

ALGEBRA III (525201)

Evaluación 1

Tiempo: 100 Mins.

1. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se dice creciente si $A_i \subseteq A_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

a) Dada $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos, distintos y creciente, se define la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por:

$$B_1 = A_1 \quad \wedge \quad B_k = A_k \setminus A_{k-1}, \quad \forall k \geq 2.$$

Pruebe que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

b) Defina una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ creciente y de elementos distintos tal que:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}.$$

2. Sea la relación R en \mathbb{Z}^3 definida por: $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3$,

$$x R y \iff \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

a) Pruebe que R es relación de orden ¿Es R de orden total o parcial?

b) Sea los conjuntos:

$$R^+ = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \theta R x\} \quad \text{y} \quad R^- = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x R \theta\},$$

donde $\theta = (0, 0, 0)$. Pruebe que $R^+ \cap R^- = \{\theta\}$ y $R^+ \cup R^- \neq \mathbb{Z}^3$. Además, muestre que

$$\forall z \in \mathbb{Z}^3, \exists x \in R^-, y \in R^+, x R z R y.$$

3. Sea V un e.v. sobre \mathbb{K} de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que:

a) $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

b) $\text{Ker}(T + I) \subseteq \text{Ker}(T)$ y $T + I$ es un automorfismo.