UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 3 ALGEBRA III 525201-0 Comentarios

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 30 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Considere el espacio vectorial real $V := \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y una base de V, dada por $\tilde{B} := \{r_0, r_1, r_2\}$, siendo $r_0(t) := t(t-1)$, $r_1(t) := t(t+1)$ y $r_2(t) := 1-t$. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, que a un polinomio $q \in V$, definido por $q(t) := a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2$, le asocia $T(q) \in V$, dado por

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, T(q)(t) \,:=\, (a_0 + a_1 + a_2) \,+\, (a_0 + a_1 - a_2)\, t \,+\, (a_0 - a_1 + a_2)\, t^2\,.$$

1.1) Determine la matriz representante de T con respecto a la base $\tilde{B}$ de V, i.e. $[T]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$. **(10 puntos)**

Desarrollo: Tenemos:

$$\begin{aligned} T(r_0)(t) \,&=\, -2t + 2t^2 \,\Rightarrow T(r_0) \,=\, 2\cdot r_0 \,+\, 0\cdot r_1 \,+\, 0\cdot r_2 \\ T(r_1)(t) \,&=\, 2 \,\Rightarrow T(r_1) \,=\, -1\cdot r_0 \,+\, 1\cdot r_1 \,+\, 2\cdot r_2 \\ T(r_2)(t) \,&=\, 2t^2 \,\Rightarrow T(r_2) \,=\, 1\cdot r_0 \,+\, 1\cdot r_1 \,+\, 0\cdot r_2\,. \end{aligned}$$

Así resulta $[T]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} \,=\, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2) Sea $B = \{p_0\,, p_1\,, p_2\}$, con $p_0(t) := 1$, $p_1(t) := t$ y $p_2(t) := t^2$, la base canónica de V. Determine la matriz de cambio de base (matriz de pasaje o de paso) de la base B a la base $\tilde{B}$. **(10 puntos)**

Desarrollo: Nos piden determinar $P := [\tilde{I}]_{B}^{\tilde{B}}$. Para ello, se tiene que

$$\begin{aligned} p_0 \,&=\, -\,\frac{1}{2} r_0 \,+\, \frac{1}{2} r_1 \,+\, 1\cdot r_2 \\ p_1 \,&=\, -\,\frac{1}{2} r_0 \,+\, \frac{1}{2} r_1 \,+\, 0\cdot r_2 \\ p_2 \,&=\, \frac{1}{2} r_0 \,+\, \frac{1}{2} r_1 \,+\, 0\cdot r_2\,, \end{aligned}$$

de donde $P \,=\, \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión 3**, y considere $B := \{w_1, w_2, w_3\}$, una base de V. Sabiendo que la matriz representante de cierto endomorfismo $L \in \mathcal{L}(V)$ con respecto a la base B, es

$$[L]_B^B \,:=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Determine los valores y vectores propios de L. ¿Es L diagonalizable? Justifique su respuesta, según el caso. En el caso sea L diagonalizable, indique la base $\tilde{B}$ de V, con respecto a la cual $[L]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$ es diagonal. Debe determinar esta matriz diagonal, si corresponde. **(20 puntos)**

Desarrollo: Sea $A := [L]_B^B$. La teoría nos dice que $\sigma(L) = \sigma(A)$. Luego, determinaremos los valores propios de A. Su polinomio característico es $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$, lo cual implica que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ son los valores propios de A, y por ende también de L.

Espacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$:

$$S_{\lambda_1} := \{v \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,|\, (A-3I)v = \theta\}.$$

Escalonando la matriz $A - 3I$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene, considerando $v := (a,b,c)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$(A-3I)v = \theta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = t \\ c = t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De esta manera se concluye que $S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, lo cual nos dice que $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 3$. Se verifica $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_{\lambda_1}$.

Espacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$:

$$S_{\lambda_2} := \{v \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,|\, (A-I)v = \theta\}.$$

Escalonando la matriz $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene, considerando $v := (a,b,c)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$(A-I)v = \theta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = t \\ c = -t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De esta manera se concluye que $S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, lo cual nos dice que $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 1$. Se verifica $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 < 2 = m_{\lambda_2}$. En consecuencia, A no es diagonalizable. Por tanto, la aplicación L tampoco lo es.

