UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Pauta Evaluación Parcial 2, año 2005

Pregunta 1 (20 puntos)
Un cuerpo de 1 Kg se sujeta al extremo inferior de un resorte suspendido de un techo. Como consecuencia el resorte se estira 0.6125 m para llegar a la posición de equilibrio. Debido a la viscosidad del medio ambiente, al movimiento del cuerpo se le opone una fuerza cuya magnitud es directamente proporcional al valor de la velocidad del cuerpo (constante de proporcionalidad igual a 8 $s\ N/m$). Durante el primer segundo después de alcanzado el equilibrio, sobre el cuerpo actúa una fuerza externa igual a

$$e^{-4t}\left(\sqrt{1-t^2}+16\cos(4t)\right)\ Newton,$$

donde t son los segundos transcurridos desde que el cuerpo estuvo en equilibrio. Describa la posición del cuerpo durante el primer segundo después de alcanzado el equilibrio.

Sugerencias: Considere que la aceleración producida por la acción de la fuerza de gravedad sobre una masa de 1 Kg es de 9.8 m/s^2. No utilize el método de la transformada de Laplace.

Solución.
Consideremos el sistema coordenado que tiene su origen en el centro de masa del cuerpo cuando el cuerpo se encuentra en su posición de equilibrio. Sea $X(t)$ la posición del cuerpo a los t segundos. Como el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo, $X(0)=0$ y $X'(0)=0$.

(2.0 pts por el planteamiento correcto de las dos condiciones iniciales)

En la posición de equilibrio la suma de la fuerza de gravedad con la fuerza restauradora del resorte es igual a 0. Entonces, usando la ley de Hooke obtenemos que

$$mg-kl=0,$$

donde $m=1\ Kg$, $g=9.8\ m/s^2$, $l=0.6125m$ y k es la constante de rigidez del resorte. Luego $k=9.8/0.6125=16$.

(2.0 pts)

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$mX''(t)=-kX(t)-8X'(t)+e^{-4t}\left(\sqrt{1-t^2}+16\cos(4t)\right).$$

Lo que implica que

$$X''(t) + 8X'(t) + 16X(t) = e^{-4t}\left(\sqrt{1-t^2} + 16\cos(4t)\right). \tag{1}$$

(4.0 pts)

Primeramente buscaremos la solución general de

$$X_h''(t) + 8X_h'(t) + 16X_h(t) = 0. \tag{2}$$

El polinomio característico asociado (2) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2.$$

De donde concluimos que $\varphi(t) = e^{-4t}$ y $\phi(t) = te^{-4t}$ forman un sistema fundamental de soluciones de (2). Entonces,

$$X_h(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t},$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(2.0 pts)

Para encontrar una solución particular de (1) emplearemos el principio de superposición. Empleando el método de variación de la constante (parámetros), buscamos una solución particular de

$$X_1''(t) + 8X_1'(t) + 16X_1(t) = e^{-4t}\sqrt{1-t^2}$$

con la forma $X_1(t) = c_1(t)e^{-4t} + c_2(t)te^{-4t}$. Luego,

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^{-4t} + c_2'(t)te^{-4t} &= 0 \\ -4c_1'(t)e^{-4t} + c_2'(t)\left(e^{-4t} - 4te^{-4t}\right) &= e^{-4t}\sqrt{1-t^2}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer tenemos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} \\ -4e^{-4t} & e^{-4t} - 4te^{-4t} \end{vmatrix} = e^{-8t},$$

$$c_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^{-4t} \\ e^{-4t}\sqrt{1-t^2} & e^{-4t} - 4te^{-4t} \end{vmatrix} / \Delta = -t\sqrt{1-t^2}$$

y

$$c_2'(t) = \begin{vmatrix} e^{-4t} & 0 \\ -4e^{-4t} & e^{-4t}\sqrt{1-t^2} \end{vmatrix} / \Delta = \sqrt{1-t^2}.$$

Por lo tanto,

$$c_1(t) = \int -t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2}.$$

donde $u = 1 - t^2$. Entonces, $c_1(t) = \frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{3/2}$. Además,

