Formas Bilineales. Formas Cuadráticas

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

August 17, 2020

Preliminares: Matrices simétricas definidas positiva, semi-definidas positivas, signatura, ...

Definición: Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, se dice

1. definida positiva, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}\ :\ x^t A x > 0$.
2. semidefinida positiva, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ :\ x^t A x \geq 0$.
3. definida negativa, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}\ :\ x^t A x < 0$.
4. semidefinida negativa, si $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ :\ x^t A x \leq 0$.

Observaciones

1. A simétrica definida positiva $\Rightarrow$ A es simétrica semidefinida positiva.
2. A simétrica definida negativa $\Rightarrow$ A es simétrica semidefinida negativa.
3. A simétrica definida negativa $\Leftrightarrow$ $-A$ es simétrica definida positiva.
4. A simétrica semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $-A$ es simétrica semidefinida positiva.
5. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica, pero no es ninguno de los cuatro tipos anteriores, pues $x^t A x = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 + x_2^2$, el cual no tiene signo definido para cualquier $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.
6. Las implicaciones recíprocas de 1) y de 2) no son ciertas. Por ejemplo, la matriz simétrica $A = \Theta$ es semidefinida positiva y semidefinida negativa, pero no es definida positiva ni definida negativa.
7. Los conceptos anteriores pueden ser extendidos a matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitianas.

Lema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es definida positiva.
2. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.
3. Las submatrices principales de A, $A^{(k)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, con $k \in \{1, \dots, n\}$, tienen determinante positivo, es decir, $\forall\, k \in \{1, \dots, n\} \,:\, \det(A^{(k)}) > 0$.
4. El método de Gauss aplicado a A puede realizarse sin intercambiar filas y con todos los pivotes positivos.

Observación: El hecho que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, implica que toda matriz simétrica definida positiva es no singular.

Para la demostración del lema, primero se establece que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Después, habría que probar (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).
Esto suele hacerse en la asignatura Análisis Numérico II.

Demostración parcial del Lema: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

1) $\Rightarrow$ 2): Como A es simétrica, se sabe que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}$ un autopar de A, i.e. $A\,v = \lambda\,v$. Entonces (aplicando el hecho que A es simétrica definida positiva, por hipótesis)

$$0 < v^t\,A\,v = \lambda\,v^t\,v = \lambda\,\underbrace{||v||_2^2}_{>0} \quad \Rightarrow \lambda > 0\,,$$

y se concluye así que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

2) $\Rightarrow$ 1): Como A es simétrica, entonces $\exists\,P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $P^t\,A\,P = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. En vista que, por hipótesis, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, se deduce que D es simétrica, y además

$$\forall\,y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\} \,:\, y^t\,D\,y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,y_i^2 > 0\,,$$

pues al menos $\exists\,i_0 \in \{1, .., n\} \,:\, y_{i_0} \neq 0$. De esta forma, se establece que la matriz D es simétrica definida positiva. Luego, para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}$, se define $y := P^t\,x \neq \theta$ (pues P es no singular). Esto conduce, teniendo en cuenta también que $x = P\,y$, a

$$x^t\,A\,x = y^t\,P^t\,A\,P\,y = y^t\,D\,y > 0\,.$$

Así, se concluye que A es simétrica definida positiva.

Observaciones importantes:

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica definida positiva si y sólo si $\exists\, L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, triangular inferior, tal que $A = L\,L^t$ (se conoce como FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY).
2. Recordamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, es definida negativa si y sólo si $-A$ es simétrica definida positiva. Luego,

$$\begin{aligned} A \text{ es simétrica definida negativa } &\Leftrightarrow \forall\, k \in \{1, \ldots, n\} \,:\, \det(-A^{(k)}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, k \in \{1, \ldots, n\} \,:\, (-1)^k \det(A^{(k)}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^{(1)}) < 0 \quad \wedge \quad \det(A^{(2)}) > 0 \\ &\qquad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad (-1)^n \det(A) > 0\,. \end{aligned}$$

   Esto último se conoce como el CRITERIO DE SYLVESTER para matrices simétricas definidas negativas.
3. Aquellas matrices simétricas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ para las cuales existen $x\,, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\theta\}$ con $x^t\,A\,x > 0 \wedge y^t\,A\,y < 0$, se llaman INDEFINIDAS.

Definición: Signatura de una matriz simétrica
Se define la función signatura de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica por $\mathrm{sig}(A) := (p, q) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, donde p y q denotan la cantidad de valores propios positivos y negativos de A, respectivamente.

