

Espacios métricos.

- **Espacios métricos.**
- **Espacios vectoriales normados (E.V.N.).**
- **Bolas en un espacio métrico.**

Espacios métricos.

Def.: Sea X un conjunto cualquiera. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica** (o **distancia**) en X si:

- $\forall p, q \in X : p \neq q, d(p, q) > 0$ y $\forall p \in X, d(p, p) = 0$;
- $\forall p, q \in X, d(p, q) = d(q, p)$ (**simetría**);
- $\forall p, q, r \in X, d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (**desigualdad triangular**).

Ejemplos:

- $X = \mathbb{R}, d(x, y) := |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (**métrica usual en \mathbb{R}**).
- $X = \mathbb{C}, d(x, y) := |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$ (**métrica usual en \mathbb{C}**).
- X un conjunto cualquiera, $d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y, \end{cases}$ (**métrica discreta**).
- Si d es una métrica en X e $Y \subset X$, entonces, la restricción de d a $Y \times Y$ es una métrica en Y (**métrica inducida**).

Ej.

Demuestra que las funciones d en los ejemplos anteriores son métricas.

Espacios vectoriales normados (E.V.N.)

Def.: Sea E un espacio vectorial real (o complejo).

La función $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** si:

- $\forall x \in E : x \neq 0, \quad \|x\| > 0 \quad \text{y} \quad \|0\| = 0;$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} (\text{o resp. } \mathbb{C}), \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$
- $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Un espacio vectorial E dotado de una norma $\|\cdot\|$, se denomina un **espacio vectorial normado (E.V.N.)**.

Prop.: Si $\|\cdot\|$ es una norma en E , entonces $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in E$, es una métrica en E .

Dem.: Ej.

Ejemplos: $E = \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

- $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^k |x_i|$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma uno**);
- $\|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{1/2}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma euclídea**);
- $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ (**norma infinito**);

Ej.

Demuestra que las tres son normas en \mathbb{R}^k .

Ejemplo: Sea X un conjunto cualquiera. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función acotada**, si su imagen, $f(X) := \{f(x), x \in X\} \subset \mathbb{R}$, es un subconjunto acotado de \mathbb{R} .

Sean

$$\mathcal{B}(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ acotada} \right\} \text{ y}$$

$$\forall f \in \mathcal{B}(X), \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (\text{norma infinito}).$$

Ej.

Demuestra que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ una norma en $\mathcal{B}(X)$.

Bolas en un espacio métrico.

Def.: Sean d una métrica en E , $r > 0$ y $p \in E$.

- La **bola abierta de radio r y centro p** es

$$B_r(p) := \{q \in E : d(q, p) < r\}.$$

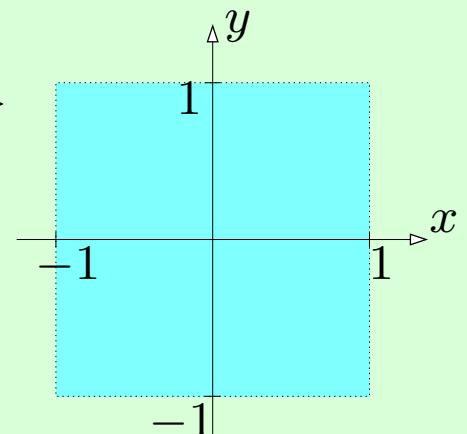
- La **bola cerrada** de radio r y centro p es $B_r[p] := \{q \in E : d(q, p) \leq r\}$.

Si no hay confusión posible, a las bolas abiertas las llamamos **bolas** a secas.

Ej.: Dibuja la bola de radio 1 y centro $(0, 0)$ en $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^2 .

Sol.:

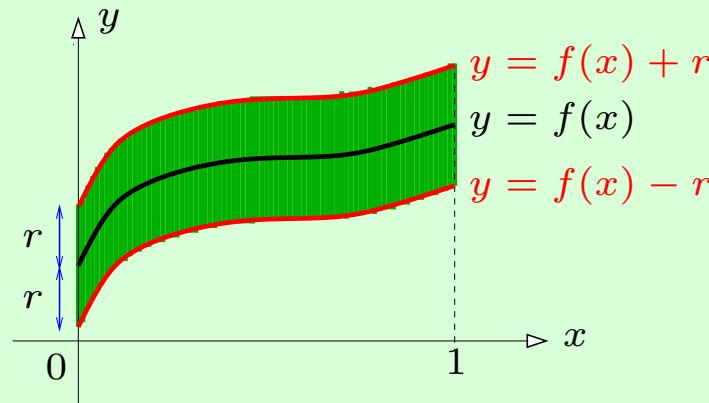
$$\begin{aligned} B_1((0, 0)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (0, 0)\|_\infty < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ e } |y| < 1\} \\ &= (-1, 1) \times (-1, 1). \quad \square \end{aligned}$$



Ej.: Dados $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $r > 0$, da una interpretación gráfica de $B_r(f)$ en $\mathcal{B}([0, 1])$.

