UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta de la Evaluación Recuperativa
ECUACIONES DIFERENCIALES II (525214, 525523), 2025-2

PROBLEMA 1. [21 puntos]
Considere el Problema de Sturm-Liouville

$$\text{(PSL)} \qquad \begin{cases} x^2u''(x) + xu'(x) + \lambda u(x) = 0 \ , \ x \in [1, \mathrm{e}] \\ u'(1) = 0 \\ u(\mathrm{e}) + u'(\mathrm{e}) = 0 \ . \end{cases}$$

1. Muestre que la ecuación diferencial en (PSL) tiene la forma $-(p(x)u'(x))' = \lambda w(x)u(x)$, donde $p(x)$ y $w(x)$ son funciones por determinar.
   Muestre que p es de clase C^1 en $[1, \mathrm{e}]$, w es continua en $[1, \mathrm{e}]$ y $p(x) > 0, w(x) > 0$ $\forall\ x \in [1, \mathrm{e}]$. Usando un teorema visto en clase, deduzca que los valores propios λ_n de (PSL) son positivos no nulos.

2. Muestre que los valores propios λ_n satisfacen una ecuación implícita por determinar. Proponga un método geométrico para aproximarlos.

   Indicación: resolver la ecuación diferencial de Euler-Cauchy en (PSL) mediante el cambio de variables $x = \mathrm{e}^z$, $v(z) = u(\mathrm{e}^z)$.

3. Halle una *base ortonormal* de funciones propias de (PSL).

Desarrollo: 1. Dividiendo la EDO por $-x$ se obtiene

$$-\underbrace{(xu''(x) + u'(x))}_{=(xu'(x))'} = \lambda \frac{u(x)}{x} \quad , \quad x \in [1, \mathrm{e}] \ .$$

Esta ecuación tiene la forma pedida con $p(x) = x$ y $w(x) = 1/x$. Como p es un polinomio, es de clase C^1 (de hecho C^∞) en $[1, \mathrm{e}]$. Además, w es continua en $[1, \mathrm{e}]$ como cociente de funciones continuas que no se anulan en $[1, \mathrm{e}]$ y $p(x) > 0, w(x) > 0\ \forall\ x \in [1, \mathrm{e}]$. Así, (PSL) tiene la forma de los problemas de Sturm Liouville estudiados en cátedra, con $q(x) = 0 \geq 0$, $a_1 = 0 \geq 0$, $b_1 = 1 \geq 0$, $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ y $a_2 = b_2 = 1 \geq 0$, $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ (cabe notar que la primera CF $u'(1) = 0$ es equivalente a $-u'(1) = 0$, por lo que podemos escoger $b_1 = 1$ en vez de $b_1 = -1$). Por lo tanto, se puede aplicar el Teorema 3 del Capítulo 4 de la cátedra, que nos asegura que los valores propios λ_n de (PSL) satisfacen $\lambda_n > 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}^\star$. **[4 puntos]**

2. Haciendo el cambio de variables $x = \mathrm{e}^z$, $v(z) = u(\mathrm{e}^z)$ y usando

$$v'(z) = \mathrm{e}^z u'(\mathrm{e}^z) \quad , \quad v''(z) = (\mathrm{e}^z)^2 u''(\mathrm{e}^z) + \mathrm{e}^z u'(\mathrm{e}^z) \ ,$$

la EDO de (PSL) se re-escribe en la forma $v''(z) + \lambda v(z) = 0$. Las CF implican $v'(0) = \mathrm{e}^0 u'(\mathrm{e}^0) = u'(1) = 0$ y $v'(1) = \mathrm{e}\, u'(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}\, u(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}\, v(1)$. Así, $v(z)$ satisface

$$\text{(PSL')} \qquad \begin{cases} v''(z) + \lambda v(x) = 0 \ , \ x \in [1, \mathrm{e}] \\ v'(0) = 0 \\ \mathrm{e}\, v(1) + v'(1) = 0 \ . \end{cases}$$

Los valores propios de (PSL') coinciden con los valores propios λ_n de (PSL). Sabemos por la pregunta 1. que $\lambda_n > 0$. La solución de $v''(z) + \lambda_n v(x) = 0$ está dada por $v_n(z) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} z) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} z)$, donde las constantes $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ se obtienen imponiendo las CF. Por la primera CF, $v_n'(0) = B_n\sqrt{\lambda_n} = 0$, se tiene $B_n = 0$. Por la segunda, $\mathrm{e}\, v_n(1) + v_n'(1) = A_n \mathrm{e} \cos(\sqrt{\lambda_n}) - A_n\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}) = 0$. Así, (PSL') tiene una solución no trivial si y sólo si

$$\mathrm{e}\cos(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan(\sqrt{\lambda_n}) = \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad \textbf{[7 puntos]}\ .$$

Para obtener geometricamente valores aproximadas de $\sqrt{\lambda_n}$, se dibujan las curvas gráficas de $\tan(x)$ y de $x \in [0, \infty[\mapsto \mathrm{e}/x$. Estas curvas se intersectan en los puntos $x_n = \sqrt{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. **[2 puntos]**

