

Problema 1. Considere el espacio $V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}$ y la familia de funciones techo $B := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$ definidas en clase. Demuestre que B es una base de V_h .

Demostración. Sea ver que B es una base, es necesario probar

- B es linealmente independiente. Sea $\{\alpha_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i = \theta,$$

como $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ se tiene que

$$0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Por tanto, B es linealmente independiente.

- $\langle B \rangle = V_h$. Por doble inclusión

(\subseteq) Dado $i \in \{1, \dots, d\}$ es inmediato notar que $\varphi_i \in V_h$. Luego, como V_h es un sub espacio vectorial, se tiene que $\langle B \rangle \subseteq V_h$.

(\supseteq) Dado $v \in V_h$, se define v_I como sigue

$$v_I = \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i$$

A continuación probaremos que $v - v_I = \theta$ lo cual probaría la inclusión deseada. Dado $j \in \{0, \dots, d\}$ se tiene

$$(v - v_I)(x_j) = v(x_j) - v_I(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^d v(x_i) \delta_{ij} = v(x_j) - v(x_j) = 0$$

y como $(v - v_I) \in \mathbb{P}[x_{j-1}, x_j]$ se deduce que necesariamente $(v - v_I)(x) = 0$ para todo $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Como lo anterior es válido para todo $j \in \{1, \dots, d+1\}$ se deduce que $(v - v_I) = \theta$, de esta forma

$$v = \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i$$

es decir, $v \in \langle B \rangle$. Lo cual prueba que $\langle B \rangle \supseteq V_h$.

Como ambas inclusiones se cumplen se deduce que $\langle B \rangle = V_h$.

Finalmente, se tiene que B es base de V_h . □

Problema 2. Considere la forma bilineal $a(u_h, v_h) = \int_a^b u_h' v_h' dx$, su matriz A asociada y el espacio V_h definido en el Problema 1.

- a) Sea $u_h \in V_h$. Sabemos que existen escalares $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$ tales que $v_h(x) = \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j(x)$. Probar que $\beta^t A \beta = \|v_h'\|_{L^2(a,b)}^2$, donde β es el vector cuyos elementos son los coeficientes β_j .

- b) Demostrar que A es simétrica y definida positiva.

Demostración. a) Dados $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$ tales que

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j(x), \quad \forall x \in (a, b). \quad (I)$$

De un calculo directo se tiene que

$$\|v_h'\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b v_h' v_h' dx = a(v_h, v_h)$$

usando (I) y que a es una forma bilineal se tiene

$$a(v_h, v_h) = a\left(\sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^d \beta_j a\left(\sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \beta_j \beta_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^d \beta_j \sum_{i=1}^d \frac{a_{ij}}{h} \beta_i = \beta^t A \beta$$

b) Recordando que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es directo notar que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Por otro lado, dado $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d)^t$ un vector no nulo de \mathbb{R}^d fijo pero arbitrario, se tiene que existe una función $\omega_h \in V_h$ tal que

$$\omega_h = \sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i.$$

Luego, por a) se tiene que

$$\boldsymbol{\beta}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \|\omega_h'\|_{L^2(a,b)}^2 > 0.$$

Como lo anterior es válido para cualquier vector no nulo de \mathbb{R}^d se concluye que \mathbf{A} es definida positiva. \square

Problema 3. Considere la ecuación

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + \omega u(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(a, b)$, ω y κ dados. Asuma que la función κ es continua y positiva en $[a, b]$, y ω es un número positivo.

a) Deduzca una formulación variacional apropiada.

b) Demuestre que dicha formulación variacional posee solución única.

c) Escriba la formulación variacional discreta asociada considerando una partición uniforme $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$ de tamaño h , del intervalo $[0, 1]$ y el espacio

$$V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}.$$

d) Escriba el sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado.

Demostración. a) Testeando la EDO con una función $v \in H_0^1(a, b)$ se obtiene

$$-\int_a^b (\kappa(x)u'(x))' v(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx. \quad (\text{II})$$

Haciendo integración por partes al primer termino del lado izquierdo de (II) y usando las condiciones de contorno se obtiene

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

De lo anterior se tiene la forma bilineal $a : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$a(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx$$

y

$$F(v) := \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

La linealidad de a y F es consecuencia directa de que la integral y la derivada son operadores lineales. Finalmente, el problema queda

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ a(u, v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

b) Para probar existencia unicidad se debe probar

i) a es una forma bilineal acotada.

