UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 1

Optimización II (525352-1)

`Brayan Sandoval León`
`German tapia cid`

Problema 1. Determine si la siguiente función es convexa, cóncava o ninguna de las anteriores.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_3$$

Solución:
Consideremos el siguiente resultado visto en clases

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ abierto, convexo, además sea, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$, entonces

$$f \text{ es convexo } \iff H(x) \succeq 0, \forall x \in K$$

Donde $H(x)$ es la matriz hessiana de f.

Para aplicar el teorema verifiquemos que las hipótesis se cumplen. Primero notemos que la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio, esto implica que $K = \mathbb{R}^3$ el cual es un conjunto convexo y no vacío, además f es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Como las hipótesis se cumplen, podemos utilizar el teorema, para poder obtener la matriz hessiana procedemos a buscar las derivadas de primer y segundo orden de f

$$\begin{array}{ccc} f_{x_1} = 2x_2 + 4x_1 - 5x_3 & f_{x_2} = 2x_1 + 2x_2 & f_{x_3} = 4x_3 - 5x_1 \\ f_{x_1x_1} = 4 & f_{x_1x_2} = 2 & f_{x_1x_3} = -5 \\ f_{x_2x_1} = 2 & f_{x_2x_2} = 2 & f_{x_2x_3} = 0 \\ f_{x_3x_1} = -5 & f_{x_3x_2} = 0 & f_{x_3x_3} = 4 \end{array}$$

Así, la matriz hessiana queda

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para poder determinar si $H(x) \succeq 0$ procedemos como sigue

$$|4| = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -34 < 0$$

Luego, $H(x)$ es indefinida por lo que f no es convexa.

Ahora, para determinar si f es cóncava notemos que una función es cóncava, sí y solo si, el negativo de la misma es convexa, es decir,

$$f \text{ es cóncava } \iff -f \text{ es convexa}$$

Para determinar si $-f$ es convexa notamos que su matriz hessiana, $\widehat{H}(x)$ tiene la siguiente forma

$$\widehat{H}(x) = \begin{bmatrix} -f_{x_1x_1} & -f_{x_1x_2} & -f_{x_1x_3} \\ -f_{x_2x_1} & -f_{x_2x_2} & -f_{x_2x_3} \\ -f_{x_3x_1} & -f_{x_3x_2} & -f_{x_3x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -H(x)$$

Luego, como $H(x)$ es indefinida se tiene que $-H(x) = \widehat{H}(x)$ también es indefinida, por lo que $-f$ no es convexa, lo cual es equivalente a decir que no es cóncava.

Problema 2. Considere el siguiente problema

$$\text{mín } \frac{x_1 + 3x_2 + 3}{2x_1 + x_2 + 6}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } 2x_1 + x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a. Demostrar que el problema cumple las condiciones suficientes de KKT.
Demostración:
Primero enunciemos el teorema de condiciones suficientes para KKT,

> **Teorema**
>
> Sea X abierto, $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{x}$ y cuasiconvexa para $i \in I$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\bar{x}$, pseudoconvexa y además si $\bar{x}$ es un punto KKT, es decir, $\exists u_i \geq 0.\ i \in I$ tal que $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ se tiene que $\bar{x}$ es solución de:
>
> $$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a } g_i(x) \leq 0,\ \forall i = 1, ..., m \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para aplicar el teorema anterior, primero probemos que f es pseudoconvexa y que g_i es cuasiconvexa con $i \in I$.

- **f es pseudoconvexa**
  Para demostrar esto notemos que f puede ser escrito de la siguiente manera;

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + 3x_2 + 3}{2x_1 + x_2 + 6} = \frac{(1,3)^t(x_1, x_2) + 3}{(2,1)^t(x_1, x_2) + 6}$$

