

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

RODOLFO ARAYA

RESUMEN. En este apunte, tomado de [1], introducimos las nociones básicas de interpolación en las que se basa el método de elementos finitos.

1. DEFINICIONES BÁSICAS

Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , conexo y de interior no vacío. Sea $\Sigma = \{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$ un conjunto finito de N puntos distintos de K . Sea \mathcal{P} un espacio vectorial de dimensión finita compuesto por funciones de K en \mathbb{R} .

Definición:

1. Diremos que el conjunto Σ es \mathcal{P} -*unisolvente* si y solo si, dados N escalares reales arbitrarios $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, existe una única función $p \in \mathcal{P}$ tal que

$$p(\mathbf{a}_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

2. Si Σ es \mathcal{P} -unisolvente, entonces la terna (K, \mathcal{P}, Σ) se denomina *elemento finito de Lagrange*.

Observación:

- (a) Si (K, \mathcal{P}, Σ) es un elemento finito de Lagrange, entonces existe, para cada entero $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, una única función $p_i \in \mathcal{P}$ tal que

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

- (b) Si $v : K \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe una única función $p \in \mathcal{P}$ que *interpola* a v en Σ , es decir

$$p(\mathbf{a}_j) = v(\mathbf{a}_j), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Definición:

1. Sea (K, \mathcal{P}, Σ) un elemento finito de Lagrange. Llamaremos *funciones de base* a las N funciones $p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathcal{P}$ tales que

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

2. Denominaremos *operador de \mathcal{P} -interpolación de Lagrange sobre Σ* , al operador que a cada función $v : K \rightarrow \mathbb{R}$ le asocia la función $\Pi v \in \mathcal{P}$ tal que

$$\Pi v := \sum_{i=1}^N v(\mathbf{a}_i) p_i.$$

Observación:

- (a) Es evidente que

$$(\Pi v)(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^N v(\mathbf{a}_i) p_i(\mathbf{a}_j) = v(\mathbf{a}_j), \quad 1 \leq j \leq N.$$

- (b) las funciones de base p_i también son denominadas *funciones de forma (shape functions)*.

Lema 1. Si el conjunto Σ es \mathcal{P} -unisolviente entonces $\dim(\mathcal{P}) = \text{card}(\Sigma) = N$.

Usando este lema se puede demostrar que Σ es \mathcal{P} -unisolviente si la única función de \mathcal{P} que se anula en todos los puntos de Σ es la función nula (*¿por qué?*).

Sea \hat{K} un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , conexo, de interior no vacío. Sea $F : \hat{K} \rightarrow K$ una biyección.

Teorema 2. Si $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$ es un elemento finito de Lagrange, entonces (K, \mathcal{P}, Σ) , con $K = F(\hat{K})$, $\mathcal{P} = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} : p \circ F \in \hat{\mathcal{P}}\}$, $\Sigma = F(\hat{\Sigma})$, también es un elemento finito de Lagrange.

Demostración. Como F es biyectiva tenemos que $\text{card}(\Sigma) = \text{card}(\hat{\Sigma}) = \dim(\hat{\mathcal{P}}) = \dim(\mathcal{P})$. \square

Definición:

1. Dos elementos finitos de Lagrange $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$ y (K, \mathcal{P}, Σ) se dicen *equivalentes* si existe una función $F : \hat{K} \rightarrow K$ biyectiva tal que

$$\begin{aligned} K &= F(\hat{K}) \\ \mathcal{P} &= \{p : K \rightarrow \mathbb{R} : p \circ F \in \hat{\mathcal{P}}\} \\ \Sigma &= F(\hat{\Sigma}). \end{aligned}$$

2. Si F además de ser biyectiva es afín, entonces los elementos se dicen *afín equivalentes*.

Teorema 3. Sean $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$ y (K, \mathcal{P}, Σ) dos elementos finitos de Lagrange equivalentes a través de una biyección $F : \hat{K} \rightarrow K$. Si $\hat{\Pi}$ es el operador de $\hat{\mathcal{P}}$ -interpolación sobre $\hat{\Sigma}$, el operador Π de \mathcal{P} -interpolación sobre Σ está caracterizado por

$$(\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F),$$

para toda función v definida sobre K .

