UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 9 ALGEBRA III 525201-0: Formas bilineales. Formas cuadráticas.

1. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:
   (a) $f : \mathbb{K}^{n\times 1} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}$, definida, para cada $x, y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ por $f(x,y) := x^t\, A\, y$, siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fija.
   (b) $f : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f(u,w) := f_1(u)\, f_2(w)$, donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $f_1, f_2 \in V'$.
   (c) $f : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definida por $f(A,B) := \operatorname{tr}(A^t C B)$, siendo $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ fija.

2. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo, determinar la matriz representante respecto de la base canónica correspondiente, e indicar si es o no simétrica.
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$.
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := -x_1y_1 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_1y_2$.
   (c) $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(x,y) := (1+i)x_1y_1 + x_2y_1 + (1-i)x_2y_2 - 3x_1y_2$.
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := -x_1^2 + x_2y_1 + x_1y_2 - y_2$.
   (e) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 2x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$.
   (f) $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $f(x,y) := x_1y_1 + (2+i)x_2y_1 + 2x_2y_2 + (2+i)x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_3$.
   (g) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := (3x_1 + x_2 - x_3)(4y_2 + 2y_3)$.

3. (a) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del ejercicio anterior, determinar su matriz representante con respecto a la base $\tilde{B} := \{(1,2,4), (2,-1,0), (-1,2,0)\}$.
   (b) Para las formas bilineales, simétricas y no simétricas, del ejercicio anterior, determinar su núcleo a izquierda y a derecha.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por $f(x,y) := x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$. Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, determine $A_{f,B}$. Además, determine, de dos formas distintas, $A_{f,\tilde{B}}$, siendo $\tilde{B} := \{(1,1), (1,2)\}$.

5. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada con respecto a la base $B := \{1, 1+x, x+x^2\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. Demuestre que T define un producto interior y calcule su expresión matricial respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, y sea f una forma bilineal en V.
   (a) Sea $z \in V$. Demuestre que la aplicación L_z, definida por $L_z(w) := f(w,z)$, es un elemento de V'.
   (b) Si se denota por $L : V \to V'$ la aplicación definida por $V \ni z \mapsto L(z) := L_z$, demuestre que L es lineal.
   (c) Demuestre que f es no degenerada si y sólo si L es un isomorfismo.

7. Sea la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\forall\, x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) := 3x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1\,.$$
   (a) Muestre que f define un producto interior en $\mathbb{R}^2$. Determine una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ con respecto a este producto interior.
   (b) Determine el lugar geométrico y haga un esbozo de la cónica definida por la ecuación: $f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = 4$.

8. Para cada una de las siguientes cónicas, expresar la forma cuadrática matricialmente, identificando su matriz asociada A. Si corresponde, determine la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A. Luego, efectúe el cambio de variables que induce P (ecuaciones de rotación) y escribir la ecuación en los nuevos ejes. En caso sea necesario, indique las ecuaciones de traslación que permitan identificar la cónica.
$$a)\; 4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0 \quad b)\; x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0\,.$$
$$c)\; x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0 \quad d)\; 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2 = 0\,.$$
$$e)\; 25x^2 + 120xy + 144y^2 = 0 \quad f)\; 82x^2 + 48xy + 68y^2 + 80x + 60y + \frac{1}{4} = 0\,.$$
$$g)\; 21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0 \quad h)\; x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0\,.$$

9. Clasificar las siguientes cónicas, según los valores de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rl} a)\, x^2 + 2axy + 3y^2 \,=\, 1 & b)\ 9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 \,=\, 0 \\ c)\, x^2 + 2y^2 - 2axy + 6x - 2ay + 3 \,=\, 0 & d)\ x^2 + (a+3)y^2 + 2axy + 2y + 1 \,=\, 0\,. \end{array}$$

10. Para cada una de las siguientes ecuaciones, expresar la forma cuadrática matricialmente, identificando su matriz asociada A. Si corresponde, determine la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A. Luego, efectúe el cambio de variables que induce P (ecuaciones de rotación) y escribir la ecuación en los nuevos ejes. En caso sea necesario, indique las ecuaciones de traslación que permitan identificar la superficie cuadrática.

    (a) $2xy + z \,=\, 0$.
    (b) $2xz + y^2 \,=\, 0$.
    (c) $3x^2 + 4xy + 4xz + 2y^2 + 4z^2 - 18 \,=\, 0$.
    (d) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 \,=\, 0$.
    (e) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 \,=\, 0$.
    (f) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z \,=\, 0$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) := \frac{1}{2}x^t Ax + b^t x + c$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica semidefinida positiva, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es Función convexa, es decir

$$\forall\, \alpha \in [0,1] \,:\, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,:\, f(\alpha x + (1-\alpha)y) \,\leq\, \alpha\, f(x) \,+\, (1-\alpha)\, f(y)\,.$$

RBP/rbp 03.08.2020