UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525222)
Listado Nº 6 (Ecuación de ondas)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

1. **(Ecuación de ondas para una cuerda vibrante con fuerza de gravedad).** Generalize la derivación vista en clase de la ecuación de ondas para una cuerda horizontal de longitud L tomando en cuenta la fuerza de gravedad. Muestre que el movimiento vertical de la cuerda (altura $y(x,t)$ en la posición $x \in [0,L]$ al tiempo $t \geq 0$) satisface la EDP

$$\partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = -g \ , \tag{1}$$

donde $g \simeq 9,81 \ \mathrm{m\,s^{-2}}$ es la acceleración de la gravedad.

2. **(PVIF para una cuerda vibrante con fuerza de gravedad).** Considere la EDP (1) en el dominio $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 0 < x < 1 \ , \ t > 0\}$.

(a) Halle la solución $y_0(x)$ de (1) independiente del tiempo que satisface las condiciones de frontera $y_0(0) = 0$, $y_0(1) = 0$.

(b) Muestre que si $y(x,t)$ es solución de (1), luego $\tilde{y}(x,t) = y(x,t) - y_0(x)$ es solución de la ecuación de ondas $\partial_t^2 \tilde{y}(x,t) - c^2 \partial_x^2 \tilde{y}(x,t) = 0$.
Deduzca que la solución general de (1) en el dominio D está dada por

$$y(x,t) = \frac{g}{2c^2} x(x-1) + F(x+ct) + G(x-ct) \ , \tag{2}$$

donde $F : [0, \infty[$ y $G :]-\infty, 1]$ son funciones arbitrarias de clase C^2.

(c) Resuelve el siguiente PVIF modelando una cuerda vibrante inicialmente al reposo con fuerza de gravedad

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = -g \quad , \quad (x,t) \in D \\ y(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ y(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \partial_t y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \ . \end{cases}$$

Indicación: usar el resultado (2), asumiendo sin perdida de generalidad que $F(0) = 0$.
Cabe notar que el PVIF solamente admite una *solución generalizada*, en el sentido que su solución $y(x,t)$ satisface la EDP (1) en

$$D_{\text{reg}} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, t > 0, x \pm ct \notin \mathbb{Z}\right\} \ \subset \ D \ ,$$

a pesar de no ser de clase C^2 en todo D.

3. **(Cuerda vibrante semi-infinita).**
Resolver el siguiente PVIF modelando el movimiento de una cuerda semi-infinita asujetada en su extremidad izquierda

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2\partial_x^2 y(x,t) = 0 \quad , \quad x > 0, t > 0 \\ y(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = f(x) \quad , \quad x \geq 0 \\ \partial_t y(x,0) = g(x) \quad , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

donde $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es de clase C^2, $f(0) = 0$ y $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Explicite condiciones adicionales sobre f y g para que la solución sea de clase C^2.

4. **(Cuerda vibrante con una posición inicial que no es de clase C^1).**
Considere el problema de la cuerda vibrante modelado por el siguiente PVIF

$$(\text{PVIF}) \quad \begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2\partial_x^2 y(x,t) = 0 & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ y(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(L,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \\ \partial_t y(x,0) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq L\ , \end{cases}$$

donde $0 < L < \infty$ es la longitud de la cuerda y la posición inicial de la cuerda está dada por la función f definida sobre $[0, L]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ell x}{x_0} & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\ell(L-x)}{L-x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{3}$$

con $\ell > 0$ y $0 < x_0 < L$.

(a) Sea $\tilde{f}_I(x)$ la extensión $2L$-periódica impar de f. Muestre explicitamente que

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}_I(x+ct) + \tilde{f}_I(x-ct)\Big)$$

es una solución generalizada de (PVIF) en el siguiente sentido: $y(x,t)$ satisface las condiciones de frontera, satisface la primera condición inicial para todo $x \in [0,L]$ y la segunda CI para $x \in [0,L] \setminus \{x_0\}$, y satisface la ecuación de ondas en

$$D_{\text{reg}} = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, t > 0, x \pm ct - x_0 \notin 2L\mathbb{Z}, x \pm ct + x_0 \notin 2L\mathbb{Z}\Big\}\ .$$

(b) Determine la serie de senos de f. Muestre que esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y que su suma $S(x)$ es igual a $f(x)$ para todo $x \in [0, L]$.
¿ Como se relaciona $S(x)$ con los valores de la función f cuando $x \notin [0, L]$?

