UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525151)

Ejercicios del Problema del Flujo de Costo Mínimo (PFCM)

1. Sea f^* una solución óptima al PFCM con instancia $(G = (V, E), c, w, s, t, f_0)$. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifique sus respuestas, mostrando algún ejemplo cuando corresponda.

   a) La red residual G_{f^*} no tiene camino de aumento de flujo.

   b) Si C es un ciclo, de largo al menos tres, en la red residual G_{f^*} con peso residual $w_{f^*}(C) = 0$, entonces existe $f' \neq f^*$ solución óptima de PFCM con la instancia dada.

   c) Si g es un s-t flujo de (G, c) con $Val(g) < Val(f^*)$, entonces $w(g) < w(f^*)$.

2. **(Problema de Circulación de Costo Mínimo)**.Sea $G = (V, A)$ una red, no necesariamente con un nodo fuente y un nodo sumidero, y $l, c : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, funciones de capacidad inferior y superior respectivamente. Se define una circulación en G como una función $f : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

   - $\forall (u, v) \in A,\ l(u, v) \leq\ f(u, v)\ \leq\ c(u, v),$
   - $\forall u \in V,\ \sum_v f(u, v)\ =\ \sum_v f(v, u).$

   Dado además una función de costo $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el problema de circulación de costo mínimo (PCCM) consiste en encontrar una circulación f en G cuyo costo total $(= \sum w(u, v) f(u, v))$ sea mínimo.

   a) Describa una metodología que permita resolver PCCM en el caso general usando sólo los resultados vistos en el curso.

   b) Reduzca PFCM a PCCM si es posible. Justifique.

3. Una compañía aérea tiene p rutas de vuelos que debe cumplir con la menor cantidad de aviones posibles. Cada ruta de vuelo i tiene una hora de salida s_i y una hora de llegada l_i. Además, el tiempo que toma un avión para ir desde el punto de destino de la ruta de vuelo i al punto de origen de la ruta de vuelo j es igual a r_{ij}. Resuelva este problema usando los resultados vistos en clases.

4. **Problemas de Emparejamientos (Matchings).**

   Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un subconjunto de arcos M de E se dice un matching de G si todo par de arcos de M no tiene vértice en común. Si además, todo vértice de G es incidente a un arco de M, entonces se dice que M es un matching perfecto. El problema del matching o emparejamiento máximo (PMM) consiste en: dado un grafo G no dirigido bipartito, encontrar un matching de cardinalidad máxima en G. De manera similar, el problema de Matching de Peso

Mínimo (PMPM) consiste en: dado G un grafo no dirigido bipartito y $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función de peso en G, encontrar un matching perfecto de peso mínimo.

a) Muestre que PMM puede ser modelado como un problema de flujo máximo.

b) Modele PMPM como un problema de Flujo de Costo Mínimo.

5. En un Departamento de la Universidad de Concepción de $p \geq 2$ profesores hay p cursos que deben ser dictados el próximo semestre. Cada profesor manifiesta dos cursos que le gustaría dar, ordenados según su preferencia. Se desea determinar para cada curso el profesor que lo dictará, de manera de maximizar el número de profesores que realizará el curso con su mayor preferencia. Explique cómo este problema puede ser modelado matemáticamente como un problema de flujo en redes para encontrar una solución óptima.

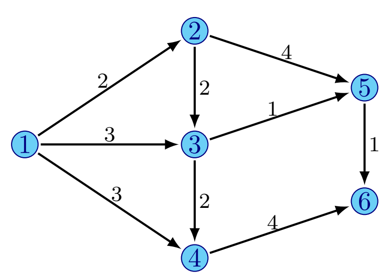
6. (Otra versión de PFCM) Sea $G = (V, E)$ una red con $V = \{1, \ldots, n\}$, capacidades infinitas en los arcos y $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función de costo. Además, cada nodo $i \in V$ tiene asociado un valor $b_i \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_i b = 0$. Si $b_i < 0$ se dice que el nodo i es demandante, si $b_i > 0$ se dice que i es un nodo oferente y en caso contrario, i.e. $b_i = 0$, se dice que el nodo i es de transición. Se desea resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{mín} \sum\limits_{i,j} w(i,j) f(i,j) \\ \text{s.a.} \\ \forall i = 1, \ldots, n, \quad \sum\limits_{j} f(i,j) - \sum\limits_{j} f(j,i) = b_i, \\ \forall (i,j) \in E, \quad f(i,j) \geq 0. \end{cases}$$

Muestre cómo resolver este problema, que denotaremos por PFCM2, mediante una transformación polinomial al problema PFCM.

