UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Elementos Finitos 521237

Listado N°3

1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con $\partial U \in \mathcal{C}^1$. Sean $\boldsymbol{F} \in [\mathcal{C}^1(\bar{U})]^n$ y $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ...\nu_n) \in \mathbb{R}^n$ el vector unitario normal exterior a U. Sabemos que (teorema de la divergencia)

$$\int_U \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS.$$

Demostrar las siguientes identidades:

a) **Integración por partes.** Si $u, v \in \mathcal{C}^1(\bar{U})$, entonces

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\boldsymbol{x} = -\int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial U} u \, v \, \nu^i dS \quad , i = 1, ..., n.$$

Indicación: Utilizar el teorema de la divergencia con $\boldsymbol{F} = uv\boldsymbol{e}_i$ donde $\boldsymbol{e}_i$ es esl i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$.

b) **Fórmulas de Green.** Si $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, entonces

i) $\displaystyle\int_U \Delta u \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, dS.$

ii) $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = -\int_U u \, \Delta v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, dS.$

iii) $\displaystyle\int_U u \, \Delta v - v \, \Delta u \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, dS.$

2. Para cada una de las siguientes EDPs, determine una formulación variacional apropiada y demuestre si ésta tiene solución única. En todas ellas $f \in L^2(\Omega)$ es un término fuente dado, Ω es un dominio poligonal y $\boldsymbol{n}$ es la normal unitaria en $\partial\Omega$ exterior a Ω.

a)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \kappa u & = & f & \text{en} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

donde $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función positiva y acotada.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta^2 u & = & f & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

donde $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$ es el bilaplaciano.

c)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma_D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & = & g_N & \text{en} \quad \Gamma_N, \end{array} \right. ,$$

donde $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ y $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ es una función dada.

d)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{en} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right. .$$

¿Qué puede decir de la existencia y unicidad en este caso?.