Tarea 3

Brayan Sandoval

P1) Sea $G=(V,A)$ una red, no necesariamente con un nodo fuente y un nodo sumidero, y $l, c : A \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, funciones de capacidad inferior y superior respectivamente. Se define una circulación en G como una función $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$ tal que:

- $\forall (u,v) \in A$, $l(u,v) \leq g(u,v) \leq c(u,v)$,
- $\forall u \in V$, $\sum_{v} g(u,v) = \sum_{v} g(v,u)$

a) Pruebe que si g es una circulación en G no nula, entonces existen ciclos $C_1, \dots, C_K$ en G tal que los arcos de G por los cuales pasa flujo positivo son exactamente los arcos de los ciclos anteriores, es decir $\{(u,v) \in A : g(u,v) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{K} A(C_i)$, donde $A(C_i)$ son los arcos del ciclo C_i.

Dem: Sea g una circulación en G no nula, entonces existe una arista $(u,v) \in A$ tal que $g(u,v) > 0$, por conservatividad de g en v se tiene que

$$\sum_{\bar{u}} g(\bar{u},v) = \sum_{\bar{u}} g(v,\bar{u})$$

dado que $g(u,v) > 0$

$$\underbrace{\sum_{\bar{u} \in V/\{u\}} g(\bar{u},v)}_{\geq 0} + \underbrace{g(u,v)}_{>0} = \sum_{\bar{u}} g(v,\bar{u})$$

así,

$$\sum_{\bar{u}} g(v,\bar{u}) > 0$$

por lo que $\exists v_1 \in V : g(v,v_1) > 0$, utilizando el mismo argumento se puede probar que $\exists v_2 \in V : g(v_1,v_2) > 0$ este proceso se puede hacer de forma infinita, considerando que G tiene una cantidad finita de vértices, entonces, necesariamente debe existir un camino que conecte el vértice v con el vértice u, de lo contrario G tendría que tener una cantidad numerable de vértices. De lo anterior se deduce que existe un ciclo en G con circulación positiva (todas sus aristas tienen circulación positiva) el proceso anterior se puede hacer para cualquier arista con circulación positiva, por lo que cada arista con circulación positiva pertenece a un ciclo, es decir, existen ciclos $C_1, \dots, C_k$ en G tales que

$$\{(u,v) \in A : g(u,v) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{k} A(C_i)$$ ■

b) Supongo que: $\ell \equiv 0$; $s,t \in V$ son nodo fuente y nodo sumidero de una red dado G respectivamente y que f es s-t flujo en G. Muestre que si g es una circulación no nula de G_f (la red residual asociado a f) y G_f no tiene ciclo de largo dos, entonces existe $f \neq f'$, un s-t flujo en G, tal que $Val(f') = Val(f)$.

dem: Sea $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definido por

$$f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \bar{c} & \text{si } (u,v) \in A \cap A(C) \\ f(u,v) - \bar{c} & \text{si } (u,v) \in A \text{ y } (v,u) \in A(C) \\ f(u,v) & \text{e.o.c} \end{cases}$$

donde $\bar{c} := \min_{(u,v) \in A(C)} g(u,v)$ y C es un ciclo en G_f tal que todas sus aristas tienen circulación positiva, el cual existe por (1.a.). Veamos que f' es un s-t flujo, para probar esto se debe cumplir

i) $0 < f'(u,v) \leq C(u,v)$, $\forall (u,v) \in A$.

Sea $(u,v) \in A \cap A(C)$, luego

$$f'(u,v) = f(u,v) + \bar{c}$$

Como $\bar{c} \geq 0$ y $f(u,v) \geq 0$ entonces $f'(u,v) \geq 0$, por otro lado

$$\begin{aligned} f'(u,v) &= f(u,v) + \bar{c} \\ &\leq f(u,v) + g(u,v) \\ &\leq f(u,v) + C_f(u,v) \\ &= \cancel{f(u,v)} + C(u,v) - \cancel{f(u,v)} \\ &= C(u,v) \end{aligned}$$

notar que al tener $(u,v) \in A \cap A(C)$, entonces $f(u,v) < C(u,v)$.

