UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Listado 5

1. Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica cuyos valores propios son todos no negativos. Muestre que existe $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = BB$.

2. Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que todos sus valores propios son distintos, y $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre el espacio propio de A asociado a λ_i. Sea además $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica que conmuta con A, es decir, $AB = BA$.

   a) Pruebe que para todo $v_i \in \operatorname{Im} P_i$ se verifica que $Bv_i = \alpha_i v_i$.

   b) Deduzca que $B = \sum \alpha_i P_i$.

3. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^k(v) = \theta$, pero $T^{k-1}(v) \neq \theta$ donde $v \in V$ es dado y $k \in \mathbb{N}$. Pruebe que:

   a) El conjunto $B = \{v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ es l.i.

   b) $W = \langle B \rangle$ es invariante para T.

   c) $T|_W$ es nilpotente de índice k, i.e. $(T|_W)^k = \theta$.

   d) La matriz respresentante de $T|_W$ con respecto a B es:

$$[T|_W]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

4. Sea V un e.v. real de dimensión n y $T : V \to V$ una aplicación lineal simétrica. Pruebe que si no existe W, s.e.v no trivial de V (i.e. $W \neq V$ y $W \neq \{\theta\}$), invariante para T, entonces T tiene sólo un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T = \lambda I_n$.

5. *a*) Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean invariantes para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$.

   b) Sea $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la rotación en ángulo θ, donde la matriz representante de esta transformación lineal en la base canónica es:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Demuestre que $\forall \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, A_θ no es diagonalizable. Encuentre todos los subespacios invariantes de T_θ.

6. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, 0)$.

   a) Para todo $i = 1, \ldots, n$ hallar un subespacio T-invariate de dimensión i.

   b) Demuestre que no existen S y T subespacios propios de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = S \oplus T$.

7. Sea

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   una caja de Jordan de dimensión $k \times k$.

   a) Muestre que λ es valor propio de $J_k(\lambda)$ y $dim(S_\lambda) = 1$.

   b) Pruebe que $\forall j = 1, \ldots, k-1$, $dim(Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j) = j$ y $\forall j \geq k$, $dim(Ker(J_k(\lambda) - \lambda I_k)^j) = k$.

8. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ con base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal, tal que su matriz representante con respecto a B es:

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine los valores y vectores propios de T ¿Es T diagonalizable?

   b) Determine una base de $Ker(T - I_n)^j$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica con $\lambda \in \mathbb{R}$ su único valor propio.

   a) Pruebe que $Ker(A - \lambda I_n)^2 = Ker(A - \lambda I_n)$.

   b) Muestre que $A = \lambda I_n$ y encuentre A si $tr(A) = 2n$.

10. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $(A - \lambda I_n)^n v = \theta$ y $(A - \lambda I_n)^{n-1} v \neq \theta$, donde $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \theta$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Pruebe que $B = \{(A - \lambda I_n)^{n-1} v, (A - \lambda I_n)^{n-2} v, \ldots, (A - \lambda I_n) v, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Muestre que λ es valor propio de A y $dim(S_\lambda) = 1$.