UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE LA EVALUACIÓN 2, ECUACIONES DIFERENCIALES II (525222), 2024-2

PROBLEMA 1. [30 puntos]

1. Muestre que los valores propios λ_n del problema de Sturm-Liouville

$$\text{(PSL)} \qquad \begin{cases} \left(\mathrm{e}^{-2x}u'(x)\right)' + \lambda \mathrm{e}^{-2x}u(x) = 0\ ,\ 0 < x < \pi \\ u(0) - u'(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

satisfacen $\lambda_n > 1$ y son soluciones de la ecuación

$$\tan(\pi\sqrt{\lambda - 1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}}\ .$$

Proponga un método geométrico para determinar los λ_n aproximamente.

2. Determine una familia ortonormal $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones propias de (PSL).

3. Suponga que $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, \pi]$, derivable en $]0, \pi[$ salvo quizá en un número finito de puntos, de derivada continua por trozos en $[0, \pi]$ y tal que $f(0) - f'(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$.
Determine la solución del Problema con Valores Iniciales y de Frontera (PVIF)

$$\begin{cases} \partial_t y(x,t) = \mathrm{e}^{2x}\partial_x\left(\mathrm{e}^{-2x}\partial_x y(x,t)\right) & ,\quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ y(0,t) - \partial_x y(0,t) = 0 & ,\quad t > 0 \\ \partial_x y(\pi,t) = 0 & ,\quad t > 0 \\ y(x,0) = f(x) & ,\quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

en la forma de una serie uniformemente convergente. Justifique a partir de resultados vistos en clase que la suma de esta serie es continua en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le \pi, t \ge 0\}$, de clase C^2 en $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < \pi, t > 0\}$ y es solución del PVIF.

Desarrollo: 1. La EDO en la primera ecuación de (PSL) se escribe

$$\mathrm{e}^{-2x}\left[u''(x) - 2u'(x) + \lambda u(x)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u''(x) - 2u'(x) + \lambda u(x) = 0\ ,$$

pues $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ para todo x. El polinomio característico $\mathcal{P}(r) = r^2 - 2r + \lambda$ tiene raíces $r_\pm = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$. Sea $\mu = \lambda - 1$. **[2 puntos]**

- Si $\lambda < 1$ (esto es $\mu < 0$), la solución general es

$$u(x) = A\mathrm{e}^{(1+\sqrt{-\mu})x} + B\mathrm{e}^{(1-\sqrt{-\mu})x}\ .$$

Las constantes de integración se determinan usando las Condiciones de Frontera (CF),

$$
\begin{aligned}
0 &= A + B - A(1+\sqrt{-\mu}) - B(1-\sqrt{-\mu}) = -\sqrt{-\mu}(A-B) = 0 && \Rightarrow \quad B = A \\
0 &= \mathrm{e}^{\pi} A\big[(1+\sqrt{-\mu})\mathrm{e}^{\sqrt{-\mu}\,\pi} + (1-\sqrt{-\mu})\mathrm{e}^{-\sqrt{-\mu}\,\pi}\big] && \Rightarrow \quad A = 0\,,
\end{aligned}
$$

donde usamos que la expresión $[\cdot]$ en la segunda linea es distinta de cero. En efecto, esta expresión es estrictamente positiva si $-1 \le \mu \le 0$ y es acotada inferiormente por $2\mathrm{e}^{\sqrt{-\mu}\,\pi}$ si $\mu \le -1$ (pues $(1-\sqrt{-\mu})\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\mu}\,\pi} \ge (1-\sqrt{-\mu})\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\mu}\,\pi}$ si $\mu \le -1$). Concluimos que (PSL) solamente tiene la solución trivial si $\lambda < 1$. **[2 puntos]**

- Si $\lambda = 1$ (esto es $\mu = 0$), la solución general es

$$u(x) = A\mathrm{e}^{x} + Bx\mathrm{e}^{x}$$

y las CF implican $A - A - B = -B = 0$ y $A\mathrm{e}^{\pi} + B(1+\pi)\mathrm{e}^{\pi} = A\mathrm{e}^{\pi} = 0$, de modo que $A = B = 0$. Así, (PSL) solamente tiene la solución trivial. **[2 puntos]**

- Si $\lambda > 1$ (esto es $\mu > 0$), la solución general es

$$u(x) = \mathrm{e}^{x}\big(A\cos(\sqrt{\mu}x) + B\sin(\sqrt{\mu}x)\big)\ .$$

Por las CF, se tiene

$$
\begin{aligned}
0 &= A - A - \sqrt{\mu}B = -\sqrt{\mu}B = 0 && \Rightarrow \quad B = 0 \\
0 &= \mathrm{e}^{\pi} A\big(\cos(\sqrt{\mu}\,\pi) - \sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,\pi)\big)\ .
\end{aligned}
$$

