UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Pauta Tarea 2

[**30 puntos**]Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, acotado, conexo y de frontera Lipchitz Γ. Considere la forma bilineal $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y forma lineal $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por :

$$a(u, v) = (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + \frac{1}{2}(\alpha \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega} - \frac{1}{2}(u, \alpha \cdot \nabla v)_{0,\Omega} + (\sigma\, u, v)_{0,\Omega}$$

y,

$$F(v) = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

donde, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^d, \sigma > 0$ y $f \in L^2(\Omega)$. Definimos el problema variacional: Buscar $u \in H^1(\Omega)$ talque

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall H^1(\Omega)$$

se pide lo siguiente :
a) Demostrar que $F(\cdot)$ es continua;
Sea $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|f(v)| &= |(f, v)_{0,\Omega}| \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{0,\Omega} \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

b) Demostrar que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coersiva;
Coercividad: Sea $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= (\varepsilon \nabla v, \nabla v)_{0,\Omega} + \frac{1}{2}(\alpha \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} - \frac{1}{2}(v, \alpha \cdot \nabla v)_{0,\Omega} + (\sigma\, v, v)_{0,\Omega} \\
&= (\varepsilon \nabla v, \nabla v)_{0,\Omega} + (\sigma\, v, v)_{0,\Omega} \\
&\geq \min\{\sigma, \varepsilon\}(v, v)_{1,\Omega} \\
&= \min\{\sigma, \varepsilon\}||v||^2_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Continuidad: Sea $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|(\varepsilon\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + \frac{1}{2}(\alpha\cdot\nabla u, v)_{0,\Omega} - \frac{1}{2}(u, \alpha\cdot\nabla v)_{0,\Omega} + (\sigma\, u, v)_{0,\Omega}\right| \\
&\leq \text{máx}\{\varepsilon,\sigma\}|(u,v)_{1,\Omega}| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}|\alpha_i||(\partial_{x_i}u, v)_{0,\Omega}| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}|\alpha_i||(u, \partial_{x_i}v)_{0,\Omega}| \\
&\leq \text{máx}\{\varepsilon,\sigma\}|(u,v)_{1,\Omega}| + \frac{1}{2}||\alpha||_\infty||v||_{0,\Omega}\sum_{i=1}^{d}||\partial_{x_i}u||_{0,\Omega} + \frac{1}{2}||\alpha||_\infty||u||_{0,\Omega}\sum_{i=1}^{d}||\partial_{x_i}v||_{0,\Omega} \\
&\leq \text{máx}\{\varepsilon,\sigma\}||u||_{1,\Omega}\,||v||_{1,\Omega} + \frac{d}{2}||\alpha||_\infty\,|u|_{1,\Omega}||v||_{0,\Omega} + \frac{d}{2}||\alpha||_\infty\,||u||_{0,\Omega}|v|_{1,\Omega} \\
&\leq (\text{máx}\{\varepsilon,\sigma\} + d||\alpha||_\infty)||u||_{1,\Omega}\,||v||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Donde $||\alpha||_\infty = \underset{i\in\{1,..,d\}}{\text{máx}}\{|\alpha_i|\}$

c) Demostrar que el problema (1) esta bien definido;

Con lo demostrado previamente en a) y b) además dado que $(H^1(\Omega), (\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert, podemos afirmar gracias al teorema de Lax-Milgram que el problema:

Hallar $u \in H(\Omega)$

$$a(u,v) = F(v) \quad ,\forall v \in H^1(\Omega)$$

posee una única solución y además

$$||u|| \leq \frac{||f||_{0,\Omega}}{\text{mín}\{\sigma,\varepsilon\}}$$

d) Considere $V_h \leq H^1(\Omega)$ no necesariamente de dimensión finita. Formule una versión de (1) sobre V_h

Hallar $u_h \in V_h$ tal que :

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad ,\forall v_h \in V_h$$

e) Demostrar que el problema del item anterior está bien definido;

Dado que $V_h \leq H^1(\Omega)$. Se cumplen todas las hipótesis del Teorema Lax-Milgram por lo tanto:

Hallar $u_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad ,\forall v_h \in V_h$$

tiene una única solución y además.

$$||u_h|| \leq \frac{||f||_{0,\Omega}}{\text{mín}\{\sigma,\varepsilon\}}$$

f) Demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h\in V_h}||u - v_h||_{1,\Omega}$$

Considerando los resultados de c) y e) tenemos:

$$a(u, v_h) = F(v_h) \quad ,\forall v_h \in V_h$$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad , \forall v_h \in V_h$$

sustrayendo ambas expresiones se obtiene la siguiente relación de ortogonalidad.

