Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 06: División de polinomios en múltiples variables
Álgebra con Software (527282)

Todos los anillos de polinomios considerados tienen sus coeficientes en un campo K.

1. Mostrar: en $K[x]$, el orden monomial usual, donde $x^n > x^m$ si y sólo si $n > m$, es el único que satisface las condiciones para ser un orden válido para la división de polinomios: es un orden total, respeta la multiplicación, y no tiene cadenas descendentes infinitas. *(Indicación: un orden total debe imponer una relación entre los monomios* 1 *y* x*. Estudiar cada caso.)*

2. Mostrar: en $K[x_1, \ldots, x_n]$ el orden lexicográfico satisface la propiedad del buen orden: dado un conjunto no vacío S de monomios, existe un monomio $\alpha \in S$ tal que todo otro monomio $\beta \in S$ es mayor que α en el orden lexicográfico. *(Indicación: inducción sobre* n*.)*

Si f es un polinomio y $G = (g_1, \ldots, g_k)$ es una lista ordenada de polinomios, definimos el *resto de dividir* f *por* G como el resultado obtenido después del proceso siguiente:

- Calcular r_1, el resto de dividir f por g_1.
- Calcular r_{i+1}, el resto de dividir r_i por g_{i+1}

El último resto de este proceso es el valor buscado.
En Sage, este resto se puede calcular con el comando
`f.reduce([g1]).reduce([g2]).reduce([g3])....reduce([gk])`

3. Calcular el resto de dividir $f = x + y$ por $G = (2x, x - y)$. Calcular el resto de dividir la misma f por $H = (x - y, 2x)$.

4. Mostrar directamente que $f = x + y$ está en el ideal $(2x, x - y)$.

Mini proyecto: S-polinomios

Dados dos monomios, se puede definir un monomio *mínimo común múltiplo* de ellos de forma intuitiva:

5. Calcular mínimos comunes múltiplos para los pares (x^2y, xy^2), (xyz, x^2z), (x, y).

6. Describir un proceso general para calcular el mínimo común múltiplo de dos polinomios.

En Sage, el mínimo común múltiplo de dos polinomios f, g se calcula con el comando `lcm(f,g)`.
Dado un polinomio f, recordar que su *término líder* es el mayor término de f en el order monomial trabajado, y su *monomio líder* es el término líder con coeficiente 1. En Sage, se producen con los comandos `f.lt()` y `f.lm()` respectivamente.

Dados f, g polinomios no nulos, sean $\operatorname{lt}(f)$ y $\operatorname{lt}(g)$ sus términos líderes, y sea M el mínimo común múltiplo de los monomios líderes de f y g. Se define el *S-polinomio de f y g* como

$$S(f,g) = \frac{M}{\operatorname{lt}(f)}\, f \;-\; \frac{M}{\operatorname{lt}(g)}\, g$$

7. Calcular $S(xy-1, y^2-1)$ y $S(2x, x-y)$ con el orden lex.

8. Mostrar: si G es una lista ordenada de polinomios, I es el ideal generado por los polinomios de G y g_i, g_j son dos elementos de G, entonces el resto de dividir $S(g_i, g_j)$ por G está en I.

9. En base al problema anterior: sea r el resto de dividir $S(g_i, g_j)$ por G. Si $r \neq 0$, mostrar que el conjunto $G \cup \{r\}$ genera el mismo ideal I.

10. Estos últimos dos problemas presentan un proceso recursivo para expandir un conjunto de generadores de un ideal agregando restos de divisiones. Este proceso termina cuando todos los restos posibles son cero. Aplicar el proceso al ideal $(xy-1, y^2-1)$.