MAT1610 - Clase 33

Regla de sustitución

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

03 de junio del 2024

Objetivo

- Calcular algunas integrales.

Ejemplo 1: Calcule

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Regla de sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Ejemplo 2: Calcule

$$\int x^3\, cos(x^4+2)dx$$

Ejemplo 3: Calcule

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

Ejemplo 4: Calcule

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Ejemplo 5: Calcule

$$\int e^{5x}\, dx$$

Ejemplo 6: Calcule

$$\int x^5\sqrt{1+x^6}\,dx$$

Ejemplo 7: Calcule

$$\int tan(x)\,dx$$

Ejemplo 8: Calcule

$$\int x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Solución:

$$\int x^4\cdot x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Luego, $u=1+x^2$, entonces $du=2xdx$ y $x^4=(u-1)^2$. Entonces,

$$=\int (u-1)^2\sqrt{u}\,\frac{1}{2}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int (u^2-2u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Regla de sustitución para integrales definidas

Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

Regla de sustitución para integrales definidas

Demostración:

Sea F una antiderivada de f. Entonces, $F(g(x))$ es antiderivada de $f\big(g(x)\big)g'(x)$ de modo que, de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental, tenemos

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \big[F\big(g(x)\big)\big]\Big|_a^b = F\big(g(b)\big) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el TFC 2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(u)]\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F\big(g(b)\big) - F(g(a))$$

Ejemplo 9: Calcule

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

Ejemplo 10: Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$$

Ejemplo 11: Calcule

$$\int_1^e \frac{ln(x)}{x}\,dx$$

Integrales en funciones simétricas

Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$

a) Si f es par, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

b) Si f es impar, entonces

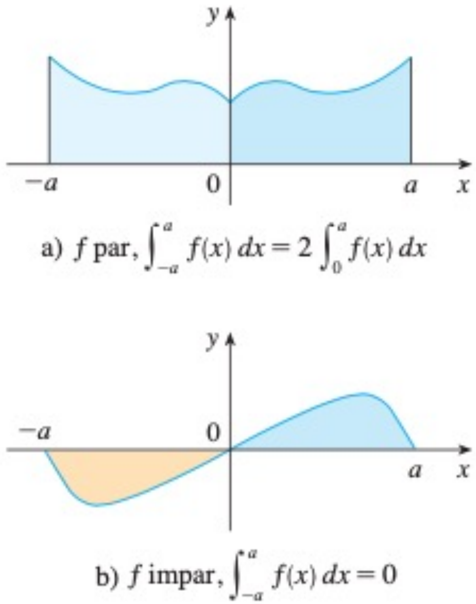
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Función es par

$$f(-x) = f(x)$$

Función es impar

$$f(-x) = -f(x)$$



Integrales en funciones simétricas

Demostración:

Se puede separar la integral en dos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha hacemos la sustitución $u = -x$. Entonces, $du = -dx$ y cuando $x = -a, u = a$. Por consiguiente,

$$-\int_{0}^{-a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du$$

Luego,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Integrales en funciones simétricas

Demostración:

a) Si la función es par, $f(-u) = f(u)$, así que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

b) Si la función es impar, $f(-u) = -f(u)$, así que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Ejemplo 12: Calcule

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\, dx$$

Ejemplo 13: Calcule

$$\int_{-1}^{1} \frac{tan(x)}{1 + x^2 + x^4}\, dx$$

Conclusión

- Calcular algunas integrales

Libro guía

- Págs. 407-413.