Sea $(u,v) \in A$ y $(v,u) \in A(C)$, luego $f'(u,v) = f(u,v) - \bar{c}$
como $f(u,v) \geq 0$ y $\bar{c} > 0$, entonces

$$f'(u,v) = f(u,v) - \bar{c} < c(u,v)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} f'(u,v) &= f(u,v) - \bar{c} \\ &\geq f(u,v) - \min_{(v,u)\in A(C)} g(v,u) \\ &\geq f(u,v) - g(v,u) \\ &\geq f(u,v) - c_f(v,u) \\ &= f(u,v) - f(u,v) = 0 \end{aligned}$$

notar que al tener $(u,v) \in A$ y $(v,u) \in A(C)$, entonces $c_f(v,u) = f(u,v)$.
si (u,v) no cumple con los casos anteriores, entonces

$$f'(u,v) = f(u,v)$$

por lo que $\quad 0 \leq f'(u,v) \leq c(u,v)$.

ii) f' es conservativo.

si $u \notin V(C)$, en este caso $\displaystyle\sum_v f'(u,v) = \sum_v f(u,v) = \sum_v f(v,u) = \sum_v f'(v,u)$

si $u \in V(C)$

$$\sum_v f'(u,v) = \sum_{v:(u,v)\in A\cap A(C)} f'(u,v) + \sum_{\substack{v:(u,v)\in A \\ \wedge (v,u)\in A(C)}} f'(u,v) + \sum_{v:\text{e.o.c}} f'(u,v)$$

$$= \sum_{v:(u,v)\in A\cap A(C)} (f(u,v) + \bar{c}) + \sum_{\substack{v:(u,v)\in A \\ \wedge (v,u)\in A(C)}} (f(u,v) - \bar{c}) + \sum_{v,\text{e.o.c}} f(u,v)$$

de aquí se desprenden 4 casos.

1) $(u,v) \in A \cap A(c)$ y $(w,u) \in A \cap A(c)$

luego

$$\sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v}) = \sum_{\bar{v}:(u,v)\in A\cap A(c)} f'(u,\bar{v}) + \cancel{\sum_{\substack{\bar{v}:(u,\bar{v})\in A\\ \wedge(\bar{v},u)\in A(c)}} f'(u,\bar{v})}^{\,0} + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f'(u,\bar{v})$$

$$= \sum_{\bar{v}:(u,v)\in A\cap A(c)} (f(u,\bar{v})+\bar{c}) + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f(u,\bar{v})$$

$$= f(u,v)+\bar{c} + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f(u,\bar{v})$$

$$= \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v}) + \bar{c}$$

por otro lado, un procedimiento totalmente analogo muestra que

$$\sum_{\bar{v}} f'(\bar{v},u) = \sum_{\bar{v}} f(\bar{v},u)+\bar{c} \quad \cancel{= \sum_{\bar{v}} f(u,u)}$$

$$= \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v})+\bar{c}$$

así, $\displaystyle\sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v}) = \sum_{\bar{v}} f'(\bar{v},u)$

2) $(u,v)\in A$ y $(v,u)\in A(c)$
$(u,w)\in A$ y $(u,w)\in A(c)$

luego

$$\sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v}) = \sum_{\substack{\bar{v}:(u,\bar{v})\in A,\, y\\ (\bar{v},u)\in A(c)}} f'(u,\bar{v}) + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f'(u,\bar{v}) + \sum_{\bar{v}:(u,\bar{v})\in A\cap A(c)} f'(u,\bar{v})$$

$$= \sum_{\substack{\bar{v}:(u,\bar{v})\in A\\ y\ (\bar{v},u)\in A(c)}} (f(u,\bar{v})-\bar{c}) + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f'(u,\bar{v}) + \sum_{\bar{v}:(u,\bar{v})\in A\cap A(c)} (f(u,\bar{v})+\bar{c})$$

$$= f(u,v)-\cancel{\bar{c}} + \sum_{\bar{v}:e.o.c} f(u,\bar{v}) + f(u,w)+\cancel{\bar{c}}$$

$$= \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v})$$

haciendo un procedimiento totalmente analogo, se deduce que

$$\sum_{\bar{v}} f'(\bar{v},w) = \sum_{\bar{v}} f(\bar{v},u) = \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v}) = \sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v})$$

