UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

2017-Tr1

Evaluación n^{o}1 - Cálculo II
(527148)

1. (15 ptos)

(a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ verifica

$$\int_1^{x^2} g(t)dt = \frac{1}{2}(x^4 - 1)^2$$

Calcule $g(2)$.

Resp. Derivando ambos miembros c/r a x

$$2xg\left(x^2\right) = 4x^3\left(x^4 - 1\right)$$

luego :

$$g\left(x^2\right) = 2x^2\left(x^4 - 1\right)$$

Asi, con $x^2 = 2$

$$g\left(2\right) = 12 \qquad \text{(7 ptos)}$$

(b) Sean $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua y $F(x) = x^2 \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

Demuestre que $f(0) = -\dfrac{F'(\pi)}{\pi^2}$.

Resp. Como f es continua, entonces

$$F'(x) = 2x\int_0^{\sin x} f(t)dt + x^2\left(\cos x f\left(\sin x\right)\right)$$

evaluando $F'(\pi)$ se tiene:

$$F'(\pi) = \pi^2\left(-1\right)f\left(0\right)$$

luego

$$f\left(0\right) = -\frac{F'(\pi)}{\pi^2} \qquad \text{(8 ptos)}$$

2. (10 ptos)

   (a) Determine $p \in R^+$ de modo que la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{2t}e^{-pt}dt$$

   sea convergente.

Resp. La integral impropia $\int_0^\infty e^{\alpha t}dt$ converge $\alpha < 0$ y diverge $\alpha \geq 0$ (visto en clase). Luego la integral impropia $\int_0^\infty e^{2t}e^{-pt}dt$ converge si $2-p<0$.Esto es, la integral $\int_0^\infty e^{2t}e^{-pt}dt$ converge si $p>2$.

(5 ptos)

Obs. Aplicando la definición

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{2t}e^{-pt}dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(2-p)t}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2-p}e^{(2-p)t}\Big|_0^b\right) \\ &= \frac{1}{p-2}, \quad \text{si} \ \ p>2\end{aligned}$$

   b. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que la integral $\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ converja a $\frac{\pi}{4}$.

Resp.

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\pi - \arctan a.\end{aligned}$$

Luego, si $\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$,entonces $a=1$

(5 ptos)

3. (20 ptos)

(a) Calcule $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin(x) + \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Resp.

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin(x) + \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{(2 ptos)}$$

Ahora, calculando cada una de las integrales de la derecha.

i. Mediante el cambio de variable $u = \arcsin(x)$

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} u\, du \\ &= \frac{7}{288}\pi^2 \end{aligned} \quad \text{(4 ptos)}$$

ii. Mediante el cambio de variable $u = \arccos x$

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\int_{\pi/4}^{\pi/6} (u)\; du \\ &= \frac{5}{288}\pi^2 \end{aligned} \quad \text{(3 ptos)}$$

Luego,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin(x) + \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{12}{288}\pi^2 \quad \text{(1 ptos)}$$

b. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\int_1^2 \ln(ax)dx = 0$.

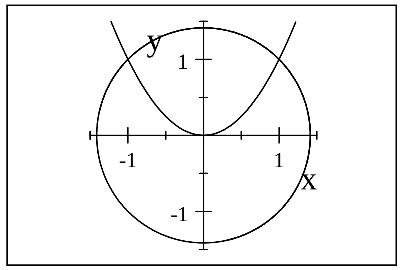
Resp.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(ax)dx &= x\left(\ln ax - 1\right)\Big|_1^2 \\ &= 2\ln 2a - \ln a - 1 \end{aligned}$$

Asi, $\int_1^2 \ln(ax)dx =$ si y solo si $2\ln 2a - \ln a - 1 = 0$. Esto es,

$$a = \frac{e}{4} \quad \text{(10 ptos)}$$

4. (15 ptos) Sea R la región del plano limitada superiormente por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ e inferiormente por la parábola $y = x^2$



(a) Calcule el área de la región R.

Resp.

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right) dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right) dx \quad , \text{(por paridad)} \\ &= 2\int_{0}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}\right) dx - 2\int_{0}^{1} \left(x^2\right) dx \end{aligned}$$

Como

$$\int_{0}^{1} \left(x^2\right) dx = \frac{1}{3}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}\right) dx &= \int_{0}^{\pi/4} 2\left(\cos^2 u\right) du, \text{ con } x = \sqrt{2}\sin u \\ &= \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A(R) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

(10 ptos)

(b) Encuentre una expresión integral que permita calcular el volumen V del sólido generado por rotación de región R en torno a la recta $x = 4$.

Resp.

$$V(S) = 2\pi \int_{-1}^{1} (4-x)\left(\sqrt{2-x^2} - x^2\right) dx \qquad \text{(5 ptos)}$$

Tiempo Asignado: 100 min