Tema Nº1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matrices

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, por ahora $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

Definición:

Una matriz de m filas y n columnas es una función

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{K}$$
$$(i, j) \mapsto A(i, j) = a_{ij}$$

Diremos también que A es una matriz de tipo $m \times n$

La matriz A se identifica con su recorrido escrita en la forma rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Matrices

Observaciones:

1. Decimos que la matriz tiene **dimensión** u **orden** $m \times n$, donde m es el número de filas y n el número de columnas.
2. Si $m = n$, se dice que la matriz es cuadrada de orden n y en caso contrario rectangular.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la matriz se dice real o a valores reales y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la matriz se dice compleja o a valores complejos.
3. Podemos definir el conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con valores en $\mathbb{K}$ y se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
4. Dos matrices son iguales, si son del mismo orden y sus elementos correspondientes, es decir, los que ocupan los mismos lugares en ambas matrices son respectivamente iguales.

Operatoria con Matrices

Cuando trabajamos con matrices, podemos definir tres operaciones entre ellas:

1. Suma de matrices
2. Producto de un escalar por una matriz
3. Producto de matrices

Operatoria con Matrices

Definición:

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La **matriz suma** entre A y B, la cual es denotada por $A + B$, es la matriz dada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Definición:

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ fijo, se llama **producto del escalar** α y **la matriz** A, a la matriz denotada por αA, es la matriz dada por:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha \cdot a_{ij})$$

Observación: Notemos que la matriz $A + B$ tiene la misma dimensión que la matriz A y B, y la matriz αA tienen la misma dimensión que la matriz A.

Propiedades

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \Theta = \Theta + A = A$, siendo Θ la matriz nula.
4. $A + (-A) = (-A) + A = \Theta$, siendo $-A$ la matriz opuesta.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
8. $1 \cdot A = A$

Ejercicios

1. Sean A, B y C las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2-i \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Determine las siguientes matrices:

   (a) $A + B$ (b) $\frac{1}{2}B - C$ (c) $2A - \frac{1}{2}C + C$

2. Determine las matrices A y B que satisfacen las siguientes condiciones:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Operatoria con Matrices

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. La matriz producto entre A y B, la cual es denotada por AB, es la matriz dada por:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

Operatoria con Matrices

Definición

Dadas dos matrices A, de m filas y n columnas, y D, de n filas y p columnas. La matriz producto de ellas $C = AD$ tal que C tiene m filas y p columnas, y

$$C = \begin{pmatrix} A\,D(:,1) & A\,D(:,2) & \cdots & A\,D(:,p) \end{pmatrix}$$

donde $D(:,i)$ denota la columna i-ésima de la matriz D. La igualdad anterior indica que la columna i-ésima de C es la matriz columna que resulta de multiplicar A por la columna i-ésima de D.

Operatoria con Matrices

De acuerdo con la definición anterior, podemos deducir una forma mas reducida para definir el producto de matriz. Para esto consideremos lo siguiente:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \vdots & b_{2j} & \vdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Luego, si $C = (c_{ij}) = AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$, entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \text{donde} \quad 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq p.$$

Propiedades

1. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, entonces
$$(AB)C = A(BC)$$
2. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, entonces
$$A(B+C) = AB + AC$$
3. Si $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, entonces:
$$(B+C)D = BD + CD$$
4. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Propiedades

Dem. 1: Sean $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), B = (b_{kl}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C = (c_{lj}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, arbitrarias. Además, sean $A(BC) = (d_{ij})$ y $(AB)C = (e_{ij})$, luego por definición de producto de matrices, se tiene:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Big(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\Big)c_{lj} = \sum_{l=1}^{p}(AB)_{il}c_{lj} = e_{ij} \end{aligned}$$

así, podemos concluir que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

Propiedades

Dem. 2: Sean $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $C = (c_{kj}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Además, sean $A(B+C) = (d_{ij})$ y $AB + AC = (e_{ij})$, luego por definición de producto de matrices, se tiene:

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = e_{ij}
\end{aligned}
$$

así, podemos concluir que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, entonces

$$A(B+C) = AB + AC$$

Matrices

Matriz Transpuesta

Dada una matriz $A = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la transpuesta de A, denotada mediante A^t, como la matriz:

$$A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

es decir, $b_{ij} = a_{ji}$, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

Propiedades: Para todo $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumplen:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AC)^t = C^t A^t$

Propiedades

Dem. 4:

Tipos de Matrices

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es:

1. triangular superior si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.
2. triangular inferior si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.
3. diagonal si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.
4. escalar si es diagonal y $a_{ii} = \lambda$ para $1 \leq i \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.
5. identidad si es escalar y $a_{ii} = 1$. para $1 \leq i \leq n$.
6. simétrica si $A^t = A$.
7. antisimétrica si $A^t = -A$.

