UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra III
525201
17 de abril de 2017
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 5

Ejercicios de práctica

1. **Definición:** *Una transformación lineal D se dice idempotente si $D^2 = D$.*

   a) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que $L(x, y) = (x+y, 0)$ es idempotente.

   b) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que $Im(D) = S_1$ y $Ker(D) = S_0$.

   c) **(a realizar por los alumnos)** Concluya que si V es de dimensión finita, entonces $\sigma(D) = \{0, 1\}$ y que D es diagonalizable.

2. **Definición.** *Dos operadores E y F se dicen independientes si $E \circ F = \Theta$ y $F \circ E = \Theta$*

   a) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que si E y F son idempotentes e independientes, entonces $E + F$ es también idempotente.

   b) Encuentre además dos operadores idempotentes no independientes tales que su suma no sea idempotente.

3. Considere $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz real cuadrada.

   a) Suponiendo que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, demuestre que entonces A tiene al menos un vector propio real asociado a λ. Indicación: use que cualquier vector en $\mathbb{C}^n$ se puede escribir de la forma $v + wi$, con $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   b) **(a realizar por los alumnos)** Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ es un valor propio de A, demuestre que entonces todos los vectores propios de A asociados a z tienen alguna componente no real.

Ejercicios propuestos

1. Sea $T : V \to V$ lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio, sea además A la matriz representante de T respecto a una base dada de V. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) λ^k es valor propio de T^k.

   b) Si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha\lambda$ es valor propio de αT.

   c) $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A y de A^t.

   d) 0 es valor propio de T si y solo si T no es invertible.

   e) Si T es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.

2. Sea λ un valor propio de T no nulo, demuestre que $S_\lambda \subseteq Im(T)$.

3. Sean T, L dos operadores lineales en un espacio de dimensión finita U tales que $S \circ T = Id$, demuestre que ambos son invertibles y que uno es el inverso del otro.

4. Sea $T : V \to V$ un operador lineal y sea k el menor natural que cumple $T^k = Id$. Determine si T es o no invertible y si lo es, calcule su inversa.

5. Demuestre que $Im(T^k) \subseteq Im(T^{k-1}) \subseteq \cdots \subseteq Im(T^2) \subseteq Im(T)$.

6. Demuestre que si $Im(T^k) = Im(T^{k+1})$, entonces $ker(T^k) = ker(T^{k+1})$, y viceversa.

7. Demuestre que si $Im(T^k) = Im(T^{k+1})$, entonces $Im(T^k + 1) = Im(T^{k+2})$.

8. Una transformación lineal $N : V \to V$ se dice nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $N^k = 0$. Demuestre que los valores propios de una transformación nilpotente son todos nulos. Demuestre además que si N es nilpotente, pero no es nula, entonces existe $v \in V$ tal que $v \notin Ker(N)$ y $v \in Ker(N^2)$.

9. Demuestre que si A es una matriz triangular entonces todas sus potencias son triangulares, y si además es invertible, entonces su inversa también es triangular.

10. Dada una transformación lineal $T : V \to V$ y dado un sub espacio vectorial $S \subseteq V$ T-invariante, demuestre que si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ tales que $\lambda v - T(v) \in S$ entonces $S+ < \{v\} >$ es también T-invariante.

11. Sea T un operador lineal y sean S y W dos s.e.v. T-invariantes. Demuestre que $S + W$ y $S \cap W$ son también T-invariantes.

12. Sean T y L dos operadores lineales tales que $T \circ L = L \circ T$ y sea $p(x)$ un polinomio.

    a) Demuestre que L conmuta con $p(T)$.

    b) Demuestre que $Ker(p(T))$ e $Im(p(T))$ son L-invariantes.