

Listado 5 ALGEBRA III 525201-0: Matriz representante y Diagonalización

1. Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, $D := \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ matriz diagonal. Demuestre que
 - a) Si $B := (b_1 | b_2 | \dots | b_p)$, entonces $AB = (Ab_1 | Ab_2 | \dots | Ab_p)$.
 - b) Si $B := (b_1 | b_2 | \dots | b_p)$, entonces $BD = (\alpha_1 b_1 | \alpha_2 b_2 | \dots | \alpha_p b_p)$.
 - c) Si además $m = p$, entonces $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
2. Sean $B_1 := \{(1, 2), (1, 0)\}$ y $B_2 := \{(a, b), (c, d)\}$ bases de \mathbb{R}^2 , tales que la matriz de paso de B_1 a B_2 es $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los vectores que componen la base B_2 .
3. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$, cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas respectivas es
$$[T] := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
 - a) Determine la regla de correspondencia de T .
 - b) Caracterice los elementos de $\text{Ker}(T)$ y de $\text{Im}(T)$.
 - c) Determine una base de $\text{Ker}(T)$ y de $\text{Im}(T)$, así como la nulidad y el rango de T .
4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x, y) := (ax + by, cx + dy)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (parámetros fijos). Demuestre que si $(a - d)^2 + 4bc > 0$, entonces T es diagonalizable.
5. Sea $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ tal que $\forall p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $T(p) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ viene dada $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) := xp(x) + p(0)$. Considerando $B_1 := \{1, t\}$ y $B_2 := \{1, t, t^2\}$ bases canónicas de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente:
 - a) determine la matriz asociada a S .
 - b) sea $p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definido por $\forall t \in \mathbb{R} : p(t) := 2 - 5t$. Determine $S(p)$, y verifique la identidad que la relaciona con su vector de coordenadas y matriz asociada.
 - c) caracterice los elementos de $\text{Ker}(S)$ y de $\text{Im}(S)$.
 - d) determine una base de $\text{Ker}(S)$ y de $\text{Im}(S)$, así como la nulidad y el rango de S .
6. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, B_1 y B_2 bases canónicas de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 , $[\text{Im}(T)]_{B_2} := \{[T(v)]_{B_2} : v \in \mathbb{R}^2\}$ es generado por $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ y $w_3 := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, siendo $a \in \mathbb{R}$.
 - a) Determine una base de $\text{Im}(T)$ y el rango de T , según los valores admisibles que puede tomar el parámetro a .
 - b) Si $a = -2$ y $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es tal que $[p]_{B_2} := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, ¿pertenece p a $\text{Im}(T)$? En caso afirmativo, expresar p como combinación lineal de la base de $\text{Im}(T)$ correspondiente.

7. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ definidas, para cualquier $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$T(p) := \int_{-1}^1 p(t) dt \quad \wedge \quad S(p) := (p(-1), p(0), p(1)).$$

- Determine una base y la dimensión de $\text{Ker}(T)$.
 - ¿Es T sobreyectiva? Justifique su respuesta.
 - Demuestre que $\text{Ker}(S) \subset \text{Ker}(T)$ (inclusión estricta),
i.e. $\text{Ker}(S) \subseteq \text{Ker}(T) \wedge \exists q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : q \in \text{Ker}(T) \wedge q \notin \text{Ker}(S)$.
8. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que su matriz representante, respecto de cierta base $B := \{v_1, v_2, v_3\}$, viene dada por:

$$a) A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c) A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) A := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Determine cuáles de las matrices anteriores conduce a afirmar que T es diagonalizable. En los casos afirmativos (precisando el cuerpo \mathbb{K} de ser necesario), determine una base de $\mathbb{K}^{3 \times 1}$ formada por vectores propios de A , y la matriz diagonal que es semejante a A .
- Para cada matriz A , y considerando sus valores propios, determine el valor de $\det(A)$, y decidir si T es automorfismo.

9. Diagonalizar, si es posible, la matriz siguiente $A := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -i & i & 1 \\ 1+i & -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix}$.