Dados $u, v \in V := H_0^1(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) \, dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) \, dx \right| + \omega \left| \int_a^b u(x)v(x) \, dx \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\kappa\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq M \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq M \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} + \omega \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} \\ &\leq \max\{M, \omega\} \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Donde M resulta de usar el hecho que κ es continua en un compacto. Así, a es una forma bilineal acotada.

ii) a es coerciva.

Dado $v \in V$, luego

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_a^b v'(x)v'(x)\kappa(x) \, dx + \omega \int_a^b v(x)v(x) \, dx \\ &\geq m \int_a^b v'(x)v'(x) \, dx + \omega \int_a^b v(x)v(x) \, dx \\ &\geq \min\{m, \omega\} \|v\|_{H^1(a,b)}^2. \end{aligned}$$

Donde m resulta de usar el hecho que κ es continua en un compacto. Así a es coreciva.

iii) F es un funcional lineal y acotado.

Dado $v \in V$, luego

$$\left| \int_a^b f(x)v(x) \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)}$$

Así, F es un funcional lineal y acotado.

iv) $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Directo del hecho de que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(a, b)$.

Finalmente como se cumplen las hipótesis del Lema de Lax-Milgram se deduce que

$$\begin{cases} \text{Existe un único } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ a(u, v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

y ademas,

$$\|u\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{1}{\min\{m, \omega\}} \|F\| \leq \frac{1}{\min\{m, \omega\}} \|f\|_{H^1(a,b)}.$$

c) Considerando la partición uniforme del enunciado y el espacio

$$V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}.$$

Se tiene el problema discreto

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h) \\ \text{para todo } v_h \in V_h. \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, \varphi_j) = F(\varphi_j) \\ \text{para todo } j \in \{1, \dots, d\}. \end{cases} \quad (\text{III})$$

d) Usando que $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$ es una base de V_h se tiene que existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^t \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$u_h = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i$$

insertando esto en (III) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j)$$

donde la incógnita es α de esta forma la matriz \mathbf{A} cumple que $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ cuando $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Notando que $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i+2}) = \emptyset$ se deduce que $a_{i,i+l} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, d-l\}$ con $l > 1$, de la misma forma se concluye que $a_{i,i-l} = 0$. Por otro lado, para el calculo de los demás coeficientes se procede como sigue

- Cálculo de $a_{i,i}$ con $i \in \{1, \dots, d\}$.

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) \\ &= \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) \kappa(x) \, dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_i(x) \, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) \kappa(x) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) \kappa(x) \, dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \varphi_i(x) \, dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_i(x) \, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \varphi_i(x) \, dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_i(x) \, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_i)^2}{h^2} \, dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} \, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \frac{h}{3} \omega - \frac{h}{3} \omega \\ &\approx \frac{1}{h} \left[\kappa \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \kappa \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

- Cálculo de $a_{i,i+1}$ con $i \in \{1, \dots, d-1\}$.

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ &= \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_{i+1}'(x) \kappa(x) \, dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) \, dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_{i+1})}{h} \, dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x) \, dx - \frac{\omega}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 \, dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x) \, dx - \frac{h\omega}{3} \\ &\approx \frac{-1}{h} \kappa \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \frac{h\omega}{3} \end{aligned}$$

- Cálculo de $a_{i,i-1}$ con $i \in \{2, \dots, d+1\}$.

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) \kappa(x) \, dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) \, dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h^2} \kappa(x) \, dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_i)(x_i - x)}{h} \, dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x) \, dx - \frac{\omega}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^2 \, dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x) \, dx - \frac{h\omega}{3} \\ &\approx \frac{-1}{h} \kappa \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) - \frac{h\omega}{3} \end{aligned}$$

Las aproximaciones al final se deben al hecho de que se usó la regla del punto medio elemental para aproximar las integrales de la función κ . Para determinar el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ se procede de forma similar, dado $j \in \{1, \dots, d\}$ luego

$$\begin{aligned}
 b_j &= F(\varphi_j) \\
 &= \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) \varphi_j(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \frac{x - x_j}{h} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \frac{x_{j+1} - x}{h} dx \\
 &\approx \frac{h}{2} \left[f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

□