Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 4 — viernes 11 de julio de 2025

Entrega: viernes 25 de julio de 2025, 23.00 horas

Problema 1. Calcular la integral de línea

$$\int_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}s,$$

donde L es la primera espiral de la línea helicoidal cónica $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

Problema 2. Demostrar que la integral

$$\int_L \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y\right)$$

tomado a lo largo de cualquier contorno cerrado que encierre el origen de coordenada en sentido positivo es igual a 2π.

Problema 3. Calcular el área de las siguientes superficies:

a) De la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante.
b) De la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ la cual se halla por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ e $y = 6$.
c) De la parte de $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b$ e $y = -b$.

Problema 4. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y, x - 2xz, -xy)$. Demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = 0,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ por encima del plano (x, y).

Problema 5. Usando del Teorema Integral de Gauss calcule el valor de la integral

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, \mathrm{d}(x, y, z),$$

donde $\vec{F}(x, y, z) = (0, xyz^2, 3z)$ y V es el sólido limitado por las superficies $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z = 4$. (Resultado: 64π)