UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201
3 de abril de 2017
Prof.: Anahí Gajardo

Listado 3

Ejercicios de práctica

1. Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio con raíces α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$. Demuestre que $\alpha\beta\gamma = -c$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b$ y $\alpha + \beta + \gamma = -a$.

2. **(a realizar por los alumnos)** Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio cuyas raíces vienen todas por pares conjugados, es decir, si z es raíz de $p(x)$, entonces $\overline{z}$ también lo es y con la misma multiplicidad. Demuestre que $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

3. Considere la siguiente relación en $\mathbb{R}[x]$:

$$p(x)\ \mathcal{R}\ q(x) \Leftrightarrow (x^2+1) \mid (p(x) - q(x))$$

   a) **(propuesto)** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   b) **(propuesto)** Demuestre que $[0] = \{q(x)(x^2+1) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.
   c) Demuestre que si $(x^2+1) \nmid q(x)$, entonces existe $f(x)$ tal que $q(x)f(x)\ \mathcal{R}\ 1$. Indicación: use teoremas vistos en clases.
   d) Demuestre que para todo polinomio $q(x)$ existe otro polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 1 tal que $q(x)\ \mathcal{R}\ p(x)$. Indicación: use teorema de división polinomial.
   e) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que si $a_1x + a_0\ \mathcal{R}\ b_1x + b_0$, entonces $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0$.
   f) Considere la siguiente función.

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}[x]/\mathcal{R} \\ \phi(c+id) & = & dx + c \end{array}$$

      1) **(a realizar por los alumnos)** Calcule $\phi(i)$.
      2) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que ϕ es inyectiva.
      3) Demuestre que ϕ es biyectiva.

4. **(solo $p = 4$ en práctica, caso general propuesto)** Dado un natural p, considere la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$a\ \sim_p\ b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, kp = (a - b)$$

   a) Demuestre que es una relación de equivalencia.
   b) Calcule $[0]$, $[1]$ y $[p]$.
   c) Demuestre que para todo $n \geq p$ existe $l \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que $n \in [l]$.Indicación: use división entera.
   d) Demuestre que $[n] = [p - n]$.

e) Concluya que $\mathbb{Z}/\sim_p = \{[0],[1],\ldots,[p-1]\}$.

f) Demuestre que si $a \sim_p b$ y $c \sim_p d$, entonces $a+c \sim_p b+d$.

g) Demuestre que si $a \sim_p b$ y $c \sim_p d$, entonces $ac \sim_p bd$.Piense en sumar y restar algo conveniente.

h) Considere en $\mathbb{Z}/\sim_2$ las siguientes operaciones.

$$
\begin{aligned}
[a] \oplus [b] =& [a+b] \\
[a] \odot [b] =& [ab]
\end{aligned}
$$

Realice las tablas pitagóricas de estas dos operaciones y demuestre que $(\mathbb{Z}/\sim_2, \oplus, \odot)$ es un cuerpo.

Ejercicios propuestos

1. Calcule la división polinomial de $6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$ por $2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$.

2. Decida si $x^4 + 2x - 1$ es divisible por $2x^3 - 2$.

3. Calcule $MCD(2184, 1210)$, y encuentre además los enteros e, f tales que $MCD(2184, 1210) = 2184e + 1210f$.

4. Calcule el $MCD(6x^3 + 13x^2 + 4x - 3, 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6)$.

5. Calcule $g(x) = MCD(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2, 3x^2 - 8x + 4)$ y encuentre los polinomios $e(x)$, $f(x)$ tales que $g(x) = e(x)(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) + f(x)(3x^2 - 8x + 4)$.

6. Demuestre que a y b son primos relativos si y solo si existen e, $f \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = ea + fb$.

7. Demuestre que aunque en un país determinado hayan solo monedas de 7 y 5 pesos, esto no es un impedimento para comprar cualquier cosa, siempre usted tenga suficiente dinero y el vendedor tenga suficiente vuelto.

8. Demuestre que si $p(x)$ y $q(x)$ tienen coeficientes enteros, entonces $MCD(p(x), q(x))$ tiene coeficientes racionales.

9. Sean $p(x)$, $q(x)$, $e(x)$, $f(x)$ tales que $MCD(p(x), q(x)) = e(x)p(x) + f(x)q(x)$ demuestre que entonces $e(x)$ y $f(x)$ son primos relativos.

10. Demuestre que si un polinomio de grado n toma el mismo valor en más de $n+1$ puntos, entonces es el polinomio constante.

11. Demuestre que $x^3 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.