UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 521 218 **Certamen 2**

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

FCHH/FPV/fchh **(12.11.2001)**

I. Considere el operador diferencial $L : C^3(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$ definido por

$$L = D^3 + D^2 + D - 3.$$

(1.1) ¿Cuál es la solución general de $Ly = 0$?

(5 pts.)

(1.2) ¿ Cuál método es más eficiente para construir la solución particular de $Ly = h(t)$, si:

1.2.1. $h(t) = e^{t^2}, \quad y(0) = 2.331 \quad y'(0) = 1.345$?

(10 pts.)

1.2.2. $h(t) = 3 + t$?

(7 pts.)

1.2.3. $h(t) = t^5 e^t, \quad y(0) = 2.331 \quad y'(0) = 1.345$?

(8 pts.)

Indicar la etapas a desarrollar en cada método. `No explicite sus cálculos numéricos`.

II. Un sistema masa resorte con masa $2 \quad [Kg.]$ y rigidez $32 \quad [Kg./s^2]$ se somete a un impulso repentino. En el instante inicial la masa está en equilíbrio e inicia su oscilación con una velocidad $12 \quad [m/s]$ hacia arriba.

(2.1) Determine la amplitud del movimiento;

(12 pts.)

(2.2) ¿Qué pasa con la amplitud si se aumenta la *rigidez*, respectivamente, *la masa* ?

(8pts.)

III. Se construye un dispositivo que se puede modelar como un sistema masa resorte sin fricción. La masa unida al resorte es $20 \quad [Kg.]$. ¿ Qué valor de rigidez debe evitarse, si se desea que el dispositivo, expuesto a la fuerza periódica $h(t) = 30\cos 2t$, no presente resonancia?

(10 pts.)

IV. Un sistema masa resorte con amortiguamiento tiene la siguiente característica:

Rigidez $8 \quad [Kg./s^2]$ Masa $1 \quad [Kg.]$ Amortiguamiento $4 \quad [Kg./s]$

El sistema se jala hacia abajo **4** metros de la posición de equilibrio y luego se suelta. Determine la dinámica del sistema.

(20 pts.)

V. Determinar los primeros **4** términos de la solución de las siguientes ecuaciones:

(5.1) $y'' + (\sin x)y = 3x + \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

(5.2) $x^2 y" + (1 + x)y + 2y = 0$, en torno al punto singular regular $x = 0$.

(20 pts.)

RESOLUCIÓN CERTAMEN $N^o 2$

I. $\boxed{\textbf{Pauta Problema } N^0 1}$

El operador L puede escribirse en la forma

$$L = D^3 + D^2 + D - 3 = (D-1)(D^2+2D+3),$$

luego la ecuación diferencial $Ly = 0$ tiene por solución general a la función

$$y_h(t) = C_1 e^t + e^{-t}(C_2 cos(\sqrt{2}t) + C_3 sen(\sqrt{2}t))$$

siendo C_1, C_2, C_3 constantes por determinar.

(1.1) Si $h(t) = e^{t^2}$ el método más eficiente para resolver la ecuación $Ly(t) = h(t)$ es el de variación de parámetros, pues tal función no admite un aniquilador a coeficientes constantes. La solución particular se escribe en la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^t + e^{-t}(v_2(t) cos(\sqrt{2}t) + v_3(t) sen(\sqrt{2}t))$$

donde v_1, v_2, v_3 son parámetros que satisfacen

$$\begin{bmatrix} e^t & e^{-t}cos(\sqrt{2}t) & e^{-t}sen(\sqrt{2}t) \\ e^t & \frac{d}{dt}\left(e^{-t}cos(\sqrt{2}t)\right) & \frac{d}{dt}\left(e^{-t}sen(\sqrt{2}t)\right) \\ e^t & \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-t}cos(\sqrt{2}t)\right) & \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-t}sen(\sqrt{2}t)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t^2} \end{bmatrix},$$

donde

$$v_i(t) = \int_0^t \frac{V_i(s)}{W(s)} h(s) ds, \ i = 1, 2, 3.$$

Aquí:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t}cos(\sqrt{2}t) & e^{-t}sen(\sqrt{2}t) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-t}cos(\sqrt{2}t)\right) & \frac{d}{dt}\left(e^{-t}sen(\sqrt{2}t)\right) \end{vmatrix} \\ V_2(t) &= -e^t \begin{vmatrix} 1 & e^{-t}sen(\sqrt{2}t) \\ 1 & \frac{d}{dt}\left(e^{-t}sen(\sqrt{2}t)\right) \end{vmatrix} \\ V_3(t) &= e^t \begin{vmatrix} 1 & e^{-t}cos(\sqrt{2}t) \\ 1 & \frac{d}{dt}\left(e^{-t}cos(\sqrt{2}t)\right) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

y $W(s) = W(e^t, e^{-t}cos(\sqrt{2}t), e^{-t}sen(\sqrt{2}t))$ es el Wronskiano de las funciones bases.

