

PL[4-5] -CÁLCULO IV (MAT 225212 & MAT 225252)

Tema: *Funciones Complejas Elementales II: Ramas Logarítmicas y Potencias.*

1. *Ramas del argumento y del logaritmo complejo.* Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \neq 0$

- α -rama principal de $\arg(z)$: $\text{Arg}_\alpha(z) \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$
- α -rama principal de $\log(z)$: $\text{Log}_\alpha(z) = \ln|z| + i\text{Arg}_\alpha(z)$, $\alpha < \text{Arg}_\alpha(z) \leq \alpha + 2\pi$

2. *Potencias complejas.* Sea $z \neq 0$ y $q \in \mathbb{C}$ fijo.

- α -potencia multivaluada: $z^q = e^{q\log_\alpha(z)}$
- α -potencia principal (univaluada): $z^q = e^{q\text{Log}_\alpha(z)}$

PL[4]

1. Explicitar los conjuntos y comparar las selecciones indicadas.

$$(a) \log(i) \wedge \log_0(i) \quad (b) \log(-i+1) \wedge \log_{\frac{\pi}{2}}(-i+1) \quad (\mathbf{P}) \log(-i) \wedge \log_{\frac{3\pi}{2}}(-i)$$

2. Evaluar el logaritmo de las siguientes expresiones, usando

$(a) \ln(z) = \log(z)$ y $\text{Ln}(z) = \text{Log}(z)$ $(1) \ 2i$ $(2) \ -3 - 3i$	$(b) \log_\alpha(z)$ y $\text{Log}_\alpha(z)$ para $ \alpha = \frac{\pi}{3}$ $(3) \ e^{i\frac{\pi}{7}}$ $(4) \ (1+i)^7$	$(\mathbf{P}) \ 1 + i\sqrt{3}$ $(5) \ e^{-1-i\frac{\pi}{7}}$	$(6) \ \frac{1}{(1+i)^4}$ $(\mathbf{P}) \ \frac{e^{-i\frac{\pi}{7}}}{2e^{-i\frac{\pi}{5}}}$
--	--	---	--

3. Explicitar los conjuntos

$$(a) \log_6(1) \quad (b) \log_{\sqrt{3}}(1+i) \quad (\mathbf{P}) \log_5(-5i) \quad (c) \log_{2\pi}(i).$$

4.1 Evaluar $\text{Ln}(e^{i\pi})$, $\text{Ln}(e^{i3\pi})$ y $\text{Ln}(e^{i5\pi})$.

(P) Establecer la propiedad: $\text{Ln}(z) = i\text{Arg}(z) \iff |z| = 1$.

5. Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$(a) \ e^z = 3$ $(b) \ e^{-z} = 1+i$	$(c) \ e^{z+3} = i$ $(d) \ e^{2z} + 3e^z + 2 = 0$	$(\mathbf{P}) \ e^{2z} + 5 = 0$ $(\mathbf{P}) \ e^z = \frac{1+i}{1-i}$
---	--	---

6. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(a) \ \text{Log}_0(1) = 0 \quad (\mathbf{P}) \ \text{Log}_{\frac{\pi}{4}}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

(P) Para $z \neq 0$ encontrar el entero k tal que $\text{Ln}(z) = \text{Log}_0 + (2k\pi)i$.

PL[5]

- 8.1 Visualizar en el plano de Argand que para todo $l \in \mathbb{N}$ la fase no cambia para el escalamiento lz , es decir, $\text{Arg}(lz) = \text{Arg}(z)$. Mientras que $|lz| = l|z|$

8.2 Establecer que solo si $a \in \mathbb{R}^+$, se verifica que $\text{Ln}(az) = \ln(a) + \text{Ln}(z)$. Se deben presentar contra ejemplos si $a \in \mathbb{R}^-$ y para $a \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im}(a) \neq 0$.

(P) Resolver la ecuación $\ln(z) + \ln(2z) = \frac{3\pi}{2}$ y verificar que la expresión encontrada satisface la ecuación.

$$10. \quad \text{Idem: } \ln(iz) - i\ln(z) = \frac{3\pi}{2}$$

11.1 Evaluar el valor principal de las siguientes funciones.

11.2 Encontrar todos los valores de las potencias complejas del problema [11.1]

12 Repetir el problema [11.1] y [11.2] para las siguientes potencias complejas. Ensayar resolver con *I.A*

$$(a) \ (3i)^4 \quad (b) \ (1 + i\sqrt{3})^{\frac{2}{7}} \quad (c) \ (-i)^i \quad (\mathbf{P}) \ (-e)^{\frac{i}{2}}$$

13 Dilucidar las regiones del plano de Argand donde se verifica $\ln(\bar{z}) \neq \overline{\ln(z)}$.

(P) Resolver $\cos(z) = \sin(z)$.

(P) Recordando que

$$w = \cos^{-1}(z) \iff z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Establecer, que el valor principal de $\cos^{-1}(z)$ es

$$\cos^{-1}(z) = -i \operatorname{Ln}\left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right).$$