UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)

Pauta Evaluación 1

1. Dada $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, se define la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k. \tag{1}$$

   a) Demuestre que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos, es decir, se verifica que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} \subseteq B_n.$$

   b) Pruebe que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

   c) Dé un ejemplo de familia $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que los conjuntos de la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidos según la ecuación (1), sean todos distintos.

Soln:

a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego, como:
$(x \in B_{n+1}) \Longleftrightarrow \left(x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \Longleftrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n+1\},\ x \in A_k)$;
$(\forall k \in \{1, \ldots, n+1\},\ x \in A_k) \Longrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x \in A_k)$, y
$(\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x \in A_k) \Longleftrightarrow x \in B_n$,
entonces se tiene que $(x \in B_{n+1}) \Longrightarrow (x \in B_n)$. Es decir, $B_{n+1} \subseteq B_n$.

b) Como

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ x \in B_n) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 1, \ldots, n,\ x \in A_k);$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 1, \ldots, n,\ x \in A_k) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n),\ \text{y}\ (\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n) \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right),$$

entonces $\left(x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \Longrightarrow \left(x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$. De aquí, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$.
Análogamente,

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \Longleftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N},\ x \in A_k).$$

Por otro lado, $(\forall k \in \mathbb{N},\ x \in A_k) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 1, \ldots, n,\ x \in A_k)$ y $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 1, \ldots, n,\ x \in A_k) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, x \in B_n)$. Luego, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

c) Definamos $\forall k \in \mathbb{N},\ A_k = [k, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = [n, +\infty] = A_n$. Así, $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, B_i \neq B_j$.

2. Sea X un conjunto no vacío. Se define la relación R_X en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ por:

$$\forall A, B, C, D \subseteq X, \quad (A, B)\ R_X\ (C, D) \Longleftrightarrow A \subseteq C \wedge D \subseteq B.$$

a) Pruebe que R_X es relación de orden.

b) Muestre que R_X es relación de orden parcial, y que sin embargo se verifica que:

$$\exists A', B' \subseteq X, \forall A, B \subseteq X, \quad (A', B')\ R_X\ (A, B).$$

Soln:

a) Como $X \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Luego R_X es:

i) **Refleja**. En efecto, dado que $\forall A, B \subseteq X,\ A \subseteq A \wedge B\ \subseteq B$, entonces $\forall A, B \subseteq X, (A, B)\ \mathbb{R}_X\ (A, B)$.

ii) **Antisimétrica**. $\forall A, B, C, D \subseteq X$ se tiene que:

$$(A, B)\ R_X\ (C, D)\ \wedge\ (C, D)\ R_X\ (A, B) \Longleftrightarrow [(A \subseteq C)\ \wedge\ (D \subseteq B)]\ \wedge\ [(C \subseteq A)\ \wedge\ (B \subseteq D)]$$
$$\Longleftrightarrow (A = C)\ \wedge\ (B = D) \Longleftrightarrow (A, B) = (C, D).$$

iii) **Transitiva**. En efecto, $\forall A, B, C, D, E, F \subseteq X$:

$$[(A, B)\ R_X\ (C, D)\ \wedge\ (C, D)\ R_X\ (E, F]) \Longleftrightarrow [(A \subseteq C)\ \wedge\ (D \subseteq B)\ \wedge\ [(C \subseteq E)\ \wedge\ (F \subseteq D)]$$
$$\Longrightarrow (A \subseteq E)\ \wedge\ (F \subseteq B) \Longrightarrow (A, B)\ R_X\ (E, F).$$

En resumen, R_X es relación de orden.

b) Como $X \neq \emptyset$, entonces $(\emptyset, \emptyset) \not{R}_X (X, X)$ y $(X, X) \not{R}_X (\emptyset, \emptyset)$, pues $X \not\subseteq \emptyset$. Luego, R_X es relación parcial. Sin embargo, $\forall A, B \subseteq X, (\emptyset, X) R_X (A, B)$, pues $\emptyset \subseteq A\ \wedge\ B \subseteq X$.

3. Sea U y W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita, y B_U y B_W bases de U y W respectivamente. Sea además $T : V \to V$ un automorfismo.

a) Pruebe que $V = U \oplus W$ si y sólo si $B_U \cup B_W$ es base de V.

b) Demuestre que si $V = U \oplus W$, entonces $V = T(U) \oplus T(W)$.

Soln:
Sea $B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $B_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de U y W, respectivamente. Luego, $dim(U) = m$ y $dim(W) = n$.

a) $(\Longrightarrow)$ Supongamos que $V = U \oplus W$. De aquí, $dim(V) = dim(U) + dim(W) = m + n$.
Por otro lado, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n = \theta \Longleftrightarrow \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = -\beta_1 w_1 + \cdots + -\beta_n w_n.$$

Como $U \cap W = \{\theta\}$, entonces $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = -\beta_1 w_1 + \cdots + -\beta_n w_n = \theta$.
Dado que B_U y B_W son l.i., lo anterior implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Es decir

$B_U \cup B_W$ es l.i.

Por lo tanto, se tiene que $B_U \cup B_W$ l.i. y $card(B_U \cup B_W) = m + n = dim(V)$ implica que $B_U \cup B_W$ es base de V.

$(\Longleftarrow)$ Supongamos ahora que $B_U \cup B_W$ es base de V. De aquí, $\forall v \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$, tal que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n.$$

Como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m \in U$ y $\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n \in W$, entonces se concluye que $\forall v \in V,\ \exists u \in U, w \in W,\ v = u + w$. Es decir, $V = U + W$.

Por otro lado, $dim(V = U+W) = card(B_U)+card(B_W) = m+n$. Luego por teorema de Grassmann, $dim(V) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = m + n$, lo que implica que $dim(U \cap W) = 0$. Es decir, $U \cap W = \{\theta\}$. Por lo tanto, $V = U \oplus W$.

b) Supongamos que $V = U \oplus W$. Luego, $dim(V) = m + n$ y $\forall v \in W, \exists!\, u \in U, w \in W, v = u + w$.

Sea $v \in V,\ v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$. Entonces, $T(v) = T(u) + T(w)$.

De aquí se concluye que $T(V) = T(U) + T(W)$. Además, como T es automorfismo, en particular $T(V) = V$, entonces $V = T(U) + T(W)$.

Por otro lado, dado que T es inyectiva, se tiene que $T(B_U)$ es l.i y ya que $\langle T(B_U)\rangle = T(U)$, entonces $T(B_U)$ es base de $T(U)$. De igual manera se concluye que $T(B_W)$ es base de $T(W)$. Así, $dim(T(U)) = n$ y $dim(T(W)) = m$, y por teorema de Grassman,

$$dim(V = T(U) + T(W)) = n + m = dim(T(U)) + dim(T(W)) - dim(T(U) \cap T(W)),$$

lo que implica que $dim(T(U) \cap T(W)) = 0$. Por lo tanto, $V = T(U) \oplus T(W)$.

JAL, semestre otoño de 2016.