UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO 2024 – 2

Pauta Evaluación de Recuperación

ÁLGEBRA 2 - 525150

Problema 1. (15 puntos)

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

(a) Los puntos $A(2,1,0)$, $B(3,0,1)$ y $C(4,-1,2)$ son vértices de un triángulo equilátero.

Solución: Notemos que la recta que contiene a los puntos A y B está definida por:

$$L: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Ahora bien, con $t = 2$ se deduce que $(x,y,z) = (4,-1,2) = C \in L$. Así, observamor que $A, B, C \in L$, es decir, los puntos A, B y C son colineales y por ende no son vértices de un triángulo equilátero. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación en **falsa**.

(b) Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz fija y S el siguiente conjunto:

$$S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AB = \Theta\},$$

entonces S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución: Primero notemos que $\Theta \in S$, ya que $\Theta B = \Theta$. Ahora bien, consideremos $C, D \in S$, es decir, $CB = \Theta$ y $DB = \Theta$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, arbitrarios. Luego, se tiene:

$$\alpha(C + D)B = \alpha(CB + DB) = \alpha(CB) + \alpha(DB) = \alpha\Theta + \alpha\Theta = \Theta,$$

así, $\alpha(C + D) \in S$. Dado lo anterior, podemos concluir que S es un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Así, la afirmación resulta ser **verdadera**.

(c) Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo y $T : V \to W$ una función. Si $T(\theta_V) = \theta_W$, entonces T es una transformación lineal.

Solución: Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = x^2$ una función cuadrática. Notemos que $T(0) = 0$, pero

$$2T(3) = 2 \cdot 9 = 18 \neq 36 = T(6) = T(2 \cdot 3)$$

y por ende T no es una transformación lineal, a pesar de que $T(0) = 0$. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

Problema 2. (15 puntos)

Sean L la recta y Π el plano, definidos por:

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tfrac{6-x}{3} = \tfrac{2y+8}{\alpha} = z + 2\right\} \quad \text{y} \quad \Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + y + z + 1 = \beta\},$$

donde α y β son parámetros reales.

(a) Determinar, si es posible, los valores de α y β de modo que $L \cap \Pi = \{(0,0,0)\}$.

Solución: Primero notemos que $(0,0,0) \in L$ ssi $t = 2$ y $\alpha = 4$, además $(0,0,0) \in \Pi$ ssi $\beta = 1$. Ahora debemos comprobar que para dichos valores de α y β, la intersección es solamente el $(0,0,0)$, para esto consideremos que:

$$L: \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 + \frac{\alpha}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}$$

luego, con $\alpha = 4$ consideremos un punto $P \in L$, el cual está definido por:

$$P(6-3t, -4+2t, -2+t)$$

para algún $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien, analizaremos para que valor de t real, $P \in \Pi$ considerando $\beta = 1$, como sigue:

$$5(6-3t) + (-4+2t) + (-2+t) + 1 = 1 \Rightarrow t = 2,$$

es decir, $P(0,0,0)$. Por lo tanto, para $\alpha = 4$ y $\beta = 1$ se tiene que $L \cap \Pi = \{(0,0,0)\}$.

(b) Determinar, si es posible, los valores de α y β de modo que $L \subseteq \Pi$.

Solución: Notemos que el vector director de la recta es $\vec{v} = (-3, \frac{\alpha}{2}, 1)$ y el vector normal del plano es $\vec{n} = (5,1,1)$. Luego, para que $L \subseteq \Pi$, se debe cumplir, primer lugar, que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, lo cual ocurre cuando $\alpha = 28$. Por otro lado, si consideramos $P \in L$, se debe cumplir que $P \in \Pi$, cualquiera sea P. Para probar lo anterior, consideremos un punto de la recta, el cual está definido por:

$$P(6-3t, -4+\tfrac{\alpha}{2}t, -2+t)$$

para algún $t \in \mathbb{R}$ y α un parámetro real fijo. Ahora bien, $P \in \Pi$ si y sólo sí:

$$5(6-3t) + (-4+\tfrac{\alpha}{2}t) + (-2+t) + 1 = \beta \Leftrightarrow \left(\tfrac{\alpha}{2} - 14\right)t = \beta - 25$$

luego, como $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, entonces se debe cumplir que $\beta - 25 = 0$, es decir, $\beta = 25$. Por lo tanto, para $\alpha = 28$ y $\beta = 25$ se tiene que $L \subseteq \Pi$.

