UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la Evaluación 1
ECUACIONES DIFERENCIALES II (525214, 525523), 2025-2

PROBLEMA 1. [16 puntos]

Usando el método de separación de variables, halle una solución del siguiente PVIF para la función incógnita $u(x,t)$

$$\begin{cases} \partial_x u(x,t) + \partial_t u(x,t) = u(x,t) \quad , \quad x > 0\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = \mathrm{e}^{t/2} \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{x/2} \quad , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Desarrollo: Buscamos una solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

donde $X : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es una función de la variable x y $T : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es una función de la variable t. Reemplazando en la EDP, se obtiene

$$X'(x)T(t) + X(x)T'(t) = X(x)T(t)\ .$$

Suponga que $X(x) \neq 0\ \forall\, x > 0$ y $T(t) \neq 0\ \forall\, t > 0$. Dividiendo por $X(x)T(t)$ se llega a

$$\frac{X'(x)}{X(x)} - 1 = -\frac{T'(t)}{T(t)}\ \ \forall\, x > 0, \forall\, t > 0\ .$$

Como el miembro izquierdo es una función de x y el miembro derecho es una función de t, sigue que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} - 1 = -\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda\ \ \forall\, x > 0, \forall\, t > 0\ ,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante. Deducimos que $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen las siguientes EDOs lineales de primer orden

$$X'(x) = (\lambda+1)X(x) \quad , \quad T'(t) = -\lambda T(t)\ . \qquad \textbf{[6 puntos]}$$

Las soluciones de estas EDOs son

$$X(x) = A\,\mathrm{e}^{(\lambda+1)x} \quad , \quad T(t) = B\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ ,$$

donde A y B son constantes reales arbitrarias. Notese que si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, X y T no se anulan, esto es, satisfacen nuestra hipótesis de partida. **[4 puntos]**

La condición de frontera $u(0,t) = e^{t/2}$ implica

$$X(0)T(t) = AB\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{t/2}\ \ \forall\, t > 0\ ,$$

de modo que $AB = 1$ y $\lambda = -1/2$. Así,

$$u(x,t) = AB\,\mathrm{e}^{(\lambda+1)x}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{(x+t)/2}\ .$$

[4 puntos]

Se verifica que $u(x,t)$ satisface la condición inicial $u(x,0) = \mathrm{e}^{x/2}$, por lo que es una solución del PVIF. **[2 puntos]**

PROBLEMA 2. [24 puntos]

Para $T > 0$, sea f la función definida en $[0, T/2]$ por

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \quad , \quad 0 \le t \le \frac{T}{2}\ .$$

1. Muestre que la extensión T-periódica *par* de f está dada por

   $$\widetilde{f}_p(t) = \widetilde{f}_1(t) + \widetilde{f}_2(t) \ \ ,\ \ t \in \mathbb{R}\ ,$$

   donde $\widetilde{f}_2(t) = \cos(\frac{4\pi t}{T})$ y $\widetilde{f}_1(t)$ es una función por determinar.

2. Determine las series de Fourier de $\widetilde{f}_1$ y de $\widetilde{f}_2$.

3. Deduzca de la pregunta anterior la serie de cosenos de f.

4. Muestre que la serie de cosenos de f converge uniformemente y que su suma es igual a $f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Deduzca el valor de la suma

   $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}\ .$$

Desarrollo: 1. La extensión par de la función $f_1(t) = \sin(2\pi t/T)$ definida en $[0, T/2]$ está dada por $|\sin(2\pi t/T)|$, $t \in [-T/2, T/2]$, ya que $t \mapsto \sin(2\pi t/T)$ es impar. Está función es también T-periódica. Por lo tanto la extensión T-periódica par de f_1 está dada por

$$\widetilde{f}_1(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right| \ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Ahora, como $f_2(t) = \cos(4\pi t/T)$ es par y T-periódica (de hecho, $T/2$-periódica), su extensión T-periódica par está dada por

$$\widetilde{f}_2(t) = \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Se deduce que la extensión T-periódica par de $f = f_1 + f_2$ está dada por

$$\widetilde{f}_p(t) = \widetilde{f}_1(t) + \widetilde{f}_2(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right| + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \ ,\ t \in \mathbb{R} \qquad \textbf{[4 puntos]}\ .$$

2. (a) Como $\widetilde{f}_1$ es T-periódica y par, tiene coeficientes de Fourier $b_n = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$ y

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \widetilde{f}_1(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Usando $\cos(\pi(n \pm 1)) = (-1)^{n+1}$ y la identidad trigonométrica

$$2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \sin\left(\frac{2\pi(1+n)t}{T}\right) + \sin\left(\frac{2\pi(1-n)t}{T}\right)\ ,$$

se obtiene si $n \neq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi(n+1)t}{T}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi(n-1)t}{T}\right)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n+1}\cos\left(\frac{2\pi(n+1)t}{T}\right)\right]_0^{T/2} + \left[\frac{1}{n-1}\cos\left(\frac{2\pi(n-1)t}{T}\right)\right]_0^{T/2}\right) \\ &= 2\,\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi(n^2-1)}\ . \end{aligned}$$

