UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

521230 Cálculo Numérico y 525240 Análisis Numérico I (2024-2)
Evaluación 2

04 de Diciembre de 2024

Nombre: --

Número de matrícula: --

Sección: ☐ 1 (Prof. Rommel Bustinza) ☐ 2 (Prof. Mónica Selva) ☐ 3 (Prof. Álvaro Guzmán)

Esta evaluación consta de **4** preguntas con los puntajes que se indican. No se permite el uso de calculadoras u otros dispositivos electrónicos. Duración: 100 minutos.

Pregunta A.

A.i Considere el PVI $\begin{cases} x\,y'(x) + y(x) = x^2\,, & x > 1 \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$, del cual se sabe que tiene una única solución. Se construye ahora una partición uniforme de [1,3], de tamaño $h = 1$. Determine las aproximaciones de la solución del PVI dado en cada nodo de la partición referida (lo más simplificado posible), obtenidas al aplicar el método de Euler explícito. **06 puntos**

Desarrollo: Primero, la partición uniforme de $[1,3]$, de tamaño $h = 1$, está formado por los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{2}$, tales que $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ahora, expresamos la EDO que define el PVI, en la forma $y'(x) = f(x, y(x))$, para identificar la función f. De esta manera, se obtiene

$$y'(x) = x - \frac{y(x)}{x}\,, x > 1\,,$$

de donde se identifica que f viene dada por $f(x, y) = x - \frac{y}{x}$.

Las aproximaciones $\{y_j\}_{j=0}^{2}$ de $\{y(x_j)\}_{j=0}^{2}$, aplicando el Método de Euler explícito, vienen dadas por

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\,f(x_j, y_j)\,, & j \geq 0\,, \\ y_0 = y(x_0) = 2\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_{j+1} = y_j + \left(x_j - \frac{y_j}{x_j}\right)\,, & j \geq 0\,, \\ y_0 = 2\,. \end{cases}$$

Luego,

$$(j = 0) : y_1 = y_0 + \left(x_0 - \frac{y_0}{x_0}\right) = 2 + \left(1 - \frac{2}{1}\right) = 1\,,$$

$$(j = 1) : y_2 = y_1 + \left(x_1 - \frac{y_1}{x_1}\right) = 1 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 5/2\,.$$

A.II Considere el PVI $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t)\,, & t > 0 \\ y'(t) = x(t) - 2y(t)\,, & t > 0\,. \\ x(0) = -1\,,\ y(0) = 2\,. \end{cases}$

Se construye ahora una partición uniforme de [0,1], de tamaño $h > 0$.

a) Exprese el PVI dado en la forma $\begin{cases} \boldsymbol{z}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t) & t > 0 \\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z_0} \end{cases}$, siendo $\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Debe explicitar $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{z}_0$. **04 puntos**

Desarrollo: Tenemos

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x(t) - 4y(t) \\ x(t) - 2y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{z}(t)\,, \quad t > 0 \\ \boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

De esta manera, se deduce la expresión pedida del sistema PVI, con $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, y $\boldsymbol{z}_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Exprese el esquema de Euler implícito que aproxima la solución $\boldsymbol{z}$ del PVI obtenido previamente, en cada nodo de la partición uniforme construida, en la forma $\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_{j+1} = \boldsymbol{z}_j$. Debe explicitar la matriz $\boldsymbol{C}$. Luego, determine si hay alguna restricción sobre $h > 0$, que impida aplicar este esquema. **05 puntos**

Desarrollo: Los nodos de la partición uniforme de $[0,1]$ son $\{x_j\}_{j=0}^N$, con $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, ..., N$. Identificando la función $\boldsymbol{F}$, tal que $\boldsymbol{z}'(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{z}(t))$, resulta $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$. Luego, aplicando el Esquema de Euler Implícito, se obtiene que las aproximaciones $\{\boldsymbol{z}_j\}_{j=0}^N$ satisfacen:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_{j+1} = \boldsymbol{z}_j + h\,\boldsymbol{F}(x_{j+1}, \boldsymbol{z}_{j+1})\,, & j \geq 0 \\ \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\boldsymbol{I} - h\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}_{j+1} = \boldsymbol{z}_j\,, & j \geq 0 \\ \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}} \end{cases}$$

De esta manera, se deduce la expresión requerida, con $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{I} - h\,\boldsymbol{A}$.

Posibles restricciones sobre h: aquellos que hagan que $\boldsymbol{C}$ sea singular, es decir $\det(\boldsymbol{C}) = 0$. Luego

$$0 = |\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 1 - 3h & 4h \\ -h & 1 + 2h \end{vmatrix} = (1 - 3h)(1 + 2h) + 4h^2 = 1 - h - 2h^2 = (1 + h)(1 - 2h)$$
$$\Rightarrow \quad h_1 = -1 \vee h_2 = 1/2\,.$$

Así, el único valor positivo que no podría tomar h en este esquema, es $h = 1/2$.

Pregunta B. Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

B.i Sin efectuar factorización alguna de $\boldsymbol{A}$, justifique / fundamente por qué $\boldsymbol{A}$ admite factorización de Cholesky. **05 puntos**

Desarrollo: Por un lado, se verifica que $\boldsymbol{A}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{A}$ es matriz simétrica.

