Tema Nº3: Espacios Vectoriales

Cuerpo

Definición: Operaciones Binarias

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto dotado de, al menos, dos elementos $(0, 1 \in \mathbb{K})$. Entre los elementos de $\mathbb{K}$ se definen dos operaciones binarias internas: adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, &\quad +(x, y) = x + y \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, &\quad \cdot\,(x, y) = x \cdot y \end{aligned}$$

Para poder realizar la definición de que es un cuerpo, necesitamos que el conjunto $\mathbb{K}$, junto a las operaciones, cumpla una serie de propiedades mostradas a continuación:

Cuerpo

Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo si

1. $\big(\forall\, x, y \in \mathbb{K}\big)\big(x + y = y + x\big)$
2. $\big(\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}\big)\big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$
3. $\big(\forall\, x \in \mathbb{K}\big)\big(x + 0 = x\big)$
4. $\big(\forall\, x \in \mathbb{K}\big)\big(\exists\, -x \in \mathbb{K}\big)\big(x + (-x) = 0\big)$
5. $\big(\forall\, x, y \in \mathbb{K}\big)\big(x \cdot y = y \cdot x\big)$
6. $\big(\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}\big)\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$
7. $\big(\forall\, x \in \mathbb{K}\big)\big(x \cdot 1 = x\big)$
8. $\big(\forall\, x \in \mathbb{K} - \{0\}\big)\big(\exists\, x^{-1} \in \mathbb{K}\ :\ x \cdot x^{-1} = 1\big)$
9. $\big(\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}\big)\big(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\big)$

Ejemplos

Decida cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son cuerpos:

1. $\left(\mathbb{N}, +, \cdot\right)$ con la suma y producto usuales.
2. $\left(\mathbb{Z}, +, \cdot\right)$ con la suma y producto usuales.
3. $\left(\mathbb{Q}, +, \cdot\right)$ con la suma y producto usuales.
4. $\left(A, +, \cdot\right)$ con la suma y producto usuales, donde
$$A = \{x \in \mathbb{R} : -50 \leq x \leq 50\}$$
5. $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ con las operaciones definidas por:
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ y } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
6. $\left(\mathbb{R}, \oplus, \odot\right)$ con las operaciones definidas por:
$$a \oplus b = a + b + 1 \quad \text{y} \quad a \odot b = a + b - 2ab$$

Demostración 6)

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, luego consideremos lo siguiente:

Conmutatividad para $\oplus$:

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

con lo anterior notamos que $\oplus$ es conmutativa.

Asociatividad para $\oplus$:

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

con lo anterior notamos que $\oplus$ es asociativa.

Existencia de elemento neutro para $\oplus$: Sea $d \in \mathbb{R}$, luego se tiene:

$$a \oplus d = a \Leftrightarrow a + d + 1 = a \Rightarrow d = -1$$

dado lo anterior concluimos que -1 es el elemento neutro para $\oplus$.

Existencia de elemento inverso para $\oplus$: Sea $e \in \mathbb{R}$, luego se tiene:

$$a \oplus e = -1 \Leftrightarrow a + e + 1 = -1 \Rightarrow e = -2 - a$$

dado lo anterior concluimos que $-2 - a$ es el elemento inverso aditivo de a.

Ejemplos: Notemos lo siguiente:

$$2 \oplus -1 = 2 + (-1) + 1 = 2 \quad \text{y} \quad 3 \oplus (-2 - 3) = 3 \oplus -5 = 3 + (-5) + 1 = -1$$

Con lo anterior podemos observar que -1 deja invariante a un número real bajo $\oplus$ y -5 es el inverso aditivo de 3, ya que $3 \oplus -5$ es igual al elemento neutro.

Demostración 6)

Conmutatividad para $\odot$:

$$a \odot b = a + b - 2ab = b + a - 2ba = b \odot a$$

Asociatividad para $\odot$:

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (b + c - 2bc) = a + (b + c - 2bc) - 2a(b + c - 2bc)$$
$$(a \odot b) \odot c = (a + b - 2ab) \odot c = (a + b - 2ab) + c - 2(a + b - 2ab)c$$

notemos que $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$, por ende concluimos que $\odot$ es asociativa.

Existencia de elemento neutro para $\odot$: Sea $f \in \mathbb{R}$, luego se tiene:

$$a \odot f = a \Leftrightarrow a + f - 2af = a \Rightarrow f(1 - 2a) = 0$$

con lo anterior, concluimos que $f = 0$ o $a = \frac{1}{2}$.

Podemos observar que el elemento neutro para $\odot$ es 0, pero al operar con el elemento $\frac{1}{2}$, nos damos cuenta que este queda invariante bajo el $\odot$ con cualquier otro, es decir,

$$\frac{1}{2} \odot a = \frac{1}{2}$$

esto quiere decir que $\frac{1}{2}$ es elemento que posee la propiedad de absorción. Ahora bien, de acuerdo con la consecuencias de los axiomas de cuerpo, sabemos que $\forall u \in \mathbb{K} : 0_{\mathbb{K}} \odot u = 0_{\mathbb{K}}$, esto quiere decir que el neutro aditivo, o sea -1 debería cumplir esta propiedad, pero no la cumple y además $\frac{1}{2} \neq -1$. Dado lo anterior, podemos concluir que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ no tiene estructura de cuerpo.

