



Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán

Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema N°1: Lógica y Conjuntos

Clase N°7 - 26/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Conjuntos

Considerando la inclusión entre conjuntos podemos presentar las siguientes propiedades. Dados A, B y C tres conjuntos cualesquiera, se tiene que:

1. $A \subseteq A$
2. $\emptyset \subseteq A \subseteq U$
3. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

Ejemplos

Sean A y B los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}, \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

Demuestre que $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Conjuntos

Definición

Sea A un conjunto. Se define el conjunto de las partes de A por:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Ejemplos:

1. Determine el conjunto de las partes de los siguientes conjuntos:
 - (a) $A = \{\bullet\}$
 - (b) $A = \{1, 2\}$
 - (c) $C = \{a, b, \{a\}\}$
 - (d) $D = \{\emptyset, 1, 3, \{3\}\}$
2. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{\{\emptyset\}, 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{\{\emptyset\}, 1\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$$

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (a) $1 \in A$
- (b) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- (c) $\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$
- (d) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

Ejemplos:

3. Dados los conjuntos A , B y C definidos por:

$$A = \{\{1\}, 2, 3\}, B = \{a, e, i\} \text{ y } C = \{\emptyset, 0, \{0\}\}$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $p : \{1\} \in A \rightarrow \{a\} \in B$

(b) $q : \{\{0\}\} \subseteq C \wedge 3 \in A$

(c) $r : (\{0\} \in C \vee \{1, 2\} \in A) \leftrightarrow (\{a, i\} \subseteq B \wedge \{\{0\}, 0\} \subseteq C)$

Operaciones entre Conjuntos

Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B y se denota por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

Operaciones entre Conjuntos

Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B y se denota por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

Operaciones entre Conjuntos

Diferencia

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se puede denotar por $A - B$ o $A \setminus B$.

$$A - B = A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplos

Considere los siguientes subconjuntos del universo de los números naturales menores o iguales que 10:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 2 \vee x^2 - 1 = 0\}$$

$$B = \{2k + 1 \in \mathbb{Z} : k \in \{-1, 0, 1, 2\}\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{N}_{\leq 15} : y \text{ es un número par} \wedge y \text{ es potencia de } 2\}$$

$$D = \{b \in \mathbb{R} : (b^3 - 1)(b - 2) = 0\}$$

$$E = \{2z \in \mathbb{Z} : z^2 - 5z + 4 = 0\}$$

Determine los siguientes conjuntos:

- (a) $A \cup B$
- (b) $(C \cap E) \cup B$
- (c) $E \cap A$
- (d) $B - C$
- (e) $C - (E \cup A)$
- (f) $B \cap E$