Análisis Numérico III
Problemas de valores de frontera de ecuaciones diferenciales ordinarias
Módulo 3, Presentación 6

Raimund Bürger

25 de abril de 2022

3.2. Introducción

En el caso escalar, se busca una solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} R_j(y) &= R_j\left[y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a); y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)\right] \\ &= \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $x = a$ y $x = b$ son puntos en $\mathbb{R}$ y $\alpha_j \in \mathbb{R}$. En general, es difícil obtener resultados acerca de la existencia y la unicidad de soluciones de estos problemas de valores de frontera.

3.2. Introducción

Esencialmente, existen sólo resultados para el problema lineal

$$
\begin{aligned}
(Ly)(x) &\equiv \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)} = g(x), \quad x \in (a,b), \quad f_n \not\equiv 0 \text{ sobre } (a,b), \\
R_j[y] &= \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(\alpha_{j,k+1} y^{(k)}(a) + \beta_{j,k+1} y^{(k)}(b) \bigr) = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

donde $\alpha_{j,k+1}$ y $\beta_{j,k+1}$ son constantes. Para $g \equiv 0$, la EDO se llama homogénea; para $\alpha_j \equiv 0$, las condiciones de frontera se llaman homogéneas. Si $g \equiv 0$ y $\alpha_j \equiv 0$, el problema de valores de frontera se llama homogéneo. En general, se supone que por lo menos $f_0, \ldots, f_n \in C^0(a,b)$.

3.2. Introducción

El problema de valores de frontera lineal de segundo orden es

$$\begin{aligned}(Ly)(x) \equiv f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = g(x),\\ R_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \beta_{11}y(b) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{12}y'(b) = \alpha_1,\\ R_2[y] = \alpha_{21}y(a) + \beta_{21}y(b) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{22}y'(b) = \alpha_2.\end{aligned}$$

En muchos casos,

$$\begin{aligned}R_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) = \alpha_1,\\ R_2[y] = \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \alpha_2.\end{aligned}$$

Generalmente, las condiciones de frontera se llaman separadas si

$$\begin{aligned}\beta_{j,k+1} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad m < n;\\ \alpha_{j,k+1} = 0, \quad j = m+1, \dots, n; \quad k = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

3.2. Introducción

Las condiciones de frontera se llaman linealmente independientes si el rango de la siguiente matriz es n:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

Frecuentemente, el PVF (3.3) puede ser reducido a un problema con condiciones homogéneas, donde $\alpha_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$. Esto sucede si existe un polinomio $Q \in \Pi_{n-1}$ tal que

$$R_j[Q] = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

En este caso definimos

$$z(x) := y(x) - Q(x), \quad f := LQ.$$

Según (3.3), obtenemos el PVF

$$\begin{aligned} (Lz)(x) &= (Ly - LQ)(x) = g(x) - f(x) = h(x), \\ R_j[z] &= R_j[y] - R_j[Q] = \alpha_j - \alpha_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

3.2. Introducción

3.1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias autoadjuntas Para un operador diferencial L dado por (3.3):

$$(Ly)(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} f_i(x)y^{(i)} = g(x), \quad x \in (a,b), \quad f_n \not\equiv 0 \text{ sobre } (a,b),$$

definimos el operador adjunto L^* a través de

$$L^* y \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} \big(f_j(x) y \big).$$

El operador se llama autoadjunto si

$$Ly \equiv L^* y, \quad y \in C^n(a,b). \tag{3.4}$$

Obviamente, un operador diferencial autoadjunto es de orden par. Una ecuación $Ly = g(x)$ con un operador diferencial L autoadjunto se llama ecuación autoadjunta.

