

Listado 01: integración
Cálculo II (527150)

1. Determinar las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\int \frac{t^5 - 5t^3 + 2}{t^3} dt$	(j) $\int \frac{1}{9x^2 + 25} dx$	(r) $\int s^{2^s} ds$
(b) $\int \left(x^7 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$	(k) $\int \frac{1}{1 - \sqrt{t}} dt$	(s) $\int \sin(\ln u) du$
(c) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$	(l) $\int e^u e^{-e^u} du$	(t) $\int u^2 \cos(3u) du$
(d) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$	(m) $\int x \arctan x dx$	(u) $\int \frac{3x - 1}{2x^2 - 8x + 8} dx$
(e) $\int \sin^2(x) dx$	(n) $\int \ln^2(x) dx$	(v) $\int \frac{1}{(9 - 4v^2)} dv$
(f) $\int \tan^2(x) dx$	(ñ) $\int u^2 \ln(u) du$	(w) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$
(g) $\int 2t\sqrt{4t - 3} dt$	(o) $\int \sin^5(x) \cos^4(x) dx$	(x) $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$
(h) $\int \frac{1}{x\sqrt{x - 1}} dx$	(p) $\int \sec(x) dx$	(y) $\int \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$
(i) $\int e^{2t} \cos(e^{2t} + 1) dt$	(q) $\int \cos(\sqrt{y}) dy$	(z) $\int \frac{u^2}{\sqrt{25 - 9u^6}} du$

2. Sea r un número real positivo.

(a) Utilizando la sustitución $u = x^r$, determinar $\int \frac{1}{x - x^{r+1}} dx$.

(b) Utilizando el item anterior, determinar $\int \frac{1}{x - x^{100}} dx$.

3. Describir todas las funciones f que satisfagan la ecuación $f''(x) = \cos(2x)$.

4. Considerar las siguientes funciones.

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Verificar que ambas funciones tienen el mismo dominio y la misma derivada.
- Verificar que $f_1 - f_2$ no es constante.
- Concordar estas afirmaciones con la propiedad de que dos primitivas de una misma función sobre el mismo intervalo difieren entre sí en una constante.

5. Una función f satisface las propiedades siguientes.

- Su derivada es la función $1 - 6 \operatorname{sen}(3x)$.
- $f(\pi) = -1$.

Determinar la función f .

6. Una función f satisface las propiedades siguientes.

- Su derivada es la función $\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$.
- Su gráfica contiene al punto $(-5, 0)$.

Determinar la función f .

7. Una función f satisface las propiedades siguientes.

- Su segunda derivada es la función $\frac{x-1}{(x+1)^3}$.
- Su recta tangente en $x = -2$ tiene ecuación $y = x + 5$.

Determinar la función f .

8. Considerar el siguiente desarrollo: se desea determinar la integral indefinida

$$I = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx$$

para lo cual se realiza integración por partes:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \\ dv = \cos(x) dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx \\ v = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Luego de reemplazar queda

$$I = 1 + \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} dx = 1 + I$$

así que, cancelando I en ambos extremos, se concluye $1 = 0$.

¿Cuál es el error en este razonamiento?

9. Con la ayuda de un computador, aproximar el valor de la integral $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ usando 5, 10, 20 y 50 rectángulos.

10. Interpretar cada una de los siguientes límites como sumas de Riemann. Después, obtener el valor de cada límite resolviendo la integral asociada.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(5 + \frac{2i}{n} \right)^{10}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \tan \left(\frac{i\pi}{4n} \right)$$

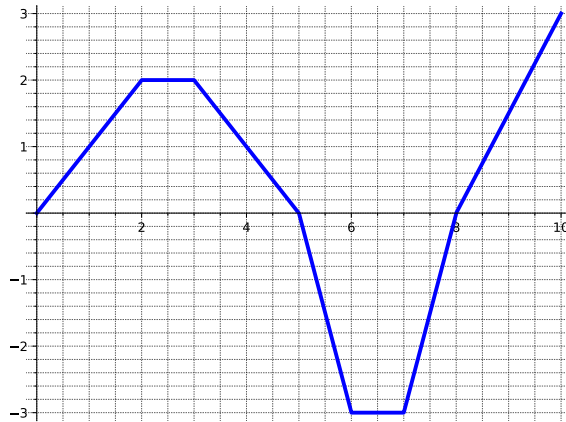
11. Sea $f(x)$ la función graficada en la figura. Calcular las integrales siguientes.

