UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

# Elementos Finitos (521537)

## Evaluación 2

El objetivo de esta evaluación es el de introducir el interpolante de Clément para funciones no necesariamente continuas, para después aplicarlo al desarrollo de un estimador de error a posteriori.

Considere el siguiente problema: *Hallar* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{en} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ y $\Omega$ es un subconjunto abierto, acotado, conexo, de frontera poligonal de $\mathbb{R}^2$. La formulación variacional continua asociada a $(P)$ está dada por: *Hallar* $u \in H := H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in H, \tag{1}$$

donde la forma bilineal $a$ y el funcional lineal $F$ están definidos por:

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \forall u, v \in H, \\ F(v) &:= \int_\Omega f \, v \, dx \qquad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_h$ una familia regular de triangulaciones compuesta de triángulos (2-simplex) y sea, para cada triagulación $\mathcal{T}_h$ de dicha familia, $H_h$ el espacio de elementos finitos definido por:

$$H_h := \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \; : \; v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_h = 0 \;\text{ en }\; \partial\Omega\}.$$

Utilizando $H_h$ se puede definir el problema discreto: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que*

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h. \tag{2}$$

Para cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ se denota por $\mathcal{E}(T)$ y $\mathcal{N}(T)$ al conjunto de sus lados y vértices, respectivamente. Sea

$$\mathcal{E}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(T),$$

es claro que $\mathcal{E}_h$ puede ser descompuesto de la siguiente forma

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,\partial\Omega},$$

donde $\mathcal{E}_{h,\Omega}$ es el conjunto de los lados internos de la triangulación y $\mathcal{E}_{h,\partial\Omega}$ representa al conjunto de lados de la triangulación que están en la frontera de $\Omega$.

Sean $x_j, \; j = 1, 2, \ldots, N$ los vértices de los elementos de la triangulación $\mathcal{T}_h$ y sea $\omega_j$ el conjunto

$$\omega_j := \bigcup_{x_j \in \mathcal{N}(T')} T'.$$

Si $T \in \mathcal{T}_h$ y $F \in \mathcal{E}_h$, se definen las siguientes vecindades discretas:

$$\tilde{\omega}_T := \bigcup_{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset} T', \qquad \tilde{\omega}_F := \bigcup_{\mathcal{N}(F) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset} T',$$

donde $\mathcal{N}(F)$ es el conjunto de vértices del lado $F$.

Usando la regularidad de la familia de triangulaciones, se demuestra que existen constantes positivas $C_i,\ i = 1, \ldots, 5$, independientes de $h$, tales que

$$\left\{\begin{array}{lll} C_1 h_F \leq h_T & \leq C_2 h_F & \text{para todo } F \in \mathcal{E}(T) \\ C_3 h_{T'} \leq h_T & \leq C_4 h_{T'} & \text{para todo } T, T' \in \mathcal{T}_h \text{ con } \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset \\ \operatorname{card}(\omega) & \leq C_5, & \text{donde } \omega \text{ puede ser } \omega_j,\, \tilde{\omega}_T,\, \tilde{\omega}_F. \end{array}\right. \tag{3}$$

Sea $v \in L^2(\Omega)$ dada. Si $x_j \notin \partial\Omega$ se denota por $P_j v$ la proyección $L^2$ de $v$ sobre $\mathbb{P}_0(\omega_j)$, i.e. $P_j v$ es una función constante definida sobre $\omega_j$ tal que

$$\int_{\omega_j} (v - P_j v)\, q\, dx = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_0(\omega_j).$$

Es claro que

$$P_j v = \frac{1}{|\omega_j|} \int_{\omega_j} v\, dx.$$

Además se puede demostrar el siguiente resultado de aproximación: Existe una constante positiva $C$, independiente de $h$, tal que

$$\|v - P_j v\|_{0,T} \leq C h_T |v|_{1,\omega_j} \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \forall x_j \in \mathcal{N}(T).$$

Denotemos por $\varphi_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$ las funciones de base de $H_h$, es decir

