
**Listado 9 ALGEBRA III 525201-1: Espacio vectorial con producto interno. Diagonalización ortogonal.
 Complemento Ortogonal. Proyección Ortogonal.**

En lo que sigue, consideraremos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interno, pudiendo ser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Sea $C := \{z_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ un conjunto ortogonal. Entonces C es linealmente independiente.
2. Sea $C := \{z_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ un conjunto ortogonal. Entonces

$$\forall u \in \langle C \rangle : u = \sum_{j=1}^k \frac{\langle u, z_j \rangle}{\|z_j\|^2} z_j.$$

3. Sea U un subespacio de V , $\{u_j\}_{j=1}^m$ una base de U , y $B := \{u_j\}_{j=1}^m \cup \{w_k\}_{k=1}^n$ una base de V (i.e. V es finito dimensional). Sea $\tilde{B} := \{x_j\}_{j=1}^m \cup \{y_k\}_{k=1}^n$ la base ortonormal que resulta de aplicar el PROCEDIMIENTO DE GRAM-SCHMIDT a la lista de vectores dada por B (respetando el orden). Demuestre que $\{x_j\}_{j=1}^m$ es una base ortonormal de U , mientras que $\{y_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de U^\perp . Esto permite caracterizar / definir explícitamente la PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR CUALQUIERA DE V SOBRE U ASÍ COMO TAMBIÉN SOBRE U^\perp , por ejemplo. Hacerlo.
4. Considere la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x := (x_1, x_2, x_3), y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y \rangle_\bullet := x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1.$$
 - (a) Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet$ define un producto interno en \mathbb{R}^3 .
 - (b) Determine el complemento ortogonal de $S = \langle \{(1, 2, 1)\} \rangle$ considerando el producto interno definido. Luego, determine S^\perp considerando el producto interno usual (canónico) de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre S y S^\perp con respecto al producto interno dado.
5. Sean U, W subespacios de V . Pruebe que
 - (a) U^\perp es un subespacio vectorial de V .
 - (b) $\{\theta\}^\perp = V$, y $V^\perp = \{\theta\}$.
 - (c) Si $U \subseteq W$, entonces $W^\perp \subseteq U^\perp$.
 - (d) $U \cap U^\perp = \{\theta\}$.
 - (e) $U \bigoplus U^\perp = V$, considerando el caso V es de dimensión finita. Este resultado se conoce como TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL
 - (f) $U = (U^\perp)^\perp$, considerando el caso V es de dimensión finita.

REMARK: La validez del TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL en dimensión infinita, requiere además que V sea un espacio de Hilbert y U un subespacio cerrado de V . Se discutirá en otra asignatura.
6. Sea V finito dimensional, y U un subespacio de V . Probar: $U^\perp = \{\theta\}$ si y sólo si $U = V$.
7. Sea V finito dimensional, y U un subespacio de V . Demuestre que $\text{Proj}_{U^\perp} = \tilde{I} - \text{Proj}_U$.
8. Sea V de dimensión finita, y U un subespacio de V . Pruebe que
 - (a) $\forall (x, y) \in U \times U^\perp : \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (TEOREMA DE PITÁGORAS).
 - (b) $\forall z \in V : \|\text{Proj}_U(z)\| \leq \|z\|$.
 - (c) (Sentido geométrico de Proj_U : distancia a un subespacio) Para cualquier $w \in V$, $\text{Proj}_U(w)$ es el único elemento de U que resuelve el PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN: $(PM) : \text{dist}(w, U) := \min_{z \in U} \|w - z\| = \|w - \text{Proj}_U(w)\|$.
 - (d) $x \in U$ es la mejor aproximación de $w \in V$ por elementos de U (i.e. $x := \text{Proj}_U(w)$ es la solución de (PM)) si y sólo si $\forall y \in U : \langle w, y \rangle = \langle \text{Proj}_U(w), y \rangle$ (i.e. $w - \text{Proj}_U(w) \in U^\perp$).
9. Sea $U = \langle \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2)\} \rangle$ subespacio de $V := \mathbb{R}^4$. Determine $\min_{z \in U} \|z - (1, 2, 3, 4)\|$, indicando el “vector de mínimo” donde esto sucede.
10. Sea V finito dimensional, y $P \in \mathcal{L}(V)$ tal que $P^2 = P$ (i.e. P es idempotente), satisfaciendo la propiedad: “Todo vector del $\text{Ker}(P)$ es ortogonal a cualquier vector de $\text{Im}(P)$ ”. Demuestre que existe un subespacio U de V tal que $P = \text{Proj}_U$.

