

Continuidad. Continuidad uniforme

- Álgebra de funciones continuas.
- Ejemplos de funciones continuas.
- Continuidad y compacidad.
- Continuidad de la inversa de una función continua.
- Continuidad uniforme.

Álgebra de funciones continuas.

A lo largo de la clase de hoy, otra vez X e Y son espacios métricos con distancias d_X y d_Y , respectivamente, y $E \subset X$.

Teor.: Sean $p \in X$ y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) continuas en p .

Entonces $(f + g)$, (fg) y, si $g(p) \neq 0$, (f/g) son continuas en p .

Dem.: Si p es un punto aislado de X , las tres funciones son continuas en p .

Si p es un punto de acumulación de X , el teorema es consecuencia de las respectivas propiedades algebraicas de límites de funciones. **Ej.** \square

Consideremos \mathbb{R}^k dotado de la métrica inducida por la norma euclidiana $\|\cdot\|$:

dados $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \left[\sum_{i=1}^k |u_i - v_i|^2 \right]^{1/2}.$$

Teor.: a) Sean $p \in X$ y $f_1, \dots, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por $\mathbf{f}(x) := (f_1(x), \dots, f_k(x))$, $x \in X$.

Entonces, \mathbf{f} es continua en p si y sólo si f_1, \dots, f_k son continuas en p .

b) Sean $p \in X$ y $\mathbf{f}, \mathbf{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ continuas en p .

Entonces, $(\mathbf{f} + \mathbf{g})$ y $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})$ son continuas en p .

Dem.: a) $\boxed{\implies}$ Sea \mathbf{f} continua en p .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d(x, p) < \delta, \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(p)\| < \varepsilon$$

$$\implies |f_i(x) - f_i(p)| \leq \left[\sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(p)|^2 \right]^{1/2} = \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(p)\| < \varepsilon$$

$$\implies f_i \text{ continua en } p, i = 1, \dots, k.$$

$\boxed{\impliedby}$ Sean f_1, \dots, f_k continuas en p .

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0 : \forall x \in X : d(x, p) < \delta_i, |f_i(x) - f_i(p)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Sea $\delta := \min \{\delta_1, \dots, \delta_k\} > 0$.

Entonces, $\forall x \in X : d(x, p) < \delta \leq \delta_i, i = 1, \dots, k$,

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(p)\| = \left[\sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(p)|^2 \right]^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{1/2} = \varepsilon$$

$\implies \mathbf{f}$ continua en p .

b) **Ej.** \square

Ejemplos de funciones continuas.

Función constante: $f : X \rightarrow Y,$
 $x \mapsto c.$ f es Lipschitz continua.

Proyección i -ésima: $\phi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R},$
 $\mathbf{x} \mapsto x_i,$ donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k).$
 $|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\mathbf{y})| = |x_i - y_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \implies \phi_i$ es Lipschitz continua.

Función monomial: $q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R},$
 $\mathbf{x} \mapsto x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$ donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ y
 $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$
Producto de proyecciones $\implies q$ es continua.

Función polinomial: $p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R},$
 $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}),$ donde p polinomio en $x_1, \dots, x_k.$
Suma de funciones monomiales $\implies p$ es continua.

Función racional: $r : E \rightarrow \mathbb{R},$
 $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x})/q(\mathbf{x}),$ donde p, q son polinomios en
 x_1, \dots, x_k y $E \subset \mathbb{R}^k,$ tales que $q(\mathbf{x}) \neq 0 \ \forall \mathbf{x} \in E.$
Cociente de polinomios en el que no se anula el denominador $\implies r$ es continua.

Función distancia a un punto: $d(\cdot, p) : E \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto d(x, p),$ donde $E \subset X, p \in X.$

$$\forall x, y \in E, d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p) \implies d(x, p) - d(y, p) \leq d(x, y)$$

$$\forall x, y \in E, d(y, p) \leq d(y, x) + d(x, p) \implies -d(y, x) \leq d(x, p) - d(y, p)$$

$$\implies -d(x, y) \leq d(x, p) - d(y, p) \leq d(x, y)$$

$$\implies |d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y) \implies d(\cdot, p) \text{ es Lipschitz continua.}$$

Función norma: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un E.V.N. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto \|x\|.$

$$\|x\| = \|x - \mathbf{0}\| = d(x, \mathbf{0}) \implies \|\cdot\| \text{ es Lipschitz continua.}$$

Norma de una función continua: Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua. Entonces la función

$X \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto \|f(x)\|,$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Continuidad y compacidad.

Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$, entonces:

$$\forall E \subset X, \quad E \subset f^{-1}(f(E))$$

y

$$\forall G \subset Y, \quad f(f^{-1}(G)) \subset G.$$

Teor.: Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Si $E \subset X$ es compacto, entonces, $f(E)$ también es compacto.

Dem.: Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento por abiertos de $f(E)$:

$$f(E) \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

V_α abierto en $Y \implies f^{-1}(V_\alpha)$ abierto en X .

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha).$$

$\implies \{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ cubrimiento por abiertos de E .

E compacto $\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A : E \subset \bigcup_{n=1}^N f^{-1}(V_{\alpha_n})$.

$$\implies f(E) \subset f\left(\bigcup_{n=1}^N f^{-1}(V_{\alpha_n})\right) = \bigcup_{n=1}^N f(f^{-1}(V_{\alpha_n})) \subset \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$$

$$\implies f(E) \subset \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n} \implies f(E) \text{ compacto. } \square$$

Teor.: Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es cerrado y f es acotada.

Dem.: El teorema anterior $\implies f(X)$ es compacto.

$\implies f(X)$ cerrado y acotado.

$f(X)$ acotado $\iff f$ es acotada. \square

Teor.: Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en X ; es decir,

$$\exists p, q \in X : f(p) = \sup_{x \in X} f(x) \quad \text{y} \quad f(q) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Dem.: El teorema anterior $\implies f(X)$ es cerrado y acotado.

$f(X) \subset \mathbb{R}$ acotado $\implies \exists M = \sup_{x \in X} f(x)$ y $m = \inf_{x \in X} f(x)$.

$f(X)$ cerrado $\implies M \in f(X)$ y $m \in f(X) \implies$

$\exists p, q \in X : f(p) = M = \sup_{x \in X} f(x)$ y $f(q) = m = \inf_{x \in X} f(x)$. \square

Ejemplos que muestran la necesidad de la compacidad en estos teoremas.

Ejemplo: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua con E acotado pero $f(E)$ no.

Sea $E \subset X : \exists p \in X \setminus E$, punto de acumulación de E (de modo que E no es compacto).

Sea $f(x) := \frac{1}{d(x,p)}$, $x \in E$.

$d(\cdot, p)$ continua y estrictamente positiva $\implies f$ continua.

p punto de acumulación de $E \implies \exists \{x_n\} \subset E : x_n \xrightarrow{n} p$
 $\implies d(x_n, p) \xrightarrow{n} 0 \implies f(x_n) \xrightarrow{n} +\infty \implies f$ no acotada.

Ejemplo: $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada que no alcanza su máximo.

Sean E y p como antes (de modo que otra vez E no es compacto).

Sea $g(x) := \frac{1}{1+d(x,p)}$, $x \in E$. $\implies g$ continua.

Sea $\{x_n\} \subset E : x_n \xrightarrow{n} p$ como antes $\implies g(x_n) \xrightarrow{n} 1$.

Como $g(x) < 1 \ \forall x \in E \implies \sup_{x \in X} g(x) = 1$, pero $\nexists x \in E : g(x) = 1$.

En ambos casos, no hay contradicción con los teoremas anteriores, porque E no es compacto.

Continuidad de la inversa de una función continua.

Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ es **biyectiva**, existe su **función inversa**:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto !x : f(x) = y, \quad \text{de modo que} \quad \begin{cases} f(f^{-1}(y)) = y & \forall y \in Y, \\ f^{-1}(f(x)) = x & \forall x \in X. \end{cases}$$

¡Cuidado! El mismo símbolo, f^{-1} , se usa para dos cosas distintas:

- la **función inversa de f** (si f es biyectiva);
- la **preimagen de f** (para cualquier f).

Si f es biyectiva, la preimagen de f es la imagen de f^{-1} :

$$\forall E \subset X, \quad \underbrace{f^{-1}(E)}_{\text{preimagen de } E \text{ por } f} = \underbrace{(f^{-1})(E)}_{\text{imagen de } E \text{ por } f^{-1}}.$$

Ej. \therefore Demuestra que, si f es biyectiva, $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E) \quad \forall E \subset X$.

