

ALGEBRA III (525201)
Listado 4

1. Sea V un e.v. sobre \mathbb{R} , $\varphi : V \rightarrow V$, lineal tal que $\varphi^2 = Id$. Sea $V_+ = \{x \in V : \varphi(x) = x\}$ y $V_- = \{x \in V : \varphi(x) = -x\}$.

- a) Demuestre que $V = V_+ \oplus V_-$.
 b) Supongamos que $\dim V < \infty$ y $\varphi \neq Id$ y $\varphi \neq -Id$. Demuestre que es posible elegir una base de V tal que la matriz representante de φ con respecto a esta base en ambos espacios es de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad p + q = \dim(V).$$

2. Consideremos la matriz

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Demostrar que el polinomio característico de C_n es:

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda^1 + \alpha_0).$$

3. Dada la matriz definida por bloques $A_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix}$, donde I_n y J_n son matrices de dimensiones $n \times n$ con I_n matriz de identidad y J_n matriz de la forma:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar los valores y vectores propios de A_{2n} . (Indicación: Si $D_{2n} = |A_{2n} - \lambda I|$, muestre que: $D_{2n} = \lambda(\lambda - 2)D_{2n-2}$).

4. Sean las sucesiones u_n, v_n, w_n , $u_0 = v_0 = 1, w_0 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n, \\ v_{n+1} &= 2v_n, \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 3w_n. \end{aligned}$$

Calcule $\forall n \in \mathbb{N}, u_n, v_n, w_n$.

5. Determinar una base ortonormal de vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Además estudie el comportamiento de A^n cuando $n \rightarrow \infty$.

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$, considere la matriz $A = x \cdot y^t \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- a) Demuestre que x es vector propio de A .
- b) Pruebe que todo vector no nulo ortogonal a y es vector propio de A .
- c) Suponga que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Calcule todos los vectores propios de A . Demuestre que A es diagonalizable.

7. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{R}^n formada por vectores propios de A y sea λ_i el valor propio asociado a v_i . Sea $L : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $L(B) = A \cdot B$. Sea $B_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que su j -ésima columna es el vector v_i y las demás son nulas.

- a) Pruebe que $L(B_{ij}) = \lambda_i B_{ij}$.
- b) Demuestre que L es diagonalizable, es decir, existe una base de vectores propios de L .

8. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre $P, D \in M_3(\mathbb{R})$ con D matriz diagonal tal que $A = P^t DP$.

9. Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$. Suponga que los valores propios de A , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq D$. Dada $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, se define $f'(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) P_i$.

- a) Probar que $f'(A)$ es simétrica.
- b) Probar que los valores propios de $f'(A)$ son $\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)\}$.
- c) Probar que si $\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)\} \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $g'(f'(A)) = (g \circ f)'(A)$.

Use lo anterior para probar los siguientes resultados aplicados:

- d) Si $\forall i = 1, \dots, k, \lambda_i \neq 0$ entonces $A^{-1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{-1} P_i$
- e) Si $\forall i = 1, \dots, k, \lambda_i > 0$ entonces \sqrt{A} está bien definida y $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$
- f) Tomemos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ y denotemos por $e^A = f'(A)$. Pruebe que esta función satisface:
 - 1) $e^{0A} = I$
 - 2) $\forall t, s \in \mathbb{R}, e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$, concluir que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA}$ es invertible y que $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.