UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV 525412
Porf. C. Thraves Caro.
Ayudantes: V. Henríquez y C. Opazo.

Listado 7

1. En los apuntes se definió la función $\hat{\delta}$ separando el input w en una palabra x seguida del último símbolo a ($w = xa$). Sin embargo, intuitivamente no debería importar si el input w se separa de esta manera o como la concatenación de dos palabras cualquiera x e y ($w = xy$). Demuestre que esto es cierto, es decir, demuestre que $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$ para cualquier estado q y palabras x, y. (Recomendación, use inducción en $|y|$, el largo de y).

2. Demuestre que para cualquier estado q y palabra x y símbolo a, $\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, a), x)$. (Use el ejercicio anterior).

3. Para cada uno de los siguientes lenguajes en el alfabeto $\{0, 1\}$, de un DFA que lo acepte.
   - El conjunto de todas las palabras que terminan en 00.
   - El conjunto de todas las palabras con tres ceros consecutivos.
   - El conjunto de las palabras con 011 como sub-palabra.
   - El conjunto de todas las palabras para las que todo bloque de cinco símbolos consecutivos contiene al menos dos ceros.
   - El conjunto de todas las palabras para las que el décimo símbolo de derecha a izquierda es un 1.
   - El conjunto de todas las palabras que empiezan o terminan con 01.
   - **Tarea*** El conjunto de todas las palabras para las que la cantidad de ceros es múltiplo de 5 y la cantidad de unos es múltiplo de 3.

4. Sea A un DFA y q un estado de A tal que $\delta(q, a) = q$ para todo símbolo a. Demuestre que para toda palabra w, $\hat{\delta}(q, w) = q$. Use inducción en el largo de w.

5. Sea A un DFA y a un símbolo del alfabeto de A tal que, para todo estado q de A, se cumple $\delta(q, a) = q$.
   - Demuestre usando inducción en n que para todo $n \geq 0$ se cumple $\hat{\delta}(q, a^n) = q$, donde a^n es la concatenación de n a's.
   - Demuestre que $\{a\}^* \subseteq L(A)$ o que $\{a\}^* \cap L(A) = \emptyset$.

6. Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ un DFA, y suponga que para todo $a \in \Sigma$ se cumple $\delta(q_o, a) = \delta(q_f, a)$.
   - Demuestre que para todo $w \neq \epsilon$ se cumple que $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_f, w)$.
   - **Tarea*** Demuestre que si x es una palabra en $L(A)$ distinta de ϵ, entonces para todo $k > 0$ se cumple que $x^k \in L(A)$.