Además, para $n = 1$ se tiene $a_1 = (2/T)\int_0^{T/2}\sin(4\pi t/T)\,\mathrm{d}t = 0$. Así, $a_n = 0$ si n es impar y $a_n = (-4/\pi)(n^2-1)^{-1}$ si n es par. En particular $a_0 = 4/\pi$. Luego la SF de $\widetilde{f}_1(t)$ es

$$S_{\widetilde{f}_1}(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{4\pi m t}{T}\right)}{4m^2-1}\ . \qquad \textbf{[6 puntos]}$$

(b) La SF de $\widetilde{f}_2(t)$ es igual a $\widetilde{f}_2(t)$, pues $\widetilde{f}_2(t)$ es un polinomio trigonométrico con el periódo T. Así, se obtiene **sin cálculo**

$$S_{\widetilde{f}_2}(t) = \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\ . \qquad \textbf{[3 puntos]}$$

3. Por definición, la serie de cosenos de $f(t)$ es la serie de Fourier de $\widetilde{f}_p$. Por linealidad de los coeficientes de Fourier y $\widetilde{f}_p = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, los coeficientes de Fourier de $\widetilde{f}_p$ son las sumas de los coeficientes de Fourier determinados en la pregunta anterior. La serie de cosenos de f está dada por

$$\begin{aligned} S_{\widetilde{f}_p}(t) &= S_{\widetilde{f}_1}(t) + S_{\widetilde{f}_2}(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{4\pi m t}{T}\right)}{4m^2-1} + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} + \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{4\pi m t}{T}\right)}{4m^2-1} \qquad \textbf{[4 puntos]}\ . \end{aligned}$$

4. Tenemos (i) $\widetilde{f}_p$ es T-periódica y **continua en** $\mathbb{R}$, como extensión T-periódica *par* de una función continua en $[0, T/2]$; (ii) $\widetilde{f}_p(t)$ es derivable en $]-T/2, T/2[\setminus\{0\}$; (iii) $\widetilde{f}_p'(t)$ es continua por trozos (CPT) en $[-T/2, T/2]$. Luego, por un teorema visto en clase, la SF de $\widetilde{f}_p$ converge normalmente y por tanto uniformemente en $\mathbb{R}$ y su suma es igual a

$$S_{\widetilde{f}_p}(t) = \widetilde{f}_p(t)\quad ,\quad t \in \mathbb{R}\ . \qquad \textbf{[4 puntos]}$$

Aplicando esta igualdad en el punto $t = T/4$ y observando que $\widetilde{f}_p(T/4) = 0$, sigue que

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1} - 1 = 0 \ ,$$

de donde se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \qquad \textbf{[3 puntos]} \ .$$

PROBLEMA 3. [20 puntos]

1. Sea g la función definida en $[0,1]$ por $g(t) = \mathrm{e}^t$, $0 \le t \le 1$. Determine las siguientes series de Fourier:

   (i) serie de cosenos de g;

   (ii) serie de Fourier de la extensión 1-periódica de g.

   Bosquejar en cada caso la gráfica de la extensión periódica de g que corresponde.

2. Muestre que la dos series de Fourier convergen puntualmente y que sus sumas son iguales a $g(t)$ para todo $t \in]0,1[$.
   Determine el valor de cada suma en $t = 0$.

3. ¿ Cual(es) de las dos series converge(n) uniformemente en $\mathbb{R}$? Justifique sus respuestas.

Desarrollo: 1(i). La serie de cosenos de $g(t)$ es la serie de Fourier de la extensión 2-periódica par $\widetilde{g}_p$ de g. Sus coeficientes de Fourier están dados por $b_n = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$ y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2}\int_0^1 g(t)\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n t})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\pi n)t}}{1+\mathrm{i}\pi n} + \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\pi n)t}}{1-\mathrm{i}\pi n}\right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^n\mathrm{e}-1}{1+\mathrm{i}\pi n} + \frac{(-1)^n\mathrm{e}-1}{1-\mathrm{i}\pi n} = \frac{2((-1)^n\mathrm{e}-1)}{1+\pi^2 n^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ , \end{aligned}$$

donde usamos $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi n} = (-1)^n$. Así, la serie de cosenos de g está dada por

$$S_{\widetilde{g}_p}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\pi n t) = \mathrm{e} - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}-1}{1+\pi^2 n^2}\cos(\pi n t) \qquad \textbf{[4 puntos]} \ .$$

