# Evaluación 3 (Pauta)

**Problema 1.** Sea $z \in \mathbb{C}$, se considera la siguiente desigualdad

$$|2z - 1 + 3i| \leq |z + 1 - 3i|.$$

a) **(4 puntos)** El número complejo $3 - 5i$, ¿satisface la desigualdad anterior?.

**Desarrollo**. Para el número complejo $3 - 5i$, se tiene

$$\begin{aligned} |2(3-5i) - 1 + 3i| &= |5 + i(-7)| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}, \\ |(3-5i) + 1 - 3i| &= |4 + i(-8)| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}. \end{aligned}$$

Como $|2(3-5i) - 1 + 3i| \leq |(3-5i) + 1 - 3i|$, el número complejo $3 - 5i$ satisface la desigualdad anterior.

b) **(14 puntos)** Resolver y determinar el conjunto solución de la desigualdad previa.

**Desarrollo**. Sea $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Primero se determinar los correspondientes módulos

$$\begin{aligned} |2z - 1 + 3i| &= |(2x-1) + i(2y+3)| = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y+3)^2}, \\ |z + 1 - 3i| &= |(x+1) + i(y-3)| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}. \end{aligned}$$

Desarrollando la desigualdad se obtine

$$\begin{aligned} |2z - 1 + 3i| &\leq |z + 1 - 3i| \\ \sqrt{(2x-1)^2 + (2y+3)^2} &\leq \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \\ (2x-1)^2 + (2y+3)^2 &\leq (x+1)^2 + (y-3)^2 \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 + 12y + 9 &\leq x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ 3x^2 - 6x + 3y^2 + 18y &\leq 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y &\leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 &\leq 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 &\leq (\sqrt{10})^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución será

$$S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq (\sqrt{10})^2\}.$$

c) **(2 puntos)** Mostrar gráficamente (en el plano de Argand) el conjunto solución encontrado en la parte b).

**Desarrollo**. El conjunto solución será la zona interior de una circunferencia de centro $(1, -3)$ y radio $r = \sqrt{10}$. Gráficamente se obtiene:

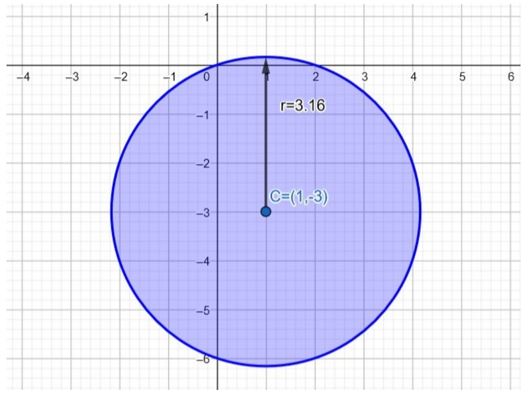


Figura 1: Conjunto Solución Problema 1.

**Problema 2.** Dado $z = 4 + 4\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

a) **(5 puntos)** Encontrar la forma polar de $z$.
**Desarrollo**.

$$\begin{aligned} |z| &= |4 + 4\sqrt{3}i| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8, \\ \mathrm{Arg(z)} &= Arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = Arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\pi}{3} \in ]-\pi, \pi]$, la forma polar de $z$ es

$$z = 8 \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

b) **(12 puntos)** Determinar las raíces cúbicas de $z$.
**Desarrollo**. Se deben encontrar $w \in \mathbb{C}$ de forma que $w^3 = z$. La forma polar de los $w$'s será $|w|\ \mathrm{cis}(\theta_w)$. Así,

$$\begin{aligned} |w|^3 &= |z| \Longrightarrow |w| = \sqrt[3]{8} = 2, \\ 3\theta_w &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \theta_w &= \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como vamos a determinar las raíces cúbicas tendremos 3 raíces "complejas", entonces $k \in \{0, 1, 2\}$.

