Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 1 — miércoles 6 de mayo de 2015

Problema 1 (14 puntos)**.**

a) Calcular una descomposición triangular $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LR}$, con búsqueda de pivote en la matriz restante, de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Indicar explícitamente las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$.

b) Resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (8, -2, 8)^{\mathrm{T}}$.

c) Sean $\boldsymbol{e} := (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E} := \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$, y $\boldsymbol{d} := \alpha \boldsymbol{e}$. Decidir si los siguientes vectores son una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (i) para $\alpha = 0.1$, (ii) para $\alpha = 0.5$:

$$\boldsymbol{x}_1 := \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 := \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 (10 puntos)**.**

a) Se consideran las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{E}$ y los vectores $\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{d}$ dados por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 99 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Analizar si respecto al par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$, los siguientes vectores son una solución aproximada compatible con el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ en el sentido del criterio de Prager & Oettli:

$$\boldsymbol{x}_1 := (1.2, 10.1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_2 := (1, 10.2)^{\mathrm{T}}.$$

b) Supongamos que un sistema $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{c}$ posee una solución única $\boldsymbol{y}^*$. Sean $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ vectores tales que

$$\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}^*\|_2 < \|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}^*\|_2, \tag{2}$$

es decir $\boldsymbol{y}_2$ está más lejos de $\boldsymbol{y}^*$ que $\boldsymbol{y}_1$. Supongamos, además, que $\boldsymbol{y}_2$ es una solución aproximada compatible con $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{c}$ para algun par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$. ¿Se puede concluir que en virtud de (2), igualmente $\boldsymbol{y}_1$ será una solución aproximada compatible con $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{c}$ para el mismo par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$? Fundamente su respuesta (demostración o contraejemplo).

Problema 3 (10 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es invertible sin calcular $\det \boldsymbol{A}$.

b) Determinar una cota superior para $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})$ en una norma $\|\cdot\|$ apropiada *sin* invertir $\boldsymbol{A}$ o calcular $\det \boldsymbol{A}$.

c) Además consideramos

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.8 \\ 4.7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 5.1 & -2.1 & 1.05 \\ 2.1 & 3.9 & 2.05 \\ 0.05 & 1 & 3.1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sean la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Determinar una cota superior (la mejor posible) para $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ sin calcular $\boldsymbol{x}$ o $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Problema 4 (14 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que el método de Jacobi converge a la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y vectores iniciales $\boldsymbol{x}_{i,0} \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios. Aviso: utilizar que si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{D}$ es la diagonal de $\boldsymbol{A}$, entonces este método está dado por la fórmula de iteración

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}).$$

Acotar $r_\sigma(\boldsymbol{B})$.

b) Utilizando el vector inicial $\boldsymbol{x}_{i,0} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, calcular una nueva aproximación de la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = (10,-3,7)^{\mathrm{T}}$, utilizando los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, y SOR con $\omega = 1.5$.

c) Determinar la matriz $\boldsymbol{L}$ triangular inferior de la descomposición de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$. Utilizando la descomposición de Cholesky determinar la solución exacta de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Indicar todos los pasos intermedios.

Problema 5 (12 puntos)**.** Resolver el problema de aproximación

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0^*\varphi_0(t_i) + \alpha_1^*\varphi_1(t_i) + \alpha_2^*\varphi_2 t_i)\bigr)^2 = \min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0\varphi_0(t_i) + \alpha_1\varphi_1(t_i) + \alpha_2\varphi_2 t_i)\bigr)^2$$

para los datos

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
y_i	2	-1	1	3

para $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$, transformando la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.