1(ii). Los coeficientes de Fourier complejos de la extensión 1-periódica de g están dados por

$$c_n = \frac{1}{1}\int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i}\pi n)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i}\pi n)t}}{1-2\mathrm{i}\pi n}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{1-2\mathrm{i}\pi n} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Esto permite determinar los coeficientes reales a_n y b_n como

$$
\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{2(\mathrm{e}-1)}{1+4\pi^2n^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\
b_n &= \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = \frac{-4\pi(\mathrm{e}-1)n}{1+4\pi^2n^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star \ .
\end{aligned}
$$

Notese que a_n se obtiene al reemplazar n por $2n$ en la serie de cosenos de g, en acuerdo con un resultado visto en clase. La SF de la extensión 1-periódica de g es

$$
\begin{aligned}
S_{\widetilde{g}}(t) &= (\mathrm{e}-1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nt}}{1-2\mathrm{i}\pi n} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(2\pi nt) + b_n\sin(2\pi nt)\Big) \\
&= (\mathrm{e}-1)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nt) - 2\pi n\sin(2\pi nt)}{1+4\pi^2n^2}\right) \qquad \textbf{[4 puntos]}\ .
\end{aligned}
$$

Bosquejo de las gráficas de la extensiones periódicas $\widetilde{g}_p$ y $\widetilde{g}$ de g. **[2 puntos]**

2. La función $\widetilde{g}_p$ satisface las hipóteses del corolario del teorema de Dirichlet visto en clase:

(i) $\widetilde{g}_p$ es 2-periódica;

(ii) se tiene $\widetilde{g}_p(t) = \mathrm{e}^{|t|}$, $t \in [-1,1]$, luego $\widetilde{g}_p$ es CPT en $[-1,1]$;

(iii) $\widetilde{g}_p$ es derivable en $]-1,1[\backslash\{0\}$ y su derivada $\widetilde{g}_p'(t) = \mathrm{sign}(t)\mathrm{e}^{|t|}$ es CPT en $[-1,1]$.

Sigue que la SF de $\widetilde{g}_p$ (esto es, la serie de cosenos de g) converge puntualmente en $\mathbb{R}$. Como $\widetilde{g}_p(t) = g(t)$ si $t \in]0,1[$ y g es continua en este intervalo, se tiene que $S_{\widetilde{g}_p}(t) = g(t) \ \ \forall\, t \in]0,1[$. De manera similar, (i) $\widetilde{g}$ es 1-periódica; (ii) $\widetilde{g}(t) = g(t) = \mathrm{e}^t$, $t \in]0,1[$, luego $\widetilde{g}$ es CPT en $[0,1]$; (iii) $\widetilde{g}$ es derivable en $]0,1[$ y su derivada $\widetilde{g}'(t) = \mathrm{e}^t$ es CPT en $[0,1]$. Por el mismo corolario, sigue que la SF de $\widetilde{g}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$. Como además g es continua en este intervalo, se tiene $S_{\widetilde{g}}(t) = g(t) \ \ \forall\, t \in]0,1[$. **[4 puntos]**

Visto que $\widetilde{g}_p$ es continua en $t=0$, se deduce del teorema de Dirichlet que $S_{\widetilde{g}_p}(0) = g(0) = 1$. Al contrario, $\widetilde{g}$ no es continua en $t=0$ y

$$
S_{\widetilde{g}}(0) = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{g}(0-) + \widetilde{g}(0+)\Big) = \frac{1}{2}\Big(g(1) + g(0)\Big) = \frac{\mathrm{e}+1}{2} \qquad \textbf{[2 puntos]}\ .
$$

3. La serie de cosenos de g converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En efecto, $\widetilde{g}_p$ es continua en $\mathbb{R}$ y satisface las condiciones (i) y (iii). Esas condiciones aseguran la convergencia normal y por consiguiente uniforme de la serie en $\mathbb{R}$.

La SF de la extensión 1-periódica de g **no** converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En efecto, $\widetilde{g}$ no es continua en $t \in \mathbb{Z}$. Más precisamente, suponga que la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Luego su suma $S_{\widetilde{g}}(t)$ es continua en $\mathbb{R}$ (como suma de una serie de funciones continuas uniformemente convergente). En particular es continua en $t=0$, por lo que $S_{\widetilde{g}}(0+) = S_{\widetilde{g}}(0-)$. Pero $S_{\widetilde{g}}(0+) = \widetilde{g}(0+)$ ya que $S_{\widetilde{g}}(t) = \widetilde{g}(t) \ \ \forall\, t \in]0,1[$ (ver pregunta 2.). De manera similar, $S_{\widetilde{g}}(0-) = \widetilde{g}(0-)$ ya que $S_{\widetilde{g}}(t) = S_{\widetilde{g}}(t+1) = \widetilde{g}(t+1) = \widetilde{g}(t) \ \ \forall\, t \in]-1,0[$. Eso implica que $\widetilde{g}(0+) = \widetilde{g}(0-)$, lo que no es cierto. Por lo tanto la SF de $\widetilde{g}$ no convergence uniformemente. **[4 puntos]**