UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 2. Primera Parte. Ejercicios adicionales.

En los ejercicios que siguen, (E, d) es un espacio métrico.

1. Para cada uno de las tres propiedades de la definición de métrica, da un ejemplo de una función que no la satisface, pero satisface las otras dos.
2. Verifica que las siguientes tres funciones son métricas:
$$\alpha(x, y) := \sqrt{d(x, y)}, \qquad \beta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad \gamma(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}.$$
3. Da un ejemplo de dos conjuntos discretos cuya unión no sea un conjunto discreto.
4. Demuestra las siguientes propiedades:
   (a) Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es un conjunto abierto.
   (b) Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.
   (c) Si $G_1, \ldots, G_N$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^N G_i$ es un conjunto abierto. Da un ejemplo que muestre que la intersección de infinitos conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto.
   (d) Si $F_1, \ldots, F_N$ son conjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^N F_i$ es un conjunto cerrado. Da un ejemplo que muestre que la unión de infinitos conjuntos cerrados puede no ser un conjunto cerrado.
5. Demuestra las siguientes propiedades:
   (a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$ y por lo tanto no es un conjunto cerrado;
   (b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right) = (-1, 0]$ y por lo tanto no es un conjunto abierto;
   (c) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.
6. Demuestra que $\operatorname{int}(X)$ es el mayor conjunto abierto contenido en X.

7. Demuestra que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas.

8. Sea $a \in E$. Demuestra las siguientes propiedades:

   (a) $\{a\}$ es cerrado;

   (b) $\{a\}$ es abierto si y sólo si a es un punto aislado.

9. Se recuerda la definición de la frontera de un conjunto $X \subset E$:

$$\partial X := \{x \in E : \ \forall r > 0 \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \& \ B_r(x) \cap X^{\mathrm{c}} \neq \emptyset\} .$$

   Demuestra las siguientes propiedades:

   (a) $E = \mathrm{int}(X) \ \dot{\cup} \ \partial X \ \dot{\cup} \ \mathrm{int}(X^{\mathrm{c}})$;

   (b) $\overline{X} = \mathrm{int}(X) \cup \partial X$;

   (c) ∂X es un conjunto cerrado.

10. Dados dos conjuntos acotados X e Y, demuestra las siguientes propiedades:

   (a) si $X \subset Y$, entonces $\mathrm{diam}(X) \leq \mathrm{diam}(Y)$;

   (b) si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{diam}(X \cup Y) \leq \mathrm{diam}(X) + \mathrm{diam}(Y)$.

11. Demuestra que todo espacio métrico es unión numerable de conjuntos acotados.

12. Demuestra las siguientes propiedades:

   (a) $\mathrm{diam}(B_r(a)) \leq 2r$, pero no necesariamente $\mathrm{diam}(B_r(a)) = 2r$;

   (b) en un espacio vectorial normado (no trivial), $\mathrm{diam}(B_r(a)) = 2r$.