3. Las soluciones no triviales de (PSL') están dadas por $v_n(z) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} z)$. Por consiguiente, las funciones propias de (PSL) están dadas por

$$u_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\ln x) \quad , \quad x \in [1, \mathrm{e}]\ ,\ n \in \mathbb{N}^\star \qquad \textbf{[3 puntos]}$$

con $A_n \neq 0$. Sabemos por un teorema visto en cátedra que $\langle u_n, u_m\rangle_w = 0$ si $n \neq m$. Para obtener una base ortonormal $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de funciones propias de (PSL), basta normalizar las funciones propias, es decir, determinar A_n tal que $\langle u_n, u_n\rangle_w = 1$. Calculamos

$$\begin{aligned}\langle u_n\ ,\ u_n\rangle_w &= \int_1^{\mathrm{e}} u_n(x)^2\, w(x)\,\mathrm{d}x = A_n^2 \int_1^{\mathrm{e}} \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\ln x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= A_n^2 \int_0^1 \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n} z\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}A_n^2\Big(1 + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_n})}{2\sqrt{\lambda_n}}\Big) = 1\ ,\end{aligned}$$

donde se hizo el cambio de variables $z = \ln x$ en la segunda linea. Usando la relación $\tan(\sqrt{\lambda_n}) = \mathrm{e}/\sqrt{\lambda_n}$ se obtiene $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_n})}{2\sqrt{\lambda_n}} = \mathrm{e}^{-1}\sin^2\sqrt{\lambda_n}$. Luego

$$\varphi_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-1}\sin^2\sqrt{\lambda_n}}}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ln x\right) \qquad \textbf{[5 puntos]}\ .$$

PROBLEMA 2. [18 puntos]
Determine la solución del siguiente PVIF modelando una cuerda vibrante semi-infinita inicialmente al reposo con un desplazamiento oscilatorio en su extermidad

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2\partial_x^2 y(x,t) = 0 \quad , \quad x > 0\ ,\ t > 0 \\ y(0,t) = \sin(\pi t) \quad , \quad t \geq 0 \\ y(x,0) = 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ \partial_t y(x,0) = 0 \quad , \ x \geq 0\ . \end{cases}$$

Esboze la gráfica de la solución al tiempo $t = 1$ para $c = 1$.

Indicación: usar la solución de la ecuación de ondas del teorema de d'Alembert, $y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, donde $F : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase C^2.

Desarrollo: ver pauta de la Evaluación 2.

PROBLEMA 3. [21 puntos]
Sea $f_k(t) = \mathrm{e}^{-k|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, donde $k > 0$ es un parámetro fijo.

1. Determine la TF $\widehat{f}_k(\omega)$ de $f_k(t)$.
   Usando la formula de inversión de la TF, deduzca que
   $$\mathrm{e}^{-k|t|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\omega^2+k^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$
   (justifique que se puede aplicar la formula de inversión).
2. Muestre que
   $$\widehat{(\widehat{f}_k\,)}(s) = \frac{1}{2\pi} f_k(s) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-k|s|} \quad , \quad s \in \mathbb{R}\,,$$
   donde $\widehat{(\widehat{f}_k\,)}(s)$ es la TF de $\widehat{f}_k$ (se aplica dos veces la transformación de Fourier a f_k).
   Deduzca que la TF inversa de f_k es igual a $2\pi\widehat{f}_k$.
3. Determine $(\widehat{f}_k * \widehat{f}_k)(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, donde $*$ denota el producto de convolución.
   Indicación: En vez de usar la definición del producto de convolución e intentar calcular la integral, usar los resultados de la pregunta 2 y la formula $\widehat{(g*h)} = 2\pi\widehat{g}\,\widehat{h}$ con $g = h = \widehat{f}_k$.

Desarrollo: 1. Calculando la integral se obtiene
$$\widehat{f}_k(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{1}{\pi}\frac{k}{\omega^2+k^2} \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad \textbf{[3 puntos]}\;. \tag{1}$$
Como f_k es integrable sobre $\mathbb{R}$, continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}^*$, tiene derivadas direccionales en 0, y $\widehat{f}_k$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, sigue del Teorema de inversión de la TF visto en cátedra que
$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-k|t|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\omega^2+k^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \quad , \quad t \in \mathbb{R} \qquad \textbf{[4 puntos]}\;. \tag{2}$$
2. Aplicando la definición de la TF con $f \to \widehat{f}_k$, $x \to \omega$ y $\omega \to s$ se tiene
$$\begin{aligned} \widehat{(\widehat{f}_k\,)}(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{\omega^2+k^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\omega}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-k|s|} = \frac{1}{2\pi}f_k(s)\,, \end{aligned} \tag{3}$$
donde usamos (1) en la primera linea y (2) con $t = -s$ en la segunda linea. **[4 puntos]**
Se deduce que la TF de $2\pi\widehat{f}_k$ es igual a f_k, por lo tanto la TF inversa de f_k está dada por
$$\mathrm{TF}^{-1}[f_k](\omega) = 2\pi\widehat{f}_k(\omega) = \frac{2k}{\omega^2+k^2} \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}\,. \qquad \textbf{[2 puntos]}\;. \tag{4}$$
3. Siguiendo la indicación, escribemos
$$\widehat{(\widehat{f}_k * \widehat{f}_k)}(s) = 2\pi\big(\widehat{(\widehat{f}_k\,)}(s)\big)^2\,.$$

Usando (3) sigue que

$$(\widehat{\widehat{f_k} * \widehat{f_k}})(s) = 2\pi\,\frac{f_k(s)^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi}\big(\mathrm{e}^{-k|s|}\big)^2 = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2k|s|} \quad , \quad s \in \mathbb{R} \qquad\qquad \textbf{[4 puntos]}\ .$$

Por lo tanto

$$\widehat{f} * \widehat{f} = \mathrm{TF}^{-1}\Big[\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2k|s|}\Big] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{TF}^{-1}\big[f_{2k}(s)\big]\ .$$

Por (4) se deduce que

$$(\widehat{f} * \widehat{f})(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{4k}{\omega^2 + 4k^2} \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad\qquad \textbf{[4 puntos]}\ . \tag{5}$$