

Espacios vectoriales con producto interior

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

July 13, 2021



Espacios vectoriales con producto interior

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), (en este curso, \mathbb{K} puede ser \mathbb{R} o \mathbb{C}). Un producto interior en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

- ① $\forall u, v, w \in V : \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
- ② $\forall u, v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle,$
- ③ $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle},$
- ④ $\forall u \in V : \langle u, u \rangle \geq 0,$
- ⑤ $\forall u \in V : \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta.$

Observaciones:

- a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces en general $\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$. En cambio, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle$ (comutatividad).
- b) De las condiciones 2 y 3 se deduce: $\forall u, v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$
- c) De la condición 3, se desprende:
 $\forall u \in V : \langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle} \Rightarrow \forall u \in V : \langle u, u \rangle \in \mathbb{R}.$



Ejemplos:

- ① **Producto euclídeo.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V := \mathbb{R}^{n \times 1}$, entonces la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^{n \times 1} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := x^t y = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

- ② **Producto de Hermite.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $V := \mathbb{C}^{n \times 1}$, entonces la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : \mathbb{C}^{n \times 1} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \langle x, y \rangle_H := x^t \bar{y} = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

- ③ Considere $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Sea

$V := \mathcal{C}([a, b]) = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ y $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

define un producto interior en V .

- ④ Considere $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Sea $V := \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\}$ y $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

define un producto interior en V .



Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Luego,

A es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Demuestra: Primero, observamos que para $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, se tiene

$$\langle Bx, y \rangle = (Bx)^t y = x^t B^t y = x^t (B^t y) = \langle x, B^t y \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

de donde se concluye la propiedad:

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^t y \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

(\Rightarrow) **HIPÓTESIS:** A es simétrica. Luego, aplicando la propiedad anterior para $x, y \in \mathbb{R}^n$, fijos pero arbitrarios:

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, A^t y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

y la conclusión se sigue.

(\Leftarrow) **HIPÓTESIS:** $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Eligiendo en particular $x := e_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $y := e_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el i -ésimo y el j -ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^{n \times 1}$, respectivamente, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fijos pero arbitrarios, tenemos

$$\langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle e_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (1)$$

En vista que $\langle e_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = e_i^t Ae_j = (A)_{ij} = a_{ij}$, y

$\langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = (Ae_i)^t e_j = e_i^t A^t e_j = (A^t)_{ij} = a_{ji}$, (1) nos permite inferir que

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} = a_{ji}$, lo cual significa que $A = A^t$, y se concluye el resultado.



Definición: Sea $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se define la **matriz adjunta de A** por $A^* := \overline{A^t} := (\overline{a_{ji}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Además, se dice que A es **hermitiana** si $A^* = A$.

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Luego,

A es hermitiana si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$.

Demostración: análoga al caso real (se deja al estudiante).

Proposición: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana (i.e. $A^* = A$). Entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración: Sea $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{\theta\}$ un autopar de A , fijo pero arbitrario. Esto implica que $A v = \lambda v$. Luego, usando el hecho que A es hermitiana, resulta

$$\lambda \langle v, v \rangle_H = \langle \lambda v, v \rangle_H = \langle A v, v \rangle_H = \langle v, A v \rangle_H = \langle v, \lambda v \rangle_H = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle_H,$$

y como $v \neq \theta$, lo anterior implica que $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$. Siendo $\lambda \in \sigma(A)$ fijo pero arbitrario, se concluye que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Corolario: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración: Puesto que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A también es hermitiana. El resultado se sigue de la proposición anterior.



Normas y Espacios Normados

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Se dice que la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ define una norma en V si verifica

- ① $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$,
- ② $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$,
- ③ $\forall v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,
- ④ $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad triangular).

En tal caso, se dice que $(V, \|\cdot\|)$ es un **espacio normado**.

Observación: Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior, entonces la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\forall v \in V : \|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$, es una norma, llamada **norma inducida** por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposición: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior. Entonces la norma inducida $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ verifica la **LEY DEL PARALELOGRAMO**:

$$\forall u, v \in V : \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Esto nos dice que todo espacio vectorial con producto interior induce un espacio vectorial normado. El recíproco no siempre es cierto.