3.2. Introducción

Para $n=2$, la condición (3.4) exige que

$$\begin{aligned} f_0 y + f_1 y' + f_2 y'' &\equiv f_0 y - (f_1 y)' + (f_2 y)'' \\ &\equiv f_0 y - f_1' y - f_1 y' + f_2'' y + 2 f_2' y' + f_2 y'' \end{aligned}$$

donde omitimos el argumento "(x)". Esto implica que

$$2(f_1 - f_2')y' - (f_2'' - f_1')y \equiv 0, \quad y \in C^2(a,b),$$

lo cual es válido si y sólo si

$$f_1(x) \equiv f_2'(x).$$

Usando $f_2(x) = -p(x)$ y $f_0(x) = q(x)$, podemos escribir una EDO de segundo orden autoadjunta como

$$Ly = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y = g. \tag{3.5}$$

((3.5) también es la ecuación de Euler del problema variacional

$$I[y] := \frac{1}{2}\int_a^b \bigl(p(x)(y')^2 + q(x)y^2 - 2g(x)y\bigr)\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \text{mín}\,.)$$

3.2. Introducción

Teorema 3.1 Cada ecuación lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} &f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y - h(x) = 0, \\ &f_2(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in (a,b) \end{aligned} \tag{3.6}$$

puede ser transformada a una ecuación autoadjunta de segundo orden.

Demostración Multiplicamos (3.6) por la función

$$-p(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} \mathrm{d}\xi\right), \quad x_0, x \in (a,b),$$

donde $x_0 \in (a,b)$ puede ser elegido libremente. El resultado es

$$-p(x)f_2(x)y'' - p(x)f_1(x)y' - p(x)f_0(x)y + p(x)h(x) = 0. \tag{3.7}$$

La función $p(x)$ satisface

$$-p(x)f_1(x) = -p(x)\frac{f_1(x)}{f_2(x)}f_2(x) = -p'(x)f_2(x).$$

3.2. Introducción

Demostración del Teorema 3.1 (continuación) Dividiendo (3.7) por $f_2(x)$ y definiendo

$$q(x) := -p(x)\frac{f_0(x)}{f_2(x)}, \quad g(x) := -p(x)\frac{h(x)}{f_2(x)},$$

obtenemos la ecucación autoadjunta

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y - g(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Para el tratamiento de PVFs de EDOs de segundo orden podríamos limitarnos a ecuaciones autoadjuntas. Pero, si la ecuación del problema dado no es autoadjunta, la reducción al tipo autoadjunto según la demostración del Teorema 3.1 frecuentemente entrega una ecuación bastante complicada. Por ello es más adecuado resolver el problema en la forma originalmente dada, siempre que existe un método adecuado.

3.2. Introducción

3.1.2 Problemas de valores de frontera para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden Podemos reducir PVFs de una EDO del orden n a sistemas de EDOs de primer orden.

Sea (3.1) viene dada en la forma explícita

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

y definimos

$$y^{(j)} =: y_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Entonces resulta el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \dots, y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{3.8}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} R_j[y_1, \dots, y_n] &= R_j\left[y_1(a), \dots, y_n(a); y_1(b), \dots, y_n(b)\right] \\ &= \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si (3.1), (3.2) es un PVF lineal, también (3.8), (3.9) es lineal.

3.2. Introducción

Problema de valores de frontera de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (forma general):

$$\begin{aligned} & y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \\ & R_j\big[y_1(a), \dots, y_n(a); y_1(b), \dots, y_n(b)\big] = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definimos

$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) := \begin{pmatrix} f_1(x, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{R} := \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir (3.10) como

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{R}\big[\boldsymbol{y}(a); \boldsymbol{y}(b)\big] = \boldsymbol{\alpha}. \tag{3.11}$$

El problema (3.11) se llama lineal si posee la siguiente forma, donde $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ son matrices:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x), \quad \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}(a) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{\alpha}.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

3.2.1 Método de diferencias finitas para un problema de valores de frontera lineal Consideremos el PVF

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y - g(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{3.12}$$

$$\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) = \alpha_1, \tag{3.13}$$

$$\beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \alpha_2. \tag{3.14}$$

Subdividimos el intervalo $[a,b]$ en N subintervalos del tamaño h poniendo

$$x_0 := a; \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N; \quad x_N = a + Nh = b.$$

En el punto x_i se aproxima la solución del problema de valores de frontera (3.12)–(3.14) reemplazando el cuociente diferencial por un cuociente de diferencias. Tal método se llama método de diferencias finitas.