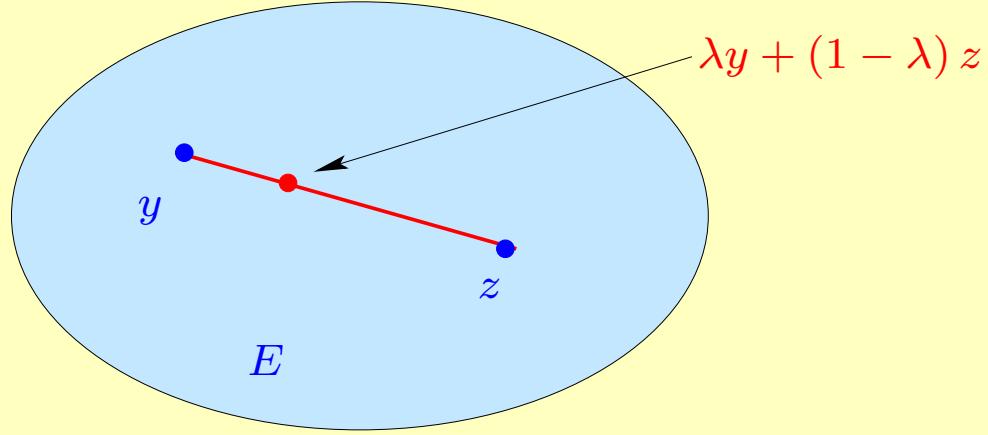
Sol.: $B_r(f) = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ acotada} : \|g - f\|_\infty < r\}.$

$$\begin{aligned}\|g - f\|_\infty < r &\iff \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| < r \\ &\implies |g(x) - f(x)| < r \quad \forall x \in [0, 1] \\ &\iff -r < g(x) - f(x) < r \quad \forall x \in [0, 1] \\ &\iff f(x) - r < g(x) < f(x) + r \quad \forall x \in [0, 1] \quad \square\end{aligned}$$



Entonces, $g \in B_r(f)$ si y sólo si su gráfica cae en la franja verde y no se acerca arbitrariamente a las curvas rojas (en cuyo caso el supremo sería **igual** a r). \square

Def.: Sean X un E.V.N. y $E \subset X$. E es **convexo** si $\forall y, z \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda y + (1 - \lambda) z \in E$.



Prop.: En todo E.V.N., las bolas son convexas.

Dem.: Sean X un E.V.N., $x \in X$ y $r > 0$. Veremos que $B_r(x)$ es convexa. Sean $y, z \in B_r(x)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces $\|y - x\| < r$, $\|z - x\| < r$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\lambda z + (1 - \lambda) y - x\| &= \|\lambda(z - x) + (1 - \lambda)(y - x)\| \\ &\leq \underbrace{|\lambda|}_{=\lambda} \underbrace{\|z - x\|}_{<r} + \underbrace{|1 - \lambda|}_{=1-\lambda} \underbrace{\|y - x\|}_{<r} < \lambda r + (1 - \lambda) r = r \\ \implies \lambda z + (1 - \lambda) y &\in B_r(x) \implies B_r(x) \text{ es convexa. } \square \end{aligned}$$

Def.: Sea d una métrica en E y $F \subset E$. F es **acotado**, si está contenido en una bola, en cuyo caso se define el **diámetro** de F como $\text{diam}(F) := \sup_{x,y \in F} d(x,y)$.

Ej.: Demuestra que, $\forall F$ acotado, $\text{diam}(F)$ está bien definido.

Sol.: Como F es acotado, $\exists p \in E$ y $r > 0 : F \subset B_r(p)$. Sean $x, y \in F$.
 $F \subset B_r(p) \implies x, y \in B_r(p) \implies d(x, p) < r$ y $d(y, p) < r$
 $\implies d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < r + r = 2r$.

Entonces, el conjunto $\{d(x, y), x, y \in F\} \subset \mathbb{R}$ es acotado y, por la completitud de \mathbb{R} , tiene supremo. Ese supremo, $\sup_{x,y \in F} d(x, y)$, es el diámetro de F . \square

Ej.: Sean $p \in E$ y $r > 0$. Demuestra que $\text{diam}(B_r(p)) \leq 2r$ y da un ejemplo en el que el diámetro sea estrictamente menor que $2r$.

Sol.: • Sean $x, y \in B_r(p) \implies d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < 2r$.

Entonces, $\text{diam}(B_r(p)) = \sup_{x,y \in B_r(p)} d(x, y) \leq 2r$.

• Sea el espacio métrico $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ con la métrica usual inducida por la de \mathbb{R} .

Entonces, $B_1(0) = \{n \in \mathbb{Z} : |n - 0| < 1\} = \{0\}$

$\implies \text{diam}(B_1(0)) = 0 < 2$. \square