$\mathbf{k = 0}$
$\theta_{w_0} = \frac{\pi}{9} \in ]-\pi, \pi]$. Por tanto, la primera raíz de $z$ será

$$w_0 = 2\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

**k = 1**
$\theta_{w_1} = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{9} \in ]-\pi, \pi]$. Por tanto, la segunda raíz de $z$ será

$$w_1 = 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

**k = 2**
$\theta_{w_2} = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{9} \notin ]-\pi, \pi]$. Entonces, $\theta_{w_2} = \dfrac{13\pi}{9} - 2\pi = \dfrac{-5\pi}{9}$. Por tanto, la tercera raíz de $z$ será

$$w_3 = 2\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{9}\right).$$

c) **(3 puntos)** Represente en un gráfico cada una de las raíces obtenidas en la parte b).
**Desarrollo**.

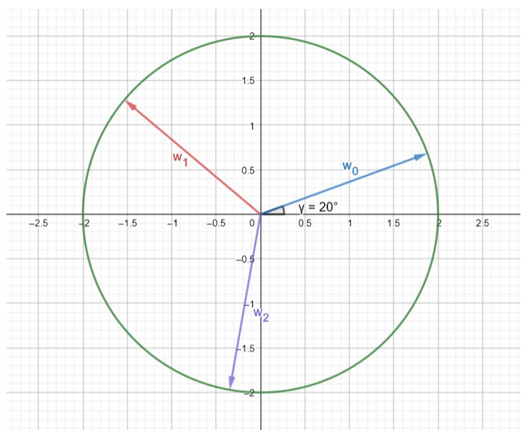


Figura 2: Raíces de $z$.

**Problema 3.**

3.1 **(10 puntos)** Sea $p(x) = x^5 - 32$. El cuociente de dividir $p(x)$ por $d(x)$ es $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ y el resto es $-64$. Determine el polinomio $d(x)$.

**Desarrollo.** Al realizar la división de $\dfrac{p(x)}{d(x)}$ se obtiene:

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$
$$\iff p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

Despejando $d(x)$ en esta expresión, obtenemos:

$$d(x) = \frac{p(x) - r(x)}{q(x)}$$

Reemplazando, se tiene:

$$d(x) = \frac{x^5 - 32 - (-64)}{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16} = \frac{x^5 + 32}{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16}$$

Aplicamos el algoritmo de división:

$$\begin{array}{rrcll}
 & x^5+32 & : & x^4-2x^3+4x^2-8x+16 & = \quad x+2 \\
- & \underline{(x^5-2x^4+4x^3-8x^2+16x)} & & & \\
 & 2x^4-4x^3+8x^2-16x+32 & & & \\
- & \underline{(2x^4-4x^3+8x^2-16x+32)} & & & \\
 & 0 & & &
\end{array}$$

Así, $d(x) = x + 2$.

3.2 Sea $p(x) = 4x^3 + 2x + 3kx^2$ un polinomio y $k \in \mathbb{R}$.

a) **(5 puntos)** Sabiendo que $-2$ es raíz de $p(x)$, determine el valor de $k$.
**Desarrollo**. Usando la definición de raíz de un polinomio, tenemos que

$$\begin{aligned}
p(-2) = 0 \quad &\iff \quad 4(-2)^3 + 2(-2) + 3k(-2)^2 = 0 \\
&\iff \quad 4(-8) - 4 + 12k = 0 \\
&\iff \quad -36 + 12k = 0 \\
&\iff \quad k = 3
\end{aligned}$$

Así, $k = 3$ y $p(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x$.

b) **(5 puntos)** Obtenga todas las raíces de $p(x)$ e indique las respectivas multiplicidades.
**Desarrollo**. Factorizando el polinomio, tenemos $p(x) = x \cdot (x+2)\left(x + \frac{1}{4}\right)$. Luego, por teorema del factor tenemos que las raíces del polinomio serán:

- $0$ de multiplicidad uno.
- $-2$ de multiplicidad uno.
- $-\dfrac{1}{4}$ de multiplicidad uno.