Observación: Sean $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$ y (K, \mathcal{P}, Σ) son dos elementos finitos de Lagrange equivalentes a través de una biyección $F : \hat{K} \rightarrow K$. A todo punto $\hat{x} \in \hat{K}$ le asociamos un punto $x \in K$ definido por $x = F(\hat{x})$. A toda función $\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$ le asociamos la función $v : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $v = \hat{v} \circ F$. Esto nos permite escribir $\hat{\Pi}v = \hat{\Pi}\hat{v}$.

2. ELEMENTOS FINITOS SIMPLICIALES

Definición: Sean $\mathbf{a}_j = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, $n+1$ puntos de \mathbb{R}^n que no pertenecen a un mismo hiperplano de \mathbb{R}^n , es decir tales que la matriz

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

es invertible. Sea

$$K := \text{conv} \{\mathbf{a}_j : 1 \leq j \leq n+1\} \quad (\text{ cápsula convexa}).$$

K se denomina *n-simplex de nodos \mathbf{a}_j* , $1 \leq j \leq n+1$.

Observación: Si $n = 2$ entonces $K = \text{conv} \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ es un triángulo de vértices \mathbf{a}_j . Si $n = 3$ entonces $K = \text{conv} \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ es un tetraedro de vértices \mathbf{a}_j .

Definición: Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Entonces existen únicos $n+1$ escalares $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq n+1$, solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \lambda_j = x_i, & 1 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

el cual puede ser escrito como

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{x}},$$

donde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})^T$ y $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)^T$. Los escalares λ_j se denominan las *coordenadas baricéntricas de \mathbf{x} con respecto a los $n+1$ puntos \mathbf{a}_j* , $1 \leq j \leq n+1$. Las funciones $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \rightarrow \lambda_j(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq n+1$ se denominan *funciones coordenadas baricéntricas con respecto a los puntos \mathbf{a}_j* .

Observación: **Hacer las demostraciones!!**

- (a) Es claro, usando el sistema lineal, que las funciones λ_j son afines, es decir son polinomios de grado total menor o igual a 1.
- (b) Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j.$$

- (c) $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \lambda_j(\mathbf{x}) \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n+1\}$.

Definición: Sea k un entero no negativo. Denotaremos por \mathbb{P}_k al espacio de todos los polinomios de *grado total* menor o igual a k , es decir $p \in \mathbb{P}_k$ si tiene la forma

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n},$$

donde $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ son escalares reales.

Observación: Se puede demostrar que

$$\dim \mathbb{P}_k = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n! k!}.$$

Definición: Sea $k \in \mathbb{N}$. Definimos el *retículo principal de orden k* del n -simplex K de \mathbb{R}^n , como el conjunto Σ_k dado por

$$\Sigma_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(\mathbf{x}) \in \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}, \quad 1 \leq j \leq n+1\}.$$

Para $k=0$ definimos

$$\Sigma_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1\}.$$

Es claro que Σ_0 se reduce a un punto \mathbf{x}_0 llamado el *baricentro* de K .

Observación: **Tarea!!**. Se tiene que

$$\text{card}(\Sigma_k) = \binom{n+k}{k} = \dim \mathbb{P}_k.$$

Teorema 4. Para todo entero no negativo k , $k \geq 0$, se tiene que Σ_k es \mathbb{P}_k -unisolvante.

Demostración. Como $\text{card}(\Sigma_k) = \dim \mathbb{P}_k$, basta construir las funciones de base $\{p_j\}$.

Caso $k = 0$

En este caso es claro que la función $p_0(\mathbf{x}) = 1$ es la función buscada.

