Continuidad. Discontinuidades.

- Continuidad y conectividad.
- Límites laterales.
- Discontinuidades.
- Funciones monótonas.
- Límites infinitos y en el infinito.

Continuidad y conectividad.

Teor.: Sean $f : X \to Y$ continua y $E \subset X$ conexo.
Entonces, $f(E) \subset Y$ es conexo.

Dem.: Por el absurdo, supongamos que $f(E)$ es disconexo.

Entonces, $\exists A, B \subset Y$: $\begin{cases} f(E) = A \cup B, \\ A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset. \end{cases}$

Sean $\begin{cases} G := f^{-1}(A) \cap E, \\ H := f^{-1}(B) \cap E. \end{cases}$ Veremos que $\{G, H\}$ es una separación de E.

i) $G \cup H = \left[f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\right] \cap E = \underbrace{\left[f^{-1}(A \cup B)\right]}_{= f^{-1}(f(E)) \supset E} \cap E = E.$

ii) $f(E) = A \cup B$, con $A \neq \emptyset \implies \exists y \in A \subset f(E)$
$\implies \exists x \in E : y = f(x) \in A \implies \exists x \in E \cap f^{-1}(A) =: G \implies G \neq \emptyset.$

La demostración de que $H \neq \emptyset$ es análoga.

iii) $\begin{cases} \overline{A} \text{ cerrado y } f \text{ continua } \implies f^{-1}(\overline{A}) \text{ cerrado.} \\ A \subset \overline{A} \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A}). \end{cases}$

$\implies f^{-1}(\overline{A})$ es un cerrado que contiene a $f^{-1}(A) \implies f^{-1}(\overline{A}) \supset \overline{f^{-1}(A)}$.

Entonces, $\overline{G} = \overline{f^{-1}(A) \cap E} \subset \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$

y como $H := f^{-1}(B) \cap E \subset f^{-1}(B)$, entonces

$$\overline{G} \cap H \subset f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{\overline{A} \cap B}_{=\emptyset}) = \emptyset.$$

La demostración de que $G \cap \overline{H} = \emptyset$ es análoga.

Entonces, $\begin{cases} E = G \cup H, \\ G \neq \emptyset, \quad H \neq \emptyset, \\ \overline{G} \cap H = G \cap \overline{H} = \emptyset. \end{cases} \implies E$ disconexo. $\triangleright\!=\!\triangleleft$ $\square$

Teor. [de los valores intermedios o de Bolzano]: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < f(b)$, entonces, $\forall c \in (f(a), f(b))\,,\ \exists x \in (a, b) :\ f(x) = c$.

Dem.: $[a, b]$ es conexo $\implies f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ es conexo

$\implies f([a, b])$ es un intervalo (en sentido amplio); llamémoslo I.

$f(a),\ f(b) \in I \implies \forall c \in (f(a), f(b))\,,$ se tiene que $c \in I = f([a, b])$.

$\implies \exists x \in [a, b] :\ f(x) = c$.

Pero $x \neq a$, porque $f(x) = c \neq f(a)$, y $x \neq b$, porque $f(x) = c \neq f(b)$.

Entonces, $x \in (a, b)$ y $f(x) = c$. $\square$

- Vale un resultado análogo si $f(a) > f(b)$.
- El teorema anterior dice que una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.
- $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En efecto, como $[a, b]$ es compacto, $f([a, b])$ también lo es y, por lo tanto, es cerrado y acotado.

Límites laterales.

Def.: Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x \in (a,b)$. El **límite a derecha** de f en x es

$$f(x+) := \lim_{t \to x+} f(t) := \lim_{t \to x} \left(f|_{(x,b)}\right)(t)$$

y el **límite a izquierda** de f en x es

$$f(x-) := \lim_{t \to x-} f(t) := \lim_{t \to x} \left(f|_{(a,x)}\right)(t).$$

A ambos límites se los denomina **límites laterales.**

Ej. El $\lim_{t \to x} f(t)$ existe si y sólo si existen $\lim_{t \to x+} f(t)$ y $\lim_{t \to x-} f(t)$ y ambos límites laterales coinciden. En tal caso, $\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{t \to x+} f(t) = \lim_{t \to x-} f(t)$.

Ej. $\lim_{t \to x+} f(t) = A \iff \forall \{t_n\}$ tal que $t_n > x$ y $t_n \to x$, $f(t_n) \to A$.

