Cálculo II (527150)

Clase 05: Sumas de Riemann e integración definida

Sumas de Riemann

Ingredientes

- Un intervalo real $[a, b]$.
- Una función f definida sobre este intervalo.
- Una sucesión de puntos

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b$$

- En cada uno de los n subintervalos, un punto $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$
- Para cada subintervalo, su longitud $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

Definición

La *suma de Riemann* asociada a toda la información anterior es

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

La idea fundamental detrás de la integral

Observación

Para un intervalo $[a, b]$ y función f fijos, el valor de la suma de Riemann variará según los puntos x_i escogidos (que determinan los subintervalos) y, después de esa primera elección, variará según los puntos t_i escogidos dentro de cada subintervalo.

La gran idea

- Si la función f es *razonable*, entonces al hacer que el límite de las longitudes de los subintervalos sea cero el valor de todas las sumas de Riemann converge a un único valor.
- *¿Razonable?* Para efectos de este curso, se puede pensar en que f sea acotada (sin asíntotas verticales) y sin demasiadas discontinuidades (cualquier número finito sirve).

La integral definida

Definición

Sean $[a, b]$ un intervalo y f una función definida en este intervalo, como ha sido descrita. El valor al cual convergen todas las sumas de Riemann al aproximar las longitudes de los subintervalos a cero se denomina la *la integral definida de f sobre el intervalo* $[a, b]$, que se denota

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propiedades y convenciones básicas

Propiedades

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$ para c constante
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ para c constante
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Más propiedades básicas

Propiedades

- Si $f(x) \leq g(x)$ para todo punto del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si f es continua en un intervalo $[a, b]$, existe un valor $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b - a)$$

Este valor $f(c)$ es el *valor promedio* de f en $[a, b]$.