Problema 1. *Considere el sistema electromecánico ilustrado en la Fig. 1. En la Tarea 1 se encontró un sistema simplificado con solo dos variables de estado. Utilice este sistema simplificado como base para desarrollar, justificar y comentar todos sus resultados en las siguientes preguntas:*

a) *Para el sistema simplificado en la Tarea 1 (Pregunta 1.e), obtenga la representación en espacio de estados. Luego obtenga la expresión de la F. de T. $h(s)$. Encuentre la expresión exacta para $h(t)$ y grafíquela para $0 \leq t < 1s$.*

b) *Utilizando $h(t)$ encontrada en a) y las propiedades de convolución, encuentre la expresión de salida $y(t)$ para la señal $e(t) = -3\left[u(t-2T_0/18) - u(t-7T_0/18) - u(t-11T_0/18) + u(t-16T_0/18)\right]$, con $T_0 = 1s$. Grafique $y(t)$ para $0 \leq t < 2T_0$. Luego simule el sistema para la señal anterior y compare con el gráfico obtenido por convolución.*

c) *Determine las expresiones de $e(\omega)$, $h(\omega)$ e $y(\omega)$ como las T.F. de $e(t)$, $h(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Grafique $e(\omega)$, $h(\omega)$ e $y(\omega)$ para $-30\pi \leq \omega \leq 30\pi$.*

d) *Si la señal $e(t)$ se hace periódica de periodo T_0. Determine la expresión de $y_p(n)$ que es la T.F.F.D. de la salida del sistema $y_p(t)$ correspondiente a esta señal periódica. Grafique el módulo (por T_0) y la fase de $y_p(n)$ y superpóngalos sobre la gráfica del módulo y fase de $y(\omega)$, respectivamente, para $-30\pi \leq n\omega_0 \leq 30\pi$.*

e) *Grafique la ubicación de los polos del sistema lineal no simplificado (Pregunta 1.c de la Tarea 1). Comente la grafica en relación a las dinámicas del sistema. Obtenga la ganancia e indique si el sistema es de fase mínima. Puede resolver utilizando comandos en Matlab.*

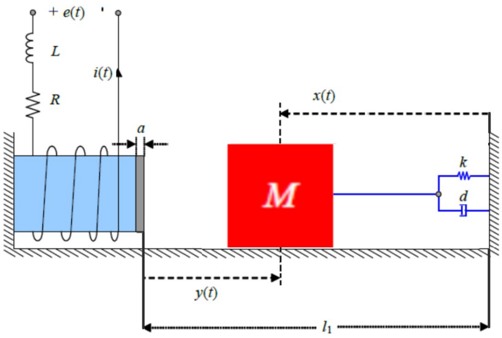

Figura 1: Sistema electromecánico del Problema 1.

Solución. *a)* Denotando $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}(t)$, el sistema simplificado de la Tarea 1 es

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{k_i u^2(t)}{MR^2\left(l_1 - x_1(t) + a\right)} - \frac{k\left(x_1(t) - l_0\right)}{M} - \frac{d}{M}x_2(t)$$

Luego, la representación en espacio de estados del sistema esta dada por

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u,$$
$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_i u_0^2}{MR^2\left(l_1 - x_1^0 + a\right)^2} - \frac{k}{M} & -\frac{d}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_i u_0}{MR^2\left(l_1 - x_1^0 + a\right)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D = [0].$$

Con lo anterior se puede encontrar $h(s)$, pues

$$h(s) = C\left(sI - A\right)^{-1}B + D$$

Ahora resta obtener $(sI - A)^{-1}$, a modo de simplificar algunas cuentas se hacen los siguientes cambios de variable $\eta = \frac{d}{M}$, $\xi = \frac{k_i u_0^2}{MR^2\left(l_1 - x_1^0 + a\right)^2} - \frac{k}{M}$ y $\hat{\xi} = \frac{2k_i u_0}{MR^2\left(l_1 - x_1^0 + a\right)}$ luego

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\xi & s+\eta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+\eta)+\xi}\begin{bmatrix} s+\eta & 1 \\ \xi & s \end{bmatrix}$$

De esta forma

$$h(s) = \frac{1}{s(s+\eta)+\xi}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\eta & 1 \\ \xi & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+\eta)-\xi}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\xi}s \end{bmatrix} = \frac{\hat{\xi}}{s^2 + s\eta - \xi}$$