Espacios Vectoriales

Sean $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo y V, un conjunto sobre el cual están definidas la operaciones binaria interna de suma y la operación binaria externa ,multiplicación por escalar definidas por

$$\oplus : V \times V \to V, \;\; \oplus(x, y) = x \oplus y$$
$$\odot : \mathbb{K} \times V \to V, \;\; \odot(\lambda, y) = \lambda \odot y$$

Entonces se dice que $\left(V, \oplus, \odot\right)$ es un **espacio vectorial (e.v)** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}-$espacio vectorial si cumple las siguientes propiedades

Propiedades

1. $\forall\, x, y \in V \ : \ x \oplus y = y \oplus x.$
2. $\forall\, x, y, z \in V \ : \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$
3. $\exists\, \theta \in V \ : \ \forall\, x \in V \ : \ x \oplus \theta = x.$
4. $\forall\, x \in V \ : \ \exists - x \in V \ : \ x \oplus (-x) = \theta.$
5. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ : \ \forall\, x \in V \ : \ \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x.$
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \ : \ \forall\, x, y \in V \ : \ \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).$
7. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ : \ \forall\, x \in V \ : \ (\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x).$
8. $\forall\, x \in V \ : \ 1 \odot x = x.$

Espacios Vectoriales

Para saber a que nos vamos a referir en de aqui en adelante realizamos la siguientes aclaraciones:

- Los elementos del espacio vectorial V serán denominados **vectores**.
- Los elementos del cuerpo elegido serán denominados **escalares**
- Si se afirma que V *es* un espacio vectorial se tiene que esta nunca será vacío $(V \neq \varnothing)$ puesto que $\theta \in V$
- Si se tiene que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que la estructura $\left(V, \oplus, \odot\right)$ es un espacio vectorial **real**.
- Si se tiene que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que la estructura $\left(V, \oplus, \odot\right)$ es un espacio vectorial **complejo**.

Espacios Vectoriales

Definición

Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Para cada par de elementos x, $y \in V$ se define la diferencia entre x e y mediante

$$x \ominus y := x \oplus (-y).$$

Observación: Se dice que dos elementos $x, y \in V$ son iguales si y sólo si

$$x \ominus y = \theta \Leftrightarrow x - y = \theta$$

.

Espacios Vectoriales

Ley de cancelación

Si $x, y, z \in V$ son tales que $x \oplus y = x \oplus z$, entonces $y = z$ pues

Demostración: Dados $x, y, z \in V$ se tiene

$$\begin{aligned} x \oplus y = x \oplus z &\Rightarrow (-x) \oplus (x \oplus y) = (-x) \oplus (x \oplus z), \\ &\Leftrightarrow ((-x) \oplus x) \oplus y = ((-x) \oplus x) \oplus z \\ &\Leftrightarrow \theta \oplus y = \theta \oplus z, \\ &\Leftrightarrow y = z. \end{aligned}$$

Espacios Vectoriales

En todo espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, se verifican las siguientes propiedades:

1. el vector nulo θ, elemento neutro para la adición, es único.
2. para cada $x \in V$, el opuesto de x es único.
3. para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que $\alpha \odot \theta = \theta$.
4. para todo $x \in V$, se tiene que $0 \odot x = \theta$.
5. para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$, se cumple que $(-\alpha) \odot x = -(\alpha \odot x)$
6. para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$, se tiene que

$$\alpha \odot x = \theta \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee x = \theta$$

Demostraciones

Prop. 3: Consideremos lo siguiente:

$$\alpha \odot \theta = \alpha \odot (\theta \oplus \theta) = (\alpha \odot \theta) \oplus (\alpha \odot \theta) \Rightarrow \alpha \odot \theta = \theta.$$

esto último se concluye por unicidad del vector nulo.

Prop. 4: Consideremos lo siguiente:

$$0 \odot x = (0 + 0) \odot x = (0 \odot x) \oplus (0 \odot x) \Rightarrow 0 \odot x = \theta$$

al igual que la anterior, se concluye por unicidad del vector nulo.

Prop. 6: Notemos que en las propiedades 3 y 4 ya demostramos que $\alpha = 0$ o $x = \theta$, entonces $\alpha \odot x = \theta$, por ende solo nos resta demostrar la otra implicancia. Para lograr lo anterior, supongamos que $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$ son tales que $\alpha \odot x = \theta$ y $\alpha \neq 0$ y mostraremos que entonces $x = \theta$,

$$\begin{aligned} \theta = \alpha \odot x &\Rightarrow \alpha^{-1} \odot \theta = \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot x) \\ &\Rightarrow \theta = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \odot x = 1 \odot x = x \end{aligned}$$

la otra conclusión resulta de manera análoga.

