Clase 1: Integral indefinida y métodos de integración (Parte I).

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Antiderivadas

Objetivo

En Cálculo I, hemos abordado el siguiente problema:

- Dada una función f, encontrar su derivada.

En lo que sigue, nuestro objetivo será el siguiente:

- Dada una función f, queremos encontrar una función F cuya derivada sea f.

Definición 1.1

Dada una función f, diremos que F es una **antiderivada** o **primitiva** de f si

$$F' = f \ .$$

Ejemplo 1.2

- Para $f(x) = \cos(x)$, una antiderivada es $F(x) = \operatorname{sen}(x)$.
- Para $f(x) = 2x$, una antiderivada es $F(x) = x^2$.
- Para $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), una antiderivada es $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

Una función siempre tiene mas de una antiderivada.
Por ejemplo, $F_1(x) = x^2 - 5$ y $F_2(x) = x^2 + 100$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Antiderivadas

Propiedad

Teorema 1.3

Si F_1 y F_2 son dos antiderivadas de una función f, entonces difieren a lo más por una constante.

Demostración.

Si F_1 y F_2 son 2 antiderivadas de f, entonces

$$F_1' = F_2' \iff (F_1 - F_2)' = 0 \iff F_1 - F_2 = C \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

(La última equivalencia proviene de un resultado visto en Cálculo I). $\square$

Definición 1.4

Llamaremos **Integral indefinida** de f, al conjunto de todas las antiderivadas de f, esto es:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ ,\quad C \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.5

$$\int 2x\,dx = \begin{cases} x^2 + 1 \\ x^2 - 9 \\ x^2 + 10000 \\ x^2 + \frac{3}{4} \\ \vdots \end{cases} = x^2 + C$$

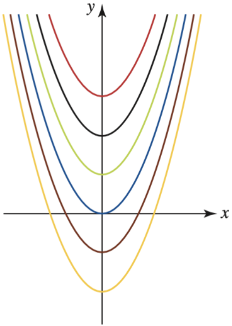
Integral indefinida

Interpretación geométrica

Como

$$\int 2x\,dx = x^2 + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

podemos ver que las antiderivadas de $f(x) = 2x$ son traslaciones verticales de la parábola x^2.



A partir de las propiedades de las derivada, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 1.6

Las siguientes son ciertas:

1. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
2. $\displaystyle\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \;\;, \; k \in \mathbb{R}.$

Ejemplos

- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int (5x^3 + 7x - 3)dx \text{ y } \int \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} - 4\cos(x)\right) dx.$$

Soluciones:

1.

$$\begin{aligned}\int (5x^3 + 7x - 3)dx &= 5\int x^3\, dx + 7\int x\, dx - \int 3\, dx \\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} - 4\cos(x)\right) dx &= 5\int x^{1/2}\, dx + 2\int x^{-2}\, dx - 4\int \cos(x)\, dx \\ &= \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} - 4\,\mathrm{sen}(x) + C\end{aligned}$$

El objetivo es proporcionar métodos para calcular integrales indefinidas.

Comenzaremos formulando el análogo de la regla de la cadena para la integración, conocido como *Método de Sustitución.* En este análisis, el concepto de **diferencial** juega un papel relevante.

Definición 1.7

Si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces su **diferencial** es

$$dy = f'(x)dx \ .$$

Ejemplo 1.8

Si $y = (3x-1)^4$, entonces su diferencial es $dy = 12(3x-1)^3 \, dx$.

Calcular

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,dx\ .$$

Solución.

Debemos encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = 3x^2(x^3+5)^9$.

Sea $u = x^3 + 5$. Luego, $du = 3x^2\,dx$ y por consiguiente

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,dx = \int u^9\,du = \frac{1}{10}u^{10} + C = \frac{1}{10}(x^3+5)^{10} + C\ .$$

Integración por sustitución
Ejemplo 2

Calcular

$$\int \frac{x^5}{(x^6+2)^3}\,dx\ .$$

Solución.

Sea $u = x^6 + 2 \Longrightarrow du = 6x^5\,dx$. Luego,

$$\int \frac{x^5}{(x^6+2)^3}\,dx = \frac{1}{6}\int u^{-3}\,du = -\frac{1}{12}u^{-2}+C = -\frac{1}{12(x^6+2)^2}+C\ .$$

Integración por sustitución
Ejemplo 3

Calcular

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx\ .$$

Solución.

Sea $u = 1 + x \Longrightarrow du = dx$. Luego,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u-1)^2 u^{1/2}\ du\\ &= \int u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\ du\\ &= \frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\ .\end{aligned}$$

Encuentre una función f cuya derivada sea $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ y que pase por el punto $P(\pi^2/4, 1)$.

Solución.

Sea $u = \sqrt{x} \Longrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$. Luego,

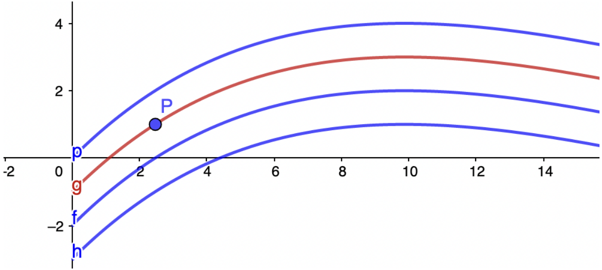
$$f(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \operatorname{sen}(u)\, du = -2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C\ .$$

Como pasa por el punto $P(\pi^2/4, 1)$: $1 = -2\cos(\pi/2) + C \Longleftrightarrow C = 1$.
Así, $f(x) = -2\cos(\sqrt{x}) + 1$.

Ejemplo 4

Interpretación geométrica

La curva de color rojo ilustra la función f encontrada.



Los 4 ejemplos mostrados previamente se sustentan en el presente Teorema.

Teorema 1.9 (Sustitución)

Si $u = g(x)$ es derivable y la compuesta $f \circ g$ está bien definida, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Demostración.
Sea F una antiderivada de f, es decir, $F' = f$. Notar que

$$\int F'(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + C\ .$$

Como $F' = f$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)\ dx &= F(g(x)) + C \\ &= F(u) + C \\ &= \int F'(u)\ du \\ &= \int f(u)\ du\ .\end{aligned}$$

$\square$