Clase 17: Convergencia absoluta, condicional y series de potencias

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Definición 17.1

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Ejemplo 17.2

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ es absolutamente convergente. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

y luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge (por ejemplo por el Criterio de la integral, o por comparación directa con $b_n = \frac{1}{n^2}$).

Teorema 17.3

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Dem: Basta considerar que $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Luego, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$. Como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Observación.

El recíproco en general no es cierto. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge por Leibniz pero $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (serie armónica) es divergente.

Convergencia condicional

Definición

Definición 17.4

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente se dice que es **condicionalmente convergente**.

Entregamos dos criterios para analizar la convergencia absoluta de una serie.

Teorema 17.5 (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Las siguientes son ciertas:

1. $r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
2. $r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
3. Para $r = 1$ el teorema no proporciona información.

Ejemplos

Observación. Se indicó que para $r = 1$ el Teorema no proporciona información, en efecto:

Para las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se verifica que $r = 1$ pero la primera diverge y la segunda converge.

Ejemplos. Analice la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{n+1}}$$

Criterio de la raíz

Teorema

Teorema 17.6

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Las siguientes son ciertas:

1. $r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
2. $r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
3. Para $r = 1$ el teorema no proporciona información.

Ejemplo. Analice la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+3}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

Definición 17.7

Dado $c \in \mathbb{R}$, llamaremos **series de potencias** centradas en c a las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots +$$

donde (a_n) es una sucesión y $x \in \mathbb{R}$ es una variable.

Si $c = 0$, entonces la serie se simplifica como sigue

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots +$$

Nos interesa estudiar para qué valores de x una serie de potencias converge, lo que llamaremos intervalo de convergencia.

Ejemplo 17.8

Demuestre que el intervalo de convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n}(x-5)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)^2}$$

es $]0,10]$ y $[-2,2]$, respectivamente.

Series de potencias

Solo 3 opciones

Teorema 17.9

Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hay solo 3 posibilidades:

(1) La serie converge solo cuando $x = c$.

(2) Existe R positivo tal que la serie converge para $|x-c| < R$ y diverge para $|x-c| > R$.

(3) La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación. El valor R se llama **radio de convergencia** de la serie. En el caso (1) puede considerarse que $R = 0$ y en el caso (3) consideraremos que $R = \infty$. Así, toda serie de potencias tiene asociado un radio de convergencia. En el ejercicio previo, $R = 5$.

Series de potencias

Ejercicio:

- Muestre que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Muestre que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+10)^n$$

  converge únicamente en el centro.