3) $(v,u) \in A$ y $(u,v) \in A(c)$

$(w,u) \in A$ y $(w,u) \in A(c)$

procediendo de la misma forma que en 2 se tiene que

$$\sum_{\bar{v}} f'(u,v) = \sum_{\bar{v}} f(\bar{v},u)$$

4) $(v,u) \in A$ y $(u,v) \in A(c)$

$(u,w) \in A$ y $(w,u) \in A(c)$

para luego

$$\sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v}) = \cancel{\sum_{\bar{v}:(u,\bar{v}) \in A \wedge A(c)} f'(u,\bar{v})}^{\,0} + \sum_{\substack{\bar{v}:(u,\bar{v}) \in A \\ y\ (\bar{v},u) \in A(c)}} f'(u,v) + \sum_{\bar{v}: e.o.c} f'(u,\bar{v})$$

$$= f(u,w) - \bar{c} + \sum_{\bar{v}: e.o.c} f(u,\bar{v})$$

$$= \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v}) - \bar{c}$$

de manera análoga

$$\sum_{\bar{v}} f'(\bar{v},u) = f(v,u) - \bar{c} + \sum_{\bar{v}: e.o.c} f'(\bar{v},u)$$

$$= f(v,u) - \bar{c} + \sum_{\bar{v}: e.o.c} f(\bar{v},u)$$

$$= \sum_{\bar{v}} f(\bar{v},u) - \bar{c} = \sum_{\bar{v}} f(u,\bar{v}) - \bar{c} = \sum_{\bar{v}} f'(u,\bar{v})$$

luego f' es conservativa.

iii) $Val(f) = Val(f')$

por def

$$Val(f') = \sum_{(s,v) \in A} f'(s,v)$$

Si $s \notin A(c)$, se tiene

$$Val(f') = \sum_{(s,v) \in A} f'(s,v) = \sum_{v} f(s,v) = Val(f)$$

si $s \in V(C)$

$$Vol(f') = \sum_{v} f'(s,v)$$

$$= \sum_{(s,v)\in A \cap A(C)} f'(s,v) + \sum_{\substack{(s,v)\in A \\ y\ (v,s)\in A(C)}} f'(s,v) + \sum_{v:\ e.o.c} f'(s,v)$$

como $s \in V(C)$, entonces, existen $w, v \in V$ tales que

$(s,w) \in A$ y $(s,w) \in A(C)$

$(s,v) \in A$ y $(v,s) \in A(C)$

luego

$$Vol(f') = \sum_{(s,v)\in A\cap A(C)} (f(s,v)+\bar{c}) + \sum_{\substack{(s,v)\in A \\ y\ (v,s)\in A(C)}} (f(s,v)-\bar{c}) + \sum_{v:\ e.o.c} f(s,v)$$

$$= f(s,w) + \cancel{\bar{c}} + f(s,v) - \cancel{\bar{c}} + \sum_{v:\ e.o.c} f(s,v)$$

$$= \sum_{v} f(s,v) = Vol(f).$$

finalmente f' es un s-t flujo y $Vol(f) = Vol(f')$.

c) Sean ahora f, f' dos s-t flujos diferentes de una red dada G con $Vol(f) = Vol(f')$. Se construye la función $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ por:

- inicialmente $g(u,v) = 0$, $\forall (u,v) \in A(G_f)$
- Luego, $\forall (u,v) \in A$, si $f'(u,v) > f(u,v)$ entonces $g(u,v) = f'(u,v) - f(u,v)$

Por otro lado, si $f(u,v) > f'(u,v)$, entonces $g(v,u) = f(u,v) - f'(u,v)$.

