Análisis Numérico III
Problemas de valores de frontera para EDPs elípticas
Módulo 4, Presentación 9

Raimund Bürger

16 de mayo de 2022

4.5. Convergencia del método de diferencias

Sea $u = u(x, y)$ la solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad (x,y) \in G := (0,1)^2, \\ u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial G. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sobre $\bar{G} = G \cup \partial G$ se define una malla con $\Delta x = \Delta y = h$, donde $G_h = \{\text{totalidad de los puntos interiores}\}$, $\partial G_h = \{\text{puntos de frontera}\}$.

Sea $u = u(x, y)$ la solución del problema (4.9), y

$$\boldsymbol{u}(h) = \big(u(h,h), u(2h,h), u(h,2h), \dots, u((N_h-1)h, (N_h-1)h)\big)^{\mathrm{T}},$$

y el vector de errores $\boldsymbol{\varepsilon}^h := \boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u}(h)$. Usamos

$$\begin{aligned} &(-\Delta_2 u)(x_i, y_k) - f(x_i, y_k) \\ &= \frac{1}{h^2}\big(4u(x_i,y_k) - u(x_{i-1},y_k) - u(x_{i+1},y_k) \\ &\qquad - u(x_i,y_{k-1}) - u(x_i,y_{k+1})\big) \\ &\quad - f(x_i,y_k) - \varepsilon_{ik}(h) - \eta_{ik}(h) = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

y $\varepsilon_{ik}(h) + \eta_{ik}(h) = \mathcal{O}(h^2)$ para $i, k = 1, \dots, N_h - 1$.

tenemos (análogamente a $\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{b}(h)$)

$$\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{u}(h) = \boldsymbol{b}(h) + h^2\mathcal{O}(h^2), \tag{4.15}$$

lo que representa el sistema (4.12) multiplicado por h^2. Restando (4.15) de $\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{b}(h)$ obtenemos

$$\boldsymbol{A}(h)\boldsymbol{\varepsilon}^h = h^2\mathcal{O}(h^2) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^h = h^2\boldsymbol{A}(h)^{-1}\mathcal{O}(h^2). \tag{4.16}$$

Aquí, $\mathcal{O}(h^2)$ es un vector de $(N_h - 1)^2$ componentes, cada una acotada por Ch^2. Supongamos que

$$\left\|\boldsymbol{A}(h)^{-1}\right\|_\infty \leqslant Kh^{-2} \tag{4.17}$$

con K independiente de h. En este caso, (4.16) implicaría

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^h\|_\infty \leqslant Ch^2K = Mh^2$$

con M independiente de h. Para $h \to 0$, tendríamos

$$\left|u_{ik}^h - u(x_i, y_k)\right| = \left|u_{ik}^h - u(ih, kh)\right| \leqslant Mh^2, \quad i, k = 1, \ldots, N_h - 1,$$

donde la constante M es independiente de h, y el método sería de segundo orden. La propiedad (4.17) efectivamente se cumple.

4.5. Convergencia del método de diferencias

Teorema 4.4 Supongamos que el problema de valores de frontera (4.9) posee una solución $u \in C^4(\bar{G})$. Entonces el método de diferencias finitas dado por

$$\begin{aligned} -(L_h \boldsymbol{u}^h)_{ik} &= \frac{1}{h^2}\left(4u_{ik}^h - u_{i-1,k}^h - u_{i+1,k}^h - u_{i,k-1}^h - u_{i,k+1}^h\right) \\ &= f(x_i, y_k), \\ & i,k = 1,\dots,N_h - 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

es convergente del orden 2, es decir para $h \to 0$ tenemos

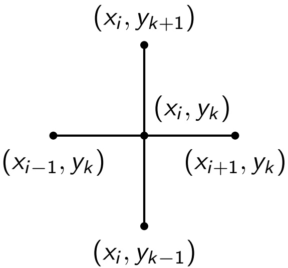
$$u_{ik}^h - u(x_i, y_k) = \mathcal{O}(h^2), \quad i,k = 1,\dots,N_h - 1.$$

4.6. Dominios con frontera curvada

Ahora consideramos el caso donde G es un dominio abierto, acotado y convexo, con una frontera continua ∂G. Sobre G podemos definir una malla rectangular con Δx y Δy como largo de los lados de cada rectángulo. Por simplicidad, usaremos una malla cuadrática G_h con $\Delta x = \Delta y = h$.

Los puntos del borde de la malla, ∂G_h, no van en general pertenecer a ∂G. Entonces tenemos que construir el conjunto de los puntos ∂G_h, que forman el borde numérico.

Estrella o molécula:



4.6. Dominios con frontera curvada

El conjunto de todos los puntos de la malla que son puntos centrales de estrellas que enteramente pertenecen a $\bar{G}$ son la malla G_h.

El conjunto ∂G_h de los puntos de borde está formado por todos los puntos de la malla que pertenecen a estrellas completamente contenidas en $\bar{G}$, pero que no son puntos centrales de tales estrellas.