Vectores propios de L: Entendiendo que cada vector propio de A es el vector de coordenadas del vector propio de L con respecto a la base B, se tiene que

- $z_1 := w_2 + w_3$ es un vector propio de L, asociado al valor propio $\lambda = 3$.
- $z_2 := w_2 - w_3$ es un vector propio de L, asociado al valor propio $\lambda = 1$.

Problema 3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión infinita**, y consideremos $T, S \in \mathcal{L}(V)$ tal que S es un isomorfismo. A continuación se definen $L_1 := T \circ S \in \mathcal{L}(V)$ y $L_2 := S \circ T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que **(10 puntos)**

$$(\lambda, z) \text{ es un autopar de } L_1 \Leftrightarrow (\lambda, S(z)) \text{ es un autopar de } L_2 .$$

Demostración: Por doble implicación:
($\Rightarrow$): Supongamos que (λ, z) un autopar de L_1. Entonces

$$L_1(z) = \lambda z \Rightarrow T(S(z)) = \lambda z \Rightarrow S(T(S(z))) = S(\lambda z) = \lambda S(z) \Rightarrow L_2(S(z)) = \lambda S(z) .$$

Teniendo en cuenta que $z \neq \theta$ y S es en particular monomorfismo, se tiene que$S(v) \neq \theta$, lo cual permite inferir que $(\lambda, S(z))$ es un autopar de L_2.

($\Leftarrow$): Supongamos que $(\lambda, S(z))$ un autopar de L_2. Como $S(z) \neq \theta$ y S es monomorifsmo, se deduce qu $z \neq \theta$. Entonces, teniendo en cuenta que S es isomorfismo (i.e. S es lineal y biyectiva)

$$L_2(S(z)) = \lambda S(z) \Rightarrow S(T(S(z))) = \lambda S(z) = S(\lambda z) \Rightarrow S^{-1} \circ \big(S \circ T \circ S\big)(z) = (S^{-1} \circ S)(\lambda z) = \lambda z ,$$

de donde se infiere que (λ, z) es un autopar de L_1.

Problema 4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión finita** $m \geq 2$, y consideremos $T \in \mathcal{L}(V)$, tal que $r(T) = 1$. Demuestre que **(10 puntos)**

$$T \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\theta\} .$$

Demostración: Por doble implicación:
($\Rightarrow$): Supongamos que T es diagonalizable. Entonces, existe una base $B := \{v_j\}_{j=1}^m$ de V, formada por vectores propios de T. Como $r(T) = 1$, entonces $\mathrm{Im}(T)$ es generada por un vector de B. Sin pérdida de generalidad, consideremos que $\{v_1\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. Esto implica necesariamente que $\forall\, j \in \{2, ..., m\} : T(v_j) = \theta$. Es decir, $\{v_j\}_{j=2}^m \subseteq \mathrm{Ker}(T)$. Como $\{v_j\}_{j=2}^m$ es l.i y $n(T) = m - 1$ (gracias al Teorema de la dimensión), $\{v_j\}_{j=2}^m$ es una base de $\mathrm{Ker}(T)$. De esta manera, se deduce que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \langle \{v_j\}_{j=2}^m \rangle \cap \langle \{v_1\} \rangle = \{\theta\}$.

($\Leftarrow$): Supongamos que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\theta\}$. Como $r(T) = 1$, $\exists\, w \in V \backslash \{\theta\}$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \langle \{w\} \rangle$. Dado que $T(w) \in \mathrm{Im}(T)$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T(w) = \alpha w$. Es decir, (α, w) es un autopar de T. Más aún, en vista que $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\theta\}$, se infiere (¿Por qué?) que $\alpha \neq 0$.
Por otra parte, gracias al Teorema de la dimensión, se sabe que $n(T) = m - 1$, lo cual asegura la existencia de $\{z_j\}_{j=1}^{m-1} \subseteq V$, una base de $\mathrm{Ker}(T)$.
Además, se verifica que $\forall\, j \in \{1, ..., m-1\} : T(z_j) = \theta = 0 \cdot z_j$, lo cual nos dice que $\{z_j\}_{j=1}^{m-1}$ es un conjunto de vectores propios de T, asociados al valor propio $\lambda = 0$.
Nuevamente, gracias a la Hipótesis, $B := \{z_j\}_{j=1}^{m-1} \cup \{w\}$ resulta ser un conjunto l.i. de m vectores (Verificarlo), es decir B es una base de V formada por vectores propios de T. Esto implica que T es diagonalizable.

RBP/rbp 03.07.2020