Así, (PSL) tiene una solución no trivial ssi

$$\cos(\sqrt{\mu}\,\pi) = \sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\pi\sqrt{\lambda-1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\ . \tag{1}$$

Por lo anterior, los valores propios de (PSL), $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, satisfacen $\lambda_n > 1$ y son soluciones de la ecuación (1). **[4 puntos]**
Un método geométrico para determinar los λ_n consiste en representar las curvas gráficas de $s \mapsto \tan(\pi s)$ y $s \mapsto 1/s$ para $s = \sqrt{\lambda - 1} \ge 0$. Estas curvas se intersectan en puntos de absicas $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots$. Luego $\lambda_n = (1+s_n)^2$. **[2 puntos]**
2. Las funciones propias asociadas a λ_n tienen la forma

$$u_n(x) = A_n\mathrm{e}^{x}\cos(\sqrt{\lambda_n - 1}\,x)$$

con $A_n \neq 0$ una constante arbitaria.

Por un teorema visto en clase, un Problema de Sturm-Liouville (PSL) con $p(x) = e^{-2x} > 0\ \forall\ x \in [0,\pi]$ y $w(x) = \mathrm{e}^{-2x} > 0\ \forall\ x \in]0,\pi[$ tiene sus funciones propias asociadas a valores propios distintos ortogonales entre sí,

$$\langle u_n\,,\, u_m\rangle_w = \int_0^{\pi} u_n(x)u_m(x)\,e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

Determinamos el factor A_n de tal manera que u_n sea normalizada, esto es, $\langle u_n \,,\, u_n\rangle_w = 1$. Calculamos la integral

$$K_n = \int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^x \cos(\sqrt{\mu_n}\, x)\right)^2 \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\sqrt{\mu_n} x) + 1}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sin(2\pi\sqrt{\mu_n})}{4\sqrt{\mu_n}} + \frac{\pi}{2}\ .$$

Usando $\sin(2\pi\sqrt{\mu_n}) = 2\sin(\pi\sqrt{\mu_n})\cos(\pi\sqrt{\mu_n})$ y (1), se obtiene

$$K_n = \frac{\sin^2(\pi\sqrt{\mu_n}) + \pi}{2}\ >\ 0\ .$$

Entonces una familia ortonormal de funciones propias de (PSL) viene dada por

$$\varphi_n(x) = \frac{u_n(x)}{\sqrt{K_n}} = \frac{e^x \cos(\sqrt{\mu_n}\, x)}{\sqrt{K_n}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

con $\mu_n = \lambda_n - 1$. **[7 puntos]**

3. Usando separación de variables, buscamos una solución de la EDP de la forma $y(x,t) = u(x)v(t)$. Sigue

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = e^{2x}\frac{(e^{-2x}u'(x))'}{u(x)} = -\lambda \quad \forall\, x \in]0,\pi[\ ,\ \forall\, t > 0\ .$$

[3 puntos]

Las CF implican $(u(0) - u'(0))v(t) = 0$ y $u'(\pi)v(t) = 0$ para todo $t > 0$. Entonces $u(0) - u'(0) = u'(\pi) = 0$. Deducimos que $u(x)$ satisface el PSL de la pregunta 1. Por ende, se debe tomar $\lambda = \lambda_n$ para obtener una solución no trivial $u_n(x) = A_n\varphi_n(x)$. Resolviendo la EDO $v'(t) + \lambda_n v(t)$, se infiere que $v_n(t) = c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}$ con c_n una constante arbitaria. Obtenemos las soluciones

$$y_n(x,t) = c_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^\star\ .$$ **[3 puntos]**

Ahora bien, por el principio de superposición,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t}\, \frac{e^x \cos(\sqrt{\lambda_n - 1}\, x)}{\sqrt{K_n}} \tag{2}$$

es solución de la EDP y satisface las CF. Por un resultado visto en clase, sigue que (2) es solución del PVIF del enunciado si los c_n son los coeficientes de Fourier generalizados de f con respeto a la familia ortonormal $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$c_n = \langle f\,,\,\varphi_n\rangle_w = \int_0^{\pi} f(x)\varphi_n(x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{K_n}}\int_0^{\pi} f(x)\cos(\sqrt{\lambda_n - 1}\, x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\ . \tag{3}$$

Mas precisamente, visto que

(i) *el PSL es regular:* $p(x) = e^{-2x}$ y $w(x) = e^{-2x}$ son continuas en $[0,\pi]$, $p(x)$ es de clase C^1 en $]0,\pi[$, $p(x) > 0, w(x) > 0\ \forall\, x \in [0,\pi]$; además los coeficientes en las CF, $a_1 = b_1 = b_2 = 1$ y $a_2 = 0$, son no negativos

(ii) *La función* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *en la CI satisface:* f es continua en $[0,\pi]$, derivable en $]0,\pi[$ salvo quizá en un número finito de puntos, de derivada continua por trozos en $[0,\pi]$ y f satisface las CF $f(0) - f'(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$.