Caso $k \geq 1$

Sea $\mathbf{a}_\mu \in \Sigma_k$, es claro que lo podemos escribir

$$\mathbf{a}_\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \mathbf{a}_j, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde los enteros μ_j son tales que $\mu_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = k$. Definamos ahora el polinomio p_μ por

$$p_\mu(\mathbf{x}) := \left[\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j)! \right]^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq 1}}^{n+1} \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (k\lambda_j(\mathbf{x}) - i).$$

Como las coordenadas baricentricas λ_j son funciones afines, es decir \mathbb{P}_1 , tenemos que $p_\mu \in \mathbb{P}_k$. Por otra parte, como las coordenadas baricéntricas de \mathbf{a}_μ son $(\frac{\mu_1}{k}, \frac{\mu_2}{k}, \dots, \frac{\mu_{n+1}}{k})$ tenemos que $p_\mu(\mathbf{a}_\mu) = 1$, en efecto

$$\begin{aligned} p_\mu(\mathbf{a}_\mu) &= \left[\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j)! \right]^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq 1}}^{n+1} \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (k \frac{\mu_j}{k} - i) \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j)! \right]^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq 1}}^{n+1} (\mu_j)! = 1. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{a}_\nu \in \Sigma_k$, tal que $\mathbf{a}_\nu \neq \mathbf{a}_\mu$. Tenemos que

$$\mathbf{a}_\nu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \mathbf{a}_j, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

Como $\mathbf{a}_\nu \neq \mathbf{a}_\mu$, podemos suponer que existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\nu_{j_0} < \mu_{j_0}$. Como ν_{j_0} y μ_{j_0} son enteros tenemos que $\mu_{j_0} \geq \nu_{j_0} + 1$, de donde el índice j_0 es tal que

$$\mu_{j_0} \geq 1, \quad \nu_{j_0} \geq 0, \quad \nu_{j_0} \leq \mu_{j_0} - 1.$$

Así

$$p_\mu(\mathbf{a}_\nu) = \left[\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j)! \right]^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq 1}}^{n+1} \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (\nu_j - i) = 0.$$

□

Definición: Sea K un n -simplex de \mathbb{R}^n y sea $k \geq 0$. El elemento finito $(K, \mathbb{P}_k, \Sigma_k)$ se denomina *n-simplex de tipo k*.

Ejemplos:

Caso $n = 2$. En este caso K es el triángulo de vértices $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y \mathbf{a}_3 . Si denotamos por

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &:= \frac{1}{3}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \\ \mathbf{a}_{ij} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j), \quad 1 \leq i < j \leq 3 \\ \mathbf{a}_{iij} &:= \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j), \quad 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\end{aligned}$$

tenemos que

- Si $k = 0$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_0$, $\Sigma = \Sigma_0 = \{\mathbf{a}_0\}$.

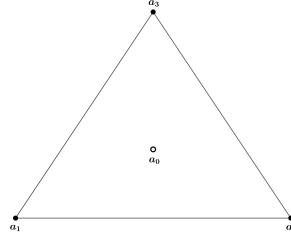


FIGURA 1. Σ_0 .

La base asociada a \mathcal{P} es $\{p_0\}$, donde $p_0(\mathbf{x}) = 1$.

- Si $k = 1$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1$, $\Sigma = \Sigma_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

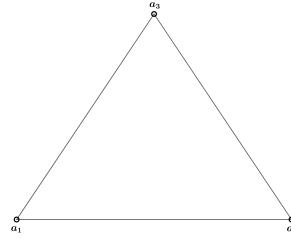


FIGURA 2. Σ_1 .

Las funciones base son las coordenadas baricéntricas, es decir $p_i(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq 3$.

- Si $k = 2$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_2$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \cup \{\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{23}, \mathbf{a}_{13}\}$.

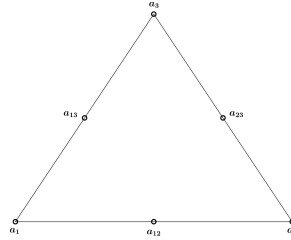


FIGURA 3. Σ_2 .

En este caso las funciones base están dadas por:

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{x}) &= \lambda_i(\mathbf{x})(2\lambda_i(\mathbf{x}) - 1), \quad 1 \leq i \leq 3 \\ p_{ij}(\mathbf{x}) &= 4\lambda_i(\mathbf{x})\lambda_j(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i < j \leq 3 \end{aligned}$$

- Si $k = 3$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_3$, $\Sigma = \Sigma_3 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \cup \{\mathbf{a}_{112}, \mathbf{a}_{221}, \mathbf{a}_{223}, \mathbf{a}_{332}, \mathbf{a}_{331}, \mathbf{a}_{113}\} \cup \{\mathbf{a}_0\}$.

