UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2 (MAT 521218)

Tiempo: 110 minutos

Problema 1. Sobre un plano horizontal, se tiene un resorte empotrado a la pared en uno de sus extremos, y unido a una masa de 1 Kg del otro extremo, de modo tal que el resorte se estiraría 50 cm si se aplicase una fuerza horizontal de 2 N al sistema. Inicialmente ($t = 0$ seg.), el sistema masa-resorte se encuentra en reposo en su posición de equilibrio, comenzando el movimiento por acción de una fuerza externa $g(t) = \text{sen}(t)[H(t) - H(t-2\pi)]$ N. Considerando que la fuerza de fricción es despreciable, determine la posición de la masa (respecto de la posición de equilibrio), en todo instante. ¿Qué sucede con el sistema masa-resorte después de los 2π segundos?

Desarrollo

Sea $y(t)$: posición (en metros) de la masa, respecto de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte, en el instante t (en segundos). La ecuación diferencial que gobierna al fenómeno es de la forma:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = g(t) \quad t \geq 0\,,$$

donde m, c, y k denotan la masa, coeficiente de fricción y constante del resorte, respectivamente. Del enunciado se deduce que $m = 1\,[\text{Kg}]$ y $c = 0\,[\text{N s/m}]$. Por otra parte, se tiene, aplicando la ley de Hooke:

$$2 = k\,\Delta y = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 4\,[N/m]\,.$$

De esta manera, el movimiento descrito por el sistema masa-resorte está gobernado por el PVI:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = g(t) = \text{sen}(t)\Big(H(t) - H(t-2\pi)\Big)\,, \\ y(0) = 0\,, y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Resolviendo el PVI: aplicando transformada de Laplace, y haciendo uso de la linealidad así como del hecho que $\text{sen}(t) = \text{sen}(t-2\pi)$, tenemos

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) + 4\mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[\text{sen}(t)\,H(t)](s) - \mathcal{L}[\text{sen}(t-2\pi)\,H(t-2\pi)]\,,$$

y teniendo en cuenta propiedades de la transformada de Laplace, se deduce que

$$(s^2+4)\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\,.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace y la segunda propiedad de traslación, resulta:

$$y(t) = f(t) - f(t-2\pi)H(t-2\pi)\,, \tag{1}$$

con $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right](t)$.
Determinando $f(t)$**:** aplicando fracciones parciales, se verifica que

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right),$$

de donde

$$f(t)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right](t)=\frac{1}{3}\text{sen}(t)-\frac{1}{6}\text{sen}(2t)\,.$$

Así, reemplazando en (1) y reduciendo, se tiene que la posición de la masa, respecto de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte, está dado por

$$y(t)=\left(\frac{1}{3}\text{sen}(t)-\frac{1}{6}\text{sen}(2t)\right)\Big(1-H(t-2\pi)\Big)=\begin{cases}\frac{1}{3}\text{sen}(t)-\frac{1}{6}\text{sen}(2t) & 0\le t\le 2\pi\,,\\ 0 & t>2\pi\,,\end{cases}$$

de donde se deduce que después de los 2π segundos (esto es para $t>2\pi$), el sistema queda en reposo, en su posición de equilibrio.

Problema 2. Resuelva el siguiente PVI

$$\begin{aligned} y''-4y'+5y &= \delta(t-1)+\delta(t-7)+\mathrm{e}^{2t}\\ y(0)&=1\\ y'(0)&=2\end{aligned}$$

Solución:

Aplicando Transformada de Laplace:

$$s^2\mathcal{L}[y(t)]-sy(0)-y'(0)-4s\mathcal{L}[y(t)]+4y(0)+5\mathcal{L}[y(t)]=\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-7s}+\frac{1}{(s-2)}$$

$$(s^2-4s+5)\mathcal{L}[y(t)]-s+2=\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-7s}+\frac{1}{(s-2)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[y(t)]=\frac{\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-7s}+s-2}{(s^2-4s+5)}+\frac{1}{(s-2)(s^2-4s+5)}$$

$$\mathcal{L}[y(t)]=\frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s-2)^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{-7s}}{(s-2)^2+1}+\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1}+\frac{1}{(s-2)((s-2)^2+1)}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t)=H(t-1)\Big(\mathrm{e}^{2t}\text{sen}(t)\Big)\Big|_{t-1}+H(t-7)\Big(\mathrm{e}^{2t}\text{sen}(t)\Big)\Big|_{t-7}+\mathrm{e}^{2t}\cos(t)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right](t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{((s-2)^2+1)}\right](t)$$

$$y(t) = H(t-1)\mathrm{e}^{2(t-1)}\mathrm{sen}(t-1) + H(t-7)\mathrm{e}^{2(t-7)}\mathrm{sen}(t-7) + \mathrm{e}^{2t}\cos(t) + \mathrm{e}^{2t} * \mathrm{e}^{2t}\mathrm{sen}(t)$$

