525043 - Taller de Razonamiento Matemático II

Evaluación 2 - Solución y comentarios

Ejercicio 1. Sea $n \geqslant 1$ un natural impar. Muestre que el resultado de sumar n números enteros consecutivos siempre es divisible por n.

Solución 1. Dado z entero, definimos

$$S_z = z + (z+1) + \cdots + (z+n-1),$$

es decir, S_z es la suma de n enteros consecutivos partiendo en z. Hay que probar que, para todo z entero, S_z es divisible por n.

Como n es impar, existe $k \geqslant 0$ entero tal que $n = 2k+1$. Notemos que

$$S_{-k} = (-k) + (-k+1) + \cdots + (k-1) + k = 0,$$

pues los términos negativos se cancelan justo con los positivos. Luego S_{-k} es divisible por n.

Por otro lado, para llegar de S_z a S_{z+1} basta sumarle 1 a cada uno de los n términos de la suma, y por lo tanto $n + S_z = S_{z+1}$. Por lo tanto, S_{z+1} es divisible por n si y solo si S_z lo es. Iterando esta observación, tenemos que o bien para todo z entero S_z es divisible por n; o para ningún z entero S_z es divisible por n. Usando que S_{-k} es divisible por n, tenemos que para todo z entero, S_z es divisible por n, como queríamos. ∎

Solución 2. Dado z entero, definimos

$$S_z = z + (z+1) + \cdots + (z+n-1),$$

es decir, S_z es la suma de n enteros consecutivos partiendo en z. Hay que probar que, para todo z entero, S_z es divisible por n.

Calculando directamente, tenemos que

$$S_z = nz + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = nz + S'.$$

El primer término de esa suma es obviamente divisible por n, así que basta probar que el término S' que queda es divisible por n. Usando la suma conocida, tenemos que

$$S' = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Como n es impar, entonces $n-1$ es par, y por lo tanto $(n-1)/2 = b$ es entero. Luego $S' = nb$, así que efectivamente S' es divisible por n, como queríamos. ■

Solución 3. Dado z entero, definimos

$$S_z = z + (z+1) + \cdots + (z+n-1),$$

es decir, S_z es la suma de n enteros consecutivos partiendo en z. Hay que probar que, para todo z entero, S_z es divisible por n.

Lo probamos para $z \geqslant 0$ usando inducción en z. Para el caso base $z = 0$ tenemos que

$$S_0 = 1 + 2 + \cdots + (n-1).$$

Agrupando el primer con el último término de esta suma, tenemos $1+(n-1) = n$. Agrupando el segundo con el penúltimo, tenemos $2 + (n-2) = n$, etc. Como n es impar, $n-1$ es par, así que haciendo $(n-1)/2$ grupos cubrimos todos los términos de la suma S_0 como suma de n. Luego S_0 es divisible por n.

Como hipótesis inductiva suponemos que S_z es divisible por n, y lo buscamos probar para $z+1$. Notemos que

$$S_{z+1} = (z+1)+\cdots+(z+n) = (z+1)+\cdots+(z+n)+z-z = S_z+(z+n)-z = S_z+n,$$

y como S_z es divisible por n, concluimos que S_{z+1} también lo es. Eso termina el paso inductivo y la demostración (para $z \geqslant 0$). Para $z < 0$ el argumento es análogo. ■

§1. Comentarios

Hubo bastante gente que llegó al resultado esperado. Errores comunes: algunas personas se confundieron con "sumar n números enteros consecutivos" ($m+(m+1)+\cdots$) y supusieron "n números impares consecutivos" ($(m+1)+(m+3)+\cdots$), que es incorrecto. Otras personas consideraron solo la suma de n numeros consecutivos partiendo desde el 1 (pero se pedía algo más general).