UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°1$ (Estructuras medibles y medidas positivas).

Problemas a resolver en práctica

1. Sea μ una medida positiva completa sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, es decir, μ es una medida positiva sobre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ contiene a todos los conjuntos que están contenidos en algún conjunto de medida μ igual a 0. Considere las funciones $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Suponga que f es medible. Asuma que el conjunto $\{\omega \in \Omega : f(w) \neq g(w)\}$ está contenido en un conjunto de medida μ igual a 0. Demuestre que g es medible. ¿Si μ no fuera completa, podría ocurrir que g fuera no medible?

Solución

Primero, asumimos que μ es una medida positiva completa. Definamos

$$A = \{\omega \in \Omega : f(w) \neq g(w)\}.$$

Como μ es una medida positiva completa, $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) = 0$. Considere $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Ahora

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \{\omega \in A : g(w) \in B\} \cup \{\omega \in A^c : g(w) \in B\} \\ &= \{\omega \in A : g(w) \in B\} \cup \{\omega \in A^c : f(w) \in B\}. \end{aligned}$$

Ya que f es medible y $A \in \mathcal{F}$,

$$\{\omega \in A^c : f(w) \in B\} = f^{-1}(B) \cap A^c \in \mathcal{F}.$$

Como

$$\{\omega \in A : g(w) \in B\} \subset A,$$

usando que μ es completa obtenemos que $\{\omega \in A : g(w) \in B\} \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\{\omega \in A : g(w) \in B\} \cup \{\omega \in A^c : f(w) \in B\} \in \mathcal{F},$$

lo que implica que g es medible.

Ahora, asumimos que μ no es una medida positiva completa. Luego, existe un subconjunto S de Ω tal que S está contenido en un conjunto de medida μ igual a 0 y $S \notin \mathcal{F}$. Luego $g = I_S$ no es medible y es igual casi donde quiera a la función $f(\omega) \equiv 0$, que es medible.

2. Considere el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y las funciones $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$. Suponga que $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ son funciones medibles. Demuestre que

$$f \cdot g : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$$

es medible.

Solución

Consideremos $A, B \in \mathcal{F}$. Luego, $I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}$ es una función medible. Entonces, usando que la suma de funciones medibles es medible obtenemos que $f \cdot g$ es medible cuando f, g son funciones simples.

En clases probamos que existen sucesiones de funciones simples $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $S(\Omega, \mathbb{R}_+)$ tales que $s_n \nearrow_n f$ y $t_n \nearrow_n g$. Luego

$$s_n \cdot t_n \nearrow_n f \cdot g.$$

Como $s_n \cdot t_n$ es medible, $f \cdot g$ es medible.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demuestre que $f' : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función medible.

Solución

Como f es derivable, f es una función continua. De donde se obtiene que $f : (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible. De la definición de derivada deducimos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} n\left(f(x + 1/n) - f(x)\right).$$

Así que f' es el límite puntual de las funciones medibles

$$x \mapsto n\left(f\left(x+1/n\right)-f\left(x\right)\right).$$

Lo que implica que f' es medible.

4. Asuma que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Sea

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{A \subset \Omega : \text{ existen } B, C \in \mathcal{F} \text{ tales que } B \subset A \subset C \text{ y } \mu\left(C \setminus B\right) = 0\right\}.$$

Para todo $A \in \overline{\mathcal{F}}$ definimos

$$\overline{\mu}\left(A\right) = \mu\left(B\right)$$

donde $B, C \in \mathcal{F}$ satisfacen $B \subset A \subset C$ y $\mu\left(C \setminus B\right) = 0$.

a) Demuestre que $\overline{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra y que $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.

b) Demuestre que $\overline{\mu}$ está bien definida, o sea, $\overline{\mu}\left(A\right)$ no depende de la elección de B y C.

c) Demuestre que $\overline{\mu}$ es una medida completa sobre $\left(\Omega, \overline{\mathcal{F}}\right)$.

Solución

a) Supongamos que $A \in \mathcal{F}$. Tomamos $B = C = A$. Luego $B, C \in \mathcal{F}$ y $\mu\left(C \setminus B\right) = \mu\left(\phi\right) = 0$. Lo que implica que $A \in \overline{\mathcal{F}}$, de donde $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.