Definición: Relación de Congruencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A y B son congruentes (lo que se denota por $A \cong B$) si $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, tal que $A = P^t\, B\, P$.

Proposición: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cong)$ es una relación de equivalencia.

Lema: La signatura de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica es invariante por congruencia de matrices.

Propiedades: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Se tiene

1. si $\mathrm{sig}(A) := (p, q)$, entonces $\mathrm{rang}(A) = p + q$.
2. A es definida positiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sig}(A) = (n, 0)$.
3. A es definida negativa $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sig}(A) = (0, n)$.
4. A es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $\exists\, r \leq n : \mathrm{sig}(A) = (r, 0)$.
5. A es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $\exists\, r \leq n : \mathrm{sig}(A) = (0, r)$

Propiedades: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Se tiene

1. A es definida positiva $\Leftrightarrow$ A es congruente a I_n.
2. A es definida negativa $\Leftrightarrow$ A es congruente a $-I_n$.
3. A es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ A es congruente a I_n ó a $\begin{pmatrix} I_r & \\ & \Theta \end{pmatrix}$, con $r < n$.
4. A es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ A es congruente a I_n ó a $\begin{pmatrix} -I_r & \\ & \Theta \end{pmatrix}$, con $r < n$.

Formas bilineales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una función. Se dice que f es una forma bilineal si f es lineal con respecto a cada componente, i.e.

$$a) \ \forall\, u_0 \in V \ : \ f_{u_0} \ := \ f(u_0, \cdot) \in V' \ := \ \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) \,,$$
$$b) \ \forall\, v_0 \in V \ : \ f_{v_0} \ := \ f(\cdot, v_0) \in V' \ := \ \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) \,.$$

Esto a su vez, equivale a decir que $\forall\, u_0 \in V$, $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$:

$$a) \ f(u_0, \alpha\, v \,+\, w) \,=\, \alpha\, f(u_0, v) \,+\, f(u_0, w) \,,$$
$$b) \ f(\alpha\, v \,+\, w, u_0) \,=\, \alpha\, f(v, u_0) \,+\, f(w, u_0) \,.$$

Ejemplos:

1. $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $\forall\, (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(x, y) := x + y$ no es una forma bilineal. Sin embargo f, vista como función de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}$, es lineal (¡VERIFICARLO!).
2. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : g(x, y) := x\, y$ es una forma bilineal. Sin embargo, como: $g((1,0) + (0,1)) = g(1,1) = 1 \neq 0 = g(1,0) + g(0,1)$, se establece que g, vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, no es lineal.
   CONCLUSIÓN: No toda forma bilineal es lineal.
3. $\varphi : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, tal que
   $$\forall\, f, g \in \mathcal{C}([0,1]) : \varphi(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx,$$ es una forma bilineal.
4. $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ definido, para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, por $f(x, y) := \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x^t\, y$, es una forma bilineal.

Observaciones:

1. Sean V, W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. El conjunto de las formas bilineales definidas de $V \times W$ en $\mathbb{K}$, se define por $\mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K}) := \{f : V \times W \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ es una forma bilineal}\}$. Se puede probar que $\mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial.
2. Estamos interesados en el caso en que $W = V$, se denota $\mathcal{BIL}(V, \mathbb{K}) := \mathcal{BIL}(V \times V, \mathbb{K})$.
3. El concepto de forma bilineal se puede extender de manera natural a formas mulitilineales, definidas en más de dos espacios vectoriales como sigue: Sean $V_1, ..., V_m$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y una función $f : V_1 \times ... \times V_m \to \mathbb{K}$. Se dice que f es forma multilineal (o m-lineal) si f es lineal en cada componente.

Matriz representante de una forma bilineal

Motivación:

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$. Consideremos una base $B := \{v_1, ..., v_n\}$ de V. Luego, dada $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal, se tiene que para $u, w \in V$, éstos pueden expresarse de manera única como $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, v_j$, con $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}$. Así resulta

$$
\begin{aligned}
f(u, w) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f\left(v_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \, \beta_j \, f(v_i, v_j) = \Big(\alpha_1, ..., \alpha_n\Big) \, M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde

$$
M := \Big(f(v_i, v_j)\Big)_{i,j=1}^{n} := \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & .... & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ f(v_n, v_1) & ... & ... & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})
$$

se conoce como la matriz representante de f con respecto a la base B. Suele ser denotada por $A_{f,B}$.

