Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

# TEST 1 (Con Nota)

Cálculo Numérico (521230)

## Observaciones

- El test 1 se conforma de dos problemas a entregar: uno obligatorio sobre mínimos cuadrados y un segundo a escoger entre los problemas **Problema Opcional 1** y **Problema Opcional 2**.
- La guía se divide en dos secciones, una correspondiente a mínimos cuadrados. El problema planteado en esta sección, con el título **Problema Obligatorio**, es el problema obligatorio del test 1.
- En la segunda sección de la guía se plantean los problemas **Problema Opcional 1** y **Problema Opcional 2**. Deberán escoger **solo uno** de ellos para entregar.

## 1. Mínimos Cuadrados

Dados $n+1$ pares ordenados $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $\ldots$, $(x_n, y_n)$, en OCTAVE el polinomio $p$ de grado menor o igual que $m$ $(m < n)$ que mejor ajusta los datos dados en el sentido de los mínimos cuadrados, se determina, al igual que el polinomio que los interpola, con el comando `polyfit` y, para evaluar a $p$, se utiliza también `polyval`.
Denotemos por `x` al vector cuyas componentes son $x_0, x_1, \ldots, x_n$, por `y` al vector con componentes $y_0, y_1, \ldots, y_n$ y por `z` al vector cuyas componentes son los valores donde deseamos evaluar a $p$. En este caso los comandos `polyfit` y `polyval` se utilizan de la siguiente forma:

`polyfit`: permite determinar $p$.
**Recibe:** `x`, `y`, `m`.
**Retorna:** vector que contiene los coeficientes de $p$.

`polyval`: permite evaluar $p$.
**Recibe:** vector que retorna `polyfit` y `z`.
**Retorna:** los valores de $p$ en `z`.

Nota que la única diferencia con respecto al uso de `polyfit` para determinar el polinomio que interpola al conjunto de datos dado, es que el tercer parámetro de entrada es el valor de $m < n$.

---

**Problema resuelto en video:** Para determinar la cantidad de vitamina A requerida para mantener estable el peso de ratones de laboratorio se les suministró una dieta básica desprovista de vitamina A y se les proporcionó vitamina A en forma de tabletas. En la siguiente tabla se muestran las dosis de vitamina A suministradas y, para cada dosis, el peso ganado por las ratas.

| Dosis de vitamina A (en mg) | 0.25 | 1.00 | 1.50 | 2.50 | 7.50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Peso ganado (en gramos) | -10.8 | 13.5 | 16.4 | 28.7 | 51.3 |

Se sospecha que se cumple la siguiente relación entre la dosis $d$ de vitamina A suministrada y el peso $p$ ganado por las ratas

$$p = a + b\log_{10}(d), \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Escriba un rutero `vitaminaA.m` en el que:

1) Determine los valores de $a$ y $b$ de la función de la forma (1.1) que mejor ajusta los datos dados en el sentido de los mínimos cuadrados.
2) Grafique, junto a los pares en la tabla, la función que mejor los ajusta en el sentido de los mínimos cuadrados.
3) Escriba cuáles cómo debe ser la dosis de vitamina A a suministrarse a los ratones para que el peso ganado esté entre 0 y 5 gramos.

---

**Problema Obligatorio:** Considere la siguiente tabla que relaciona cantidad de aditivo a un barniz y el tiempo de secado del mismo.

| Aditivo (en gramos) | Tiempo de secado (en horas) |
|---|---|
| 0.0 | 12.0 |
| 1.0 | 10.5 |
| 2.0 | 10.0 |
| 3.0 | 8.0 |
| 4.0 | 7.0 |
| 5.0 | 8.0 |
| 6.0 | 7.5 |
| 7.0 | 8.5 |
| 8.0 | 9.0 |

TABLA 1. Aditivo y tiempo de secado

Escriba el rutero `barniz.m` en el que haga lo siguiente:

- Determine los coeficientes del polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos en la tabla.
- Grafique, en un mismo gráfico, los pares en la tabla y el polinomio obtenido (evaluado en 100 puntos entre 0 y 8). ¿Es el polinomio obtenido el polinomio que interpola los datos de la tabla?
- Determine, con ayuda del polinomio, qué cantidad de aditivo resulta en tiempo mínimo de secado. ¿Cuál es el tiempo mínimo de secado?