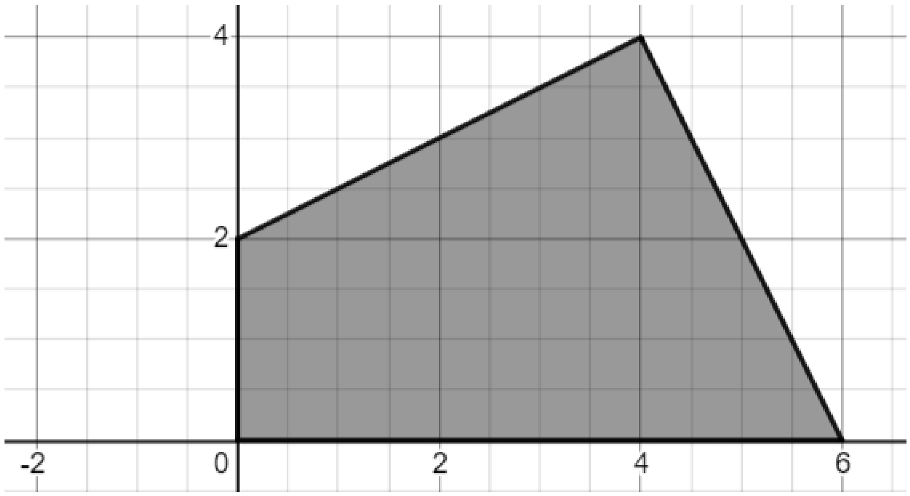
Luego, por un resultado visto en el problema 5 de la evaluación 1 de la asignatura, se tiene que f es pseudoconvexa, en donde $x = (x_1, x_2),\ a = (1, 3),\ b = (2, 1),\ \alpha = 3$ y $\beta = 6$.

- **g_i es cuasiconvexa**
  Para demostrar esto podemos simplemente ver que las g_i son lineales y, por lo tanto, cuasiconvexas (y aún más, cuasicóncavas).

Finalmente, si $\bar{x}$ es un punto KKT para el problema propuesto, se tiene entonces que por el teorema de condiciones suficientes para KKT, $\bar{x}$ es una solución óptima global.

b. Demostrar que cualquier punto que pertenece a la recta generada por los puntos $(0,0)$ y $(6,0)$ es una solución óptima.

Primero, tenemos que la región factible del problema es la siguiente:



Y notemos que:

$$f(0,0) = \frac{0+3\cdot 0+3}{2\cdot 0+0+6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(6,0) = \frac{6+3\cdot 0+3}{2\cdot 6+3+6} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Ahora bien, notemos que para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que

$$\begin{aligned} f[\lambda(0,0)+(1-\lambda)(6,0)] = f(6(1-\lambda),0) &= \frac{6-6\lambda+3\cdot 0+3}{2(6-6\lambda)+0+6} \\ &= \frac{9-6\lambda}{18-12\lambda} = \frac{3(3-2\lambda)}{6(3-2\lambda)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces, como $(0,0)$ y $(6,0)$ son soluciones factibles, y la región factible es un conjunto poliédrico, cualquier combinación de $(0,0)$ y $(6,0)$ es también una solución factible.

Ahora, el sistema KKT para el problema es el siguiente:

$$\nabla f(x_1,x_2) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(x_1,x_2) = 0, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$\implies \begin{bmatrix} \frac{-5x_2}{(2x_1+x_2+6)^2} \\ \\ \frac{5x_1+15}{(2x_1+x_2+6)^2} \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

De donde obtenemos

$$\frac{-5x_2}{(2x_1+x_2+6)^2} + 2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{5x_1+15}{(2x_1+x_2+6)^2} + u_1 + 2u_2 - u_4 = 0 \tag{2}$$

Sustituyendo (x_1, x_2) por $(6, 0)$ se tiene que

$$2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{45}{324} + u_1 + 2u_2 - u_4 = 0 \tag{2}$$

Reordenando, obtenemos lo siguiente:

$$u_1 = \frac{u_2 + u_3}{2} \tag{1}$$
$$u_4 = \frac{18(5u_2 + u_3) + 5}{36} \tag{2}$$

Si definimos $u_2 = u_3 = 0$, tenemos entonces que

$$u_1 = 0 \tag{1}$$
$$u_4 = \frac{5}{36} \tag{2}$$

Entonces, como $u_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$, podemos concluír que $(6, 0)$ es un punto KKT, y por la parte a), es solución del problema.

Finalmente, por todo lo anterior, se tiene que cualquier punto que pertenezca a la recta generada por los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$ es una solución óptima.