

PL[8] -CÁLCULO IV (MAT 225212 & MAT 225252)

Tema: Integración Compleja: Segunda Parte.

Para cualquier $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ se denota la esfera de radio r y centro a por

$$S_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

1. Evaluar las siguientes integrales fundamentando sus cálculos con los teoremas respectivos.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \oint_{S_1(0)} \frac{\cos(z)}{z} dz & \text{(P)} \oint_{S_{\frac{1}{2}}(i)} \frac{\text{Ln}(z)}{-z+i} dz & \text{(P)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_2(1)} \frac{z^5 - 1}{(z+3i)(z-2)} dz \\ \text{(b)} \oint_{S_3(0)} \frac{e^{z^2} \cos(z)}{z-i} dz & \text{(c)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_3(1)} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^4} dz & \text{(d)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_2(1)} \frac{1}{z^2 - 5z + 4} dz \end{array}$$

2. Sean $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3 + i$ y la polygonal positivamente orientada $\Gamma = [z_1, z_2, z_3, z_1]$. Evaluar

$$a = \oint_{\Gamma} \frac{z^{19}}{(z-1)^{19}} dz \quad \wedge \quad \text{(P)} \quad b = \oint_{\Gamma} \frac{z^{19}}{(z-1)^{20}} dz$$

3. Sea γ una curva positivamente orientada simple y cerrada que circunvala a $z = 0$ y $z = \pi$. Evaluar

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^3} dz & \text{(b)} \oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z^2 - \pi^2)^2} dz & \text{(P)} \oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^2(z-\pi)} dz \end{array}$$

4. Sea γ una curva positivamente orientada, simple que encierra a $z = -3$ y $z = 1$ pero excluye a $z = 0$. Evaluar

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)^3(z+3)}$$

5. Sea γ una curva negativamente orientada que solo incluye dos ceros de $d(z) = z(z^2 + 1)$. Evaluar para los tres casos

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} \oint_{\gamma} \frac{z + \cos(\pi z)}{d(z)} dz & \text{(a)} \oint_{\gamma} \frac{z + \sin(\pi z)}{d(z)} dz \end{array}$$

6. Evaluar las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \oint_{S_2(0)} \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1} dz & \text{(P)} \oint_{S_{\frac{3}{2}}(1)} \frac{1}{z^4 - 1} dz & \text{(d)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_2(1)} \frac{1}{z^2 - z} dz \\ \text{(b)} \oint_{S_{\frac{3}{2}}(0)} \frac{1}{z^3 - 3z + 2} dz & \text{(c)} \oint_{S_2(0)} \frac{1}{z^4 - 1} dz & \text{(P)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_{\frac{5}{2}}(1)} \frac{1}{z^3 + 2z^2 - z - 2} dz \end{array}$$