UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 1: Análisis Numérico II, 2021

Problema 1. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermitianas. Supongamos que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son equivalentes (i.e. $\boldsymbol{A} = PSP^{-1}$ para alguna matriz invertible P). Demuestra que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son unitariamente equivalentes (i.e., $\boldsymbol{A} = W\boldsymbol{B}W^*$ para alguna matriz unitaria W).

Problema 2. Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz compleja de orden n.

(1) Demostrar que *(Teorema de Gerschgorin -Hadamard)*

$$\mathrm{sp}(\boldsymbol{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}$$

(2) Demostrar que, si la matriz $\boldsymbol{A}$ es de diagonal estrictamente dominante, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

Entonces es invertible.

Problema 3. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pruebe que

a) $\ker(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \ker(\boldsymbol{A}); \ker(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \ker(\boldsymbol{A}^T)$

b) Sabiendo que $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$, deduzca además que $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$

Problema 4. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$$

Aplicar el Lema de Schur para encontrar una matriz unitaria U tal que $U^*AU = T$, con T triangular superior.