

Listado 7

1. Considere la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Considere además los polinomios $p(x) = x - 2$ y $q(x) = x^2 + 1$.

- a) Calcule $p(B)$ y $q(B)$.
 - b) Calcule $\text{Ker}(p(B))$ y $\text{Ker}(q(B))$, verificando que son espacios B -invariante.
 - c) Muestre que $\text{Ker}(p(B))$ y $\text{Ker}(q(B))$ están en suma directa y que suman \mathbb{R}^3 .
2. Encuentre la forma canónica de Jordan de las siguientes matrices junto con la base que la logra. En el caso del ítem c), encuentre una base ortogonal que la diagonalice.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Decida si son o no semejantes las siguientes matrices. En caso de serlo encuentre la matriz de cambio de base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $G : V \rightarrow V$ un operador lineal cuya matriz representante respecto a \mathcal{B} es triangular superior. Demuestre que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ el subespacio $S = \langle \{v_1, \dots, v_i\} \rangle$ es G -invariante.

5. Para el siguiente operador $H : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, calcule todos sus núcleos iterados y determine la base de \mathbb{C}^4 que hace que su matriz asociada sea una matriz representante triangular.

$$H(x, y, z, t) = (x, 2x + 2y - z, x + y, t)$$

6. Sea U un subespacio vectorial de V , un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormal de U . Considere el operador de proyección: $\text{Proy}_U : V \rightarrow V$, que, como sabe, está definido como sigue.

$$\text{Proy}_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v; u_i \rangle u_i$$

- a) Demuestre que Proy_U es un operador lineal idempotente.
- b) Determine $\text{Ker}(\text{Proy}_U)$ e $\text{Im}(\text{Proy}_U)$.
- c) Concluya que Proy_U es diagonalizable y sugiera una base que lo diagonalice.

Ejercicios de repaso de Álgebra II

1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} , $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V , $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, distintos entre sí y $F : V \rightarrow V$ una aplicación lineal que satisface

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1, \quad F(v_2) = \lambda_1 v_2, \quad F(v_3) = \lambda_2 v_3.$$

Encuentre

- a) base y dimensión de S_{λ_1} ,
b) $F(3v_1 + 5v_3)$,
c) $\text{Ker}(F)$
d) $v \in V$ tal que $F(v) = 2\lambda_1 v$,
e) $v \in V$ tal que $F(v) = \lambda_2 v$,
2. Considere \mathbb{K}^3 como espacio vectorial sobre \mathbb{K} , y la aplicación lineal $F : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $F(x, y, z) = (y, z, x)$.
- a) Calcule los valores propios de F .
b) Para cada valor propio de F , determine su espacio propio y defina una base para el mismo.
3. Sea $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal que satisface

$$L(A) = A - \text{tr}(A)I_2.$$

Encuentre los valores propios de L y los subespacios propios asociados a cada valor propio de L .

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (2x + 2z, ay + (a + 1)z, z)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determine los valores de a para los cuáles T es invertible.
b) Determine los valores de a para los cuáles T es diagonalizable.
5. Sea $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que
- $$D(p)(t) = tp'(t).$$
- a) Determine los valores propios de D .
b) Determine el espacio propio asociado a cada valor propio de D , ¿es D diagonalizable?