Espacios Vectoriales

Observación:

1. Notemos que si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es también un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
2. ¿Es $(\mathbb{R},+,\cdot)$ un espacio vectorial complejo?
3. ¿Es $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un espacio vectorial real?
4. Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. ¿Cuáles son las operaciones consideradas?
5. Si consideramos la suma usual de vectores en $\mathbb{R}^n$ y el siguiente producto por escalar

$$\alpha \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^{\mathrm{t}}$$

   siendo $\alpha \in \mathbb{C}$. ¿$(\mathbb{R}^n,+,\odot)$ es un espacio vectorial complejo?
6. ¿$(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ es un espacio vectorial real?

Espacios Vectoriales

Otro espacio vectorial que ya conocemos está dado por el espacio de las matrices de orden $m \times n$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Se definen:

$$V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

y dos operaciones, una binaria interna y otra externa, dadas por:

$$\oplus : V \times V \to V \qquad \text{y} \qquad \odot : \mathbb{K} \times V \to V$$

luego, si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot A = (\alpha \cdot a_{ij})$$

Dado lo anterior, podemos decir que $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Ejercicios

Determine si las siguientes ternas son espacios vectoriales.

1. ¿$\Big(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot\Big)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$? donde $X \subseteq \mathbb{K}$ y
$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ es función}\}$$
y $+$ es la suma usual de funciones y $\cdot$ la multiplicación por escalar.
2. ¿$\Big(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot\Big)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$?, donde $+$ es la suma usual de polinomios y $\cdot$ es la multiplicación por escalar.
3. ¿$\Big(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot\Big)$ es un e.v. real?, donde:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x \oplus y = x \cdot y, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \odot x = x^\alpha$$
4. ¿$\Big(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\Big)$ es un e.v. real?, donde
$$(a, b) \oplus (c, d) = (0, b + d), \quad \alpha \odot (a, b) = (\alpha a, \alpha b), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Ejercicios

Solución 3: Para determinar si la terna es espacio vectorial debemos mostrar que se cumplen las 8 propiedades de espacios vectoriales, como sigue:

1. Notemos lo siguiente: $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$.
   Luego, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $x \oplus y = y \oplus x$.
2. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= (x \cdot y) \oplus z \\ &= (x \cdot y) \cdot z \\ &= x \cdot (y \cdot z) \qquad \text{(producto asociativo)} \\ &= x \cdot (y \oplus z) \\ &= x \oplus (y \oplus z) \end{aligned}$$

   Luego, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

Ejercicios

3. Notemos que existe $1 \in \mathbb{R}^+$ y es tal que

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por ende, 1 es el neutro para $\oplus$.

4. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, existe $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$ y es tal que $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Dado lo anterior se concluye que $\frac{1}{x}$ es el opuesto aditivo de x con respecto a $\oplus$.

5. Notemos que:

$$(\alpha\beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (\alpha \odot x)^\beta = \beta \odot (\alpha \odot x)$$

Luego, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\beta \odot (\alpha \odot x) = (\alpha\beta) \odot x$$

Ejercicios

6. Notemos que:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (xy) \\ &= (xy)^{\alpha} \\ &= x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} \\ &= (\alpha \odot x)(\alpha \odot y) \\ &= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \oplus y)\end{aligned}$$

Luego, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \oplus y)$$

Ejercicios

7. Notemos lo siguiente:

$$(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

   Luego, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^+$ se cumple que:

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = (\alpha + \beta) \odot x$$

8. Si consideramos $1 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$1 \odot x = x^1 = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Dado lo anterior, podemos concluir que $\left(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot\right)$ es un espacio vectorial real con sus operaciones binarias interna y externa definidas.

Ejercicios

Solución 4: Para justificar que una terna es un espacio vectorial se deben probar las 8 propiedades que este debe cumplir, es por esto que $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\right)$ no es un espacio vectorial real con las operaciones definidas, puesto que se considera el vector $v = (1, 2)$ no existe otro vector de modo que deje invariante a v con respecto a $\oplus$, de hecho:

$$v \oplus w = (1, 2) \oplus (c, d) = (1, 2) \Leftrightarrow (0, 2 + d) = (1, 2)$$

lo cual es una contradicción, de manera general se tiene:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (0, b + d) \neq (a, b)$$

Lo anterior, quiere decir que no existe un elemento neutro para la $\oplus$, por ende $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\right)$ no puede ser un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejercicios

Solución 4: Otra propiedad que no cumple esta terna es la siguiente:

$$\big(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\big)\big(\forall x \in V\big)\big((\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)\big)$$

ya que, de acuerdo con el ejercicio podemos considera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x = (a, b)$ un vector de $\mathbb{R}^2$, luego:

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha + \beta) \odot (a, b) = \Big((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b\Big)$$

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)\big) = (\alpha a, \alpha b) \oplus (\beta a, \beta b) = \Big(0, \alpha b + \beta b\Big)$$

es claro que la igualdad no se cumple, por ende $\Big(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\Big)$ no puede ser un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Subespacios Vectoriales

Definición

Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que S es un **subespacio vectorial** (s.e.v.) de V si S es subconjunto de V y con las mismas operaciones binarias definidas en V, es también un espacio vectorial.

