Listado 4: Integración numérica

1. Problemas con papel y lápiz

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f \in C([a,b])$. Determine el grado de exactitud de las siguientes reglas de cuadratura para la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$.

   (a) $\dfrac{b-a}{2}\left(f(a+\frac{h}{4}) + f(b-\frac{h}{4})\right)$, si $h = b-a$.

   (b) Regla elemental de Simpson.

   (c) Regla elemental del trapecio.

2. ¿Qué reglas de cuadratura se obtienen cuando $\int_a^b f(x)\,dx$ se aproxima por $\int_a^b p(x)\,dx$, si p

   (a) es el polinomio de menor grado posible que interpola a f en $x_0 = a$.

   (b) es el polinomio de menor grado posible que interpola a f en $x_0 = b$.

   Escriba las correspondientes reglas compuestas.

3. Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$ parámetros, con los cuales se define una regla de cuadratura para aproximar el valor de $\int_0^1 f(x)dx$.
$$I(f) := \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1/2) + \omega_3 f(1)\,.$$
   Determine para qué valores de los pesos ω_1, ω_2 y ω_3, se obtiene una regla de cuadratura que es Exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es este grado?

4. Si $\int_0^1 f(x)dx$ se aproxima por $\int_0^1 p(x)dx$, siendo p el polinomio de interpolación de f en 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ y 1, se obtiene la siguiente regla de cuadratura
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{18}f(0) + \frac{4}{9}\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{1}{18}f(1).$$
   Esta regla satisface que
$$\int_0^1 x^4 dx \neq \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) + \frac{1}{18}.$$
   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique su respuesta sin calcular ninguna integral adicional.

   (a) La regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 2.

   (b) La regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 3.

   (c) La regla es exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que 4.

5. Consideremos el problema de calcular
$$I(C) = \int_0^1 \left(x^5 - Cx^4\right)\mathrm{d}\,x,$$
   donde C es un número real fijo, pero arbitrario.

(a) Muestre que si $C = \frac{10}{9}$, el valor exacto de esta integral coincide con la aproximación que se obtiene al aplicar la regla (simple) del trapecio para su aproximación. ¿Contradice esto el resultado visto en clases sobre el grado de exactitud de la regla del trapecio?

(b) Muestre que si $C = \frac{5}{2}$, el valor exacto de esta integral coincide con la aproximación que se obtiene al aplicar la regla (simple) de Simpson para su aproximación. ¿Contradice esto el resultado visto en clases sobre el grado de exactitud de la regla de Simpson?

(c) Demuestre que para todo $C \in \left]\frac{15}{14}, \frac{85}{74}\right[$ la regla del trapecio entrega una mejor aproximación a $I(C)$ que la regla de Simpson.

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$.

   (a) Determine el polinomio p de grado menor o igual que 1 que interpola a f en 0 y $x_1 \in]0,1]$.

   (b) Escriba la regla de cuadratura que se obtiene al aproximar $\int_0^1 f(x)\,dx$ por $\int_0^1 p(x)\,dx$.

   (c) ¿Para qué valores de $x_1 \in]0,1]$ se cumple que esta regla de cuadratura es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que 1? Justifique su respuesta.

   (d) ¿Existe $x_1 \in]0,1]$ de modo que la regla de cuadratura sea exacta para polinomios de grado 2?

7. Sea $f \in C([-1,1])$. Para cada $\alpha \in]0,1]$, la suma

$$f(-\alpha) + f(\alpha) \tag{1}$$

   es una regla de cuadratura para la aproximación de $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

   (a) Demuestre que (1) es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que 1.

   (b) Determine $\alpha \in]0,1]$ de modo que (1) sea exacta para polinomios de grado 2.

   (c) ¿Es la regla obtenida también exacta para polinomios de grado 3? ¿Y de grado 4?

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C([a,b])$. Sea además p el polinomio de grado menor o igual que 1 que interpola a f en $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $x_1 \in [a,b] \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\}$. Demuestre que la regla de cuadratura $\int_a^b p(x)\,dx$ es la regla del punto medio.

   Sugerencia: No es necesario escribir la regla de cuadratura para demostrar que ella es, independientemente del valor de x_1, igual a la regla del punto medio.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in C([a,b])$. Sea además p el polinomio de grado menor o igual que 3 que interpola a f en $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $x_3 \in [a,b] \setminus \left\{a, \frac{a+b}{2}, b\right\}$. Demuestre que la regla de cuadratura $\int_a^b p(x)\,dx$ es la regla de Simpson.

   Sugerencia: No es necesario escribir la regla de cuadratura para demostrar que ella es, independientemente del valor de x_3, igual a la regla de Simpson.

10. Se desea aproximar $\int_1^3 \ln(x)\,dx$ con una de las reglas compuestas vistas en clase, dividiendo el intervalo de integración, $[1,3]$, en subintervalos de tamaño h. Determine, para cada regla compuesta, un valor $h_0 \in \mathbb{R}^+$ de modo que para todo $0 < h \leq h_0$ se cumpla que el error sea menor o igual que 10^{-4}.

11. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x^8, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 4x^3 - x, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

    Decida, sin calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$ ni aproximaciones a este valor, de cuáles de las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura podemos asegurar que darán como resultado el valor exacto de la integral.

