Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación Nº1: Cálculo II (527148)
(Para Ingenierías Civiles)

1. Utilizar el Teorema del valor medio para integrales para calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\int_n^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx\right\}.$$

Solución:

Sea $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x+1}$; por Teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe $y\in[n,2n]$ tal que

$$\frac{1}{n}\int_n^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx=f(y)\,.\ \textbf{(4 puntos)}$$

Por otra parte cuando $n\to\infty$, se tiene que $y\to\infty$; además, como $|f(y)|\leq\dfrac{1}{|y+1|}$, se tiene que $f(y)\to 0$ (cuando $y\to\infty$). **(6 puntos)**

De lo anterior, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\int_n^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx\right\}=0$. **(5 puntos)**

2. Evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4\left|\frac{x-2}{x+5}\right|\,dx$

Solución:

a) Como $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}dx=x-\ln(e^x+1)+C$ **(5 puntos)**, se tiene que

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx=\ln(2)-\ln(e+1)+1\ \textbf{(3 puntos)}$$

b) Como $\displaystyle\int_0^4 \left|\frac{x-2}{x+5}\right| dx = \int_0^2 \frac{2-x}{x+5}\,dx + \int_2^4 \frac{x-2}{x+5}\,dx$ **(3 puntos)**, entonces

$$\int_0^4 \left|\frac{x-2}{x+5}\right| dx = 14\ln(7) - 14\ln(3) - 7\ln(5)\ \textbf{(4 puntos)}$$

3. Un termómetro que marca 70^oF se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante de 390^oF. Por una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que después de medio minuto el termómetro marca 110^oF. Utilizar la *ley de enfriamiento* de Newton para determinar el tiempo que tardó el termométro en marcar 145^oF una vez puesto en el horno.

Solución:

Se considerará $T^* = 390^oF$ (temperatura del horno) y (la función) $T = T(t)$ como la temperatura del termómetro en el instante t (en segundos) una vez puesto en el horno. La variación de temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura (variable) y la del horno; luego

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T^*)\,.\ \textbf{(3 puntos)}$$

Integrando, se tiene que $T(t) = T^* - Ce^{kt}$. **(4 puntos)**

$T(0) = 70 \Rightarrow 70 = 390 - C \Rightarrow C = 320.$

$T(30) = 110 \Rightarrow 110 = 390 - 320e^{30k} \Rightarrow k = \dfrac{\ln(7/8)}{30}.$

De lo anterior, $T(t) = 390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}t}$ **(4 puntos)**; luego si $\tilde{t}$ representa el tiempo en que la temperatura es 145^oF, entonces

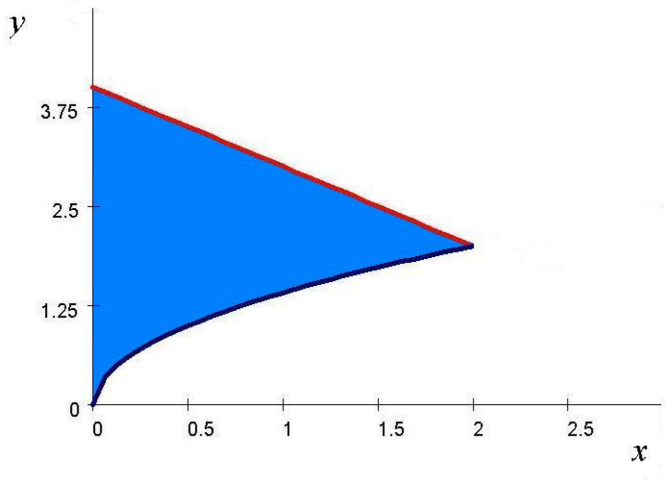
$$390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}\tilde{t}} = 145.$$

Al resolver la ecuación anterior; se tiene que $\tilde{t} = 60$; por lo tanto, el termómetro tardó un minuto en marcar 145^oF. **(4 puntos)**

4. Sea R la región del plano acotada por las curvas $x + y = 4$, $x = 0$ e $y = \sqrt{2x}$. Determinar el área de R. Escribir las integrales que permiten calcular el volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y = 5$ utilizando los dos métodos conocidos; luego, calcular dicho volumen.

Solución:

Gráfico:



El área de la región R está dada por

$$A_R = \int_0^2 \left\{ 4 - x - \sqrt{2x} \right\} dx = \frac{10}{3}. \textbf{ (4 puntos)}$$

El volumen, utilizando anillos, está dado por

$$V_{y=5} = 2\pi \int_0^2 (5-y)\,\frac{y^2}{2}\,dy + 2\pi \int_2^4 (5-y)\,(4-y)\,dy \textbf{ (4 puntos)};$$

utilizando discos, se tiene

$$V_{y=5} = \pi \int_0^2 \left\{ \left(5 - \sqrt{2x}\right)^2 - \left(5 - (4-x)\right)^2 \right\} dx. \textbf{ (4 puntos)}$$

Además, $V_{y=5} = \dfrac{56\pi}{3}$. **(3 puntos)**

28 de Septiembre de 2011
E. Gavilán G.
egavilan@udec.cl