3.3. Métodos de diferencias finitas

Si $y \in C^4$ es la solución de (3.12)–(3.14), entonces en $x = x_i$,

$$
\begin{aligned}
-\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} & \\
+q(x_i)y(x_i) - g(x_i) = \mathcal{O}(h^2), & \qquad (3.15)\\
\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}\frac{y(x_1) - y(a)}{h} = \alpha_1 + \mathcal{O}(h), & \\
\beta_{21}y(b) + \beta_{22}\frac{y(b) - y(x_{N-1})}{h} = \alpha_2 + \mathcal{O}(h). &
\end{aligned}
$$

Despreciando los términos $\mathcal{O}(h^2)$ y $\mathcal{O}(h)$ y reemplazando $y(x_i)$ por y_i^h, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
(-\alpha_{12} + h\alpha_{11})y_0^h + \alpha_{12}y_1^h = h\alpha_1, & \\
-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) y_{i-1}^h + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)y_i^h & \\
-\left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) y_{i+1}^h = h^2 g(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, & \\
-\beta_{22}y_{N-1}^h + (\beta_{22} + h\beta_{21})y_N^h = h\alpha_2. & \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Para un valor de h fijo y definiendo

$$\varphi_i := 1 + \frac{h}{2} p(x_i), \quad \psi_i := 2 + h^2 q(x_i), \quad \bar{\varphi}_i := 1 - \frac{h}{2} p(x_i)$$

para $i = 1, \dots, N-1$, podemos escribir (3.16) como el sistema

$$\boldsymbol{A}(h) \boldsymbol{y}^h = \boldsymbol{b}(h), \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{A}(h) = \begin{bmatrix} -\alpha_{12} + h\alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -\varphi_1 & \psi_1 & -\bar{\varphi}_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\varphi_{N-1} & \psi_{N-1} & -\bar{\varphi}_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & -\beta_{22} & \beta_{22} + h\beta_{21} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}^h := \begin{pmatrix} y_0^h \\ \vdots \\ y_N^h \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(h) := \begin{pmatrix} h\alpha_1 \\ h^2 g(x_1) \\ \vdots \\ h^2 g(x_{N-1}) \\ h\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Definición 3.1 Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama M-matriz si $\alpha_{ij} \leqslant 0$ para $i \neq j$ y $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe y $\boldsymbol{A}^{-1} \geqslant 0$. (ANII)

Teorema 3.3 Sea $\boldsymbol{A}$ estrictamente o irreduciblemente diagonaldominante con $\alpha_{ii} > 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\alpha_{ij} \leqslant 0$ para $i \neq j$ (es decir, $\boldsymbol{A}$ es una L-matriz). En este caso, $\boldsymbol{A}$ es una M-matriz.

Demostración AN II. ∎

Teorema 3.2 Bajo las siguientes condiciones existe una constante $h_0 > 0$ tal que el sistema (3.17) tiene una solución única $\boldsymbol{y}^h$:

1. $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{12} \leqslant 0$, $\beta_{21} > 0$ y $\beta_{22} \geqslant 0$,
2. $q(x) \geqslant 0$ y $h_0 |p(x)| < 2$ para $x \in [a, b]$.

Demostración del Teorema 3.2

1. Observamos primero que $\boldsymbol{A}(h)$ es una L-matriz.
2. Si $\alpha_{12} < 0$ y $\beta_{22} > 0$, entonces $\boldsymbol{A}(h)$ es irreduciblemente diagonaldominante, y por lo tanto una M-matriz.

3.3. Métodos de diferencias finitas

Demostración del Teorema 3.2 (continuación)

3. Por otro lado, consideremos el caso $\alpha_{12} = 0$ o $\beta_{22} = 0$. Si por ejemplo $\alpha_{12} = 0$, tenemos

$$y_0^h = \frac{\alpha_1}{\alpha_{11}} = y(a).$$

Si $\beta_{22} > 0$ en este caso, después de reemplazar $y_0^h = y(a)$, $0 < h \leqslant h_0$ el sistema (3.17) se reduce a un sistema de N ecuaciones en las incógnitas $\boldsymbol{y}^h = (y_1^h, \ldots, y_N^h)^{\mathrm{T}}$, cuya matriz nuevamente es una M-matriz. Si además $\beta_{22} = 0$,

$$y_N^h = \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} = y(b),$$

y obtenemos un sistema lineal de $N - 1$ ecuaciones para

$$\boldsymbol{y}^h = (y_1^h, \ldots, y_{N-1}^h)^{\mathrm{T}}$$

cuya matriz es una L-matriz irreduciblemente diagonaldominante, es decir, una M-matriz. ∎

