Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
GAJ/JAG/CMX/HPV/JRC 27-06-19

Test 6(Pauta)

Nombre……………………………………………Matrícula…………………………… Profesor…………………………

Usando la definición de integral de línea calcule $I=\int_C y\,dx+2\;x\,d$ donde C es la frontera orientada positivamente de la región $D=D_1\cup D_2$ del plano, con D_1 y D_2 los discos cerrados de radio 1 de respectivos centros en los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$.

Solución

Se observa que las dos circunferencias se cortan en los dos puntos $O(0,0)$ y $A(1,1)$. Luego $C=C_1+C_2$ donde C_1 es el arco de la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=1$ que va desde el origen $O(0,0)$ hasta $A(1,1)$ y C_2 es el arco de la circunferencia de ecuación $x^2+(y-1)^2=1$ que va desde $A(1,1)$ hasta $O(0,0)$.

Una representación paramétrica de C_1 está dada por

$$\begin{aligned} x&=\ 1+\cos t \\ y&=\ sent \end{aligned} \qquad t\in\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$$

.(Usamos como parámetro la medida t del ángulo que forma el eje x con el rayo que va desde el centro $C(1,0)$ hasta $P(t)\in C_1$)……………………………………………………….15 puntos

Luego

$$I_1=\int_{C_1} ydx+xdy=\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\left[sent(-sent)+2(1+\cos t)\cos t\right]dt=$$

$$\left[\frac{t}{2}+\frac{3}{4}sen2t+2sent\right]_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}+2$$

……………………………………………………………………………………..............15 puntos

Una representación paramétrica de C_2 está dada por

$$\begin{aligned} x&=\ \cos t \\ y&=\ 1+sent \end{aligned} \qquad t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$$

. Ahora usamos como parámetro la medida t del ángulo que forma la recta de ecuación de ecuación $y=1$ con el rayo que va desde el centro $C(01)$ al punto $P(t)\in C_2$. …………………………………15 puntos

Luego

$$I_2 = \int_{C_2} ydx + xdy = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left[(1+sent)(-sent) + 2\cos^2 t \right] dt =$$

$$\left[\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\cos t + \frac{3}{4} sen2t \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} - 1$$

Por lo tanto $I = \frac{3\pi}{2} + 1$……………………………………………………………………………15 puntos