Pruebe que g es una circulación no nula en G_f.

dem:

Sea $(u,v) \in A$

•) si $f'(u,v) > f(u,v) \Rightarrow g(u,v) = f'(u,v) - f(u,v)$

notemos que $C(u,v) \geq f'(u,v) > f(u,v)$

$$\Rightarrow C_f(u,v) = C(u,v) - f(u,v)$$

luego

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f'(u,v) - f'(u,v) \\ &\leq C(u,v) - f(u,v) \\ &\leq C_f(u,v) \end{aligned}$$

•) si $f(u,v) > f'(u,v) \Rightarrow g(v,u) = f(u,v) - f'(u,v)$

notemos que $f(u,v) > f'(u,v) \geq 0 \Rightarrow f(u,v) > 0$

luego $C_f(v,u) = f(u,v)$

$$g(v,u) = f(u,v) - f'(u,v) \leq C_f(v,u)$$

•) En caso contrario $g(u,v) = 0 \leq C_f(u,v)$

así, $\forall (u,v) \in A$: $0 \leq g(u,v) \leq C_f(u,v)$.

por otro lado, para la conservatividad.

P2

Sea $u \in V(G_f)$

$$\sum_v g(u,v) = \sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)>f(u,v)}} g(u,v) + \cancel{\sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)\leq f(u,v)}} g(u,v)}^{\,0}$$

$$= \sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)>f(u,v)}} (f'(u,v) - f(u,v))$$

$$= \sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)>f(u,v)}} f'(u,v) - \sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)>f(u,v)}} f(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{v:(u,v)\in A:\\ f'(u,v)>f(u,v)}} f'(v,u) - \sum_{\substack{v:(u,v)\in A\\ f'(u,v)>f(u,v)}} f(v,u)$$

$$= \sum_{\substack{v:(u,v)\in A\\ f'(u,v)>f(u,v)}} (f'(v,u) - f(v,u))$$

$$= \sum_v g(v,u)$$

Como $Val(f) = Val(f')$ entonces

$$\sum_v f(v,t) = \sum_v f'(v,t) \quad y \quad \sum_v f(s,v) = \sum_v f'(s,v)$$

luego

$$\sum_v g(v,t) = 0 \quad y \quad \sum_v g(s,v) = 0$$

Por tanto g es una circulación de G_f. $\blacksquare$

Escaneado con CamScanner

P2 Sea $G=(V,A)$ una red, con $s\in V$ un nodo fuente y $t\in V$ un nodo sumidero, y $l, c: A \to \mathbb{R}_0^+$, funciones de capacidad inferior y superior.

a) Pruebe que:

$$\min_{\substack{f \text{ s-t cota flujo} \\ \text{en } G}} Val(f) = \max_{\substack{(S,T) \text{ corte} \\ \text{de } G}} \{ l(S,T) - c(T,S) \}$$

dem:

($\geq$) Sea (S,T) un corte de G y f un s-t flujo luego

$$\begin{aligned} l(S,T) - c(T,S) &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} l(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} c(v,u) \\ &\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\ &= Val(f) \end{aligned}$$

Como esto vale para cualquier S,T corte y para todo s-t flujo en particular se tiene que

$$\max_{(S,T) \text{ corte}} \{ l(S,T) - c(T,S) \} \leq \min_{\substack{s\text{-}t \text{ flujo} \\ \text{de } G}} Val(f)$$

($\leq$) Se define la red residual $\hat{G}_f = (\hat{V}_f = V, \hat{E}_f)$ con función $l_f, c_f: \hat{E}_f \to \mathbb{R}_0^+$ dado por $\forall (u,v) \in E$:

- Si $f(u,v) < c_f(u,v)$, entonces $(u,v) \in \hat{E}_f$ y $c_f(u,v) = c(u,v)$, $l_f(u,v) = f(u,v)$
- Si $f(u,v) > l(u,v)$, entonces $(v,u) \in \hat{E}_f$ y $c_f(v,u) := f(u,v)$, $l_f(v,u) := l(u,v)$.