Enuncia y demuestra la propiedad análoga para el límite a izquierda.

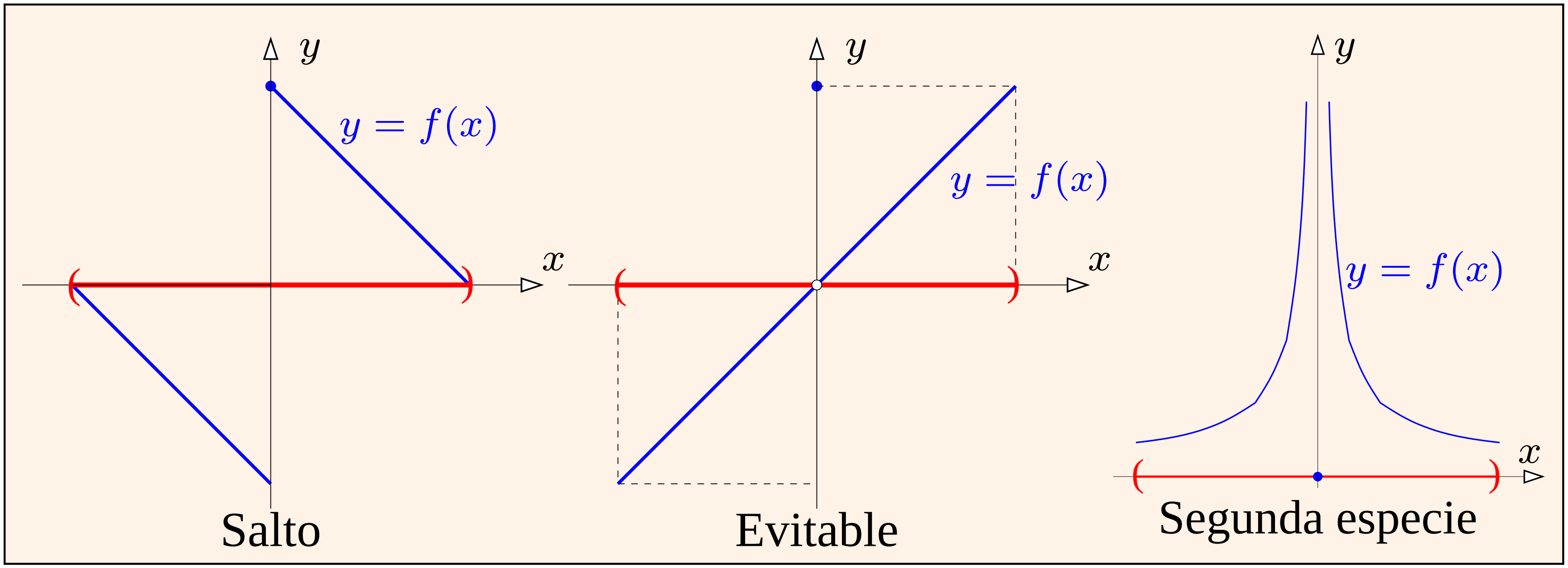
Discontinuidades.

Def.: Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x \in (a,b)$.

f tiene una **discontinuidad en** x si no es continua en x.

- Las discontinuidades se clasifican en $\begin{cases} \text{discontinuidades de primera especie y} \\ \text{discontinuidades de segunda especie.} \end{cases}$
  - f tiene una **discontinuidad de primera especie en** x si no es continua en x, pero existen los dos límites laterales: $\lim\limits_{t \to x+} f(t)$ y $\lim\limits_{t \to x-} f(t)$.
  - f tiene una **discontinuidad de segunda especie en** x si no existe alguno de esos límites laterales.
- Las discontinuidades de primera especie a su vez se clasifican en $\begin{cases} \textbf{saltos} \text{ y} \\ \textbf{evitables.} \end{cases}$
  - f tiene un **salto en** x si existen $\lim\limits_{t \to x+} f(t)$ y $\lim\limits_{t \to x-} f(t)$, pero no coinciden.
  - f tiene una **discontinuidad evitable en** x si existen $\lim\limits_{t \to x+} f(t)$ y $\lim\limits_{t \to x-} f(t)$ y ambos límites coinciden entre si, pero no coinciden con $f(x)$.

