de $(0, +\infty)$.

Notemos que esta ecuación diferencial es de Bernoulli, con $n = 3$, identificando $P(x) = -1/x$ y $f(x) = -5x^2/2$. Considerando el cambio de variable $u = y^{-2}$, se obtiene $\dfrac{du}{dx} = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$ y así la ED se convierte en

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 5x^2.$$

La expresión obtenida es una ED lineal, para la cual consideramos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{2}{x}\cdot u &= 5x^2 & \Big/ \cdot x^2 \\ \frac{d}{dx}\left(x^2u\right) &= 5x^4 & \Big/ \int \, dx \\ x^2u &= x^5 + C & \Big/ \cdot x^{-2} \end{aligned}$$

y finalmente la solución de la ED lineal queda como

$$u(x) = x^3 + \frac{C}{x^2},$$

para C constante.

Devolvemos ahora el cambio de variable $u = y^{-2}$ y obtenemos

$$|y| = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{x^3 + \frac{C}{x^2}}},$$

para $x^3 + Cx^{-2} > 0$.

A partir de la condición inicial $y(1) = 2$, se considerará la solución $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + Cx^{-2}}}$ para $x^3 + Cx^{-2} > 0$, y así

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1+C}} \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{3}{4}.$$

El dominio de la solución, está dado por

$$x^3 - \frac{3x^{-2}}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^5 - 3}{4x^2} > 0 \Leftrightarrow 4x^5 - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[5]{\frac{3}{4}}$$

Finalmente, la solución de este PVI es

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^3 - \frac{3}{4x^2}}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^5 - 3}},$$

para $x \in I := \left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}, \infty\right)$. Note que, en efecto, $1 \in I$.

C.2 Ecuación de Riccati

Definición

Llamaremos **Ecuación de Riccati** a las EDOs de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \tag{9}$$

con P, Q, R funciones continuas.

Para resolver estas ecuaciones de Riccati debemos conocer una solución particular $y_1(x)$ de la EDO y luego realizar dos sustituciones:

La sustitución $y = z + y_1$ reduce la Ecuación (9) a una ecuación de Bernoulli con $n = 2$.

1. Recuerde que z es una función de variable x, al igual que y_1. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \\
\frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} &= P(x) + Q(x)(z + y_1) + R(x)(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) \\
\frac{dz}{dx} &= (Q(x) + 2y_1R(x))z + R(x)z^2 \underbrace{-\frac{dy_1}{dx} + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2}_{=0} \\
\frac{dz}{dx} &= (Q(x) + 2y_1R(x))z + R(x)z^2.
\end{aligned}$$

2. Podemos resolver la Ecuación de Bernoulli obtenida con la sustitución: $u = z^{-1}$.

Ejemplo C.2. *Resuelva la siguiente EDO:*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2},$$

con $x \neq 0$. *Considere la solución particular* $y_1 = -\dfrac{1}{x}$.

1. Consideremos la sustitución $y = z - \frac{1}{x}$, y su derivada $y' = z' + \frac{1}{x^2}$. Sustituimos en la EDO, obteniendo:

$$\begin{aligned} z' + \frac{1}{x^2} + z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{x^2} \\ z' - \frac{2z}{x} &= -z^2 \end{aligned}$$

   Esta última ecuación es de Bernoulli.

2. Ahora, consideramos la sustitución de variable $u = z^{-1}$ y su derivada $u' = -z^{-2}z'$. De donde obtenemos la EDO lineal de primer orden:

$$u' + \frac{2u}{x} = 1$$

   Calculamos el factor integrante (FI):

$$\mu(x) = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$

   Multiplicamos la EDO por el FI y resolvemos:

$$\begin{aligned} x^2u' + 2xu &= x^2 \\ \frac{d}{dx}[x^2u] &= x^2 \qquad \Big/ \int \\ x^2u &= \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Ahora, devolvemos las sustituciones realizadas para obtener la solución de la EDO original con variable y.
De la sustitución $u = z^{-1}$, tenemos $z = \frac{3x^2}{x^3 + C}$. Finalmente, del cambio de variables $y = z - \frac{1}{x}$ se tiene:

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 + C)},$$

en un subconjunto de $\mathbb{R}_+$ o $\mathbb{R}_-$.

C.3 EDOs tipo Homogéneas

Definición

Si para una función f existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

se dirá que f es una **función homogénea de grado** α.

Ejemplo C.3. *La función $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, es una función homogénea de segundo grado, ya que*

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + y^2 + xy) = t^2 f(x, y).$$

Ejemplo C.4. *La función $g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, es una función homogénea de grado cero, ya que*

$$g(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = t^0 g(x, y).$$

Definición

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ recibe el nombre **homogénea** si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero.

Esta definición nos indica que $f(x, y)$ es homogénea de grado cero, siempre que se pueda representar como una función del cociente y/x, es decir, siempre que $f(x, y) = g\,(y/x)$.

