¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden 1?

Caso general.

Carlos M. Mora

Integral indefinida

Considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. La integral indefinida de g en el intervalo $[a, b]$ es el conjunto

$$\int g(x)\; dx = \{G : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; tal\, que \;\; G'(x) = g(x) \;\; para\, todo\, x \in [a, b]\}$$

Propiedad

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int g(x)\; dx = \left\{ C + \int_a^x g(t)\; dt : C \in \mathbb{R} \right\}$$

pues

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t)\; dt = g(x)$$

Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} f\left(A\left(x\right)\right) = f'\left(A\left(x\right)\right) A'\left(x\right)$$

Ya que $\exp'\left(y\right) = \exp\left(y\right)$,

$$\frac{d}{dx} \exp\left(A\left(x\right)\right) = \exp'\left(A\left(x\right)\right) \frac{d}{dx} A\left(x\right) = \exp\left(A\left(x\right)\right) \frac{d}{dx} A\left(x\right)$$

Función exponencial

Fijemos $A\left(x\right) = \int \alpha\left(x\right) dx$ con $\alpha : \left]x_i, x_f\right[\to \mathbb{R}$ función continua.
Entonces $A'\left(x\right) = \alpha\left(x\right)$ para todo $x \in \left]x_i, x_f\right[$. Por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \exp\left(A\left(x\right)\right) = \exp\left(A\left(x\right)\right) \alpha\left(x\right).$$

Ecuación diferencial ordinaria lineal escalar

EDO lineal escalar general

La incógnita $y(x)$ es una función derivable que satisface:

$$b_0(x)\,y'(x) + b_1(x)\,y(x) + b_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

$$y'(x) + \frac{b_1(x)}{b_0(x)}y(x) + \frac{b_2(x)}{b_0(x)} = 0$$

EDO lineal escalar en forma normal (o explícita)

La incógnita $y(x)$ es una función derivable que satisface:

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in I,$$

donde I es un intervalo.

EDO lineal escalar en forma normal

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in I,$$

donde I es un intervalo.

Método de solución

$$e^{A(x)}y'(x) + a(x)\,e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}g(x) \qquad \forall x \in I,$$

donde

$$A'(x) = a(x) \Leftrightarrow A(x) = \int a(x)\,dx$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}y(x)\right) = e^{A(x)}g(x) \qquad \forall x \in I,$$

$$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}g(x)\,dx$$

Ejemplo

Ejemplo: Encuentre la solución de problema de valores iniciales

$$x'(t) = -2t\,x(t) + t \qquad \forall t \in \mathbb{R}; \qquad x(0) = 2$$

Primer paso

$$x'(t) + 2t\,x(t) = t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$A'(t) = 2t \Rightarrow A(t) = t^2 \Rightarrow e^{A(t)} = e^{t^2}$$

Segundo paso

$$e^{t^2} x'(t) + 2t\,e^{t^2} x(t) = t\,e^{t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{t^2} x(t)\right) = t\,e^{t^2}$$

Tercer paso

$$e^{t^2} x(t) = K + \int t\,e^{t^2} dt \Rightarrow e^{t^2} x(t) = K + \frac{1}{2} e^{t^2} \Rightarrow x(t) = Ke^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Cuarto paso

$$2 = x(0) = Ke^{-0^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow K = \frac{3}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{3}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

EDO lineal no homogénea

Sean $a, g :]x_i, x_f[\to \mathbb{R}$ funciones continuas conocidas. Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = g(x) \qquad \forall x \in]x_i, x_f[\,.$$

Primer paso: Calcular $\phi(x) := e^{A(x)} = \exp\left(\int a(x)\, dx\right)$

Ejemplo

Encuentre todas las soluciones de

$$x\, y'(x) - 3y(x) = x^5 \qquad \forall x < 0.$$

Para $x < 0$

$$A'(x) = -\frac{3}{x} \Rightarrow A(x) = -\int \frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{3}{x} dx = 3\log(|x|) = 3\log(-x) = \log\left(-x^3\right)$$

$$\phi(x) = \exp\left(-\log\left(-x^3\right)\right) = \exp\left(\log\left(-\frac{1}{x^3}\right)\right) = -\frac{1}{x^3}$$

EDO lineal no homogénea

Encuentre la solución general de

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \,]x_i, x_f[\,.$$

Segundo paso:

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x)$$

$$e^{\int a(x)dx}\left(y'(x) + a(x)\,y(x)\right) = e^{\int a(x)dx} g(x)$$

$$\phi(x)\,y'(x) + a(x)\,\phi(x)\,y(x) = \phi(x)\,g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\phi(x)\,y(x)\right) = \phi(x)\,g(x)$$

Ejemplo (Segundo Paso)

$$y'(x) - \frac{3}{x} y(x) = x^4, \qquad \forall x < 0$$

$$e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}\left(y'(x) - \frac{3}{x} y(x)\right) = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx} x^4$$

$$-\frac{1}{x^3} y'(x) + \frac{1}{x^3}\frac{3}{x} y(x) = -\frac{1}{x^3} x^4$$

$$\frac{1}{x^3} y'(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) y(x) = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3} y(x)\right) = x$$

EDO lineal no homogénea

Sean $a, g : \left]x_i, x_f\right[\to \mathbb{R}$ funciones continuas conocidas. Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \left]x_i, x_f\right[.$$

Tercer paso: Calcular la integral $\int \phi(x)\,g(x)\,dx$

Como $\frac{d}{dx}\left(\phi(x)\,y(x)\right) = \phi(x)\,g(x)$,

$$\phi(x)\,y(x) = K + \int \phi(x)\,g(x)\,dx.$$

La solución general es:

$$y(x) = K\,e^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int e^{\int a(x)dx} g(x)\,dx,$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

Ejemplo (Tercer paso)

Encuentre la solución general de

$$y'(x) - \frac{3}{x} y(x) = x^4 \qquad \forall x < 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3} y(x)\right) = x$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3} y(x) &= \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3} y(x)\right) dx \\ &= \int x\, dx + K = \frac{1}{2}x^2 + K\end{aligned}$$

La solución general es:

$$y(x) = K\, x^3 + \frac{1}{2}x^5 \qquad \forall x < 0,$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

Ejemplo (Problema de valores iniciales)

$$\begin{cases} x\,y'(x) - 3y(x) = x^5 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Solución general

$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = x^4 \iff y'(x) = \frac{3}{x}y(x) + x^4$$

$$y(x) = K\,x^3 + \frac{1}{2}x^5 \qquad \forall x < 0,$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

$$2 = y(-1) = -K - 1/2 \Rightarrow y(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^5 \qquad \forall x < 0.$$