(c) Considerando $\alpha = \beta = 2$, calcular la distancia entre L y Π.

Solución: Considerando lo analizado en los ítems anteriores, si $\alpha = \beta = 2$, se tiene que:

$$5x + y + z + 1 = -13t = -23 \Rightarrow t = \tfrac{23}{13}$$

dado esto, podemos concluir que $L \cap \Pi = \varnothing$ y por lo tanto, la distancia entre la recta L y el plano Π es 0.

Problema 3. (15 puntos)

En el espacio vectorial complejo $V = \mathbb{C}^3$ se define el siguiente producto interior

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + z_3\overline{w_3}.$$

Además, sea W el subespacio generado por $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$. Con respecto al producto interior definido:

(a) Determinar una base B_2 para $W^\perp$.

Solución: Como $W = \langle B_1 \rangle$, se tiene que:

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V : \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \ \wedge \ \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V : -ia = 0 \ \wedge \ b - ic = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V : a = 0 \ \wedge \ b = ci \right\} \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $W^\perp$, ya que el vector que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ es no nulo.

(b) Determinar $w \in W$ la mejor aproximación de $z = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ por elementos de W.

Solución: Por el Teorema de Descomposición Ortogonal, se tiene que:

$$z = \text{Proy}_W(z) + \text{Proy}_{W^\perp}(z)$$

por ende, para determinar la $\text{Proy}_W(z)$, consideremos que:

$$\text{Proy}_W(z) = z - \text{Proy}_{W^\perp}(z) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0+2-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ \frac{3i}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

dado esto, la mejor aproximación de z es $\text{Proy}_W(z) = \begin{pmatrix} 1+i \\ \frac{3i}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

(c) A partir de las bases B_1 y B_2, determinar una base ortogonal para $W + W^\perp$. ¿Es esta base una base de V? Justifique su respuesta.

Solución: Notemos que $W = \langle B_1 \rangle$ y $W^\perp = \langle B_2 \rangle$, por ende:

$$W + W^\perp = \langle B_1 \cup B_2 \rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

podemos observar que la base B_1 es ortogonal y por definición los vectores de B_1 son ortogonales al vector de B_2, es por esto que $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto ortogonal y por ende es un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, podemos observar que $\text{card}(B_3) = 3$ y como $\dim(V) = 3$, entonces B_3 es una base ortogonal de V, es decir, $W + W^\perp = V$.

Problema 4. (15 puntos)

Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por:

$$T(p) = p' + p.$$

(a) Determinar una matriz representante de T.

Solución: Considerando la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$[T]_B^B = \big([T(1)]_B \quad [T(x)]_B \quad [T(x^2)]_B \big) = \big([1]_B \quad [1+x]_B \quad [2x+x^2]_B \big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Decidir si T es invertible, en caso de serlo no es necesario calcular T^{-1}.

Solución: Sabemos que T es invertible ssi una matriz representante de T es invertible, por ende analizaremos si $[T]_B^B$ posee inversa, como sigue:

$$\det\left([T]_B^B\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

luego, como $\det\left([T]_B^B\right) \neq 0$, podemos concluir que $[T]_B^B$ es invertible y en consecuencia T es biyectiva.

(c) Decidir si T es diagonalizable.

Solución: Determinamos los valores propios de T, como sigue:

$$p_T(\lambda) = \det\left([T-\lambda I]_B^B\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

luego, $p_T(\lambda) = 0$ ssi $\lambda = 1$, además, podemos observar que $m_a(1) = 3$. Por otro lado, para determinar la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$, consideremos a $p(x) = a + bx + cx^2 \in S_1(T)$, entonces

$$T(p) = 1 \cdot p \Rightarrow a + b + (b+2c)x + cx^2 = a + bx + cx^2$$

así, igualando cada coeficiente de los polinomios se obtiene:

$$\begin{cases} a + b = a \\ b + 2c = b \end{cases}$$

resolviendo el sistema, se tiene que, $b = c = 0$, por lo tanto $p(x) = a$, lo cual implica que $S_1(T) = \langle\{1\}\rangle$ y por tanto $m_g(1) = \dim(S_1(T)) = 1 \neq m_a(1)$. Dado lo anterior, podemos concluir que T no es diagonalizable.