4b) | HIPOTESIS: T es Sobreyectiva $\Leftrightarrow Im(T)=W$

$\Rightarrow$ | Sea $A=\{v_j\}_{j=1}^{m} \subseteq V$ conjunto generador de V (fijo pero arbitrario)

$\Rightarrow T(A)=\{T(v_j)\}_{j=1}^{m}$ conjunto generador de $Im(T)=W$

$\Rightarrow \{T(v_j)\}_{j=1}^{m}$ conjunto generador de W.

Como $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ es fijo pero arbitrario, se concluye la validez de la propiedad.
i.e. T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W

$\Leftarrow$ | HIPÓTESIS: T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W

Como $\dim(V)=s\in\mathbb{N}$, $\exists\, A=\{z_j\}_{j=1}^{s}$ una base de V

Por hipótesis, $T(A)=\{T(z_j)\}_{j=1}^{s}$ es conjunto generador de W

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \{T(z_j)\}_{j=1}^{s} \rangle}_{Im(T)} = W$$

$$\Rightarrow Im(T)=W$$

$\Rightarrow$ T es Sobreyectiva

4c) $\Rightarrow$ | HIPOTESIS: $T\in\mathcal{L}(V,W)$ isomorfismo

$\Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = m$

Sea $A = \{u_j\}_{j=1}^{m}$ una base de V

Como T es inyectiva (¿por qué?) y A es l.i (¿?)

$\overset{(a)}{\Rightarrow} T(A) = \{T(u_j)\}_{j=1}^{m}$ es l.i. en W

Como $\left|\{T(u_j)\}_{j=1}^{m}\right| = \underset{=\dim(W)}{m} \Rightarrow \langle T(A)\rangle = W$

$\Rightarrow$ T(A) es una base de W.

Como $A = \{u_j\}_{j=1}^{m}$ es una base de V, fija pero arbitraria,

se concluye la propiedad: T transforma bases de V en bases de W.

$\boxed{\Leftarrow}$ HIPOTESIS: T transforma bases de V en bases de W.

Sea $A = \{z_j\}_{j=1}^{m}$ una base de V

Por hipótesis, $T(A) = \{T(z_j)\}_{j=1}^{m}$ es una base de W

$\Rightarrow \dim(V) = m = \dim(W)$

Además, $\langle T(A) \rangle = \mathrm{Im}(T)$
$$\shortparallel$$
$$W$$

de donde $r(T) = m$

Por Teorema nulidad-rango (Teorema Fundamental transformaciones lineales en dimensión finita): $n(T) + r(T) = \dim(V) = m$

$\Rightarrow n(T) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{\theta\}$

$\Rightarrow T$ es inyectiva

$\Rightarrow T$ es biyectiva

$\Rightarrow T$ es isomorfismo. $\square$

---

5) Sea $z \in V = \langle \{v_i\}_{i\in I} \rangle$

$\Rightarrow \exists\, I_0 \subseteq I$, I_0 conjunto finito:

$\exists \{\alpha_i\}_{i \in I_0} \subseteq \mathbb{K}$: $z = \sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i$

Así,

$$T(z) = \sum_{i\in I_0} \alpha_i T(v_i) = \sum_{i\in I_0} \alpha_i S(v_i) = S\Big(\sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i\Big) = S(z)$$

Como $z \in V$ fijo pero arbitrario, se tiene $\forall z \in V: T(z) = S(z) \Rightarrow T = S$ $\square$