Procesos Estocásticos : Proceso de Wiener

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

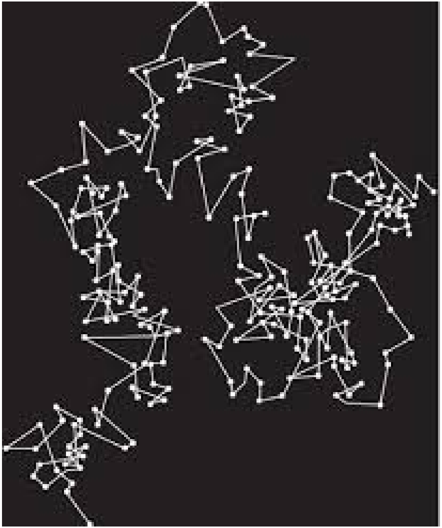
Procesos Estocásticos. 01/05/2020

Outline

Outline

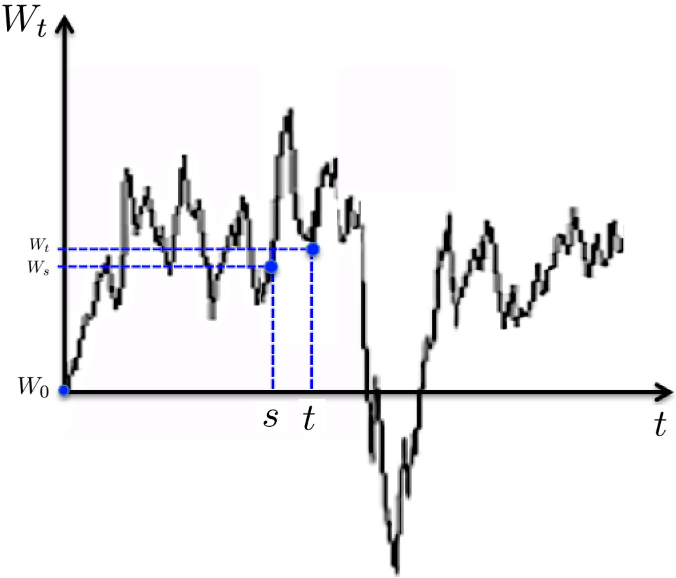
Movimiento Browniano

Movimiento Browniano



Intro.

A comienzos del siglo pasado, Albert Einstein propuso un modelo matemático para el movimiento errático de partículas suspendidas en un ambiente de agitación térmica descubierto por el botánico Robert Brown en 1827 (Movimiento Browniano).
Los choques de las partículas invisibles del fluido, que rodean a la partícula visible al microscopio que estamos observando, le producen movimientos erráticos, de modo que si W_t es la abscisa en un eje determinado de la posiciín de la partícula, a partir de su posiciín inicial, los incrementos $W_t - W_s$, $s < t$, son producto exclusivo de los choques recibidos en $t - s$ (debido a la suposición de que la viscosidad es infinita, por lo que la velocidad inicial no hace diferencias en el incremento resultante.)


W_t
W_t
W_s
W_0
s
t
t

Definición. Proceso de Wiener

Sea $T = [0, \infty)$.
Se denomina el proceso de Wiener $\{W_t, t \in T\}$ tal que para todo t

1. $W_0 = a$ (constante). Usualmente $a = 0$.
2. $\forall s < t$, los incrementos $W_t - W_s$ son independientes y satisfacen
   - $\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$
   - $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = t - s$

Ejemplo

Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. Muestre que $Cov(W_t, W_s) = t \wedge s$ y $corr(W_t, W_s) = \sqrt{\frac{s \wedge t}{s \vee t}}$.

Sol. Para todo s y t se tiene por la definición :

$$\begin{aligned} Cov(W_t, W_s) &= \mathbb{E}\left[(W_t - \mathbb{E}W_t)(W_s - \mathbb{E}W_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W_t W_s\right]. \end{aligned}$$

Sea $s < t$ y tomando $W_t = (W_t - W_s) + W_s$, se tiene que $(W_t - W_s) \perp\!\!\!\perp W_s$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] &= \mathbb{E}\left[((W_t - W_s) + W_s)W_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)W_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[(W_t - W_s)]}_{0}\underbrace{\mathbb{E}[W_s]}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}[W_s^2]}_{s} = t \wedge s.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
corr(W_t, W_s) &= \frac{Cov(W_t, W_s)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_t)\,\mathrm{Var}(W_s)}} \\
&= \frac{s}{\sqrt{ts}} = \sqrt{\frac{s}{t}} = \sqrt{\frac{s \wedge t}{s \vee t}}.
\end{aligned}$$

Observaciones

- Las trayectorias del proceso de Wiener son casi seguramente continuas, pero no son derivables en ningún punto.

