MAT1610 - Clase 37

Integración mediante Fracciones Parciales (Parte II)

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

17 de junio del 2024

Objetivo

- Aprender la metodología de fracciones parciales

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son funciones polinomiales.

Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q (fracción racional propia).

Si f es impropia, esto es, $gr(P) \geq gr(Q)$, entonces debemos tomar el paso preliminar de dividir P entre Q (por división larga) hasta obtener el residuo $R(x)$ de manera que $gr(R) \leq gr(Q)$.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde S y R son funciones polinomiales.

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

En ambos casos anteriores, el siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Puede demostrarse que cualquier polinomio Q puede factorizarse como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y factores cuadaáticos irreductibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$).

Por ejemplo,

$$Q(x) = x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \text{ ó } \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Caso 1: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que podemos escribir,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

donde no hay factores repetidos (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Ejemplo 1: Determine

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$$

Caso 2: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, donde algunos se repiten.

Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; esto es, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$.

Luego, en vez de usar $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$, se usaría

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Ejemplo 2: Determine

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Caso 3: El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, de los que ninguno se repite.

Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$ donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo 3: Determine

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

Caso 4: El denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles repetidos.

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$ donde $b^2 - 4ac < 0$, luego, en vez de usar $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, se usaría

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Ejemplo 4: Determine

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$$

Ejemplo 5: Determine

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$$

Solución: Sea $u=\sqrt{x+4}$, entonces $x=u^2-4$ y $dx=2udu$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2-4}2udu \\
&= 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du \\
&= 2\int \left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du \\
&= 2\int du + 2\int \left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du \\
&= 2u + 2\left(\ln(|u-2|)-\ln(|u+2|)\right)+C \\
&= 2\sqrt{x+4}+2\cdot ln\left(\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C
\end{aligned}$$

Conclusión

- Aprendimos la metodología de fracciones parciales.

Libro guía

- Págs. 485-496.