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Definimos el *operador de interpolación de Clément* $I_h : H \to H_h$ por

$$I_h v := \sum_{j=1}^{N} (P_j v)\, \varphi_j.$$

1. **Teorema Local de Trazas**. Dado $T \in \mathcal{T}_h$, pruebe que si $v \in H^1(T)$ entonces existe una constante positiva $C$, independientes de $h$, tal que

   $$\|v\|_{0,F}^2 \leq C \left\{ h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 + h_T |v|_{1,T}^2 \right\} \qquad \forall F \in \mathcal{E}(T).$$

   (**Ind.** Puede usar la continuidad del operador traza $\gamma_0$, realizar los cálculos en el elemento de referencia y aplicar las desigualdades (3) ).

2. Demuestre que existe una constante positiva $C$, independiente de $h$, tal que

   $$\|v - P_j v\|_{0,F} \leq C h_F^{1/2} |v|_{1,\omega_j} \qquad \forall F \in \mathcal{E}_h, \forall x_j \in \mathcal{N}(F).$$

3. **Teorema (Clément).** Sea $v \in L^2(\Omega)$. Para $T \in \mathcal{T}_h$ y $F \in \mathcal{E}_h$ existen constantes positivas $C$ y $\tilde{C}$, independientes de $h$, tales que

   $$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{0,T} &\leq C h_T |v|_{1,\tilde{\omega}_T} \\ \|v - I_h v\|_{0,F} &\leq \tilde{C} h_F^{1/2} |v|_{1,\tilde{\omega}_F}. \end{aligned}$$

   (**Ind.** Si $x_1,\ x_2,\ x_3$ son los nodos de $T$, demuestre que $\|v - I_h v\|_{0,T} \leq C^* \sum_{j=1}^{3} \|v - P_j v\|_{0,T}$, con $C^* > 0$ independiente de $h$. Puede usar el hecho que $\sum_{j=1}^{3} \varphi_j = 1$ sobre $T$ y que $\|\varphi_j\|_{\infty,T} \leq 1$. Lo mismo, con pequeños cambios, se puede aplicar para los lados $F \in \mathcal{E}_h$).

4. Sea $R_h : H \to \mathbb{R}$ el funcional lineal y continuo (residuo) definido por

   $$R_h(v) := \int_\Omega f\, v\, dx - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v\, dx \qquad \forall v \in H,$$

   donde $u_h$ es la solución de (2). Demuestre que $R_h(v_h) = 0$ para todo $v_h \in H_h$.

5. Demuestre que

$$R_h(v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f v\, dx - \sum_{F\in\mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_F \left[\boldsymbol{n}_F \cdot \nabla u_h\right]_F v\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{n}_F$ es el vector normal unitario exterior al lado $F$ y $[\psi]_F$ es el salto de $\psi$ a lo largo de $F$, i.e.

$$[\psi]_F(x) := \lim_{t\to 0^+} \psi(x + t\boldsymbol{n}_F) - \lim_{t\to 0^+} \psi(x - t\boldsymbol{n}_F) \quad \forall x \in F.$$

(**Ind.** Use el hecho que $a(u - u_h, v) = R_h(v) \quad \forall v \in H$, e integración por partes.)

6. Sea

$$\eta_T := \left\{ h_T^2 \, \|f\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F\in\mathcal{E}(T)\cap\mathcal{E}_{h,\Omega}} h_F \, \| \left[\boldsymbol{n}_F \cdot \nabla u_h\right]_F \|_{0,F}^2 \right\}^{1/2}$$

Definimos el estimador a posteriori residual $\eta$ por

$$\eta := \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}.$$

Si $u$ y $u_h$ son las soluciones de (1) y (2), respectivamente, demuestre que existe una constante positiva $C$, independiente de $h$, tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C\eta.$$

(**Ind.** Use la coercividad de $a$.)

**Nota:** La preguntas 1 y 3 valen dos puntos, el resto 1 punto cada una.

Concepción, 04 de Julio de 2017.
RAD/rad.