Criterios clásicos. Convergencia absoluta.

- Criterios de la raíz y del cociente.
- Series alternadas.
- Algebra de series.
- Convergencia absoluta.
- Reordenamientos.

Criterios de la raíz y del cociente.

Teor. [Criterio de la raíz]: Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Entonces:

a) si $\alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

b) si $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge;

c) Si $\alpha = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger o no.

Dem.: a) Si $\alpha < 1$, sea $\beta \in \mathbb{R}: \ \alpha < \beta < 1$.

Entonces, $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \sqrt[n]{|a_n|} < \beta \implies |a_n| < \beta^n$.

Como $0 < \beta < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge.

Entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Sea $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$ tal que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k} \alpha$.

Como $\alpha > 1$, $\exists K \in \mathbb{N}: \ \forall k \geq K, \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$

$\implies \forall k \geq K, \ |a_{n_k}| > 1 \implies a_n \overset{n}{\not\to} 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

c) Lo veremos en los ejemplos.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow{n} \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{1}{2} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \xrightarrow{n} 2 \implies \alpha = 2 > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ no converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n} 1 \implies \alpha = 1$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. $\square$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Sol.: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \xrightarrow{n} 1 \implies \alpha = 1$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. $\square$

Los dos últimos ejemplos muestran que, cuando $\alpha = 1$, el criterio de la raíz no da información acerca de la convergencia de la serie.

Teor.: Sean $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

a) $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

b) $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

Dem.: a) Sea $\alpha := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Si $\alpha = \infty$, no hay nada que demostrar.

Si $\alpha < \infty$, sea $\beta > \alpha$. Entonces, $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \frac{a_n+1}{a_n} < \beta \implies$

$$a_{N+1} < \beta a_N,$$

$$a_{N+2} < \beta a_{N+1} < \beta^2 a_N,$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} < \beta a_{N+k-1} < \beta^k a_N \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo $n := N + k: \quad a_n < \beta^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N$

$$\implies \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_N}{\beta^N}}\, \beta \xrightarrow{n} \beta \implies \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \beta \quad \forall \beta > \alpha$$

$$\implies \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha := \limsup \frac{a_n+1}{a_n}.$$

b) $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

Teor. [Criterio del cociente]: Sean $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\exists \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Dem.: a) El teorema anterior $\implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

Entonces, el criterio de la raíz $\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Más adelante (pag. 9), demostraremos que, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

b) $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1.$

$\implies |a_N| < |a_{N+1}| < \cdots < |a_n| \quad \forall n \geq N$

$\implies \forall n \geq N : \ |a_n| \geq |a_N| > 0 \implies a_n \overset{n}{\not\to} 0$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. $\square$

Series alternadas.

Def.: Se denomina **serie alternada** a una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$.

Teor. [Criterio de Leibniz]: Sea $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie alternada. Si

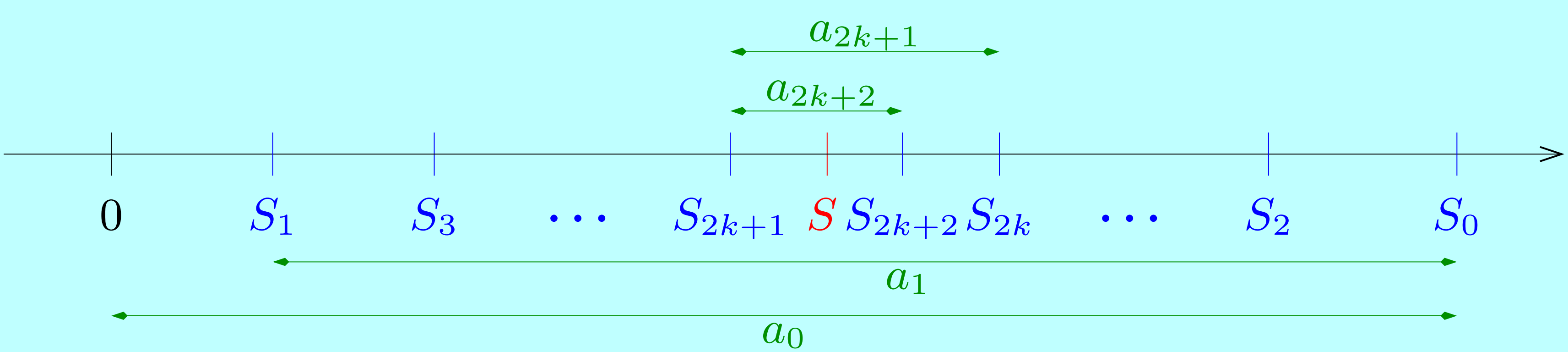
a) $a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y

b) $a_n \xrightarrow{n} 0$,

entonces la serie converge.

Además, $\forall N \in \mathbb{N}$, las sumas parciales N-ésimas $S_N := \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$ satisfacen $\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - S_N\right| < a_{N+1}$.

Dem.: Lo siguiente es un esquema de la demostración.