10. Determine si los siguientes endomorfismos son diagonalizables:

- $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definido $\forall z \in \mathbb{C} : G(z) := \bar{z}$, considerando \mathbb{C} un espacio vectorial real.
- $S : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, definido por $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : S(x, y, z) := (y, z, x)$, considerando \mathbb{C}^3 como \mathbb{C} -espacio vectorial.
- $E : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definido por $\forall p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R} : E(p)(t) := tp'(t) - p(t)$.

11. Sea $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k^2 - 1 & 6 & k^3 + 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- Sabiendo que $\lambda = 6$ es raíz doble del polinomio característico de A , determinar para qué valores del parámetro k la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.
- Para los casos en que A es diagonalizable, determinar la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D correspondiente.

12. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, con valores propios $1, -2, 0$ y correspondientes vectores propios, identificados por sus vectores de coordenadas, respecto de la base canónica, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine la definición de T .

13. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V , $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, distintos entre sí, y $T \in \mathcal{L}(V)$ que verifica: $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_1 v_2$, $T(v_3) = \lambda_2 v_3$. ¿Será T diagonalizable? Justifique su respuesta. Además, resolver en V : $T(v) = (\lambda_1 + \lambda_2)v$, $T(v) = \theta$, $T(v) = 2\lambda_1 v$.

14. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial (infinito o finito dimensional), y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = T$. Determine $\sigma(T)$ y los espacios propios respectivos.

15. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, definido por $p \mapsto T(p)$ donde $\forall x \in \mathbb{R} : T(p)(x) := (a - b + 4c) + (3a + 2b - c)x + (2a + b - c)x^2$, cuando $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = a + bx + cx^2$.

- Considerando la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, determine la matriz que representa a T .
- Analice si T es o no diagonalizable. En caso de serlo, indique la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ correspondiente.
- Considere $B_1 := \{1 - x, 1 + x, x + x^2\}$ otra base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine $[T]_{B_1}^{B_1}$, de al menos dos formas distintas.

16. Sea $V := \mathcal{C}(\mathbb{R})$, y $T \in \mathcal{L}(V)$, donde, para cada $f \in V$, $T(f) \in V$ viene definida

$$\forall x \in \mathbb{R} : T(f)(x) := \int_0^x f(t)dt. \text{ Pruebe que } T \text{ no posee valores propios.}$$

17. Sean $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}$, con los cuales se construye la matriz

$$C_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Demostrar que el polinomio característico de C_n es

$$p(\lambda) := (-1)^n (\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0).$$

18. Se dice que una matriz cuadrada A es *nilpotente* si $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = \Theta$. Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es nilpotente, entonces $\lambda = 0$ es el único valor propio de A , de multiplicidad algebraica n .

19. Considere la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Evaluando A^2 , A^3 , etc., determine una expresión que indique el valor de A^m , para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Deducir el valor de $(A + 2I_3)^m$, para $m \in \mathbb{N}$ arbitrario.

20. Para calcular $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m$, siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable, se procede de la siguiente manera. Primero, diagonalizar la matriz A , identificando la matriz que diagonaliza $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Tener en cuenta la propiedad $\forall m \in \mathbb{N} : A^m = P D^m P^{-1}$.

Segundo, calcular $B := \lim_{m \rightarrow +\infty} D^m$, y si existe entonces $\lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = P B P^{-1}$.

Aplique el procedimiento anterior a la matriz $A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, con V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\alpha \in \sigma(T)$. Considere $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, tal que

$$\forall t \in \mathbb{R} : p(t) := \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j, \text{ con } \{\alpha_j\}_{j=0}^m \subseteq \mathbb{R}. \text{ Esto induce la aplicación } p(T) : V \rightarrow V, \text{ definida}$$

$$\text{por } p(T) := \sum_{j=0}^m \alpha_j T^j, \text{ con la convención } T^0 := \tilde{I}. \text{ Demuestre que } p(T) \in \mathcal{L}(V) \text{ y } p(\alpha) \in \sigma(p(T)).$$

22. Resolver el siguiente sistema de recurrencias lineales:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+,$$

considerando que se conoce la información en $n = 0$. ¿Existirá valor límite, cuando $n \rightarrow +\infty$? De ser así, determine dicho(s) valor(es).