525043
Taller de Razonamiento Matemático II

Nicolás Sanhueza-Matamala
nsanhuezam@udec.cl
ICM, Universidad de Concepción, Chile

Objetivos de hoy

- Logística
- Escribir una demostración
- Un problema

Logística

¿Qué cresta pasó con el horario?

¿Qué pasará con las ayudantías?

Escribiendo una demostración

¿Qué debo escribir en las pruebas para sacarme buena nota?

¿Qué debo escribir en las pruebas para sacarme buena nota?

¿Qué debe cumplir una buena demostración?

¿Qué debo escribir en las pruebas para sacarme buena nota?

¿Qué debe cumplir una buena demostración?

1. Debe ser **correcta**.
   No decir nada falso, usar la lógica correctamente...

¿Qué debo escribir en las pruebas para sacarme buena nota?

¿Qué debe cumplir una buena demostración?

1. Debe ser **correcta**.
   No decir nada falso, usar la lógica correctamente...
2. Debe ser **formal**.
   Notación adecuada, lenguaje técnico, justificar los pasos...

¿Qué debo escribir en las pruebas para sacarme buena nota?

¿Qué debe cumplir una buena demostración?

1. Debe ser **correcta**.
   No decir nada falso, usar la lógica correctamente...
2. Debe ser **formal**.
   Notación adecuada, lenguaje técnico, justificar los pasos...
3. Debe ser **clara**.
   Bien escrita, concisa, fácil de leer...

Escribiendo una demostración

Tenemos que escoger un subconjunto $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 20\}$ tal que ningún par de elementos estén a distancia 3 o a distancia 5.

Por ejemplo, no se puede tener $\{8, 11\} \subseteq X$, porque $|8 - 11| = 3$.

¿Cuál es el máximo tamaño que puede tener $|X|$?

Escribiendo una demostración

Tenemos que escoger un subconjunto $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 20\}$ tal que ningún par de elementos estén a distancia 3 o a distancia 5.

Por ejemplo, no se puede tener $\{8, 11\} \subseteq X$, porque $|8 - 11| = 3$.

¿Cuál es el máximo tamaño que puede tener $|X|$?

Respuesta: $|X| = 10$.

Escribiendo una demostración

¿Qué hay que escribir?

Escribiendo una demostración

¿Qué hay que escribir?

Cota inferior: se puede hacer con 10. Números pares, o impares.

Escribiendo una demostración

¿Qué hay que escribir?

Cota inferior: se puede hacer con 10. Números pares, o impares.

Cota superior: no se puede hacer con más de 10. Argumento de “pares” de elementos.

Escribiendo un argumento

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es *válido* si ningún par de elementos en X están a distancia 3 o a distancia 5.

Escribiendo un argumento

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es *válido* si ningún par de elementos en X están a distancia 3 o a distancia 5.

Consideramos el conjunto

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

es decir, los números pares del 1 al 20.

Escribiendo un argumento

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es *válido* si ningún par de elementos en X están a distancia 3 o a distancia 5.

Consideramos el conjunto

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

es decir, los números pares del 1 al 20. X tiene 10 elementos.

Escribiendo un argumento

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es *válido* si ningún par de elementos en X están a distancia 3 o a distancia 5.

Consideramos el conjunto

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

es decir, los números pares del 1 al 20. X tiene 10 elementos. Cada diferencia entre elementos distintos de X es un número par, en particular, la diferencia entre cualquier par de elementos de X no es 3 ni 5.

Escribiendo un argumento

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es *válido* si ningún par de elementos en X están a distancia 3 o a distancia 5.

Consideramos el conjunto

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

es decir, los números pares del 1 al 20. X tiene 10 elementos. Cada diferencia entre elementos distintos de X es un número par, en particular, la diferencia entre cualquier par de elementos de X no es 3 ni 5. Por lo tanto, X es un conjunto válido de tamaño 10.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \dots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \dots, P_{10}$ dados por

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\},$$

$$\{11, 16\}, \{12, 17\}, \{13, 18\}, \{14, 19\}, \{15, 20\}.$$

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \ldots, P_{10}$ dados por

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\},$$

$$\{11, 16\}, \{12, 17\}, \{13, 18\}, \{14, 19\}, \{15, 20\}.$$

Cada par P_i tiene dos números cuya distancia es 5.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \ldots, P_{10}$ dados por

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\},$$

$$\{11, 16\}, \{12, 17\}, \{13, 18\}, \{14, 19\}, \{15, 20\}.$$

Cada par P_i tiene dos números cuya distancia es 5. Por lo tanto, $|X \cap P_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq 10$.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \ldots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \ldots, P_{10}$ dados por

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\},$$

$$\{11, 16\}, \{12, 17\}, \{13, 18\}, \{14, 19\}, \{15, 20\}.$$

Cada par P_i tiene dos números cuya distancia es 5. Por lo tanto, $|X \cap P_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq 10$. Además, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{10} P_i = \{1, \ldots, 20\}$.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \dots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \dots, P_{10}$ dados por

$$\{1,6\}, \{2,7\}, \{3,8\}, \{4,9\}, \{5,10\},$$

$$\{11,16\}, \{12,17\}, \{13,18\}, \{14,19\}, \{15,20\}.$$

Cada par P_i tiene dos números cuya distancia es 5. Por lo tanto, $|X \cap P_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq 10$. Además, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{10} P_i = \{1, \dots, 20\}$. Por lo tanto,

$$|X| \leq \sum_{i=1}^{10} |X \cap P_i| \leq \sum_{i=1}^{10} 1 = 10.$$

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq \{1, \dots, 20\}$ es un subconjunto válido cualquiera. Consideremos los pares $P_1, \dots, P_{10}$ dados por

$$\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\},$$

$$\{11, 16\}, \{12, 17\}, \{13, 18\}, \{14, 19\}, \{15, 20\}.$$

Cada par P_i tiene dos números cuya distancia es 5. Por lo tanto, $|X \cap P_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq 10$. Además, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{10} P_i = \{1, \dots, 20\}$. Por lo tanto,

$$|X| \leq \sum_{i=1}^{10} |X \cap P_i| \leq \sum_{i=1}^{10} 1 = 10.$$

Como X es arbitrario, concluímos que todo subconjunto válido tiene tamaño a lo más 10. ■

Un problema

Tenemos un tablero de 2048×2048 al que se le ha quitado una casilla. ¿Es posible cubrir las casillas que quedan con piezas en forma de *L*?