Procesos Estocásticos : Proceso de Poisson

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Procesos Estocásticos. 05/05/2020

Outline

Outline

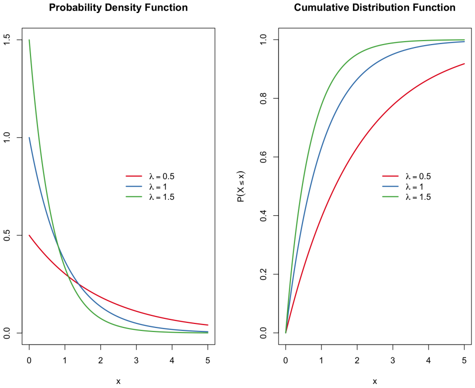
Distribución Exponencial

Una variable aleatoria $T \sim Exp(\lambda)$ si su función de densidad es

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{otro.} \end{cases}$$

Equivalentemente, su función de distribución es
$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$.

- $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$ y $\mathrm{Var}[T] = 1/\lambda^2$.



Probability Density Function
Cumulative Distribution Function
λ = 0.5
λ = 1
λ = 1.5
x
P(X ≤ x)
0.0
0.5
1.0
1.5
0
1
2
3
4
5
0.2
0.4
0.6
0.8

Propiedad de Falta de Memoria

Si $T \sim Exp(\lambda)$, entonces para todo $s, t \geq 0$ se tiene

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Demo. :

$$\begin{aligned} P(T > t + s | T > t) &= \frac{P(T > t + s; T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} = P(T > s). \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea T : Tiempo de espera de un cliente. A partir de los datos históricos, se sabe que el tiempo promedio de espera es de 10 minutos. Vamos a modelar el proceso, suponiendo que T tiene distribución exponencial.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga que esperar más de 15 minutos ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga que esperar más de 15 minutos, dado que ya ha estado esperando 10 minutos ?

Solución

Sea T : Tiempo de espera de un cliente. A partir de los datos históricos, se sabe que el tiempo promedio de espera es de 10 minutos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga que esperar más de 15 minutos?
   $R. :(T > 15) = e^{-15/10} = e^{-3/2}$.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga que esperar más de 15 minutos, dado que ya ha estado esperando 10 minutos?
   $R. : P(T > 15 | T > 10) = e^{-5/10} = e^{-1/2}$.

Propiedad 1

Sean $T \sim Exp(\lambda)$ y $S \sim Exp(\gamma)$ v.a. independientes. Entonces, $T \wedge S \sim Exp\{\lambda + \gamma\}$.

$$\begin{aligned} P(T \wedge S > t) &= P(T > t; S > t) \\ &= P(T > t)P(S > t) \\ &= e^{-(\lambda+\gamma)t}. \end{aligned}$$

- En general, si $T_1, \ldots, T_n$ son v.a. independientes con $T_i \sim Exp(\lambda_i)$, entonces $\min\{T_1, \ldots, T_n\} \sim Exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

Propiedad 2

Sean $T \sim Exp(\lambda)$ y $S \sim Exp(\gamma)$ v.a. independientes. Entonces

$$P(S > T) = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}.$$

$$\begin{aligned} P(S > T) &= \int_0^\infty P(S > t | T = t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^\infty P(S > t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma t} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}. \end{aligned}$$

Resumen

De los resultados anteriores, se tiene que :

- Sea $T_i \sim Exp(\lambda_i), i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$P(T_i = \min\{T_1, \ldots, T_n\}) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

- Sea $S \sim Exp(\gamma)$. Entonces,

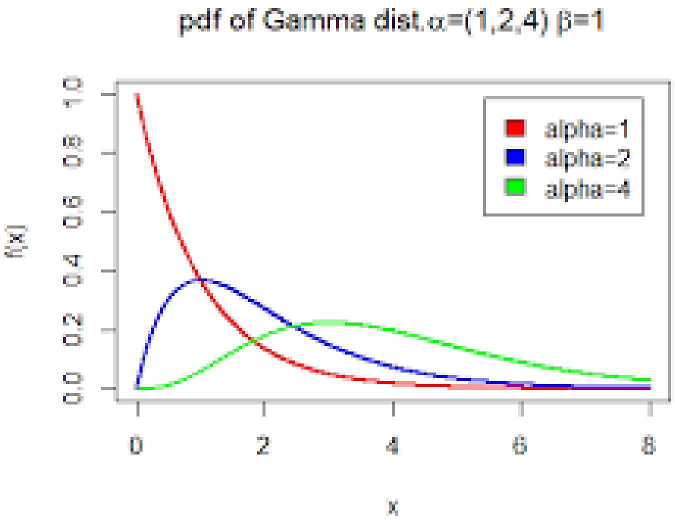
$$P(S < \min\{T_1, \ldots, T_n\}) = \frac{\gamma}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j + \gamma}$$