Subespacios Vectoriales

Lo anterior, quiere decir que:

$$\oplus : S \times S \to S, \qquad \odot : \mathbb{K} \times S \to S$$

satisface las siguientes propiedades:

1. $(\forall\, x, y \in S)\,(x \oplus y = y \oplus x)$
2. $(\forall\, x, y, z \in S)\,(x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z)$
3. $(\exists\, \theta \in S)\,(\forall\, x \in S)\,(x \oplus \theta = x)$
4. $(\forall\, x \in S)\,(\exists\; -x \in S)\,(x \oplus (-x) = \theta)$
5. $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\, x \in S)\,(\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x)$
6. $(\forall\, \alpha \in \mathbb{K})\,(\forall\, x, y \in S)\,(\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y))$
7. $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\, x \in S)\,((\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x))$.
8. $(\forall\, x \in S)\,(1 \odot x = x)$

Subespacios Vectoriales

Considere los siguientes conjuntos

$$S_1 = \left\{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$S_2 = \left\{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Determine si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ - espacios vectoriales), respectivamente.

Subespacios Vectoriales

En el caso de S_1 podemos notar que la operación suma no es cerrada, ya que si consideramos

$$(1,0,1)^t \in S \wedge (0,1,2) \in S_2 \Rightarrow (1,0,1)^t + (0,1,2)^t = (1,1,3)^t \notin S$$

es por lo anterior, que S no es un espacio vectorial y por lo tanto tampoco es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Subespacios Vectoriales

En el caso de S_2 podemos notar que sus operaciones si están bien definidas (comprobar). Por otra parte, como las propiedades 1,2,5,6,7 y 8 de espacio vectorial se cumplen para todos los elementos de $\mathbb{R}^2$, también se cumplen para los elementos de S. Solo nos falta verificar las propiedades 3 y 4. En el caso de la existencia del elemento neutro, es evidente, ya que $\theta \in \mathbb{R}^2$ está en S y para la propiedad 4 solo tenemos que notar que el inverso aditivo sería $-1 \odot v$, siendo $v \in S$.

Subespacios Vectoriales

Lema

Dados V, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $S \subseteq V$, se cumple que: S es un s.e.v. de V sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si se cumple:

1. $\theta \in S$
2. $\big(\forall x, y \in S\big)\big(x \oplus y \in S\big)$
3. $\big(\forall \alpha \in \mathbb{K}\big)\big(\forall x \in S\big)\big(\alpha \odot x \in S\big)$

Subespacios Vectoriales

Observaciones: En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los únicos subespacios vectoriales que se encuentran son:

1. El espacio que solo contiene al nulo $\{\theta\}$ (espacio trivial).
2. Conjunto de vectores entre puntos en una recta que contenga al origen.
3. Conjunto de vectores entre puntos en un plano que contengan al origen.
4. $\mathbb{R}^2$ es s.e.v. de sí mismo.
5. $\mathbb{R}^3$ es s.e.v. de sí mismo.
6. En general, todo e.v. V es s.e.v. de sí mismo.
7. $\mathbb{R}^2$ no es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ pues no está contenido en éste.

Ejemplos

Determine cual de los siguientes conjuntos son s.e.v. del espacio indicado.

(a) $A = \{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 : y = mx,\ m \in \mathbb{R}\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 : x - 5y + z = 0\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

(c) $C = \{ax + b \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) : b = 2a + 1\}$ es un s.e.v. de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(d) $D = \{(x, y, 0)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

(e) $E = \{(x, x, 0, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^4 : x, y \in \mathbb{C}\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{C}^4$.

(f) $F = \{(x, \overline{x})^{\mathrm{t}} : x \in \mathbb{C}\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{C}^2$.

(g) $G = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\}$ es s.e.v. de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Operaciones entre Subespacios Vectoriales

Teorema

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W son subespacios vectoriales de V, entonces los conjuntos:

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \wedge v \in W\} \qquad \text{y}$$
$$U \cup W = \{v \in V : v \in U \vee v \in W\}$$

son tales que $U \cap W$ es también un s.e.v de V, mientras que $U \cup W$ lo es ssi $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.

Operaciones entre Subespacios Vectoriales

Demostración a): Hay que notar que U y W son s.e.v. de V, luego debemos mostrar que $U \cap W$ es un s.e.v. Para lo anterior, consideremos lo siguiente:

1. Sabemos que $\theta \in U$ y $\theta \in W$, por ende, $\theta \in U \cap W$.
2. Sean $u, w \in U \cap W$, luego se tiene:

$$u \in U \cap W \Rightarrow u \in U \wedge u \in W$$
$$w \in U \cap W \Rightarrow w \in U \wedge w \in W$$

   ahora bien, como U y W son s.e.v. de V, se tiene:

$$u + w \in U \wedge u + w \in W \Rightarrow u + w \in U \cap W$$

   es decir, $U \cap W$ es cerrado para la suma.
3. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U \cap W$, luego se tiene:

$$u \in U \cap W \Rightarrow u \in U \wedge u \in W$$

   ahora bien, como U es un s.e.v. de V, se tiene:

$$\alpha u \in U \wedge \alpha u \in W \Rightarrow \alpha u \in U \cap W$$

   es decir, $U \cap W$ es cerrado para la ponderación por escalar.