Espacio ad-hoc:

4.6. Dominios con frontera curvada

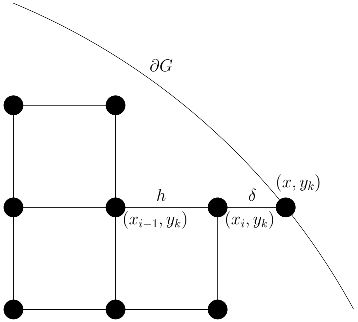
Ahora podemos resolver numéricamente el problema (4.9) con el mismo método numérico usado anteriormente, donde exigimos que

$$u_{rs}^{h} = 0 \quad \text{para } (x_r, y_s) \in \partial G_h.$$

Estos valores de frontera causan un error si $(x_r, y_s) \notin \partial G$. Podemos ver fácilmente que estos errores son proporcionales a h, es decir, los valores exactos de borde en los puntos de ∂G_h son del orden de magnitud $\mathcal{O}(h)$.

4.6. Dominios con frontera curvada

Podemos construir valores de frontera de mayor precisión por interpolación lineal:



Puntos co-lineales $(x_{i-1}, y_k) \in G_h$, $(x_i, y_k) \in \partial G_h$ y $(x, y_k) \in \partial G$ para $x > x_i$. Con $x - x_i =: \delta < h$ y usando $u(x, y_k) = 0$ obtenemos

$$u(x_i, y_k) - \frac{\delta}{h+\delta} u(x_{i-1}, y_k) = \frac{h}{h+\delta} u(x, y_k) + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h^2). \tag{4.18}$$

4.6. Dominios con frontera curvada

Despreciando el término $\mathcal{O}(h^2)$, obtenemos la ecuación aproximada

$$u_{ik}^h - \frac{\delta}{h+\delta} u_{i-1,k}^h = 0, \quad (x_i, y_k) \in \partial G_h.$$

El borde ∂G no necesariamente debe ser localizado como en la figura. La interpolación siempre entrega una de las ecuaciones aproximadas

$$\begin{aligned} & u_{ik}^h - \frac{\delta_{ik}}{h+\delta_{ik}} u_{i\pm1,k}^h = 0, \quad u_{ik}^h - \frac{\delta_{ik}}{h+\delta_{ik}} u_{i,k\pm1}^h = 0, \\ & (x_i, y_k), (x_{i\pm1}, y_k), (x_i, y_{k\pm1}) \in G_h, \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $\delta_{ik} \in (0, h)$ es la distancia del punto $(x_i, y_k) \in \partial G_h$ de aquel punto de ∂G que está situado sobre la recta que pasa por (x_i, y_k) y $(x_{i\pm1}, y_k)$ o (x_i, y_k) y $(x_i, y_{k\pm1})$, respectivamente.

En (4.19), ambas cantidades u_{ik}^h y $u_{i\pm1,k}^h$, $u_{i,k\pm1}^h$ son incógnitas, es decir, para cada punto de ∂G_h obtenemos una ecuación adicional.

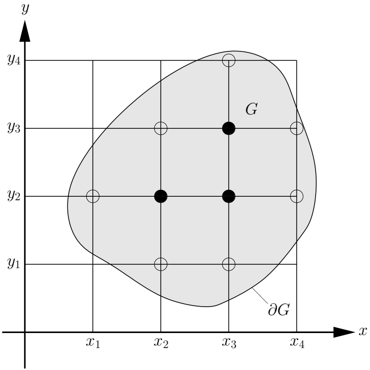
4.6. Dominios con frontera curvada

Si G_h y ∂G_h contienen exactamente M_h y $\tilde{M}_h$ puntos respectivamente, tenemos que resolver ahora un sistema de $M_h + \tilde{M}_h$ ecuaciones.

El esfuerzo adicional nos asegura valores numéricos de frontera de mayor precisión; debido a (4.18) su error es proporcional a h^2. Si agregamos (4.19), la matriz del sistema de ecuaciones lineales que resulta en general ya no es simétrica, pero se puede demostrar que todavía es una M-matriz.

4.6. Dominios con frontera curvada

Ejemplo 4.3 Consideremos el dominio G:



Para cada punto $(x_i, y_k) \in G_h$ ($\bullet$) usamos la ecuación (4.13) (después de la multiplicación con h^2), y para cada punto $(x_i, y_k) \in \partial G_h$ ($\circ$), usamos una versión de (4.19).

4.6. Dominios con frontera curvada

Ejemplo 4.1 (continuación) La discretización entrega aquí

$$\boldsymbol{A}(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-\delta_{21}}{h+\delta_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-\delta_{12}}{h+\delta_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-\delta_{31}}{h+\delta_{31}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\delta_{23}}{h+\delta_{23}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\delta_{42}}{h+\delta_{42}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\delta_{43}}{h+\delta_{43}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\delta_{34}}{h+\delta_{34}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^h = \begin{pmatrix} u_{21}^h \\ u_{12}^h \\ u_{31}^h \\ u_{22}^h \\ u_{32}^h \\ u_{23}^h \\ u_{42}^h \\ u_{33}^h \\ u_{43}^h \\ u_{34}^h \end{pmatrix}.$$

Como $0 \leqslant \delta_{ik} < h$, la matriz $\boldsymbol{A}(h)$ es una L-matriz debilmente diagonaldominante con dominancia diagonal fuerte, por ejemplo, en la fila 1. La matriz es irreducible y por lo tanto, una M-matriz.