UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Listado Nº1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Álgebra 2 - 525150

1. Considere las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con entradas $a_{ij} = 2^i - (-1)^j$, $\forall\, i, j \in \{1, 2\}$, y $B = \begin{pmatrix} x-y & 1 \\ 3x-y & 3 \end{pmatrix}$. Determine, si es posible, los valores de x e y tales que $A = B$.

2. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donde $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, & i < j \\ i^2 + j^2 & i = j \\ 2j - i, & i > j \end{cases}$ y sea $C = \begin{pmatrix} -2 & -18 & -14 \\ 12 & -14 & -4 \\ -8 & 8 & -30 \end{pmatrix}$. Determinar una matriz B de modo que se cumpla que $C = 2(A - 3B)$.

3. Determinar una matriz B, cuya primera fila es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calcule, si es posible, AB, BA, CC, CE, DE.

   (b) Sin calcular, inidique que otras multiplicaciones son posibles usando las matrices A, B, C, D y E enunciadas anteriormente.

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar las siguientes matrices:

   (a) ABC (b) AB^2 (c) $CA^2 - I$ (d) BC (e) C^tB^t (f) $(BC)^t$

6. Sean $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, con $n, p, q \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que
$$(B + C)D = BD + CD.$$

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Determinar una matriz X tal que se cumpla la siguiente igualdad
$$\tfrac{3}{2}(X + A)^t = 2(X + (2B - C)) + A.$$

8. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calcular, reduciendo a su mínima expresión, $C = (1 + i)A + (1 - i)B$. Luego, calcule $C^* := (\bar{C})^t$.

9. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Determine en forma explicita y lo mas simplificado posible, la matriz X que satisface la igualdad
$$DXD + 3A^t = AB^{-1} + iB^t.$$

10. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostrar que $AB = AC$. ¿Puede ser A no singular? Justifique su respuesta.

11. Determinar todas las matrices reales de orden 2 que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Sea $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fijo. Evalue A_α^2, A_α^3, y a partir de lo obtenido proponga una expresión que corresponda a la matriz potencia $A_\alpha^m, m \in \mathbb{Z}^+$.

13. Considere la matriz $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo. Proponga una expresión para cualquier matriz potencia $A_\alpha^m, m \in \mathbb{Z}^+$. Nota: cuando $\alpha = 0, A_0 = I$, y en consecuencia $A_0^m = I$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

14. Sin efectuar operaciones elementales por filas, determine la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. El objetivo de este ejercicio es establecer propiedades de la transpuesta conjugada de una matriz, concluyendo un resultado importante.

    (a) Demuestre que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : (A^*)^* = A$.
    (b) Demuestre que $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$.
    (c) Demuestre que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : (A + B)^* = A^* + B^*$.
    (d) Demuestre que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A + A^*$ es hermitiana.
    (e) Demuestre que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A - A^*$ es anti-hermitiana.

    Dado lo anterior, concluir que toda matriz cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$, puede descomponerse como la adición de una matriz hermitiana y otra matriz anti-hermitiana.

16. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tales que A y B son antisimétricas y además A es no singular. Demuestre que la matriz $C^t\,(A^{-1} - B)\,C$ es antisimétrica.

17. Verifique que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ satisface: $A^2 - 2A - 5I = \Theta$. Determine A^{-1} de dos maneras posibles, y sin realizar operaciones elementales por filas.

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $5A^4 - 2A^3 + 7A + 11I = \Theta$. Demuestre que A es no singular, y deduzca una expresión para A^{-1}, en términos de potencias no negativas de A.

19. Sea A una matriz cuadrada no nula tal que $A^3 = \Theta$. ¿Es $2I + 5A$ no singular? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, deduzca una expresión explícita para $(2I + 5A)^{-1}$, en término de potencias no negativas de A.

20. Determine, si es posible, la matriz inversa de las siguientes matrices:

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

    (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

21. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 0 & 3+2i \\ 2+i & 2-2i & 0 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 & 14 \\ 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

22. Dado $w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{C}$. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$.

23. Determinar el conjunto solución $S \subseteq \mathbb{C}$ de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ -1 & -2-x & -1 \\ 1 & -1 & -2-x \end{vmatrix} = 0.$$

24. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\{\Theta\}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar: $AB = \Theta \Rightarrow (\det(A) = 0 \land \det(B) = 0)$.

25. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, los valores de α y/o β de modo que A sea invertible.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 3 & 4 & 5 & \alpha \\ \alpha & 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

26. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 21 \end{pmatrix}$. Determine una matriz triangular inferior B tal que $BB^t = A$.

27. Sean A y B matrices no singulares de orden n. Demostrar que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

28. **Definiciones:** Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, con $m \in \mathbb{Z}^+$. Se dice que

- A es Matriz Periódica si $\exists \ell \in \mathbb{Z}^+$, tal que $A^{\ell+1} = A$. En tal caso, al primer $\ell \in \mathbb{Z}^+$con esta propiedad, se le llama Periodo de A.
- Cuando A es periódica, de periodo $\ell = 1$ (es decir $A^2 = A$), se dice que A es Idempotente.
- A es Matriz involutiva cuando $A^2 = I$ ($\Leftrightarrow A^{-1} = A$).
- A es Matriz Nilpotente si $\exists \ell \in \mathbb{Z}^+$, tal que $A^\ell = \Theta$. En tal caso, al primer $\ell \in \mathbb{Z}^+$con esta propiedad, se le llama Índice de nilpotencia de A.

Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Identifique, si es el caso, si alguna de estas matrices resulta ser periódica (indique periodo), idempotente, involutiva, nilpotente (indique índice de nilpotencia).

29. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, con $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que $(AB)^* = B^*A^*$.

30. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n > 1$. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique apropiadamente su respuesta en cada caso.

    (a) Si A es nilpotente, entonces A es no singular.

    (b) Si A y B son simétricas, entonces AB es también simétrica.

    (c) Si A es antisimétrica y $I - A$ es no singular, entonces $r(I + A) = n$.

    (d) Si A y B son invertibles, entonces $\mathrm{Adj}(AB) = \mathrm{Adj}(A)\mathrm{Adj}(B)$.

    (e) Si $n = 2$ y $A^2 = I$, entonces $r(A + I) + r(I - A) = 1$.

31. Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método de Eliminación Gaussiana y el Método de Cramer, cuando sea posible.

$$\text{(a)} \left\{\begin{array}{rl} 2x + y - z & = 4 \\ 4x + 2y + z & = 7 \\ 2x + y - 4z & = 5 \end{array}\right. \qquad \text{(c)} \left\{\begin{array}{rl} -w + 2x - y + z & = 0 \\ 2w + 2x - y + z & = 1 \\ 4w - 2x + y - z & = 2 \end{array}\right. \qquad \text{(e)} \left\{\begin{array}{rl} x + 2y - 3t & = 0 \\ 3x + 6y + 5z - 5t & = 0 \\ 2x + 4y - 6t & = 0 \\ x + 2y + 5z + t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(b)} \left\{\begin{array}{rl} 3x + 3y - z & = -4 \\ x + 5z & = 9 \\ x - 6y + 4z & = 5 \end{array}\right. \qquad \text{(d)} \left\{\begin{array}{rl} x + y + z & = 1 \\ 2x - z & = 0 \\ 3x - 2y + z & = -1 \\ 4x + 5z & = 2 \end{array}\right. \qquad \text{(f)} \left\{\begin{array}{rl} -2x + 4y & = 10 \\ -x + 3y - t & = 4 \\ x - z + 2t & = 9 \\ 4y - 3x - 3z + t & = 15 \end{array}\right.$$

32. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determinar para que valores de los parámetros reales involucrados, el sistema resulta ser compatible y/o incompatible. En los casos compatibles, determine el conjunto solución.

$$\text{(a)} \left\{\begin{array}{rl} x + y - z & = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z & = 3 \\ x + \alpha y + 3z & = 2 \end{array}\right. \qquad \text{(b)} \left\{\begin{array}{rl} \alpha x + y + z & = 1 \\ x + \alpha y + z & = \alpha \\ x + y + \alpha z & = \alpha^2 \end{array}\right. \qquad \text{(c)} \left\{\begin{array}{rl} x + y + \alpha z & = 0 \\ x + y + \beta z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + z & = 0 \end{array}\right.$$

33. Para cubrir sus requerimientos vitamínicos semanales, Ricardo requiere de 15 unidades de vitamina A, 25 unidades de vitamina B y 31 unidades de vitamina C. En el mercado existen tres marcas de cápsulas vitamínicas disponibles: Una cápsula de la marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C; una de la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, mientras que una de la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 8 de C . Primero, plantee el sistema de ecuaciones lineales que permite determinar cuántas cápsulas de cada tipo debe consumir semanalmente Ricardo, para cubrir sus necesidades vitamínicas. Luego, indique la cantidad de cápsulas de cada tipo que debe consumir Ricardo semanalmente.

34. Una compañía produce tres tipos de maletines: económico, junior y ejecutivo. Cada uno requiere de cuero, plástico y tela. Un maletín económico requiere de tres unidades de cuero, cuatro de plástico y dos de tela; uno de tipo junior requiere cuatro unidades de cuero, dos de plástico y seis de tela; mientras que uno de tipo ejecutivo requiere cinco unidades de cuero, una de plástico y nueve de tela. Si se disponen de 190 unidades de cuero, 90 de plástico y 290 de tela para la fabricación de los maletines, emplee herramientas matriciales para determinar el número de maletines que serán producidos, indicando todas las posibilidades.

35. Alberto, Juan y Ricardo acuden a una librería y compran tres tipos de útiles de escritorio: A, B y C. Alberto compró 5 del tipo A, 5 del tipo B y 6 del C; pagando por todo 100 [u.m.]; Juan compró 3 del A, 2 del B y 4 del C; pagando un total de 60 [u.m.] Finalmente, Ricardo compró 2 del tipo A, 3 del tipo B y 2 del tipo C, pagando por todo un total de 40 [u.m.] Aplicando herramientas matriciales, determine el precio de cada artículo de escritorio, si se sabe que el de tipo C es el más costoso de los tres.