Ejercicios propuestos:

11. Sea la matriz $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Es A diagonalizable? ¿lo es ortogonalmente? Determine en cada caso, si corresponde, la matriz que diagonaliza, y la matriz diagonal semejante con A .
12. Sea $\{v_j\}_{j=1}^m \subseteq V$. Demuestre que $(\{v_j\}_{j=1}^m)^\perp = \langle \{v_j\}_{j=1}^m \rangle^\perp$.
13. Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular, con la cual se define la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{n \times 1} \times \mathbb{K}^{n \times 1}$ definido: $\forall x, y \in \mathbb{K}^{n \times 1} : \langle x, y \rangle := y^* Q^* Q x$. Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $\mathbb{K}^{n \times 1}$.
14. Demostrar las llamadas IDENTIDADES DE POLARIZACIÓN: (considere $\|\cdot\|$ norma inducida por el producto interno dado)
- Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, se cumple $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle = \frac{1}{4} (\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2)$.
 - Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, se cumple $\forall u, w \in V : \langle u, w \rangle = \frac{1}{4} (\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2 + i \|u + iw\|^2 - i \|u - iw\|^2)$.
15. Determinar el complemento ortogonal de $S := \langle \{(1, i, 1+i)\} \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$, provisto del producto interno usual
- $$\forall x := (x_1, x_2, x_3), y := (y_1, y_2, y_3) : \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^3 x_j \overline{y_j}.$$
- Luego, determine explícitamente Proj_{S^\perp} (su regla de correspondencia).
16. Sea V finito dimensional, U un subespacio de V , y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que:
 U es T -invariante si y sólo si $\text{Proj}_U \circ T \circ \text{Proj}_U = T \circ \text{Proj}_U$.
17. Sea V finito dimensional, $T \in \mathcal{L}(V)$, y U un subespacio de V . Demuestre que U y U^\perp son ambos T -invariantes si y sólo si $\text{Proj}_U \circ T = T \circ \text{Proj}_U$.
18. Sobre $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, por $\forall A, B \in V : \langle A, B \rangle := \text{tr}(B^t A)$.
- Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno real sobre V .
 - Se definen ahora los subespacios $U_1 := \{\alpha I_n | \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \{I_n\} \rangle$, y $U_2 := \{A \in V : A + A^t = \Theta\}$. Deducir y caracterizar (por comprensión) U_1^\perp y U_2^\perp .
 - Aplique el TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL a una matriz cualquiera $B \in V$, respecto a los subespacios introducidos en (b).
19. Sobre el espacio vectorial real $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ se define el producto interno usual

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) : \langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Considera ahora la familia de funciones trigonométricas $S := \{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}_0^+}$ y $T := \{\psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$, donde

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0^+ : \forall x \in [-\pi, \pi] : \varphi_m(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & m = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) & m \neq 0. \end{cases} \quad \wedge \quad \forall \ell \in \mathbb{N} : \forall x \in [-\pi, \pi] : \psi_\ell(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\ell x).$$

Sean S_k y T_k los subconjuntos de S y T , respectivamente, formados por sus primeros k elementos.

- Demuestre que S es un conjunto ortonormal.
- Demuestre que T es un conjunto ortonormal.
- Demuestre que S y T son ortogonales entre sí.
- Sea $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$, función par. Determine su proyección ortogonal sobre $\langle S_4 \rangle$ y sobre $\langle T_3 \rangle$.
- Sea $g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$, función impar. Determine su proyección ortogonal sobre $\langle S_3 \rangle$ y sobre $\langle T_4 \rangle$.
- Considere ahora la función 2π -periódica $h(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$. Determine la proyección ortogonal de h sobre $\langle S_4 \cup T_3 \rangle$. El resultado se conoce como SUMA PARCIAL DE FOURIER.