UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Elementos Finitos
521537
Tarea 2

1. [**30 puntos**] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, acotado, conexo y de frontera Lipchitz Γ. Considere la forma bilineal $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y la forma lineal $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente, por

   $$a(u\,,v) = (\varepsilon\,\nabla u\,,\nabla v)_\Omega + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla u\,,v)_\Omega - \frac{1}{2}\,(u\,,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla v)_\Omega + (\sigma\,u\,,v)_\Omega\,, \forall u\,,v \in H^1(\Omega)\,,$$

   y,

   $$F(v) = (f\,,v)_\Omega\,, \forall v \in H^1(\Omega)\,,$$

   donde, $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\sigma > 0$ y $f \in L^2(\Omega)$. Definimos el problema variacional: *Buscar* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que*

   $$a(u\,,v) = F(v)\,, \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{1}$$

   Se pide lo siguiente:

   a) Demostrar que $F(\cdot)$ es continua;
   b) Demostrar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es conitnua y coerciva;
   c) Demostrar que el problema (1) está bien definido;
   d) Considere $V_h \subseteq H^1(\Omega)$ no necesariamente de dimesión finita. Formule una versión de (1) sobre V_h;
   e) Demostrar que el problema del item anterior está bien definido;
   f) Demostrar que existe $C > 0$ tal que

   $$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}\,.$$

2. [**30 puntos**] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, acotado, conexo, con frontera Lipchitz Γ. Considere los datos $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Analice la existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil de la siguientes EDP:

   $$\left\{\begin{array}{rcl} -\epsilon\,\Delta\psi + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi & = & f\,,\ \text{en } \Omega \\ \psi & = & g\,,\ \text{en } \Gamma\,. \end{array}\right. \tag{2}$$

Concepción, martes 6 de abril de 2021
DPC/dpc .