

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Evaluación 1

Problema 1. [15 Pts.]

Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 4x - x^2, \\ y(1) = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Desarrollo:

La EDO considerada es lineal de primer orden en la forma $y' + P(x)y = f(x)$ donde $P(x) = -\frac{2}{x}$ y $f(x) = 4x - x^2$.

Para determinar su solución, primero determinamos el Factor de Integración $\mu(x)$:

$$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = -2\ln(x).$$

porque $x = 1 > 0$. Entonces,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2}.$$

Ahora, la EDO (1) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)f(x), \text{ esto es,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}y\right] &= \frac{1}{x^2}(4x - x^2). \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}y\right] &= \frac{4}{x} - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Integrando en (2) de modo indefinido, sigue:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right)dx &= \int \left(\frac{4}{x} - 1\right)dx. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}y &= 4\ln|x| - x + C = 4\ln(x) - x + C. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = 4x^2 \ln(x) - x^3 + Cx^2.$$

Entonces,

$$y(x) = 4x^2 \ln(x) - x^3 + Cx^2. \quad (3)$$

Ultimo paso, resolvemos la condición inicial: $y(1) = 3$.

Puesto que $y(1) = 3$ en (3), tenemos

$$3 = 4(1)^2 \ln(1) - (1)^3 + C(1)^2 \Leftrightarrow C = 4$$

Llegamos la solución final,

$$y(x) = 4x^2 \ln(x) - x^3 + 4x^2.$$

Problema 2

[15 Pts.]

Un tanque cilíndrico de 150 litros de capacidad contiene 75 litros de salmuera (agua y sal) con una concentración de 0,6 [kg/l]. Al tanque entra salmuera a una velocidad de 3 [l/min] a una concentración de 0,2 [kg/l], la mezcla sale del tanque a una velocidad de 3 [l/min]. Suponga que la mezcla dentro del tanque es siempre homogénea.

Determine la masa de sal dentro del tanque hasta el instante en que la concentración de sal (dentro del tanque) es la mitad de la que había en el inicio del proceso (escriba claramente el PVI a resolver).

Desarrollo:

Definimos las variables involucradas en el problema:

1. t : tiempo medido en minutos.
2. $x(t)$: cantidad de sal (en kg) presente en el instante t .
3. $V(t)$: volumen dentro del tanque (en litros) presente en el instante t .
4. $c(t)$: concentración de sal en la mezcla en el tanque (en kg/l) presente en el instante t .
5. t_C : instante en que la concentración de sal dentro del tanque llega a la mitad de la concentración inicial.

Debemos determinar la concentración de sal en la mezcla en el tanque cuando $0 \leq t \leq t_C$ para determinar el valor de t_C para luego finalmente determinar el PVI pedido en el ejercicio:

Tenemos que el volumen inicial dentro del tanque es de 75 litros, por otra parte el flujo de entrada y de salida de la mezcla que entra al tanque son iguales, por lo que el volumen se mantiene constante, por lo tanto,

$$V(t) = 75, \quad 0 \leq t \leq t_C$$

Por otra parte, considerando la información entregada en el enunciado, la cantidad de sal $x(t)$ presente en la mezcla en el tanque se puede determinar mediante el siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) = 3 \cdot 0,2 - 3 \cdot \frac{x(t)}{V(t)} & \text{si } 0 \leq t \leq t_C \\ x(0) = c(0) \cdot V(0) \end{cases}$$

Del enunciado se tiene que $c(0) = 0,6$ [kg/l], por lo tanto $x(0) = 0,6 \cdot 75 = 45$ kg, luego el PVI se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{cases} x'(t) + 0,04x(t) = 0,6 & \text{si } 0 \leq t \leq t_C \\ x(0) = 45 \end{cases}$$

Resolvemos la EDO lineal de primer orden dada en el PVI calculando el factor integrante $\mu(t)$ asociada a ella:

$$P'(t) = 0,04 \Rightarrow P(t) = 0,04t$$

Luego $\mu(t) = e^{P(t)} = e^{0,04t}$, multiplicando a la EDO dada se deduce que

$$[e^{0,04t}x(t)]' = 0,6e^{0,04t}$$

Integrando la ecuación dada se obtiene que $e^{0,04t}x(t) = 15e^{0,04t} + C$, esto es,

$$x(t) = 15 + Ce^{-0,04t}, \quad 0 \leq t \leq t_C.$$

Si $x(0) = 45$, se deduce que $x(0) = 15 + C = 45 \Rightarrow C = 30$.

