Departamento de Ingeniería Matemática Universidad de Concepción

Listado 3: Funciones convexas y diferenciabilidad.

Optimización II 525352 *Profesor: Felipe Maldonado*

1. Probar la siguiente afirmación (definición alternativa de convexidad):
   Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, S convexo entonces:

   f es convexa si y sólo si $\forall k \in \mathbb{N}; x_1, x_2, ..., x_k \in S; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \geq 0, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ se cumple que $f(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x_j)$

   Nota: la parte derecha de la equivalencia se conoce como desigualdad de Jensen.

2. Sean $f_1, f_2, ..., f_m$ funciones convexas, probar que $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ es convexa.

3. Encontrar un ejemplo que muestre que si $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$ es convexo $\forall t$ no necesariamente $f(x)$ es convexa.

4. Demuestre el siguiente Teorema:

   Teorema 0.1 (Caracterización de convexidad: caso diferenciable) *Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, S convexo no vacío. f diferenciable. Entonces f es convexa si y sólo si*

   $$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y), \quad \forall x, y \in S.$$

5. Pruebe el siguiente corolario:

   Corolario 0.1 *$f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, S convexo. Entonces f es convexa si y sólo si*

   $$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y, x \in S.$$

6. Sea $f(x) = x^T x = \|x\|^2$ para $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que la derivada direccional $f'(x_0, d)$ existe para todo x_0 y $d \neq 0$. Mostrar que además $f'(x_0, d) = 2z^t x$.

7. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva. Considerar la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j.$$

   Probar que f es convexa.

   Indicación: Calcular el Hessiano de f.

8. Bajo las mismas consideraciones del problema anterior, sean $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir respecto a la convexidad de $g(x) = x^T A x + c^T x + b$? ¿Cómo inciden los valores de c, b?

9. Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = x f(1/x)$. Probar que f es convexa si y sólo si g es convexa.