Conjuntos compactos en $\mathbb{R}^k$.

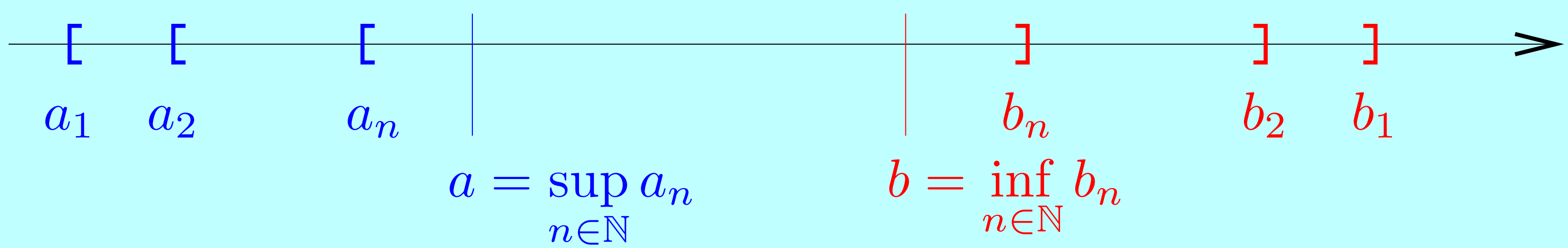
- Sucesiones encajadas de intervalos y cajas.
- Compacidad de las cajas cerradas.
- Teorema de Heine–Borel.
- No numerabilidad de $\mathbb{R}$.
- El conjunto de Cantor.

Sucesiones encajadas de intervalos y cajas.

Teor.: Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión encajada de intervalos cerrados.
Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Dem.: Sean $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Sean $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $b := \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.



Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b] \neq \emptyset$. **Ej.** $\square$

Def.: Una **caja cerrada** en $\mathbb{R}^k$ es un producto cartesiano de intervalos cerrados:

$$R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k].$$

Teor.: Sea $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión encajada de cajas cerradas en $\mathbb{R}^k$.
Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n \neq \emptyset$.

Dem.: Sean $R_n = [a_{n1}, b_{n1}] \times \cdots \times [a_{nk}, b_{nk}]\,,\ \ n \in \mathbb{N}$.

$$R_n \supset R_{n+1} \implies [a_{ni}, b_{ni}] \supset [a_{n+1i}, b_{n+1i}]\,, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Entonces, por el teorema anterior, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_{ni}, b_{ni}] \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, k.$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big([a_{n1}, b_{n1}] \times \cdots \times [a_{nk}, b_{nk}] \big) \\ &= \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_{n1}, b_{n1}]\Big) \times \cdots \times \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_{nk}, b_{nk}]\Big) \neq \emptyset. \quad \square \end{aligned}$$

Compacidad de las cajas cerradas.

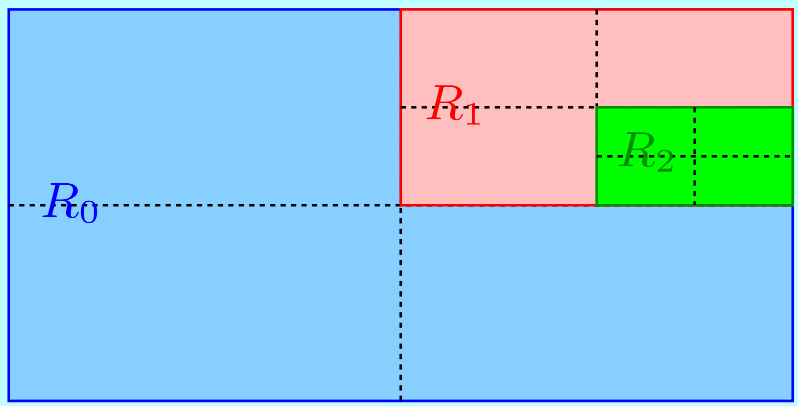
Teor.: Las cajas cerradas en $\mathbb{R}^k$ son compactas.