7. Suponga que el siguiente grafo representa una red de ferrocarriles. El número sobre los arcos corresponde al tiempo que toma un tren de un nodo a otro. Dos locomotoras están estacionadas en el nodo 2 y una en el nodo 1. Modele este problema como un PFCM2 y encuentre una solución al problema de llevar las tres locomotoras al nodo 6 en el menor tiempo posible. Suponga que no existe problema de capacidad.

(G, w) :

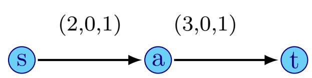


8. Un fabricante de computadores tiene m fábricas que producen todas un mismo modelo. La fábrica i produce a un costo de p_i por unidad y tiene capacidad máxima de producción de a_i computadores. Además existen n centros de educación que requieren cada uno b_j computadores de este modelo. El costo de transportar un computador de la fábrica i al centro de educación j es t_{ij}. El fabricante debe determinar cuántos computadores producir en cada fábrica de manera de satisfacer toda la demanda y tal que el costo total de producción y de transporte sea el menor posible. Determine cómo este problema puede ser modelado matemáticamente como un problema de flujo en redes para encontrar una solución óptima.

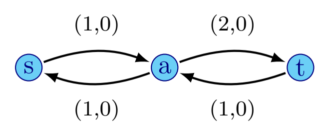
Solución

1. *a)* **Falso:** Como el valor f_0 no necesariamente corresponde al valor máximo de una s-t flujo en la red (G, c), entonces podría haber un camino de aumento de flujo en G_{f^*} como muestra el siguiente ejemplo:

(G, c, w, f^*) : $\qquad\qquad$ $(G_{f^*}, c_{f^*}, w_{f^*})$:



$\Longrightarrow$



$Val(f^*) = 1 = f_0,\ w(f^*) = 0$ $\qquad$ $p : s, a, t$ es camino de aumento de flujo.

En este ejemplo f^* es un flujo óptimo, pues no existe ciclo de peso negativo en G_{f^*}, y con $f_0 = 1$. Sin embargo no es de valor máximo.

b) **Verdadero:** Sea C un ciclo en G_{f^*} con $w_{f^*}(C) = 0$. Entonces, si denotamos

$$\tilde{c} = \min\{c_{f^*}(u, v) : \ (u, v) \in E(C)\}$$

la capacidad mínima residual de C, donde $E(C)$ es el conjunto de arcos de C, entonces podemos definir, como visto en clase, un nuevo s-t flujo $\tilde{f}$ de (G, c) por:

$$\forall (u, v) \in E, \quad f'(u, v) = \begin{cases} f^*(u, v) + \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \cap E(C), \\ f^*(u, v) - \tilde{c} & \text{si } (u, v) \in E \wedge (v, u) \in E(C), \\ f^*(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

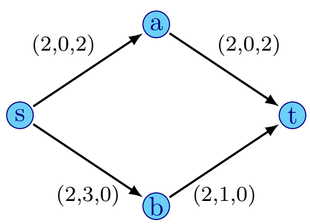
Luego, por resultado visto en clase sabemos que la función f' definida previamente es un s-t flujo de (G, c) que verifica que: $Val(f') = Val(f^*) = f_0$ y $w(f') = w(f^*) + \tilde{c} \cdot w_{f^*}(C) = w(f^*)$, es decir f' es también una solución óptima al problema PFCM con la instancia dada.