3.3. Métodos de diferencias finitas

Para la solución del sistema lineal (3.17), podríamos utilizar el algoritmo de Gauss (o el algoritmo de Thomas). Sin embargo, para valores de N muy grandes, es decir, para h muy pequeño, este algoritmo es poco apropiado puesto que $\boldsymbol{A}(h)$ es casi singular. La mala condición de $\boldsymbol{A}(h)$ en este caso tendrá como consecuencia que el resultado será substancialmente falsificado por errores de redondeo.

Los métodos numéricos iterativos para sistemas lineales han sido desarrollados para el tratamiento de aquellas matrices que provienen de discretizaciones de problemas de ecuaciones diferenciales. La convergencia del método SOR fue demostrada para sistemas lineales con una M-matriz y un parámetro de relajación $0 < \omega \leqslant 1$.

La velocidad de convergencia también depende del número de condición de $\boldsymbol{A}(h)$. Por otro lado, es suficiente resolver el sistema (3.17) solamente aproximadamente, dado que ya se cometió un error al reemplazar la ecuación diferencial por su discretización, y la solución exacta de (3.17) es solamente una aproximación a la verdadera solución de la EDO.

3.3. Métodos de diferencias finitas

Para el caso $\alpha_{12} = \beta_{22} = 0$, podemos ilustrar que $\boldsymbol{A}(h)$ es casi singular. Como $h = (b-a)/N \approx 0$ si N es muy grande, la matriz $\boldsymbol{A}(h)$ aproxima

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Esta matriz tiene los valores propios

$$\lambda_j = 2\left[1 - \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right], \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Es decir, el valor propio mínimo, λ_1, satisface $\lambda_1 < 10^{-3}$ para $N = 100$ y $\lambda_1 < 10^{-5}$ para $N = 1000$, mientras que $\lambda_{N-1} \approx 4$.

Una matriz simétrica resulta para $p(x) \equiv 0$, $\alpha_{12} = -\beta_{22} = -1$ o $\alpha_{12} = \beta_{22} = 0$. En este caso, el PVF (3.12)–(3.14) asume la forma

$$\begin{aligned} & -y'' + q(x)y - g(x) = 0, \quad x \in (a,b), \\ & \alpha_{11}y(a) - y'(a) = \alpha_1, \quad \beta_{21}y(b) + y'(b) = \alpha_2 \\ \text{o alternativamente} \quad & \alpha_{11}y(a) = \alpha_1, \quad \beta_{21}y(b) = \alpha_2 \quad (\alpha_{11}, \beta_{21} \neq 0). \end{aligned}$$

Para una ecuación autoadjunta siempre podemos hallar una aproximación de diferencias tal que la matriz del sistema lineal que resulta no sólo es simétrica, sino que tambíen definida positiva.

3.3. Métodos de diferencias finitas

3.2.2 Método de diferencias finitas para un PVF no lineal Los métodos de diferencias finitas también pueden ser usados para la solución numérica de problemas no lineales. Ejemplo:

$$-y'' + f(x, y, y') = 0, \quad a < x < b; \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Se supone que la ecuación es no lineal, es decir, f es una función no lineal de y o de y'. Se supone además que f es diferenciable con respecto a y e y', y que $|f_{y'}| \leqslant M$. La discretización entrega el sistema no lineal

$$-\frac{1}{h^2}\left(y_{i-1}^h - 2y_i^h + y_{i+1}^h\right) + f\left(x_i^h, y_i^h, \frac{y_{i+1}^h - y_{i-1}^h}{2h}\right) = 0,$$
$$i = 1, \dots, N-1.$$

Multiplicando por h^2 y definiendo $\boldsymbol{y}^h = (y_1^h, \dots, y_{N-1}^h)^{\mathrm{T}}$, obtenemos

$$t_i(\boldsymbol{y}^h) := -y_{i-1}^h + 2y_i^h - y_{i+1}^h + h^2 f\left(x_i^h, y_i^h, \frac{y_{i+1}^h - y_{i-1}^h}{2h}\right) = 0,$$

$$i = 1, \dots, N-1.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Podemos escribir

