UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 2. 3–Jul.–2018; 17:15.

Nombre y apellidos	
Matrícula	

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Nota
Puntaje						

En los ejercicios que siguen, (X, d) es un espacio métrico.

1. a) Estudia la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ con $a_n := \sqrt{n\,(n+1)} - n\,, \quad n \in \mathbb{N}$.

   b) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$.

   c) En caso que la serie anterior converja, calcula el valor al que converge.

   Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. a) Demuestra que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

   b) Da un ejemplo de una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ no converge.

3. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ continua y $A := \{x \in X : \ f(x) > 0\}$.

   a) Demuestra que A es un conjunto abierto.

   b) Demuestra que si $\partial A \neq \emptyset$, entonces, para cada $x \in \partial A$, $f(x) = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sobreyectiva. Demuestra que $f(\mathbb{Q})$ es denso en $\mathbb{R}$.

5. Considera la sucesión de funciones $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) := \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \ , \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

   a) Estudia la convergencia puntual de la sucesión en todos los puntos de su dominio.

   b) Determina si la sucesión converge uniformemente en todo su dominio.

   c) Sea $a > 0$. Determina si la sucesión converge uniformemente en $[a, +\infty)$.

   Sugerencia: $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.