Ayudantía 5.

Problema 1. Sea E un conjunto $\neq \emptyset$ y R una relación refleja y transitiva en E. Se define la relación $\sim$ por:

$$\forall a,b \in E \quad , \quad a \sim b \Leftrightarrow aRb \wedge bRa.$$

a) Probar que $\sim$ es relación de equivalencia

Dem: • Es fácil ver que $\sim$ es refleja, pues aRa $\forall a \in E$ (como R es refleja). Entonces, $a \sim a$.

• Además R es simétrica.

En efecto, sean $a,b \in E$ tales que $a \sim b \wedge b \sim a$. Equivalentemente,

$$\Rightarrow (aRb \wedge bRa) \wedge (bRa \wedge aRb).$$
$$\Rightarrow bRa \wedge aRb.$$
$$\Leftrightarrow b \sim a.$$

• Finalmente, vemos que $\sim$ es transitiva: Sean $a,b,c \in E$ tales que:

$$a \sim b \wedge b \sim c \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb.$$

Como R es transitiva: • $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$
• $cRb \wedge bRa \Rightarrow cRa.$

Por lo tanto $a \sim c$ y $\sim$ es transitiva.

~~a~~) Concluimos así que $\sim$ es relación de equivalencia.

b) Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$, entonces:

$$aRb \iff a'Rb'.$$

Dem: Sean $a' \in [a]_\sim$, y $b' \in [b]$.

$\Rightarrow$) Supongamos aRb. Como $a' \in [a]_\sim$, $a' \sim a$, $b' \in [b]_\sim$, $b' \sim b$, Entonces $a'Rb$ y bRb' y esto implica que $a'Rb'$, por transitividad de R.

$\Leftarrow$) Realizamos lo mismo, cambiando $a' \leftrightarrow a$ y $b \leftrightarrow b'$.

c) Considerar R^* definida ~~en~~ $E/\sim$ por.

$$\forall [a]_\sim, [b]_\sim \in E/\sim.$$

$$[a]_\sim R^* [b]_\sim \iff aRb.$$

Pruebe que R^* está bien definida y es una relación de orden en $E/\sim$.

Dem: $\forall a' \in [a]_\sim \ , \ b' \in [b]_\sim$
(1)
$$[a]_\sim R^* [b]_\sim \iff [a^*]_\sim R^* [b']_\sim .$$

~~Dem~~ Por lo demostrado en (b).

- Probemos que R^* es antisimétrica.

Sean $[a]_\sim$, $[b]_\sim \in E/\sim$. tales que

$$[a]_\sim R^* [b]_\sim \wedge [b]_\sim R^* [a]_\sim$$

$\iff a R b \wedge b R a \iff a \sim b \implies [a]_\sim = [b]_\sim$

$\therefore$ R^* es antisimétrica.

Problema 2: Sea V un e.v. Sobre $\mathbb{K}$ y $\{W_i\}_{i\in\Omega}$ Tal que W_i es s.e.v. de V, Para todo $i\in\Omega$. Demostrar que:

$$\bigcap_{i\in\Omega} W_i \text{ es s.e.v. de } V.$$

Demostración: Sea $W = \bigcap_{i\in\Omega} W_i$

1) $W \neq \emptyset$. Como W_i es s.e.v de V; $\forall i \in \Omega$, $\theta \in W_i$ $\Leftrightarrow$ $\theta \in W$. Además es claro $W \subseteq V$.

2) Sean $w, y \in W$
$\Leftrightarrow$ $\forall i \in \Omega$, $w, y \in W_i$

Pero como cada W_i es s.e.v. es cerrado para la suma.
$\therefore$ $w + y \in W_i$ $\forall i \in \Omega$
$\therefore$ $w + y \in \bigcap_{i\in\Omega} W_i = W$.

3) Sea $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Como $w \in W$, $\forall i \in \Omega$, $w \in W_i$ y como W_i es s.e.v. se Tiene $\lambda w \in W_i$, $\forall i \in \Omega$ $\Leftrightarrow$ $\lambda w \in W$.

Por (1), (2), (3), W es s.e.v. de $\mathbb{K}$.

Problema 3. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Definimos.

$$V_p = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = f(-x) \}$$
$$V_i = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} ; f(-x) = -f(x) \}$$

a) Dem que V_i y V_p son s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $V_i \, \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V$

Dem: Es claro que $V_p \subseteq V$. Además, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par. Luego, $\cos \in V_p$ y por lo tanto, $V_p \neq \emptyset$. Sean $f, g \in V_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x).$$

Pero como $f, g \in V_p$; $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$.

Por lo que

$$(f + \lambda g)(x) = f(-x) + \lambda g(-x) \Leftrightarrow (f + \lambda g)(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, $f + \lambda g \in V_p$.

Finalmente, V_p es s.e.v de V.

* De forma análoga se trabaja la Dem para V_i.

6) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V = V_p + V_i$; ¿Es esto suma directa?

Dem: Sea $f \in V$, Definimos $f^i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in V_i$

$$f^p(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} \in V_p$$

y sea $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

Además, $V_p \cap V_i = \{\Theta\}$.

Supongamos, $v \in V_p \cap V_i$

$\Rightarrow v(x) = v(-x) = -v(x)$

$\Rightarrow 2v(x) = 0$

$\Rightarrow v(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow v = \Theta$.

Conclusión: $V = V_p \oplus V_i$

Problema 4: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Demuestre que si U es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$,

$$A(U) = \{Ax : x \in U\} \text{ es s.e.v. de } \mathbb{R}^n.$$

Dem: Como U es s.e.v. ; $\theta_{\mathbb{R}^n} \in U \Rightarrow A\,\theta_{\mathbb{R}^n} = \theta_{\mathbb{R}^n} \in A(U)$.

Luego $A(U) \supseteq \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$. Además, $A(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, dados $Ax, Ay \in A(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$Ax + \lambda Ay = A(x + \lambda y) \in A(U).$$

b) Dem: si U, W son s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $U \oplus W = \mathbb{R}^n$ y A es invertible, $\mathbb{R}^n = A(U) \oplus A(W)$.

Sea $z = Iz = A(A^{-1}z) \longrightarrow y \in \mathbb{R}^n$.

Como $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, e $y \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ u \in U$, $w \in W$ tal que $y = u + w$

Por lo tanto. $z = A(u + w) = \overbrace{Au}^{\in A(U)} + \overbrace{Aw}^{\in A(W)}$

Así, vimos que $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ Au, Aw : Au \in A(U), Aw \in A(W)$.

Tales que $z = Au + Aw$. Es decir $\mathbb{R}^n = A(U) \oplus A(W)$