Dado f un $s-t$ flujo y P un camino de disminución de flujo, si denotamos $\bar{c} = \min\{c_f(u,v) - l_f(u,v) : (u,v) \in E_f(P)\}$ la capacidad mínima residual de P, entonces se define el $s-t$ flujo $\bar{f}$ de G por: $\forall (u,v) \in E$

$$\bar{f}(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \cap E(P) \\ f(u,v) - \bar{c} & \text{si } (u,v) \in E \wedge (v,u) \in E(P) \\ f(u,v) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

notemos que ~~este~~ esta función es idéntica al flujo definido en el problema 1b por lo que $\bar{f}$ es un $s-t$ flujo. notar que la única diferencia entre $\bar{f}$ y f' es que f' ... modifica un flujo inicial pero mantiene su valor, ~~esta~~ en cambio $\bar{f}$, modifica un flujo inicial pero disminuye su valor.

ahora, para mostrar la desigualdad demostremos el siguiente teorema:

teorema: Sea $\bar{f}$ un $s-t$ flujo. Entonces $\bar{f}$ es de valor mínimo si y solo si $\hat{G}_{\bar{f}}$ no tiene un camino de disminución de flujo

dem:

($\Rightarrow$) Sea $\bar{f}$ un $s-t$ flujo tal que $\bar{f}$ es de valor mínimo, mediante el método anterior (~~d~~ definición de $\bar{f}$) ... dado un flujo se puede construir otro con valor menor y este método se detiene cuando no ~~se~~ se puede encontrar un camino que una t con s en $\hat{G}_{\bar{f}}$ es decir $\hat{G}_{\bar{f}}$ no tiene un camino de disminución de flujo

($\Leftarrow$) Supongamos $\hat{G}_{\bar{f}}$ no tiene un camino de disminución de flujo
Definamos $T := \{u \in V : \exists P_{t,u}$ camino de t a u en $\hat{G}_{\bar{f}}\}$, $\therefore$ como $s \notin T$, ~~entonces~~ $(S = V - T, T)$ es un corte en G. Notemos que si dado $(u,v) \in E$, si $u \in S$ y $v \in T$, entonces $\bar{f}(u,v) = l(u,v)$ pues de lo contrario $(v,u) \in \hat{E}_{\bar{f}}$ y $u \in T$. Por otro lado, si $u \in T$ y $v \in S$ entonces $\bar{f}(u,v) = c(u,v)$, pues de lo contrario, $(u,v) \in \hat{E}_{\bar{f}}$ y $v \in T$.

así, se tiene que:

$$Val(f) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} \bar{f}(u,v) - \sum_{u \in T} \sum_{v \in S} \bar{f}(u,v)$$
$$= \ell(S,T) - c(T,S)$$

así,

$$\min_{f\ s\text{-}t\ \text{flujo}} Val(f) \leq \max_{\substack{(S,T)\ \text{corte} \\ \text{de } G}} \{ \ell(S,T) - c(T,S) \} \quad \blacksquare$$

b) El problema de flujo mínimo consiste en determinar un s-t flujo de valor mínimo en G. Muestre que este problema puede ser resuelto en tiempo polinomial cuando todas las capacidades son enteras.

dem: se define el algoritmo

algorithm: (G, c, s, t)
inputs: $G = (V, E)$ una red sin ciclos de largo 2, c función de capacidad y $s, t \in V$ nodo fuente y sumidero

1. $f \leftarrow 0$
2. while $\exists P$ camino de disminución ~~de~~ de flujo en $\hat{G}_{\bar{f}}$ mínimo
3. $\bar{c} \leftarrow \min\{ c_f(u,v) - \ell_f(u,v) : (u,v) \in E(P) \}$
4. $f \leftarrow \bar{f}$
5. end while
6. return f.

notemos que basicamente es el algoritmo de Edmonds-Karps con la diferencia que $\bar{c}$ ~~x~~ y $\hat{G}_{\bar{f}}$ se definen de ~~forma~~ otra forma. En el peor de los casos determinar $\bar{c}$ requiere $O(|E_f|)$ operaciones ~~de~~, determinar $\hat{G}_{\bar{f}}$ requiere $O(|E|)$ operaciones luego por teorema el algoritmo es del orden $O(|V| \cdot |E|^2)$ es decir es polinomial siempre y cuando las capacidades $\in \mathbb{Z}_0^+$ $\blacksquare$