Definición. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$. La matriz representante de una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ con respecto a una base $B := \{v_1, ..., v_n\}$ de V, se define por $A_{f,B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que

$$\forall\, i, j \in \{1, ..., n\} \;:\; \left(A_{f,B}\right)_{ij} := f(v_i, v_j)\,.$$

Propiedad: $\forall\, u, w \in V \;:\; f(u, w) = [u]_B^t \, A_{f,B} \, [w]_B$.

Observación: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la propiedad anterior se puede expresar como:
$\forall\, u, w \in V \;:\; f(u, w) = \langle [u]_B \,,\, A_{f,B} \, [w]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que
$\forall\, x := (x_1, x_2)\,,\; y := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 - x_1 y_2$. Puede mostrarse que f es una forma bilineal. Ahora, consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $B := \{v_1 := (1, 0)\,,\; v_2 := (0, 1)\}$. Tenemos

$$f(v_1, v_1) = 1\,, \quad f(v_1, v_2) = -1\,, \quad f(v_2, v_1) = 0\,, \quad f(v_2, v_2) = 2\,,$$

de donde se deduce que $A_{f,B} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Además, se verifica que

$$f(x, y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 \;\, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [x]_B^t \, A_{f,B} \, [y]_B\,.$$

¿Cómo es $A_{f,\tilde{B}}$, con $\tilde{B} := \{(1, 0), (1, 1)\}$?..... ¡Cambio de base!

Cambio de base.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sean $B := \{v_i\}_{i=1}^n$, $\tilde{B} := \{\tilde{v}_j\}_{j=1}^n$ dos bases de V. Sea también $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. ¿Cuál es la relación entre $A_{f,B}$ y $A_{f,\tilde{B}}$?

Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz de paso de B a $\tilde{B}$, i.e. $P := [\tilde{I}]_B^{\tilde{B}}$. Luego, se tiene que $\forall\, u \in V \,:\, P\,[u]_B = [u]_{\tilde{B}}$. Luego, para $u, w \in V$ resulta

$$\begin{aligned} f(u,w) &= [u]_B^t\, A_{f,B}\, [w]_B \\ &= [u]_{\tilde{B}}^t\, A_{f,\tilde{B}}\, [w]_{\tilde{B}} = [u]_B^t\, P^t\, A_{f,\tilde{B}}\, P\, [w]_B\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\forall\, u, w \in V \,:\, [u]_B^t\, A_{f,B}\, [w]_B = [u]_B^t\, P^t\, A_{f,\tilde{B}}\, P\, [w]_B$. Luego, eligiendo $u := v_i \in B$ y $w := v_j \in B$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$, se infiere que

$$e_i^t A_{f,B}\, e_j = e_i^t\, (P^t\, A_{f,\tilde{B}}\, P)\, e_j \Leftrightarrow \Big(A_{f,B}\Big)_{ij} = \Big(P^t\, A_{f,\tilde{B}}\, P\Big)_{ij}.$$

De esta manera se concluye que: $A_{f,B} = P^t\, A_{f,\tilde{B}}\, P$, donde P es la matriz de paso de B a $\tilde{B}$.

Observación: En forma análoga, se deduce que $A_{f,\tilde{B}} = Q^t\, A_{f,B}\, Q$, siendo Q la matriz de paso de $\tilde{B}$ a B (i.e. $Q = P^{-1}$). En este caso se dice que $A_{f,B}$ y $A_{f,\tilde{B}}$ son matrices congruentes. Nótese que matrices congruentes no necesariamente son semejantes (sólo si $P^{-1} = P^t$, i.e. P es ortogonal). Además, la relación de congruencia de matrices cuadradas es en efecto una relación de equivalencia.

Observación: Si $f \in \mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$, entonces $\forall\, w \in W \,:\, f(\theta_V, w) = 0$ y $\forall\, v \in V \,:\, f(v, \theta_W) = 0$.

Definición: Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales finito dimensionales. $f \in \mathcal{BIL}(V \times W, \mathbb{K})$ se dice degenerada si $\exists\, u_0 \in V\backslash\{\theta_V\} \,:\, \forall\, x \in W \,:\, f(u_0, x) = 0$, o $\exists\, w_0 \in W\backslash\{\theta_W\} \,:\, \forall\, u \in V \,:\, f(u, w_0) = 0$. Esto induce las definiciones

$$\mathrm{Ker}_L(f) := \{z \in V \,|\, \forall\, x \in W \,:\, f(z, x) = 0\}.$$
$$\mathrm{Ker}_R(f) := \{x \in W \,|\, \forall\, z \in V \,:\, f(z, x) = 0\}.$$

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sea $B := \{v_j\}_{j=1}^{n}$ una base de V. $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ es degenerada $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es singular (no tiene inversa).