Además, como $\forall (u, v) \in E(C),\ c_f(u, v) > 0$ por definición, entonces $\tilde{c} > 0$. Además, como el largo del ciclo C es al menos tres entonces $\exists (u, v) \in E(C) \cap E$ tal que $(v, u) \notin E(C)$. Notar que si $\forall (u, v) \in E(C),\ (v, u) \in E$, entonces $w(C) < 0$. Por lo tanto, $f'(u, v) = f^*(u, v) + \tilde{c} \neq f^*(u, v)$, y así $f' \neq f^*$.

c) **Falso:** Como g no necesariamente es óptimo podría ocurrir que $Val(g) < Val(f^*) = f_0$ y

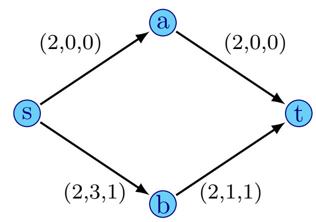
$w(g) \geq w(f^*)$ como muestra el siguiente ejemplo:

(G, c, w, f^*) :



$Val(f^*) = 2 = f_0,\ w(f^*) = 0.$

(G, c, w, g) :



$Val(g) = 1 < Val(f^*)$ y $w(g) = 4 > w(f^*) = 0.$

Notar que como $w(f^*) = 0$, entonces f^* es óptimo.

2. a) Dada una instancia $(G = (V, E), l, c, w)$ de PCCM podemos definir una instancia $(G' = (V', E'), l', c', w', s, t, f_0)$ de PFCM por:

$$\begin{aligned} V' =& V \cup \{s, t\}, \\ E' =& E \cup \{(s, u_0), (v_0, t)\}, \end{aligned}$$

donde $u_0, v_0 \in V$ son vértices cualesquiera fijos de la red G. Además se define la función de costo inferior y la de costo superior $l', c' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u, v) \in E, \quad l'(u, v) = \begin{cases} l(u, v) & \text{si } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad , \quad c'(u, v) = \begin{cases} c(u, v) & \text{si } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Finalmente, se define$f_0 = 0$.

Luego, esta versión de PFCM con capacidades inferior en los arcos puede ser resuelto por el algoritmo de Klein comenzando con cualquier s-t flujo factible de valor cero. Para encontrar un flujo factible, se usar la transformación de PFM con capacidades inferiores a una sin capacidades inferiores visto en clase.

b) Para transformar PFCM a PCCM es suficiente agregar a la red original G un arco de t a s con capacidad grande (por ejemplo mayor o igual a f_0) y peso cero. Además, podemos definir las capacidades inferiores todas iguales a cero. En otras palabras, dada $(G = (V, E), c, w, s, t, f_0)$ una instancia de PFCM, podemos definir la instancia $(G' = (V', E'), l', c', w')$ de PCCM de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & V' = V. \\ & E' = E \cup \{(t, s)\}. \\ & \forall (u, v) \in E',\ l'(u, v) = 0. \\ & \forall (u, v) \in E',\ c'(u, v) = \begin{cases} c(u, v) & \text{si } (u, v) \in E, \\ f_0 & \text{si } (u, v) = (t, s). \end{cases} \\ & \forall (u, v) \in E',\ w'(u, v) = \begin{cases} w(u, v) & \text{si } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{si } (u, v) = (t, s). \end{cases} \end{aligned}$$

Luego sea $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ y $f' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ funciones tales que $\forall (u,v) \in E, f'(u,v) = f(u,v)$. Mostremos que f es un s-t flujo de valor f_0 en (G,c) si y sólo si f' con $f'(t,s) = f_0$ es una circulación en (G', l', c'). En efecto si f es un s-t flujo de valor f_0 entonces verifica:

i) $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v), \forall (u,v) \in E$,

ii) $\displaystyle\sum_v f(u,v) = \sum_v f(v,u), \ \forall u \in V - \{s,t\}$.

iii) $\displaystyle\sum_v f(s,v) = f_0$.