Ejercicios

1. Muestre que la matriz $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica y que la matriz $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica.
2. Descomponga la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Si B es simétrica, entonces la matriz ABA^t también es simétrica.
4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dos matrices simétricas. AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

Solución

3. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ una matriz simétrica, arbitrarias. Debemos probar que ABA^t es una matriz simétrica, es decir,

$$ABA^t = (ABA^t)^t$$

para demostrar lo anterior, consideremos lo siguiente:

$$(ABA^t)^t = (A^t)^t B^t A^t = AB^t A^t = ABA^t$$

por lo tanto, se concluye lo solicitado.

4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dos matrices simétricas, arbitrarias. Debemos realizar una demostración por doble implicancia, como sigue:

$\Rightarrow$) Como A, B y AB son simétricas, se tiene:

$$BA = B^t A^t = (AB)^t = AB$$

$\Leftarrow$) Sabemos que $AB = BA$ y debemos mostrar que AB es simétrica, para esto consideremos lo siguiente:

$$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$$

Matriz Inversa

Definición

La matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ es invertible (o no singular) si y solo si existe $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, las cuales cumplen $AB = BA = I$

Propiedades: Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertibles y $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, entonces:

1. A^{-1} es única.
2. A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
5. A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Propiedades

3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertibles, arbitrarias. Luego, por definición de inversa, se tiene:

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \qquad \text{y}$$
$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

dado lo anterior, concluimos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertible, arbitraria. Luego, por definición de inversa, se tiene:

$$\alpha A \cdot \frac{1}{\alpha}A^{-1} = \alpha\frac{1}{\alpha}A \cdot A^{-1} = I \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha}A^{-1} \cdot \alpha A = \frac{1}{\alpha}\alpha A^{-1} \cdot A = I$$

dado lo anterior, concluimos que $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A$

5. Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertible, arbitraria. Luego, por definición de inversa, se tiene:

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I \qquad \text{y}$$
$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$$

dado lo anterior, concluimos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Matriz Inversa

Observaciones: De acuerdo con la definición anterior, pueden surgir ciertas preguntas:

1. ¿Todas las matrices cuadradas poseen inversa?
2. Si una matriz posee inversa, ¿cómo se puede obtener?

Para poder dar respuesta a estas preguntas tendremos que introducir los conceptos de operaciones elementales por fila y el determinante de una matriz.

Operaciones Elementales

Las operaciones elementales preservan características lineales:

1. **Intercambiar dos filas de la matriz**

   Si en una matriz A, se intercambia la fila i con la fila j, esto se denota como $f_i \leftrightarrow f_j$.

2. **Multiplicar una fila de una matriz por un escalar**

   Si en una matriz A, se multiplica la fila i por el escalar α distinto de nulo, esto se denota como $\alpha f_i \rightarrow f_i$ o $f_i \leftarrow \alpha f_i$

3. **Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra fila**

   Si en una matriz A cambiamos la fila i, por la suma de la fila i con la multiplicación de α con la fila j, esto se denota por $f_i + \alpha f_j \rightarrow f_i$ o $f_i \leftarrow f_i + \alpha f_j$.

Matrices Equivalentes

Definición:

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se dice que A y B son equivalentes por fila, lo cual se denota como $A \sim B$, si B es obtenida aplicándole una o varias operaciones elementales por fila, o viceversa.

Observación: cuando aplicamos una operación elemental por fila F a una matriz C, la matriz resultante se puede denotar por $F(C)$.

Matrices Equivalentes

Teorema

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $I \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y F una operación elemental por fila. Entonces se cumple:

$$F(A) = F(I) \cdot A$$

Corolarios

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y F es una operación elemental por filas, entonces $F(AB) = F(A) \cdot B$. Por otro lado, si $F_1, ..., F_n$ son operaciones elementales por filas, entonces:

$$(F_n \dots F_2 F_1)(AB) = (F_n \dots F_2 F_1(A)) \cdot B$$

Ejercicio

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Usando operaciones elementales por fila, transforme A en la matriz identidad. En simúltaneo, aplique las mismas operaciones por fila a la matriz identidad, obteniendo una matriz la cual llamaremos B.