Por otro lado, denotando por $\boldsymbol{A}_j$, las submatrices principales de $\boldsymbol{A}$, de orden $j \in \{1, 2, 3\}$, tenemos

$$|\boldsymbol{A}_1| = |(1)| = 1 > 0\,, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0\,, \quad |\boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}| = \cdots = 1 > 0\,.$$

Gracias a la simetría de $\boldsymbol{A}$, lo anterior implica que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva. Por estas razones, $\boldsymbol{A}$ admite factorización de Cholesky.

B.ii Determine la factorización de Cholesky de $\boldsymbol{A}$. **10 puntos**

Desarrollo: Primero, factorizamos $\boldsymbol{A}$ en el sentido de Cholesky. Sea $\boldsymbol{L} := \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{A}$ y los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{L}$ positivos. Luego, explotando la igualdad de matrices, resulta

$$\begin{aligned} 1 = a_{11} = \ell_{11}^2 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{11} = 1\,, \\ 1 = a_{21} = \ell_{21}\ell_{11} \quad &\Rightarrow \quad \ell_{21} = 1\,, \\ 1 = a_{31} = \ell_{31}\ell_{11} \quad &\Rightarrow \quad \ell_{31} = 1\,, \\ 2 = a_{22} = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{22} = 1\,, \\ 3 = a_{32} = \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} \quad &\Rightarrow \quad \ell_{32} = 2\,, \\ 6 = a_{33} = \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{33} = 1\,. \end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathtt{t}}$.

Pregunta C.

C.I Sean $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, $\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, y considere una norma matricial inducida $||\cdot||$ cualquiera. Sean $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ las soluciones de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y de $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Demostrar que **05 puntos**

$$\frac{||\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}||}{||\boldsymbol{x}||} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{||\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}||}{||\boldsymbol{b}||} . \tag{C.1}$$

Demostración: Tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}} \Rightarrow \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}) \Rightarrow 0 \leq ||\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}|| = ||\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}})|| \leq ||\boldsymbol{A}^{-1}||\, ||\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}|| ,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow 0 < ||\boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{A}||\, ||\boldsymbol{x}|| . \end{aligned}$$

Se deduce entonces

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}||\, ||\boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{A}^{-1}||\, ||\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}||\, ||\boldsymbol{A}||\, ||\boldsymbol{x}|| \\ \Rightarrow \frac{||\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}||}{||\boldsymbol{x}||} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{||\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}||}{||\boldsymbol{b}||} , \end{aligned}$$

donde se recuerda que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) := ||\boldsymbol{A}||\, ||\boldsymbol{A}^{-1}||$

C.II Sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ una matriz no singular. Se sabe que

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$ satisface $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 32 & 23 & 33 & 31 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$.
- $\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 9.2 & -12.6 & 4.5 & -1.1 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$ satisface $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, con $\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 32.1 & 22.9 & 33.1 & 30.9 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$.

Con ayuda de la desigualdad (C.1), determine una cota inferior (> 1) más precisa (y lo más simplificada posible), del número condición de $\boldsymbol{A}$, respecto a la norma infinito. **05 puntos**

Desarrollo: Tenemos $||\boldsymbol{x}||_\infty = 1$, $||\boldsymbol{b}||_\infty = 33$. Además

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}||_\infty = ||\begin{pmatrix} -8.2 & 13.6 & -3.5 & 2.1 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}||_\infty = 13.6 , \\ ||\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}||_\infty = ||\begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}||_\infty = 0.1 . \end{aligned}$$

De esta manera, la desigualdad (C.1) nos queda

$$\frac{13.6}{1} \leq \operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \frac{0.1}{33} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \geq (136)(33) = 4488 .$$

C.III Considere la matriz $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular determinante ni rango de matriz alguna, fundamente por qué la matriz $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ es no singular. **05 puntos**

Desarrollo: La estrategia es determinar una norma matricial inducida tal que $\boldsymbol{B}$ sea de norma < 1. Notamos que $||\boldsymbol{B}||_1 = \max\{1/2, 11/15, 1/2\} = 11/15 < 1$. De esta manera, por un resultado discutido en clases, se asegura que la matriz $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ es no singular.

Pregunta D. Considere la matriz no singular $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

D.i Sea ahora $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -8 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$. Plantee en **forma matricial**, el Método de Jacobi asociado al sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Luego, determine la primera aproximación de la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, que resulta de aplicar el Método de Jacobi, partiendo de la aproximación inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathtt{t}}$. $\boxed{\textbf{08 puntos}}$

Desarrollo: Primero descomponemos $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es no singular, $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, la forma matricial del Esquema de Jacobi es

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}\,, \quad k \geq 0 \\ \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}, \\ (k \geq 0) \\ \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Luego, para $k = 0$, resulta

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

D.ii ¿Es convergente el método de Jacobi en este caso? Fundamente apropiadamente su respuesta. $\boxed{\textbf{07 puntos}}$

Desarrollo: Notamos que la matriz $\boldsymbol{A}$ satisface:

$$\begin{aligned} &(\text{columna } 1) : 5 = |5| > |2| + |0| = 2\,, \\ &(\text{columna } 2) : 4 = |4| > |-2| + |1| = 3\,, \\ &(\text{columna } 3) : 3 = |3| > |0| + |2| = 2\,. \end{aligned}$$

Es decir $\forall\, j \in \{1, 2, 3\} \;:\; |a_{jj}| > \displaystyle\sum_{i=1, i\neq j}^{3} |a_{ij}|$, lo cual indica que $\boldsymbol{A}$ es **estrictamente diagonal dominante por columnas**. Por un resultado visto en clases, esto permite garantizar la convergencia del método de Jacobi en este caso.