Por 1, 2 y 3 podemos concluir que $U \cap W$ es s.e.v. de V.

Ejemplos

En cada caso determine la unión e intersección de subespacios vectoriales.

(a) Sean $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\},$$

(b) Sean $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in V : x + y + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in V : x - 2y + z = 0\}$$

Ejemplos

(c) Sean $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$U = \{p \in V : p(1) - p(-1) = 0\},$$
$$W = \{p \in V : p(1) + p(-1) = 0\}$$

(d) Sean $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \{p \in V : p(0) = 0\},$$
$$W = \{p \in V : p(0) = 0 \wedge p'(0) = 0\}$$

Solución (c): Primero caracterizaremos ambos conjuntos para luego determinar lo solicitado, para esto consideremos un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned} U &= \{p \in V : p(1) - p(-1) = 0\} \\ &= \{p \in V : a + b + c - (a - b + c) = 0\} \\ &= \{p \in V : 2b = 0\} \\ &= \{p \in V : b = 0\} \\ &= \{p \in V : p(x) = ax^2 + c\} \end{aligned}$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} W &= \{p \in V : p(1) + p(-1) = 0\} \\ &= \{p \in V : a + b + c + (a - b + c) = 0\} \\ &= \{p \in V : 2a + 2c = 0\} \\ &= \{p \in V : a + c = 0\} \\ &= \{p \in V : p(x) = ax^2 + bx - a\} \end{aligned}$$

Ahora bien, para demostrar que U y W son subespacios vectoriales tenemos varias opciones, por ejemplo podemos considerar la primera condicion (la definición de cada conjunto entregada) o la última obtenida (la caracterización de cada vector dentro del conjunto), en este caso usaremos la definición, como sigue:

Para U:

1. Notamos que $\theta_V \in U$, ya que:

$$\theta(1) - \theta(-1) = 0 - 0 = 0$$

2. Sean $p, q \in U$, como ambos vectores están en U, se cumple que $p(1) - p(-1) = 0$ y $q(1) - q(-1) = 0$, luego se tiene:

$$\begin{aligned}(p+q)(1) - (p+q)(-1) &= p(1) + q(1) - p(-1) - q(-1) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

así, se concluye que $p + q \in U$.

3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p \in U$, como el vector está en U, se cumple que $p(1) - p(-1) = 0$, luego se tiene:

$$\begin{aligned}(\alpha p)(1) - (\alpha p)(-1) &= \alpha p(1) - \alpha p(-1) \\ &= \alpha\big(p(1) - p(-1)\big) \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

así, se concluye que $\alpha p \in U$.

Luego, por 1, 2 y 3 podemos concluir que U es subespacio vectorial de V.

Para W:

1. Notamos que $\theta_V \in W$, ya que:

$$\theta(1) + \theta(-1) = 0 + 0 = 0$$

2. Sean $p, q \in W$, como ambos vectores están en W, se cumple que $p(1) + p(-1) = 0$ y $q(1) + q(-1) = 0$, luego se tiene:

$$\begin{aligned}(p+q)(1) + (p+q)(-1) &= p(1) + q(1) + p(-1) + q(-1) \\ &= p(1) + p(-1) + q(1) + q(-1) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

así, se concluye que $p + q \in U$.

3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p \in W$, como el vector está en U, se cumple que $p(1) + p(-1) = 0$, luego se tiene:

$$(\alpha p)(1) + (\alpha p)(-1) = \alpha p(1) + \alpha p(-1) = \alpha\big(p(1) + p(-1)\big) = 0$$

así, se concluye que $\alpha p \in W$.

Luego, por 1, 2 y 3 podemos concluir que W es subespacio vectorial de V.

Ahora bien, recordemos que:

$$U = \{p \in V : b = 0\} \qquad \text{y} \qquad W = \{p \in V : a + c = 0\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{p \in V : p \in U \wedge p \in W\} \\ &= \{p \in V : p(1) - p(-1) = 0 \wedge p(1) + p(-1) = 0\} \\ &= \{p \in V : b = 0 \wedge a + c = 0\} \\ &= \{p \in V : b = 0 \wedge -a = c\} \\ &= \{p \in V : p(x) = ax^2 - a\} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$U \cup W = \{p \in V : p \in U \vee p \in W\}$$

En este caso $U \nsubseteq W$ y $W \nsubseteq U$, por lo tanto $U \cup W$ no es un subespacio vectorial de V, de hecho, si consideramos $p_1 \in U$ y $p_2 \in W$ tales que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : p_1(x) = 2x^2 + 1 \wedge p_2(x) = 4x^2 + 3x - 4$$

luego, $p_1, p_2 \in U \cup W$, pero $p_1 + p_2 \notin U$ y $p_1 + p_2 \notin W$ y por lo tanto $p_1 + p_2 \notin U \cup W$.