(c) Usando los resultados de la pregunta anterior, exprese la solución $y(x,t)$ como una serie uniformemente convergente en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ (justifique que la serie converge uniformemente en $\overline{D}$).

(d) Halle los valores de x_0 tales que las armónicas $n = kn_0$ se anulan para todo $k \in \mathbb{N}^\star$, donde n_0 es un entero positivo dado.

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

5. **(Cuerda vibrante no horizontal con fuerza de gravedad).**
Sea $h > 0$ y $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < 1\ ,\ t > 0\}$. Considere el siguiente PVIF para una cuerda vibrante no horizontal inicialmente inmóbil con fuerza de gravedad

$$
\text{(PVIF)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = -g \quad , \quad (x,t) \in D \\ y(0,t) = 1 \quad , \quad t \geq 0 \\ y(1,t) = 1 + h \quad , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 1 + hx \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \partial_t y(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

(a) Halle la solución $y_0(x)$ independiente del tiempo de $\partial_t^2 y - c^2 \partial_x^2 y = -g$ que satisface las CF $y_0(0) = 1$, $y_0(1) = 1 + h$.

(b) Muestre que si $y(x,t)$ es solución de (PVIF), luego $\widetilde{y}(x,t) = y(x,t) - y_0(x)$ satisface

$$
\text{(PVIFH)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 \widetilde{y}(x,t) - c^2 \partial_x^2 \widetilde{y}(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in D_{\text{reg}} \\ \widetilde{y}(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \widetilde{y}(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \widetilde{y}(x,0) = -f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \partial_t \widetilde{y}(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

con $f(x) = \frac{g}{2c^2} x(x-1)$, $0 \leq x \leq 1$.

(c) Resuelve (PVIFH). Deduzca que la solución generalizada de (PVIF) está dada por

$$
y(x,t) = \frac{g}{2c^2} x(x-1) + hx + 1 - \frac{1}{2}\Big(\widetilde{f}_I(x+ct) + \widetilde{f}_I(x-ct)\Big) \ ,
$$

donde $\widetilde{f}_I(x)$ es la extensión 2-periódica impar de f (por solución generalizada de (PVIF) se entiende que $y(x,t)$ satisface las CF para todo $t \geq 0$, las CIs para todo $x \in [0,1]$ y la EDP en el conjunto D_{reg} del Problema 2).

6. **(Evaluación 2, 2024-2).**
Resolver el PVIF

$$
\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = 0 & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ y(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(\pi,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = \sin(2x) & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \partial_t y(x,0) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq \pi\ . \end{cases}
$$

Indicación: Recuerde que los valores propios λ_n y funciones propias $u_n(x)$ del Problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}
$$

están dados por $\lambda_n = n^2$ y $u_n(x) = B_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, con $B_n \in \mathbb{R}, B_n \neq 0$ (se puede usar este resultado sin demostrarlo).

7. **(Cuerda vibrante con una velocidad inicial que no es de clase C^1).** (1^{era} evaluación recuperativa 2024-1)
Considere el problema de la cuerda vibrante modelado por el siguiente PVIF

$$
\text{(PVIF)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = 0 & , \quad 0 < x < L, t > 0 \\ y(0,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(L,t) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq L \\ \partial_t y(x,0) = g(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \, , \end{cases}
$$

donde $0 < L < \infty$ es la longitud de la cuerda y la velocidad inicial de la cuerda está dada por la función g definida sobre $[0, L]$ por

$$
g(x) = \begin{cases} \frac{\ell\, x}{x_0} & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\ell(L-x)}{L-x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{4}
$$

con $\ell > 0$ y $0 < x_0 < L$.

(a) Sea $\tilde{g}_I(x)$ la extensión $2L$-periódica impar de g. Muestre explicitamente que

$$
y(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_I(x') \mathrm{d}x'
$$

es una solución generalizada de (PVIF) en el siguiente sentido: $y(x,t)$ satisface las condiciones de frontera e iniciales y satisface la ecuación de ondas en

$$
D_{\text{reg}} = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, t > 0, x \pm ct - x_0 \notin 2L\mathbb{Z}, x \pm ct + x_0 \notin 2L\mathbb{Z} \right\} .
$$

(b) Usando los resultados del Problema 4, exprese la solución $y(x,t)$ como una serie uniformemente convergente en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ (justifique que la serie converge uniformemente en $\overline{D}$).

(c) Halle los valores de x_0 tales que las armónicas $n = kn_0$ se anulan para todo $k \in \mathbb{N}^\star$, donde n_0 es un entero positivo dado.

Noviembre 25, 2025.
DS/ds