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}^h) = 0, \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}^h) := \left(t_1(\boldsymbol{y}^h), \ldots, t_{N-1}(\boldsymbol{y}^h)\right)^{\mathrm{T}}.$$

La matriz funcional

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{z}) := \left(\frac{\partial t_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1,\ldots,N-1} (\boldsymbol{z})$$

puede ser evaluada facilmente: usando

$$f_y\left(x_i, z_i, \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h}\right) =: f_y^{(i)}, \quad f_{y'}\left(x_i, z_i, \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h}\right) =: f_{y'}^{(i)},$$

tenemos

$$\frac{\partial t_i}{\partial z_j} = 0, \quad j \notin \{i-1, i, i+1\},$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial z_{i-1}} = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}, \quad \frac{\partial t_i}{\partial z_i} = 2 + h^2 f_y^{(i)}, \quad \frac{\partial t_i}{\partial z_{i+1}} = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Además, tenemos $z_0 = \alpha$ y $z_N = \beta$ en (3.18). Definiendo

$$c_i := -1 - \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}, \quad d_i := 2 + h^2 f_y^{(i)}, \quad e_i := -1 + \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}$$

para $i = 1, \ldots, N-1$, podemos escribir

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{N-1} & d_{N-1} \end{bmatrix}.$$

El sistema $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}^h) = 0$ debe ser solucionado iterativamente, por ejemplo usando el método SOR-Newton.

3.3. Métodos de diferencias finitas

El método SOR-Newton es apto para resolver numéricamente el sistema no lineal

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{F} \in \bigl(C^2(\mathcal{B})\bigr)^n,$$

con la solución exacta $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{B}$. El método es definido por la recursión

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \omega \frac{f_i(\boldsymbol{x}^{(k),i})}{\partial_i f_i(\boldsymbol{x}^{(k),i})}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde definimos

$$\boldsymbol{x}^{(k),i} := \bigl(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\bigr)^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Teorema 3.4 Existe una vecindad $\mathcal{B}_0$ de $\boldsymbol{x}^*$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, tal que para todo $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathcal{B}_0$ el método SOR-Newton converge si

(a) $0 < \omega \leqslant 1$ y $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^*)$ es estrictamente o irreduciblemente diagonal dominante o

(b) $0 < \omega \leqslant 2$ y $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^*)$ es simétrica y definida positiva o

(c) $0 < \omega \leqslant 1$ y $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^*)$ es una M-matriz.

En nuestro caso, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5 Sea $f_y \geqslant 0$ y h tan pequeño que $hM < 2$. Entonces para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{z})$ es una matriz irreduciblemente diagonal dominante.

Demostración Como $|f_{y'}| \leqslant M$, tenemos

$$-1 + \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)} < 0, \quad -1 - \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)} < 0, \quad 2 + h^2 f_y^{(i)} \geqslant 2,$$

y luego

$$\left|1 + \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}\right| + \left|1 - \frac{h}{2} f_{y'}^{(i)}\right| = 2 \leqslant 2 + h^2 f_y^{(i)}, \quad i = 2, \ldots, N-2.$$

Demostración del Teorema 3.5 (continuación) Finalmente, tenemos

$$\left|1 + \frac{h}{2} f_{y'}^{(j)}\right| < 2 \leqslant 2 + h^2 f_y^{(j)}, \quad j \in \{1, N-1\}.$$

Concluimos que $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{z})$ es diagonal dominante para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{N-1}$, y la diagonaldominancia es estricta en la primera y la última fila. Además, la matriz es irreducible, lo que concluye la demostración. ■

3.2.3 Convergencia del método para problemas lineales Recordamos que un método se llama del orden p, $p > 0$, si

$$y_i^h - y(x) = \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0, \quad x = a + ih \in [a, b].$$

