Departamento de Ingeniería Matemática	Universidad de Concepción
Tarea1: Convexidad y Semicontinuidad Inferior.	
Optimización II 525352	*Profesor: Felipe Maldonado*

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua, y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior. Mostrar que la función h definida por $h(x) = g(f(x))$ es semicontinua inferior.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinua y no decreciente. Muestre que $h(x) = g(f(x))$ es semicontinua inferior. Muestre además con un ejemplo que es esencial que g sea no decreciente.

3. Sea $f_n :\to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f_n(x) = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) := \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{x_3 - \cfrac{1}{\vdots \over x_{n-1} - \frac{1}{x_n}}}}}$$

   Probar que f es convexa y decreciente.

   Indicación: Para la convexidad conviene mirar lo que pasa para un n específico, por ejemplo $n = 4$. Para un caso general puede servir que $f_n(x_1, ..., x_n) = f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1} - 1/x_n)$.

4. Suponga que f es convexa, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_i \leq 0, i \in \{2, 3, ..., n\}$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Entoncs dados $x_1, x_2, ..., x_n \in dom(f)$, mostrar que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

   Indicación: pensar primero en el caso $n = 2$.

5. (**Desigualdad de las medias geométricas-aritméticas**)

   Pruebe que para $n \geq 1$;$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \geq 0$, $\sum_{i\geq 1} \delta_i = 1$ se cumple que

$$\prod_{n\geq 1} x_i^{\delta_i} \leq \sum_{n\geq 1} \delta_i x_i.$$

   Pruebe que en particular para el caso $\delta_i = \frac{1}{n}, \forall i$, entonces:

$$(\prod_{n\geq 1} x_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{n\geq 1} x_i.$$

   Indicación: Pruebe que $f(x) = -\ln(x), x > 0, x \in \mathbb{R}$ es convexa, y utilice tal convexidad para probar las desigualdades pedidas.

6. Una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice fuertemente convexa con coeficiente $\alpha \geq 0$ si
$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$
   - Muestre que si f es fuertemente convexa con coef. α, entonces f es estrictamente convexa.
   - Asumir que f es dos veces continuamente diferenciable. Muestre que f es fuertemente convexa con coef. α si y sólo si $H_f(x) - \alpha I_d$ es semidefinida positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Donde $H_f(x)$ es la matriz hessiana de f e I_d es la matriz identidad de $n \times n$.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y H un hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Suponga que A está contenido en uno de los semiespacios de H. Pruebe entonces que
$$co(H \cap A) = H \cap co(A).$$

8. Se define el *crosspolítopo* n dimensional como sigue:
$$C_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1\}.$$
   a) Pruebe que C_n es convexo.
   b) Pruebe que $C_n = co(\pm e_1, ..., \pm e_n)$, con $e_1 = (1, 0, ..., 0); e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, etc.

9. Sean A, B dos conjuntos convexos cerrados no vacíos, tal que $A \cap B \neq \emptyset$, con B compacto. Pruebe que existe un hiperplano que los separa en el sentido estricto.

10. Sean A, B dos conjuntos convexos no vacíos, tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Pruebe que existe un plano separante entre ellos.

Entrega: 29 de septiembre, antes del certamen.