Aplicaciones de la integral de Lebesgue.

- **Series numéricas e integrales de Lebesgue.**
- **Integrales de Riemann e integrales de Lebesgue.**
- **Integrales impropias Riemann e integrales de Lebesgue.**

Series numéricas e integrales de Lebesgue.

Recordemos que si μ es la **medida de contar** en $\mathbb{N}$, definida por

$$\mu(E) := \begin{cases} \#E, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ +\infty, & \text{si } E \text{ es infinito,} \end{cases} \qquad \forall E \subset \mathbb{N},$$

donde $\#E$ denota la cantidad de elementos de E, entonces $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(N), \mu)$ es un espacio de medida.

Como es usual, identificamos cada función $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \mapsto a_n \end{array}$ con la sucesión de sus valores; vale decir, con la **sucesión de números reales** $\{a_n\}$ **:**

$$f := \{a_n\} = (a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n, \ldots).$$

Notemos que como la σ-álgebra es $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, todas las sucesiones de números reales $\{a_n\}$ son funciones medibles.

Veamos que, para **sucesiones de términos positivos,** $\boxed{\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.}$

Dada $\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \\ \quad n \mapsto a_n \end{array}$ sean $\varphi_N := (a_1, \dots, a_N, 0, \dots)$, $N \in \mathbb{N}$.

Cada φ_N es una función simple positiva y la siguiente es una representación:

$$\varphi_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\{n\}},$$

donde $\chi_{\{n\}}$ es la función característica de $\{n\}$:

$$\chi_{\{n\}}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k \neq n, \end{cases} \implies \chi_{\{n\}} = (\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{0}, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \dots).$$

Como $\int \chi_{\{n\}}\,d\mu = \mu(\{n\}) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int \varphi_N\,d\mu = \sum_{n=1}^{N} a_n \int \chi_{\{n\}}\,d\mu = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Dado que $a_{n+1} \geq 0$, se tiene que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como además $\varphi_N \to f$ $\big($pues, $\forall k \in \mathbb{N}$, si $N \geq k$, $\varphi_N(k) = a_k = f(k)\big)$,

entonces **T.C.M.** $\implies \int \varphi_N\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$. Por lo tanto,

$$\int f\,d\mu = \lim_N \int \varphi_N\,d\mu = \lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Veamos ahora que una **sucesión de números reales** de cualquier signo es integrable Lebesgue si y sólo si la respectiva serie es **absolutamente convergente** y que, en tal caso, la integral de Lebesgue de la sucesión es la serie.

En efecto, dada una sucesión $f = \{a_n\}$ con $a_n \in \mathbb{R}$, como $|f| = \{|a_n|\}$, entonces f es integrable Lebesgue si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \int |f|\, d\mu < +\infty$. Es decir, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente.**

En tal caso, $\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$, donde

$$f^+ = \{a_n^+\}, \text{ con } a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \implies a_n^+ \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y}$$
$$f^- = \{a_n^-\}, \text{ con } a_n^- := \max\{-a_n, 0\} \implies a_n^- \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $a_n^+ \leq |a_n|$ y $a_n^- \leq |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, entonces $\int f^+\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ < +\infty$ y $\int f^-\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < +\infty$.

Por lo tanto, usando que $a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Integrales de Riemann e integrales de Lebesgue.

Recordemos que dada una **función acotada** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

y una **partición** $P := \{x_0, \ldots, x_N\}$ de $[a,b]$: $a = x_0 < \cdots < x_N = b$,

se definen la **suma inferior** $L(P,f)$ y la **suma superior** $U(P,f)$ como sigue:

$$L(P,f) := \sum_{j=1}^{N} m_j\,(x_j - x_{j-1}) \quad \text{con } m_j := \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x),$$

$$U(P,f) := \sum_{j=1}^{N} M_j\,(x_j - x_{j-1}) \quad \text{con } M_j := \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x).$$

Entonces:

f es **integrable Riemann** $\iff \sup_P L(P,f) = \inf_P U(P,f) =: \int_a^b f$.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada. Entonces, f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

Corol.: Si f es integrable Riemann, entonces hay una sucesión de particiones $\{P_n\}$ de $[a,b]$, creciente en el sentido de que $P_n \subset P_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\lim_n L(P_n,f) = \int_a^b f = \lim_n U(P_n,f).$$

Dem.: Teor. anterior $\Longrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n' :$ $U(P_n',f) - L(P_n',f) < \frac{1}{n}$.