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \cos^2(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2\theta))\,d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4}, \end{aligned}$$

donde $t = sen\,(\theta)$. De donde concluimos que,

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \frac{arcsen\,(t)}{2} + \frac{t\cos(\theta)}{2} \\ &= \frac{arcsen\,(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_1(t) = \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} e^{-4t} + \left(\frac{arcsen(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}\right) te^{-4t}$.
Ahora, buscaremos una solución particular de

$$X_2''(t) + 8X_2'(t) + 16X_2(t) = 16e^{-4t}\cos(4t) \tag{3}$$

usando el método de coeficientes indeterminados. Ya que $-4+4i$ no es raíz de p, buscamos X_2 en la forma

$$X_2(t) = e^{-4t}(a\cos(4t) + bsen\,(4t)).$$

Sustituyendo las derivadas de X_2 en (3) se llega a que

$$e^{-4t}(-a\cos(4t) - bsen\,(4t)) = e^{-4t}\cos(4t).$$

Lo que implica $a = -1$ y $b = 0$. Por lo tanto,

$$X_2(t) = -e^{-4t}\cos(4t).$$

De aquí se concluye que la solución general de (1) es

$$X(t) = X_h(t) + X_1(t) + X_2(t),$$

o sea

$$X(t) = e^{-4t}\left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} + \frac{tarcsen\,(t)}{2} + \frac{t^2\sqrt{1-t^2}}{2} - \cos(4t)\right).$$

(8.0 pts)

Nota: También, podemos encontrar una solución particular de (1) utilizando únicamente el método de variación de la constante.

De la condición inicial $X(0) = 0$, tenemos que $c_1 + \frac{1}{3} - 1 = 0$. Luego $c_1 = 2/3$. Ya que $X'(0) = 0$,

$$-4\left(c_1 + \frac{1}{3} - 1\right) + c_2 + \frac{\pi}{4} = 0.$$

Por lo tanto, $c_2 = -\frac{\pi}{4}$. Entonces,

$$X(t) = e^{-4t}\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}t + \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} + \frac{tarcsen\,(t)}{2} + \frac{t^2\sqrt{1-t^2}}{2} - \cos(4t)\right).$$

(2.0 pts)

Pregunta 2 (20 puntos)

a) (**17 pts.**) Encuentre explícitamente la función $x(t)$ solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 6y(t) \\ y''(t) = x(t) - y(t) + \delta(t-1) \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

b) (**3 pts.**) ¿ Cuál es el valor de $y(t)$ en el intervalo $t \in (0,1)$? Justifique su respuesta.

Sugerencia: En el inciso b) no es necesario encontrar una expresión general para $y(t)$.

Solución.

a) Aplicamos Transformada de Laplace sobre el sistema :

$$\begin{array}{rcrcl} (s-2)X(s) & + & 6Y(s) & = & 0 \\ -X(s) & + & (s^2+1)Y(s) & = & e^{-s} \end{array}$$

(2.0 pts, por planteamiento correcto del Sistema de ecuaciones algebraico después de aplicar Laplace)

con lo cual

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ e^{-s} & s^2+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 6 \\ -1 & s^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{-6e^{-s}}{s^3-2s^2+s+4} = \frac{-6e^{-s}}{(s+1)(s^2-3s+4)}.$$

(2.0 pts, por expresión para $X(s)$) ;
(2.0 pts, por factorización de $(s+1)$).

Ahora bien, descomponiendo en fracciones parciales

$$\frac{-6}{(s+1)(s^2-3s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B(s-\frac{3}{2})}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} + \frac{C}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

(2.0 pts, por planteamiento correcto de la expresión en fracciones parciales)

con $A = \dfrac{-6}{(-1)^2-3(-1)+4} = -\dfrac{3}{4}$ y B y C solución de

$$-6 = -\frac{3}{4}(s^2-3s+4) + B(s-\frac{3}{2})(s+1) + C(s+1),$$

es decir, igualando los términos en s^2 se tiene $0 = -\dfrac{3}{4} + B$ con lo cual $B = \dfrac{3}{4}$, e igualando los términos en s se tiene $0 = -\dfrac{3}{4}(-3) + \dfrac{3}{4}(-\dfrac{3}{2}+1) + C$, con lo cual $C = -\dfrac{15}{8}$.