Ejemplo de norma no inducida por producto interno. Sea $V := \mathbb{R}^2$, sobre la cual consideramos la norma $\forall v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_1 := |v_1| + |v_2|$. Para $u := (1, 0)$, $v := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, resulta $\|u + v\|_1^2 + \|u - v\|_1^2 = 8 \neq 4 = 2(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2)$.



Definiciones varias:

- ① Sea $(V, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial normado. Si $v \in V$ es tal que $\|v\| = 1$, se dice que v es un vector unitario (con respecto a $\|\cdot\|$).
- ② Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interno. Si $u, v \in V$ son tales que $\langle u, v \rangle = 0$, se dice que u y v son vectores ortogonales. Además, un conjunto $S \subseteq V$ se llamará ortogonal si $\forall u, v \in S, u \neq v : \langle u, v \rangle = 0$. Más aún, S se llamará conjunto ortonormal si S es ortogonal y $\forall u \in S : \|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2} = 1$.

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana. Entonces, vectores propios de A asociados a valores propios distintos son ortogonales (respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$).

Demostración: Como A es hermitiana, se tiene que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Sean $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{\theta\}$ dos autopares de A , con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tenemos, aprovechando que A es hermitiana:

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle_H = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle_H = \langle A v_1, v_2 \rangle_H = \langle v_1, A v_2 \rangle_H = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle_H = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle_H,$$

de donde se infiere que $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$. En vista que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se deduce que $\langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$, y se concluye el resultado.

Corolario: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces vectores propios de A asociados a valores propios distintos, son ortogonales (respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$).



TRANSFORMACIONES LINEALES SIMÉTRICAS: Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} ó \mathbb{C}), con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es simétrica si $\forall u, v \in V : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$.

Lema: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial de DIMENSIÓN FINITA, con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Además, sea $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ una BASE ORTONORMAL de V . Entonces

- ① Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, T es simétrica si y sólo si $[T]_B^B$ es hermitiana.
- ② Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, T es simétrica si y sólo si $[T]_B^B$ es simétrica.

Demostración (caso $\mathbb{K} := \mathbb{C}$): Recordamos que dados cualesquiera $u, v \in V$, éstos pueden expresarse como $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, y $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$, para algunos escalares $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \{\beta_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{C}$. Se verifica que

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \overline{\beta_k} \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=: \delta_{jk}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\beta_j} = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H,$$

y en consecuencia se ha probado que $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H$.

(\Rightarrow) HIPÓTESIS: T ES SIMÉTRICA. Esto significa que

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle &\Leftrightarrow \langle [T(u)]_B, [v]_B \rangle_H = \langle [u]_B, [T(v)]_B \rangle_H \\ &\Leftrightarrow \forall [u]_B, [v]_B \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \langle [T]_B^B [u]_B, [v]_B \rangle_H = \langle [u]_B, [T]_B^B [v]_B \rangle_H, \end{aligned}$$

y de aquí se deduce que $[T]_B^B$ es hermitiana.



(\Leftarrow) HIPÓTESIS: $[T]_B^B$ ES HERMITIANA. Aplicando el razonamiento anterior, se deduce el resultado. Queda para el estudiante hacer los detalles.

La demostración del caso $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ es análoga. Primero hay que deducir que $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Corolario: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, con producto interior, y $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. *¿Qué pasa si V es infinito dimensional?*

Definición: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial, con producto interior, y $\emptyset \neq S \subseteq V$. Se define el complemento ortogonal de S por $S^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in S : \langle v, w \rangle = 0\}$, el cual siempre es un subespacio vectorial de V .

Propiedades del Complemento Ortogonal: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial, con producto interior, y $\emptyset \neq S \subseteq V$. Entonces

- ① S^\perp es subespacio vectorial de V .
- ② $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.
- ③ $\{\theta\}^\perp = V \quad \wedge \quad V^\perp = \{\theta\}$.
Si además V es finito dimensional:
 - ④ $\langle S \rangle \oplus \langle S \rangle^\perp = V$.
 - ⑤ $(\langle S \rangle^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.