Dem.: Sean R una caja cerrada en $\mathbb{R}^k$ y $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un cubrimiento por abiertos de R.

Por el absurdo. Supongamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no tiene un subcubrimiento finito de R.

Sean $R_0 := R$ y $\delta := \operatorname{diam} R_0$.

Partimos R_0 en 2^k cajas, todas de diámetro $\frac{\delta}{2}$, como se ve en la figura:



Entonces, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de cada una de las 2^k nuevas cajas y al menos una de ellas no tiene un subcubrimiento finito. Sea R_1 esa caja.

Procediendo recursivamente, como se ve en la figura anterior, obtenemos una sucesión de cajas cerradas $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

- $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n \supset R_{n+1} \implies \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión encajada de cajas cerradas;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de R_n que no tiene un subcubrimiento finito;
- $\operatorname{diam} R_n = \dfrac{\delta}{2^n},\ \ n \in \mathbb{N}.$

Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n \neq \emptyset$. (Teor. ant.)

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$.

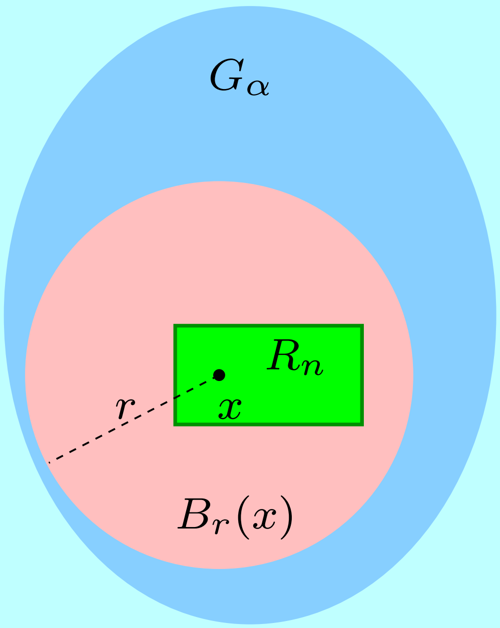
$\implies \ \exists \alpha \in A: \ x \in G_\alpha$.

G_α abierto $\implies \ \exists r > 0: \ B_r(x) \subset G_\alpha$.

Sea $n \in \mathbb{N}: \ \dfrac{\delta}{n} < r \implies \dfrac{\delta}{2^n} < \dfrac{\delta}{n} < r$

$\implies \operatorname{diam} R_n = \dfrac{\delta}{2^n} < r$ y $x \in R_n$

$\implies R_n \subset B_r(x) \subset G_\alpha$. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\square$



Teorema de Heine–Borel.

Teor. [Heine–Borel]: $E \subset \mathbb{R}^k$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Ya lo demostramos (vale en cualquier espacio métrico).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $E \subset \mathbb{R}^k$ cerrado y acotado. Por ser acotado, hay una caja cerrada R que lo contiene **Ej.** la cual, por el teorema anterior, es compacta. Entonces, como por hipótesis E es cerrado y $E \subset R$, E es compacto. $\square$

Teor.: En cualquier espacio métrico, E es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de E tiene un punto de acumulación en E.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Ya lo demostramos en un teorema anterior.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pueden demostrarlo siguiendo las sugerencias del Ej. 26 del libro de Rudin (optativo). $\square$

Teor. [Weierstrass]: Todo conjunto infinito y acotado en $\mathbb{R}^k$ tiene un punto de acumulación.

Dem.: **Ej.** $\square$

No numerabilidad de $\mathbb{R}$.

Def.: E es un **conjunto perfecto** si es cerrado y no tiene puntos aislados.

Ejemplos: $\mathbb{R}$, $[a,b]$, $\mathbb{R}^k$, R caja cerrada de $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ son todos conjuntos perfectos.