Supongamos que $A \in \overline{\mathcal{F}}$. Luego, existen $B, C \in \mathcal{F}$ que satisfacen $B \subset A \subset C$ y $\mu\left(C \setminus B\right) = 0$. Así que $C^c \subset A^c \subset B^c$. Como $C^c \setminus B^c = B \setminus C$, $\mu\left(C^c \setminus B^c\right) = 0$. Por lo tanto, $A^c \in \overline{\mathcal{F}}$.
Asumamos que $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existen $B_n, C_n \in \mathcal{F}$ que satisfacen $B_n \subset A_n \subset C_n$ y $\mu\left(C_n \setminus B_n\right) = 0$. Entonces

$$\cup_n B_n \subset \cup_n A_n \subset \cup_n C_n.$$

Ya que $\left(\cup_n C_n\right) \setminus \left(\cup_n B_n\right) \subset \cup_n \left(C_n \setminus B_n\right)$,

$$\mu\left(\left(\cup_n C_n\right) \setminus \left(\cup_n B_n\right)\right) \leq \sum_n \mu\left(C_n \setminus B_n\right) = 0.$$

Lo que implica que $\cup_n A_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra.

b) Sea $A \in \overline{\mathcal{F}}$. Consideremos $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 \subset A \subset C_1$, $B_2 \subset A \subset C_2$, $\mu(C_1 \setminus B_1) = 0$ y $\mu(C_2 \setminus B_2) = 0$.
Ya que $B_1 \setminus B_2 \subset A \setminus B_2 \subset C_2 \setminus B_2$, $\mu(B_1 \setminus B_2) = 0$. Por lo tanto,

$$\mu(B_1) = \mu(B_1 \cap B_2) + \mu(B_1 \cap B_2^c) = \mu(B_1 \cap B_2).$$

Cambiando B_1 y B_2 de lugar obtenemos que $\mu(B_2) = \mu(B_2 \cap B_1)$. Lo que implica $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Luego $\overline{\mu}(A)$ tiene un único valor.

c) Asumamos que $A_1, A_2, \ldots \in \overline{\mathcal{F}}$ son subconjuntos disjuntos. Regresando a la respuesta del inciso (a) tenemos que $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ son subconjuntos disjuntos pues $B_i \cap B_j \subset A_i \cap A_j = \phi$. De donde obtenemos que

$$\overline{\mu}(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) = \sum_n \overline{\mu}(A_n).$$

Ya que $\mu(\phi) = 0$, $\overline{\mu}$ es una medida positiva sobre $\overline{\mathcal{F}}$.

Supongamos que $A \subset \Omega$ es un conjunto incluido en un conjunto $D \in \overline{\mathcal{F}}$ con $\overline{\mu}(D) = 0$. Existen $B, C \in \mathcal{F}$ tales que $B \subset D \subset C$, $\mu(C \setminus B) = 0$ y $\mu(B) = 0$. Entonces,

$$\mu(C) = \mu(C \setminus B) + \mu(B) = 0.$$

Luego $\phi \subset A \subset D \subset C$ con $\mu(C \setminus \phi) = 0$. Lo que implica $A \in \overline{\mathcal{F}}$.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Suponga que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Encuentre la menor σ-algebra de subconjuntos de Ω que contiene a todos los conjuntos A_n, con $n \in \mathbb{N}$.

2. Considere el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y $A \subset \Omega$. Demuestre que la función indicadora $I_A : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es medible si y solo si $A \in \mathcal{F}$. Aquí

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases}.$$

3. Considere dos medidas positivas μ, λ sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$. Demuestre que $\alpha\mu + \beta\lambda$ es una medida positiva sobre $\mathcal{F}$.

4. Sea ν la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Definimos $\mu(A) = \nu(A \cap [0, 1])$ para todo $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Determine la función creciente y continua a la derecha F que se anula en 0 y sastisfaga

$$\left(\mu + \delta_{1/2}\right)(]a, b]) = F(b) - F(a)$$

para todo par de números reales $a \leq b$.

5. Encuentre un ejemplo de función no medible f, pero tal que $|f|$ sea medible.

CMG/cmg.