Demostración: Es dejada como ejercicio al lector. Las propiedades 4 y 5 en dimensión infinita son también válidas, pero requieren de hipótesis adicionales.



Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita n , y sea $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces, se puede construir una base ortogonal de V , que denotaremos por $\tilde{B} := \{w_1, \dots, w_n\}$, tales que

$\forall k \in \{1, \dots, n\} : \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle = \langle \{w_1, \dots, w_k\} \rangle$. Esta base se puede construir de modo tal que $w_1 := v_1$, y para $k \in \{2, \dots, n\}$:

$$w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j w_j, \quad \text{donde } \forall j \in \{1, \dots, k-1\} : \alpha_j := \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2}.$$

Si se normalizan los elementos de \tilde{B} , se obtendrá una base ortonormal de V .

Demostración: La demostración suele hacerse por Inducción Matemática. Es dejada como ejercicio al lector.

APLICACIÓN DIRECTA: Determine una base ortonormal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, provisto del producto interior definido por $\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$.

Considerando la base canónica $\{p_j\}_{j=1}^3$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, donde

$\forall j \in \{1, 2, 3\} : \forall t \in \mathbb{R} : p_j(t) := t^{j-1}$, y luego de aplicar el PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT descrito, se deduce la base ortonormal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: $\{q_j\}_{j=1}^3$, donde $\forall t \in \mathbb{R} : q_1(t) := \frac{\sqrt{2}}{2}, q_2(t) := \frac{\sqrt{6}}{2}t, q_3(t) := \frac{3\sqrt{10}}{4}(t^2 - \frac{1}{3})$



Observación: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica, tal que $\lambda \in \sigma(T)$, y $B_1 := \{v_1, \dots, v_p\}$ es una base del espacio propio S_λ , asociado a λ . Entonces, el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt induce una base ortonormal de S_λ , cuyos elementos siguen siendo vectores propios de T asociados a λ .

Proposición: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior, de dimensión finita n , y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Sea también $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces

- ① Si $\lambda, \mu \in \sigma(T)$ ($\text{o } \lambda, \mu \in \sigma(A)$) distintos, entonces los subespacios propios S_λ y S_μ asociados a λ y μ , respectivamente, son ortogonales.
- ② Tanto T como A tienen n valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas).

Demostración:

1) (Para T) Sean $\lambda, \mu \in \sigma(T) \subseteq \mathbb{K} := \mathbb{R}$ distintas. Consideremos $v \in S_\lambda$ y $w \in S_\mu$. Esto significa que $T(v) = \lambda v$ y $T(w) = \mu w$. Luego, gracias al hecho que T es simétrica, se deduce:

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle,$$

lo que implica que $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$, y en vista que $\lambda \neq \mu$, se deduce que $\langle v, w \rangle = 0$. De aquí se concluye el resultado.

Queda al lector hacer la demostración para el caso $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica.

Observación: La **propiedad 1** anterior también es cierta si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica. Para el caso matricial, se requiere que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sea hermitiana.



2) (Para A) Se hará por **reducción al absurdo**. Supongamos que la TESIS es falsa. Esto significa que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C} : p_A(\lambda_0) = 0$, con parte imaginaria $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$. En vista que $p_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, se tiene que $\overline{\lambda_0}$ es también otra raíz de p_A . Sea $v \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{0\}$ un vector propio de A asociado a $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Como tal, v se puede expresar como $v := v_1 + i v_2$, siendo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Tenemos

$$A v = \lambda_0 v \Rightarrow \overline{A} \overline{v} = \overline{\lambda_0} \overline{v} \Rightarrow A \overline{v} = \overline{\lambda_0} \overline{v},$$

de donde se deduce que $(\overline{\lambda_0}, \overline{v})$ es otro autopar de A . Como $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$, **por la parte 1**, se tiene que v y \overline{v} son ortogonales (respecto al producto interior de $\mathbb{R}^{n \times 1}$). De esta manera resulta

$$0 = \langle v, \overline{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = (v_1 + i v_2)^t (v_1 - i v_2) = v_1^t v_1 + i \underbrace{(v_2^t v_1 - v_1^t v_2)}_{=0} + v_2^t v_2$$

$$\Rightarrow \|v_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|v_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \theta_{\mathbb{R}^{n \times 1}} \Rightarrow v = \theta_{\mathbb{C}^{n \times 1}} (\rightarrow \leftarrow).$$

Luego, p_A es factorizable en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ por polinomios irreducibles de grado 1 (salvo repeticiones). En consecuencia la TESIS es verdadera, y concluye la demostración. **Queda al lector hacer la demostración para el caso $T \in \mathcal{L}(V)$ simétrica.**



Teorema Espectral: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita n . Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T (i.e. T es diagonalizable).