Ejemplos:



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

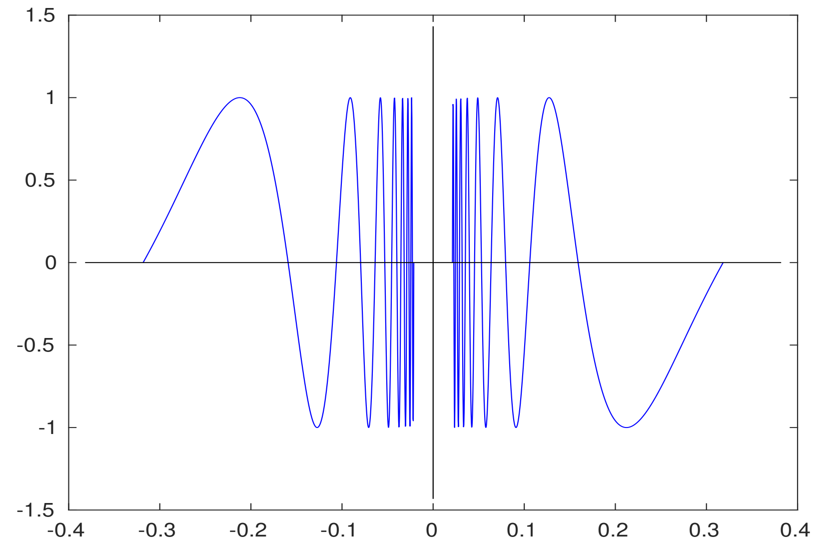
Ej. Demuestra que f es discontinua de segunda especie en x $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ej. Demuestra que f es discontinua de segunda especie en x $\forall x \neq 0$, pero es continua en $x = 0$.

Ejemplo:

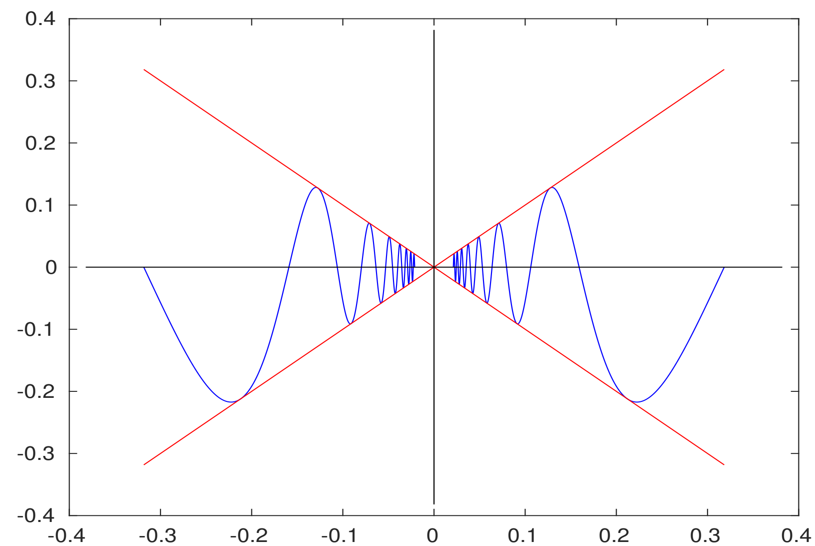
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



Ej. f tiene una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.

Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



Ej. f es continua en $x = 0$.

Funciones monótonas.

Def.: Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}}: -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

- f es **monótona creciente** si $\forall x, y \in (a,b): x < y,\ f(x) \leq f(y)$;
- f es **monótona decreciente** si $\forall x, y \in (a,b): x < y,\ f(x) \geq f(y)$;
- f es **monótona** si es monótona creciente o monótona decreciente.

Teor.: Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces:

