UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN EVALUACIÓN 3.
CÁLCULO III. 525211.

1. **(15 ptos.)** Usando el Teorema de Green, calcule en el sentido antihorario

$$\oint_C 2xydx + (x^2+y^2-2x)dy$$

lo largo de una curva C cerrada cualquiera de $\mathbb{R}^2$, que encierre a una superficie de área igual a 1.

Solución

Sea $F(x,y) = 2xy$ y $G(x,y) = x^2+y^2-2x$, del Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_C 2xydx + (x^2+y^2-2x)dy &= \oint_C Fdx + Gdy = \iint_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} dxdy \\ &= \iint_S (2x-2+2x)dxdy = -2\iint_S dxdy = -2\end{aligned}$$

---

2. **(30 ptos.)** Sean 2 campos vectoriales de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos por :

$$\begin{aligned} F:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

a) Pruebe que ambos campos provienen de un potencial, y calcule dichos potenciales.

b) Sea C una circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio ε aribitrario. Pruebe que

$$\oint_C F(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0, \qquad \oint_C G(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -2\pi \qquad \text{(sentido antihorario).}$$

c) Deduzca que a pesar de que ambos campos provienen de un potencial, sólo uno es conservativo.

d) Calcule $\int_C F(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C que parta desde $(-1,0)$ y llegue a $(1,0)$.

e) Pruebe que $\int_C G(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C partiendo de $(-1,0)$ a $(1,0)$ sin rodear al punto $(0,0)$ es siempre igual a $-\pi$ si C *pasa por debajo del punto* $(0,0)$, y es igual a π si C *pasa por arriba del punto* $(0,0)$.

Solución

a) ¿ Existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F$?

$$\varphi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx + C(y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C(y) = \ln r + C(y)$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+C'(y)\\ &= \frac{y}{x^2+y^2}+C'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}\Longrightarrow C'(y)=0\Longrightarrow C(y)=0.\end{aligned}$$

Luego el potencial de F está dado por $\varphi(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \ln r$ **(3 pts.)**

Existe $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = G$?

$$\psi(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}dx+C(y)=\arctan(x/y)+C(y)$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\arctan(x/y)+C'(y)\\ &= \frac{-x}{x^2+y^2}+C'(y)=\frac{-x}{x^2+y^2}\Longrightarrow C'(y)=0\Longrightarrow C(y)=0.\end{aligned}$$

Luego el potencial de G está dado por $\psi(x,y)=\arctan(x/y)$ **(3 pts.)**

b) En coordenadas polares $F(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}\oint_C F(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta}{\varepsilon},\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\varepsilon}\right)\cdot(-\varepsilon\operatorname{sen}\theta,\varepsilon\cos\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}0d\theta=0\end{aligned}$$

(3 pts.)

En coordenadas polares $G(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=(\operatorname{sen}\theta,-\cos\theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}\oint_C G(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varepsilon},\frac{-\cos\theta}{\varepsilon}\right)\cdot(-\varepsilon\operatorname{sen}\theta,\varepsilon\cos\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}-1d\theta=-2\pi\end{aligned}$$

(3 pts.)

c) Ambas funciones son de clase C^1 salvo en $(0,0)$, luego como ambas provienen de un potencial, la integral sobre cualquier curva cerrada que no contenga al $(0,0)$ de F y de G es nula.

(2 pts.)

Por otro lado por (b), la integral integral sobre cualquier curva cerrada contenida entre dos vecindad de $(0,0)$ es nula para F y es distinto de 0, para G. Luego la integral de F sobre cualquiera curva cerrada de $\mathbb{R}^2$ es cero, en cambio la integral para G, no necesariamente si esta curva rodea al $(0,0)$. **(2 pts.)**

Luego F es un campo conservativo y G no.