Teor.: Sea $f : X \rightarrow Y$ biyectiva y continua. Si X es compacto, entonces $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua.

Dem.: Usaremos la caracterización topológica de la continuidad:

$$f^{-1} \text{ continua} \iff \forall F \subset X \text{ cerrado, } (f^{-1})^{-1}(F) \text{ es cerrado.}$$

Sea $F \subset X$ cerrado. X compacto $\implies F$ compacto.

f continua y F compacto $\implies f(F)$ compacto $\implies f(F)$ cerrado
 $\implies (f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ cerrado $\implies F$ continua. \square

Ejemplo que muestra la necesidad de la compacidad en este teorema.

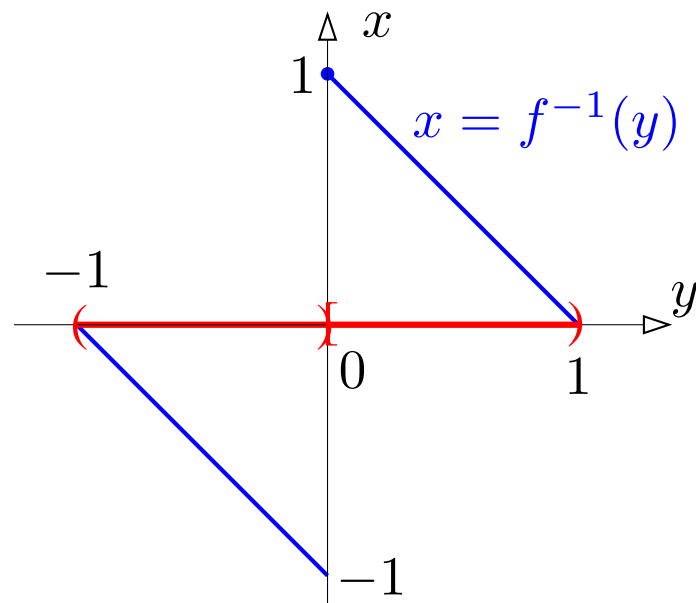
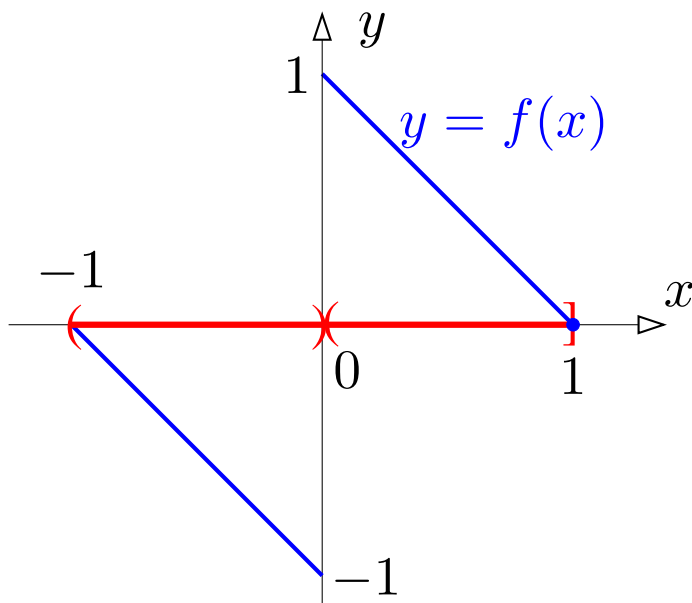
Ejemplo: función biyectiva y continua con inversa discontinua.

Sean $X := \underbrace{(-1, 0) \cup (0, 1]}_{\text{no compacto}} \subset \mathbb{R}$ y $f(x) := \begin{cases} -1 - x, & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

f es inyectiva y definiendo $Y := f(X) = (-1, 1)$, $f : X \rightarrow Y$ es **biyectiva**.

$f|_{(-1,0)}$ y $f|_{(0,1]}$ son continuas $\implies f$ **continua**. Ej.

Su inversa $f^{-1}(y) := \begin{cases} -1 - y, & \text{si } -1 < y < 0, \\ 1 - y, & \text{si } 0 \leq y < 1, \end{cases}$ es **discontinua** en $y = 0$.