a) $\forall x \in (a,b)$, existen los límites laterales $f(x+)$ y $f(x-)$ y

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t);$$

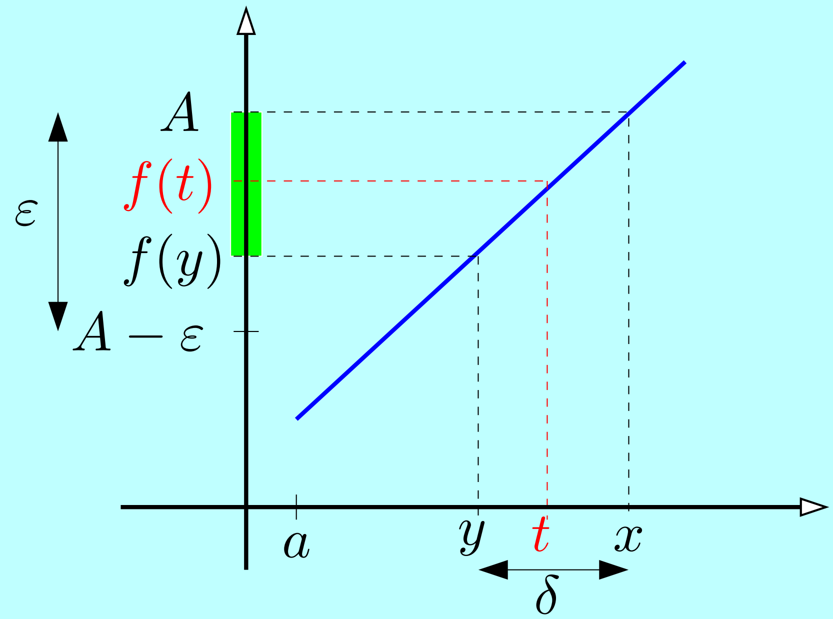
b) $\forall x, y \in (a,b): x < y,\ f(x+) \leq f(y-)$.

Valen resultados análogos para f monótona decreciente.

Notemos que, como corolario de este teorema, las funciones monótonas no tienen discontinuidades de segunda especie.

Dem.: a) Como f es monótona creciente, $\forall t \in (a,x),\ f(t) \leq f(x)$
$\Longrightarrow$ f acotada superiormente en (a,x) $\Longrightarrow$ $\exists \sup_{a<t<x} f(t) =: A \leq f(x)$.
Veremos que $f(x-) = A$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $A := \sup_{a<t<x} f(t)$, $\exists y \in (a,x) :\ A - \varepsilon < f(y) \le A$.



Como f es monótona creciente, $\forall t \in (y,x),\ A - \varepsilon < f(y) \le f(t) \le A$.

Sea $\delta := x - y > 0 \implies y = x - \delta$ y $\forall t \in (x-\delta, x),\ |f(t) - A| < \varepsilon$

$\implies \lim_{t\to x-} f(t) = A := \sup_{a<t<x} f(t)$.

La otra desigualdad se demuestra análogamente. **Ej.**

b) Item (a) $\implies f(x+) = \inf_{x<t<y} f(t) \le \sup_{x<t<y} f(t) = f(y-)$.

Ej. Enuncia y demuestra resultados análogos para f monótona decreciente. $\square$

Teor.: Las discontinuidades de una función monótona sólo pueden ser saltos y su conjunto de puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable.

Dem.: Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monótona creciente. (Vale una demostración análoga para f monótona decreciente.) Sea E su conjunto de puntos de discontinuidad:

$$E := \{x \in (a,b) : f \text{ es discontinua en } x\}.$$

Sea $x \in E$. Por el teorema anterior, item (a), $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$. Entonces, $f(x-) < f(x+)$, pues, si fueran iguales, f sería continua en x. Por lo tanto la discontinuidad de f en x es un salto.

Veamos que E es a lo sumo numerable. Sea $q_x \in \mathbb{Q} : f(x-) < q_x < f(x+)$. Por el teorema anterior, item (b), $\forall x, y \in E : x < y,\ f(x+) \leq f(y-)$

$$\Longrightarrow f(x-) < q_x < f(x+) \leq f(y-) < q_y < f(y+) \Longrightarrow q_x < q_y.$$

Entonces la función $\begin{array}{c} E \to \mathbb{Q}, \\ x \mapsto q_x, \end{array}$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva $\Longrightarrow$ E es coordinable con la imagen de esta función, que es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y, por lo tanto, a lo sumo numerable. En consecuencia, E es a lo sumo numerable. $\square$

- Es fácil imaginar funciones monótonas con finitas discontinuidades.

  Por ejemplo, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$

  tiene $x = 0$ como único punto de discontinuidad.

- También es fácil imaginar funciones monótonas con numerables discontinuidades.

  Por ejemplo, $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = [x]$, donde $[\,\cdot\,]$ denota la **parte entera** de un número. f es discontinua en $x = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Otro ejemplo de función monótona con numerables discontinuidades, pero ahora en un dominio acotado, es $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{[1/x]}, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

  Ej. Dibuja esta función, determina cuales son sus puntos de discontinuidad y demuestra que es continua en $x = 0$.