Demostración:

Primero, por la proposición anterior, sabemos que T posee n valores propios (contando sus multiplicidades algebraicas). Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios reales distintos de T , cada una con multiplicidad algebraica m_j , $j \in \{1, \dots, p\}$. Se tiene que $\sum_{j=1}^p m_j = n$ y los espacios propios S_{λ_j} , $j \in \{1, \dots, p\}$ son ortogonales dos a dos.

Notar que T tiene al menos un valor propio (de multiplicidad algebraica n), y como máximo tiene n valores propios distintos (en cuyo caso, todos ellos son simples). Para cada $j \in \{1, \dots, p\}$, $d_j := \dim(S_{\lambda_j})$ (multiplicidad geométrica de λ_j).

Segundo, consideramos una base ortonormal de cada uno de los p espacios propios S_{λ_j} de T , $j \in \{1, \dots, p\}$. Esto puede obtenerse con la ayuda del conocido **Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt**. En vista que éstos son ortogonales entre sí, la unión de todas estas bases resulta ser un conjunto ortonormal de $\sum_{j=1}^p d_j := d$ vectores propios de T , el cual será una base ortonormal de la suma directa: $U := \bigoplus_{j=1}^p S_{\lambda_j}$. Notar que $d = \dim(U)$, y que todo vector propio de T , al pertenecer a algún espacio propio, pertenecerá al subespacio U .

...por demostrar que $d = n$, o equivalentemente $U = V$...next page...



Tercero, Probaremos que $d = n$, o equivalentemente, $U = V$. **Procederemos por reducción al absurdo.** Suponemos entonces que $d < n$. Consideramos así, el complemento ortogonal de U , U^\perp , que es de dimensión $d' := n - d > 0$ (y tales que $U \oplus U^\perp = V$).

Afirmación 1: $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Sea $w \in T(U^\perp)$, entonces $\exists v \in U^\perp : T(v) = w$. Ahora, consideramos $u \in U$, fijo pero arbitrario. Tenemos, tomando en cuenta que $T(u) \in U$ (*¿Por qué?*),

$$\langle w, u \rangle = \langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U : \langle w, u \rangle = 0 \Rightarrow w \in U^\perp,$$

De esta manera, se valida la afirmación.

Afirmación 2: la aplicación $\tilde{T} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ definido $\forall w \in U^\perp : \tilde{T}(w) := T(w)$ es lineal y simétrica. Es consecuencia del hecho que $T \in \mathcal{L}(V)$ es simétrica.

Aplicando la proposición anterior, \tilde{T} tiene $d' = n - d > 0$ valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas). Esto garantiza la existencia de al menos un autopar $(\mu, w) \in \mathbb{R} \times U^\perp \setminus \{\theta\}$. Esto implica que $\tilde{T}(w) = \mu w$, es decir $T(w) = \mu w$, de donde (μ, w) es un autopar de T . Ello conduce a afirmar que $w \in U$ ($\rightarrow \leftarrow$). Luego, la TESIS es verdadera, y concluye la demostración.



Corolario: Diagonalización ortogonal de un endomorfismo simétrico

- ① Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita. Todo endomorfismo simétrico $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable, y lo es ortogonalmente. Es decir, existe $B \subseteq V$, una base ortonormal de V , tal que $[T]_B^B$ es una matriz diagonal.
- Esta base, por ejemplo, puede obtenerse reuniendo bases ortonormales de los espacios propios de T . La matriz diagonal está formada por los valores propios de T (considerando sus multiplicidades algebraicas).

- ② Toda matriz real simétrica A de orden n , es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal (i.e. $P^t = P^{-1}$), tal que $P^t A P$ es una matriz diagonal.