Operaciones entre Subespacios Vectoriales

Teorema

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W son subespacios vectoriales de V, entonces el conjunto:

$$U + W = \{v \in V : v = u + w,\ u \in U \wedge v \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Observación: Sea V un espacio vectorial y U, W dos subespacios de V. El subespacio $U + W$ es suma directa de U y W cuando $U \cap W = \{\theta\}$ y se denota por $U \oplus W$.

Ejemplos

1. Si consideramos el ejemplo 1 que presentamos anteriormente:

   Si $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

   $$U = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\},$$

   notemos que $U \cap W = \{\theta\}$, por ende el subespacio $U + W$ es una suma directa, pero a que subespacio corresponde $U + W$.

Ejemplos

De acuerdo con la definición de espacio suma, se tiene:

$$U + W = \left\{ v \in V : v = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

luego, si $v = (x, y, z)^t \in V$, un vector arbitrario, se tiene:

$$\begin{cases} x = 2t + s \\ y = 3t + 3s \\ z = 4t \end{cases}$$

ahora bien, si consideramos la matriz ampliada asociada el sistema y escalonamos, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 3 & 3 & y \\ 4 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 3 & 2y - 3x \\ 0 & 0 & -12x + 4y + 3z \end{array}\right)$$

si analizamos el rango del sistema, notamos que existe solución siempre que $-12x + 4y + 3z = 0$, está ultima ecuación representa la caracterización del s.e.v. suma, es decir:

$$U + W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : -12x + 4y + 3z = 0\}$$

Ejemplos

2. Si $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \left\{A \in V : A^t = A\right\}, \quad W = \{A \in V : A^t = -A\}$$

muestre que $U \oplus W = V$.

3. Si $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \{p \in V : p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0\},$$
$$W = \{p \in V : \exists a, b \in \mathbb{R} : p(x) = ax^3 + bx\}$$

Caracterice $U + W$ y decida si los s.e.v están en suma directa.

Ejemplos

Primero caracterizaremos cada subespacio vectorial, como sigue:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : b = c \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d = 0 \wedge b = -c \right\}$$

podemos notar que $U \cap W = \{\theta\}$. Ahora bien:

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in V : \right\}$$

Combinación Lineal

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. y $A = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\} \subseteq V$. La suma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

es un cambinación lineal (c.l.) de los vectores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ con escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ pertenecientes al cuerpo $\mathbb{K}$.

Observaciones:

1. un vector $u \in V$ es c.l. de los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n$$

2. El vector nulo del espacio V es c.l. de cualquier conjunto finito de vectores de V.

Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sean $v, d \in V$. Entonces v es c.l. de d ssi v pertenece a la recta:
$$L = \{(x, y, z)^t \in V : (x, y, z)^t = \lambda(d_1, d_2, d_3)^t, \;\; \alpha \in \mathbb{R}\}$$
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sean $v, u, w \in V$. Entonces v es c.l. de los vectores u, w ssi v pertenece al plani:
$$\Pi = \{(x, y, z)^t \in V : (x, y, z)^t = \lambda u + \alpha w, \;\; \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
3. Sean $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $p_1, p_2, p_3, q \in V$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$:
$$p_1(x) = 4x + 1, \;\; p_2(x) = x^2, \;\; p_3(x) = -x - 1$$
entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple:
$$q(x) = 2p_1(x) - 4p_2(x) + 0p_3(x)$$
así q es c.l. de los vectores p_1, p_2 y p_3.

Ejemplos

4. Sean $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y los vectores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

entonces el vectores A dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

se puede expresar como c.l. de A_1, A_2 y A_3 de infinitas maneras.

Conjunto Generador

Definición

Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, ..., v_k$ vectores de V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, ..., v_k$ se denomina **conjunto generador** por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ y se denota por:

$$\langle\{v_1, v_2, ..., v_k\}\rangle$$

Conjunto Generador

Observaciones:

1. Un vector $u \in \langle\{v_1, v_2, ..., v_k\}\rangle$ ssi existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tales que:
$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k$$
2. Si $S = \langle\{v_1, v_2, ..., v_k\}\rangle$, entonces se dice que S es **generado** por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ y que $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ genera a S o que es generador de S.
3. Un convenio matemático que explicaremos mas adelante es el siguiente:
$$\{\theta\} = \langle\varnothing\rangle$$
4. Nota que cada vez que tengamos un $\mathbb{K}$- e.v. V podemos determinar un conjunto generador, de hecho el conjunto V es generador de V.
5. El conjunto $S = \langle\{v_1, v_2, ..., v_k\}\rangle$ es un subespacio vectorial y se denomina subespacio generado.

