UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TEST 2 ALGEBRA III 525201-0 (Comentarios)

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Duración: 110 minutos. Adicionalmente, tendrán 20 minutos para enviar su desarrollo por CANVAS y a modo de respaldo por E-mail.

Problema 1. Sea $m = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y considere el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V := \mathcal{P}_m(\mathbb{K})$ de los polinomios de grado a lo más m, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $B = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ la base canónica de V, con $p_0(t) := 1$, $\forall\, j \in \{1, ..., m\} : p_j(t) := t^j$. Se define ahora el conjunto

$$S := \left\{ p := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, p_j \in V \quad \Big| \quad \forall\, j \in \{0, ..., m\} : \alpha_j = \alpha_{m-j} \right\}.$$

1.1) Pruebe que S es un subespacio vectorial de V. **(10 puntos)**
Primero, mostramos que $S \neq \emptyset$. Para esto, consideramos el escalares $\{\alpha_j\}_{j=0}^m \subseteq \mathbb{K}$ tal que $\forall\, j \in \{0, ..., m\} : \alpha_j = 0$. De manera simple, se verifica que $\forall\, j \in \{0, ..., m\} : \alpha_j = \alpha_{m-j}$, con lo cual se deduce que $p := \sum_{j=0}^m \alpha_j\, p_j = \theta$ es un elemento de S, y por tanto $S \neq \emptyset$.
Segundo, probamos que $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \forall\, q, r \in S : \lambda\, q + s \in S$.
Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $q, r \in S$. Esto significa que $\exists\, \{\alpha_j\}_{j=0}^m, \{\beta_j\}_{j=0}^m \subseteq \mathbb{K}$ tales que

$$q = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, p_j\,, \quad \text{tal que } \forall\, j \in \{0, ..., m\} : \alpha_j = \alpha_{m-j}\,,$$
$$r = \sum_{j=0}^{m} \beta_j\, p_j\,, \quad \text{tal que } \forall\, j \in \{0, ..., m\} : \beta_j = \beta_{m-j}\,.$$

Esto nos conduce a expresar

$$\lambda\, q + r = \sum_{j=0}^{m} (\lambda\, \alpha_j + \beta_j) p_j = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j\, p_j\,, \quad \text{donde } \forall\, j \in \{0, ..., m\} : \gamma_j := \lambda\, \alpha_j + \beta_j\,.$$

En vista que $\forall\, j \in \{0, ..., m\} : \gamma_j = \gamma_{m-j}$, se deduce que propiedad.
Conclusión: S es un subespacio vectorial de V.

1.2) Demuestre que $S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = V$. ¿Será suma directa? **(10 puntos)** Justifique su respuesta, según el caso.
Se propone un desarrollo, siguiendo la definición solamente. Otros desarrollos alternativos, requieren probar independencia lineal de al menos un conjunto generador de vectores, entre otras cosas.

Primero, veamos que $S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = V$. Por doble inclusión.
$S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) \subseteq V$: Como S y $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales de $V := \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{K})$, se tiene que $S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) \subseteq V$.

$V := \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{K}) \subseteq S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$: Sea $q \in V$, entonces $\exists\, \{a_j\}_{j=0}^m \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$q = \sum_{j=0}^{m} a_j\, p_j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, p_j + \sum_{j=n}^{2n} a_j\, p_j = \left(\sum_{j=n}^{2n} a_j\, p_j + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2n-j}\, p_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, p_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_{2n-j}\, p_j \right)$$
$$= \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j\, p_j + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{2n-j})\, p_j\,, \quad \text{donde } \alpha_j := \begin{cases} a_j & j \in \{n, ..., 2n\} \\ a_{2n-j} & j \in \{0, ..., n-1\} \end{cases}.$$

Como $\forall\, j \in \{0, ..., 2n\} \,:\, \alpha_j = \alpha_{2n-j}$, se tiene $r := \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j\, p_j \in S$. Además, se observa que $s := \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{2n-j})\, p_j \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$. Se deduce así la descomposición $q = r + s \in S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$. De esta manera, se establece que $V \subseteq S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Conclusión: $S + \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = V$.

Analicemos ahora $S \cap \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$:

Sea $q \in S \cap \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$. Esto implica que $q \in S$ y $q \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$. Como $q \in S$, tenemos que $\exists \{\beta_j\}_{j=0}^{m} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $q = \sum_{j=0}^{m} \beta_j\, p_j$, donde además $\forall\, j \in \{0, ..., 2n\} \,:\, \beta_j = \beta_{2n-j}$. En vista que $\{p_j\}_{j=0}^{m}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_m(\mathbb{K})$ y $q \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$, se desprende que $\forall\, j \in \{n, ..., 2n\} \,:\, \beta_j = 0$. Esto implica también que $\forall\, j \in \{0, ..., n-1\} \,:\, \beta_j = \beta_{2n-j} = 0$. De esta forma, se deduce que $q = \theta$, y en consecuencia $S \cap \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) \subseteq \{\theta\}$. Como la otra inclusión siempre se cumple, se concluye que $S \cap \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = \{\theta\}$, y por tanto la suma es directa, i.e. $S \oplus \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) = V$.

