

Matrices definidas positivas

- Una matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice **definida positiva** si

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \neq 0.$$

- Estas matrices también aparecen muy habitualmente, por ejemplo, al ajustar parámetros de un modelo por cuadrados mínimos o al resolver problemas de valores de contorno para ecuaciones diferenciales.
- **Teorema.** Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz **simétrica**. \mathbf{A} es definida positiva si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:
 1. los valores propios de \mathbf{A} son todos positivos;
 2. los determinantes de las submatrices principales de \mathbf{A} son todos positivos;
 3. existe una matriz \mathbf{L} , triangular inferior y no singular, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$.
- Esta última propiedad nos dice que si la matriz es simétrica y definida positiva, siempre puede obtenerse una factorización en matrices triangulares **sin necesidad de pivoteo**.
Además, **no hace falta calcular la matriz triangular superior**, pues es la transpuesta de la triangular inferior. Veremos que esto reduce el costo operacional a la mitad.

Método de Cholesky (cont.)

- Para resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ con **matriz simétrica y definida positiva** por el **método de Cholesky**, una vez calculada L , se tiene:

$$Ax = b \iff L(L^t x) = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ L^t x = y. \end{cases}$$

- Para resolver los sistemas $Ly = b$ y $L^t x = y$, se utiliza el algoritmo que ya conocemos para matrices triangulares, cuyo costo operacional es de $\approx 2n^2$.
- Por lo tanto el costo operacional total del método de Cholesky es de $\approx \frac{1}{3}n^3$. Vale decir, **aproximadamente la mitad que el del M.E.G.**
- Además, se demuestra que si la matriz es **simétrica y definida positiva**, los métodos de factorización son estables respecto a la propagación de errores de redondeo **sin necesidad de estrategia de pivoteo**.
En particular, el método de Cholesky es **estable respecto a la propagación de errores de redondeo**.

Método de Cholesky en OCTAVE

```
>> A = [2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2];
```

```
>> R = chol(A)
```

```
R =
```

```
1.41421 -0.70711 0.00000
```

```
0.00000 1.22474 -0.81650
```

```
0.00000 0.00000 1.15470
```

```
>> L = R'
```

```
L =
```

```
1.41421 0.00000 0.00000
```

```
-0.70711 1.22474 0.00000
```

```
0.00000 -0.81650 1.15470
```

Notar que OCTAVE entrega una matriz triangular superior ***R***.