Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Práctica 3 — miércoles 13 de mayo de 2020

Problema 1. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \text{ o } xy \neq 1, \\ 1 & \text{si } xy = 1. \end{cases}$$

a) Para cualquier dirección $\vec{a}$, calcular el límite direccional

$$\vec{a}\text{-}\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y).$$

b) ¿La función f es continua en $(1,1)$?

Problema 2. Calcular el gradiente grad $f = \nabla f$ para las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3 \mathrm{e}^x$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y^3 + x)\exp(x + 2y)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \supset D(f) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^2}{\sin(xy)}.$$

¿Cuál es el dominio $D(f)$ de esta función?

d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x_1, \ldots, x_n) = |x|$

e) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

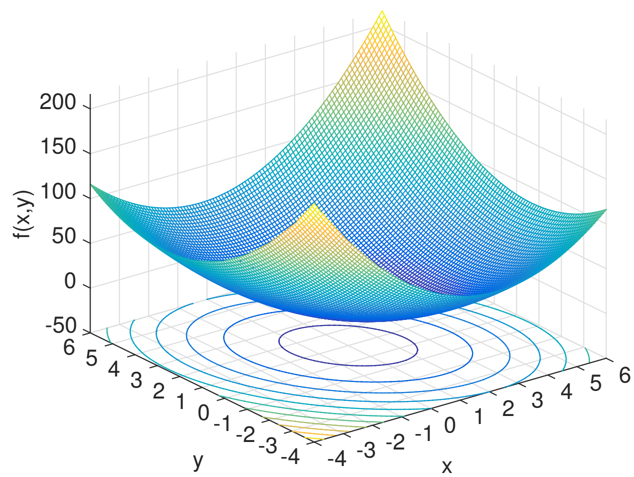
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{l=1}^{n} b_l x_l.$$

f) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, y

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}.$$

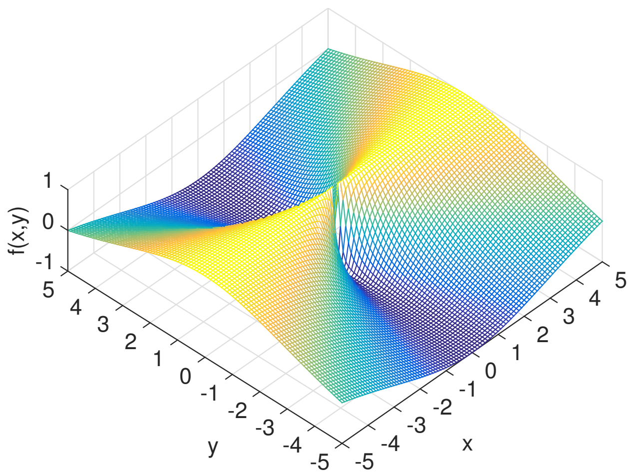
Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$



Problema 3. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

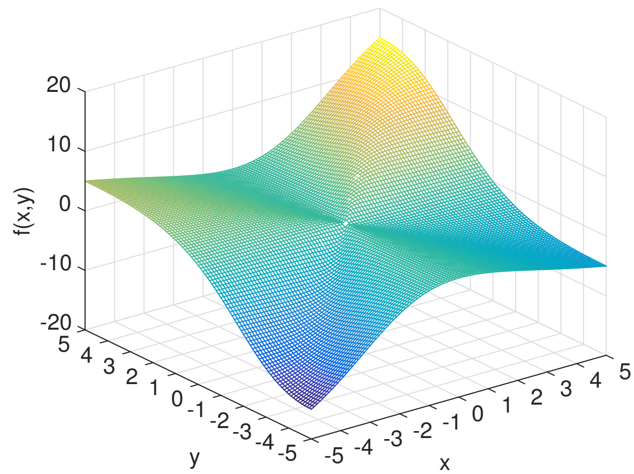
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



a) Demostrar que $|f(x,y)| \leq 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Demostrar que f es continua en $(1,1)$ en la dirección $\vec{a} = (0,1)$.
c) Demostrar que f es continua en $(1,1)$.
d) ¿La función f es continua en $(0,0)$?

Problema 4. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

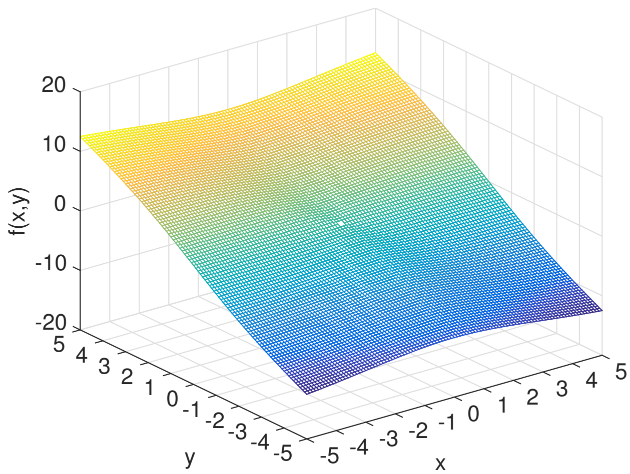


a) Demostrar que la función no es acotada.
b) ¿La función f es continua en $(0,0)$?
c) Calcule las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
d) Calcule, si existen, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
e) Sea $\vec{a}$ una dirección en $\mathbb{R}^2$. Calcule

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0).$$

Problema 5. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y + 2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



a) Demostrar que la función no es acotada.
b) ¿La función f es continua en $(0,0)$?
c) Calcule las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
d) Calcule, si existen, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.