

Ecuaciones no lineales

- ▶ Método de la Secante.
- ▶ **Sistemas de ecuaciones no lineales:** Método de Newton.

El método de la Secante.

Cuando la derivada de la función f es difícil de evaluar, conviene utilizar el **método de la secante** en lugar del de Newton–Raphson.

Éste simplemente consiste en reemplazar la derivada $f'(x_k)$ por

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Es decir,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

para $k = 1, 2, \dots$, con x_0, x_1 dados.

Teorema. Sea $f \in C^2([a, b])$ con una raíz $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$. Dados $x_0, x_1 \in [a, b]$, sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión obtenida por el método de la secante. Supongamos que $x_k \in [a, b] \forall k \in \mathbb{N}$. Si x_0 y x_1 se escogen suficientemente cercano a α , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

con orden $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Observación. Como en el método de Newton–Raphson, la convergencia del método de la secante no está siempre garantizada, pero cuando tiene lugar, es bastante veloz con un orden de convergencia levemente inferior al de Newton–Raphson.

Sistemas de Ecuaciones no lineales

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de varias variables, no lineal. Se quiere resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de incógnitas. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcl} \text{sen}(2x_1) + x_2^2 + x_3^4 & = & 0 \\ e^{x_3} - x_2^3 & = & 0 \\ \underbrace{\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) + x_3^5 - x_2 + 1}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} & = & \underbrace{0}_{\mathbf{0}} \end{array} \quad ,$$

El método de Newton.

Una de las ventajas del método de Newton–Raphson además de su velocidad de convergencia, es que se puede generalizar fácilmente a sistemas de ecuaciones no lineales. Esta generalización se conoce como **método de Newton**.

Al igual que en el método de Newton–Raphson, buscamos una aproximación de la solución mediante un desarrollo de Taylor.

Supongamos que $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es la solución del sistema de ecuaciones, y que $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)^t$ es dos veces diferenciable.

Entonces, aplicando el desarrollo de Taylor para funciones de varias variables de \boldsymbol{f} en torno a $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^t$, se tiene que:

$$0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^k) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^k\|^2),$$

donde $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^k)$ es la **matriz Jacobiana** de \boldsymbol{f} en \boldsymbol{x}^k , es decir,

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^k) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^k) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^k) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^k) \end{pmatrix}.$$

Cuando $\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^k\|$ es pequeño, el término $\mathcal{O}(\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^k\|^2)$ es mucho más pequeño aún y puede despreciarse en el desarrollo de Taylor anterior:

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^k) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^k\|^2) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}^k),$$

Si además la matriz $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ es invertible, entonces podemos aproximar la raíz $\boldsymbol{\alpha}$ despejándola de la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{x}^k - (\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k).$$

El **método de Newton** consiste en, dada la aproximación de la solución \mathbf{x}^k , tomar como nueva aproximación \mathbf{x}^{k+1} el valor de la expresión anterior:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde \mathbf{x}^0 es la aproximación inicial.

En la práctica no es necesario (ni conveniente) invertir la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$, sino que se utiliza un método menos costoso que consiste en resolver en cada iteración un sistema de ecuaciones lineal:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k).$$

Así, llamando $\delta\mathbf{x}^{(k)} := (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})$, se obtiene el siguiente **algoritmo**:

Dado $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} &\text{resolver } D\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\delta^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)}, \end{aligned}$$

hasta que se satisfaga algún criterio de detención.

Observaciones.

1. Los teoremas de convergencia, y estimación del error del método de Newton–Raphson se pueden generalizar al caso de sistemas, reemplazando el valor absoluto por una norma vectorial.
2. Al igual que en el método de Newton–Raphson, si se desea calcular la raíz α con error menor que ϵ , puede usarse

$$\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\| \leq \epsilon$$

como criterio de detención.

Ejemplo: Resolución del siguiente sistema de ecuaciones con error menor que $\text{tol} = 10^{-5}$:

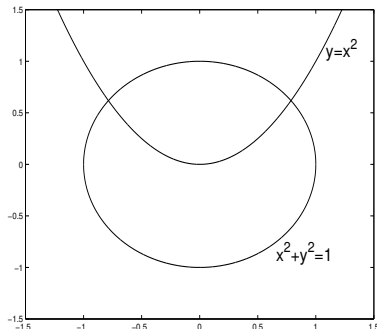
$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Funciones a utilizar:

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

Localización de las raíces:



Algoritmo:

(x_0, y_0) : datos iniciales.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{resolver } \begin{pmatrix} 2x_k & 2y_k \\ -2x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_k \\ \delta y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_k^2 - y_k^2 \\ x_k^2 - y_k \end{pmatrix},$$

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k,$$

$$y_{k+1} = y_k + \delta y_k,$$

hasta que $\sqrt{\delta x_k^2 + \delta y_k^2} < \text{tol.}$

Resultados obtenidos:

x	y
1.0000000000000000	1.0000000000000000
0.8333333333333333	0.6666666666666667
0.78809523809524	0.61904761904762
0.78615406630609	0.61803444782168
0.78615137776208	0.61803398874999