**Forma de entrega:** Archivo `barniz.m` y todos los archivos OCTAVE que necesite escribir adicionalmente para resolver este problema.

## 2. Ecuaciones no lineales e Interpolación Polinomial

De los problemas siguientes debe escoger uno y solo uno.

**Problema Opcional 1:** La densidad de energía $\psi$ dentro de un cuerpo negro a temperatura constante está dada por

$$\psi = \frac{8\pi c h \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right) - 1},$$

donde $\lambda$ es la longitud de onda de la radiación, $T$ es la temperatura absoluta del cuerpo negro, $h$ y $k$ son las constantes de Planck y Boltzmann respectivamente y $c$ es la velocidad de la luz. Se quiere determinar la longitud de onda $\lambda$ que maximiza la densidad de energía. Para ello calculamos primero

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{8\pi c h}{\lambda^6\left(\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right) - 1\right)}\left(-5 + \frac{ch}{\lambda k T}\frac{\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right) - 1\right)}\right)$$

Cuando $\lambda \to 0$ o $\lambda \to \infty$, el valor anterior tiende a cero. En ambos casos ocurre, sin embargo, que la densidad de energía en el cuerpo negro es mínima, no máxima. La densidad de energía en el cuerpo negro es máxima cuando $\lambda$ es tal que

$$-5 + \frac{ch}{\lambda k T}\frac{\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{ch}{\lambda k T}\right) - 1\right)} = 0.$$

Denotemos $x = \frac{ch}{\lambda k T}$ y llamemos

$$f(x) = -5 + x\frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Note que

1) $f(x) = 0$ si y solo si $x \neq 0$ y $e^x(x-5)+5 = 0$,
2) si $x^* \neq 0$ es tal que $f(x^*) = 0$, entonces la longitud de onda que maximiza la densidad de energía en el cuerpo negro es $\lambda^* = \frac{ch}{x^* kT}$.

Escriba el rutero `longitudonda.m` en el que calcule, con una exactitud de $10^{-8}$, una aproximación a $x^* \neq 0$ tal que $f(x^*) = 0$. Tenga en cuenta que, antes de utilizar alguno de los métodos numéricos vistos en clases para aproximar $x^*$, es necesario determinar un intervalo inicial para bisección, una aproximación inicial para Newton Raphson o dos aproximaciones iniciales para Secante. Para ello puede apoyarse en el gráfico de $f$. Los comandos que utilice deben quedar en `longitudonda.m`.

**Forma de entrega:** Archivo `longitudonda.m` y todos los archivos OCTAVE que necesite escribir adicionalmente para resolver este problema.

---

**Problema Opcional 2:** En la siguiente tabla se muestran la temperatura ($T$), la presión ($p$) y la densidad ($\rho$) de la atmósfera dependiendo de la altitud (en metros).

| Altitud | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 | 2500 | 3000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| temperatura (K) | 288.16 | 284.91 | 281.66 | 278.41 | 275.16 | 271.91 | 268.66 |
| Presión (Pa) | 101.35 | 95.48 | 89.89 | 84.57 | 79.50 | 74.68 | 70.11 |
| Densidad (kg/m$^3$) | 1.2255 | 1.1677 | 1.1120 | 1.0583 | 1.0067 | 0.9570 | 0.9092 |

Escriba el rutero `atmosfera.m` en el que:

1) utilice los datos en la tabla para estimar la temperatura de la atmósfera a 800, 1600, 2350 y 2790 metros de altitud.
2) determine la spline cúbica que interpola a los datos correspondientes en la tabla y calcule, con ayuda de ella, aproximaciones a la presión de la atmósfera a 800, 1600, 2350 y 2790 metros de altitud.
3) determine la spline cúbica que interpola a los datos correspondientes en la tabla y calcule, con ayuda de ella, la densidad de la atmósfera a 800, 1600, 2350 y 2790 metros de altitud. ¿A qué altura es la densidad igual a 1.1kg/m$^3$?

**Forma de entrega:** Archivo `atmosfera.m` y todos los archivos OCTAVE que necesite escribir adicionalmente para resolver este problema.