UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 1 -Cálculo IV (MAT 225212)

Tema: ***Lugares geométricos y Límites en*** $\mathbb{C}$ [1].

1. Escribir en forma polar el numero complejo $a = \frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-i}$ y evaluar

   (a) a^{20} (b) a^{22} (c) a^{24}

2. Visualizar geométricamente que $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ cuando $\mathrm{Im}(z) > 0$.

(P) Encontrar el lugar geométrico en el plano de Argand asociado a la ecuación

$$|z-1| + |z-2| = 2$$

Ind. Recordar la definición de elipse y observar $|z-1| = \|(x-1,y)\| = \text{dist((x,y),(1,0))}$, etc

(P) Si $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ es un número complejo dado, resolver

$$z \in \mathbb{C}: \qquad \left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right| < 1.$$

4. Resolver

   (a) $S = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1\}$
   (b) $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < 1\}$
   (c) $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = \overline{z}^2\}$
   (d) $S = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = \overline{z}^3\}$
   (e) $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z+1) = |z|\}$
   (f) $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z+i) = |z|\}$

(P) Resolver

$$z \in \mathbb{C}: \qquad |z-1| = |z-2| \quad \wedge \quad 0 \leq \mathrm{Re}(iz) \leq 1.$$

6. Para z en la región anular $2 \leq |z-1| < 3$, encontrar $M > 0$ tal que $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| < M$. Ind. Primero visualizar la situación en el plano de Argand.

8. Dilucidar si existen los siguientes limites:

   (P) $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^3-i}$ **(P)** $\lim_{z\to 0} \dfrac{1}{z}$ (a) $\lim_{z\to\infty} \left(\dfrac{z}{z^2+1}\right)$ (b) $\lim_{z\to\infty} \left(\dfrac{z^2}{z+1}\right)$

   Nota: Si $f(z)$ es definida en todos los puntos fuera de un disco, entonces podemos realizar la sustitución:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

   a condición que el límite de la derecha exista.

Agosto 2024
FPV/fpv/

[1]**Lester A. RubenfSeld**: A first in Applied Complex Variables. Editorial John Wiley & Son, Inc. (1985)