Las columnas de P son vectores propios de A que forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n \times 1}$, mientras que la matriz diagonal está formada por los correspondientes valores propios de A (considerando sus multiplicidades algebraicas y el orden de sus vectores propios como columnas de P).

Se recuerda:

- ① $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice **matriz unitaria** si $A^{-1} = A^*$.
- ② $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice **matriz ortogonal** si $A^{-1} = A^t$.

Ejemplo: Diagonalizar, si es posible, $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Admite diagonalización ortogonal? Implementarla de ser el caso.



Transformaciones especiales

Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial, $T \in \mathcal{L}(V)$.

- ① Se dice que T es una **proyección o idempotencia** si $T^2 = T$.
- ② Se dice que T es una **reflexión o involución** si $T^2 = I$.
- ③ Se dice que T es una **aplicación nilpotente** si $\exists m \in \mathbb{N} : T^m = \Theta$. El menor entero positivo con esta propiedad, es llamado **índice de nilpotencia de T** .

Ejemplo 1: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$, donde $U_1 := \langle \{(1, 2)\} \rangle$, y $U_2 := \langle \{(0, 1)\} \rangle$. Se observa que $U_1 \not\subset U_2$. Definimos ahora $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T(u) := u_1$, para cualquier $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ (descomposición única de u). Se verifica que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y también que $\forall u \in V : T^2(u) = T(u)$, por lo que $T^2 = T$, i.e. T es una proyección.

Ejemplo 2: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, donde $U_2 := \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, y U_1 es el plano $z = 0$. Sea $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $S(u) := u_1 - u_2$, para cualquier $u = u_1 + u_2 \in \mathbb{R}^3$, donde $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ (descomposición única de u). Se puede establecer que $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ y además que $\forall u \in \mathbb{R}^3 : S^2(u) = u$. Esto implica que $S^2 = I$, i.e. S es una reflexión.

Ejemplo 3: Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, con $m \in \mathbb{N}$ y la aplicación $D : V \rightarrow V$ tal que $\forall f \in V : D(f) := f'$. Se puede probar que $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$ es nilpotente, con índice de nilpotencia $m + 1$.



Proyecciones Ortogonales

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita (para poder aplicar las propiedades discutidas de COMPLEMENTO ORTOGONAL). Dado $W \subseteq V$ un subespacio vectorial, se sabe que $W \oplus W^\perp = V$. Esto permite expresar, de manera única, cualquier elemento $v \in V$ como $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp$. Luego, se define la Proyección ortogonal sobre W como la función $\text{Proj}_W : V \rightarrow V$ tal que $\forall v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V : \text{Proj}_W(v) := v_W$. El hecho que esta descomposición es única, garantiza que Proj_W esté bien definida.

Propiedades:

- ① $\text{Proj}_W \in \mathcal{L}(V)$,
- ② $\text{Proj}_W^2 = \text{Proj}_W$,
- ③ $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W \quad \wedge \quad \text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$,
- ④ Proj_W es simétrica,
- ⑤ $\sigma(\text{Proj}_W) \subseteq \{0, 1\}$.

Si W es subespacio no trivial de V , $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0, 1\}$.

Demostración:

1) Sean $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$, $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, fijos pero arbitrarios. Tenemos

$$\begin{aligned}\text{Proj}_W(\lambda u + v) &= \text{Proj}_W((\lambda u_W + v_W) + (\lambda u_{W^\perp} + v_{W^\perp})) \\ &= \lambda u_W + v_W = \lambda \text{Proj}_W(u) + \text{Proj}_W(v),\end{aligned}$$

y se concluye el resultado.



2) Sea $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$, fijo pero arbitrario. Luego, $\text{Proj}_W(u) = u_W \in W \subseteq V$. En consecuencia, $\text{Proj}_W^2(u) = \text{Proj}_W(\text{Proj}_W(u)) = \text{Proj}_W(u_W) = u_W = \text{Proj}_W(u)$. De aquí se infiere que $\text{Proj}_W^2 = \text{Proj}_W$.

3) Para $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W$. Se hará por doble inclusión.