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad , \forall v_h \in V_h$$

Como $a(\cdot, \cdot)$ es coersiva y además aplicando la relación de ortogonalidad $a(u - u_h, v_h)$

$$\text{mín}\{\sigma, \varepsilon\}||u - u_h||_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u + v_h - v_h + u_n) = a(u - u_h, u - v_h)$$

Luego como $a(\cdot, \cdot)$ es continua, se sigue:

$$\begin{aligned}
\text{mín}\{\sigma, \varepsilon\}||u - u_h||_V^2 &\leq (\text{máx}\{\varepsilon, \sigma\} + d||\alpha||_\infty)||u - u_h||_V||u - v_h|| \\
||u - u_n||_V &\leq \frac{(\text{máx}\{\varepsilon, \sigma\} + d||\alpha||_\infty)}{\text{mín}\{\sigma, \varepsilon\}}||u - v_h||_V \ \ \forall v_h \in V_h \\
||u - u_n||_V &\leq \frac{(\text{máx}\{\varepsilon, \sigma\} + d||\alpha||_\infty)}{\text{mín}\{\sigma, \varepsilon\}} \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V
\end{aligned}$$

2.- **[30 puntos]** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, acotado, conexo, con frontera Lipchitz Γ.Considere los datos $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Analice la existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil de la siguiente EDP:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\epsilon\,\Delta\psi + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi &=& f\,, \text{ en } \Omega \\ \psi &=& g\,, \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

Respuesta: Al testiar por $v \in H_0^1(\Omega)$ y aplicando integración por parte en $H_0^1(\Omega)$ a la primera expreción se sigue :

$$\begin{aligned}
-\epsilon\,\Delta\psi + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi &= f \\
(-\epsilon\,\Delta\psi, v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi, v)_{0,\Omega} &= (f, v)_{0,\Omega} \\
(\epsilon\,\nabla\psi, \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi, v)_{0,\Omega} &= (f, v)_{0,\Omega} \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1)
\end{aligned}$$

Notemos que la formulación anterior induce a buscar $\psi \in V_g := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v) = g\}$ que satisfaga **(1)**. Luego por descomposición ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ y $(H_0^1(\Omega))^\perp$ existen $\psi_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi_g \in (H_0^1(\Omega))^\perp$ tal que $\psi = \psi_0 + \psi_g$ donde $\psi_g = \bar{\gamma}_0^-(g)$ con esto en consideración **(1)** se reduce a:

$$\begin{aligned}
(\epsilon\,\nabla(\psi_0 + \psi_g), \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla(\psi_0 + \psi_g), v)_{0,\Omega} &= (f, v)_{0,\Omega} \\
(\epsilon\,\nabla\psi_0, v) + (\nabla\psi_g, \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi_0) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \psi_g, v)_{0,\Omega} &= (f, v)_{0,\Omega} \\
(\epsilon\,\nabla\psi_0, v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi_0, \nabla v)_{0,\Omega} &= (f, v)_{0,\Omega} - (\nabla\psi_g, \nabla v)_{0,\Omega} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \psi_g, v)_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

y definido el funcional $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como :

$$F(v) := (f, v)_{0,\Omega} - (\nabla\psi_g, \nabla v)_{0,\Omega} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi_g, v)_{0,\Omega}$$

y la forma bilineal $a(u,v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como:

$$a(u,v) := (\epsilon\,\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega}$$

Finalmente el problema variacional nos queda:
Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = F(v) \quad , v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