(2 pts.)

d)

$$\int_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(1,0) - \varphi(-1,0) = \ln\left(\sqrt{1^2+0^2}\right) - \ln\left(\sqrt{(-1)^2+0^2}\right) = 0 - 0 = 0$$

(6 pts.)

e) De (c) sabemos que para cualquier curva cerrada D que no encierre al punto $(0,0)$, se tiene $\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ **(2 pts.)**

i. Si la curva C pasa por debajo del punto $(0,0)$ la completamos con la semicircunferencia de radio 1 que está debajo del eje $y = 0$, en el sentido horario :

$$C_{circ.\,inf.} = \{(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \mid \theta \in [0,\pi]\}$$

De modo que $D = C + C_{circ.\,inf.}$. **(1 pt.)**
Integrando G lo largo de esta curva cerrada que no contiene al $(0,0)$ obtenemos :

$$\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_{circ.\,inf.}} G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \pi = 0$$

Luego $\oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\pi$. **(1 pt.)**

ii. Si la curva C pasa por arriba del punto $(0,0)$ la completamos con la semicircunferencia de radio 1 que está arriba del eje $y = 0$, en el sentido antihorario :

$$C_{circ.\,sup.} = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta \in [\pi, 2\pi]\}$$

De modo que $D = C + C_{circ.\,sup.}$. **(1 pt.)**
Integrando G lo largo de esta curva cerrada que no contiene al $(0,0)$ obtenemos :

$$\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_{circ.\,sup.}} G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \pi = 0$$

Luego $\oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pi$. **(1 pt.)**

---

3. **(15 ptos.)** La siguiente ecuación conocida como ecuación de Stokes en regimen estacionario modela aproximadamente el movimiento de un fluido laminar viscoso :

$$-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ en } \Omega \qquad\qquad (\text{aquí } \Delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}),$$

donde $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo de velocidades que suponemos de clase $\mathcal{C}^2$, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función presión que suponemos de clase $\mathcal{C}^1$, y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, encerrado por una superficie S, medible. Usando la primera identidad de Green, deducida del Teorema de la Divergencia, pruebe que

$$\iiint_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v}\; dx = -\oiint_S (pI - \nabla\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\; ds$$

para todo $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ en Ω, y donde I es la matriz identidad de 3×3, y $\nabla\mathbf{u} = \left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{ij} = J(\mathbf{u})^t$ (traspuesta de la matriz jacobiana).

Solución

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces, aplicando la primera identidad de Green a cada componente de $\mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{u})$ se tiene que

$$\iiint_\Omega v_i \Delta u_i + \nabla v_i \cdot \nabla u_i \; dx = \oiint_S v_i \nabla u_i \cdot \mathbf{n} \; ds$$

Es decir

$$\iiint_\Omega (-\Delta u_i)\, v_i \; dx = \iiint_\Omega \nabla v_i \cdot \nabla u_i \; dx - \oiint_S v_i \nabla u_i \cdot \mathbf{n} \; ds$$

Lo cual vectorialmente queda

$$\iiint_\Omega (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \; dx = \iiint_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \; dx - \oiint_S (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \; ds \tag{1}$$

(5 pts.)

Por otro lado aplicando el teorema de la divergencia a $p\mathbf{v}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \mathrm{div}(p\mathbf{v}) \; dx &= \iiint_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \; dx + \iiint_\Omega p\,\mathrm{div}(\mathbf{v}) \; dx \\
&= \iiint_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \; dx \qquad \text{(pues } \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0\text{)} \\
&= \oiint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \; ds \qquad \text{(teorema de la divergencia)}
\end{aligned}$$

Es decir

$$\iiint_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \; dx = \oiint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \; ds \tag{2}$$

(5 pts.)

Haciendo producto punto entre la ecuación de Stokes y el campo vectorial $\mathbf{v}$ e integrando en Ω se tiene que

$$\iiint_\Omega (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} dx = 0.$$

Usando las igualdades (1) y (2) se obtiene

$$\iiint_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \; dx = -\oiint_S (pI - \nabla \mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \; ds$$

(5 pts.)

MSC/msc
(8-Julio-2004)