(2.0 pts, por A) ;
(2.0 pts, por B y C).

Es decir

$$X(s) = e^{-s}\left(\frac{-3/4}{s+1} + \frac{3}{4}\frac{s-\frac{3}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} - \frac{15}{4\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}/2}{(s-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}\right).$$

(1.0 pt, por deducción de $X(s)$)

Aplicando ahora la antitransformada de Laplace se obtiene

$$x(t) = \left(-\frac{3}{4}e^{-(t-1)} + \frac{3}{4}e^{\frac{3}{2}(t-1)}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}(t-1)\right) - \frac{15}{4\sqrt{7}}e^{\frac{3}{2}(t-1)}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}(t-1)\right)\right)H(t-1)$$

(1.0 pt, por $U_1(t) = H_1(t) = H(t-1)$) ;
(1.0 pt, por el término exponencial) ;
(1.0 pt, por el término coseno) ;
(1.0 pt, por el término seno).

que simplificando y considerando la definición de función de Heaviside

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ -\frac{3}{4}e^{1-t} + 3\sqrt{\frac{2}{7}}e^{\frac{3}{2}(t-1)}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \varphi\right) & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

donde $\varphi = \arctan(\frac{5}{\sqrt{7}}) - \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(Esta simplificación de la sol. no tiene puntaje extra).

NOTA. Solo se pedía calcular $x(t)$. Quienes calcularon $y(t)$ en lugar de $x(t)$ tiene un puntaje análogo a lo que se pidió, pero no hay puntaje adicional por calcular ambos ($x(t)$ e $y(t)$), a menos que el cálculo adicional "correcto" de $y(t)$ sirva para la respuesta correcta de (b) ($y(t) = 0$ si $0 < t < 1$) en cuyo caso el puntaje se asocia a (b).

b) La función impulso es distinta de la función nula solo en $t = 1$, con lo cual en el intervalo $(0, 1)$, el sistema es equivalente a un sistema de EDO homogeneo con condiciones iniciales iguales a cero, y cuya solución es $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Luego $y(t)$ vale 0 en el intervalo $(0, 1)$.

(3 pts. por respuesta correcta y justificación correcta).

Pregunta 3 (20 puntos)

Usando el método de valores y vectores propios, encuentre la solución general del siguiente sistema,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -2x - 5y - 4z \end{cases}$$

Solución.

La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X' = A\,X$, siendo

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Encontrando una base del espacio solución: para esto necesitamos conocer los valores propios de A, los cuales son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$, es decir, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle \{(1, -2, 4)^T\} \rangle\,, \quad S_{\lambda_2} = \langle \{(1, -1, 1)^T\} \rangle\,.$$

Así tenemos $X_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $X_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hallando $\boxed{X_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(u_1 + u_0\,t)}$, siendo $u_0\,, u_1 \in \mathbf{R}^3$ a determinar.
Para esto, primero caracterizamos el espacio rango de $A - I$, el cual viene dado por

$$ER(A-I) := \{B = (a, b, c)^T \quad | \quad r(A-I|B) = r(A-I)\} = \{(a, b, c)^T \quad | \quad 2a+3b+c = 0\}$$

Luego, $u_0 \in ER(A - I)$ y $u_1 \notin ER(A - I)$ se buscan (y escogemos una de las soluciones admisibles) tales que satisfagan:

$$(A - I)\,u_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_0 = (1, -1, 1)^T$$

$$(A - I)\,u_1 = u_0 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = (2, -1, 0)^T\,.$$

De esta manera, se tiene $X_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2+t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}$, con lo que la solución general del sistema homogéneo es

$$X(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2+t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}\,,$$

siendo C_1, C_2 y C_3 constantes reales arbitarias.