Integración Numérica I

Reglas de integración numérica:

1. Regla del Punto Medio.
2. Regla de los Trapecios.
3. Regla de Simpson.

Para aproximar una integral de la forma

$$\int_a^b f(x)dx,$$

puede aproximarse el integrando por el polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos x_0, ..., x_n e integrar el polinomio de interpolación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)\,dx := I_n(f)$$

Luego, el valor aproximado de la integral, $I_n(f)$, se calcula explícitamente. Si se usa la fórmula de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

para calcular explícitamente $I_n(f)$, se tiene

$$I_n(f) = \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \ell_i(x)\,dx \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

El error de la integración numérica,

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx,$$

puede estimarse a partir de la expresión del error de interpolación:

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

para algún $\xi_x \in (a,b)$.
Así,

$$R_n(f) = \int_a^b E(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)\,dx.$$

Regla del punto medio elemental: $n = 0$ y $x_0 = (a + b)/2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: I_0(f)$$

El **error de integración**, denotado por $R_0(f)$, se define como:

$$R_0(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_0(f).$$

Si $f \in C^2([a,b])$, se puede demostrar que el error de integración está acotado por:

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3, \tag{1}$$

donde $M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Regla del punto medio compuesta

El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \ldots, n \qquad \text{con} \qquad h := (b-a)/n.$$

La regla del punto medio compuesta se obtiene aplicando la regla del punto medio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) =: I_M(f).$$

Cuando $f \in C^2([a, b])$, para el error

$$R_M(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_M(f)$$

se tiene:

$$|R_M(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2 \qquad \text{con} \qquad M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Como consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que uno.

Regla del trapecio elemental: $n = 1$ con $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) =: I_1(f)$$

El **error de integración**, denotado por $R_1(f)$, se define como:

$$R_0(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_1(f).$$

Si $f \in C^2([a,b])$, se puede demostrar que el error de integración está acotado por:

$$|R_1(f)| \le \frac{M_2}{12}(b-a)^3,$$

donde recordemos que $M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Regla de trapecios (compuesta)

El intervalo $[a,b]$ se divide en n subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad \text{con} \qquad h := \frac{b-a}{n}.$$

La regla de trapecios compuesta se obtiene aplicando la del trapecio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}\Big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big) =: I_T(f)$$

Si $f \in C^2([a,b])$, para el error de integración

$$R_T(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_T(f)$$

se tiene

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2, .$$

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual a uno.

Regla de Simpson elemental: $n = 2$, con $(a, f(a)$, $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ y $(b, f(b))$, con $\tilde{x} = (a+b)/2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) =: I_2(f)$$

Si $f \in C^4([a,b])$, el error de integración

$$R_2(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_2(f) =,$$

satisface

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right),$$

donde $M_4 := \max_{x\in[a,b]} |f^{(iv)}(x)|$.

Regla de Simpson compuesta

El intervalo $[a, b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \quad i = 0, \dots, 2n, \qquad \text{con} \qquad h := \frac{b-a}{2n}.$$

La **regla de Simpson compuesta** se obtiene aplicando la regla de Simpson elemental en cada subintervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2h}{6} \Big(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \Big) =: I_S(f) \end{aligned}$$

Si $f \in C^4([a, b])$, el error de esta

$$R_S(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_S(f)$$

satisface $|R_S(f)| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$.

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que tres.

Observaciones.

- Es costumbre referirse a las reglas compuestas

1. $I_M(f) := h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$
2. $I_T(f) := \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\Big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big)$
3. $I(f) := \dfrac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right]$

simplemente como **regla del punto medio**, **regla de trapecios** y **regla de Simpson**.

- Existen versiones de las Reglas para **nodos no equiespaciados**.

- Se dice que una regla es de **orden h^p**, y se escribe $\mathcal{O}(h^p)$, cuando el error satisface $|R(f)| \leq Ch^p$, para alguna constantante $C > 0$ independiente de h.

Así, las reglas del punto medio y de los trapecios son $\mathcal{O}(h^2)$, mientras que la regla de Simpson es $\mathcal{O}(h^4)$.