

Independencia lineal de un conjunto de funciones.

El Wronskiano

Carlos M. Mora

Definición de dependencia e independencia lineal

Considere las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Se dice que f_1, f_2, \dots, f_n son linealmente dependientes (LD) si existen números reales c_1, c_2, \dots, c_n no todos iguales a 0 tales que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in]a, b[.$$

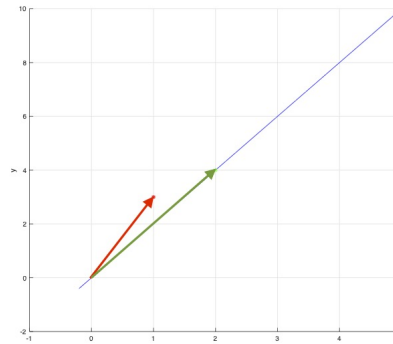
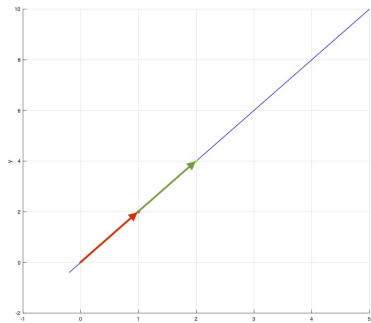
Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son linealmente independientes (LI) cuando f_1, f_2, \dots, f_n no son linealmente dependientes.

Independencia lineal

Tenemos que son f_1, f_2, \dots, f_n son linealmente independientes cuando

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in]a, b[.$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.



¿Serán $\cos(x)$ y $\sin(x)$ funciones linealmente independientes?

Asumamos que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) = 0 \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

Derivando se llega a que

$$-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) = 0 \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[.$$

Como

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0,$$

el sistema lineal anterior tiene una única solución que es $c_1 = c_2 = 0$. Entonces $\cos(x)$ y $\sin(x)$ son funciones independientes.

¿Cuándo son LI las funciones derivables $f_1, f_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?

Asumamos que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Derivando se llega a que

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in]a, b[.$$

Si para algún $x_0 \in]a, b[$ tenemos que

$$W[f_1, f_2](x_0) := \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene una única solución, de donde $c_1 = c_2 = 0$, lo que implica que f_1, f_2 son linealmente independientes.

¿Serán $\exp(\lambda_1 x)$ y $\exp(\lambda_2 x)$ funciones linealmente independientes cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$?

Recordemos que

$$W[f_1, f_2](x_0) := \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 x) & \exp(\lambda_2 x) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \end{vmatrix} &= \exp(\lambda_1 x) \lambda_2 \exp(\lambda_2 x) - \exp(\lambda_2 x) \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) \\ &= \exp(\lambda_1 x) \exp(\lambda_2 x) (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0, \end{aligned}$$

$\exp(\lambda_1 x)$ y $\exp(\lambda_2 x)$ son funciones linealmente independientes.

¿Cuándo son LI las funciones derivables $f_1, f_2, \dots, f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?

Asumamos que $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Derivando se llega a que para $k = 1, \dots, n-1$ tenemos que

$$c_1 f_1^{(k)}(x) + c_2 f_2^{(k)}(x) + \dots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in]a, b[.$$

Si para algún $x_0 \in]a, b[$ tenemos que

$$W[f_1, f_2, \dots, f_n](x_0) := \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \dots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, por ende f_1, f_2, \dots, f_n son linealmente independientes.