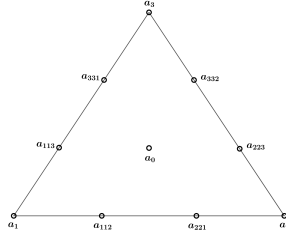


FIGURA 4. Σ_3 .

Las funciones de base están dadas por

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\lambda_i(\mathbf{x})(3\lambda_i(\mathbf{x}) - 1)(3\lambda_i(\mathbf{x}) - 2), \quad 1 \leq i \leq 3 \\ p_{ij}(\mathbf{x}) &:= \frac{9}{2}\lambda_i(\mathbf{x})\lambda_j(\mathbf{x})(3\lambda_i(\mathbf{x}) - 1), \quad 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j \\ p_0(\mathbf{x}) &:= 27\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Caso $n = 3$. En este caso K es el tetraedro de vértices $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y \mathbf{a}_4 . Si denotamos por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &:= \frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) \\ \mathbf{a}_{ij} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j), \quad 1 \leq i < j \leq 4 \end{aligned}$$

tenemos que

- Si $k = 0$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_0$, $\Sigma = \Sigma_0 = \{\mathbf{a}_0\}$.

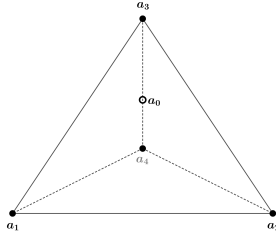
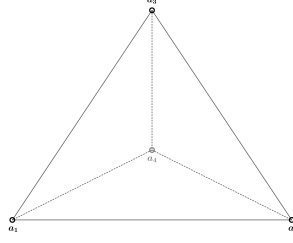
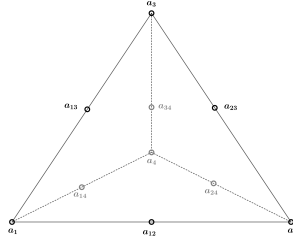


FIGURA 5. Σ_0 .

- Si $k = 1$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1$, $\Sigma = \Sigma_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$.

FIGURA 6. Σ_1 .

- Si $k = 2$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{P}_2$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} \cup \{\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{23}, \mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{24}, \mathbf{a}_{34}\}$.

FIGURA 7. Σ_2 .

Teorema 5. Sea k un entero no negativo, i.e. $k \geq 0$, y sean $(\hat{K}, \hat{\mathbb{P}}_k, \hat{\Sigma}_k)$ y $(K, \mathbb{P}_k, \Sigma_k)$ dos n -simplex de orden k . Entonces ellos son afín equivalentes.

Demostración. Sean $\{\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \dots, \hat{\mathbf{a}}_{n+1}\}$ y $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n+1}\}$ los vértices de \hat{K} y K , respectivamente. Sea $F : \hat{K} \rightarrow K$, tal que a cada punto $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$, de coordenadas baricéntricas $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{n+1}$, le asocia el punto $\mathbf{x} \in K$ de coordenadas baricéntricas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ tales que $\lambda_j(\mathbf{x}) = \hat{\lambda}_j(\hat{\mathbf{x}})$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, es decir

$$F : \hat{K} \rightarrow K$$

$$\hat{\mathbf{x}} \longrightarrow F(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\lambda}_1(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{a}_1 + \hat{\lambda}_2(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{a}_2 + \dots + \hat{\lambda}_{n+1}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{a}_{n+1}.$$

Es claro que F es afín, además, usando la definición de las coordenadas baricéntricas, tenemos si $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$ y $\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) \in K$ entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\lambda}},$$

luego

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ es invertible, podemos escribirla de la siguiente forma

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Así $F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$, luego F es biyectiva puesto que la matriz \mathbf{B} es invertible. Notar además que $F(\hat{\mathbf{a}}_j) = \mathbf{a}_j$. \square