Luego, f' satisface que: $l'(u,v) = 0 \leq f'(u,v) = f(u,v) \leq c'(u,v), \forall (u,v) \in E$. Como por hipótesis $f'(t,s) = f_0$, entonces $l'(t,s) = 0 \leq f'(t,s) = f_0 \leq c'(t,s) = f_0$. En resumen, se tiene que:

$$\forall (u,v) \in E', \ l'(u,v) \leq f'(u,v) \leq c'(u,v).$$

Por otro lado,

$$\sum_u f'(u,s) = f'(t,s) = f_0 = \sum_u f(s,u) = \sum_u f'(s,u).$$

Análogamente, se tiene que:

$$\sum_u f'(u,t) = \sum_u f(u,t) = f_0 = f'(t,s) = \sum_u f'(t,u).$$

Además como $\forall (u,v) \in E, \ f'(u,v) = f(u,v)$, entonces f' es conservativo en todos los nodos de la red. Así, f es una circulación con $f'(t,s) = f_0$.

De igual manera se puede probar la otra implicancia.

Por último notemos que:

$$w(f) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)w(u,v) = \sum_{(u,v)\in E} f'(u,v)w'(u,v) + f'(t,s)w'(t,s) = w'(f).$$

Recordar que $w'(t,s) = 0$. De aquí se tiene que f es un s-t flujo de costo mínimo de G si y sólo si f' es una circulación de costo mínimo en G'.

3. Dado que el problema a resolver es la cantidad de aviones que se requieren para cubrir todas las rutas de vuelo, modelaremos este problema como un problema de Circulación de Costo Mínimo.

   Para ello se define la red $G = (V, E)$ por:

$$V = \{s_i : \ i = 1, \ldots, p\} \ \cup \ \{t_j : \ j = 1, \ldots, p\} \cup \{s, t\},$$

   donde s_i y t_i es el lugar de salida y de llegada del vuelo que debe cubrir la ruta i. Además,

$$\begin{aligned} E =& \{(s,s_i) : \ i = 1, \ldots, p\} \ \cup \ \{(t_j, t) : \ j = 1, \ldots, p\} \ \cup \ \{(t,s)\} \ \cup \ \{(s_i, t_i) : \ i = 1, \ldots, p\} \\ & \cup \ \{(t_j, s_i) : \ \text{la hora de llegada } t_j \text{ más el tiempo de traslado } r_{ji} \text{ es menor que la hora de salida de } s_i\}. \end{aligned}$$

   Por otro lado, se define la función capacidad inferior $l : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E, \quad l(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s_i, t_i) \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, p\}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Además, considerando que en el peor caso cada ruta de vuelo es cubierta por un avión distinto, y entonces en cada arco pasarán a lo más p vuelos, se puede definir la función capacidad superior por: $\forall (u,v) \in E, \quad c(u,v) = p$.

Finalmente, la función costo $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ se define por :

$$\forall (u,v) \in E, \quad w(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s,s_i) \text{ para algún } i \in \{1,\ldots,p\}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta forma si f es una circulación factible de la red anterior, el cual debido a sus capacidades enteras podemos suponer que tiene valores enteros, el valor dado en cada arco representará la cantidad de aviones en ese tramo. En particular, $f(s,s_i)$ y $f(t_j,t)$ corresponderá al número de aviones que tiene como primera salida s_i y a los que tienen como última llegada t_j respectivamente. Luego,

$$w(f) = \sum_i f(u,v)w(u,v) = \sum_i f(s,s_i)w(s,s_i).$$

Como $c(s,s_i) = 1$, luego $f(s,s_i) \in \{0,1\}$. Así, $w(f)$ es la cantidad de aviones que circulan por la red y que como $l(s_i,t_i) = 1$ necesarimente cubren todas las p rutas establecidas. Por lo tanto, una solución óptima al problema de Circulación de Costo Mínimo con la instancia anteriormente descrita es una solución óptima al problema planteado. De igual forma, si $f : E \to \mathbb{N}_0$ es una solución óptima al problema planteado donde $f(u,v)$ representa la cantidad de aviones que pasan por el tramo (u,v), entonces f satisface las condiciones para ser una circulación de la red anterior donde $w(f)$ es la cantidad de aviones que circulan (ejercicio). Por lo tanto, f es solución óptima al problema de Circulación de Costo Mínimo con instancia descrita.

