Departamento de Ingeniería Matemática	Universidad de Concepción

Pauta Evaluación 2

EDO, 521218, 525221 *Profesores: Felipe Maldonado, Juan Molina*

Problema 1.
Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 9y(t) &= 2\delta(t-1) - \delta(t-3) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Solución: Se aplica transformada de Laplace a la ecuación,

$$\mathcal{L}[y''(t) - 4y'(t) + 9y(t)](s) = \mathcal{L}[2\delta(t-1) - \delta(t-3)](s),$$

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, y utilizando propiedades y transformadas conocidas se obtiene:

$$s^2Y(s) - 2s + 1 - 4(sY(s) - 2) + 9Y(s) = 2e^{-s} - e^{-3s},$$

de donde

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 - 4s + 9} - 9\frac{1}{s^2 - 4s + 9} + 2\frac{e^{-s}}{s^2 - 4s + 9} - \frac{e^{-3s}}{s^2 - 4s + 9}$$

[5 pts.]

Notando que $s^2 - 4s + 9 = (s-2)^2 + 5$ y denotando:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-2)}{(s-2)^2 + 5}\right](t)$$
$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-5}{(s-2)^2 + 5}\right](t)$$
$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-s}}{(s-2)^2 + 5}\right](t)$$
$$f_4(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-e^{-3s}}{(s-2)^2 + 5}\right](t)$$

Se tiene que $y(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)$. Se calcula entonces cada una de las antitransformadas:

$$f_1(t) = 2e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 5}\right](t) = 2e^{2t}\cos(\sqrt{5}t),$$
$$f_2(t) = -\frac{5}{\sqrt{5}}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2 + 5}\right](t) = -\sqrt{5}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t)$$

$$f_3(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} H_1(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{(s-2)^2+5}\right](t-1) = \frac{2}{\sqrt{5}} H_1(t) e^{2(t-1)} \sin(\sqrt{5}(t-1))$$
$$f_4(t) = \frac{-1}{\sqrt{5}} H_3(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{(s-2)^2+5}\right](t-3) = \frac{-1}{\sqrt{5}} H_3(t) e^{2(t-3)} \sin(\sqrt{5}(t-3)).$$

[12 pts.]

Consecuentemente, la solución del problema con valores iniciales viene dada por:

$$y(t) = 2e^{2t}\cos(\sqrt{5}t) - \sqrt{5}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t) + \frac{2}{\sqrt{5}} H_1(t) e^{2(t-1)}\sin(\sqrt{5}(t-1)) - \frac{1}{\sqrt{5}} H_3(t) e^{2(t-3)}\sin(\sqrt{5}(t-3)).$$

[3 pts.]

Problema 2. Para $x > 1$, determine la solución general de la EDO:

$$x^3 y''(x) + 2x^2 y'(x) - 12xy(x) = \frac{x^5}{x^2-1}.$$

Solución Dividiendo por x, obtenemos una EDO de Euler-Cauchy

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 12y(x) = \frac{x^4}{x^2-1}.$$

Proponiendo que las soluciones homogéneas sean de la forma $y(x) = x^r$, se obtiene que $r_1 = -4, r_2 = 3$, por lo que la solución homogénea viene dada por:

$$y_h(x) = Ax^{-4} + Bx^3.$$

Se propone que la solución particular sea de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)x^{-4} + c_2(x)x^3,$$

con $c_1(x), c_2(x)$ satisfaciendo el sistema (de la EDO normalizada):

$$\begin{array}{lclcl} c_1'(x)x^{-4} & + & c_2'(x)x^3 & = & 0 \\ c_1'(x)[-4x^{-5}] & + & c_2'(x)3x^2 & = & \dfrac{x^2}{x^2-1}, \end{array}$$

[10 pts.]

de donde

$$c_1'(x) = \frac{-x^7}{7(x^2-1)}, \qquad c_2'(x) = \frac{1}{7(x^2-1)}.$$

Y así, para la primera integral usamos el cambio de variable $u = x^2 - 1$, de donde:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{-1}{7}\int \frac{x^7 dx}{x^2-1} = \frac{-1}{14}\int \frac{x^6 2x dx}{x^2-1} \\ &= \frac{-1}{14}\int \frac{(u+1)^3 du}{u} \\ &= \frac{-1}{14}\int [u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u} du] \\ &= \frac{-1}{14}[\frac{(x^2-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(x^2-1)^2 + 3(x^2-1) + \ln(x^2-1)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{14}\int [\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}]dx \\ &= \frac{1}{14}\ln(\frac{x-1}{x+1}). \end{aligned}$$

6 pts.]

Y finalmente la solución de la EDO queda como:

$$y(x) = Ax^{-4} + Bx^3 + \frac{-1}{14}[\frac{(x^2-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(x^2-1)^2 + 3(x^2-1) + \ln(x^2-1)]x^{-4} + \frac{1}{14}\ln(\frac{x-1}{x+1})x^3, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

[4 pts.]

Problema 3. Resuelva el siguiente sistema lineal de EDO

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución:
El polinomio característico viene dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

De donde , haciendo $p(\lambda) = 0$ y factorizando, se tiene que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, y $\lambda_3 = 1$. **[5 pts.]**

Buscamos ahora los vectores propios asociados.

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Como todas las ecuaciones son iguales, sólo se tiene la condición $v_{11} - v_{12} - v_{13} = 0$, de donde el espacio propio asociado queda:

$$S_{\lambda_1} = S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

- Para $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Usando las ecuaciones 2 y 3 del sistema se obtiene que: $v_{21} + 0 - v_{23} = 0$ y $v_{21} - v_{22} + 0 = 0$, de donde $v_{21} = v_{22} = v_{23}$ y por lo tanto el espacio propio viene dado por:

$$S_{\lambda_3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

[10 pts.]

De esta forma la solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Finalmente usando la condición inicial, se obtiene que $C_1 = 2, C_2 = -1, C_3 = 0$.
Consecuentemente, la solución para el problema de valores iniciales es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

[5 pts.]