Ejemplo 1.22. *Consideremos el siguiente PVI:*

$$\begin{cases} (t+1)y''(t) + 2y'(t) + (t+1)y(t) = 4\cos(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Note que es una EDO con coeficientes variables, y que por el TEU, el PVI tiene solución única. Para resolver este PVI, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO:

$$\mathcal{L}\{(t+1)y''(t)\}(s) + 2\,\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(t+1)y(t)\}(s) = \frac{4s}{s^2+1}. \tag{4}$$

Luego, teniendo en cuenta la propiedad que relaciona derivadas y transformadas (derivada de la transformada y transformada de la derivada):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y(t)\}(s), \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy(0) - y'(0), \\ \mathcal{L}\{ty''(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy(0) - y'(0)\right). \end{aligned}$$

Denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, y utilizamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, lo anterior queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty(t)\}(s) &= -Y'(s), \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) &= sY(s), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2Y(s) - 2, \\ \mathcal{L}\{ty''(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - 2\right) = -2sY(s) - s^2Y'(s). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4) tenemos

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + s^2Y(s) - 2 + 2sY(s) - Y'(s) + Y(s) = \frac{4s}{s^2+1}.$$

Simplificando un poco

$$-(s^2+1)Y'(s) + (s^2+1)Y(s) = \frac{4s}{s^2+1} + 2$$

Esta es una EDO lineal de primer orden con variable dependiente Y y variable independiente s. Para resolverla normalizamos la ecuación

$$Y'(s) - Y(s) = -\frac{4s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{s^2+1}. \tag{5}$$

Identificamos el factor integrante $\mu(s) = e^{-\int ds} = e^{-s}$. Multiplicamos por el factor integrante a ambos lados de la ecuación (5) y reescribimos

$$\begin{aligned} e^{-s}Y'(s) - e^{-s}Y(s) &= -\frac{4s}{(s^2+1)^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2+1}e^{-s} \\ \int \frac{d}{ds}\left(e^{-s}Y(s)\right)\, ds &= -\int \frac{4s}{(s^2+1)^2}e^{-s}ds - \int \frac{2}{s^2+1}e^{-s}ds \\ &= 2\frac{e^{-s}}{s^2+1} + C. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+1} + Ce^s.$$

Queremos encontrar la transformada inversa de Y, por lo que debe pasar que $C = 0$, concluyendo así que

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\}(t) \\ = 2\sin(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.23. *Determinar la función $y(t)$ que satisface el siguiente problema con condiciones iniciales:*

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 9y(t) = 2\delta(t-1) - \delta(t-3), \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial, denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Utilizando las propiedades de la transformada de derivadas y de la función delta, obtenemos:

$$\begin{aligned} (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 4(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) &= 2e^{-s} - e^{-3s} \\ (s^2 - 4s + 9)Y(s) - 2s + 9 &= 2e^{-s} - e^{-3s} \end{aligned}$$

Reescribimos $(s^2 - 4s + 9) = (s-2)^2 + 5$ y despejamos $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{2s - 9 + 2e^{-s} - e^{-3s}}{(s-2)^2+5} = \frac{2(s-2) - 5 + 2e^{-s} - e^{-3s}}{(s-2)^2+5}.$$

Ahora descomponemos esta expresión como suma de términos cuyas transformadas inversas se conocen y aplicamos la TL inversa para hallar la solución del PVI

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+5}\right\}(t) \\ - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+5}\right\}(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s-2)^2+5}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-2)^2+5}\right\}(t). \end{aligned}$$

Aplicamos la transformada inversa a cada término por separado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+5}\right\}(t) &= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5}\right\}(t) = e^{2t}\cos(\sqrt{5}t), \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+5}\right\}(t) &= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s-2)^2+5}\right\}(t) &= H(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+5}\right\}(t-1) = H(t-1)e^{2(t-1)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\}(t-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}H(t-1)e^{2(t-1)}\sin(\sqrt{5}(t-1)), \end{aligned}$$

y finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-2)^2+5}\right\}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}H(t-3)e^{2(t-3)}\sin(\sqrt{5}(t-3)).$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del PVI está dada por:

$$\begin{aligned} y(t) \quad = \quad & 2e^{2t}\cos(\sqrt{5}t) - \sqrt{5}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t) + \frac{2}{\sqrt{5}}H(t-1)e^{2(t-1)}\sin(\sqrt{5}(t-1)) \\ & -\frac{1}{\sqrt{5}}H(t-3)e^{2(t-3)}\sin(\sqrt{5}(t-3)). \end{aligned}$$