(a) $\int_3^5 f(t) \, dt$

(b) $\int_0^{10} f(t) \, dt$

(c) $\int_2^0 f(t) \, dt$

(d) $\int_8^5 f(t) \, dt$



12. Explicar por qué el siguiente desarrollo es incorrecto.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sec(x) \tan(x) \, dx = \sec(x) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} = -1 - 2 = -3$$

13. Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales.

(a) $\int_1^3 (3x^4 - 2x) \, dx$

(k) $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \, dx$

(b) $\int_0^1 y^2 (y^3 + 1)^5 \, dy$

(l) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} \, dx$

(c) $\int_{-1}^K (1-t)^6 \, dt$

(m) $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5} \, dx$

(d) $\int_r^1 e^r \cos(2t) \, dt$

(n) $\int_0^{\pi} t \sin(3t) \, dt$

(e) $\int_{-16}^{-8} \frac{5}{x} \, dx$

(ñ) $\int_{16}^{25} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \, dx$

(f) $\int_0^5 (|x-2| + 1) \, dx$

(o) $\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{t^3}{(4t^2+9)^{\frac{3}{2}}} \, dt$

(g) $\int_0^1 \cos(3\pi t) \, dt$

(p) $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx$

(h) $\int_1^5 \frac{x}{x^2-4} \, dx$

(q) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+x^2} \, dx$

(i) $\int_1^3 \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

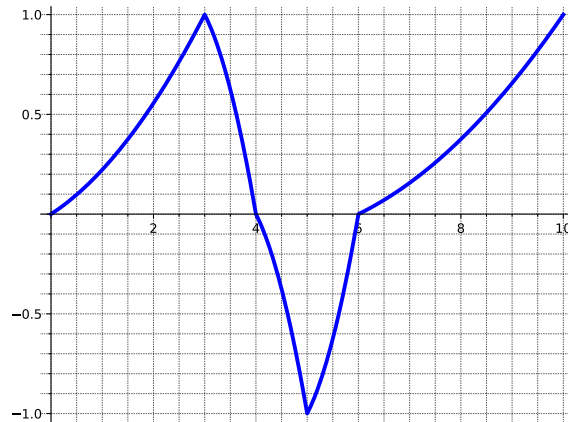
(r) $\int_1^3 t^4 \ln(t) \, dt$

(j) $\int_{-1}^1 \frac{t+1}{t} \, dt$

(s) $\int_0^t e^s \sin(t-s) \, ds$

14. Sea $f(x)$ la función graficada en la figura. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (a) Determinar los puntos de extremo relativo de g .
- (b) Determinar los intervalos de crecimiento de g .
- (c) Determinar los intervalos de concavidad de g .
- (d) Esbozar la gráfica de g .



15. Determinar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $\int_1^x \cos(t^2) dt$

(d) $\int_{2x+1}^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du$

(b) $\int_x^1 \sin(t^2) dt$

(e) $\int_x^{x^3} \frac{1}{1+t^2} dt$

(c) $\int_{-2}^2 e^{x^2} dx$

(f) $\int_x^{2x} \frac{e^u}{e^{u^2}} du$

16. Considerar la función $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}} du$, definida para $x > 0$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

17. Evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2-x} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right)$.

18. Sea f una función continua tal que $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$. Determinar $f(4)$.

19. Usar la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ para justificar que la siguiente identidad es **falsa**.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

20. Decidir cuáles de las siguientes integrales son convergentes. Para las que lo sean, determinar su valor.

(a) $\int_0^{\infty} 5^{-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt$

(b) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2 + 1} dt$

21. Determinar para cuáles valores de p la integral siguiente converge.

$$\int_0^{\infty} x e^{-px} dx$$

22. Determinar cuáles de las siguientes integrales son convergentes.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t} + 2}{t} dt$

(c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^8 + 1} dx$

(d) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

23. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La *transformada de Laplace de f* es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

para los valores de s donde esta integral converja.

Determinar la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = e^t$

(c) $f(t) = \cos(t)$

24. (*Desafío.*) A partir de un esbozo de la gráfica de $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, argumentar una justificación para la propiedad siguiente: si $x > 0$, entonces $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt > 0$.

25. (*Desafío.*) Calcular el valor del límite siguiente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$$

Pista: manipular esta suma para convertirla en una suma de Riemann.

26. (*Desafío.*) Considerar la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ con $x > 0$. De entre todos los intervalos cerrados y de largo $\frac{3}{2}$ del dominio de f , determinar sobre cuál es el área bajo de gráfica de f lo más pequeña posible.
27. (*Desafío.*) Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y decreciente. ¿Es cierto que si $\int_0^{\infty} f(x) dx$ es convergente entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?