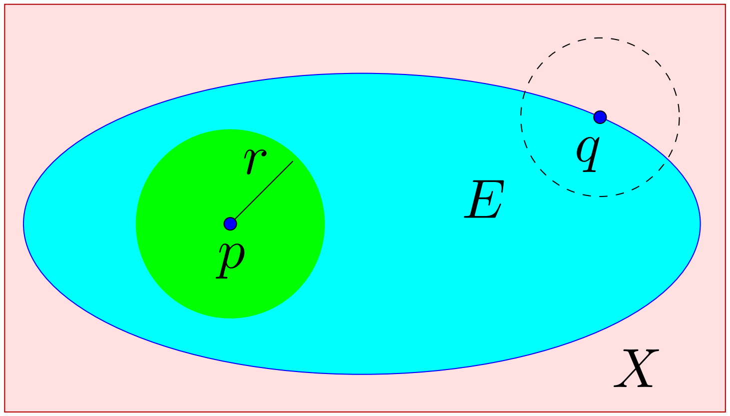
Conjuntos abiertos y cerrados.

- Conjuntos abiertos.
- Puntos de acumulación.
- Conjuntos cerrados.
- Clausura de un conjunto.

Conjuntos abiertos.

A lo largo de la clase de hoy, **d es una métrica en X y $E \subset X$.**

Def.: Un punto $p \in E$ es un **punto interior** de E si $\exists r > 0 : B_r(p) \subset E$.

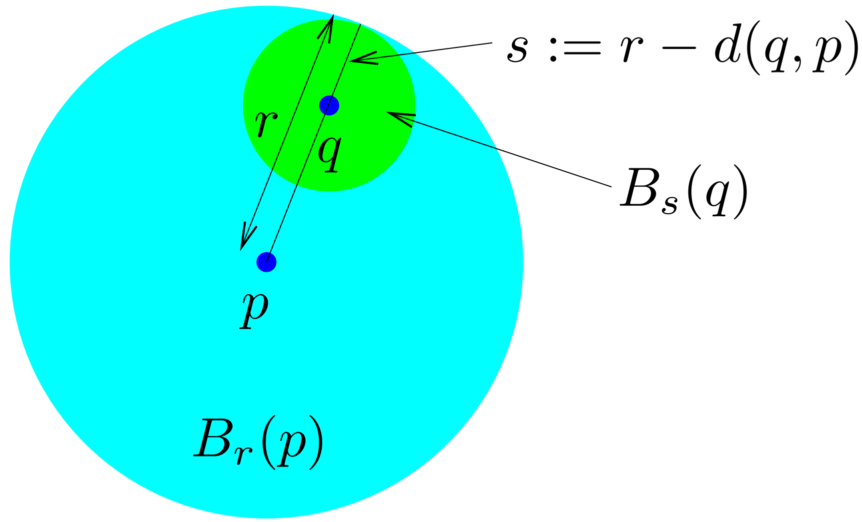


- p es un punto interior;
- q no es un punto interior.

Def.: Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

Ejemplo: El espacio métrico X es abierto pues, $\forall p \in X$, $\forall r > 0$,
$B_r(p) := \{q \in X : d(q,p) < r\} \subset X$.

Teor.: Las bolas (abiertas) son conjuntos abiertos.



Dem.: Sean $p \in X$ y $r > 0$. Veremos que $B_r(p)$ es abierto.

Para ello, veremos que $\forall q \in B_r(p)$, q **es un punto interior de** $B_r(p)$.

Sea $q \in B_r(p) \implies d(q,p) < r \implies r - d(q,p) > 0.$

Entonces, sea $s := r - d(q,p) > 0.$ **Veremos que** $B_s(q) \subset B_r(p)$.

Sea $x \in B_s(q) \implies d(x,q) < s = r - d(q,p) \implies d(x,q) + d(q,p) < r$

$\implies d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p) < r \implies x \in B_r(p).$

Entonces, $\forall q \in B_r(p)$, $\exists s > 0 : \ B_s(q) \subset B_r(p)$

$\implies q$ punto interior de $B_r(p) \implies B_r(p)$ abierto. $\square$

Puntos de acumulación.

Def.: Sea $p \in X$. p es un **punto de acumulación** de E, si $\forall r > 0$, $B_r(p)$ contiene puntos de E distintos de p; vale decir, si

$$\boxed{\forall r > 0, \ \exists q \neq p : \ q \in B_r(p) \cap E.}$$

Def.: Sea $p \in E$. p es un **punto aislado** de E, si no es un punto de acumulación.