Demostración:

$(\Rightarrow)$: Veamos que $0 \in \sigma(A_{f,B})$, lo que equivale a decir que $\mathrm{Ker}(A_{f,B}) \neq \{\theta\}$. Como $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ es degenerada, $\exists\, u_0 \in V\backslash\{\theta\}$ tal que $\forall\, w \in V \,:\, f(u_0, w) = [u_0]_B^t\, A_{f,B}\, [w]_B = 0$. En particular, para $w := v_j \in B$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $[w]_B = [v_j]_B = e_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ (j-ésimo vector canónico). De esta manera, resulta $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \,:\, \left([u_0]_B^t\, A_{f,B}\right)_j = 0$. Así tenemos

$$[u_0]^t\, A_{f,B} = \theta \in \mathbb{K}^{1\times n} \Rightarrow A_{f,B}^t\, [u_0]_B = \theta \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow A_{f,B}^t\, [u_0]_B = 0 \cdot [u_0]_B\,,$$

de donde se deduce que $0 \in \sigma(A_{f,B}^t) = \sigma(A_{f,B})$, y se concluye que $A_{f,B}$ es singular.

$(\Leftarrow)$: Supongamos que $\mathrm{Ker}(A_{f,B}) \neq \{\theta\}$, i.e. $\exists\, z_0 \in V\backslash\{\theta\} \,:\, A_{f,B}\, [z_0]_B = \theta$, lo cual implica que $\forall\, u \in V \,:\, f(u, z_0) = [u]_B^t\, A_{f,B}\, [z_0]_B = 0$, lo cual establece que f es degenerada.

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$. Se dice que

1. f es simétrica si $\forall\, u\,, w \in V \,:\, f(u,w) \,=\, f(w,u)$.
2. f es antisimétrica si $\forall\, u\,, w \in V \,:\, f(u,w) \,=\, -f(w,u)$.

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sea B una base de V cualquiera. Sea además y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$. Entonces se tiene que

1. f es simétrica $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es simétrica.
2. f es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A_{f,B}$ es antisimétrica.

Demostración de 1): Sea $B := \{v_j\}_{j=1}^{n}$ una base de V, y $A_{f,B} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tenemos

$$f \text{ es simétrica } \Leftrightarrow \forall\, u\,, w \in V \,:\, [u]_B^t\, A_{f,B}\, [w]_B \,=\, f(u,w) \,=\, f(w,u) \,=\, [w]_B^t\, A_{f,B}\, [u]_B\,.$$

En particular, para $u := v_i$ y $w := v_j$, con $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, resulta

$$e_i^t\, A_{f,B}\, e_j \,=\, e_j^t\, A_{f,B}\, e_i \quad \Leftrightarrow \quad \left(A_{f,B}\right)_{ij} \,=\, \left(A_{f,B}\right)_{ji}\,.$$

FInalmente, como i,j son fijos pero arbitrarios, se deduce que $A_{f,B} \,=\, \left(A_{f,B}\right)^t$.

Demostración de 2): análoga. Es dejada al lector.

Observaciones:

1. Notar que la condición de $A_{f,B}$ de ser simétrica no depende de la base. Más aún, para f simétrica, la condición de $A_{f,B}$ de ser simétrica definida positiva, tampoco depende de la base B.
2. Nos interesa conocer las formas bilineales cuyas matrices representantes sean simétricas definidas positivas. Sabemos que si una matriz es simétrica con respecto a la base B, también lo es con respecto a la base $\tilde{B}$. ¿Ocurre lo mismo con el concepto de definida positiva?
3. Si V es un espacio vectorial real, con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces la función $f(u, w) := \langle u, w \rangle$ es una forma bilineal simétrica (¡VERIFICAR!).
4. Sea V un espacio vectorial real. Dada $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ simétrica, ¿cuándo f es un producto interior en V?

Proposición: Sea V un espacio vectorial real con $\dim(V) = n$, y sea B una base de V cualquiera. Entonces
$f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ es producto interior en $V \Leftrightarrow A_{f,B}$ es simétrica definida positiva.

Demostración:

$(\Rightarrow)$: Supongamos que $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ es un producto interior en V. Como

- f es simétrica, se tiene que $A_{f,B}$ es simétrica.
- $\forall\, u \in V \backslash \{\theta\} \, : \, f(u, u) > 0 \Leftrightarrow \forall\, [u]_B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \{\theta\} \, : \, [u]_B^t \, A_{f,B} \, [u]_B > 0.$

De esta manera, se infiere que $A_{f,B}$ es simétrica definida positiva.

