Estrategia de pivoteo parcial

Necesidad del pivoteo: Consideremos la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e intentemos obtener su factorización LU:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_2 - (m_{21})F_1 \\ F_3 - (m_{31})F_1}}$$

donde

$$m_{21} = \frac{-2}{0} \quad \text{y} \quad m_{31} = \frac{4}{0} \qquad ⚠ .$$

⚠ Observamos que no podemos continuar debido a la división por cero causada porque el pivote es 0. Es decir, el algoritmo de eliminación gaussiana (o el de factorización LU) sólo puede llevarse a cabo **si todos los pivotes son no nulos.**

- Para poder resolver el sistema, debe **intercambiarse la primera fila con cualquiera de las otras de manera de evitar el pivote cero**. Por ejemplo, podemos intercambiar la primera con la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Por otra parte, puede demostrarse que la **estabilidad** del método de eliminación gaussiana en cuanto a **propagación de errores de redondeo** se deteriora si los multiplicadores m_{ij} son números muy grandes en módulo.
- Una forma de evitar ambos inconvenientes, pivotes nulos y multiplicadores grandes en módulo, es realizar en cada paso el intercambio de ecuaciones que produzca el **pivote mayor posible en módulo**. Esto estrategia se denomina **pivoteo parcial**.

Ejercicio: Obtener la factorización LU de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ usando la estrategia de pivoteo parcial.

Solución:

Paso 1: Primero, identificamos el mayor número en módulo de la primera columna (encerrado por $\bigcirc$), el cual será nuestro nuevo pivote. Entonces realizamos un intercambio de las filas $F1$ y F_3 para que así el nuevo pivote quede en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para llevar un registro de los intercambio de filas utilizamos matrices de permutación $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, etc, en donde $\boldsymbol{P}_0$ es la matriz identidad. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Realizamos operaciones por filas (F) para transformar en 0 los elementos de la primera columna bajo la diagonal, es decir, aquellos encerrados en $\bigcirc$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{F_2 - (m_{21})F_1 \\ F_3 - (m_{31})F_1}} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$m_{21} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad m_{31} = \frac{0}{-5} = 0.$$

Notar que el elemento en la posición $(3,1)$ de la matriz ya era 0. Es por ello que m_{31} es 0.

Por otro lado, podemos comenzar a deducir la matriz triangular inferior $\boldsymbol{L}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & & \\ m_{31} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -1/5 & & \end{pmatrix}$$

Debemos tener cuidado con los intercambios de filas ya que también alterarán el orden de los multiplicadores.

Paso 3: Identificamos el mayor número en módulo desde la posición $(2,2)$ hacia abajo. Dicho número, encerrado por $\bigcirc$, será nuestro nuevo pivote. Entonces realizamos un intercambio de las filas F_2 y F_3 para que así el nuevo pivote quede en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intercambiar F_2 con F_3, también debemos intercambiar el orden de los multiplicadores que llevamos hasta ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ -1/5 & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/5 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Paso 4: Realizamos operaciones por filas (F) para transformar en 0 los elementos de la segunda columna bajo la diagonal, es decir, aquellos encerrados en ◯:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \text{-3/5} & 2/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - (m_{32})F_2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$m_{32} = \frac{-3/5}{1} = -\frac{3}{5}.$$

Así, la matriz triangular superior obtenida es: $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Además

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/5 & 1 & \\ 0 & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/5 & 1 & \\ 0 & -3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, hemos obtenido la factorización LU de la matriz $\boldsymbol{A}$ usando la estrategia de pivoteo parcial. Por tanto, se satisface que

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},$$

donde $\boldsymbol{P}$ es la última matriz de permutación obtenida. En este ejemplo,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación: En Octave la factorización se obtiene de la siguiente manera:

```
>> [L,U,P] = lu(A)
```

Solución de sistemas mediante factorización LU con pivoteo parcial

1. Multiplicamos a izquierda por la matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} \iff \begin{cases} \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

2. Resolver $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$ y, luego,
3. Resolver $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.