Teor.: p es un punto aislado de E si y sólo si $\exists r > 0 : \ B_r(p) \cap E = \{p\}$.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea p un punto aislado de E

$\Longrightarrow$ $p \in E$, pero p no es punto de acumulación de E

$\Longrightarrow$ $\exists r > 0 : \ \forall q \neq p, \ q \notin B_r(p) \cap E$

$\Longrightarrow$ $B_r(p) \cap E = \{p\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $p \in X$ tal que $\exists r > 0 : \ B_r(p) \cap E = \{p\}$

$\Longrightarrow$ $p \in E$, pero no es punto de acumulación de E

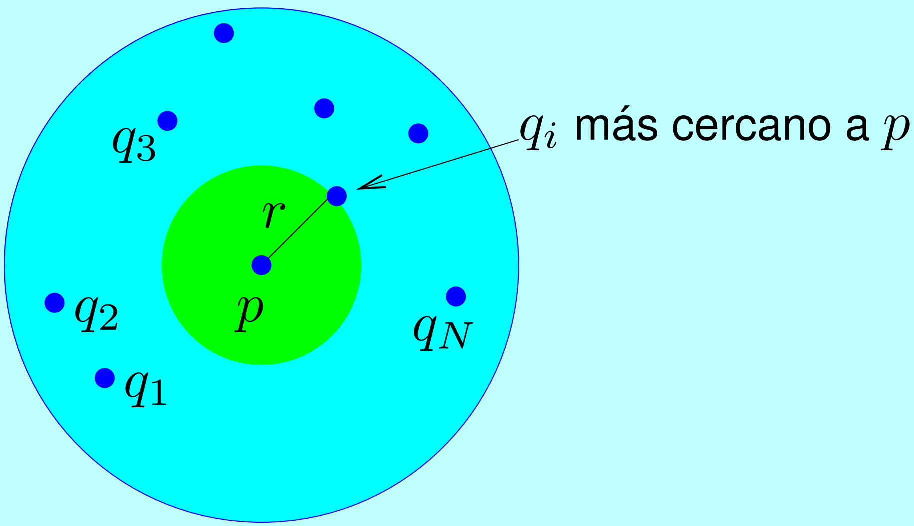
$\Longrightarrow$ p punto aislado de E. $\square$

Teor.: Si p es un punto de acumulación de E, toda bola centrada en p contiene infinitos puntos de E.

Dem.: Sea p un punto de acumulación de E.

Por el absurdo, **supongamos que hay una bola centrada en p que sólo contiene finitos puntos de E.**

Sean $q_1, \ldots, q_N$ los puntos de E distintos de p que caen en esa bola.



Sea $r := \min\limits_{1 \leq i \leq N} d(q_i, p) > 0 \implies d(q_i, p) \geq r \quad \forall i = 1, \ldots, N$

$\implies q_1, \ldots, q_N \notin B_r(p)$.

Por lo tanto $B_r(p)$ no contiene puntos de E distintos de p.

Entonces p **no es un punto de acumulación de E.** $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

Conjuntos cerrados.

Def.: Un conjunto es **cerrado** si contiene todos sus puntos de acumulación.

Ejemplo: El espacio métrico X es cerrado pues contiene todos sus puntos, sean de acumulación o no.

Las nociones de abierto y cerrado no son excluyentes: hay conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo (por ejemplo el espacio métrico X), así como hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ **Ej.**).

En cambio, las nociones de abierto y cerrado son **complementarias** en el sentido del siguiente teorema.

Recordemos que si $E \subset X$, el **complemento** de E (en X) es el conjunto

$$E^c := X \setminus E := \{x \in X : x \notin E\}.$$

Teor.: Un conjunto es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea E abierto. **Demostraremos que E^c es cerrado.**

Sea x punto de acumulación de E^c

$\Longrightarrow \forall r > 0, \ \exists q \neq x : \ q \in B_r(x) \cap E^c$

$\Longrightarrow \forall r > 0, \ B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset \Longrightarrow \forall r > 0, \ B_r(x) \not\subset E$

$\Longrightarrow$ x no es punto interior de E, que es abierto

$\Longrightarrow x \notin E \Longrightarrow x \in E^c \Longrightarrow E^c$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea E tal que E^c es cerrado. **Demostraremos que E es abierto.**

Sea $x \in E \Longrightarrow x \notin E^c$, que que hipótesis es cerrado

$\Longrightarrow$ x no es punto de acumulación de E^c

$\Longrightarrow \exists r > 0 :$ $B_r(x) \cap E^c$ no contiene puntos distintos de x ; pero $x \notin E^c$

$\Longrightarrow B_r(x) \cap E^c = \emptyset \Longrightarrow B_r(x) \subset E \Longrightarrow E$ es abierto. $\square$

Corol.: Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$

Teor.:

- Si G_α es abierto $\forall \alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es abierto.
- Si F_β es cerrado $\forall \beta \in B$, entonces $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es cerrado.
- Si $G_1, \ldots, G_N$ son abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^{N} G_i$ es abierto.
- Si $F_1, \ldots, F_M$ son cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{M} F_i$ es cerrado.