Asumiendo que $\Delta = \eta^2 + 4\xi < 0$, con esto $u_0 \leq 4$, se deduce que el polinomio $s^2 + s\eta - \xi$ no tiene raíces reales, por lo que

$$h(s) = -\frac{\hat{\xi}}{s^2 + \eta s + \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{4} - \xi} = -\frac{\hat{\xi}}{\left(s + \frac{\eta}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{\eta^2}{4} - \xi}\right)^2}$$

definiendo $\alpha = \sqrt{-\frac{\eta^2}{4} - \xi}$ y $\beta = \hat{\xi}$, se obtiene

$$h(s) = \frac{\beta}{\left(s + \frac{\eta}{2}\right)^2 + \alpha^2}$$

Luego,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{h(s)\}(t) = \frac{\beta}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{\left(s + \frac{\eta}{2}\right)^2 + \alpha^2}\right\}(t) = \frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{\eta}{2}t}\operatorname{sen}(\alpha t)$$

Gráficamente

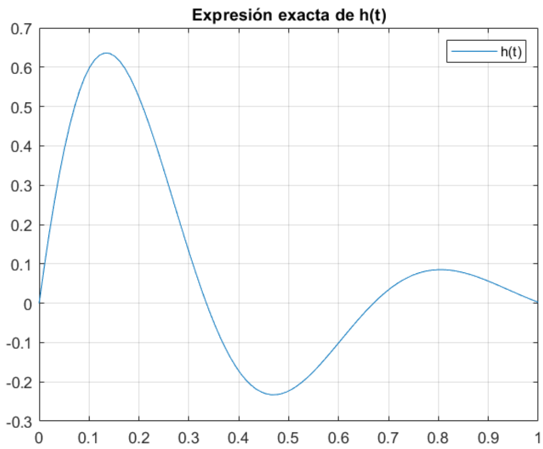

Figura 2: Expresión exacta de $h(t)$ con el punto de operación (0.302,0,1).

b) En primera instancia se sabe que

$$y(t) = h(t) * e(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace y usando $T_0 = 1$ se obtiene

$$y(s) = h(s)e(s) = \frac{\beta}{\left(s+\frac{\eta}{2}\right)^2+\alpha^2}\frac{-3}{s}\left[e^{-2s/18} - e^{-7s/18} - e^{-11s/18} + e^{-16s/18}\right]$$

aplicando Transformada Inversa de Laplace con ayuda del paquete simbólico de Matlab, se obtiene el valor de $y(t)$. Gráficamente, queda

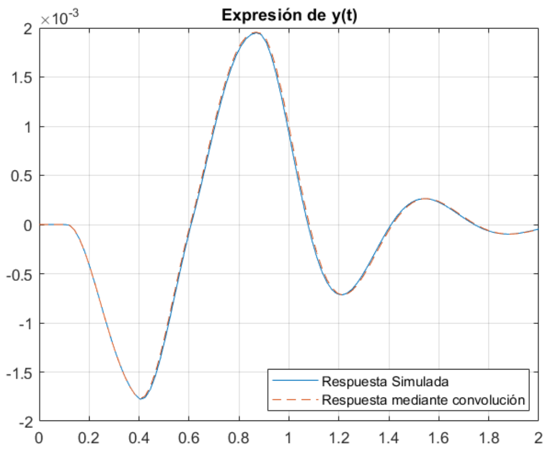

Figura 3: Comparación de la respuesta del sistema obtenida mediante convolución versus simulación.

c) Por definición

$$h(\omega) = \mathcal{F}\{h(|t|)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(|t|)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta}{2}|t|}\,\mathrm{sen}\,(\alpha|t|)\,e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha}\mathcal{L}\left\{e^{-\frac{\eta}{2}|t|}\,\mathrm{sen}\,(\alpha|t|)\right\}(j\omega) = \frac{\beta}{\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)^2+\alpha^2}$$

$$e(\omega) = \mathcal{L}\left\{e(t)\right\}(j\omega) = e^{-2T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} - e^{-7T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} - e^{-11T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} + e^{-16T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j}$$

$$y(\omega) = h(\omega)e(\omega) = \frac{\beta}{\left(\omega+\frac{\eta}{2}\right)^2+\alpha^2}\left(e^{-2T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} - e^{-7T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} - e^{-11T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j} + e^{-16T_0\omega j/18}\frac{1}{\omega j}\right)$$

Gráficamente

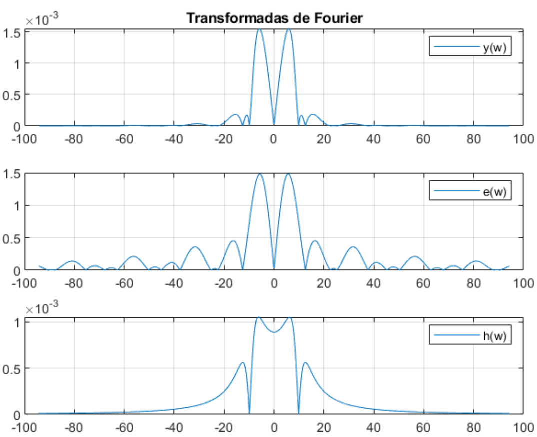

Figura 4: $y(\omega)$, $e(\omega)$ y $h(\omega)$ respectivamente.

e) Mediante comandos de Matlab, se obtiene De aquí se puede ver que ningún polo tiene parte real positiva, por

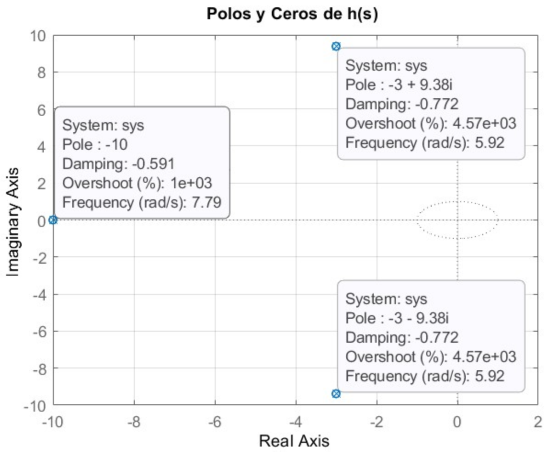

Figura 5: Polos y ceros del sistema lineal no simplificado.

lo tanto el sistema es de fase mínima, es decir, el sistema es estable.

El sistema es de orden 3, pero dado que el polo real en $z = -10$ está a una distancia considerable del eje y, la dinámica del sistema se parece a uno de orden 2.

Por otro lado, la ganancia del sistema es $h(0) = C(-A)^{-1}B \approx 0{,}00455$.

□

Problema 2. *Considere el sistema con la siguiente función de transferencia:*

$$\frac{0{,}3s}{s^2+3s+2}$$

Se solicita desarrollar, justificar y comentar todos sus resultados para las siguientes preguntas:

a) *Encuentre una representación en espacio de estados del sistema.*

b) *Obtenga la matriz de transición en el plano s y en el tiempo del modelo en espacio de estados encontrado en a).*

c) *Obtenga la respuesta homogénea de los estados en el plano s y en el tiempo del modelo encontrado en a). Considere $x_0 = [1\ \ 1]^t$.*

d) *Obtenga la respuesta forzada de los estados en el plano s y en el tiempo del modelo encontrado en a). Considere entrada escalón.*

e) *Obtenga la respuesta transitoria y estacionaria de los estados en el tiempo del modelo encontrado en a).*

Solución. *a)* Usando que $y(s) = h(s)u(s)$ se tiene que

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)}\frac{z(s)}{z(s)} = \frac{0{,}3sz(s)}{(s^2+3s+2)z(s)}$$

de aquí se deduce

$$\begin{aligned} u(s) &= (s^2+3s+2)z(s) \\ y(s) &= 0{,}3sz(s) \end{aligned}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace y asumiendo que $z(0) = \dot{z}(0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= 0{,}3\dot{z}(t) \\ u(t) &= \ddot{z}(t) + 3\dot{z}(t) + z(t) \end{aligned}$$

haciendo los cambios de variable $x_1(t) = z(t)$ y $x_2(t) = \dot{z}(t)$, se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 0{,}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

b) Interesa obtener $\Phi(s)$ y $\Phi(t)$, el primero esta dado por

$$\Phi(s) = (s\boldsymbol{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix}s & -1 \\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1 \\ -2 & s\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1 \\ -2 & s\end{bmatrix}$$

Por otro lado, $\Phi(t)$ se deduce de aplicar la Transformada Inversa de Laplace a cada elemento de la matriz $\Phi(s)$.

$$\begin{aligned} \Phi(t)_{1,1} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \Phi(t)_{1,2} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t} \\ \Phi(t)_{2,1} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ \Phi(t)_{2,2} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

c) La respuesta homogénea en el plano s viene dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(s) &= \Phi(s)\boldsymbol{x}(0) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1 \\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+4 \\ s-2\end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{y}(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}0 & 0{,}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+4 \\ s-2\end{bmatrix} = \frac{0{,}3(s-2)}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Por otro lado, respuesta homogénea en el tiempo

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} = 0{,}3\left(-3e^{-t} + 4e^{-2t}\right)$$

d) La respuesta forzada en el plano s viene dada por

$$\boldsymbol{x}(s) = \Phi(s)Bu(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$y(s) = C\boldsymbol{x}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \frac{0{,}3}{(s+1)(s+2)}$$

Luego respuesta forzada en el tiempo es

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\boldsymbol{x(s)}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u(t) - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{y(s)\right\} = 0{,}3\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

e) Notar que

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u(t) - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

de aquí es inmediato notar que

$$\boldsymbol{x}_{ss}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\boldsymbol{x}_{tr}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{ss}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

□