Nota 6. El teorema anterior dice que todos los n -simplex de tipo k son afín equivalentes entre sí, lo que nos permite estudiar uno solo, $(\hat{K}, \mathbb{P}_k, \hat{\Sigma}_k)$, al que denominaremos *elemento de referencia*, para luego extender los resultados a cualquier otro n -simplex de tipo k . Normalmente elegimos \hat{K} como el n -simplex de vértices $\hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{e}_1, \hat{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, \hat{\mathbf{a}}_n = \mathbf{e}_n, \hat{\mathbf{a}}_{n+1} = 0$, donde \mathbf{e}_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n . En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_i, & 1 \leq i \leq n \\ \hat{\lambda}_{n+1}(\hat{\mathbf{x}}) &= 1 - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i.\end{aligned}$$

3. ELEMENTOS FINITOS DE TIPO PARALELÓGRAMO

Definición: Sea k un entero no negativo, i.e. $k \geq 0$. Definimos:

$$\mathbb{Q}_k := \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polinomio de grado parcial menor o igual a } k\}$$

es decir, $p \in \mathbb{Q}_k$ si y solo si es de la forma

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq k \\ 0 \leq i_2 \leq k \\ \vdots \\ 0 \leq i_n \leq k}} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

donde $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ son escalares reales.

Observación:

- (a) Notar que $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{Q}_k \subset \mathbb{P}_{nk}$.
- (b) Se puede demostrar (**Tarea**) que $\dim \mathbb{Q}_k = (k+1)^n$.

Definición: Sea \hat{K} el hiper-cubo unidad de \mathbb{R}^n , es decir $\hat{K} := [0, 1]^n$. Definimos, para $k \geq 1$

$$\hat{\Sigma}_k := \{\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \hat{x}_i \in \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Si $k = 0$ definimos

$$\hat{\Sigma}_0 := \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})\}.$$

Observación: Se puede demostrar que $\text{card}(\hat{\Sigma}_k) = (k+1)^n$.

Teorema 7. $\hat{\Sigma}_k$ es \mathbb{Q}_k unisolvante.

Demostración. Como $\text{card}(\hat{\Sigma}_k) = \dim \mathbb{Q}_k = (k+1)^n$, basta encontrar las funciones base. Como siempre el caso $k = 0$ es trivial.

Sea $k \geq 1$. Sea $\hat{\mathbf{a}}_\mu \in \hat{\Sigma}_k$, es claro que

$$\hat{\mathbf{a}}_\mu = \frac{1}{k}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n),$$

donde los enteros μ_j satisfacen: $0 \leq \mu_j \leq k, \quad 1 \leq j \leq n$.

Sea \hat{p}_μ el polinomio definido por

$$\hat{p}_\mu(\hat{\mathbf{x}}) := \prod_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu_j}}^k \frac{k\hat{x}_j - i}{\mu_j - i} \right).$$

Es claro que $\hat{p}_\mu \in \mathbb{Q}_k$ y que $\hat{p}_\mu(\hat{\mathbf{a}}_\mu) = 1$, en efecto

$$\hat{p}_\mu(\hat{\mathbf{a}}_\mu) := \prod_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu_j}}^k \frac{k \binom{\mu_j}{k} - i}{\mu_j - i} \right) = 1.$$

Sea $\hat{\mathbf{a}}_\nu \in \hat{\Sigma}_k$, con

$$\hat{\mathbf{a}}_\nu = \frac{1}{k}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n),$$

Supongamos que $\hat{\mathbf{a}}_\nu \neq \hat{\mathbf{a}}_\mu$, es decir, existe un índice j_0 , entre 1 y n , tal que $\nu_{j_0} \neq \mu_{j_0}$, luego si el índice i es tal que $0 \leq i \leq k$, con $i \neq \mu_{j_0}$, necesariamente en algún momento $i = \nu_{j_0}$ lo que hace que $\hat{p}_\mu(\hat{\mathbf{a}}_\nu) = 0$. \square

Definición: Llamaremos *n-hipercubo unidad de tipo k*, al elemento finito de Lagrange $(\hat{K}, \hat{\mathbb{Q}}_k, \hat{\Sigma}_k)$. Llamaremos *n-paralelógramo de tipo k* a todo elemento finito de Lagrange (K, \mathcal{P}, Σ) afín equivalente al *n-hipercubo unidad de tipo k*.

