¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea?

Método de variación de parámetros

Carlos M. Mora

Ejemplo

Buscar la solución general de la EDO

$$Y''(x) + Y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Propiedad de superposición

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x),$$

donde $Y_h(x)$ es la solución general de

$$Y_h''(x) + Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $Y_p(x)$ es cualquier solución de

$$Y_p''(x) + Y_p(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Encontrar la solución general de

$$Y_h''(x) + Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$$(D - i)(D + i)\, Y_h(x) = 0$$

con $D = \frac{d}{dx}$

$$Y_h(x) = C_1\, e^{0\cdot x} \cos(1 \cdot x) + C_2\, e^{0\cdot x} \operatorname{sen}(1 \cdot x)$$

$$Y_h(x) = C_1\, \cos(x) + C_2\, \operatorname{sen}(x)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Solución general: $Y''(x) + Y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$Y(x) = C_1\, \cos(x) + C_2\, \operatorname{sen}(x) + Y_p(x),$$

donde $Y_p(x)$ es una solución particular de la EDO

$$Y_p''(x) + Y_p(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Problema general

Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{I},$$

donde $g, a_1, a_2, \ldots, a_n : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Paso 1

Buscar un sistema fundamental de soluciones $Y_1, \ldots, Y_n$ para

$$Y_h^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y_h^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y_h'(x) + a_n(x)\,Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{I},$$

Paso 2

Encontrar las funciones $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ que satisfacen el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) & \cdots & Y_n(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) & \cdots & Y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1^{(n-2)}(x) & Y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & Y_n^{(n-2)}(x) \\ Y_1^{(n-1)}(x) & Y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & Y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Paso 3

Integrar las funciones $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$.

Luego $Y_p(x) = c_1(x)\,Y_1(x) + c_2(x)\,Y_2(x) + \cdots + c_n(x)\,Y_n(x)$

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) + Y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Paso 1

Ya conocemos que $Y_1(x) = \cos(x)$, $Y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ es un sistema fundamental de soluciones para

$$Y_h''(x) + Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) + Y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Paso 2

Encontrar las funciones $c_1'(x), c_2'(x)$ que satisfacen el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

donde $Y_1(x) = \cos(x)$, $Y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_2(x) \\ g(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-g(x)Y_2(x)}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen}(x)/\cos(x)}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} Y_1(x) & 0 \\ Y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{Y_1(x)g(x)}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = 1$$

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) + Y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

Paso 3

Tenemos que $c_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ y $c_2'(x) = 1$.
Integrando

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + K_1 = \ln(-\cos(x)) + K_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int 1 dx = x + K_2$$

$Y_p(x) = \ln(|\cos(x)|)\cos(x) + x\ \operatorname{sen}(x)$

Solución general

$$Y(x) = C_1\ \cos(x) + C_2\ \operatorname{sen}(x) + \ln(-\cos(x))\cos(x) + x\ \operatorname{sen}(x)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) - 2\,Y'(x) + Y(x) = \frac{\exp(x)}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Paso 1

Encontrar un sistema fundamental de soluciones para

$$Y_h''(x) - 2\,Y_h'(x) + Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$$(D-1)^2\,Y_h(x) = 0$$

con $D = \frac{d}{dx}$

$$Y_h(x) = C_1\,\exp(x) + C_2\,x\,\exp(x)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Sistema fundamental de soluciones

$Y_1(x) = \exp(x),\; Y_2(x) = x\,\exp(x)$

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) - 2\,Y'(x) + Y(x) = \frac{\exp(x)}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Paso 2

Encontrar las funciones $c_1'(x), c_2'(x)$ que satisfacen el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\exp(x)}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

donde $Y_1(x) = \exp(x)$, $Y_2(x) = x\,\exp(x)$.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_2(x) \\ g(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-g(x)Y_2(x)}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\exp(x)}{1+x^2}x\,e^x}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & e^x + x\,e^x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\exp(x)}{1+x^2}x\,e^x}{e^{2x}} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} Y_1(x) & 0 \\ Y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{Y_1(x)g(x)}{\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{e^x\frac{\exp(x)}{1+x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo

Buscar una solución particular de la EDO

$$Y''(x) - 2\,Y'(x) + Y(x) = \frac{\exp(x)}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Paso 3

Tenemos que $c_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ y $c_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Integrando

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int -\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + K_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + K_2$$

$$Y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\exp(x) + \arctan(x)\ x\ \exp(x)$$

Justificación del método de Variación de Parámetros

Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial ordinaria

$$Y''(x) + p(x)\, Y'(x) + q(x)\, Y(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{I},$$

donde $g, p, q : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Asuma que Y_1, Y_2 es un sistema fundamental de soluciones para

$$Y_h''(x) + p(x)\, Y_h'(x) + q(x)\, Y_h(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{I},$$

Entonces $Y_h(x) = c_1\, Y_1(x) + c_2\, Y_2(x)$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Buscamos una solución particular Y_p con la forma

$$Y_p(x) = c_1(x)\, Y_1(x) + c_2(x)\, Y_2(x)$$

$$Y_p'(x) = c_1'(x)\, Y_1(x) + c_1(x)\, Y_1'(x) + c_2'(x)\, Y_2(x) + c_2(x)\, Y_2'(x)$$

Tomando

$$c_1'(x)\, Y_1(x) + c_2'(x)\, Y_2(x) = 0$$

queda $Y_p'(x) = c_1(x)\, Y_1'(x) + c_2(x)\, Y_2'(x)$. Entonces

$$Y_p''(x) = c_1'(x)\, Y_1'(x) + c_1(x)\, Y_1''(x) + c_2'(x)\, Y_2'(x) + c_2(x)\, Y_2''(x)$$

Justificación del método de Variación de Parámetros

Estamos buscando una solución particular de

$$Y_p''(x) + p(x)\,Y_p'(x) + q(x)\,Y_p(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{I},$$

con la forma $\quad Y_p(x) = c_1(x)\,Y_1(x) + c_2(x)\,Y_2(x) \quad$ sujeto a

$$\boxed{c_1'(x)\,Y_1(x) + c_2'(x)\,Y_2(x) = 0.}$$

$$\begin{aligned} g(x) = {} & c_1'(x)\,Y_1'(x) + c_1(x)\,Y_1''(x) + c_2'(x)\,Y_2'(x) + c_2(x)\,Y_2''(x) \\ & + p(x)\left(c_1(x)\,Y_1'(x) + c_2(x)\,Y_2'(x)\right) \\ & + q(x)\left(c_1(x)\,Y_1(x) + c_2(x)\,Y_2(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = {} & c_1'(x)\,Y_1'(x) + c_2'(x)\,Y_2'(x) \\ & + c_1(x)\left(Y_1''(x) + p(x)\,Y_1'(x) + q(x)\,Y_1(x)\right) \\ & + c_2(x)\left(Y_2''(x) + p(x)\,Y_2'(x) + q(x)\,Y_2(x)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{c_1'(x)\,Y_1'(x) + c_2'(x)\,Y_2'(x) = g(x)}$$