Ejemplos

1. Para todo espacio vectorial de la forma $\mathbb{K}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se tiene que

$$\mathbb{K}^n = \langle \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \rangle$$

Ejemplos

1. Para todo espacio vectorial de la forma $\mathbb{K}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se tiene que
$$\mathbb{K}^n = \langle \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \rangle$$
2. Para cada espacio vectorial hay más de un conjunto generador, por ejemplo
$$\mathbb{R}^2 = \langle \{(1,0)^t, (0,1)^t\} \rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^2 = \langle \{(1,2)^t, (1,1)^t\} \rangle$$

Ejemplos

1. Para todo espacio vectorial de la forma $\mathbb{K}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se tiene que
$$\mathbb{K}^n = \langle \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \rangle$$
2. Para cada espacio vectorial hay más de un conjunto generador, por ejemplo
$$\mathbb{R}^2 = \langle \{(1,0)^t, (0,1)^t\} \rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^2 = \langle \{(1,2)^t, (1,1)^t\} \rangle$$
3. El espacio $\mathbb{C}^2$ posee una particularidad, puesto que si se se analiza como un espacio vectorial **complejo** se tiene que
$$\mathbb{C}^2 = \langle \{(1,0)^t, (0,1)^t\} \rangle$$
Pero si se considera como un espacio vectorial **real**, se tiene
$$\mathbb{C}^2 = \langle \{(1,0)^t, (0,1)^t, (i,0)^t, (0,i)^t\} \rangle$$

Ejercicios

Determine el conjunto de generadores de cada uno de los subespacios vectoriales:

1. Si $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y
$$S = \{(x, y, z)^t \in V : x + 4y - z = 0\}$$
2. Si $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y
$$S = \{A \in V : A \text{ es simétrica}\}$$
3. Si $V = \mathbb{C}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y
$$W = \{(z_1, z_2, z_3)^t \in V : -(i+1)z_1 + z_2 + iz_3 = 0\}$$
4. Si $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y
$$U = \{p \in V : p(1) - p(-1) = 0\}$$

Dependencia e Independencia Lineal

Definición

Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $v_1, v_2, ..., v_k$ elementos de V. Se dice que el conjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es **linealmentente dependiente** si existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k = \theta$$

Dependencia e Independencia Lineal

Observaciones:

1. Si A no es l.d., se dice que es linealmente independiente (l.i.).
2. Si A es l.d. entonces existe al menos un vector de A que es c.l. de los otros.
3. Si $A = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es l.i. en V ssi

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$$

4. Si A es l.i. en V, entonces todo subconjunto de A es l.i.
5. Si A es l.d. en V, entonces todo conjunto que contenga a A es l.d.
6. Si $\theta \in A$, entonces A es l.d. en V.
7. Si $A = \{v\}$ y $v \neq \theta$, entonces A es l.i.

Ejemplos:

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son li o ld.

(a) Si $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \left\{(1,1)^t, (3,1)^t, (1,3)^t\right\}$$

(b) Si $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$B = \left\{(1,-3,2)^t, (3,-9,6)^t, (-1,4,2)^t\right\}$$

(c) Si $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$C = \left\{x^3 + x, x^2 + x, x^3 - x^2\right\}$$

(d) Si $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$D = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Dependencia e Independencia Lineal

Lema de Dependencia Lineal

Sea $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un conjunto linealmente dependiente en V un $\mathbb{K}$-e.v. y $v_1 \neq \theta$, entonces existe $j \in \{2, ..., k\}$ de modo que:

1. $v_j \in \langle\{v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_k\}\rangle$, es decir, v_j se escribe como cl de los vectores restantes del conjunto, y
2. $\langle\{v_1, v_2, ..., v_k\} \backslash \{v_j\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, ..., v_k\}\rangle$

Base de un Espacio Vectorial

Definición

Una base de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V es una familia ordenada de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ que cumple que:

- $\mathcal{B}$ es conjunto generador de V, es decir, $V = \langle \mathcal{B} \rangle$.
- $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Proposición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. Un conjunto ordenado $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es una base para V ssi cada vector $v \in V$ puede ser escrito de manera única como c.l. de los vectores $v_1, ..., v_n$.

Ejemplos

Los siguientes ejemplos son bases para espacios vectoriales dados

1. Si $V = \mathbb{K}$, e.v. sobre $\mathbb{K}$, el siguiente conjunto
$$\mathcal{B}_c = \{1\}$$
recibe el nombre de **base canónica** de V.
2. Si $V = \mathbb{K}^n$, e.v sobre $\mathbb{K}$, el conjunto de vectores
$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
recibe el nombre de **base canónica** de V.

Ejemplos

3. Si $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, e.v. sobre $\mathbb{K}$, el conjunto de vectores

$$\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

recibe el nombre de **base canónica** de V.

4. Si $V = \mathbb{R}^2$, e.v sobre $\mathbb{R}$, el conjunto de vectores

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de V. ¿Cómo se puede demostrar?

5. Si $V = \mathbb{R}^3$, e.v sobre $\mathbb{R}$, el conjunto de vectores

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de V. ¿Cómo se puede demostrar?

Dimensión de Espacios Vectoriales

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. La **dimensión** de V, que se denota por $\dim(V)$, es la cardinalidad de cualquiera de sus bases. La **dimensión** del e.v. trivial $\{\theta\}$ es cero.

Lema

Todas las bases de un espacio finito dimensional V (V es finito dimensional si podemos encontrar un conjunto generador para V con una cantidad finita de vectores) tienen la misma cardinalidad

Ejemplos: De acuerdo a los ejemplos vistos en las clases anteriores se tiene $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{K})) = n + 1$, si consideramos a cada uno de ellos como $\mathbb{K}$-e.v. Además, $\dim(\mathbb{C}^n) = 2n$ siendo un espacio vectorial real.