Procedemos a mostrar unicidad, existencia y estabilidad del problema (2). Mostrando las hipótesis de Lax - Milgram
Continuidad de F: Sea $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|F(v)| &= |(f,v)_{0,\Omega} - (\epsilon\nabla\psi_g, \nabla v)_{0,\Omega} - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_g, v)_{0,\Omega}| \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{0,\Omega} + \epsilon|\psi_g|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \left|\sum_{i=1}^{d}(\alpha_i\partial_{x_i}\psi_g, v)_{0,\Omega}\right| \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{0,\Omega} + \epsilon||\psi_g||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty \sum_{i=1}^{d} |(\partial_{x_i}\psi_g, v)_{0,\Omega}| \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{0,\Omega} + \epsilon||\psi_g||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty||v||_{0,\Omega} \sum_{i=1}^{d} ||\partial_{x_i}\psi_g||_{0,\Omega} \\
&\leq ||f||_{0,\Omega}||v||_{1,\Omega} + \epsilon||\psi_g||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty||v||_{1,\Omega} \sum_{i=1}^{d} ||\psi_g||_{1,\Omega} \\
&= ||f||_{0,\Omega}||v||_{1,\Omega} + \epsilon||\psi_g||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty||v||_{1,\Omega} d||\psi_g||_{1,\Omega} \\
&= ||f||_{0,\Omega}||v||_{1,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_\infty)||v||_{1,\Omega}||\psi_g||_{1,\Omega} \\
&= (||f||_{0,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_\infty)||\psi_g||_{1,\Omega})||v||_{1,\Omega} \\
&= (||f||_{0,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_\infty)||\bar{\gamma}_0^-(g)||_{1,\Omega})||v||_{1,\Omega} \\
&= (||f||_{0,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_\infty)||g||_{\frac{1}{2},\Gamma})||v||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Continuidad de $a(\cdot,\cdot)$: Sea $v, u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |(\epsilon\,\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla u, v)_{0,\Omega}| \\
&\leq \epsilon\,|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \left|\sum_{i=1}^{d}(\alpha_i\partial_{x_i}u, v)_{0,\Omega}\right| \\
&\leq \epsilon\,||u||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty \sum_{i=1}^{d} |(\partial_{x_i}u, v)_{0,\Omega}| \\
&\leq \epsilon\,||u||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} + ||\boldsymbol{\alpha}||_\infty d||u||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega} \\
&\leq (\epsilon\, + d||\boldsymbol{\alpha}||_\infty)||u||_{1,\Omega}||v||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Coercividad de $a(\cdot,\cdot)$: Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, Notemos primero que por integración por partes en $H_0^1(\Omega)$ se tiene que $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} = 0$ en efecto:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} &= \sum_{i=1}^{d} (\alpha_i \partial_{x_i} v, v)_{0,\Omega} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (\partial_{x_i} v, v)_{0,\Omega} \\
&= -\sum_{i=1}^{d} (v, \alpha_i \partial_{x_i} v)_{0,\Omega} \\
&= -(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} \quad ,\forall v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Entonces necesariamente tiene que pasar que $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} = 0$. Con esto en consideración y aplicando desigualdad de poincaré mostraremos coercividad $a(\cdot,\cdot)$: Sea $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= (\epsilon \nabla v, \nabla v)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} \\
&= \epsilon ||\nabla v||_{0,\Omega}^2 \\
&= \epsilon \left(\frac{1}{2} ||\nabla v||_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} ||\nabla v||_{0,\Omega}^2 \right) \\
&\geq \epsilon \left(\frac{1}{2} ||\nabla v||_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2Cp} ||v||_{0,\Omega}^2 \right) \\
&\geq \epsilon \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp} \right\} ||v||_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

Luego por lo ya demostrado, gracias al teorema de "Lax-Milgram" podemos afirmar que el problema
Hallar $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u_0, v) = F(v) \quad , v \in H_0^1(\Omega)$$

posee una única solución y además esta misma esta continuamente acotado por los datos (estabilidad).

$$||u_0||_{1,\Omega} \leq \frac{(||f||_{0,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_{\infty})||g||_{\frac{1}{2},\Gamma})}{\epsilon \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp} \right\}}$$

Luego por desigualdad triangular

$$||u||_{1,\Omega} \leq ||u_0||_{1,\Omega} + ||u_g||_{1,\Omega} \leq \frac{(||f||_{0,\Omega} + (\epsilon + d||\boldsymbol{\alpha}||_{\infty})||g||_{\frac{1}{2},\Gamma})}{\epsilon \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2Cp} \right\}} + ||g||_{\frac{1}{2},\Gamma}$$

Concepción, martes 23 de marzo de 2021
DPC/CCB/ccb .