

Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Use el teorema de Fubini y la medida de conteo para probar que si:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m| < \infty$$

Entonces:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n b_m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_m$$

$$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \rightarrow f = f^+ - f^- \quad , \quad f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X)$$

$$\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$

$$\iint F d(\mu \times \nu) \leq \iint |F| d(\mu \times \nu)$$

TONELLI $|F|: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$

Dee: Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesiones de números reales, luego se define

$F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $F(m, n) = a_n b_m$

$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nuestra intención es probar

que F es integrable para aplicar el Tco. de Fubini. En efecto, por Tonelli:

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} |F| d(\mu \times \mu) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_n b_m| d\mu(m) d\mu(n)$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m| d\mu(m)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_n b_m|$$

$$< \infty$$

Lo que significa que $|F|$ es integrable en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Además

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} F d(\mu \times \mu) \leq \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} |F| d(\mu \times \mu)$$

$$< \infty$$

Lo que significa que F es INTEGRABLE en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la medida contable.

Por lo tanto podemos utilizar
teo. de Fubini:

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} F(n, m) d\mu(n) d\mu(m) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} F d(\mu \times \mu)$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} F(n, m) d\mu(m) d\mu(n)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} a_n b_m d\mu(n) d\mu(m) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} a_n b_m d\mu(m) d\mu(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n b_m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_m \quad \square$$

Sean $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $g: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funciones integrables. Muestre que $h: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por:

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad h(x, y) = f(x)g(y)$$

es integrable y:

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$$

Sean (X, A, μ) , (Y, B, ν) espacios de medida y sea $h: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$h(x, y) = \tilde{f}(x, y) \cdot \tilde{g}(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g}: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tales que

$$\tilde{f}(x, y) = f(x), \quad \tilde{g}(x, y) = g(y)$$

$\forall (x, y) \in X \times Y$. Luego verificamos que \tilde{f} y \tilde{g} son medibles en el espacio producto $(X \times Y, A \times B, \mu \times \nu)$

Notamos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}^{-1}(\alpha, \infty) = f^{-1}(\alpha, \infty) \times Y \in A \times B$$

para f es medible, entonces

$$f^{-1}(E) \in A, \quad \forall E \in \text{Sigma-Algebra Borel}.$$

Análogamente.

$$\tilde{g}^{-1}(\alpha, \infty) = X \times g^{-1}(\alpha, \infty)$$

y por lo tanto, como g es medible \tilde{g} es medible en el E.P.

Finalmente, como \tilde{f} y \tilde{g} son $(\mu \times \nu)$ -medibles, entonces h es $(\mu \times \nu)$ -medible.

Así por Tonelli:

$$\begin{aligned} \int |h| d(\mu \times \nu) &= \int_X \int_Y |h| d\nu d\mu \\ &= \int_X \int_Y |\tilde{f} \cdot \tilde{g}| d\nu d\mu \\ &= \int_X \int_Y |\tilde{f} \cdot g| d\nu d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_X \int_Y |f(x)g(y)| d\nu(y) d\mu(x) \\
&= \int_X |f(x)| d\mu(x) \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Es decir $|h|$ es $(\mu \times \nu)$ -integrable y

$$\iint |h| d(\mu \times \nu) < \infty$$

Así h es $(\mu \times \nu)$ -integrable. Ahora

usamos Teorema de Fubini:

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y h d\nu d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x)g(y) d\nu \right) d\mu = \int_X f(x) \left(\int_Y g(y) d\nu \right) d\mu$$

Ya que $\int_Y g(y) d\nu = \alpha \in \mathbb{R}$ entonces se tiene:

$$\int_X f(x) \cdot \alpha d\mu = \left(\int_X f(x) d\mu \right) \cdot \alpha = \int_X f(x) d\mu \cdot \int_Y g(y) d\nu \quad \blacksquare$$

Problema 3. Sean f, g funciones Lebesgue integrables de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ en \mathbb{R} . Si λ denota la medida de Lebesgue en \mathcal{B} , usa el teorema de Tonelli y el hecho que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x)$$

para mostrar que la función h definida por

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) d\lambda(y) \quad x \in \mathbb{R}$$

es finita casi en todas partes. Además, muestra que

$$\int |h| d\lambda \leq \left[\int |f| d\lambda \right] \left[\int |g| d\lambda \right]$$

La función h definida anteriormente se define como la **convolución** de f con g y se denota $f * g$.

Hint: Puedes usar, sin demostrar, el ejercicio 10.H del libro de Bartle para asumir que la función $f(x-y)g(y)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ -medible.

$$\begin{aligned}
\int |h(x)| d\lambda(x) &\leq \iint |f(x-y)g(y)| d\lambda(y) d\lambda(x) \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \iint |f(x-y)g(y)| d\lambda(x) d\lambda(y) \\
&= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int |g(y)| \left(\int |f(x)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y)
\end{aligned}$$