Ejemplo C.5. *Del ejemplo C.4 tenemos que la EDO*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

es homogénea. Note que podemos reescribirla como:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}_{g\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

¿Cómo resolvemos una EDO Homogénea?

Para resolver una EDO homogénea, realizamos el cambio de variables:

$$y = u\,x, \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

que permite reducir la EDO homogénea a una EDO de variables separables.

En efecto, a partir del cambio $u = \dfrac{y}{x}$, o equivalentemente $y = ux$. Luego, desde la regla del producto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\,x + u.$$

Reemplazando en la EDO original $\dfrac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ tenemos:

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \qquad \Longrightarrow \qquad x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Ejemplo C.6. *Resolvamos la EDO:*

$$x\frac{dy}{dx} = y\ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Podemos reescribir la EDO de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

en $\mathbb{R}_+$ *o* $\mathbb{R}_-$.

Es fácil notar que el cambio de variables adecuado es $u = \frac{y}{x}$*, así* $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$*. Reemplazando en la EDO tenemos:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ u + x\frac{du}{dx} &= u\ln(u) \end{aligned}$$

que corresponde a una EDO de variables separables.

Separando variables e integrando obtenemos:

$$\int \frac{du}{u(\ln(u)-1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Para resolver la integral del lado izquierdo consideramos el cambio $z = \ln(u) - 1$*, así* $dz = \frac{du}{u}$*:*

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|z| &= \ln|x| + C \\ |z| &= C|x|. \end{aligned}$$

Devolvemos los cambios, y tenemos:

$$u(x) = e^{C\,x+1} \qquad \Longrightarrow \qquad y = xe^{C\,x+1}.$$

C.4 Ecuaciones Exactas

Recordemos que el diferencial de una función en dos variables $z = f(x, y)$ está dado por:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{10}$$

Cuando la función $f(x, y) = c$, con c constante, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Definición

Una ED de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se dirá exacta, cuando ella proviene del diferencial de una función en dos variables $z = f(x, y)$, es decir,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Ejemplo C.7. *La ED* $y^2dx + 2xydy = 0$ *es exacta ya que el lado izquierdo se obtiene del diferencial de la función* $f(x, y) = xy^2$*:*

$$d(xy^2) = y^2dx + 2xydy.$$

En algunos casos no es tan simple poder identificar si una ED proviene o no del diferencial de una función en dos variables. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado que nos puede ayudar:

Teorema C.1. *La ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta, si y sólo si se cumple que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{11}$$

en una región rectangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ *donde* $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *sean continuas con primeras derivadas continuas.*

Ejemplo C.8. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

$$(y\sin(x) + xy\cos(x))dx + x\sin(x)dy = 0.$$

Primero comprobamos que la ecuación dada es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin(x) + x\cos(x), \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin(x) + x\cos(x),$$

como se cumple la condición (11), la ecuación diferencial es exacta, es decir, existe $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Integramos la primera expresión respecto a x:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx &= \int M(x,y)\, dx \\ f(x,y) &= \int (y\sin(x) + xy\cos(x))\, dx + g(y) \\ f(x,y) &= yx\sin(x) + g(y). \end{aligned}$$

Derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin(x) + g'(y).$$

Sabiendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ tenemos:

$$x\sin(x) + g'(y) = x\sin(x)$$

Así, $g(y) = c$, con c una constante arbitraria. Por lo tanto, la solución implícita a la ED es:

$$f(x,y) := yx\sin(x) + c = 0$$

y en forma explícita es:

$$y(x) = \frac{c}{x\sin(x)}$$

que está definida en cualquier intervalo que no contenga a $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

C.5 Ecuación de Clairaut

Definición

Una ED de la forma
$$y = x\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right),$$
con g una función continuamente diferenciable.

Para resolver una ED de Clairaut, derivamos ambos lados de la igualdad con respecto a la variable independiente

$$\begin{aligned} 0 &= x\frac{d^2y}{dx^2} + g'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} \\ &= \left[x + g'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{d^2y}{dx^2}. \end{aligned}$$

Luego, debe pasar que:

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = C$ es constante. De donde, la solución general de la ED de Clairaut viene dada por
$$y(x) = Cx + g(C).$$
- $x+g'\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$, que define la solución singular. Para resolverla parametrizamos usando $p = \dfrac{dy}{dx}$, lo que nos da
$$\begin{aligned} y &= x\,p + g(p) \\ 0 &= x + g'(p) \end{aligned}$$

Ejemplo C.9. *Resolvamos la ecuación de Clairaut*
$$y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Identificamos la solución general:
$$y(x) = Cx - C^2.$$

Para la solución singular, sustituimos la relación $p = \dfrac{dy}{dx}$, $g(z) = -z^2$, *en el sistema*
$$\begin{cases} x + g'\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0 \\ y = x\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \end{cases}$$

Lo que nos da
$$\begin{cases} x - 2p = 0 \\ y = x\,p - p^2 \end{cases} \begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 - p^2 \end{cases}$$

De donde obtenemos la solución singular $y(x) = \frac{x^2}{4}$.