Cálculo III – 525211
Cápsula 01: El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$, el espacio vectorial

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$$

se denomina *Espacio Euclideo* $\mathbb{R}^n$.

<u>Observación:</u> $\mathbb{R}^n$ verifica las condiciones necesarias de un espacio vectorial. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

1. Cerrado para la suma:
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$
2. Cerrado para multiplicaciones escalares:
$$\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

El espacio $\mathbb{R}^n$ puede ser dotado con el siguiente producto interior: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \\ &= x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n\,,\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$. **Ejercicio:** mostrar que es producto interior.

Definición

La función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

define a la *norma euclídea* de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio: mostrar que es una norma.

- Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{N}$, definimos
$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(x_1^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \,.$$
- Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos además
$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Ejercicio: mostrar que son normas para $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sean $\|\cdot\|_\star$ y $\|\cdot\|_\heartsuit$ normas sobre $\mathbb{R}^n$, si existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que
$$C_1 \, \|\mathbf{x}\|_\star \leq \|\mathbf{x}\|_\heartsuit \leq C_2 \|\mathbf{x}\|_\star \,, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
decimos que tales normas son *equivalentes*.

Proposición

Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Demostración: **Ejercicio**.

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|, \, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,.$$

Demostración: Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $p(t) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,t\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + t^2 \, \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}\|^2$. Estudiar los ceros del polinomio p para demostrar la afirmación. (**Ejercicio**) .

Finalmente, notamos $\mathbb{R}^n$ puede ser dotado de la métrica $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

así, $\mathbb{R}^n$ puede ser visto como un espacio métrico. **Ejercicio:** mostrar que la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una métrica. A continuación introduciremos conceptos *topológicos* a partir de estas propiedades métricas

Definición

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, el conjunto

$$B_r(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

define una *bola abierta de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* r.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que A es un conjunto *abierto* si para todo $\mathbf{x} \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$. Si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es un conjunto abierto diremos que A es un conjunto *cerrado* .

Proposición

Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$, considere $B_R(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$, note que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < R$ y defina $r = \frac{1}{2}(R - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$, luego se tiene $B_r(\mathbf{x}) \subseteq B_R(\mathbf{x}_0)$, en efecto, sea $\mathbf{z} \in B_r(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| &\leq \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &< R - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = R.\end{aligned}$$

$\square$

Definición

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, el conjunto

$$\overline{B_r}(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$$

define una *bola cerrada de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* r.

Proposición

Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

<u>Demostración:</u> Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$, considere $\overline{B_r}(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r}(\mathbf{x}_0)$, note que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > R$ y defina $r = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - R)$, análogamente a la demostración anterior se concluye que $B_r(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r}(\mathbf{x}_0)$, luego $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r}(\mathbf{x}_0)$ es abierto y $\overline{B_r}(\mathbf{x}_0)$ cerrado.

Definción

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}_0 \in A$, si existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq A$ entonces diremos que $\mathbf{x}_0$ es un *punto interior* de A, además definimos el *interior* de A como

$$int(A) = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{x} \text{ es un punto interior de } A\}$$

Ejercicio: Demostrar que $Int(A)$ es el *mayor* conjunto abierto contenido por A.

Defınción

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, si para todo $r > 0$ se satisface $(B_r(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$, entonces diremos que $\mathbf{x}_0$ es un *punto de acumulación* de A y denotamos

$$A' = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \mathbf{x} \text{ es un punto de} \\ \text{acumulación de } A \end{array} \right\}$$

adicionalmente definimos la *clausura* de A como $\overline{A} = A \cup A'$ y la *frontera* de A como $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$.

Ejercicio: Demostrar que $\overline{A}$ es el *menor* conjunto cerrado que contiene a A.

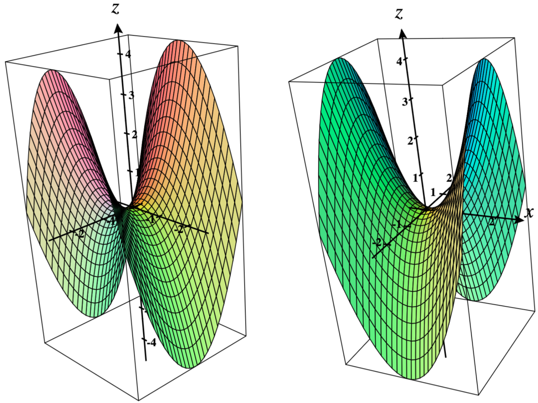
Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es un conjunto *acotado* si existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B_R(\mathbf{0})$

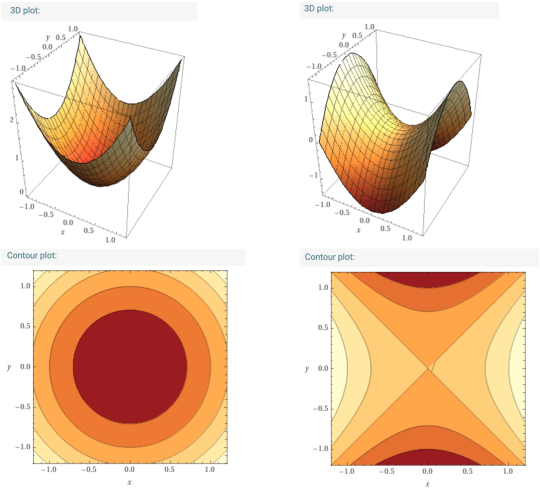
Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es un conjunto *compacto* si A es cerrado y acotado.

<u>Observación:</u> La defınción anterior de compacidad sólo es válida para el espacio euclideo, en dimensión infinita un conjunto compacto es cerrado y acotado pero esta NO es un condición suficiente para asegurar compacidad.



CalcPlot3D



WolframAlpha 3D plot