Por otro lado

$$\mathrm{e}^{2t} * \mathrm{e}^{2t}\mathrm{sen}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{2(t-u)}\mathrm{e}^{u} sen(u)du = \mathrm{e}^{2t}\int_0^t \mathrm{sen}(u)du = \mathrm{e}^{2t}(-\cos(u))|_0^t = \mathrm{e}^{2t}(1-\cos(t))$$

Luego:

$$y(t) = H(t-1)\mathrm{e}^{2(t-1)}\mathrm{sen}(t-1) + H(t-7)\mathrm{e}^{2(t-7)}\mathrm{sen}(t-7) + \mathrm{e}^{2t}\,.$$

Problema 3. (i) Se tienen dos tanques de agua A y B, el primero con 60 lt de agua pura y el segundo con 150 lt de agua con sal a una concentración de 0,5 Kg/lt. Ambos tanques están conectados entre sí por tubos apropiados; 4 lt/min fluyen del tanque A al tanque B, y 2 lt/min del tanque B al tanque A. Desde una fuente externa al tanque A, entran 6 lt/min de mezcla al 0,5 Kg/lt de sal ; además del tanque B fluye al externo (se pierden) 2 lt/min de solución. Si ambos tanques tienen una capacidad de 500 lt, escriba el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan la masa de sal en cada tanque , hasta el instante del derrame. (No se pide resolver).
(ii) Transforme la ecuación escalar $x'''(t) - t^2x'' + 2x'(t) - tx(t) = \sqrt{t}$ en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno.

SOLUCION.

i) Sean $x(t)$ la masa de sal en el tanque A e $y(t)$ la masa de sal en el tanque B.

Observe que el volumen en el tanque B es siempre constante en 150 lt; en cambio en el tanque A la variación de volumen es $\Delta V = 4$, de donde $V(t) = 4t + 60$. Por lo tanto el derrame en el tanque A inicia a los 110 minutos. Así, el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x'(t) = 3 + \frac{2}{150}y(t) - \frac{4}{4t+60}x(t) \\ y'(t) = \frac{4}{4t+60}x(t) \; - \; \frac{4}{150}y(t) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 75 \end{cases}$$

ii) $\left.\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x_1' \\ x_3 = x_2' \end{array}\right\}$

Por lo tanto

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = t^2x_3 - 2\,x_2 + t\,x_1 + \sqrt{t}. \end{cases}$$

Problema 4. Usando valores propios determine la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} x'(t) &= \quad x(t), \\ y'(t) &= -2\,z(t) \\ z'(t) &= \quad 2\,y(t) \end{cases}$$

con $x(0) = 2$, $y(0) \,=\, z(0) \,=\, 1$.

SOLUCION.

De $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, se obtiene que: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2i, \quad \lambda_3 = -2i$. Además resulta que $\{(1,0,0)^T\}$ es base del espacio propio S_{λ_1}, $\{(0,1,-i)^T\}$ es base del espacio propio S_{λ_2} . De este modo las soluciones del sistema dado son

$$x_1(t) \,=\, \mathrm{e}^t(1,0,0)^T; \quad x_2(t) \,=\, Re\Big(\mathrm{e}^{2ti}(0,1,-i)^T\Big); \quad x_3(t) \,=\, Im\Big(\mathrm{e}^{2ti}(0,1,-i)^T\Big)$$

de donde

$$x_2(t) \,=\, (0, \cos(2t), \mathrm{sen}(2t))^T; \quad x_3(t) \,=\, (0, \mathrm{sen}(2t), -\cos(2t))^T$$

Así, la solución general del sistema de EDO, es:

$$x(t) \,=\, c_1\mathrm{e}^t(1,0,0)^T \,+\, c_2(0, \cos(2t), \mathrm{sen}(2t))^T \,+\, c_3(0, \mathrm{sen}(2t), -\cos(2t))^T$$

para c_1, c_2, y c_3 constantes reales arbitrarias. Finalmente , teniendo en cuenta las condiciones iniciales (para $t = 0$), las constantes se determinan de

$$(2,1,1)^T \,=\, c_1(1,0,0)^T \,+\, c_2(0,1,0)^T \,+\, c_3(0,0,-1)^T$$

de donde $c_1 \,=\, 2$,$c_2 \,=\, 1$, $c_3 \,=\, -1.$; y así , la única solución del PVI dado, es :

$$x(t) \,=\, 2\mathrm{e}^t(1,0,0)^T \,+\, (0, \cos(2t), \mathrm{sen}(2t))^T \,-\, (0, \mathrm{sen}(2t), -\cos(2t))^T \,,$$

es decir

$$x(t) = (2\mathrm{e}^t, \cos(2t) - \mathrm{sen}(2t), \mathrm{sen}(2t) + \cos(2t))^T \,.$$

RBP/FLG/HMM/JMS//jms.
17/06/2008.