UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201

Prof.: Anahí Gajardo

Listado 7

Ejercicios de práctica

1. Encuentre el polinomio minimal de las siguientes matrices.

   a) **(Propuesto)**

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   b) **(a realizar por los estudiantes)**

   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   c) **(a realizar por los estudiantes)**

   $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   d) **(a realizar por los estudiantes)**

   $$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y considere el operador $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por $T(M) = AM$.

   a) **(Propuesto)** Calcule la matriz representante de T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) **(Propuesto)** Calcule el polinomio característico de T.

   c) Calcule el polinomio minimal de T.

3. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, y considere el operador $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definido por $T(M) = AM$. Demuestre que el polinomio minimal de A y el de T son el mismo.

4. **(a realizar por los estudiantes)** Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $G : V \to V$ un operador lineal cuya matriz representante respecto a $\mathcal{B}$ es triangular superior. Demuestre que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ el subespacio $S = \langle \{v_1, \ldots, v_i\} \rangle$ es G-invariante.

Ejercicios propuestos

1. Pruebe que si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio minimal.

2. Demuestre que si F es nilpotente, entonces su polinomio minimal es de la forma x^k.

3. Considere la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

   Considere además los polinomios $p(x) = x - 2$ y $q(x) = x^2 + 1$.

   a) Calcule $p(B)$ y $q(B)$.

   b) Calcule $Ker(p(B))$ y $Ker(q(B))$, verificando que son espacios B-invariante.

   c) Muestre que $Ker(p(B))$ y $Ker(q(B))$ están en suma directa y que suman $\mathbb{R}^3$.

4. Suponga que $F : V \to V$ es un operador lineal y que u es un vector tal que $F^k(u) = \Theta$ y $F^{k-1}(u) \neq 0$, para un cierto valor $k \in \mathbb{N}$.

   a) Demuestre que $\{u, F(u), \ldots, F^{k-1}(u)\}$ es l.i.

   b) Demuestre que $\langle\{u, F(u), \ldots, F^{k-1}(u)\}\rangle$ es F-invariante.

   c) Demuestre que $k < dim(V)$.

5. Sea U un espacio vectorial de dimensión finita, sean T y L dos operadores lineales de U en U. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$0 \text{ es valor propio de } T \circ L \Leftrightarrow 0 \text{ es valor propio de } L \circ T$$

6. Sea U un espacio vectorial y T un operador lineal de espectro $\sigma(T)$. Determine una condición sobre el escalar α, en términos de $\sigma(T)$, para que el operador $I - \alpha T$ sea invertible.

7. Considere el siguiente operador lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2y, 5x + 5y + z)$$

   a) Calcule los valores propios de T.

   b) Para cada valor propio λ de T y cada $k \in \mathbb{N}$, determine $E_k(\lambda)$.

   c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por elementos de los núcleos iterados de T y calcule la matriz representante de T respecto a esta base.

   d) Determine el polinomio minimal de T.

8. Para el siguiente operador $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, calcule todos sus núcleos iterados y determine la base que le asocia una matriz representante triangular.

$$H(x, y, z, t) = (x, 2x + 2y - z, x + y, t)$$