Ejemplos:

Caso $n = 2$. En este caso K es el paralelógramo de vértices $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y \mathbf{a}_4 . Si denotamos por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &:= \frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) \\ \mathbf{a}_{ij} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j), \quad 1 \leq i < j \leq 4 \end{aligned}$$

tenemos que

- Si $k = 0$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{Q}_0$, $\Sigma = \Sigma_0 = \{\mathbf{a}_0\}$.

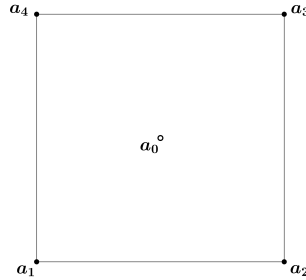
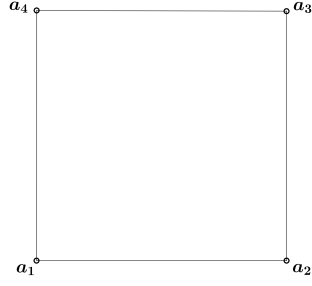
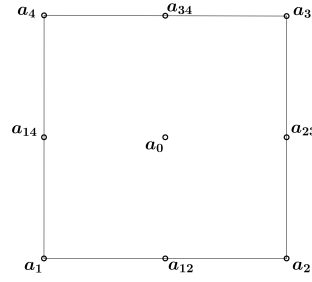


FIGURA 8. Σ_0 .

- Si $k = 1$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{Q}_1$, $\Sigma = \Sigma_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$.

FIGURA 9. Σ_1 .

- Si $k = 2$ entonces $\mathcal{P} = \mathbb{Q}_2$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{a_0\} \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{14}\}$.

FIGURA 10. Σ_2 .

Observación:

Si $n = 2$ y $\hat{K} = [0, 1]^2$. Entonces $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$, $\hat{a}_3 = (1, 1)$ y $\hat{a}_4 = (0, 1)$. Las funciones de base están dadas por

- Para $k = 0$, tenemos que $\hat{p}_0(\hat{x}, \hat{y}) := 1$.
- Para $k = 1$, tenemos que

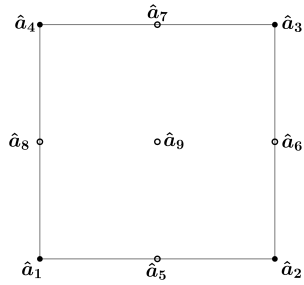
$$\hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) := (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})$$

$$\hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) := \hat{x}(1 - \hat{y})$$

$$\hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) := \hat{x} \hat{y}$$

$$\hat{p}_4(\hat{x}, \hat{y}) := \hat{y}(1 - \hat{x}).$$

- Para $k = 2$, si usamos la notación dada en la siguiente figura,



tenemos que

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) &:= (2\hat{x} - 1)(1 - \hat{x})(2\hat{y} - 1)(1 - \hat{y}) \\
 \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) &:= \hat{x}(2\hat{x} - 1)(1 - 2\hat{y})(1 - \hat{y}) \\
 \hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) &:= \hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{p}_4(\hat{x}, \hat{y}) &:= (1 - 2\hat{x})(1 - \hat{x})\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{p}_5(\hat{x}, \hat{y}) &:= 4\hat{x}(1 - \hat{x})(1 - 2\hat{y})(1 - \hat{y}) \\
 \hat{p}_6(\hat{x}, \hat{y}) &:= 4\hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{y}(1 - \hat{y}) \\
 \hat{p}_7(\hat{x}, \hat{y}) &:= 4\hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{p}_8(\hat{x}, \hat{y}) &:= 4(1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y}) \\
 \hat{p}_9(\hat{x}, \hat{y}) &:= 16\hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y}).
 \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [1] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Dunod, Paris, 1998.

CI²MA & DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CASILLA 160-C, CONCEPCIÓN, CHILE
Email address: `rodolfo.araya@udec.cl`