Bajo las hipóteses (i) y (ii), un teorema visto en clase asegura que la serie (2) con los coeficientes c_n dados por (3) converge normalmente en $\overline{D}$, define una función continua en $\overline{D}$, de clase C^2 en D, y es solución del PVIF. **[5 puntos]**

PROBLEMA 2. [15 puntos]

Considere el PVIF modelando la propagación del calor en una barra metálica cuasi uni-dimensional de longitud L y de superficie lateral y extremidades aísladas térmicamente,

$$
\text{(PVIF)} \qquad \begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\,\partial_x^2 T(x,t) & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ \partial_x T(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ \partial_x T(L,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ T(x,0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}
$$

donde $T(x,t)$ es la temperatura de la barra en la posición x al tiempo t, $k > 0$ es una constante y $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es el perfil inicial de temperatura.
Para $\tau > 0$, sea $D_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < L, 0 < t \leq \tau\}$ y $\overline{D}_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \tau\}$.
Suponga que el siguiente principio del máximo es cierto:
Si $T(x,t)$ es continua en $\overline{D}_\tau$ y es solución de la ecuación del calor en D_τ con valores de frontera $\partial_x T(0,t) = \partial_x T(L,t) = 0$, $t \geq 0$, luego $T(x,t)$ alcanza sus máximo y mínimo en $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, t = 0\}$.

1. Muestre que (PVIF) tiene una única solución $T(x,t)$.
2. Muestre que (PVIF) es estable con respeto a cambios en la condición inicial. Deduzca que (PVIF) es bien planteado.

Desarrollo: 1. Sabemos por lo visto en clase que (PVIF) tiene a lo menos una solución continua en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}\,;\, 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$. Sean $T^{(1)}(x,t)$ y $T^{(2)}(x,t)$ continuas en $\overline{D}_\tau$ y soluciones de (PVIF) con las condiciones iniciales (CI) $T^{(1)}(x,0) = f_1(x)$ y $T^{(2)}(x,0) = f_2(x)$. Luego $T = T^{(1)} - T^{(2)}$ es continua en $\overline{D}_\tau$, es solución de la ecuación del calor en D_τ y satisface las condiciones de frontera (CF) $\partial_x T(0,t) = \partial_x T^{(1)}(0,t) - \partial_x T^{(2)}(0,t) = 0$ y $\partial_x T(L,t) = 0$ $\forall\, t \geq 0$. Luego, aplicando el principio del máximo del enunciado, se tiene

$$\min_{x \in [0,L]} T(x,0) \leq T(x,t) \leq \max_{x \in [0,L]} T(x,0)\ .$$

Usando las CIs, sigue **[6 puntos]**

$$\min_{x \in [0,L]} \big(f_1(x) - f_2(x)\big) \leq T(x,t) \leq \max_{x \in [0,L]} \big(f_1(x) - f_2(x)\big) \quad \forall\,(x,t) \in \overline{D}_\tau\ . \tag{4}$$

En particular, si $f_1 = f_2$ luego $T = 0$ en $\overline{D}_\tau$, esto es, $T^{(1)} = T^{(2)}$. Eso muestra que (PVIF) tiene una única solución en D_τ, y más generalmente en $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < L, t > 0\}$ (tomar $\tau \to \infty$). **[4 puntos]**

2. Sea $\varepsilon > 0$. Suponga que $\max_{[0,L]} |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$. Usando (4) y las desigualdades

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon < -\max_{[0,L]} |f_1(x) - f_2(x)| \;&\leq\; \min_{[0,L]}(f_1(x) - f_2(x)) \\
&\leq\; \max_{[0,L]}(f_1(x) - f_2(x)) \leq \max_{[0,L]} |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon\ ,
\end{aligned}
$$

se tiene $-\varepsilon < T(x,t) < \varepsilon$ para todo $(x,t) \in \overline{D}_\tau$. Como $\tau > 0$ es arbitrario, sigue que

$$|T^{(1)}(x,t) - T^{(2)}(x,t)| < \varepsilon \quad \forall (x,t) \in \overline{D}\ .$$

Deducimos que la solución de (PVIF) es continua con respeto a cambios en la CI. Así, (PVIF) es estable. Junto con 1. eso muestra que (PVIF) es bien planteado. **[5 puntos]**

PROBLEMA 3. [15 puntos]

Resolver el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = 0 & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ y(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(\pi,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = \sin(2x) & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \partial_t y(x,0) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

Indicación: Recuerde que los valores propios λ_n y funciones propias $u_n(x)$ del Problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 & , \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

están dados por $\lambda_n = n^2$ y $u_n(x) = B_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, con $B_n \in \mathbb{R}, B_n \neq 0$ (se puede usar este resultado sin demostrarlo).