- Por el Teorema del Límite Central, de la definición anterior tenemos que $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Es decir, los procesos de Wiener se distribuyen como una variable Gaussiana.

Por tanto, $f_{W_t}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)$, si $W_0 = 0$.

Además, $f_{W_t - W_s}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(t-s)}\right)$.

Definición alternativa de Proceso de Wiener

Un proceso $\{W_t, t \in T\}$ se denomina Proceso de Wiener, si verifica las siguientes propiedades

1. $W_0 = 0$ c.s.
2. Las trayectorias de W_t son c.s. continuas ;
3. El proceso W_t tiene incrementos independientes ;
4. Los incrementos $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, $s < t$.

Se dice que $\{X_t : t > 0\}$ es un proceso Gaussiano si todo vector aleatorio del tipo $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ tiene distribución normal n-variante. Es decir,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right)$$

donde $\mu^T = \mathbb{E}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, con $\mu_k = \mathbb{E}(X_{t_k})$ y $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{1\le i,j\le n}$, con $\Sigma_{ij} = \mathbb{E}\left[(X_{t_i}-\mu_i)(X_{t_j}-\mu_j)\right]$.

- Un proceso Gaussiano $\{X_t : t \geq 0\}$ con $\mathbb{E}(X_t) = 0$ y $Cov(X_t, X_s) = t \wedge s$ es el proceso de Wiener.

Demo.
Es obvio que de lo anterior, $W_0 = 0$ c.s.
En efecto, si $Cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t$, entonces $Cov(W_0, W_0) = \text{Var}(W_0) = 0$ y por tanto, W_0 es una constante.
Luego, $\mathbb{E}(W_0) = 0$ implica que $W_0 = 0$.
Además,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] &= \text{Var}(W_t) + \text{Var}(W_s) - 2Cov(W_s, W_t) \\ &= t + s - 2(t \wedge s) \\ &= |t - s|.\end{aligned}$$

Autosimilitud del Proceso de Wiener

Sea $\{W_t, t \in T\}$ Proceso de Wiener. Entonces,

$$\widehat{W}(t) = cW\left(\frac{t}{c^2}\right),$$

para cada $c \neq 0$, es un proceso de Wiener.

Ejemplos : Triangulos de Sierpinski, fractales...

Demo.

$$\widehat{W}(0) = cW\left(\frac{0}{c^2}\right) = W(0) = 0$$

Demo. Cont.

$$\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s) &= \mathbb{E}\left[cW\left(\frac{t}{c^2}\right) - cW\left(\frac{s}{c^2}\right)\right] \\ &= c\mathbb{E}\left[W\left(\frac{t}{c^2}\right) - W\left(\frac{s}{c^2}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

Demo. Cont.

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widehat{W_t} - \widehat{W_s}) &= \mathbb{E}\left|cW\left(\frac{t}{c^2}\right) - cW\left(\frac{s}{c^2}\right)\right|^2 \\
&= c^2\mathbb{E}\left|W\left(\frac{t}{c^2}\right) - W\left(\frac{s}{c^2}\right)\right|^2 \\
&= c^2\left|\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right| = |t-s|.
\end{aligned}$$

Además,

$$W_t \sim \mathcal{N}(0,t) \Rightarrow \widehat{W_t} \sim \mathcal{N}(0,t).$$

Demo. Cont. Independencia de los incrementos

Recuerde : $\forall s < t, u < t$, tal que $(s,t) \cap (u,v) = \emptyset$ es cierto que $W_v - W_u \perp\!\!\!\perp W_t - W_s$.

Considerando

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\left(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s\right) &\stackrel{d}{=} W\left(\frac{t}{c^2}\right) - W\left(\frac{s}{c^2}\right) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{W(t) - W(s)}{c} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{c}\left(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s\right) \perp\!\!\!\perp \frac{1}{c}\left(\widehat{W}_v - \widehat{W}_u\right).$$

Gracias y hasta pronto !

Autosimilitud del Proceso de Wiener