- Pero, por ejemplo, ¿existe alguna función monótona $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ discontinua en $\mathbb{Q}$ y continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? Por extraño que parezca, la respuesta es **¡si!**

- De hecho, dado cualquier subconjunto numerable $E \subset (a,b)$, hay una función discontinua en E y continua en $(a,b) \setminus E$.

- Describiremos como construirla, sin completar todos los detalles.
  - Sea $E := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset (a,b)$.
  - Sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ una serie convergente de términos $c_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
  - Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, definida por $\boxed{f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}:\, x_n < x} c_n, \quad x \in (a,b).}$

- ¿Qué significa la sumatoria con la que se define $f(x)$?

  Para cada $x \in (a,b)$, se suman sólo aquellos c_n con índice $n : x_n < x$.

  (Aquellos con índice $n : x_n \geq x$, no se suman.)

  Si para algún $x \in (a,b)$, no hubiera ningún $x_n < x$, entonces la sumatoria sería vacía y por lo tanto la suma sería cero.

- Se puede demostrar que:
  - f es monótona creciente y acotada;
  - $f(x_n+) - f(x_n-) = c_n > 0 \implies f$ es discontinua en x_n, $n \in \mathbb{N}$;
  - f es continua en todo $x \in (a,b) \setminus E$.

Límites infinitos y en el infinito.

Queremos definir:

- **límites en el infinito**, es decir, límites cuando $x \to \pm\infty$;
- **límites infinitos**, es decir, límites en los que $f(x) \to \pm\infty$.

Para dar una definición general que extienda la que dimos de límite de funciones y cubra todos los casos, definiremos primero la noción de entorno.

Def.: Sea $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, los **entornos de** x son los intervalos $(x-\delta, x+\delta) \quad \forall \delta > 0$.
- Los **entornos de** $x = +\infty$ son las semirectas $(a, +\infty) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
- Los **entornos de** $x = -\infty$ son las semirectas $(-\infty, b) \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Def.: Sean $E \subset \mathbb{R}$ y $x \in \overline{\mathbb{R}}$. x es un **punto de acumulación de** E **en** $\overline{\mathbb{R}}$, si todo entorno de x, contiene puntos de E distintos de x.

Si $x \in \mathbb{R}$, esta definición coincide con la de punto de acumulación en $\mathbb{R}$.

Def.: Sean $E \subset \mathbb{R}$ y $f : E \to \mathbb{R}$. Sean $A, x \in \overline{\mathbb{R}}$, con x punto de acumulación de E en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces, $\lim_{t \to x} f(t) = A$ si

$$\boxed{\forall \text{ entorno } U \text{ de } A, \ \exists \text{ un entorno } V \text{ de } x : \ f((V \cap E) \setminus \{x\}) \subset U.}$$

La expresión anterior puede escribirse de manera equivalente, así:

$$\boxed{\forall \text{ entorno } U \text{ de } A, \ \exists \text{ un entorno } V \text{ de } x : \ \forall t \in V \cap E : \ t \neq x, \ f(t) \in U.}$$

Ejemplo: Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim_{t \to x} f(t) = +\infty$ si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \exists \delta > 0 : \underbrace{f((x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}) \subset (a, +\infty)}_{\forall t \neq x : \ |t - x| < \delta, \ f(t) > a}.$$

Ejemplo: Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in \mathbb{R} : \underbrace{f((a, +\infty)) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)}_{\forall t > a : \ |f(t) - A| < \varepsilon}.$$

Ej.

a) Muestra que si $A, x \in \mathbb{R}$, esta definición de límite coincide con la anterior.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Describe lo que significa que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

Teor.: Sean $E \subset \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ y $A, B, x \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\lim_{t\to x} f(t) = A$ y $\lim_{t\to x} g(t) = B$. Entonces:

a) **[unicidad del límite]** si $\lim_{t\to x} f(t) = A'$, entonces $A = A'$;

b) si $A + B$ está bien definido, entonces $\lim_{t\to x} (f+g)(t) = A + B$;

c) si AB está bien definido, entonces $\lim_{t\to x} (fg)(t) = AB$;

d) si A/B está bien definido y $g(t) \neq 0 \ \ \forall t \neq x$ en un entorno de x, entonces $\lim_{t\to x} (f/g)(t) = A/B$.

Dem.: La demostración es sencilla, pero tediosa. Se debe considerar caso por caso: $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty, x = -\infty$, idem para A y para B.

Ej. Demuéstralo en un par de casos.