($\text{Im}(\text{Proj}_W) \subseteq W$): Sea $z \in \text{Im}(\text{Proj}_W)$, fijo pero arbitrario. Esto significa que $\exists u \in V : z = \text{Proj}_W(u) = u_W \in W$, de donde se deduce la inclusión deseada.

($W \subseteq \text{Im}(\text{Proj}_W)$): Sea $u \in W \subseteq V$, fijo pero arbitrario. Luego $u = \text{Proj}_W(u)$, de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W$.

3) Para $\text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$. Se hará también por doble inclusión.

($\text{Ker}(\text{Proj}_W) \subseteq W^\perp$): Sea $z \in \text{Ker}(\text{Proj}_W)$, fijo pero arbitrario. Como $z \in V$, entonces $\exists! z_W \in W \wedge \exists! z_{W^\perp} \in W^\perp$ tales que $z = z_W + z_{W^\perp} \in V$. Esto significa que $\theta = \text{Proj}_W(z) = z_W$, con lo que $z = z_{W^\perp} \in W^\perp$, y se deduce la inclusión deseada.

($W^\perp \subseteq \text{Ker}(\text{Proj}_W)$): Sea $u \in W^\perp \subseteq V$, fijo pero arbitrario. Luego $\text{Proj}_W(u) = \theta$, de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que $\text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$.



4) Se recuerda la caracterización

Proj_W es simétrica $\Leftrightarrow \forall u, v \in V : \langle \text{Proj}_W(u), v \rangle = \langle u, \text{Proj}_W(v) \rangle$.

Sean $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ y $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$, fijos pero arbitrarios. Se tiene así

$$\langle \text{Proj}_W(u), v \rangle = \langle u_W, v \rangle = \overline{\langle v_W + v_{W^\perp}, u_W \rangle} = \langle u_W, v_W \rangle + \underbrace{\langle u_W, v_{W^\perp} \rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W \rangle,$$

$$\langle u, \text{Proj}_W(v) \rangle = \langle u, v_W \rangle = \langle u_W + u_{W^\perp}, v_W \rangle = \langle u_W, v_W \rangle + \underbrace{\langle u_{W^\perp}, v_W \rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W \rangle.$$

Luego, se infiere que Proj_W es simétrica.

5) Sea $(\lambda, z) \in \mathbb{K} \times V \setminus \{\theta\}$ un autopar de Proj_W , fijo pero arbitrario. Tenemos $\text{Proj}_W(z) = \lambda z$. Luego,

$$\text{Proj}_W^2(z) = \text{Proj}_W(\lambda z) = \lambda \text{Proj}_W(z) = \lambda^2 z.$$

$$\text{También: } \text{Proj}_W^2(z) = \text{Proj}_W(z) = \lambda z$$

$$\Rightarrow \lambda z = \lambda^2 z \Rightarrow (\lambda - \lambda^2)z = \theta \Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1.$$

Además, se deduce también que $S_0 = W^\perp$ y $S_1 = W$. Así, cuando W es subespacio no trivial de V , i.e. $W \neq \{\theta\}$ y $W \neq V$, se concluye que en efecto $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0, 1\}$, y termina la demostración.

Observación: Si $W = \{\theta\} \Rightarrow S_0 = V$ y $S_1 = \{\theta\}$. Así, $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0\}$.

Análogamente, si $W = V$, se deduce que $\text{Proj}_V := \tilde{I}$, y por tanto $\sigma(\text{Proj}_V) = \{1\}$.



Proyección ortogonal de una familia finita de subespacios vectoriales de V

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita, y $\{W_j\}_{j=1}^m$ una familia finita de subespacios vectoriales de V , tales que $V = \sum_{j=1}^m W_j$, y son ortogonales dos a dos, i.e.

$$\begin{aligned} & \forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : W_j \perp W_k \\ \Leftrightarrow & \forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : \forall u \in W_j : \forall v \in W_k : \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $V = \bigoplus_{j=1}^m W_j$, lo cual garantiza que cualquier vector de V puede expresarse de manera única como una suma de vectores de W_j , con $j \in \{1, \dots, m\}$, i.e.

$$\forall v \in V : \exists! z_j \in W_j, j \in \{1, \dots, m\} \text{ tales que } v = \sum_{j=1}^m z_j.$$