Sean $P_n := \bigcup_{k=1}^n P_k'$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $\{P_n\}$ es una **sucesión creciente** de particiones de $[a,b]$.

Como además, $P_n \supset P_n'$, Entonces,

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) \leq U(P_n',f) - L(P_n',f) < \tfrac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y como

$$L(P_n,f) \leq \sup_P L(P,f) = \int_a^b f = \inf_P U(P,f) \leq U(P_n,f),$$

entonces

$$0 \leq U(P_n,f) - \int_a^b f \leq U(P_n,f) - L(P_n,f) < \tfrac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \lim_n U(P_n,f) = \int_a^b f$$

y

$$0 \leq \int_a^b f - L(P_n,f) \leq U(P_n,f) - L(P_n,f) < \tfrac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \lim_n L(P_n,f) = \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Llamemos **intervalos abiertos de** $[a,b]$ a las intersecciones de intervalos de $\mathbb{R}$ con $[a,b]$.

Sea $\mathscr{B}$ la σ-álgebra de Borel en $[a,b]$; es decir, la menor σ-álgebra que contiene a los intervalos abiertos de $[a,b]$.

Sea λ la medida de Lebesgue en $[a,b]$; es decir, la única medida definida en $\mathscr{B}$ tal que sobre los intervalos abiertos de $[a,b]$ da su longitud. (Recordemos que la existencia de esta medida se demostrará más adelante.)

Para cada partición $P := \{x_0, \ldots, x_N\}$ de $[a,b]$, definimos las funciones

$$g_P := \sum_{j=1}^N m_j \chi_{[x_{j-1},x_j]} \qquad \text{y} \qquad h_P := \sum_{j=1}^N M_j \chi_{[x_{j-1},x_j]}.$$

Ambas son **funciones simples medibles** que satisfacen $g_P \le f \le h_P$,

$$\int g_P \, d\lambda = \sum_{j=1}^N m_j \lambda([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^N m_j \, (x_j - x_{j-1}) = L(P,f)$$

y

$$\int h_P \, d\lambda = \sum_{j=1}^N M_j \lambda([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^N M_j \, (x_j - x_{j-1}) = U(P,f).$$

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ medible Borel e integrable Riemann.
Entonces, f es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden.

Dem.: Sea $\{P_n\}$ una sucesión creciente de particiones como en el corolario.
Entonces, $\{g_{P_n}\}$ y $\{h_{P_n}\}$ son dos sucesiones de funciones simples medibles, creciente la primera y decreciente la segunda.

Como $g_{P_n} \leq f \leq h_{P_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, $\forall x \in [a,b]$,
$\exists\, g(x) := \lim_n g_{P_n}(x)$ y $\exists\, h(x) := \lim_n h_{P_n}(x)$. Además, $g \leq f \leq h$.

Sea $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Entonces, $|g_{P_n}| \leq M$ y $|h_{P_n}| \leq M$.
Como la función constante M es integrable Lebesgue en $[a,b]$,
T.C.D $\Longrightarrow$ g y h son integrables Lebesgue y

$$\left.\begin{aligned} \int g\, d\lambda = \lim_n \int g_{P_n}\, d\lambda = \lim_n L(P_n, f) \overset{\text{Corol.}}{=} \int_a^b f \\ \int h\, d\lambda = \lim_n \int h_{P_n}\, d\lambda = \lim_n U(P_n, f) \overset{\text{Corol.}}{=} \int_a^b f \end{aligned}\right\} \textbf{integral Riemann}$$

Entonces, $\int (h-g)\, d\lambda = 0 \overset{h-g\geq 0}{\Longrightarrow} h = g$ c.t.p.
$\overset{g\leq f\leq h}{\Longrightarrow} g = f = h$ c.t.p. $\Longrightarrow$ f integrable Lebesgue y $\int f\, d\lambda = \int_a^b f.$ ∎

El recíproco de este teorema no es cierto. Por ejemplo, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} = 0$ c.t.p. y, por lo tanto, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ es integrable Lebesgue, pero **no** es integrable Riemann.