Consideremos ahora el PVF

$$-y'' + q(x)y - g(x) = 0, \quad a < x < b; \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{3.19}$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Suponiendo que la solución satisface $y \in C^4[a,b]$, tenemos (3.15) con $p(x) \equiv 0$, y para la computación de los valores aproximados obtenemos el sistema (3.17), en nuestro caso

$$\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{y}^h = \boldsymbol{b}(h)$$

con (donde $q_i = q(x_i)$)

$$\boldsymbol{A}(h) = \begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+h^2q_2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2+h^2q_{N-2} & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad (3.20)$$

$$\boldsymbol{b}(h) = \begin{pmatrix} \alpha + h^2 g(x_1) \\ h^2 g(x_2) \\ \vdots \\ h^2 g(x_{N-2}) \\ \beta + h^2 g(x_{N-1}) \end{pmatrix}. \qquad (3.21)$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Sean $y(x_i)$ los valores de la solución exacta de (3.19) en $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, con

$$y(x_0) = y(a) = \alpha, \quad y(x_N) = y(b) = \beta,$$
$$\boldsymbol{y}(h) = \bigl(y(x_1), \dots, y(x_{N-1})\bigr)^{\mathrm{T}}.$$

Entonces en virtud de (3.15),

$$\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{y}(h) = \boldsymbol{b}(h) + \mathcal{O}(h^4),$$

donde $\mathcal{O}(h^4)$ denota un vector de $\mathbb{R}^{N-1}$. Entonces,

$$\varepsilon_h := \boldsymbol{y}^h - \boldsymbol{y}(h)$$

satisface

$$\varepsilon_h = \boldsymbol{A}(h)^{-1}\mathcal{O}(h^4). \tag{3.22}$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Las componentes de $\mathcal{O}(h^4)$ son la cuarta derivada de la solución exacta y, evaluada en puntos intermedios y multiplicada por $h^4/12$. La cuarta derivada $y^{(4)}(x)$ es acotada con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ según hipótesis. Entonces, existe K tal que

$$\|\varepsilon_h\|_\infty \leqslant K \big\| \boldsymbol{A}(h)^{-1} \big\|_\infty h^4.$$

¿Cómo estimar $\|\boldsymbol{A}(h)^{-1}\|_\infty$? Sean $\boldsymbol{G} = (g_{ij})$ y $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$ dos matrices de $\mathbb{R}^{n\times m}$, con

$$g_{ij} \leqslant h_{ij} \quad \text{para todo } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y } 1 \leqslant j \leqslant m.$$

En este situación escribimos $\boldsymbol{G} \leqslant \boldsymbol{H}$. Si una matriz $\boldsymbol{B}$ tiene sólo elementos no negativos, entonces escribimos $\boldsymbol{B} \geqslant 0$, donde "0" representa la 0-matriz.

3.3. Métodos de diferencias finitas

Según (3.20),

$$\boldsymbol{A}(h) = \tilde{\boldsymbol{A}} + h\boldsymbol{Q}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}\bigl(q(x_1), \dots, q(x_{N-1})\bigr).$$

Teorema 3.6 Sean $q(x_i) \geqslant 0$ para $i = 1, \dots, N-1$. Entonces

$$\boldsymbol{A}(h)^{-1} \leqslant \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}. \tag{3.23}$$

Demostración

1. Como $q(x_i) \geqslant 0$, las matrices $\boldsymbol{A}(h)$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}$ son M-matrices irreduciblemente diagonaldominantes y simétricas. Entonces

$$\boldsymbol{A}(h)^{-1} \geqslant 0, \quad \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1} \geqslant 0. \tag{3.24}$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Demostración del Teorema 3.6 (continuación)

2. Ahora podemos escribir $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ con

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(2, \dots, 2), \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}.$$

Entonces

$$\boldsymbol{A}(h) = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U} + h^2 \boldsymbol{Q},$$

y poniendo

$$\bar{\boldsymbol{D}}(h) := \boldsymbol{D} + h^2 \boldsymbol{Q}$$

obtenemos

$$\boldsymbol{A}(h) = \bar{\boldsymbol{D}}(h) - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}.$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Demostración del Teorema 3.6 (continuación)

3. Además,

$$\boldsymbol{D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}),$$
$$\bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}\boldsymbol{A}(h) = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}).$$