- $0 < S_1 < S_3 < \cdots < S_{2k+1} < S_{2k} < S_0$
  $\Longrightarrow$ $\{S_{2k+1}\}$ sucesión creciente y acotada $\Longrightarrow$ $\exists \lim S_{2k+1} =: S_-$.
- $S_0 > S_2 > \cdots > S_{2k} > S_{2k+1} > S_1 > 0$
  $\Longrightarrow$ $\{S_{2k}\}$ sucesión decreciente y acotada $\Longrightarrow$ $\exists \lim S_{2k} =: S_+$.
- $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \xrightarrow{k} 0 \Longrightarrow S_- = \lim S_{2k+1} = \lim S_{2k} = S_+$.
  $\overset{\boxed{\textbf{Ej.}}}{\Longrightarrow}$ $\exists \lim S_n =: S = S_+ = S_- \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- Además, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|S - S_{2k}| < a_{2k+1}$ y $|S - S_{2k+1}| < a_{2k+2}$.
  $\Longrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \ \left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - S_N\right| = |S - S_N| < a_{N+1}$. $\square$

Algebra de series.

Teor.: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dem.: a) Sean $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$, las sumas parciales de las respectivas series. Entonces, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ son

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + T_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, como $\exists \lim (S_n + T_n) = \lim S_n + \lim T_n$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim (S_n + T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) **Ej.** □

Convergencia absoluta.

Def.: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente**, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teor.: Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

Dem.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Criterio de Cauchy $\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m \geq n \geq N, \ \sum_{k=n}^{m} |a_n| < \varepsilon$

$\implies \ |\sum_{k=n}^{m} a_n| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_n| < \varepsilon$

Entonces, el criterio de Cauchy $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Este teorema lo hemos usado en esta misma clase, en la demostración de la parte (a) del criterio del cociente.

- Para series de términos positivos, convergencia y convergencia absoluta son lo mismo, pero para series de términos de signos distintos, no.

- Por ejemplo, por el criterio de Leibnitz, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge, pero no converge absolutamente, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge.

- Los criterios de comparación, de la raíz y del cociente son en realidad criterios de convergencia absoluta.

- Cuando una serie converge absolutamente, se puede operar con ella como si fuera una suma finita, pero cuando la convergencia no es absoluta, **¡No!**

- Las propiedades algebraicas que acabamos de demostrar (suma de series y producto de una serie por una constante) valen aunque la convergencia no sea absoluta, pero otras propiedades no. Por ejemplo no vale la **conmutatividad**, como veremos en lo que sigue.

Reordenamientos.

Def.: Sea $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto k_n \end{array}$ una biyección. Sea $a'_n := a_{k_n},\ n \in \mathbb{N}$.
Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ se denomina un **reordenamiento** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Un reordenamiento de una serie se obtiene conmutando sus términos.

- Ingenuamente uno supondría que si una serie converge, entonces todos sus reordenamientos también deberian hacerlo y al mismo límite. Vale decir, que la suma de una serie es conmutativa. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, esto en general es falso.

- Si el reordenamiento de la serie se obtiene mediante finitas conmutaciones, la convergencia de la serie no se altera, ni tampoco la suma de la serie (**Ej.**). Pero para un reordenamiento cualquiera, en general lo anterior no es cierto. De hecho veremos que es cierto, sólo si la serie **converge absolutamente.**

Ejemplo: Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$. Ya vimos que de acuerdo al criterio de Leibnitz esta serie converge, pero no converge absolutamente.

Su suma $S := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ satisface

$$S := \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} - \cdots \implies S < \frac{5}{6}.$$

Consideremos el siguiente reordenamiento de la serie, a cuya suma llamaremos T:

$$T := \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{\frac{5}{6}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{\frac{13}{40}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}}_{> \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} = 0} + \cdots > \frac{5}{6}.$$

Es decir que, si la serie reordenada converge (que de hecho converge), su suma satisface $T > \frac{5}{6}$, de modo que

$$T > \frac{5}{6} > S \implies T \neq S.$$

Como veremos en el próximo teorema, este comportamiento no es peculiar de esta serie, sino que es esperable en cualquier serie que converja no absolutamente.

Teor.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente, pero no absolutamente convergente. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, hay un reordenamiento $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ de la serie tal que sus sumas parciales $S'_n := \sum_{k=1}^{n} a'_k$, $n \in \mathbb{N}$, satisfacen

$$\liminf S'_n = \alpha \qquad y \qquad \limsup S'_n = \beta.$$

Dem.: Ver Teor. 3.54 del libro de Rudin. $\square$

- Como consecuencia de este teorema, reordenando los términos de una serie que **converge no absolutamente**, se puede obtener una serie reordenada que converja a cualquier valor prefijado entre $-\infty$ y $+\infty$ (ambos inclusive).
- En cambio, como se ve en el siguiente teorema, si la serie **converge absolutamente**, todos sus reordenamientos convergen al mismo valor.

Teor.: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a S, entonces todos sus reordenamientos convergen a S.

Dem.: Ver Teor. 3.55 del libro de Rudin. $\square$