Prop.: E es perfecto si y sólo si $E = E'$ (donde E' es el conjunto de puntos de acumulación de E).

Dem.: E es cerrado $\iff$ $E \supset E'$.

E no tiene puntos aislados $\iff$ todos los puntos de E son de acumulación $\iff$ $E \subset E'$.

Entonces E es perfecto $\iff$ E es cerrado y no tiene puntos aislados $\iff$ $E = E'$. $\square$

Teor.: Todo conjunto perfecto y no vacío en $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ es no numerable.

Dem.: Sea $E \subset \mathbb{R}^k$ perfecto. Por el absurdo. Supongamos que E es numerable.

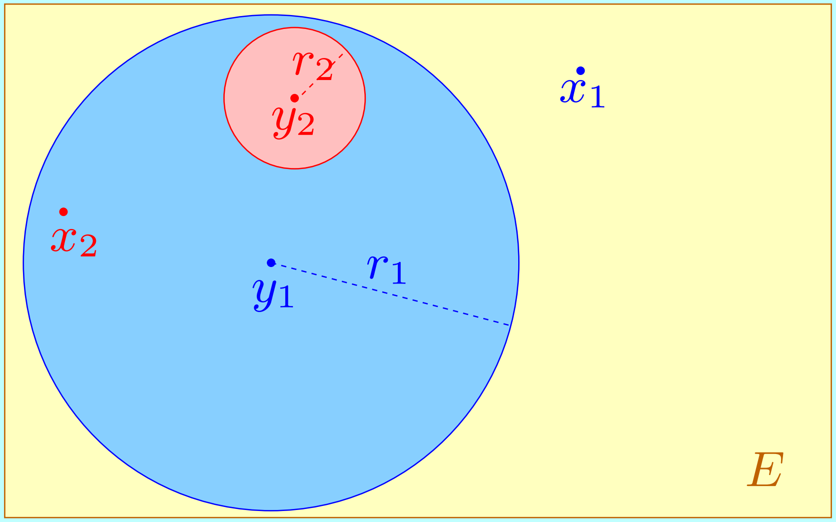
Numeramos los elementos de E: $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Sea $y_1 \in E$: $y_1 \neq x_1$. Sea $r_1 > 0$: $r_1 < d(y_1, x_1) \implies x_1 \notin \overline{B_{r_1}(y_1)}$.

$y_1 \in E = E' \implies$ hay infinitos puntos de E en $B_{r_1}(y_1)$.

Sea $y_2 \in B_{r_1}(y_1) \cap E$: $y_2 \neq x_2$.

Sea $r_2 > 0$: $\begin{cases} r_2 < d(y_2, x_2) \implies x_2 \notin \overline{B_{r_2}(y_2)}, \\ r_2 < r_1 - d(y_1, y_2) \implies \overline{B_{r_2}(y_2)} \subset B_{r_1}(y_1). \end{cases}$



Procediendo recursivamente, obtenemos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in E$ y $r_n > 0$ tales que:

- $x_n \notin \overline{B_{r_n}(y_n)}$,
- $\overline{B_{r_{n+1}}(y_{n+1})} \subset B_{r_n}(y_n)$.

$$K_n := \overline{B_{r_n}(y_n)} \cap E \text{ es cerrado y acotado en } \mathbb{R}^k \implies \begin{cases} K_n \text{ compacto,} \\ K_{n+1} \subset K_n, \\ y_n \in K_n \neq \emptyset \end{cases}$$

$\implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ (pues es intersección de compactos encajados no vacíos)

$\implies \exists x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{B_{r_n}(y_n)} \cap E\right) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{r_n}(y_n)}\right) \cap E$

$\implies \exists x \in E: \ x \in \overline{B_{r_n}(y_n)} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ya establecimos que $x_n \notin \overline{B_{r_n}(y_n)} \implies x \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pero $x \in E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$