Problema 2. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la función definida por

$$\forall\, \boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, T(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_5 \end{pmatrix}.$$

2.1) Pruebe que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. **(10 puntos)**

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, y $x := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), y := (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5$. Entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda\, x + y) &= \begin{pmatrix} (\lambda\, x_1 + y_1) + (\lambda\, x_2 + y_2) & (\lambda\, x_2 + y_2) + (\lambda\, x_3 + y_3) \\ (\lambda\, x_3 + y_3) + (\lambda\, x_4 + y_4) & (\lambda\, x_4 + y_4) + (\lambda\, x_5 + y_5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\,(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) & \lambda\,(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) \\ \lambda\,(x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) & \lambda\,(x_4 + x_5) + (y_4 + y_5) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & y_2 + y_3 \\ y_3 + y_4 & y_4 + y_5 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\, T(x) + T(y)\,. \end{aligned}$$

Y de esta manera, se concluye que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

2.2) Determine $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, indicando una base en cada caso. **(10 puntos)**

El kernel de T viene dado por $\mathrm{Ker}(T) := \{x \in \mathbb{R}^5 \,:\, T(x) = \Theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Tenemos

$$x \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow T(x) = \Theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = -t \\ x_5 = t \\ t \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Así, se deduce que $\mathrm{Ker}(T) = \{(t, -t, t, -t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}^5\} = \langle\{(1, -1, 1, -1, 1)\}\rangle$, siendo $\{(1, -1, 1, -1, 1)\}$ una base de este kernel.

Siendo $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, luego de aplicar el Teorema de la dimensión: $n(T) + r(T) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$, se deduce que $r(T) = 4$. Así se concluye que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, y una base de $\mathrm{Im}(T)$ puede ser la canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, i.e.

$$B := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Observación: Otra forma de desarrollar esta segunda parte, es notando que para cualquier $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, se tiene

$$T(x) \,=\, \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_2+x_3 \\ x_3+x_4 & x_4+x_5 \end{pmatrix} \,=\, x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo cual implica que

$$\mathrm{Im}(T) \,=\, \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

A partir de aquí hay que justificar que el conjunto generador es l.d., luego deducir un conjunto generar l.i de $\mathrm{Im}(T)$ (con las justificaciones respectivas) y concluir.

2.3) Determine $T^{-1}(\boldsymbol{A})$, siendo $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(10 puntos)**

La notación T^{-1} es empleada para dos fines: denotar la inversa de la aplicación lineal T (cuando ésta es biyectiva) o bien para aludir al conjunto Imagen Inversa de T en $\boldsymbol{A}$. Ciertamente, cuando T es biyectiva, el conjunto imagen inversa de T en $\boldsymbol{A}$ es unitario, cuyo único elemento es $T^{-1}(\boldsymbol{A})$. Dado que T no es biyectiva (por no ser inyectiva), tenemos para $x := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$:

$$x \in T^{-1}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow T(x) \,=\, \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_2+x_3 \\ x_3+x_4 & x_4+x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \,=\, t \\ x_2 \,=\, 1-t \\ x_3 \,=\, t \\ x_4 \,=\, 1-t \\ x_5 \,=\, t \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De esta forma, se deduce

$$T^{-1}(\boldsymbol{A}) \,=\, \{(0,1,0,1,0) \,+\, t\,(1,-1,1,-1,1) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Problema 3. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de **dimensión infinita**, y $T, S \in \mathcal{L}(V)$. **(10 puntos)**
Demostrar que

$$ST \in \mathcal{L}(V) \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T) \,=\, \{\theta\} \\ \mathrm{Ker}(T) \,=\, \{\theta\}. \end{cases}$$

Observación: Por lo discutido en clases, y en el entendido que trabajaron al menos el ejercicio 9 del Listado 4, se puede asegurar que $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(V)$. Su validación no reviste mayor dificultad.

($\Rightarrow$): Sea $v \in \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T)$. Entonces, $S(v) = \theta$ y como $v \in \mathrm{Im}(T)$, $\exists\, w \in V : T(w) = v$. Luego, resulta que $(ST)(w) = S(T(w)) = S(v) = \theta$, lo cual implica que $w \in \mathrm{Ker}(ST) = \{\theta\}$. Así, $w = \theta$, y por ende $v = T(w) = \theta$. Esto permite concluir que $\mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\theta\}$.
Por otro lado, si $u \in \mathrm{Ker}(T)$, entonces $T(u) = \theta$, lo cual a su vez conduce a decir que $S(T(u)) = S(\theta) = \theta$, es decir $u \in \mathrm{Ker}(ST) = \{\theta\}$. Así, también concluimos que $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta\}$.

($\Leftarrow$): Sea $w \in \mathrm{Ker}(ST)$. Entonces $(ST)(w) = S(T(w)) = \theta$, lo cual permite inferir que $T(w) \in \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\theta\}$ (por hipótesis). Esto implica que $T(w) = \theta$, i.e. $w \in \mathrm{Ker}(T) = \{\theta\}$ (por hipótesis también). Finalmente, se tiene que $w = \theta$, lo cual conduce a concluir que $\mathrm{Ker}(ST) = \{\theta\}$, i.e. ST es inyectiva.

Comentario: la mayoría de los desarrollos revisados, por alguna extraña razón, se fueron por las ramas. Algunos incluso invocaron el Teorema de la dimensión, el cual es válido en dimensión finita (no es el caso). Se sugiere leer cuidadosamente el enunciado para tener claridad de qué herramientas discutidas, demostradas en clases, pueden aplicarse.