Distribución Gamma

Sean $T_1, \ldots, T_n$ v.a. i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$. La suma $\tau_n := \sum_{i=1}^{n} T_i$ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$ con densidad :

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{otro.} \end{cases}$$

Además, $\mathbb{E}[\tau_n] = \frac{n}{\lambda}$, $\mathrm{Var}[\tau_n] = \frac{n}{\lambda^2}$.


pdf of Gamma dist.α=(1,2,4) β=1
alpha=1
alpha=2
alpha=4
f(x)
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0 2 4 6 8
x

Outline

Distribuciòn de Poisson

Una variable aleatoria $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$ si su función de probabilidad es

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

con función generadora de probabilidad

$$\phi_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = e^{\lambda(s-1)}$$

y función característica

$$\varphi(\gamma) = e^{-\lambda(1-e^{i\gamma})}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

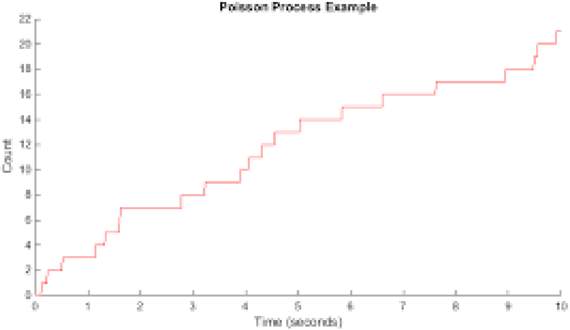
Sean $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\gamma)$ v.a. independientes. Entonces $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \gamma)$.

Demo.

$$\begin{aligned}
\phi_{X+Y}(s) &= \mathbb{E}[s^{X+Y}] \\
&= \mathbb{E}[s^X]\mathbb{E}[s^Y] \\
&= \phi_X(s)\phi_Y(s) \\
&= e^{\lambda(s-1)}e^{\gamma(s-1)} \\
&= e^{(\lambda+\gamma)(s-1)}.
\end{aligned}$$

Outline

Proceso de Poisson



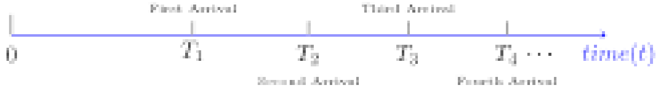
Definición

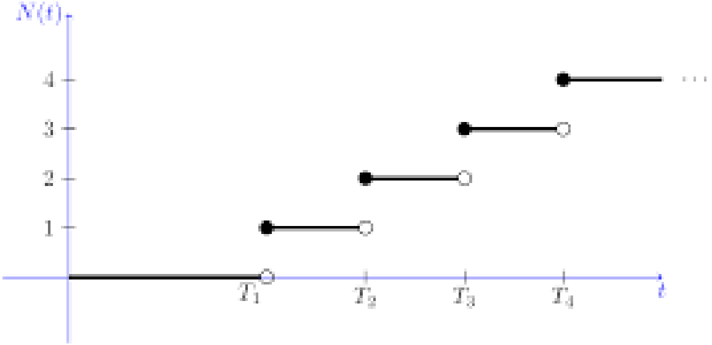
Un proceso de Poisson es un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ con intensidad (o tasa) $\lambda \geq 0$ tal que sus incrementos $N_t - N_s$, $s < t$, son independientes y se verifica

1. $N_0 = 0$
2. $\forall s < t$, $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$,

esto es

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\}.$$


First Arrival
Third Arrival
0
T_1
T_2
T_3
T_4 ···
$time(t)$
Second Arrival
Fourth Arrival


$N(t)$
4
3
2
1
T_1
T_2
T_3
T_4
t

Definición alternativa

Sean $T_1, \ldots, T_n \sim Exp(\lambda)$ v.a. i.i.d.
Definamos las variables aleatorias

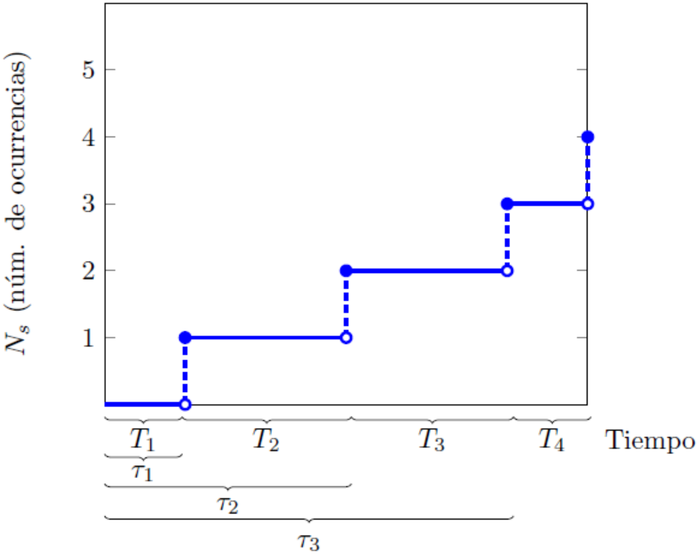
$$\begin{cases} \tau_0 = 0 \\ \tau_n = T_1 + \ldots + T_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- Se puede definir el *Proceso de Poisson* (de manera alternativa a la Definición anterior) de intensidad (o tasa) λ como el proceso

$$N_s = \max\{n : \tau_n \leq s\}, \qquad s \geq 0.$$

- Notemos que $P(N_s \geq n) = P(\tau_n \leq s)$.

Proceso de Poisson



Construcción del proceso de Poisson

- Para todo $t \geq 0$, la v.a. N_t tienen la distribución de Poisson con intensidad λt.

Demo. : Por el Teorema de Probabilidad total, tenemos que

$$
\begin{aligned}
P(N_t = k) &= P(\tau_k \leq t, \tau_{k+1} > t) \\
&= P(\tau_k \leq t, \, T_{k+1} + \tau_k > t) \\
&= \int_0^t P(\tau_k \in (s+ds), (s+ds) + T_{k+1} > t) ds \\
&= \int_0^t P(\tau_k \in (s+ds), \, T_{k+1} > t - s) ds \quad (\tau_k \perp\!\!\!\perp T_{k+1}) \\
&= \int_0^t P(\tau_k \in (s+ds)) P(T_{k+1} > t - s) ds
\end{aligned}
$$

Notemos que $P(\tau_k \in ds) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda s} s^{k-1} ds$ puesto que $\tau_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ y que $T_{k+1} \sim Exp(\lambda)$.

Demo. Cont.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P(N_t = k) &= \int_0^t P(\tau_k \in (s+ds))P(T_{k+1} > t-s)ds \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda s} s^{k-1} e^{-\lambda(t-s)} ds \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Hay tacos en la carretera que se modelan de acuerdo al proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0.01$ (por kilmetro).

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya tacos en los primeros dos kilómetros de la ruta ?
$P(N_2 = 0) = e^{-0.01 \cdot 2} \cdot \frac{(0.01 \cdot 2)^0}{0!} = e^{-0.02}$.
2. Si no hay tacos en los primeros dos kilómetros, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco habrán en el tercer kilómetro ?
Como el proceso de Poisson es de incrementos independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} P(N_3 = 0 | N_2 = 0) &= P(N_3 - N_2 = 0 | N_2 = 0) \\ &= P(N_3 - N_2 = 0) \\ &= e^{-0.01(3-2)} \frac{0.01(3-2)^0}{0!} \\ &= e^{-0.01}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad 4 personas por hora.
Si la tienda abre a las 9 :00, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya sido atendido antes de las 9 :30 y que luego un total de 4 hayan sido atendidos antes de las 11 :30 ?
Sol. : Si consideramos $t = 0$ como la hora de apertura (9 :00), entonces, aprovechando que el proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios, podemos escribir la probabilidad pedida como

$$\begin{aligned} P(N_{1/2} = 1; N_{5/2} - N_{1/2} = 4) &= P(N_{1/2} = 1)P(N_2 = 4) \\ &= \left(e^{-4\cdot\frac{1}{2}} \frac{(4\cdot\frac{1}{2})^1}{1!} \right) \cdot \left(e^{-4\cdot 2} \frac{(4\cdot 2)^4}{4!} \right) \\ &\approx 0.0155. \end{aligned}$$