Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 1 — lunes 8 de junio de 2020

Entrega: 15.15 horas.

Fundamentar la respuesta a cualquier sub-problema puesto en forma de pregunta.

Problema 1. (10 puntos) Sea la altitud de una montaña descrita por

$$h(x,y) = 1 - 0{,}01(x-1)^2 - 0{,}04(y+2)^2$$

(por ejemplo, pensado en distancias expresadas en kilómetros).

a) Supongamos que una montañista se encuentra en el punto $(x^0, y^0) = (4,1)$. ¿En qué dirección debe caminar si desea acceder a la cima por camino directo?

b) ¿En qué dirección debe caminar si desea descender con la mayor rapidez posible? ¿Y en qué dirección si desea mantener su altitud?

Problema 2. (10 puntos)

a) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)\bigl(\cos(2xy) + \sin(2xy)\bigr).$$

Demostrar que f es diferenciable en $(x^0, y^0) = (0,0)$ y determinar el plano tangente en este punto.

b) Demostrar que f satisface la ecuación de Laplace, $f_{xx} + f_{yy} = 0$, sobre $\mathbb{R}^2$.

c) Supongamos que una función $g : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones, es decir $\Delta g := g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$, donde U es un conjunto abierto. ¿Qué ecuación satisface cada una de las derivadas g_x, g_y y g_z si suponemos $g \in C^3(U)$? Aviso: evaluar $\Delta(g_x)$, etc.

Problema 3. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$?

Problema 4. (10 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) Demostrar que $-1 \le f(x,y) \le 1/3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $\alpha \in [-1, 1/3]$.
b) ¿Se puede elegir α en tal forma que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$?
c) Calcular la derivada direccional de f en la dirección $\vec{d} := (1/\sqrt{2})(1,-1)$ en el punto $(x^0, y^0) = (1,1)$.

Problema 5. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) ¿La función f es acotada sobre $\mathbb{R}^2$?
b) Demostrar que existe una constante M_0 tal que para $\varepsilon > 0$ dado,

$$\text{mín}\big\{|x|, |y|\big\} < \varepsilon \Rightarrow \big|f(x,y)\big| < M_0\varepsilon^2.$$

c) Demostrar que la función f es continua en $(0,0)$. (Se puede utilizar el resultado de (b).)
d) Calcular las derivadas parciales de f y demostrar que existe una constante M_1 tal que para $\varepsilon > 0$ dado,

$$\text{máx}\big\{|x|, |y|\big\} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < M_1\varepsilon.$$

e) Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$. (Se puede utilizar el resultado de (d).)
f) ¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz en $(x^0, y^0) = (0,0)$?