Clase 2: Integral indefinida y métodos de integración (Parte II).

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Integración por sustitución

Integrales que conducen a exponenciales y logaritmos

Dada la función $\ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & , \text{ si } x > 0 \\ \ln(-x) & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$, observamos que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \, , \; \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \, .$$

Así,

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \, .$$

Mas general, si f es derivable, entonces

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C \, .$$

Ejemplos

Integrales que conducen a exponenciales y logaritmos

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
3. $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int \sec(x)\,dx$

Soluciones.

1. $\ln|x+1| + C$
2. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$
3. $-\ln|\cos(x)| + C$
4. $\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$

Integración por sustitución

Integrales que conducen a exponenciales y logaritmos

Recordamos que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$. Así, $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$.

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} \, dx$
2. $\displaystyle\int \sqrt{e^{7x}} \, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{e^{4/x}}{x^2} \, dx$
4. $\displaystyle\int e^x \sqrt{1 + 2e^x} \, dx$

Soluciones.

1. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$
2. $\frac{2}{7}\sqrt{e^{7x}} + C$
3. $-\frac{1}{4}e^{4/x} + C$
4. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{1 + 2e^x}\right)^3 + C$

Integración por sustitución

Integrales que conducen a exponenciales y logaritmos

Dado $a > 0$, como $\dfrac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$, se tiene que

$$\int a^x \, dx = \left(\frac{1}{\ln(a)}\right) a^x + C \, .$$

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int 2^x \, dx$
2. $\displaystyle\int x \, 3^{x^2} \, dx$

Soluciones.

1. $\dfrac{1}{\ln(2)} 2^x + C$
2. $\dfrac{1}{2\ln(3)} 3^{x^2} + C$

Proposición 2.1

Dado $a \neq 0$, las siguientes se cumplen:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, para $|x| < a$ y $a > 0$.

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+16}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{3-4(x-1)^2}}\,dx$

Soluciones.

1. $\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x/4)+C$
2. $\arctan(\operatorname{sen}(x))+C$
3. $\displaystyle\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}(4x/5)+C$
4. $\displaystyle 3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x-2}{\sqrt{3}}\right)+C$

Integración por partes

Si f y g son 2 funciones derivables, entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Integrando ambos lados de la igualdad se tiene:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx$$

Así, tenemos la siguiente fórmula denominada **Integración por partes**

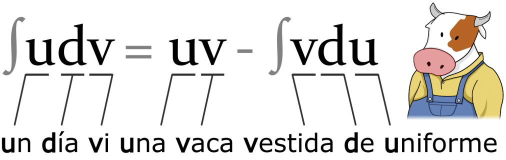
$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx \ \ (*).$$

Integración por partes

La fórmula $(*)$ suele escribirse como

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

que viene de hacer $u = f(x)$ y $v = g(x)$.



Integración por partes
Ejemplo 1

Calcular

$$\int x^3 \ln(x)\ dx$$

Solución.

Sea $u = \ln(x)$ y $dv = x^3\ dx$. Luego, $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^4}{4}$.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln(x)\ dx &= \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C\ .\end{aligned}$$

Integración por partes
Ejemplo 2

Calcular
$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx$$

Solución.

Sea $u=\cos(x)$ y $dv=e^{-x}\,dx$. Luego, $du=-\operatorname{sen}(x)dx$ y $v=-e^{-x}$.

$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx=-e^{-x}\cos(x)-\int e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Integrando nuevamente por partes, con $u=\operatorname{sen}(x)$ y $dv=e^{-x}dx$ se tiene:

$$\int e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx=-e^{-x}\operatorname{sen}(x)+\int e^{-x}\cos(x)\,dx$$

Integración por partes
Ejemplo 2

Luego,

$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx = e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) - e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\cos(x)\,dx\ .$$

Así,

$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\mathrm{sen}(x) - \cos(x)\right) + C$$

Integración por partes

Ejercicios

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \ln(x)\ dx$
2. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(x)\ dx$
3. $\displaystyle\int \sec^3(x)\ dx$
4. $\displaystyle\int e^{2x} \cos(3x)\ dx$

Soluciones.

1. $x \ln(x) - x + C$
2. $-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C$
3. $\dfrac{1}{2} \sec(x) \tan(x) + \dfrac{1}{2} \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$
4. $\dfrac{2}{13} e^{2x} \cos(3x) + \dfrac{3}{13} e^{2x} \operatorname{sen}(3x) + C$