Dem.: **Ej.**

Sin embargo, como se ve en los ejemplos que siguen:

- **intersección de infinitos abiertos no tiene por que ser abierto;**
- **unión de infinitos cerrados no tiene por que ser cerrado.**

Ejemplos: En $\mathbb{R}$,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \{0\} \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\tfrac{1}{n}, 1\right] = (0, 1] \,.$$

Ej. Demuestra esas dos igualdades.

Clausura de un conjunto.

Def.: La **clausura** de E es el conjunto $\overline{E} := E \cup E'$, donde E' denota el conjunto de puntos de acumulación de E.

Prop.: $x \in \overline{E} \iff \forall r > 0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

Dem.: $\boxed{\implies}$ Sea $x \in \overline{E}$. Entonces, (i) $x \in E$ o (ii) $x \in E'$.

(i) $x \in E \implies \forall r > 0,\ x \in B_r(x) \cap E \implies \forall r > 0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

(ii) $x \in E' \implies \forall r > 0,\ \exists q \neq x :\ q \in B_r(x) \cap E$

$\implies \forall r > 0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

$\boxed{\impliedby}$ Sea x tal que, $\forall r > 0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Veremos dos casos:

(i) $x \in E$ y (ii) $x \notin E$.

(i) Si $x \in E$, como $E \subset \overline{E}$, entonces $x \in \overline{E}$.

(ii) Si $x \notin E$, como $\forall r > 0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, entonces

$\forall r > 0,\ \exists q \neq x :\ q \in B_r(x) \cap E \implies x \in E' \implies x \in \overline{E}$. $\square$

Teor.: (a) $\overline{E} = E \iff E$ es cerrado.

(b) $\overline{E}$ es cerrado. (Vale decir, de acuerdo a (a), $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.)

(c) Si F es cerrado y $F \supset E$, entonces $F \supset \overline{E}$,

(Vale decir, $\overline{E}$ es el cerrado más pequeño que contiene a E.)

Dem.: (a) $\boxed{\implies}$ $E = \overline{E} = E \cup E' \implies E \supset E' \implies E$ cerrado.

$\boxed{\impliedby}$ E cerrado $\implies E \supset E' \implies \overline{E} = E \cup E' = E$.

(b) **Demostraremos que $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.** Como $\overline{E} \subset \overline{\overline{E}}$, basta ver la otra inclusión.

Sea $x \in \overline{\overline{E}}$. Sea $r > 0$. Por la proposición anterior, $B_r(x) \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Sea $y \in B_r(x) \cap \overline{E}$. Como $B_r(x)$ es abierto, $\exists s > 0 : B_s(y) \subset B_r(x)$.

Como $y \in \overline{E}$, entonces $B_s(y) \cap E \neq \emptyset \implies B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\forall r > 0 : B_r(x) \cap E \neq \emptyset \implies x \in \overline{E} \implies \overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$.

(c) Sea F cerrado tal que $F \supset E$.

Entonces, por la definición de punto de acumulación, $F' \supset E'$.

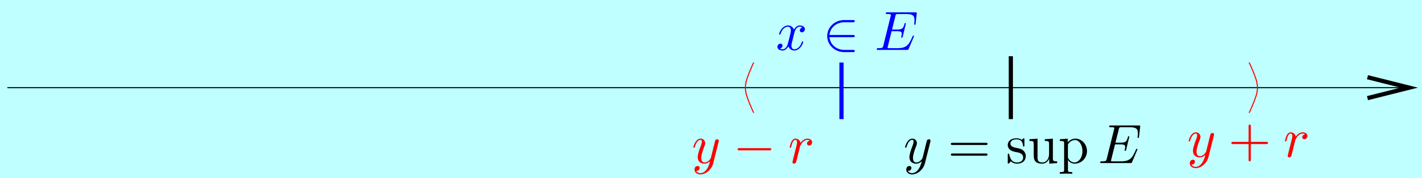
Por lo tanto, $\overline{F} = F \cup F' \supset E \cup E' = \overline{E}$.

Pero F es cerrado. Entonces (a) $\implies F = \overline{F} \supset \overline{E}$. $\square$

Teor.: Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente. Entonces $\sup E \in \overline{E}$.

Dem.: Sea $y := \sup E$. **Veremos que,** $\forall r > 0,\ B_r(y) \cap E \neq \emptyset$.

Sea $r > 0$. Notemos que en $\mathbb{R}$, $B_r(y) = (y - r, y + r)$.



Como $y = \sup E$, entonces, $y - r$ no es cota superior de E

$$\Longrightarrow \exists x \in E : \underbrace{y - r < x \leq y}_{\Longrightarrow\, x \in B_r(y)}$$

$$\Longrightarrow B_r(y) \cap E \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow y \in \overline{E}. \quad \square$$

Corol.: Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y cerrado. Entonces, $\sup E \in E$ y, por lo tanto, E alcanza su máximo: $\max E = \sup E$.

Dem.: Si E es cerrado, $E = \overline{E} \overset{\text{Teor.}}{\Longrightarrow} \sup E \in E$. $\square$

Vale lo análogo para el ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente.