Clase 4: Integral indefinida y métodos de integración (Parte IV).

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

El objetivo de esta clase, es establecer un método para calcular integrales de la forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx \ ,$$

donde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $q(x) \neq 0$.

Para lograr dicho objetivo, analizaremos previamente el **método de descomposición en fracciones parciales**.

Descomposición en fracciones parciales

Caso 1: gr$(p(x)) <$ gr$(q(x))$

Dada la función racional

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \ ,$$

si gr$(p(x)) <$ gr$(q(x))$, entonces $r(x)$ puede descomponerse en suma de fracciones, cuyos denominadores son polinomios irreducibles que se obtienen al factorizar $q(x)$.

- Si al factorizar $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ los factores son lineales y ninguno se repite, es decir, $q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)$, entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + ... + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

donde $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}$.

Descomposición en fracciones parciales

Caso 1: gr$(p(x)) <$ gr$(q(x))$

- Si $q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $(a_1x + b_1)^n$, entonces

$$\frac{p(x)}{(a_1x+b_1)^n} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(a_1x+b_1)^n} \ ,$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$.

- Si en la factorización de $q(x)$ aparece un factor cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n} \ ,$$

donde $A_i, B_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1

Caso 1: $\text{gr}(p(x)) < \text{gr}(q(x))$

Descomponer en suma de fracciones parciales la función racional

$$r(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x-3}$$

Solución.

Notar que

$$\frac{2x+1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}\ ,\ \ A, B \in \mathbb{R}\ .$$

$$\Longrightarrow 2x+1 = A(x+3) + B(x-1)$$

De donde sigue que $A = \frac{3}{4}$ y $B = \frac{5}{4}$. Finalmente,

$$r(x) = \frac{3/4}{x-1} + \frac{5/4}{x+3}\ .$$

Integración por fracciones parciales

Ejemplo 1

En virtud de lo realizado previamente, podemos integrar fácilmente

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}dx$$

En efecto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C\ .$$

Ejemplo 2

Caso 1: $\mathsf{gr}(p(x)) < \mathsf{gr}(q(x))$

Descomponer en suma de fracciones parciales la función racional

$$r(x) = \frac{x+3}{x^4+9x^2}$$

Solución.

Notar que

$$\frac{x+3}{x^4+9x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}\ ,\ A, B, C \in \mathbb{R}\ .$$

$$\Longrightarrow x+3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 9Ax + 9B$$

De donde sigue que $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Finalmente,

$$r(x) = \frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2+9}$$

En virtud de lo realizado previamente, podemos integrar

$$\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx$$

En efecto,

$$\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{1}{18}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{9}\arctan(x/3) + C\ .$$

Descomposición en fracciones parciales

Caso 2: gr$(p(x)) \geq$ gr$(q(x))$

Dada la función racional

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \ ,$$

si gr$(p(x)) \geq$ gr$(q(x))$, se sugiere hacer uso del algoritmo de división de polinomios para escribir $r(x)$ como

$$r(x) = f(x) + \frac{h(x)}{q(x)} \ ,$$

donde $f(x)$ es el cociente de dividir $p(x)$ por $q(x)$ y $h(x)$ el resto.

Ejemplo 3

Caso 2: gr$(p(x)) \geq$ gr$(q(x))$

Descomponer en suma de fracciones parciales la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución. Tras dividir el numerador por el denominador, tenemos que:

$$r(x) = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

Luego, descomponiendo la función $\dfrac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$ en fracciones parciales se concluye que

$$r(x) = x - 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2} \, .$$

En virtud de lo realizado previamente, podemos integrar

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

En efecto,

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + C \ .$$