$(\Leftarrow)$: Es dejada al lector. Tener presente que

$$\forall\, u, w \in V \, : \, f(u, w) = [u]_B^t \, A_{f,B} \, [w]_B \, .$$

Ejemplo 1: Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : f(A,B) := \mathrm{tr}(AB)$. Muestre que f es una forma bilineal simétrica, pero no es producto interior en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Aquí hay que tener presente las propiedades de traza de matrices.

Veamos que f es bilineal. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(\alpha A + B, C) &= \mathrm{tr}((\alpha A + B)C) = \mathrm{tr}(\alpha AC + BC) = \mathrm{tr}(\alpha AC) + \mathrm{tr}(BC) \\
&= \alpha\,\mathrm{tr}(AC) + \mathrm{tr}(BC) = \alpha\, f(A,C) + f(B,C) \\
f(A, \alpha B + C) &= \mathrm{tr}(A(\alpha B + C)) = \mathrm{tr}(\alpha AB + AC) = \mathrm{tr}(\alpha AB) + \mathrm{tr}(AC) \\
&= \alpha\,\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AC) = \alpha\, f(A,B) + f(A,C)\,.
\end{aligned}$$

De esta manera, se verifica que f es lineal en cada componente. Luego f es una forma bilineal.

Veamos que f es simétrica. Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tenemos

$$f(A,B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = f(B,A)\,,$$

con lo cual queda establecido que f es una forma bilineal simétrica.

Veamos ahora si $A_{f,B}$ es simétrica definida positiva. Para esto consideraremos la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, es decir $B := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, donde

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora construimos la matriz representante de f con respecto de B.

$$\begin{aligned}
f(A_1, A_1) &= \operatorname{tr}(A_1\, A_1) = 1\,, f(A_1, A_2) = \operatorname{tr}(A_1\, A_2) = 0\\
f(A_1, A_3) &= \operatorname{tr}(A_1\, A_3) = 0\,, f(A_1, A_4) = \operatorname{tr}(A_1\, A_4) = 0\\
f(A_2, A_1) &= 0 = f(A_2, A_2)\,, f(A_2, A_3) = 1\,,\ f(A_2, A_4) = 0\\
f(A_3, A_3) &= 0 = f(A_3, A_4)\,, f(A_4, A_4) = 1\,.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$A_{f,B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En vista que $\det(A^{(2)}_{f,B}) = 0$, se concluye que $A_{f,B}$ es simétrica, pero no definida positiva. En consecuencia, f no es producto interior.

Ejercicio 2: Muestre que $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $\forall\,(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : g(A, B) := \operatorname{tr}(A^t B)$ es un producto interior.

Ortogonalidad respecto de una forma bilineal real que es producto interior.

Sea V un espacio vectorial real, y $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{R})$ que es producto interno en V.

1. Se dice que $u, w \in V$ son ortogonales respecto a f si $f(u, w) = f(w, u) = 0$. Se denota por $u \perp_f w$.
   REMARK: Algunos autores se refieren a esta ortogonalidad como Conjugación de vectores con respecto a la forma bilineal real f.
2. Además, dado $S \subseteq V$ se define el (complemento) ortogonal a S respecto de f, como el conjunto

$$\begin{aligned} S^{\perp_f} &:= \{z \in V : \forall\, u \in S : u \perp_f z\} \\ &= \{z \in V : \forall\, u \in S : f(u, z) = f(z, u) = 0\}. \end{aligned}$$

Formas cuadráticas

Definición: Una función $\omega : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ se llama forma cuadrática si $\exists\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \omega(x) = x^t A\, x$.
Notar que si f es una forma cuadrática, entonces

$$\forall\, x = (x_1, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} : f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j\,, \quad \text{donde } \forall\, i, j \in \{1, .., n\} : a_{ij} \in \mathbb{R}\,.$$

Además, toda forma cuadrática ω es homogénea de grado 2, es decir, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \omega(\alpha\, x) = \alpha^2\, \omega(x)$.

Ejemplo: $\omega(x, y) := x^2 - 3xy + 2y^2$ es una forma cuadrática, pues

$$\forall\, (x, y)^t \in \mathbb{R}^{2\times 1} : \omega(x, y) = (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{simétrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{no simétrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observación: Si $\omega(x) = x^t A\, x$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, entonces $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $P^t A\, P = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. De esta manera,

$$\omega(x) = (x^t P)\, D\, (P^t x) = (P^t x)^t\, D\, (\underbrace{P^t x}_{=:\, y}) = y^t\, D\, y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2\,, \quad \text{con } y := P^t x$$

Forma cuadrática asociada a una forma bilineal

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), y sea $f \in \mathcal{BIL}(V, \mathbb{K})$ simétrica. Se define la forma cuadrática asociada a f, como la función $\omega : V \to \mathbb{K}$ definida, para cualquier $u \in V$, por $\omega(u) := f(u, u)$.

