UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Laboratorio 6: Integración Numérica.

Cálculo Numérico 521230/525240

Descargue la función `punto_medio.m` del módulo *Laboratorios* de Canvas. Esta función permite aproximar la integral

$$I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

usando la Regla del Punto Medio compuesta, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud. Sus entradas son

- a: extremo inferior del intervalo,
- b: extremo superior del intervalo,
- f: función a integrar; debe ser entregada como *function handle* (ver ejemplo a continuación),
- N: cantidad de subintervalos en que se divide el intervalo inicial $[a, b]$; si $N = 1$ se ejecuta la Regla del Punto Medio elemental.

Por ejemplo, para aproximar la integral

$$I = \int_1^2 e^x\ \mathrm{d}x,$$

con la Regla del Punto Medio compuesta con $N = 5$ subintervalos, debemos ejecutar:

```
I = punto_medio(1,2,@(x)exp(x),5);
```

Ejercicio 1 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Modifique la función `punto_medio.m` adecuadamente para obtener las Reglas de los Trapecios y de Simpson. Guarde estas nuevas funciones con el nombre `trapecio.m` y `simpson.m`, respectivamente. Testee sus funciones con las siguientes integrales usando $N = 5, 10, 15, 20, 25$:

$$\int_0^3 x^2\ \mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 e^{-x^2}\ \mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \log_2(x)\ \mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x.$$

Averigüe la funcionalidad de la función `integral` de MATLAB, y úsela para calcular la solución que consideraremos como exacta de cada una de las integrales anteriores. Luego, mida los errores cometidos por las reglas del punto medio, trapecio y simpson compuestas. Aquí se debe observar que si la integral no es calculada de forma exacta, entonces aumentar el valor de N permite obtener errores más pequeños.

Ejercicio 2 (ejercicio guiado por el/la ayudante). El objetivo de este ejercicio es observar experimentalmente que el error cometido por las Reglas del Punto Medio y del Trapecio se comporta, aproximadamente, como h^2 y que el error cometido por la Regla de Simpson se comporta, aproximadamente, como h^4, donde $h = \dfrac{b-a}{N}$ y a, b son los extremos del intervalo de integración. Para ello, usemos como referencia la integral

$$I = \int_0^1 e^x\ \mathrm{d}x,$$

de la cual sabemos que su valor exacto es $I = e - 1$.

1. Aproxime la integral I con la Regla del Punto Medio compuesta con $N = 10, 20, 40, 80$. Guarde los errores cometidos en las variables `error_pm_10`, `error_pm_20`, `error_pm_40` y `error_pm_80`. Al aumentar el N al doble, el h disminuye a la cuarta parte, y en tal caso la teoría dice que el error disminuye aproximadamente a la cuarta parte. Compruebe esto calculando los cuocientes `error_pm_10/error_pm_20`, `error_pm_20/error_pm_40` y `error_pm_40/error_pm_80`. El resultado esperado es que estos cuocientes son cada vez más cercanos a 4.

2. Repita lo anterior con las Reglas de los Trapecios y de Simpson. Guarde los errores respectivos en las variables `error_t_N` y `error_s_N`, $N = 10, 20, 40, 80$, respectivamente. Para la Regla de los Trapecios debe observarse lo mismo que para el Punto Medio, mientras que para la regla de Simpson los cuocientes deben parecerse cada vez más a 16, pues duplicar el N significa disminuir h a la mitad y entonces h^4 disminuye a la 16^{va} parte.

Ejercicio 3 (ejercicio para trabajo autónomo). Dado que

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

es igual a $\pi/4$, podemos aproximar π mediante $4I_h$ si I_h es cualquier aproximación a I. Escriba un rutero en el que:

1. Calcule las aproximaciones $I_1, I_2, I_4, I_8, \ldots$ a I obtenidas con la Regla de los Trapecios compuesta, duplicando cada vez el número de subintervalos, hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas a I sea menor o igual que 10^{-6}.

2. Escriba la diferencia entre la aproximación a π calculada y el valor de la constante `pi` de MATLAB.

Ejercicio 4 (ejercicio para trabajo autónomo). Al aplicar una fuerza externa al pistón de un cilindro se comprime el vapor de amoníaco contenido en él. En la siguiente tabla se muestra, para diferentes valores del volumen v (en litros) ocupado por el gas, la presión p (en kilopascal) ejercida por él para equilibrar la fuerza externa aplicada al pistón.

v	0.50	0.60	0.72	0.84	0.96	1.08	1.25
p	1400	1248	1100	945	802	653	500

El trabajo total realizado por el gas es

$$W = \int_{0.5}^{1.25} p\,\mathrm{d}v.$$

Escriba un rutero en el que

1. Aproxime el valor de W utilizando la Regla del Trapecio elemental.

2. Dado que W se puede escribir como
$$\sum_{i=1}^{6} \int_{v_i}^{v_{i+1}} p\,\mathrm{d}v,$$
aproxime W aplicando la Regla del Trapecio elemental al cálculo de cada una de las integrales en esta suma.

3. ¿Cuál es la diferencia entre la aproximación a W calculada en 1) y la calculada en 2)?

4. Determine la spline cúbica $s(v)$ que interpola los datos de la tabla y aproxime W por

$$\int_{0.5}^{1.25} s(v)\mathrm{d}v$$

mediante la Regla compuesta del Trapecio considerando $N = 15$.

5. Repita el procedimiento anterior aumentando al doble la cantidad de subintervalos hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas a W sea menor o igual que 10^{-2}.

Ejercicio 5 (ejercicio para trabajo autónomo). Los pares (x, y) que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pertenecen a la elipse con centro en el origen de coordenas, semieje mayor de longitud a y semieje menor de longitud b. La ecuación paramétrica de esta elipse es:

$$(x(t), y(t)) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Escriba un rutero MATLAB en el que:

1. Grafique 200 puntos sobre la elipse de ecuación paramétrica $(5\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$.

2. Encuentre una aproximación al perímetro de la elipse antes graficada utilizando alguna de las reglas de cuadratura vistas. Tenga en cuenta que éste es igual a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

3. ¿Qué sucede si $a = b$? ¿Es necesaria alguna regla de integración numérica para calcular el perímetro de la curva en ese caso?

Ejercicio 6 (ejercicio para trabajo autónomo). El volumen del cuerpo que se genera cuando se rota el área encerrada por la gráfica de una función f y el eje X en un determinado intervalo $[a, b]$ se puede calcular como

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \;\mathrm{d}x.$$

Aproxime el valor del volumen del cuerpo cuando:

1. $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 2]$.
2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $[a, b] = [0, 2]$.

Calcule el error en cada caso (note que los cuerpos que se obtienen son de volumen conocido).

Ejercicio 7 (ejercicio guiado por el/la ayudante). Escriba una función en MATLAB que reciba como entrada un *function handle* de una función de dos variables f, los valores de a, b, c, d y dos enteros positivos N_1 y N_2, y devuelva el valor de

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

donde la integral con respecto a la variable y se calcula con la Regla del Trapecio compuesta con N_1 subintervalos, y la integral con respecto a x se calcula con la Regla de Simpson compuesta con N_2 subintervalos.

Luego, utilice esta función para aproximar las siguientes integrales dobles:

$$\int_0^3 \int_0^3 (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 xye^{y-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \int_2^3 \sin(x+y)\ln(y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

considerando $N_1, N_2 \in \{10, 20, 40, 80\}$. Averigüe la funcionalidad de la función `integral2` de MATLAB para calcular integrales dobles, y use el valor entregado por ella como solución exacta para calcular el error cometido por la Regla implementada por usted.