Se define, para $j \in \{1, \dots, m\}$, la Proyección ortogonal sobre W_j , tal que

$$\forall v = \sum_{j=1}^m z_j \in V : \text{Proj}_{W_j}(v) := z_j.$$

Propiedades:

- ① $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Proj}_{W_j} \in \mathcal{L}(V).$
- ② $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Proj}_{W_j}^2 = \text{Proj}_{W_j}.$
- ③ $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Im}(\text{Proj}_{W_j}) = W_j.$
- ④ $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \sigma(\text{Proj}_{W_j}) \subseteq \{0, 1\}.$
- ⑤ $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : \text{Proj}_{W_j} \circ \text{Proj}_{W_k} = \Theta$ (aplicación nula).
- ⑥ $\sum_{j=1}^m \text{Proj}_{W_j} = \tilde{I}$ (aplicación identidad).



Definición: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior. Decimos que una familia de aplicaciones $\{T_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{L}(V)$ es una **DESCOMPOSICIÓN DE LA (APLICACIÓN) IDENTIDAD** si verifica

- ① $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : T_j T_k := T_j \circ T_k = \Theta.$
- ② $\sum_{j=1}^m T_j = \tilde{I}.$

Ejemplo: La familia de proyecciones ortogonales $\{\text{Proj}_{W_j}\}_{j=1}^m$ definida antes, es una descomposición de la identidad.

Definición: Una familia de matrices $\{A_j\} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una **DESCOMPOSICIÓN DE LA (MATRIZ) IDENTIDAD**, si se verifica

- ① $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : A_j \cdot A_k = \Theta$ (matriz nula).
- ② $\sum_{j=1}^m A_j = I_n.$



Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, con $\sigma(A) := \{\lambda_j\}_{j=1}^m$ (conjunto de valores propios distintos). Entonces $\exists \{P_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, una descomposición de la identidad, tal que $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j$.

Demostración:

Primero, como $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable. Luego, $\mathbb{R}^{n \times 1} = \bigoplus_{j=1}^m S_{\lambda_j}$. Además, $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : S_{\lambda_j} \perp S_{\lambda_k}$. Esto nos dice que $\{S_{\lambda_j}\}_{j=1}^m$ es una familia (finita) de subespacios vectoriales de V ortogonales dos a dos.

Segundo, definimos ahora, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, las proyecciones ortogonales sobre S_{λ_j} como la aplicación lineal $\text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times 1})$. Por lo discutido previamente, tenemos

que $\{\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}\}_{j=1}^m$ es una descomposición de la identidad, i.e. $\sum_{j=1}^m \text{Proj}_{S_{\lambda_j}} = I$.

Tercero, Sea $x \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \bigoplus_{j=1}^m S_{\lambda_j}$. Entonces, $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \exists! x_{S_{\lambda_j}} \in S_{\lambda_j}$, tales que $x = \sum_{j=1}^m x_{S_{\lambda_j}}$. Así

$$Ax = A \sum_{j=1}^m x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m Ax_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x). \quad (2)$$

Consideremos ahora B , la base canónica de $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Se verifica $\forall z \in \mathbb{R}^{n \times 1} : [z]_B = z$. Entonces, de (2), resulta

$$Ax = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x) \right]_B = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \right]_B^B [x]_B = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \right]_B^B x.$$



De esta forma, se deduce $\forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} : Ax = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B \right) x$, lo cual implica

que $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B$ (esto sugiere fuertemente cómo definir $\{P_j\}_{j=1}^m$).

Cuarto, resta probar que $\left\{ P_j := \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B \right\}_{j=1}^m$ es la descomposición de la identidad

buscada, pues ya verifica $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j$.

Condición 1: sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$. Tenemos

$$P_j P_k = \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B \left[\text{Projs}_{\lambda_k} \right]_B^B = \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \circ \text{Projs}_{\lambda_k} \right]_B^B = [\Theta]_B^B = \Theta.$$

Condición 2:

$$\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m \left[\text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B = \left[\sum_{j=1}^m \text{Projs}_{\lambda_j} \right]_B^B = [\tilde{I}]_B^B = I_n.$$

De esta forma, se concluye la demostración.