4. Sea $G = (V,E)$ un grafo no dirigido bipartito con partición de los vértices en los conjuntos $\{V^1, V^2\}$.

   a) Mostremos que PMM puede ser modelado como un PFM. Para ello definamos la red $G' = (V', E')$ por:

   $$V' = V \cup \{s,t\}.$$
   $$E' = \{(u,v) : \ u \in V^1, \, v \in V^2, \, \{u,v\} \in E\} \cup \{(s,u) : \, u \in V^1\} \cup \{(v,t) : \, v \in V^2\}.$$

   Notar que si $F \subseteq E$ es un matching de cardinalidad máxima de G, entonces $\forall \{u,v\} \in F$ con $u \in V^1$ y $v \in V^2$, se tiene que $p : s,u,v,t$ es un camino de s a t en G'.

   Por lo tanto, los arcos del matching F determinan caminos de s a t en G' que son disjuntos por arcos. Así, encontrar un matching máximo de G es equivalente a determinar la s-t-arco conectividad de G', que como se vió en la tarea 4 puede ser modelado como un PFM. De esta forma, PMM puede ser modelado como un PFM.

   b) Notar que una condición necesaria para la existencia de un matching perfecto en G es que $|V^1| = |V^2|$. Así, podemos suponer que G satisface esta condición. Para mostrar que PMPM con instancia (G,w) puede ser modelado con un PFCM define la instancia (G', c', w', s, t, f_0) donde G' es como definido en a), la función de capacidad $c : E' \to \mathbb{R}_0^+$ se define por: $\forall (u,v) \in E' : \, c(u,v) = 1$.

   La función de pesos o costo $w' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ se define por:

   $$\forall (u,v) \in E', \ w'(u,v) = \begin{cases} w(\{u,v\}) & \text{si } \{u,v\} \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Finalmente, se define $f_0 := |V^1|$. Luego, existe un matching perfecto F en G si y sólo si la s-t-arco conectividad de G' es igual a $|V^1|$ si y sólo si existe f' un s-t flujo en (G', w') tal que $Val(f') = |V^1| = f_0$ y $\forall \{u,v\} \in E, \, f(u,v) = 1 \iff \{u,v\} \in F$. Por otro lado,

$$w'(f') = \sum_{(u,v)\in E'} f'(u,v)w'(u,v) = \sum_{\{u,v\}\in F} w(u,v).$$

Donde la última expresión es el peso del matching F.

En resumen, F es un matching perfecto en G si y sólo si f' definido previamente es un s-t flujo en (G', w') de valor f_0 y de peso mínimo.

5. Este problema puede ser modelado como un Problema de Transporte donde $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$ representa al conjunto de p profesores y $T = \{t_1, \ldots, t_p\}$ representa el conjunto de p cursos. Así, la red $G = (V, E)$ es definida por:

$$\begin{aligned} V =& S \cup T, \\ E =& \{(s_i, t_j) : \text{ si } t_j \text{ es uno de los dos cursos que desea dictar el profesor } s_i\}. \end{aligned}$$

Además, se define la función de costo o peso $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (s_i, t_j) \in E, \quad w(s_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \text{ es la segunda preferencia del profesor } s_i, \\ 0 & \text{si } t_j \text{ es la primera preferencia del profesor } s_i. \end{cases}$$

Finalmente se define la oferta y demanda respectivamente por: $\forall i = 1, \ldots, p,\ a_i = b_i = 1$. De esta forma f con valores es una solución factible de PH con instancia (G, w, a, b) descrita anteriormente si y sólo si todo porfesor s_i tiene asociado un sólo curso que dictar y cada curso t_j será dictado por un sólo profesor s_i (i.e. $f(s_i, t_j) = 1$): Luego, f representa una biyecció o correspondencia uno a uno entre los profesores y los cursos posibles. (f en este contexto se dice una **asignación**). Por otro lado, $w(f) = \sum_i \sum_j f(s_i, t_j) w(s_i, t_j)$ representa el número de cursos que se dictarán y que corresponde a la segunda preferencia de los profesores asignados. Por lo tanto, una solución óptima de PH f corresponde a una asiganción de cursos a cada profesor de manera de minimizar los cursos asignados que son de segunda preferencia de los profesores lo que es equivalente a la cantidad de cursos asignados que son de primera preferencia de los profesores.

Por lo tanto f es una solución óptima al problema PH con instancia dada si y sólo si f representa una solución óptima al problema planteado de asignación de cursos.

