UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

EVALUACIÓN 1 - ANÁLISIS NUMÉRICO II (525441) 2019-I

ATENCIÓN: Sea claro y ordenado en el desarrollo de la presente evaluación. No se permite el uso de dispositivo electrónico alguno durante el desarrollo de la misma. 28/06/2019

Problema 1. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Considerando la matriz $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, determine el valor exacto de: $||\boldsymbol{A}||_1$, $||\boldsymbol{A}||_\infty$ y de $||\boldsymbol{A}||_2$.

Problema 2. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

2.1) Sea $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $||\cdot||$ una norma matricial inducida, tal que $||\boldsymbol{B}|| < 1$. Demuestre que $\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B}$ es no singular, y además

$$||(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B})^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||\boldsymbol{B}||}\,.$$

2.2) Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, con $\boldsymbol{A}$ no singular. Consideremos $||\cdot||$ una norma matricial inducida, en la cual se verifica $||\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}|| < 1$. Con la ayuda de 2.1), justifique que $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ es también no singular, y además demuestre que:

$$\frac{||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}||}{||\boldsymbol{A}^{-1}||} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{||\boldsymbol{E}||}{||\boldsymbol{A}||}\left(\frac{1}{1 - ||\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}||}\right).$$

Problema 3. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Sea $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ tal que $||\boldsymbol{w}||_2 = 1$. Esto permite definir la matriz de reflexión de Householder $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{I}_m - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^t$.

3.1) Determine los valores propios y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{H}$.

3.2) ¿Cuál es el valor de $\det(\boldsymbol{H})$?

Problema 4. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Considere el problema de mínimos cuadrados: $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}||_2$, siendo $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

y $\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.1) Sin resolver, diga si este problema tiene punto de mínimo único. Justifique su respuesta.

4.2) Resuelva el problema de mínimos cuadrados propuesto.

Problema 5. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Denotemos las columnas de la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ por $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^m$. Esto permite expresar la matriz referida como $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{a}_m]$. Considere la factorización $\boldsymbol{QR}$ de $\boldsymbol{A}$ para demostrar que $|\det(\boldsymbol{A})| \leq ||\boldsymbol{a}_1||_2 \cdots ||\boldsymbol{a}_m||_2$.

Problema 6. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$

El problema de autovalores generalizado es de la forma: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\, \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{u}$, donde $\boldsymbol{A}\,,\, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ son matrices dadas. Suponiendo que $\boldsymbol{A}$ es simétrica y $\boldsymbol{B}$ simétrica definida positiva, deduzca un problema auxiliar de autovalores de la forma $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ que permita resolver el de autovalores generalizado propuesto, de tal manera que la matriz $\boldsymbol{C}$ sea simétrica. Debe explicitar la matriz $\boldsymbol{C}$, validar la propiedad solicitada, e indicar cómo recuperaría los vectores propios del problema original a partir de los correspondientes al problema auxiliar.

Duración de la prueba: **120 minutos**. RBP/rbp