EVALUACIÓN 2 DE 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II (2024-1)

LEONARDO E. FIGUEROA

Resumen. Esta evaluación consiste en 2 problemas con la misma ponderación. **Plazo de entrega:** Jueves 01 de agosto de 2024.

Problema A (Mejor constante de una desigualdad de Poincaré)**.** Sea Ω el intervalo $(0,\pi)$. Para este caso unidimensional, de la demostración de [Tar07, Lem. 10.2(iii)], se desprende la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$(\forall\, u \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \le \frac{\pi^2}{2} \int_\Omega \left|u'(x)\right|^2 \, dx.$$

Sin embargo $\pi^2/2 \approx 4{,}9348022$ es mayor que la mejor constante posible. El objetivo de este problema es calcular **informalmente** a aquella mejor constante; esto es, a C^{-1}, donde

$$C := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |u'(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_\Omega \left|u'(x)\right|^2 \, dx.$$

Se puede probar (pero no lo haga aquí) que el ínfimo de arriba en realidad es el correspondiente mínimo; definiendo al funcional objetivo $F\colon H_0^1(\Omega) \to R$ y al funcional restricción $G\colon H_0^1(\Omega) \to R$ mediante

$$F(u) = \int_\Omega \left|u'(x)\right|^2 \, dx \quad \text{y} \quad G(u) = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx - 1,$$

la constante C es solución del problema de minimización

$$C = \min \left\{ F(u) \,\middle|\, u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } G(u) = 0 \right\}. \tag{§}$$

A.I. (4 puntos) Sean $DF\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to R$ y $DG\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to R$ las derivadas de Gateaux de F y G respectivamente; i.e.,

$$DF(u,v) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(u+\epsilon\, v) - F(u)}{\epsilon} \quad \text{y} \quad DG(u,v) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{G(u+\epsilon\, v) - G(u)}{\epsilon}.$$

Obtenga fórmulas explícitas para DF y DG.

A.II. (4 puntos) Las condiciones de optimalidad local de primer orden asociadas al problema de minimización con restricciones (§) son: Hallar a un minimizador $u \in H_0^1(\Omega)$ y un multiplicador de Lagrange $\lambda \in R$ tal que

$$\begin{cases} (\forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad DF(u,v) - \lambda\, DG(u,v) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\quad G(u) = 0. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Pruebe que si se tiene un par solución (u,λ) de ($\star$) en el que la función u es un minimizador global de (§), entonces $\lambda = C$.

A.III. (6 puntos) Reconozca a la primera ecuación de ($\star$) como la formulación variacional de un problema de autovalores diferencial y calcule su autovalor λ más pequeño, que es el C buscado. **Indicación:** Acepte la interpretación informal $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = v(\pi) = 0\}$.

Problema B. Sea R_+ la semirrecta $\{x \in R \mid x > 0\}$. La semirrecta R_+ es un grupo simétrico respecto a la operación producto. Dado $a \in R_+$, definimos a la R_+-*traslación por* a al mapa $\upsilon_a\colon R_+ \to R_+$ definido por $\upsilon_a(x) = x/a$. Sea $w\colon R_+ \to R$ la función definida por $w(t) := 1/t$.

Dado $p \in [1, \infty)$, definimos al espacio de Lebesgue ponderado $L^p_w(R_+) := w^{-1/p} L^p(R_+)$ junto a su norma natural $\|u\|_{L^p_w(R_+)} := \left(\int_{R_+} |u(t)|^p \, w(t)\, dt\right)^{1/p}$. Es directo comprobar que $L^p_w(R_+)$ hereda de $L^p(R_+)$ la calidad de espacio de Banach. Definimos también $L^\infty_w(R_+) := L^\infty(R_+)$, con la misma norma.

Dadas funciones medibles $f\colon R_+ \to R$ y $g\colon R_+ \to R$ definimos a la R_+-*convolución entre* f *y* g como la función $f \odot g$ definida por

$$(f \odot g)(x) := \int_{R_+} f(x/y) g(y) w(y)\, dy. \tag{B.1}$$

Se puede probar (pero no lo haga aquí) que la R_+-convolución $\odot$ es una operación simétrica y que satisface una desigualdad de Young: Si los exponentes $1 \le p, q, r \le \infty$ están conectados por $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, entonces para todo $f \in L^p_w(R_+)$ y $g \in L^q_w(R_+)$ se tiene que

$$\|f \odot g\|_{L^r_w(R_+)} \le \|f\|_{L^p_w(R_+)} \|g\|_{L^q_w(R_+)}. \tag{B.2}$$

B.I. Sea $p > 1$ y sea $h_p\colon R_+ \to R$ la función definida por

$$h_p(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \le 1, \\ t^{1/p-1} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Pruebe que $h_p \in L^1_w(R_+)$ calculando su norma explícitamente.

B.II. Sea $p > 1$. Dada cualquier f en el espacio de Lebesgue sin peso $L^p(R_+)$, definimos a la función $F\colon R_+ \to R$ por

$$F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\, dy$$

Pruebe que F también pertenece al mismo espacio de Lebesgue sin peso $L^p(R_+)$ y satisface la llamada *Desigualdad de Hardy*:

$$\|F\|_{L^p(R_+)} \le \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(R_+)}.$$

Indicación obligatoria: Pruebe y explote que $h_p \odot (w^{-1/p} f) = w^{-1/p} F$.

Referencias

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055).