6. Sea $(G = (V, E), w, b)$ una instancia de PFCM2 con $V = \{1, \ldots, n\}$. Definamos una instancia $(G = (V', E'), c, w', s, t, f_0)$ de PFCM de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V' =& V \cup \{s, t\}, \\ E' =& E \cup \{(s, i) : b_i > 0\} \cup \{(i, t) : b_i < 0\}. \end{aligned}$$

Además, se define la función capacidad $c : E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u, v) \in E', \quad c(u, v) = \begin{cases} b_i & \text{si } (u, v) = (s, i) \in E', \\ -b_i & \text{si } (u, v) = (i, t) \in E', \\ B & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde B es una constante positiva cualquiera mayor o igual a $\sum_{b_i > 0} b_i$.

La función de peso $w' : E \to \mathbb{R}_0^+$ se define por:

$$\forall (u, v) \in E', \quad w'(u, v) = \begin{cases} w(u, v) & \text{si } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

Finalmente, se define $f_0 = \sum_{b_i > 0} b_i$. De esta forma, dada $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ una funci'on sobre E, se define la función $f' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E', \quad f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) & \text{si } (u,v) \in E, \\ b_i & \text{si } (u,v) = (s,i) \in E', \\ -b_i & \text{si } (u,v) = (i,t) \in E', \end{cases}$$

Es fácil verificar que f es una solución factible de PFCM2 con instancia (G, w, b) si y sólo si f' es una solución factible de PFCM con instancia $(G = (V', E'), c, w', s, t, f_0)$ (ejercicio). Por otro lado,

$$w(f) = \sum_{(u,v) \in E} f(u,v) w(u,v) = \sum_{(u,v) \in E} f'(u,v) w'(u,v) + \sum_{(s,i) \in E} f'(s,i) w'(s,i) + \sum_{(j,t) \in E} f'(j,t) w'(j,t) = w'(f').$$

Notar que por definición de w' se tiene que $\forall (s,i), (j,t) \in E' :\ f'(s,i)w'(s,i) = f'(j,t)w'(j,t) = 0$.

Por lo tanto, f es solución óptima de PFCM2 con instancia (G, w, b) si y sólo si f' es una solución óptima de PFCM con instancia (G, c, w', s, t, f_0).

7. El problema planteado puede ser modelado como un PFCM2 con la instancia (G, w, b) donde $(G = (V, E), w)$ es definido como en la figura y $b := (1, 2, 0, 0, 0, 0, 3)$. De esta forma, dada una función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ con valores enteros que es solución factible de PFCM2, la cantidad de locomotoras que pasarán por cada trayecto representado por el arco $(u,v) \in E$ puede ser interpretado por la cantidad $f(u,v)$. Además, si f es solución óptima, entonces el número de locomotoras total en circulación es exactamente tres.

   Para encontrar entonces una solución al problema planteado es necesario transformar el problema PFCM2 con instancia (G, w, b), donde (G, w) es dado por la figura dada, en un problema del tipo PFMC con instancia (G', c, w', s, t, f_0) definido por:

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s, t\}, \\ E' &= E \cup \{(s,1), (s,2)\} \cup \{(6,t)\}. \end{aligned}$$

   La función capacidad $c : E' \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E', \quad c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) = (s,1) \in E', \\ 2 & \text{si } (u,v) = (s,2) \in E', \\ 3 & \text{si } (u,v) = (6,t) \in E', \\ 3 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

   La función de peso $w' : E \to \mathbb{R}_0^+$ se define por:

$$\forall (u,v) \in E', \quad w'(u,v) = \begin{cases} w(u,v) & \text{si } (u,v) \in E, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Finalmente, $f_0 := 3$. Luego, para determinar una solución óptima f a PFCM con instancia anteriormente descrita se puede usar el algoritmo de Klein o de Acumulación.

8. Denotemos por $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ el conjunto de fábricas y por $C = \{c_1 \ldots, c_n\}$ el conjunto de centros de educación. Luego, se define la instancia $(G = (V, E), c, w, s, t, f_0)$ del PFCM por:

$V = F \cup C \cup \{s,t\}$.

