UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Listado 2

1. Estudie y clasifique las siguientes relaciones:

   a) En $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \text{mín}\{x,y\} \leq 100$.
   b) En $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x = y^2$.
   c) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow X \cap Y^c = \emptyset$.
   d) En $\mathcal{M}_n(R)$: $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$.
   e) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow Det(A\cdot B) = 1$.

2. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \frac{x}{y} \in A, \text{ donde } A \subseteq \mathbb{R}.$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia si $A = \mathbb{R}$. Encuentre $\left[\frac{1}{3}\right]_{\mathcal{R}}$.
   b) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de orden si $A = \mathbb{N}$. Determine si el orden es total o parcial.

3. Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ dos relaciones sobre un conjunto E. Se define las relaciones $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ por:

$$x\,(\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)\,y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}_1 y \,\wedge\, x\mathcal{R}_2 y$$
$$x\,(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)\,y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}_1 y \,\vee\, x\mathcal{R}_2 y$$

   Estudie las propiedades de $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$ en base a las propiedades de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

4. Sea la relación R en $\mathbb{Z}^3$ definida por: $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3$,

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

   a) Pruebe que R es relación de orden ¿Es R de orden total o parcial?
   b) Sea los conjuntos:

$$R^+ = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \theta\,R\,x\} \quad \text{y} \quad R^- = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x\,R\,\theta\},$$

   donde $\theta = (0,0,0)$. Pruebe que $R^+ \cap R^- = \{\theta\}$ y $R^+ \cup R^- \neq \mathbb{Z}^3$.

5. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\exists m \in \mathbb{N}$, $A^m = I$. Se define la relación R_A en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x\,R_A\,y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\; A^k \cdot x = y.$$

   a) Pruebe que R_A es relación de equivalencia.
   b) Determine $\forall (a,b) \in \{0,1\}^2, [(a,b)]_{R_A}$, donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
