Profesores: Rommel Bustinza, Álvaro Guzmán, Mónica Selva.
DIM - CFM

Listado 9: Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

1. Problemas con papel y lápiz

1. Considere las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine cuáles de ellas son simétricas y definidas positivas.
   (b) Determine cuáles de ellas son estrictamente diagonal dominantes (por filas o por columnas).

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & -1 & a \\ -1 & 3 & 0 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine a y b de manera que la matriz sea simétrica y definida positiva.
   (b) Determine a y b de manera que la matriz sea estrictamente diagonal dominante por filas.

3. Considere el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. ¿Convergen los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución exacta de $Ax = b$? Justifique su respuesta. Realice dos iteraciones del método del que pueda asegurar convergencia tomando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Considere el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (a) ¿Es A es estrictamente diagonal dominante? ¿Es A simétrica y definida positiva?
   (b) ¿Cuál método iterativo recomendaría utilizar para resolver el sistema?.
   (c) Realice dos iteraciones con este método tomando $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Se quiere resolver, mediante un esquema iterativo, el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Para ello se descompone A como: $A = M - N$ con M invertible. El esquema general del

algoritmo resultante es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dado el vector inicial } x^{(0)}, \\ \text{for } k = 1, 2, \ldots \\ \quad \big| \quad Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b, \\ \text{end} \end{array}}$$

La matriz de iteración de este algoritmo es $B = M^{-1}N$.

(a) Considere $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix}$. Realice dos iteraciones del esquema resultate partiendo con $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Puede asegurar que este algoritmo converge a la solución exacta del sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué?.

(b) Considere $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Realice dos iteraciones del esquema resultante con $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Puede asegurar la convergencia de este algoritmo a la solución exacta del sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué?.

6. Realice dos iteraciones con los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel aplicados a la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4, \end{aligned}$$

tomando como vector inicial el vector nulo.

7. Analice si el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= -2, \\ -6x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 9. \end{aligned}$$

8. Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas, el método de Jacobi converge a la solución del sistema $Ax = b$, siendo b un vector de $\mathbb{R}^n$.

9. Muestre que si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel aplicados a la solución de $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^2$, divergen.

10. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine las matrices de iteración de Jacobi y Gauss-Seidel para esta matriz.

(b) Analice la convergencia del método de Gauss-Seidel aplicado a un sistema de ecuaciones con esta matriz.

(c) Analice la convergencia del método de Jacobi aplicado a un sistema de ecuaciones con esta matriz.

Observación: Puede ayudarse de MATLAB para responder esta pregunta. Éste es un ejemplo de matriz para la que Jacobi converge y Gauss Seidel diverge.

11. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Muestre que los ceros del polinomio característico de A son $1 - a$ (de multiplicidad 2) y $2a + 1$.

(b) Muestre que A es simétrica y definida positiva si y solo si $-\frac{1}{2} < a < 1$. ¿Qué puede decir sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel si $a \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$?

(c) Muestre que si $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, el método de Jacobi, aplicado a $Ax = b$, diverge.

Observación: En este problema hemos visto ejemplos de matrices para las que Jacobi diverge y Gauss Seidel converge.

12. Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la solución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ son ejemplos de métodos que se construyen al re-escribir $Ax = b$ como $x = Bx + c$[1].

El método de Richardson se construye re-escribiendo $Ax = b$ como sigue: si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $Ax = b$ si y solo si $\alpha Ax = \alpha b$ que, a su vez, es equivalente a $x + \alpha Ax = x + \alpha b \Leftrightarrow x = (I - \alpha A)x + \alpha b$. Dado $x^{(0)}$, el método de Richardson calcula, para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha\, A)x^{(k)} + \alpha\, b.$$

(a) Demuestre que si A es tal que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_{ii} = d$, $d \neq 0$, entonces el método de Richardson aplicado a $Ax = b$ con $\alpha = \frac{1}{d}$ es igual al método de Jacobi.

(b) Demuestre que si los valores propios de A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfacen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, entonces el método de Richardson converge si y solo si $\alpha \in \left]0, \frac{2}{\lambda_1}\right[$.

[1] Tanto Jacobi como Gauss-Seidel convierten $Ax = b$ en $x = Bx + c$ después de descomponer A en $M - N$ con M invertible, con lo que $Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.