$E = \{(s,f_i) : i = 1,\ldots,m\} \cup \{(c_j,t) : j = 1,\ldots,n\} \cup \{(f_i,c_j) : \ i = 1,\ldots,m, \ j = 1,\ldots,n\}$.

$\forall (u,v) \in E, c(u,v) = \begin{cases} a_i & \text{si } (u,v) = (s,f_i), \\ b_j & \text{si } (u,v) = (c_j,t), \\ B & \text{si } (u,v) = (f_i,c_j). \end{cases}$

$\forall (u,v) \in E, w(u,v) = \begin{cases} p_i & \text{si } (u,v) = (s,f_i), \\ 0 & \text{si } (u,v) = (c_j,t), \\ t_{ij} & \text{si } (u,v) = (f_i,c_j). \end{cases}$

Donde B es una constante grande, por ejemplo $B := \text{máx}\{a_i, b_j : \ i = 1,\ldots,m, \ j = 1,\ldots,n\}$. Otras posibilidades son definir: $c(f_i,c_j) = a_i$ o $c(f_i,c_j) = b_j$.

Finalmente se define $f_0 = \sum_j b_j$ que es la demanda a satisfacer.

Mostremos primero que el problema planteado tiene solución factible si y sólo si el PFCM tiene solución factible con la instancia dada. Sea $h : F \times C \to \mathbb{R}_0^+$ una solución del problema de producción de computadores donde $\forall i = 1,\ldots,m, \ j = 1,\ldots,n, \ h(f_i,c_j)$ es la cantidad de computadores que produce la fábrica f_i para el centro c_j.

Luego, se verifica que:

$$\forall i = 1,\ldots,m, \ \sum_j h(f_i,c_j) \leq a_i \quad \wedge \quad \forall j = 1,\ldots,n, \sum_i h(f_i,c_j) = b_j.$$

Definamos la función $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u,v) \in E, f(u,v) = \begin{cases} \sum_j h(f_i,c_j) & \text{si } (u,v) = (s,f_i), \\ \sum_i h(f_i,c_j) & \text{si } (u,v) = (c_j,t), \\ h(f_i,c_j) & \text{si } (u,v) = (f_i,c_j). \end{cases}$$

Así, por construcción se tiene directamente que f es un s-t flujo en G con

$$Val(f) = \sum_j f(c_j,t) = \sum_j \sum_i h(f_i,c_j) = \sum_j b_j = f_0.$$

Por lo tanto, f es una solución factible de PCFM con la instancia dada. Supongamos ahora que f es una solución factible de PCFM con la instancia dada. Como las capacidades y f_0 son valores enteros, entonces podemos suponer que f tiene valores enteros no negativos. Además, $Val(f) = \sum_j f(c_j,t) = f_0 = \sum_j b_j$. Por consiguientes, f satura todos los arcos que llegan a t , i.e. $\forall j = 1,\ldots,n, \ f(c_j,t) = b_j$.

Definamos $\forall f_i \in F$, $c_j \in C$, $h(f_i,c_j) = f(f_i,c_j)$. Luego, como f es un s-t flujo, entonces se tiene:

$$\forall i = 1,\ldots,m, \quad \sum_j h(f_i,c_j) = \sum_j f(f_i,c_j) = f(s,f_i) \leq c(s,f_i) = a_i.$$

Es decir, lo que produce la fábrica f_i es a lo más a_i. Además,

$$\forall j = 1,\ldots,n, \quad \sum_i h(f_i,c_j) = \sum_i f(f_i,c_j) = f(c_j,t) = b_j.$$

Luego, la producción de las fábricas satisface la demanda requerida de computadores en cada centro. Es decir, h definido previamente es solución factible del problema de producción de computadores.

Por último, como el costo de producción total (costo de producción más transporte) de computadores por las fábricas es:

$$\sum_i \sum_j (p_i + t_{ij}) h(f_i, c_j) = \sum_i \sum_j (p_i + t_{ij}) f(f_i, c_j) = w(f),$$

entonces f es una solcuión óptima de PFCM con la instancia dada si y sólo si h es solución óptima al problema de fabricación de computadores.