El siguiente resultado permite saber cuando una aplicación de V en $\mathbb{K}$ es una forma cuadrática.

Teorema: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. La aplicación $\omega : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si se verifica:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \forall\, u \in V : \omega(\alpha\, u) = \alpha^2\, \omega(u)$,
2. La aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ definida mediante la relación

$$\forall\, u, z \in V : f(u, z) := \frac{1}{2}\Big(\omega(u + z) - \omega(u) - \omega(z)\Big),$$

   es una forma bilineal simétrica. Cuando esto sucede, a f se le llama la forma polar de ω.

Definición: Dos formas cuadráticas reales son linealmente equivalentes (en $\mathbb{R}$) si las matrices simétricas que la representan, tienen la misma signatura.

Ejemplo: Considere la aplicación real definida en $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$\omega(x) := x_1^2 + a\,x_2^2 + 3\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,a\,x_2\,x_3\,, \quad \forall\, x := (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}\,,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un parámetro.

1. Demuestre que ω es una forma cuadrática y determine f, su forma polar.
2. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, f define un producto interior.
3. Para $a = 2$, determine $S^{\perp_f}$, si existe, donde $S := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Parte 1). Veremos si podemos aplicar el Teorema anterior. Consideremos $x := (x_1, x_2, x_3)^t, y := (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos

$a)$ $\omega(\alpha\, x) = \ldots = \alpha^2\, \omega(x)\,,$

$$b)\ f(x, y) := \frac{1}{2}\Big(\omega(x + y) - \omega(x) - \omega(y)\Big) = \ldots$$
$$= x_1\,y_1 + a\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_1\,y_3 + x_3\,y_1 + a\,(x_2\,y_3 + x_3\,y_2)$$
$$= x^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} y\,,$$

la cual es en efecto una forma bilineal simétrica (¡VERIFICARLO!). Luego, en virtud al Teorema aludido, ω es una forma cuadrática real, y f es su forma polar.

Parte 2). Como estamos en dimensión finita, para saber cuando f definirá un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$, basta con analizar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la matriz representante de f (en cualquier base, por ejemplo la canónica) es simétrica definida positiva. Sea $B := \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Tenemos

$$f(e_1,e_1) = \omega(e_1) = 1\,,\ f(e_1,e_2) = f(e_2,e_1) = 1\,,\ f(e_1,e_3) = f(e_3,e_1) = 1$$
$$f(e_2,e_2) = \omega(e_2) = a\ \ f(e_2,e_3) = f(e_3,e_2) = a\,,\ f(e_3,e_3) = \omega(e_3) = 3\,.$$

Así, la matriz representante de f con respecto a la base B, es $A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$, la cual claramente es matriz simétrica. Aplicando el CRITERIO DE SYLVESTER, $A_{f,B}$ será definida positiva si y sólo si $\forall\, k \in \{1,2,3\}\ :\ \det(A^{(k)}_{f,B}) > 0$. Esto conduce a las inecuaciones

$$\begin{aligned} 1 > 0 \quad \wedge \quad a - 1 > 0 \quad \wedge \quad (1-a)(3-a) > 0 \\ \Rightarrow a > 1 \quad \wedge \quad a \in (1,3)\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A_{f,B}$ será (simétrica) definida positiva si y sólo si $a \in (1,3)$. Por ende, la forma bilineal simétrica f definirá un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$ si y sólo si $a \in (1,3)$.

Parte 3). Consideremos $a = 2 \in (1, 3)$. Esto nos dice que $A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Por consiguiente, la forma bilineal simétrica f, definida con este valor del parámetro a, es un producto interior en $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Por definición,

$$S^{\perp_f} = \left\{ v \in \mathbb{R}^{3\times 1} : f(e_1, v) = 0 \wedge f(e_3, v) = 0 \right\} .$$

Tenemos, considerando $v := (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$\begin{cases} f(e_1, v) = 0 \Leftrightarrow & e_1^t \, A_{f,B} \, v = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \, , \\ f(e_3, v) = 0 \Leftrightarrow & e_3^t \, A_{f,B} \, v = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \, , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -2s \\ z = s \\ s \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

Finalmente, resulta $S^{\perp_f} := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Teorema de Inercia (de Sylvester): Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, y $\omega(x) := x^t A x$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Entonces, $\exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular tal que si $z := Q\,x \Leftrightarrow x = Q^{-1} z$, se tiene que $\omega(x) = z_1^2 + ... + z_s^2 - (z_{s+1}^2 + ... + z_r^2)$, donde r indica el rango de A, y s el número de valores propios positivos.

