Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525211 – Cálculo III – Pauta de Evaluación 1 (25.6.2019)

Problema 1. (15P) Sean $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \wedge 0 < y < x^2\right\}$ y $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Considere las siguientes funciones

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, g(t) = f(t(h_1,h_2)).$$

Note que g es la restricción de f a la recta que contiene al origen de coordenadas y tiene a (h_1, h_2) como vector director. Demuestre que f no es continua en $(0,0)$, pero g sí es continua en 0.

Solución: El punto $(0,0)$ es punto de acumulación del dominio de f, f es continua en él si y solo si el límite, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ de $f(x,y)$ es $f(0,0) = 0$.

Las sucesiones $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos de $\mathbb{R}^2$ que convergen a $(0,0)$ y cuyos elementos son todos distintos de $(0,0)$. Los elementos de la primera sucesión pertenecen a A por lo que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)\right) = 1.$$

Los elementos de la segunda sucesión no pertenecen a A por lo que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, f\left(\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Con esto se tiene que la sucesión que resulta de evaluar f en los elementos de la primera sucesión converge a 1, mientras que la que resulta de evaluar f en los elementos de la segunda sucesión converge a 0. Esto indica que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

La función g es tal que $g(0) = 0$ y g es continua en 0 si y solo si $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$, que, a su vez, se cumple si $\lim_{t\to 0} f(th_1, th_2) = 0$. Esto es cierto si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ de modo que si $\|(th_1, th_2)\| = |t|\|(h_1,h_2)\| < \delta$, entonces

$$|f(th_1, th_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Dado que f toma los valores 1 o 0, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad (1) se cumple si encontramos $\delta \in \mathbb{R}^+$ de modo que si $|t|\|(h_1,h_2)\| < \delta$, entonces $(th_1, th_2) \notin A$.

Si (h_1, h_2) es tal que $h_1 h_2 \leq 0$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $(th_1, th_2) \notin A$. No importa qué valor tome δ, la desigualdad (1) es cierta para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Supongamos que (h_1, h_2) es tal que $h_1 h_2 > 0$.

- Tomemos primero $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$.

  Si $t < 0$, $(th_1, th_2) \notin A$.

  Si $t > 0$, $(th_1, th_2) \notin A$ si y solo si $th_2 \geq t^2 h_1^2$, es decir, $t \leq \dfrac{h_2}{h_1^2}$.

  Si tomamos $\delta = \|(h_1,h_2)\| \dfrac{h_2}{h_1^2}$,

  $$|t|\|(h_1,h_2)\| < \delta \Rightarrow |t| < \frac{h_2}{h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin A \Rightarrow f(th_1, th_2) = 0 \Rightarrow |f(th_1, th_2)| < \varepsilon.$$

- Si $h_1 < 0$ y $h_2 < 0$ se procede de manera muy similar y también se obtiene que si tomamos $\delta = \|(h_1, h_2)\| \dfrac{|h_2|}{h_1^2}$,

$$|t|\|(h_1, h_2)\| < \delta \Rightarrow |t| < \frac{|h_2|}{h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin A \Rightarrow f(th_1, th_2) = 0 \Rightarrow |f(th_1, th_2)| < \varepsilon.$$

Con esto hemos demostrado que g sí es continua en 0.

Problema 2. (15P) Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable en x_0, $f(x_0) = 0$ y g es continua en x_0.
Demuestre que la función $r : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\forall\, x \in A \,:\, r(x) = f(x)g(x)$$

es diferenciable en x_0 y $\mathrm{d}r(x_0; h) = g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; h)$.
Solución:
Debemos probar que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)g(x) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Esto es equivalente a, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, encontrar $\delta \in \mathbb{R}^+$ de modo que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$|f(x)g(x) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Si x_0 es punto interior de A, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{B}(x_0, r) \subseteq A$.
Dado que $\mathrm{d}f(x_0; \cdot)$ satisface una condición de Lipschitz y g es continua en x_0, existe $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ de modo que si $x \in \mathcal{B}(x_0, \delta_1)$[1],

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)| &= |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x) + g(x)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)|, \\
&\leq |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x)| + \left|\underbrace{\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)}_{\leq M\|x - x_0\|}\underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{< \frac{\varepsilon}{2M}}\right|, \\
&< |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x)| + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Además,

$$|(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x)| \leq |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))(g(x) - g(x_0))| + |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x_0)|.$$

Dado que f es diferenciable en x_0 y g es continua en x_0, existe $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ de modo que para todo $x \in \mathcal{B}(x_0, \delta_2)$[2]

$$\begin{aligned}
|(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x)| &\leq |\underbrace{(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))}_{< \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|}\underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{<1}| + |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x_0)|, \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\| + |(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x_0)|. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Si $g(x_0) = 0$, con las desigualdades (2) y (3) tenemos que si $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $x \in \mathcal{B}(x_0, \delta)$ se cumple que

$$|f(x)g(x) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

---

[1] $\delta_1 \leq r$
[2] $\delta_2 \leq r$

Si $g(x_0) \neq 0$ y porque f es diferenciable en x_0 y g es continua en x_0, existe $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$ de modo que para todo $x \in \mathcal{B}(x_0, \delta_3)$[3]

$$
\begin{aligned}
|(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))g(x)| &\leq |\underbrace{(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))}_{<\frac{\varepsilon}{4}\|x-x_0\|}\underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{<1}| + |\underbrace{(f(x) - \mathrm{d}f(x_0; x - x_0))}_{<\frac{\varepsilon}{4|g(x_0)|}\|x-x_0\|}g(x_0)|, \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|.
\end{aligned}
$$