(a) Gauss-Legendre de 5 nodos en $[0,1]$ y Simpson en $[1,2]$.
(b) Gauss-Legendre de 4 nodos en $[0,1]$ y Simpson en $[1,2]$.
(c) Gauss-Legendre de 5 nodos en $[0,1]$ y Trapecios en $[1,2]$.
(d) Gauss-Legendre de 6 nodos en $[0,1]$ y Gauss-Legendre de 2 nodos en $[1,2]$.

Determine una aproximación a $\int_0^2 f(x)\,dx$ con la última de las combinaciones anteriores.

12. Sea $n \in \mathbb{N}$. Aproxime $\int_{-1}^1 \cos(n\pi x)\,dx$ con la regla compuesta del trapecio y dividiendo el intervalo $[-1,1]$ en n subintervalos.

13. Calcule aproximaciones a $\int_0^2 f(x)\,dx$ con

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1-2x, & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

utilizando la regla compuesta del trapecio dividiendo el intervalo de integración

(a) en 3 subintervalos de tamaño $\frac{2}{3}$,
(b) en 8 subintervalos de tamaño $\frac{1}{4}$.

¿Por qué no obtiene la misma aproximación si la regla del trapecio es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1 y tanto $f|_{[0,1]}$ como $f|_{]1,2]}$ son polinomios de grado menor o igual que 1? ¿Es la aproximación obtenida en alguno de los dos casos igual al valor exacto de la integral? (Intente responder esta pregunta sin calcular la integral de f).

14. Calcule aproximaciones a $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ siguiendo los siguientes métodos:

(a) aplicando la regla elemental de Simpson.
(b) realizando el cambio de variables $t = \sqrt{x}$ a la integral y aplicando la regla elemental de Simpson a la integral resultante.

¿Cuál de los dos valores obtenidos es igual a $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$. Justifique su respuesta.

15. Considere la integral doble $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$. Escriba las reglas de cuadratura que resultan de

(a) aplicar la regla del punto medio tanto en x como en y.
(b) aplicar la regla del punto medio en x y la del trapecio en y.
(c) aplicar la regla del trapecio en x y la del punto medio en y.

2. Experimentos computacionales

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f \in C([a,b])$. Dado $h \in \mathbb{R}^+$ llamemos $T_h(f,a,b)$ a la aproximación a $\int_a^b f(x)\,dx$ que se obtiene con la regla compuesta del trapecio y partición uniforme de tamaño h, es decir,

$$T_h(f,a,b) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

(a) Demuestre que

$$T_{\frac{h}{2}}(f,a,b) = \frac{1}{2}T_h(f,a,b) + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right). \tag{2}$$

Note que (2) es una manera eficiente de calcular $T_{\frac{h}{2}}(f,a,b)$ teniendo $T_h(f,a,b)$.

(b) Escriba una función MATLAB que, dados valores de $h \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y una función $f \in C([a,b])$, retorne un vector T de n componentes cuya componente i-ésima, $T(i)$, sea igual a

$$T_{\frac{h}{2^{i-1}}}(f,a,b),$$

es decir, las componentes de T deben ser los valores

$$T_h(f,a,b),\ T_{\frac{h}{2}}(f,a,b),\ \ldots,\ T_{\frac{h}{2^{n-1}}}(f,a,b).$$

(c) Escriba una función MATLAB que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, $h \in \mathbb{R}^+$ y $p \in \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$, calcule una aproximación de orden p a $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante el método de Romberg. Esta función puede llamar a la escrita en ítem anterior para calcular las aproximaciones en primera columna de Romberg. Note que el valor de p determina cuántas aproximaciones a $\int_a^b f(x)\,dx$ debe calcular inicialmente.

2. Utilice las funciones escritas antes para reproducir los resultados en diapositivas del curso, en las que se muestran aproximaciones de órdenes $2, 4, 6$ y 8 a $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

3. Utilice las funciones escritas en problema 1 para calcular una aproximación de orden 10 a $\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,dx$ comenzando con $h = \pi$.

   Observación: Para comprobar sus resultados puede tener en cuenta el valor "exacto" de referencia:

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,dx = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2} \approx -12.070346316389633.$$

4. Considere las siguientes integrales dobles

   (a) $\displaystyle\int_0^\pi \int_1^3 x\,\mathrm{sen}(y)\,dxdy.$

   (b) $\displaystyle\int_0^\pi \int_1^3 \mathrm{sen}(xy)\,dxdy.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-4}^{-1} (yx^3 + 2x^2 + y)\,dxdy.$

   Aproxime su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:

   - Regla del punto medio en la variable x y regla del trapecio en la variable y.
   - Regla del punto medio en la variable x y regla Simpson en la variable y.
   - Regla de Gauss-Legendre de 1 nodo en la variable x y regla del trapecio en la variable y.
   - Regla de Gauss-Legendre de 1 nodo en la variable y y regla de Simpson en la variable x.

   ¿Se obtiene con alguna de las reglas anteriores el valor exacto de la integral en $4c$?

5. Considere las siguientes integrales triples,

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^3 \operatorname{sen}(xyz)\,dxdydz,$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (yx^3+z)\,dxdydz.$

   Aproxime su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:

   - Regla del punto medio en las variables x e y y regla del trapecio en la variable z.
   - Regla de Gauss-Legendre con 2 nodos en las tres variables.

6. Sabemos que el volumen V de un objeto S está dado por $V = \iiint_S d(x,y,z)$. Calcule una aproximación del volumen de una esfera de radio 2 utilizando reglas de cuadratura.
   Indicación: Utilice coordenadas esféricas.