Por lo tanto, $x(t) = 15 + 30e^{-0,04t}$, para $0 \leq t \leq t_C$.

Si t_C es el instante en el cual $c(t_C) = \frac{1}{2}c(0) = 0,3$, entonces

$$c(t_C) = \frac{x(t_C)}{V(t_C)} = \frac{1}{75}(15 + 30e^{-0,04t_C});$$

así, debe ser que

$$\begin{aligned} c(t_C) &= \frac{1}{75}(15 + 30e^{-0,04t_C}) = 0,3 \\ &\Rightarrow 15 + 30e^{-0,04t_C} = 22,5 \\ &\Rightarrow e^{-0,04t_C} = \frac{7,5}{30} = 0,25 \\ &\Rightarrow t_C = 25 \ln(4) \approx 34,66 \text{ min.} \end{aligned}$$

Por tanto la respuesta a nuestro problema es:

$$x(t) = 15 + 30e^{-0,04t} \text{ para } 0 \leq t \leq 25 \ln(4) \text{ minutos.}$$

Problema 3**[15 Pts.]**

Determinar la solución general de de

$$y''(t) - 5y'(t) - 24y(t) = e^{-3t}$$

Desarrollo:

Sabemos que la solución general $z(x)$ de la EDO lineal $L(y) = e^{-3t}$ (aquí el operador L es $L = D^2 - 5D - 24$) es del tipo

$$z(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde $y_p(t)$ es una solución cualquiera de $L(y) = e^{-3t}$ e $y_h(t)$ es una solución arbitraria del $\text{Ker}(L)$.

Puesto que $L = (D - 8)(D + 3)$, vemos que todo elemento y_h del $\text{Ker}(L)$ es del tipo $y_h(x) = c_1 e^{8t} + c_2 e^{-3t}$.

Para determinar la $y_p(t)$, primero aniquilamos $f(t) = e^{-3t}$ por $D + 3$.

De otra parte, observando que el operador diferencial lineal asociado a la EDO es $L = (D - 8)(D + 3)$, y del hecho que $(D + 3)e^{-3t} = 0$, se sigue que

$(D - 8)(D + 3)(D + 3) = 0$. Entonces el método de aniquiladores sugiere buscar soluciones particulares del tipo:

$$y_p(t) = c_1 e^{8t} + c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t}$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias.

Sin embargo de la condición

$$(D - 8)(D + 3) \left[c_1 e^{8t} + c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t} \right] = e^{-3t}$$

vemos que nuestra propuesta y_p se reduce a $y_p(t) = c t e^{-3t}$.

Entonces el problema se reduce a determinar el valor de la constante c . Para lo anterior, reemplazamos nuestra propuesta de y_p en $L(y(t)) = e^{-3t}$. Esto es,

$$y_p''(t) - 5y_p'(t) - 24y_p(t) = e^{-3t}.$$

Haciendo el cálculo correspondiente, sigue

$$c e^{-3t} \left[3(3t - 2) - 5(1 - 3t) - 24t \right] = e^{-3t};$$

de donde se obtiene $c = -(1/11)$.

Así, la solución particular buscada es $y_p(x) = -(1/11) t e^{-3t}$.