Demostración: Como A es simétrica, se sabe que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, y es diagonalizable ortogonalmente. Vamos a considerar que los valores propios de A están ordenados como se indica en la lista de elementos de $\sigma(A)$, incluyendo repeticiones, $\{\lambda_1, ..., \lambda_s, \lambda_{s+1}, ..., \lambda_r, 0, ..., 0\}$ de tal manera que $\forall j \in \{1, ..., s\} : \lambda_j > 0$, y $\forall j \in \{s+1, ..., r\} : \lambda_j < 0$. Por otro lado, $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal, tal que

$$P^t A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & & & \\ & & & \lambda_{s+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí recordamos que matrices semejantes poseen el mismo rango. En consecuencia, se tiene que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(D) = r$, pues hay r filas no nulas en D.

Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, se define $y := P^t\, x \Leftrightarrow x = P\, y$, y resulta

$$x^t\, A\, x = \left(y^t\, P^t\right) A \left(P\, y\right) = y^t \left(P^t\, A\, P\right) y = y^t\, D\, y = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, y_j^2 \,.$$

Siguiente objetivo: determinar una matriz diagonal no singular $\tilde{D}$ tal que $z := \tilde{D} y$ nos conduzca al resultado buscado.

Estrategia: $\forall\, j \in \{1, ..., s\}\, :\, \lambda_j\, y_j^2 = z_j^2$, y $\forall\, j \in \{s+1, ..., r\}\, :\, \lambda_j\, y_j^2 = -z_j^2$.

Esto induce el vector $z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, cuyas componentes se definen a continuación:

$$\left\{\begin{array}{lll} z_j := \sqrt{\lambda_j}\, y_j & j \in \{1, ..., s\} \\ z_j := \sqrt{-\lambda_j}\, y_j & j \in \{s+1, ..., r\} \\ z_j := y_j & j \in \{r+1, ..., n\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow z := \tilde{D}\, y$$

donde

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_s} & & & & & & \\ & & & \sqrt{-\lambda_{s+1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{-\lambda_r} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, resulta para $z = \tilde{D}\, y = \tilde{D}\, P^t\, x$:

$$\omega(x) = x^t A\, x = y^t D\, y = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, y_j^2 = \left(z_1^2 + \ldots + z_s^2\right) - \left(z_{s+1}^2 + \ldots + z_r^2\right) =: \widetilde{\omega}(z)\,.$$

Finalmente, se define la matriz $Q := \tilde{D}\, P^t$, la cual es no singular, y con la cual se valida lo anterior para cualquier $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Así, se concluye la demostración.

Observación: El cambio de coordenadas $y = P^t\, x$ corresponde a una rotación de ejes coordenados, mientras que el cambio $z = \tilde{D}\, y$ se interpreta como una dilatación o contracción de ciertas direcciones (Homotecia).

Aplicación: Identificación de lugares geométricos (cónicas y/o superficies cuadráticas)

Interesa identificar cónicas (en $\mathbb{R}^2$) y superficies cuadráticas (en $\mathbb{R}^3$), las cuales pueden haber sufrido alguna traslación y/o rotación de los ejes coordenados. Por lo general, la ecuación de esta curva viene expresado de la forma

$$\omega(x) + F(x) + c = 0\,,$$

donde $\omega : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal, y $c \in \mathbb{R}$ una constante.
En el caso $V := \mathbb{R}^{2\times 1}$, y considerando $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matriz (simétrica) que representa a la forma polar de ω respecto a la base canónica de V, se puede establecer lo siguiente (salvo casos degenerados):

1. Si $\det(A) > 0$, entonces la curva es una elipse.
2. Si $\det(A) = 0$, entonces la curva es una parábola.
3. Si $\det(A) < 0$, entonces la curva es una hipérbola.