Continuidad uniforme.

Def.: $f : X \rightarrow Y$ es **uniformemente continua** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \forall y \in X : d_X(x, y) < \delta, d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Si comparamos con la definición de continuidad global (es decir, continuidad en todo punto de X),

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X : d_X(x, y) < \delta, d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

notamos que en la definición de continuidad global, δ puede variar de un punto x a otro, mientras que en la de continuidad uniforme, un único δ debe servir para todos los puntos $x \in X$.

Ejemplo: f Lipschitz continua $\implies f$ uniformemente continua.

Dem.: Si $\exists L > 0 : \forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$, entonces
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta,$
 $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) < L \delta = \varepsilon. \quad \square$

Ejemplo: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto x^2,$ es continua, pero no uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Por el absurdo, supongamos f uniformemente continua.

$$\implies \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta, |x^2 - y^2| < \varepsilon.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $y = x + \frac{\delta}{2}$, de modo que $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$\implies |x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| = \frac{\delta}{2} |x + y| = \frac{\delta}{2} \left| 2x + \frac{\delta}{2} \right|.$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\delta}{2} \left| 2x + \frac{\delta}{2} \right| < \varepsilon, \text{ con } \delta > 0 \text{ independiente de } x.$$

Pero tomando $x_n \xrightarrow{n} \infty \implies \frac{\delta}{2} \left| 2x_n + \frac{\delta}{2} \right| \xrightarrow{n} \infty. \triangleright=\triangleleft \quad \square$

Ejemplo: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$
 $x \mapsto \frac{1}{x},$ es continua, pero no uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$. Por el absurdo, supongamos f uniformemente continua.

$$\implies \exists \delta > 0 : \forall x, y > 0 : |x - y| < \delta, \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \varepsilon.$$

Para cada $x > 0$, sea $y = x + \frac{\delta}{2}$, de modo que $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$\implies \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y-x|}{xy} = \frac{\delta}{x(2x+\delta)} \implies \forall x > 0, \frac{\delta}{x(2x+\delta)} < \varepsilon.$$

Pero, como $\delta > 0$ no depende de x , tomando $x_n \xrightarrow{n} 0$

$$\implies \frac{\delta}{x_n(2x_n+\delta)} \xrightarrow{n} \infty. \triangleright=\triangleleft \quad \square$$

Teor.: Sean $f : X \rightarrow Y$ continua y X compacto.

Entonces, f es uniformemente continua.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$.

$$f \text{ continua} \implies \forall p \in X, \exists \delta_p > 0 : f(B_{\delta_p}^X(p)) \subset B_{\varepsilon/2}^Y(f(p)). \quad (1)$$

Consideremos el siguiente cubrimiento: $X \subset \bigcup_{p \in X} B_{\delta_p/2}^X(p)$.

$$X \text{ compacto} \implies \exists p_1, \dots, p_N \in X : X \subset \bigcup_{n=1}^N B_{\delta_{p_n}/2}^X(p_n). \quad (2)$$

$$\text{Sea } \delta := \min \left\{ \frac{\delta_{p_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{p_N}}{2} \right\} > 0. \quad (3)$$

$$\text{Sean } p, q \in X : d_X(p, q) < \delta. \quad (4)$$

$$(2) \implies \exists n \in \{1, \dots, N\} : p \in B_{\delta_{p_n}/2}^X(p_n) \implies d_X(p, p_n) < \delta_{p_n}/2$$

$$\implies d_X(p_n, q) \leq d_X(p_n, p) + d_X(p, q) \stackrel{(4)}{<} (\delta_{p_n}/2) + \delta \stackrel{(3)}{\leq} \delta_{p_n}$$

$$\implies q \in B_{\delta_{p_n}}^X(p_n). \text{ Como } p \in B_{\delta_{p_n}/2}^X(p_n) \subset B_{\delta_{p_n}}^X(p_n), \text{ entonces}$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} f(q) \in B_{\varepsilon/2}^Y(f(p_n)) \text{ y } f(p) \in B_{\varepsilon/2}^Y(f(p_n))$$

$$\implies d_Y(f(p), f(q)) \leq \underbrace{d_Y(f(p), f(p_n))}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d_Y(f(p_n), f(q))}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Entonces, f es uniformemente continua. \square