UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD
CÁLCULO III (525221)

1. Derivadas en $\mathbb{R}^n$

Definición 1 (Derivada Direccional). Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{x_0} \in A$. Definimos la derivada direccional de f en $\mathbf{x_0}$ en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ unitaria por:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\left(\mathbf{x_0}\right) := \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x_0} + h\hat{\mathbf{u}}\right) - f\left(\mathbf{x_0}\right)}{h}.$$

Observaciones.

1. **Derivada Parcial**: derivada direccional en la dirección $\mathbf{e_i}$ asociada a la componente x_i, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right) := \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\mathbf{x_0} + h\mathbf{e_i}\right) - f\left(\mathbf{x_0}\right)}{h}, \quad \mathbf{x_0} \in A.$$

Definición 2 (Derivada de Segundo Orden). Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{x_0} \in A$. Si existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ para algún $i = 1, \ldots, n$, entonces la derivada de segundo orden de f en $\mathbf{x_0}$ con respecto a la x_j coordenada esta dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right)\right) := \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x_0} + h\mathbf{e_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right)}{h}.$$

Definición 3 (Funciones de Clase $\mathcal{C}^n$). Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Una función f es de clase $\mathcal{C}^n$ si todas sus derivadas hasta el orden n son continuas en $\mathbb{R}^n$.

Lema 1 (de Schwarz). Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sí $f \in \mathcal{C}^2\left(A\right)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(\mathbf{x_0}\right), \quad \forall \mathbf{x_0} \in A.$$

Observaciones.

1. **Gradiente**: $\nabla f\left(\mathbf{x_0}\right) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(\mathbf{x_0}\right), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\left(\mathbf{x_0}\right), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\left(\mathbf{x_0}\right)\right), \quad \mathbf{x_0} \in A$.

2. **Laplaciano**: Si $f \in \mathcal{C}^2\left(A\right)$, $\triangle f\left(\mathbf{x_0}\right) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\mathbf{x_0}\right), \quad \mathbf{x_0} \in A$.

2. Diferenciabilidad

Definición 4 (Diferenciabilidad). Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x_0} \in A$. f es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x_0}\right)$ existe $\forall i = 1, \ldots, n$ y

$$\lim_{\mathbf{h}\to\theta} \frac{f\left(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}\right) - df\left(\mathbf{x_0}\right)\cdot \mathbf{h} - f\left(\mathbf{x_0}\right)}{\left\|\mathbf{h}\right\|} = 0.$$

Notar que $\mathbf{h}$ es un vector de n componentes.

De la definición anterior se desprenden algunos elementos importantes:

1. **Diferencial** para $n > 1$ y $m = 1$: $df(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0})$.
2. **Diferencial** para $n > 1$ y $m > 1$: $df(\mathbf{x_0}) = \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$.
3. **Plano Tangente**: $z = f(\mathbf{x_0}) + df(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
4. **Buena Aproximación Afín**: $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + df(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 5 (Matriz Jacobiana). Sea $F : A \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ y $\mathbf{x_0} \in A$. Si existen las derivadas parciales de las f_i en $\mathbf{x_0}$, entonces la matriz jacobiana se define por:

$$df(\mathbf{x_0}) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x_0}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

y su determinante se conoce como Jacobiano.

Observaciones.

1. F es diferenciable en $\mathbf{x_0} \iff \forall i = 1, \ldots, n$, f_i es diferenciable en $\mathbf{x_0}$.
2. Sí f es diferenciable en $\mathbf{x_0} \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbf{x_0}$
3. Sí f es diferenciable en $\mathbf{x_0} \Longrightarrow \exists\ \nabla f(\mathbf{x_0})$.
4. Sí $f \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow f$ es diferenciable en $\mathbf{x_0}$.
5. Sí f es diferenciable $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$, con $\hat{\mathbf{u}}$ una dirección de $\mathbb{R}^n$.
6. Sí f es diferenciable en $\mathbf{x_0} \Longrightarrow$ el máximo valor de crecimiento de f se obtiene en la dirección de $\hat{\mathbf{u}} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{x_0})}{\|\nabla f(\mathbf{x_0})\|}$.