Obviamente, $\boldsymbol{D} \leqslant \bar{\boldsymbol{D}}(h)$, $\boldsymbol{D}^{-1} \geqslant \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}$, y entonces

$$-\boldsymbol{D}^{-1} \leqslant -\bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}.$$

4. Usando (3.24), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{A}(h)^{-1}\boldsymbol{D}(h)\big)\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big)\\
&\leqslant \big(\boldsymbol{A}(h)^{-1}\bar{\boldsymbol{D}}(h)\big)\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big)\\
&= \big(\bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}\boldsymbol{A}(h)\big)^{-1}\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big)\\
&= \boldsymbol{I}\\
&= (\boldsymbol{D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}})^{-1}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big)\\
&\leqslant (\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{D})\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big).
\end{aligned}$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Demostración del Teorema 3.6 (continuación)

5. Como $\bar{\boldsymbol{D}}(h) > 0$ y $\boldsymbol{D} > 0$, podemos concluir que como

$$\boldsymbol{A}(h) = \bar{\boldsymbol{D}}(h) - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

   es una M-matriz, también

$$\boldsymbol{D} \cdot \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}\boldsymbol{A}(h) = \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\big)$$

   es una M-matriz, y por lo tanto

$$\Big(\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{D}}(h)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\big)\Big)^{-1} \geqslant 0.$$

6. Dado que $\tilde{\boldsymbol{A}}$ es una M-matriz, concluimos que (3.23) es válido. ■

3.3. Métodos de diferencias finitas

Teorema 3.7 Sea $y^{(4)} \in C[a,b]$ y $|y^{(4)}(x)| \leqslant M$ para $x \in [a,b]$. Entonces existe una constante $L \geqslant 0$ tal que

$$\left|y_i^h - y(x_i)\right| \leqslant Li(N-i)h^4 = L(x_i - a)(b - x_i)h^2.$$

Demostración

1. Sea $\boldsymbol{e} = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N-1}$ y para $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{N-1}$ escribimos

   $$|\boldsymbol{u}| := (|u_1|,\ldots,|u_{N-1}|)^{\mathrm{T}}.$$

   Entonces, debido a $\boldsymbol{A}^{-1}(h) \geqslant 0$, (3.22) y (3.23) implican que

   $$|\varepsilon_h| = \frac{h^4}{12} M\boldsymbol{A}(h)^{-1}\boldsymbol{e} \leqslant \frac{h^4}{12} M\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{e}. \tag{3.25}$$

2. Los valores de la solución aproximada coinciden con la solución exacta si la solución es un polinomio del grado 2. El problema

   $$-y'' = 1, \quad y(a) = y(b) = 0$$

   tiene la solución única

   $$y = -\tfrac{1}{2}(x-a)(x-b). \tag{3.26}$$

3.3. Métodos de diferencias finitas

Demostración del Teorema 3.7 (continuación)

3. Dado que $q(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 1$, $\alpha = \beta = 0$, según (3.20) y (3.21) obtenemos en este caso $\boldsymbol{A}(h) = \tilde{\boldsymbol{A}}$ y $\boldsymbol{b}(h) = h^2\boldsymbol{e}$.
4. Entonces, con

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(h) = \left(-\frac{1}{2}(x_1 - a)(x_1 - b), \dots, -\frac{1}{2}(x_{N-1} - a)(x_{N-1} - b)\right)^{\mathrm{T}}$$

tenemos

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y}^h = h^2\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{y}^h = h^2\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{y}}(h). \tag{3.27}$$

5. Usando (3.26), tenemos

$$y_i^h = y(x_i) = -\frac{1}{2}(x_i - x_0)(x_i - x_N) = \frac{1}{2}hi(N-i).$$

Con $L = M/24$ obtenemos de (3.25) y (3.27)

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_h| \leqslant \frac{1}{12}h^4 M \frac{1}{h^2}\tilde{\boldsymbol{y}}(h) = 2Lh^2\tilde{\boldsymbol{y}}(h)$$

$$\Rightarrow \quad \left|y_i^h - y(x_i)\right| \leqslant Li(N-i)h^4 = L(x_i - a)(b - x_i)h^2. \quad \blacksquare$$