(1.2) Si $h(t) = 3 + t$ el método más apropiado para resolver $Ly(t) = h(t)$ es el principio de superposición. Escribimos $y_p(t) = y_{p1}(t) + y_{p2}$, donde $Ly_{p1} = 3$ y $Ly_{p2} = t$. Luego $y_{p1}(t) = A$ e $y_{p2} = B + Ct$. De aquí resulta $A = -1$ y $C = -\frac{1}{3}$ y $B = -\frac{1}{9}$.

(1.3) Si $h(t) = t^5 e^t$ el método apropiado es el de los coeficientes indeterminados, pues $(D-1)^6$ aniquila a la función h. Aquí la solución particular se escribe como

$$y_p(t) = Ate^t + Bt^2e^t + Ct^3e^t + Dt^4e^t + Et^5e^t + Ft^6e^t,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes por determinar.

II. $\boxed{\textbf{Pauta Problema } N^0 2}$

Con los datos del enunciado

$$m = 2 \ Kg, \ k = 32 \ \frac{k}{s^2}, \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4,$$

se debe resolver el problema de valor inicial, considerando el eje $\boldsymbol{X}$ positivo hacia abajo

$$x'' + 16x = 0,\ x(0) = 0\ m,\ x'(0) = -12\ \frac{m}{s}.$$

La solución está dada por

$$x(t) = C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t).$$

Aplicando las condiciones iniciales se determinan las constantes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y la solución se escribe

$$x(t) = -3sen(4t).$$

(2.1) De acuerdo a lo anterior la amplitud del movimiento es $\boldsymbol{A = 3}$

(2.2) La solución y la velocidad del problema la escribimos en la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 cos(\omega_o t) + C_2 sen(\omega_0 t) \\ x'(t) &= -\omega_0 C_1 sen(\omega_o t) + \omega + 0 C_2 cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtienen

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\implies C_1 = 0 \\ x'(0) = 0 &\implies C_2 = -\frac{12}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución en término de la frecuencia natural del sistema es

$$x(t) = -\frac{12}{\omega_0} sen(4t) = -12\sqrt{\frac{m}{k}} sen(4t).$$

Así, se ve que: si $\boldsymbol{m}$ crece la amplitud aumenta, y si la rigidez aumenta la amplitud disminuye.

III. Pauta Problema $N^0 3$

Los datos y ecuaciones del problema son los siguientes

$$\begin{aligned} m &= 20\ kg, \\ h(t) &= 30cos(2t), \\ \omega_0 &= = \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ x'' + \omega_0^2 x &= h(t), \\ x'' + \omega_0^2 x &= 30cos(2t). \end{aligned}$$

Para evitar la resonancia la rigidez $\boldsymbol{k}$ debe verificar

$$\begin{aligned} \omega_0 \neq 2 &\implies \sqrt{\frac{k}{m}} \neq 2 \\ &\implies \frac{k}{m} \neq 4 \\ &\implies \frac{k}{20} \neq 4 \\ &\implies k \neq 80. \end{aligned}$$

IV. Pauta Problema $N^0 4$

Con los datos del problema

$$k = 8\ \frac{Kg}{s^2},\ m = 1\ Kg,\ \sigma = 4\ \frac{Kg}{s},$$

se debe resolver el problema de valor inicial

$$mx'' + \sigma x' + kx = 0,\ x(0) = 4,\ m,\ x'(0) = 0\ \frac{m}{s}.$$

La ecuación característica es $r^2 + 4r + 8 = 0$ con raices característica

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = -2 \pm 2i.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{-2t}(Acos(2t) + Bsen(2t).$$

Aplicando las condiciones iniciales se llega a la solución del problema

$$x(t) = 4e^{-2t}[cos(2t)(+sen(2t)].$$

V. **Pauta Problema $N^0 5$**

Para encontrar los primeros cuatro términos de la solución se procede de la siguiente manera:

(5.1) De la ecuación diferencial y las condiciones iniciales se llega a

$$\begin{aligned} y'' &= 3x + cos(2x) - senxy \implies y''(0) = 1, \\ y''' &= 3 - 2sen(2x) - cosxy - senxy' \implies y'''(0) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Como se precisan los primeros 4 términos de la solución alrededor de $x_0 = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

se concluye que está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 \\ y(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

(5.2) El punto $x_0 =$ no es singular regular, luego el método de Frobenius no es aplicable