UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°7$ (Espacios L^p)

Problemas a resolver en práctica

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Considere $1 \leq p < r < q$. Demuestre que la clausura del conjunto $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$ en $\mathcal{L}^r(\mu)$ es igual a $\mathcal{L}^r(\mu)$. Es decir, demuestre que el conjunto de todos los puntos de adherencia o acumulación de $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$, tomados con respecto a la norma de $\mathcal{L}^r(\mu)$, es igual a $\mathcal{L}^r(\mu)$.

Solución

En el Listado $N°7$ se demostró que

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \text{máx}\left\{\|f\|_{L^p(\mu)}, \|f\|_{L^q(\mu)}\right\}.$$

cuando $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es medible. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu).$$

Lo que implica que la clausura de $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$ es un subconjunto de $\mathcal{L}^r(\mu)$.

Supongamos que $f \in L^r(\mu)$. Luego existen dos sucesiones $s_n^{\pm} : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ de funciones simples no negativas tales que

$$s_n^{\pm} \nearrow_n f^{\pm},$$

donde $f^{\pm}$ denota a las parte positiva y negativa de f. Ya que

$$\int_\Omega \left(s_n^{\pm}\right)^r \, d\mu \leq \int_\Omega \left(f^{\pm}\right)^r \, d\mu < +\infty,$$

$\mu\left(\{s_n^{\pm} \neq 0\}\right) < +\infty$. Por lo tanto, $s_n^{\pm} \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$.

Ya que $\left(f^{\pm}-s_n^{\pm}\right)^r \to_n 0$ y $\left(f^{\pm}-s_n^{\pm}\right)^r \leq \left(f^{\pm}\right)^r$, aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\int_{\Omega} \left(f^{\pm}-s_n^{\pm}\right)^r \, d\mu \to_n 0.$$

Lo que implica

$$\|f-s_n\|_r \leq \left\|f^{+}-s_n^{+}\right\|_r + \left\|f^{-}-s_n^{-}\right\|_r \to_n 0.$$

Entonces

$$\|[f]-[s_n]\|_r = \|f-s_n\|_r \to_n 0.$$

Así que $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$ es denso en $\mathcal{L}^r(\mu)$.

2. Considere el conjunto

$$A := \left\{[f] \in \mathcal{L}^4(\nu) : f(x) = 0 \qquad \nu - c.d. \text{ en } [0,1/2]\right\},$$

donde ν es la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Demuestre que A es un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}^4(\mathbb{R}, \nu)$.

Solución

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de $L^4(\nu)$ tales que $[f_n] \in A$ y

$$[f_n] \to_n [f] \qquad \text{en } \mathcal{L}^4(\mathbb{R}, \nu),$$

donde $f \in L^4(\nu)$. Luego

$$\|f-f_n\|_{L^4(\nu)} \to_n 0.$$

Lo que implica que existe una subsucesión $\left(f_{n(k)}\right)_k$ de $(f_n)_n$ tal que

$$f_{n(k)} \to_n f \qquad \nu - c.d.$$

Como $[f_n] \in A$,

$$\begin{aligned}
&\nu\left(\left\{x \in [0,1/2] : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_{n(k)}(x) \neq 0\right\}\right) \\
&= \nu\left(\cup_{k\in\mathbb{N}}\left\{x \in [0,1/2] : f_{n(k)}(x) \neq 0\right\}\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu\left(\left\{x \in [0,1/2] : f_{n(k)}(x) \neq 0\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ya que $\left\{f_{n(k)} \to_n f\right\} \cap \left\{x \in [0,1/2] : f_{n(k)}(x) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\right\}$ es un subconjunto de $\{x \in [0,1/2] : f(x) = 0\}$,

$$\begin{aligned} &\{x \in [0,1/2] : f(x) \neq 0\} \\ &\subset \left\{f_{n(k)} \nrightarrow_n f\right\} \cup \left\{x \in [0,1/2] : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_{n(k)}(x) \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Luego, $\nu(\{x \in [0,1/2] : f(x) \neq 0\}) = 0$. Lo que implica que $[f] \in A$.

3. Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva. Sean $f, g \in L^\infty(\mu)$. Demuestre que
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Solución

De acuerdo a la definición de supremo esencial tenemos que $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$ y $\mu(\{|g| > \|g\|_\infty\}) = 0$. Como
$$\begin{aligned} \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\} &\subset \{|f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}, \\ \{|f+g| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} &\subset \{|f| > \|f\|_\infty\} \cup \{|g| > \|g\|_\infty\}. \end{aligned}$$
Lo que implica que $\mu(\{|f+g| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$. Por lo tanto, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^p(\mu)$, con $1 \leq p < \infty$, tal que $\|f_n - f\|_p \to_n 0$, donde $f \in L^p(\mu)$. Suponga que $f_n \to_n g\ \mu - c.d.$ Demuestre que $f = g\ \mu - c.d.$

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Demuestre que $(\mathcal{L}^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado completo. Es decir, demuestre que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma y que $(\mathcal{L}^\infty(\mu), \rho)$ es un espacio métrico completo, donde $\rho(f,g) = \|f-g\|_\infty$ para todo $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demuestre que
$$\left\{[f] \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) : \int_\Omega f\, d\mathbb{P} = 0\right\}$$
es un sub-espacio cerrado de $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$.

CMG/cmg.