Integrales impropias Riemann e integrales de Lebesgue.

Primero veamos **integrales impropias Riemann en dominios no acotados.**

Para ello usaremos el siguiente resultado de Análisis Real I:

Lema: Sean $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \{x_n\} \subset [a, +\infty) : x_n \nearrow +\infty,\ f(x_n) \xrightarrow{n} L.$$

Dem.: $\boxed{\implies}$ $\forall \{x_n\} \subset [a, +\infty) : x_n \xrightarrow{n} +\infty,\ f(x_n) \xrightarrow{n} L.$ $\boxed{\textbf{Ej.}}$

$\boxed{\impliedby}$ Por el absurdo. **Supongamos que** $f(x) \not\to L$ **cuando** $x \to +\infty$

$\implies \exists U$ entorno de L : $\forall M \geq a,\ \exists x > M : f(x) \notin U.$

Sea $x_0 := a.$

$\forall n \in \mathbb{N},$ sea $M_n := \max\{n, x_{n-1}\}$ y sea $x_n > M_n \geq a : f(x_n) \notin U$

$\implies f(x_n) \stackrel{n}{\not\to} L.$

Pero por otra parte,

$$\left.\begin{array}{l} x_n > M_n \geq x_{n-1} \geq a \\ x_n > M_n \geq n \to +\infty \end{array}\right\} \implies x_n \nearrow +\infty \stackrel{\text{Hipót.}}{\implies} f(x_n) \xrightarrow{n} L. \ \rhd\!=\!\lhd \quad \blacksquare$$

Teor.: Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ medible Borel e integrable Riemann en $[a, b]$ $\forall b > a$. Entonces,

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = \int f\, d\lambda.$$

Dem.: Sea $\{b_n\} \subset [a, +\infty) : b_n \nearrow +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leq b_{n+1} \implies \chi_{[a,b_n]} \leq \chi_{[a,b_{n+1}]} \overset{f\geq 0}{\implies} f\chi_{[a,b_n]} \leq f\chi_{[a,b_{n+1}]}$.

Por otra parte, $b_n \xrightarrow{n} +\infty \implies f\chi_{[a,b_n]} \xrightarrow{n} f$.

Entonces, **T.C.M.** $\implies \int f\chi_{[a,b_n]}\, d\lambda \xrightarrow{n} \int f\, d\lambda$

Como f es integrable Riemann en $[a, b_n]$, por el teorema anterior las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden:

$$\int_a^{b_n} f = \int f\chi_{[a,b_n]}\, d\lambda,$$

de manera que $\lim_n \int_a^{b_n} f = \int f\, d\lambda$.

Como lo anterior se cumple $\forall \{b_n\} \subset [a, +\infty) : b_n \nearrow +\infty$, aplicamos el lema anterior a $F(x) := \int_a^x f$ y $L := \int f\, d\lambda$ y obtenemos

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_a^b f}_{F(b)} = \underbrace{\int f\, d\lambda}_{L}. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora **integrales impropias Riemann de funciones no acotadas.**

Para ello usaremos el siguiente resultado de Análisis Real I:

Lema: Sean $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ y $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \iff \forall \{x_n\} \subset (a,b] : x_n \searrow a,\ f(x_n) \xrightarrow{n} L.$$

Dem.: **Ej.** (Es similar a la del lema análogo para $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$.)

Teor.: Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}^+$ medible Borel e integrable Riemann en $[c,b]$ $\forall c \in (a,b)$. Entonces,

$$\int_a^b f := \lim_{c \to a+} \int_c^b f = \int f \, d\lambda.$$

Dem.: **Ej.** (Es similar a la del teorema análogo para $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$.)

Notemos que en ambos teoremas para integrales impropias Riemann, es necesario suponer que f es una **función positiva.** Si f toma valores positivos y negativos, la integral impropia Riemann puede existir y sin embargo f puede no ser integrable Lebesgue. Por ejemplo, $f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,n+1]}$. **Ej.**