

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Relación con EDOs lineales de orden superior

Carlos M. Mora

Ecuación del movimiento de un resorte

$$m X''(t) + c X'(t) + k X(t) = F_e(t)$$

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t

m : masa del cuerpo, $k > 0$: constante del resorte (o rigidez),

$c > 0$: constante de rozamiento, $F_e(t)$: Fuerza externa

Representación Posición - Velocidad

$$X'(t) = V(t)$$

$$V'(t) = \frac{1}{m}(-k X(t) - c V(t) + F_e(t))$$

$V(t)$: velocidad del extremo del resorte en el tiempo t

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ V(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_e(t) \end{pmatrix}$$

EDO lineal de orden n

$$\begin{cases} Y^{(n)}(x) + a_1(x) Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) Y'(x) + a_n(x) Y(x) = g(x) & \forall x \in]\alpha, \beta[\\ Y(x_0) = y_0, Y'(x_0) = y_1, \dots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, g :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$: son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.
 $x_0 \in]\alpha, \beta[, \quad y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$

Representación como sistema de EDOs

$$Z_1(x) := Y(x), \quad Z_2(x) := Y'(x), \quad \dots, \quad Z_{n-1}(x) := Y^{(n-2)}(x), \quad Z_n(x) := Y^{(n-1)}(x)$$

$$Z_1(x_0) = y_0, \quad Z_2(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad Z_{n-1}(x_0) = y_{n-2}, \quad Z_n(x_0) = y_{n-1}$$

$$\vec{Z}(x) = \begin{pmatrix} Y(x) \\ Y'(x) \\ \vdots \\ Y^{(n-2)}(x) \\ Y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \vec{Z}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

EDO lineal de orden n

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x) Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) Y'(x) + a_n(x) Y(x) = g(x) \quad \forall x \in]\alpha, \beta[$$

Representación como sistema de EDOs

$$\vec{Z}(x) = \begin{pmatrix} Y(x) \\ Y'(x) \\ \vdots \\ Y^{(n-2)}(x) \\ Y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{Z}'(x) = \begin{pmatrix} Y'(x) \\ Y''(x) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(x) \\ Y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2(x) \\ Z_3(x) \\ \vdots \\ Z_n(x) \\ Y^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

$$Z'_1(x) = Y'(x) = Z_2(x), \quad Z'_2(x) = Y''(x) = Z_3(x), \dots, Z'_{n-1}(x) = Y^{(n-1)}(x) = Z_n(x),$$

$$\begin{aligned} Z'_n(x) &= Y^{(n)}(x) \\ &= g(x) - a_1(x) Y^{(n-1)}(x) - \cdots - a_{n-1}(x) Y'(x) - a_n(x) Y(x) \\ &= g(x) - a_1(x) Z_n(x) - \cdots - a_{n-1}(x) Z_2(x) - a_n(x) Z_1(x) \end{aligned}$$

$$\vec{Z}'(x) = \begin{pmatrix} Y'(x) \\ Y''(x) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(x) \\ Y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2(x) \\ Z_3(x) \\ \vdots \\ Z_n(x) \\ g(x) - a_1(x)Z_n(x) - \cdots - a_{n-1}(x)Z_2(x) - a_n(x)Z_1(x) \end{pmatrix}$$

Representación matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \\ \vdots \\ Z_{n-1}(x) \\ Z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \\ \vdots \\ Z_{n-1}(x) \\ Z_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

¿Cuándo son LI las funciones $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?

Asumamos que $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 \vec{g}_1(x) + c_2 \vec{g}_2(x) + \cdots + c_n \vec{g}_n(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

$$\begin{pmatrix} g_{1,1}(x) & g_{1,2}(x) & \cdots & g_{1,n}(x) \\ g_{2,1}(x) & g_{2,2}(x) & \cdots & g_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1}(x) & g_{n,2}(x) & \cdots & g_{n,n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in]a, b[.$$

Si para algún $x_0 \in]a, b[$ tenemos que

$$W[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n](x_0) := \begin{vmatrix} g_{1,1}(x_0) & g_{1,2}(x_0) & \cdots & g_{1,n}(x_0) \\ g_{2,1}(x_0) & g_{2,2}(x_0) & \cdots & g_{2,n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1}(x_0) & g_{n,2}(x_0) & \cdots & g_{n,n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, por ende $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ son linealmente independientes.

¿Cuándo son LI las funciones derivables $f_1, f_2, \dots, f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?

Asumamos que $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Ponemos

$$\vec{g}_k(x) = \begin{pmatrix} f_k(x) \\ f'_k(x) \\ \vdots \\ f_k^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \forall x \in]a, b[.$$

Si para algún $x_0 \in]a, b[$ tenemos que

$$W[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n](x_0) := \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) & \cdots & f'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, por ende f_1, f_2, \dots, f_n son linealmente independientes.