Finalmente, la solución general a la EDO propuesta es:

$$y(x) = c_1 e^{8t} + c_2 e^{-3t} - (1/11) t e^{-3t}$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Problema 4

Determine la solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{2} Y''(x) - 3 Y'(x) + \frac{13}{2} Y(x) = e^{3x} \tan(2x), \text{ donde } x \in]0, \pi/4[.$$

Nota: En el desarrollo de su respuesta, puede que necesite alguna(s) de las siguientes integrales

Tabla de integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x)^2} dx &= \tan(x) + C, & \int \frac{1}{\sin(x)^2} dx &= -\cotan(x) + C, \\ \int \sec(x) dx &= \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C, & \int \cosec(x) dx &= \ln|\cosec(x) - \cotan(x)| + C \\ \int \frac{1}{\cosh(x)^2} dx &= \tanh(x) + C, & \int \frac{1}{\sinh(x)^2} dx &= -\coth(x) + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C. \end{aligned}$$

Desarrollo:

Multiplicando por 2 se llega a

$$Y''(x) - 6 Y'(x) + 13 Y(x) = 2 e^{3x} \tan(2x),$$

donde $x \in]0, \pi/4[$.

Primeramente resolveremos la EDO homogénea

$$Y_h''(x) - 6 Y_h'(x) + 13 Y_h(x) = 0.$$

El polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 13$ tiene dos raíces simples que son $3 \pm 2i$. Por lo tanto,

$$Y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x),$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.

La EDO

$$Y_p''(x) - 6 Y_p'(x) + 13 Y_p(x) = 2 e^{3x} \tan(2x),$$

tiene una solución con la forma

$$Y_p(x) = C_1(x) e^{3x} \cos(2x) + C_2(x) e^{3x} \sin(2x),$$

donde

$$\begin{aligned} e^{3x} \cos(2x) C_1'(x) + e^{3x} \sin(2x) C_2'(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx} (e^{3x} \cos(2x)) C_1'(x) + \frac{d}{dx} (e^{3x} \sin(2x)) C_2'(x) &= 2 e^{3x} \tan(2x). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{3x} \cos(2x) C'_1(x) + e^{3x} \sin(2x) C'_2(x) &= 0 \\ (3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x)) C'_1(x) + (3e^{3x} \sin(2x) + 2e^{3x} \cos(2x)) C'_2(x) &= 2e^{3x} \tan(2x). \end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{vmatrix} e^{3x} \cos(2x) & e^{3x} \sin(2x) \\ 3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x) & 3e^{3x} \sin(2x) + 2e^{3x} \cos(2x) \end{vmatrix} = 2(e^{3x})^2$$

deducimos

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \sin(2x) \\ 2e^{3x} \tan(2x) & 3e^{3x} \sin(2x) + 2e^{3x} \cos(2x) \end{vmatrix}}{2(e^{3x})^2} = -\frac{\sin(2x)^2}{\cos(2x)}$$

y

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{3x} \cos(2x) & 0 \\ 3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x) & 2e^{3x} \tan(2x) \end{vmatrix}}{2(e^{3x})^2} = \sin(2x).$$

Integrando, con constante de integración igual a 1, se llega a que

$$C_2(x) = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x).$$

Además,

$$\begin{aligned} C_1(x) &= - \int \frac{\sin(2x)^2}{\cos(2x)} dx \\ &= - \int \frac{1 - \cos(2x)^2}{\cos(2x)} dx \\ &= \int (-\sec(2x) + \cos(2x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1}{\cos(2x)} + \tan(2x) \right| \right) + \frac{1}{2} \sin(2x) \end{aligned}$$

Como $x \in]0, \pi/4[$,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cos(2x)} + \tan(2x) \right) + \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Así que una solución particular es

$$\begin{aligned} Y_p(x) &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cos(2x)} + \tan(2x) \right) e^{3x} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) e^{3x} \cos(2x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos(2x) e^{3x} \sin(2x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cos(2x)} + \tan(2x) \right) e^{3x} \cos(2x). \end{aligned}$$

La solución general buscada es

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x).$$

Por lo tanto

$$Y(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\cos(2x)} + \tan(2x) \right) e^{3x} \cos(2x),$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.