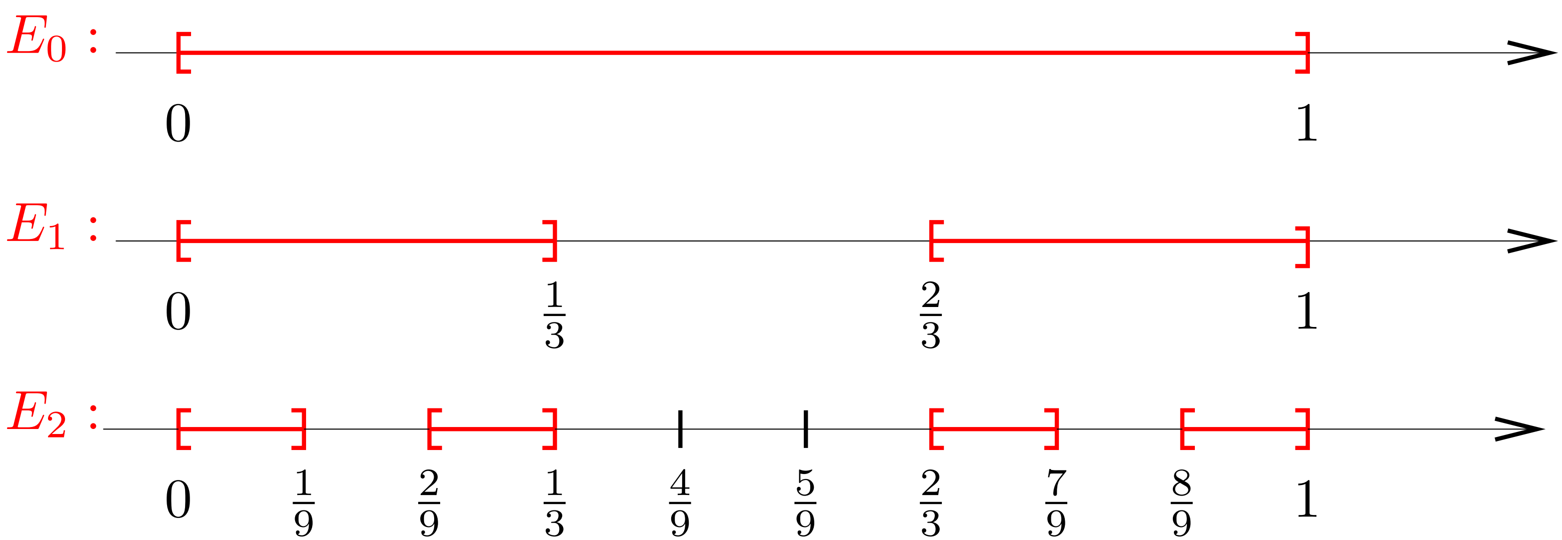
Corol.: $\mathbb{R}$ es no numerable.

El conjunto de Cantor.

Es un ejemplo de conjunto perfecto en $\mathbb{R}$ que no contiene ningún intervalo abierto.

Sean:

- $E_0 := [0,1]$
- $E_1 := E_0 \setminus \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$
- $E_2 := E_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\right) = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$
- Etc.



El **conjunto de Cantor** es $\boxed{E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n.}$

Propiedades del conjunto de Cantor:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \; E_n$ consiste en la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos, cada uno de ellos de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

  Por lo tanto, E_n es compacto (pues es unión finita de compactos).

  $\Longrightarrow \; E$ es compacto (pues es intersección de compactos).

- E es no vacío. De hecho, contiene a $0, 1; \; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \; \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9};$ etc.

  y, como consecuencia del corolario que sigue, contiene muchos más números reales.

Prop.: El conjunto de Cantor es perfecto, pero no contiene ningún intervalo abierto.

Dem.: Puede verse en la Sec. 2.44 del libro de Rudin (optativo). $\square$

Corol.: El conjunto de Cantor es no numerable.