Solución

Para convertir a la matriz A en la matriz identidad, aplicamos las siguientes operaciones elementales por fila, en orden:

$$f_1 \leftarrow \frac{1}{3}f_1, \quad f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1, \quad f_3 \leftarrow f_3 + (-1)f_1, \quad f_2 \leftarrow \frac{1}{3}f_2,$$
$$f_3 \leftarrow f_3 - \frac{5}{3}f_2, \quad f_2 \leftarrow f_2 - 2f_3, \quad f_1 \leftarrow f_1 + \frac{1}{3}f_3, \quad f_1 \leftarrow f_1 - \frac{1}{3}f_2$$

de esto se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por otro lado, si aplicamos las mismas operaciones (en ese orden) a la matriz identidad, se obtiene:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Matrices Equivalentes

Notemos lo siguiente, en el ejercicio anterior al aplicar 8 operaciones elementales por fila a la matriz A obtuvimos la matriz identidad, o sea:

$$(F_8 \ldots F_2 F_1)(A) = I$$

Por otro lado, aplicamos las mismas operaciones elementales por fila a I y obtuvimos la matriz B, es decir:

$$(F_8 \ldots F_2 F_1)(I) = B$$

De acuerdo con el corolario enunciado, tenemos

$$(F_8 \ldots F_2 F_1)(A) = (F_9 \ldots F_2 F_1)(I) \cdot A$$

Remplazando los resultados en esta igualdad, obtenemos que:

$$I = B \cdot A$$

Matrices Equivalentes

Es decir, la matriz B corresponde a la matriz inversa de A, o sea $B = A^{-1}$. Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Equivalentes

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matriz A es invertible, si y sólo si, es equivalente por filas a la matriz identidad I de dimensión n.

Observaciones:

1. En general, podemos obtener la inversa de una matriz A efectuando operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$, concluyendo que $B = A^{-1}$.
2. Si no es posible transformar A en la matriz identidad, entonces A no posee matriz inversa.

Ejercicios

Determine, si es posible, las matrices inversas en cada caso:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicios

Sean a, b dos constantes reales y A, B, C, D las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determine los valores de a, b de modo que $B^{-1} = C$.

(b) Considerando que $a = 1$ y $b = -1$ en la matriz C, determine una matriz $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de modo que:

$$\left((AXB)^t + A - D\right)^{-1} = A$$

(c) Determine los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinante

Definición:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El **determinante** de la matriz A, el cual es denotado por $\det(A)$ o $|A|$, es tal que:

1. Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, se tiene que $\det(A) = a_{11}$.
2. Si $n \geq 2$ y A_{ij} es la matriz cuadrada obtenida de A eliminándole la fila i y la columna j, entonces:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$
para cualquier $i = 1, ..., n$.

Determinante

Observaciones:

1. El valor del determinante de A no depende de la fila que se escoja para desarrollarlo.

2. El valor del determinante de A también es el mismo si se desarrolla por columnas.

3. Si el determinante de A se calcula utilizando las columnas de la matriz, su valor no de depende de la columna que se escoja para su desarrollo.

Ejemplos:

Calcule el determinante de la siguientes matrices.

(a) $A = (2)$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cualesquiera

1. $\det(A^t) = \det(A)$.
2. Si A tiene una fila o columna nula, entonces $\det(A) = 0$.
3. Si A es una matriz diagonal, entonces $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
4. Si F es una operación elemental por filas que intercambia dos filas de A, entonces

$$\det(A) = -\det(F(A))$$

5. Si F es una operación elemental por filas que multiplica una fila de A por un escalar λ, entonces

$$\det(A) = \frac{1}{\lambda}\det(F(A))$$

Propiedades

6. Si consideramos $\lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

$$\det(A) = \frac{1}{\lambda^n} \det(\lambda A)$$

7. Si F es una operación elemental de filas que suma un múltiplo escalar λ de la fila i a la fila j, entonces

$$\det(F(A)) = \det(A)$$

8. Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $\det(A) = 0$.
9. Si consideramos $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

10. Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Matriz de Cofactores

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada.

1. Se llama **cofactor** del elemento a_{ij} al escalar

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

2. Se llama **matriz de cofactores** de A, a la matriz que contiene los cofactores c_{ij} de cada elemento a_{ij} de A. Se denota por $\mathrm{Cof}(A)$, es decir, $\mathrm{Cof}(A) = (c_{ij})$.
3. Se llama **matriz adjunta** de A, a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, se escribe $\mathrm{Adj}(A)$

Matriz Inversa

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y sea $\mathrm{Adj}(A)$ su adjunta, entonces

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Teorema

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\det(A) \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A)$.