Ejemplo: Determine el lugar geométrico asociado a la cónica de ecuación $x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2 - 2x_2 - 2\sqrt{3}\,x_1 - 4 = 0.$

Primero, identificamos la forma cuadrática asociada a la ecuación: $\omega(x_1, x_2) := x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2$, cuya forma polar es (¡VERIFICARLO!)

$$\forall\, x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : f(x,y) := x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + \sqrt{3}x_1 y_2 + \sqrt{3}x_2 y_1 .$$

Si consideramos B, la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 1}$, deducimos que $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. De esta manera, la ecuación de la cónica puede expresarse como:

$$(x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-2\sqrt{3}\ \ -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 4 = 0 .$$

Sea ahora $A := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$. Se deduce (¡HACERLO!) que $\sigma(A) = \{0, 4\}$, con espacios propios asociados $S_{\lambda=0} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y $S_{\lambda=4} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Se deduce así que $\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ formada por vectores propios de A.

Luego, definiendo $P := \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (P se elige por convención de modo que $\det(P) > 0$, i.e. rotación de ejes en sentido antihorario), resulta
$P^t\, A\, P \,=\, D \,:=\, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ahora, definiendo la rotación de coordenadas (notar que $\det(P) = 1 > 0$).

$$y \,:=\, P^t\, x \Leftrightarrow x \,=\, P\, y \,=\, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 \,-\, \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 \,+\, \frac{1}{2} y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \,=\, \frac{1}{2} y_1 \,-\, \frac{\sqrt{3}}{2} y_2\,, \\ x_2 \,=\, \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 \,+\, \frac{1}{2} y_2\,, \end{cases} \quad \text{tenemos}$$

$$\begin{aligned} 0 \,=\, x^t\, A\, x \,+\, (-2\sqrt{3} \,-2)\, x \,-\, 4 &= (y^t\, P^t)\, A\, (P\, y) \,+\, (-2\sqrt{3} \,-2)\, P\, y \,-\, 4 \\ &= y^t\, D\, y \,+\, (-2\sqrt{3} \,-2)\, P\, y \,-\, 4 \\ &= 4y_1^2 \,-\, 2\sqrt{3}y_1 \,+\, 2y_2 \,-\, 4 \\ &= 4\left(y_1 \,-\, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \,+\, 2y_2 \,-\, \frac{19}{4}\,. \end{aligned}$$

Esto permite afirmar que en las nuevas coordenadas (y_1, y_2), la ecuación de la cónica resulta ser: $4\left(y_1 \,-\, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \,+\, 2\left(y_2 \,-\, \frac{19}{8}\right) \,=\, 0\,$, la cual corresponde a una parábola, con vértice en $(\sqrt{3}/4, 19/8)$.

Observación: La signatura de A es $\mathrm{sig}(A) \,=\, (1, 0)$.

Ejemplo: Identifique la superficie cuadrática de ecuación $2y^2 + 2xy + 2xz + 2yz + \sqrt{6}y - 1 = 0$. Indicar las ecuaciones de rotación y/o traslación utilizadas.

Primero, expresamos la ecuación en forma matricial.

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (0\ \sqrt{6}\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0\,.$$

Consideremos $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se deduce (¡HACERLO!) que $\sigma(A) = \{-1, 0, 3\}$, con espacios propios asociados $S_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, $S_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y $S_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Se deduce así que $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A.

Candidato a matriz de rotación: $P := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Como $\det(P) = -1 < 0$, no cumple la condición de ROTACIÓN ANTIHORARIA. Hay que permutar dos columnas.

Luego, la matriz de rotación (antihoraria) es $\tilde{P} := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, con la cual se cumple $\tilde{P}^t\, A\, \tilde{P} = D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora, definiendo la rotación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \tilde{P} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} \end{cases}$$

la ecuación cuadrática nos queda:

$$(\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z})\, D \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + (0\ \sqrt{6}\ 0)\, \tilde{P} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 2\,\tilde{y} - \sqrt{2}\,\tilde{z} = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{z} + 2\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\left(\tilde{y} + \frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt{2}/3} - \frac{\tilde{x}^2}{\sqrt{2}}\,.$$

Si además introducimos las ECUACIONES DE TRASLACIÓN:

$$\begin{cases} \hat{x} := \tilde{x} \\ \hat{y} := \tilde{y} + \frac{1}{3} \\ \hat{z} := \tilde{z} + 2\frac{\sqrt{2}}{3}, \end{cases}$$

la ecuación de la SUPERFICIE CUADRÁTICA nos queda:

$$\hat{z} = \frac{\hat{y}^2}{\sqrt{2}/3} - \frac{\hat{x}^2}{\sqrt{2}},$$

la cual corresponde a un PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SILLA DE MONTAR).
Observación: La signatura de A es $\mathrm{sig}(A) = (1, 1)$.