Solución.

Sea N_t : núm. de personas que llegan al sistema $\Rightarrow$ $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proc. Poisson de tasa λ.

X : tpo de llegada de un cliente

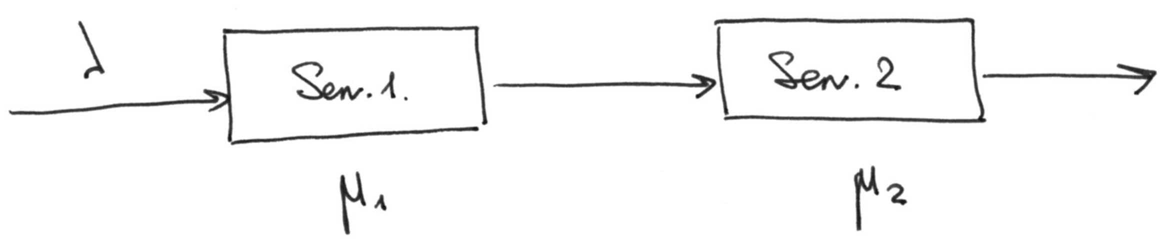
$\Rightarrow X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$. (Explicar ¿por qué?)

T_1 : tpo de atención al servidor 1

T_2 : tpo ——— " ——— " ——— 2

$\Rightarrow T_1 \sim \mathcal{E}xp(\mu_1)$

$T_2 \sim \mathcal{E}xp(\mu_2)$



a) $\mathbb{P}(T_1 + T_2 < X) =$

$= \mathbb{P}(X > T_1 + T_2 \mid X > T_1)\, \mathbb{P}(X > T_1) =$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Falta} \\ \text{de memoria}}}{=} \mathbb{P}(X > T_2)\, \mathbb{P}(X > T_1) = \dfrac{\mu_2}{\lambda + \mu_2} \cdot \dfrac{\mu_1}{\lambda + \mu_1}$.

b) ¿Cuál es la prob. serv. 1 está ocup.?

$= \mathbb{P}(X < T_1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu_1}$.

c) $\mathbb{P}(X > T_1 + T_2 \mid X > T_1) \underset{\substack{\text{Falta} \\ \text{Mem.}}}{=} \mathbb{P}(X > T_2) = \dfrac{\mu_2}{\lambda + \mu_2}$

Recuerde: $\begin{matrix} \xi \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \\ \eta \sim \mathcal{E}xp(\mu) \end{matrix}$; $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow$

$\mathbb{P}(\xi > \eta) = \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > \eta \mid \eta \in dt)\, \underbrace{\mathbb{P}(\eta \in dt)\, dt}_{\Leftrightarrow f_\eta(t)} =$

$= \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > t)\, f_\eta(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \mu \cdot e^{-\mu t}\, dt = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$ ∎

Solución. Sea el estado de la cadena dado por el número total de trabajos:

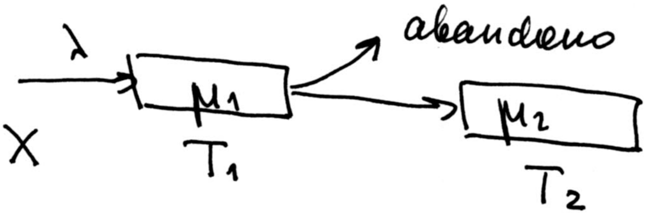
$$E = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$$

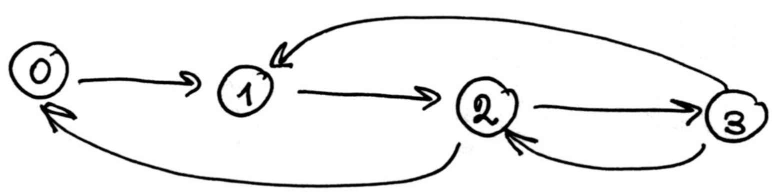
0 : $(0,0)$ – sistema desocupado

1 : $(1,0)$ – hay un trabajo en el 1° servidor

2 : $(0,1)$ – hay un trabajo en el 2° servidor

3 : $(1,1)$ – ambos ocupados





$\Rightarrow \quad p_{01} = 1$

$p_{12} = 1$

T_1 : tiempo de permanencia en el servidor 1

T_2 : ——— " ———————

X : tiempo de llegada de un nuevo trabajo

$$p_{20} = \mathbb{P}(X > T_2) = \frac{\mu_2}{\lambda + \mu_2}$$

$$p_{23} = 1 - p_{20} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_2} \quad \{ = \mathbb{P}(X < T_2) \}$$

$$p_{32} = \mathbb{P}(T_2 > T_1) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$p_{31} = \mathbb{P}(T_2 < T_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$p_{32} + p_{31} = 1$$

Matriz de transición:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{\mu_2}{\lambda+\mu_2} & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu_2} \\ 3 & 0 & \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} & 0 \end{array}$$

Distribuciones de los tiempos de permanencia en los estados:

Sea $\mathcal{T}_i$: tiempo de permanencia en el estado i, $i = 0, 1, 2, 3$.

$$\mathcal{T}_0 = X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$$

$$\mathcal{T}_1 \sim \operatorname{Exp}(\mu_1)$$

$$\mathcal{T}_2 \sim \min\{\text{tpo de servicio en } 2;\ \text{tpo de llegada}\}$$

$$= T_2 \wedge X \sim \operatorname{Exp}(\lambda + \mu_2)$$

$$\mathcal{T}_3 \sim \min\{\text{Tiempo en } 1;\ \text{Tiempo en } 2\}$$

$$= T_1 \wedge T_2 \sim \operatorname{Exp}(\mu_1 + \mu_2)$$

$$\left(= P(\text{no acaba ningún trabajo en dos serv.}) = e^{-\mu_2 t} e^{-\mu_1 t} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \right)$$