La desigualdad anterior y la desigualdad (2) implican que si $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_3\}$ se cumple que para todo $x \in \mathcal{B}(x_0, \delta)$,

$$|f(x)g(x) - g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; x - x_0)| < \varepsilon\|x - x_0\|.$$

Con esto hemos demostrado que fg es diferenciable en x_0 y $\mathrm{d}(fg)(x_0; h) = g(x_0)\mathrm{d}f(x_0; h)$.

Problema 3. Considere la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Demuestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
2. ¿Es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta.

Solución:

1. **(7P)** En puntos distintos de $(0,0)$ f es una función continua por ser producto de las funciones xy (continua en $\mathbb{R}^2$) y $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ (continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser compuesta de funciones continuas).

   Además si $(x,y) \neq (0,0)$

   $$|f(x,y)| = \left|xy \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |xy| = |x||y| \leq \|(x,y)\|_2^2.$$

   Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si $\|(x,y) - (0,0)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$, entonces

   $$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \|(x,y)\|_2^2 \leq \varepsilon.$$

   Lo que indica que f es continua en $(0,0)$.

   Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

2. **(8P)** f es una función diferenciable en puntos distintos de $(0,0)$ por ser producto de funciones diferenciables en puntos distintos de $(0,0)$.

   Además,

   $$\partial_1 f(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda,0) - f(0,0)}{\lambda} = 0 \ \text{ y } \ \partial_2 f(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0,\lambda) - f(0,0)}{\lambda} = 0.$$

   Dado que $\nabla f(0,0) = (0 \quad 0)$, f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si

   $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0. \tag{4}$$

[3] $\delta_4 \leq r$

Pero,

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy|\left|\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| \leq \|(x,y)\|_2$$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y (x,y) es tal que $\|(x,y)\| < \varepsilon$, entonces $\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$, lo que indica que f satisface (4) y f es, por tanto, también diferenciable en $(0,0)$.

Problema 4. Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que satisface

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Sea $v = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(3,1)$ una dirección en $\mathbb{R}^2$.

1. Demuestre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la derivada direccional de f con respecto a v en (x,y) es igual a cero.
2. Muestre que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(x-3y,0)$ pertenece a la recta que contiene a (x,y) y tiene a v como vector director.
3. Concluya que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f(x,y) = f(x-3y,0)$.

Solución:

1. **(5P)** Dado que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, se cumple que la derivada direccional de f, en la dirección v, en (x,y) es

$$\mathrm{d}f((x,y);v) = \langle \nabla f(x,y); v\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}\partial_1 f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{10}}\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\partial_2 f(x,y)) + \frac{1}{\sqrt{10}}\partial_2 f(x,y) = 0.$$

2. **(5P)** La recta que contiene a (x,y) y tiene a v como vector director está formada por los puntos de la forma

$$(x,y) + tv \,:\, t \in \mathbb{R}.$$

   Si $t = -\sqrt{10}y$, $(x,y) + (-\sqrt{10}y)v = (x-3y,0)$. Se cumple, por tanto, que $(x-3y,0)$ también pertenece a la recta que contiene a (x,y) y tiene a v como vector director.

3. **(5P)** Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sea $g(t) = f((x,y)+tv)$.

   Para $t_0 \in \mathbb{R}$ se tiene $g'(t_0) = \langle \nabla f((x,y)+t_0 v); v\rangle = \partial_v f((x,y)+t_0 v) = 0$ porque la derivada direccional de f, en la dirección v, en cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ es igual a cero. Esto indica que la función g es constante y, por tanto,

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, f((x,y)+tv) = f(x,y).$$

   Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, el par $(x,y) + (-\sqrt{10}y)v = (x-3y,0)$ y, por tanto, $f(x,y) = f(x-3y,0)$.

Problema 5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) = e^x \sin(y)$.

1. Muestre que f es de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$.
2. Escriba el desarrollo de Taylor, hasta los términos de orden 2, de f alrededor de $(0,0)$.

Solución:

1. **(5P)** Si $g(x,y) = e^x$, entonces

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = e^x, \quad \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

   es decir, todas las derivadas parciales de g hasta orden 2 son continuas en $\mathbb{R}^2$ y $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
   Si $h(x,y) = \sin(y)$,

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = \cos(y), \ \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = -\sin(y),$$

   es decir, todas las derivadas parciales de h hasta orden 2 son continuas en $\mathbb{R}^2$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
   Como f es producto de funciones de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, ella es de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$.

2. **(10P)**

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1, \ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

   el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $(0,0)$ es

$$p(h_1, h_2) = h_2 + 2h_1 h_2.$$