Desarrollo: Por un resultado visto en clase, el PVIF tiene un única solución.
Usando el método de separación de variables, buscamos una solución de la ecuación de ondas de la forma $y(x,t) = u(x)v(t)$. Suponiendo que $u(x) \neq 0 \ \forall \ x \in]0,\pi[$ y $v(t) \neq 0 \ \forall \ t > 0$, reemplazando $y(x,t) = u(x)v(t)$ en esta ecuación y dividiendo por $y(x,t)$, obtenemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = -\lambda \quad \forall \ x \in]0,\pi[, \forall \ t > 0 \ ,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante pues $v''(t)/v(t)$ solamente depende de t y $u''(x)/u(x)$ solamente depende de x. Las condiciones de frontera implican $u(0)v(t) = u(\pi)v(t) = 0$ para todo $t > 0$. Luego $u(x)$ satisface el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 & , \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \ . \end{cases}$$

Sabemos (ver Indicación del enunciado) que los valores propios y funciones propias de este PSL están dados por $\lambda_n = n^2$ y $u_n(x) = B_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^\star$. **[5 puntos]**

Por otro lado, resolviendo la EDO $v''(t) + \lambda_n v(t)$, se tiene

$$v_n(t) = a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} ct)$$

con $a_n, b_n =$ constantes arbitrarias. Como la ecuación de ondas es lineal y las condiciones de frontera del PVIF son homogéneas, podemos aplicar el principio de superposición para concluir que para todo $N \in \mathbb{N}^\star$, $a_1, b_1, \ldots, , a_N, b_N \in \mathbb{R}$,

$$y_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)\big) \sin(nx)$$

es solución del PVF. **[5 puntos]**

Observamos que además $y_N(x,t)$ satisface las condiciones iniciales (CIs)

$$\begin{cases} y(x,0) &= \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \sin(nx) &= \sin(2x) \quad , \quad 0 < x < \pi \\ \partial_t y(x,0) &= \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c\, n\, b_n \sin(nx) &= 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{5}$$

si escogemos $N \geq 2$ y $a_n = \delta_{n,2}$, $b_n = 0$. Cabe notar que (1) podemos derivar la serie término a término ya que N es finito (2) visto que los valores iniciales $y(x,0)$ y $\partial_t y(x,0)$ son polinomios trigonómetricos de la forma $\sin(mx)$, no es necesario considerar el límite $N \to \infty$ para asegurar que $y_N(x,0)$ satisfaga las CIs.

Así, la solución del PVIF es

$$y(x,t) = \cos(2ct)\sin(2x) = \frac{1}{2}\Big(\sin\big(2(x+ct)\big) + \sin\big(2(x-ct)\big)\Big) \, . \qquad \textbf{[5 puntos]}$$

NOTA 1: Si no se observa directamente que $y_N(x,t)$ satisface las CIs para $a_n = \delta_{n,2}$ y $b_n = 0$, se puede determinar los coeficientes a_n y b_n aplicando el método general de la manera siguiente. Al mutiplicar (5) por $\sin(mx)$ e integrar sobre $[0,\pi]$, se tiene

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x &= \displaystyle\int_0^\pi \sin(2x)\sin(mx)\mathrm{d}x \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} c\, n\, b_n \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x &= 0 \end{cases}$$

Como $\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{n,m}$, se deduce que $a_n = \delta_{n,2}$ y $b_n = 0$ para todo $n = 1, \dots, N$.

NOTA 2: Solución alternativa. Se puede usar el resultado visto en clase que procura la solución del PVIF en la forma

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}_I(x+ct) + \tilde{f}_I(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_I(x')\,\mathrm{d}x' \, ,$$

donde $\tilde{f}_I(x)$ y $\tilde{g}_I(x)$ son las extensiones 2π-periódicas impares de $f(x)$ y $g(x)$. Aqui $g = 0$ ya que la velocidad inicial es nula y la extensión 2π-periódica impar de $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)$ está dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)$. Así,

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\sin\big(2(x+ct)\big) + \sin\big(2(x-ct)\big)\Big)$$

en acuerdo con el resultado anterior.