Teorema de Existencia y Unicidad

Carlos M. Mora

Ecuación diferencial ordinaria lineal escalar

EDO lineal escalar general

La incógnita $y(x)$ es una función derivable que satisface:

$$b_0(x)\,y'(x) + b_1(x)\,y(x) + b_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

$$y'(x) + \frac{b_1(x)}{b_0(x)}y(x) + \frac{b_2(x)}{b_0(x)} = 0$$

EDO lineal escalar en forma normal (o explícita)

La incógnita $y(x)$ es una función derivable que satisface:

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in I,$$

donde I es un intervalo.

Existencia y unicidad de soluciones

Suponga que $a, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Entonces, para cada $x_0 \in]\alpha, \beta[$ y $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\, y(x) = g(x) & \forall x \in]\alpha, \beta[\\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en todo el intervalo $]\alpha, \beta[$.

Problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} x\,y'(x) - 3y(x) = x^5 \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Ante todo llevamos la EDO considerada a su forma normal (o explícita). Para todo $x \neq 0$

$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = x^4 \Longleftrightarrow y'(x) = \frac{3}{x}y(x) + x^4$$

Como $x \mapsto x^4$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y $x \mapsto \frac{3}{x}$ es continua en $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$, el teorema de existencia y unicidad de soluciones nos asegura que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$:

- Si $x_0 < 0$, el PVI tiene una única solución definida en todo el intervalo $]-\infty, 0[$
- Si $x_0 > 0$, el PVI tiene una única solución definida en todo el intervalo $]0, +\infty[$