Álgebra 1 (525140)
Listado 3
Problemas sobre *Capítulos 1 y 2: Lógica y Conjuntos*
Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 3: Lógica y Conjuntos

Este listado de problemas se ha dividido en cuatro secciones: problemas básicos, problemas intermedios, problemas avanzados y desafíos.

Los problemas básicos te servirán para comprobar si tienes los conocimientos básicos que te permitirán enfrentar los problemas en las dos secciones siguientes. La mayoría de los problemas en certámenes tendrán el nivel de complejidad de los problemas intermedios o avanzados.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas interesantes, pero resolverlos no es parte de los resultados de aprendizaje esperados este curso, inténtalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado. Los problemas marcados con **(V)** serán resueltos en videos que serán publicados en Canvas.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{2, 4, 8, 16, 32, 2^6, 2^7, \dots\}$.
   (b) $]-1, 0]$.
   (c) $[5, +\infty[$.

2. Describa por extensión los siguientes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : -2 \leq x \leq 7\}$.
   (b) $\{5x - 1 : (x \in \mathbb{Z}) \wedge (|2x| \leq 4)\}$.
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6x\}$.
   (d) $\{x^2 : x \in \mathbb{N} \wedge x < 10 \wedge x \text{ es impar}\}$.

2. Problemas intermedios

1. Defina cada uno de los siguientes conjuntos por comprensión y por extensión.

   (a) el conjunto de todos los números naturales cuyo producto por 3 es mayor que su cuadrado.
   (b) el conjunto de las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es un entero positivo menor que 10.
   (c) **(A)** El conjunto de los números reales cuyo producto por 4 es un entero y su valor absoluto es menor que 1.

2. Escriba las siguientes proposiciones en español.

   (a) $\forall\, x \in \mathbb{N} : [\exists\, y \in \mathbb{N} : x = 6y] \to [\exists\, y \in \mathbb{N} : x = 2y]$.
   (b) **(A)** $\forall\, a \in \mathbb{Z} : 3a^2 + a + 10$ es par.
   (c) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : 1 + (-1)^a(2a - 1)$ es múltiplo de 4.
   (d) $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : a^2 + b^2$ es par.

Decida cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas y demuéstrelo.

3. Sean A, B, C y D cuatro conjuntos definidos por:

$$\begin{aligned}
A &= \{2x \,:\, (x \in \mathbb{N}) \wedge ((x < 4) \,\vee\, (x - 5 = 7))\}\,, \\
B &= \{2z - 1 \,:\, (z \in \mathbb{N}) \wedge (z \text{ es par}) \wedge (z \text{ divide a } 12)\}\,, \\
C &= \left\{4 + (-1)^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
D &= \left\{y^2 \,:\, (y \in \mathbb{N}) \wedge (y^2 \leq 16)\right\}.
\end{aligned}$$

Describa por extensión los conjuntos anteriores y determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

(a) $2 \in C$

(b) $3 \in A \wedge 3 \in B$

(c) todos los elementos de B son números primos,

(d) un elemento de D es un número par,

(e) exactamente un elemento de D es impar.

4. Decida si los siguientes pares de conjuntos A y B son iguales. Si no lo son, determine si $A \subseteq B$ o si $B \subseteq A$. Justifique sus respuestas.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0\}$, $\qquad B = \{y \in \mathbb{Z} \,:\, 0 < y < 5\}$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x^2 > x\}$, $\qquad B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(c) $A = \{2k - 1 \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$, $\qquad B = \{2m + 1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, \exists\, k \in \mathbb{Z} \,:\, x = 2k + 1\}$, $\qquad B = \{4n - 1 \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ es cuadrado perfecto y par}\}$, $\qquad B = \{2^x \,:\, x \in \mathbb{N}\}$.

5. Considere

$$\begin{aligned}
A &= \{r \in \mathbb{Q} \,:\, r \geq -1\}, & B &= \{r \in \mathbb{R} \,:\, r > -1\}, \\
C &= \{r \in \mathbb{Z} \,:\, r > -1\}, & D &= \{r \in \mathbb{N} \,:\, r \geq -1\}.
\end{aligned}$$

Por cada par de los conjuntos anteriores:

(a) decida si son iguales,

(b) decida si uno es subconjunto del otro,

(c) determine, si es posible, un elemento del primero que no pertenezca al segundo y un elemento del segundo que no pertenezca al primero.

(d) determine, si es posible, un elemento del primero que pertenezca al segundo y un elemento del segundo que pertenezca al primero.

6. Considere

$$A = \{2^a : a \in \mathbb{Z} \cap [-3, 3]\}, \qquad B = \{x \in\ [-10, 10]\ : \exists k, m \in \mathbb{Z} \text{ tales que } x = 3k + (-1)^m\}.$$

(a) Describa ambos conjuntos por extensión.

(b) Decida si $A \subseteq B$. Justifique su respuesta.

(c) Decida si $B \subseteq A$. Justifique su respuesta.

3. Problemas avanzados

1. Escriba la siguiente proposición en forma simbólica y demuéstrela: *el cuadrado de todo número natural es un número de la forma* $4k, k \in \mathbb{N}$ *o* $4k + 1, k \in \mathbb{N}$.

2. Sean a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c, la longitud de su hipotenusa. Demuestre que si el área de este triángulo es igual a $\dfrac{c^2}{4}$, entonces el triángulo es isósceles.

3. **(A)** Sea a un número entero. Demuestre que $7 + (-1)^a(3a-2)$ es múltiplo de 6 si y solo si a es impar.

4. Demuestre:

   (a) El producto de cualquier par de números impares es impar.

   (b) **(V)** Para todo número entero a se cumple que si a^3 no es múltiplo de 8, entonces a es impar.

   (c) Para todo n par se cumple que $n^2 - 6n + 5$ es impar.

   (d) Para todo par de números enteros a, b se cumple que si $a + b$ es par, entonces $a^2 + b^2$ es par.

   (e) Para todo par de números enteros a, b se cumple que si ab es impar, entonces $a^2 + b^2$ es par.

   (f) $[0, 2] \subseteq \big\{x \in \mathbb{R} : 4x - x^3 + 1 > 0\big\}$

   (g) Si el cuadrado de un número natural n es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 3.

   (h) Para todo par de números enteros a, b se cumple que si $a^2(b^2 - 2b)$ es impar, entonces a y b son impares.

   (i) Un número entero a es par si y solo si $a^2 + 2a + 9$ es impar.

   (j) **(V)** $\{x \in \mathbb{Z} : 7x - 3 \text{ es par}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es impar}\}$.

   Observación: Note que $4f$ puede escribirse de manera equivalente como:

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2 \rightarrow 4x - x^3 + 1 > 0$$

   y $4j$ es equivalente a:

   $$\forall\, x \in \mathbb{Z} : 7x - 3 \text{ es par} \leftrightarrow x \text{ es impar},$$

   o, en lenguaje natural, para todo entero x se cumple que $7x - 3$ es par si y solo si x es impar.

4. Desafíos

1. Demuestre que para todo número entero a se cumple que $a^2 - 3$ no es divisible por 4.

2. Demuestre que para todo par de números enteros a, b se cumple que $a^2 - 4b - 2 \neq 0$.

3. Demuestre $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\} = \big\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \text{ es múltiplo de } 3\big\}$.

4. Demuestre que $\{3a + 5b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

5. Demuestre que $\{12a + 45b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\}$.