Dimensión de Espacios Vectoriales

Teorema

Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $U, W \subseteq V$ subespacios vectoriales de V. Entonces

1. W es finito dimensional y $\dim(W) \leq \dim(V)$.
2. si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $V = W$.
3. $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

La relación mostrada en el apartado 3, se conoce como **teorema de Grassmann**.

Dimensión de Espacios Vectoriales

Definición

Si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y U, W s.e.v. de V, se dice que $U + W$ es una **suma directa** si y solo si $U \cap W = \{\theta\}$ o, de manera equivalente, si y solo si $\dim(U \cap W) = 0$, es decir, si y solo si $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Definición:

Sean V un $\mathbb{K}$-e.v., S_U, $S_W \subseteq V$ tales que S_U y S_W tienen cardinalidad finita. Si $U = \langle S_U \rangle$ y $W = \langle S_W \rangle$, entonces espacio $U + W$ es el espacio generado por la unión de los generadores de U y W, es decir,

$$U + W = \langle S_U \cup S_W \rangle$$

Ejercicios

Considere el siguiente s.e.v. de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$S = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(1) + p(2) = 0\}$$

(a) Caracterice los vectores de S

(b) Determine una base para S

(c) Calcule la dimensión del subespacio vectorial.

Ejercicios

Sean W_1 y W_2 los siguientes conjuntos:

$$W_1 = \{(a,b,c,d)^t \in \mathbb{R}^4 : b + 2c + d = 0\} \quad \text{y}$$
$$W_2 = \{(a,b,c,d)^t \in \mathbb{R}^4 : b + c = 2d = 0\}$$

(a) Mostrar que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine el conjunto generador de $W_1 \cap W_2$.

(c) Determine la dimensión de $W_1 + W_2$ y encuentre una base para dicho espacio.

Ejercicios

Considere los siguientes subespacios vectoriales

$$
\begin{aligned}
B &= \left\langle \{(1,0,2)^t, (2,1,1)^t, (-4,-3,1)^t\} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \\
S &= \left\langle \{(1,i,1)^t, (-i,1,-i)\} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^3 \\
W &= \left\langle \{(0,1,-2,-1)^t, (1,1,0,1)^t, (1,2,-2,0)^t\} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4 \\
H &= \langle \{x+1, x(x+1), (x-1)(x+1)\} \rangle \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Determine una base para cada subespacio vectorial y calcule su dimensión.

Ejercicios

Sea $\{v_1, v_2\}$ un conjunto l.i. de vectores de un cierto espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con $\dim(V) = 3$. Sean también $u, w \in V$ tales que $u \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle$ y $w \notin \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

(a) Sean $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y suponga que

$$\alpha(u + w) + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \theta,$$

donde θ es el vector nulo de V. Desarrolle esta expresión y muestre, justificadamente, que solamente si $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ se cumple la igualdad anterior.

(b) ¿Es $B = \{u + w, v_1, v_2\}$ base de V? Justifique.

Base de un Espacio Vectorial

Teorema

Todo conjunto de generadores de un espacio vectorial puede reducirse a una base del espacio.

Teorema de Steinitz

Todo conjunto l.i. es un espacio vectorial V, finito dimensional, puede extenderse a una base de V.

Ejercicios

1. Complete $\mathcal{B}$ hasta obtener una base del $\mathbb{K}$-e.v. V.

   (a) $\mathcal{B} = \{(1,2)^t\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) $\mathcal{B} = \{x^2 + 2x\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) $\mathcal{B} = \{(1,i)^t, (1,-i)^t, (1,1)^t\} \subseteq \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

2. Calcule la dimensión del s.e.v.

$$S = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0 \right\}.$$

   Complete la base obtenida de S a una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Coordenadas de un Vector

Definición

Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, entonces para cada $v \in V$ existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se denominan coordenadas de v en $\mathcal{B}$ y se denotan mediante:

$$[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^t$$

Además, el vector $[v]_{\mathcal{B}}$ se llama vector de coordenadas, o vector coordenado, de v respecto de la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio

Sea U el siguiente subespacio del espacio vectorial real $\mathbb{C}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : z_1 = \overline{z_2} \quad \wedge \quad z_3 = \overline{z_3} \right\}.$$

(a) Determine un conjunto generador de U.

(a) Encuentre una base $\mathcal{B}$ de U y determine $\dim(U)$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ la base que encontró en el item anterior y sea

$$z = (-1+2i, -1-2i, 5)^t \text{ y } w = (-2+i, -2-i, 2)^t \in U$$

Encuentre $[z]_{\mathcal{B}}$, $[z+z+z]_{\mathcal{B}}$ y $[z+w]_{\mathcal{B}}$.

Coordenadas de un vector

Lema

Si V es un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión n y $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces para todo par de vectores $u, v \in V$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$[u+v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}, \qquad [\alpha\, u]_{\mathcal{B}} = \alpha [u]_{\mathcal{B}}.$$