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Ejercicios

Determine, si es posible, la inversa de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicios

Demuestre las siguientes propiedades

(a) Sean A y B dos matrices invertibles. Si $A + B$ también es invertible, entonces $A^{-1} + B^{-1}$ es invertible y

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$$

(b) Sea $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ definida por:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N + I$ es invertible y $(N + I)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$.

Matrices escalonadas por filas

Definición:

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ no nula, se dice escalonada por filas si

1. su primera fila es no nula.
2. cada fila después de la primera tiene al menos un cero más que la fila anterior a la izquierda de su primer elemento no nulo.
3. las últimas filas pueden ser todas nulas.

Observación: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Existe una única matriz B, escalonada por filas, la cual es equivalente por filas a A.

Matrices escalonadas por filas

Definición:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama **rango** de A, al número de filas no nulas de la matriz escalonada por filas equivalente a A y se denota por $r(A)$.

Observación: Notemos que la definición anterior nos indica que si A y B son matrices equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.

Sistemas Lineales

Definición:

Una **ecuación lineal** de las incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

en la cual, los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ y el término independiente b son números reales conocidos.

Sistemas Lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones lineales que representaremos por:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

donde, los a_{ij} son los coeficientes del sistema, los b_i son los términos independientes del sistema y las $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas del sistema.

Sistemas Lineales

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Así, la notación matricial queda dada por $AX = B$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema, X es la matriz de incógnitas del sistema y B es la matriz de términos independientes.

Sistemas Lineales

Uno de los métodos más usados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales corresponde al denominado Método de Gauss.

Este método nos propone que para resolver un sistema de ecuaciones, debemos escalonar por filas la matriz $(A|B)$. Al realizar este escalonamiento, obtenemos un sistema de ecuaciones equivalentes, del cual obtenemos la solución de nuestro sistema original.

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

(a) $$\begin{cases} x + y & = & 7 \\ 4x + y & = & 16 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \frac{1}{4}x + y - z & = & 0 \\ x + 4y + 2z & = & 12 \\ 2x - 3y - z & = & 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x + y + z + w & = & 4 \\ -x - y + z + w & = & 9 \\ x - y + z - w & = & 1 \\ y - x & = & 2 \end{cases}$$

Sistemas Lineales

Observación:

El conjunto solución S de un sistema de ecuaciones lineales, puede ser vacío, o bien, contiene un único elemento, o bien contiene infinitos elementos. Ahora bien, el sistema se puede decir que es:

- incompatible si no tiene soluciones.
- compatible determinado si tiene una única solución.
- compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.

Sistemas Lineales

Si consideramos el sistema de ecuaciones $AX = B$, es tal que A es una matriz cuadrada de orden n, es decir, el sistema tiene n ecuaciones y n incógnitas.

Teorema:

Sea A una matriz cuadrada. Se tiene que, el sistema $AX = B$ tiene solución única, si y sólo si, A es invertible.

Observación: Notemos que si A es invertible se puede obtener la solución del sistema haciendo lo siguiente:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Ejercicios

Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que A es invertible y que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Determine el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 11 & = & 5 \\ 2x - 4y + 13z & = & 6 \\ x - 2y + 7z & = & 3 \end{cases}$$

Sistemas Lineales

Teorema: Rouché - Frobenius

Un sistema lineal $AX = B$, siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, es compatible, si y sólo si $r(A) = r(A|B)$. Además:

1. Si $r(A) = r(A|b) = n$, donde n es el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.
2. Si $r(A) = r(A|b) < n$, el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de las soluciones depende de $n - r(A)$ parámetros libres.

Ejercicios

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ 2x-y+5z & = & 1 \\ 3x+6z & = & 1 \end{cases}$$

2. Determine todos los valores de α y β reales de modo que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x+y-z & =4 \\ y+z & =2 \\ \alpha x+z & =\beta \end{cases}$$

   (a) no tenga solución.
   (b) tenga infinitas soluciones.
   (c) tenga solución única

   Luego, considerando $\alpha=-1$ y $\beta=-1$ determine el conjunto solución del sistema, si existe.

Método de Cramer

Método de Cramer

Si $AX = B$ un sistema lineal con matriz cuadrada de orden n y $\det(A) \neq 0$, entonces la única solución del sistema está dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad \text{para todo } i = 1, ..., n.$$

donde A_i se obtiene de A, cambiando la columna i por la matriz columna B.