MOTIVACIONES:

- ① Consideremos $T \in (\mathbb{C}^3)'$, con \mathbb{C}^3 provisto del producto interno usual, definido para cada $z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ por $T(z) := 2iz_1 - 5z_2 + z_3$. Definiendo $u := (-2i, -5, 1) \in \mathbb{C}^3$, T se puede definir como $\forall z \in \mathbb{C}^3 : T(z) = \langle z, u \rangle_H$.
- ② Sea ahora el espacio vectorial real $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cuyo producto interno se define como

$$\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t), g(t) dt.$$

Sea $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto S(p) := \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt.$$

Puede probarse (EJERCICIO) que $S \in (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))'$. ¿Existirá $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : S(p) = \langle p, q \rangle$?

Lo anterior conduce a plantear el siguiente

PROBLEMA: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interno. Dado $T \in V'$, ¿existirá $u \in V$ tal que $\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle$?



TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ (EN DIMENSIÓN FINITA)

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interno, y $T \in V'$. Entonces $\exists! u \in V : \forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle$.

PROOF:

EXISTENCIA: Consideremos $B := \{v_j\}_{j=1}^n$ una BASE ORTONORMAL de V , y sea $z \in V$ fijo pero arbitrario. Teniendo en cuenta que

$$z = \sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle v_j \Rightarrow T(z) = T\left(\sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle v_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle T(v_j) = \left\langle z, \sum_{j=1}^n \overline{T(v_j)} v_j \right\rangle.$$

Esto motiva definir $u := \sum_{j=1}^n \overline{T(v_j)} v_j \in V$, con el cual se verifica

$$\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle.$$

UNICIDAD: Supongamos que $u, w \in V$ son tales que

$$\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle = \langle z, w \rangle.$$

Esto implica que $\forall z \in V : \langle z, u - w \rangle = 0$, i.e. $u - w \in V^\perp = \{\theta_V\}$. De esta forma, concluimos que $u = w$.

OBSERVACIÓN: la UNICIDAD nos garantiza que para caracterizar u , puede considerarse una base cualquiera de V .



EJEMPLO DE APLICACIÓN: Sea ahora el espacio vectorial real $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cuyo producto interno se define como $\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t), g(t) dt$. Sea $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto S(p) := \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt.$$

Habiéndose probado que $S \in (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))'$ (EJERCICIO), y el espacio vectorial con producto interno es $V := \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es finito dimensional, se puede APLICAR EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ. Así, se garantiza la existencia de un único vector $u \in V$ tal que $\forall p \in V : S(p) = \langle p, u \rangle$.

DETERMINANDO $u \in V$: Para esto, hay que revisar la DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA ALUDIDO, del cual se rescata la estrategia para determinar esta función $u \in V$.

Consideramos la BASE ORTONORMAL de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: $\{q_j\}_{j=1}^3$, donde $\forall t \in \mathbb{R} : q_1(t) := \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q_2(t) := \frac{\sqrt{6}}{2}t$, $q_3(t) := \frac{3\sqrt{10}}{4}(t^2 - \frac{1}{3})$, la cual es obtenida aplicando PROCEDIMIENTO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT a la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. De esta forma

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) := \sum_{j=1}^3 \overline{S(q_j)} q_j(t) = \dots = -\frac{45}{2\pi^2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right), \text{ luego de reducir.}$$

Finalmente, se puede precisar que $u = -\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} q_3$.



OTRA FORMA: Considerando la BASE CANÓNICA de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, esto es $B_c := \{p_j\}_{j=1}^3$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $p_1(t) := 1$, $p_2(t) := t$, $p_3(t) := t^2$. De esta manera, siendo

$u \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, buscamos $\{\alpha_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$ tal que $u = \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j$. Sabemos que u debe ser tal que

$$\forall p \in V : S(p) = \langle p, u \rangle = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \langle p, p_j \rangle.$$

En particular, para $p := p_k$, con $k \in \{1, 2, 3\}$, resulta

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j \langle p_k, p_j \rangle = S(p_k), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Esto da lugar a un sistema de ecuaciones cuadrado, que en su forma matricial, se expresa como

$$\begin{pmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle & \langle p_1, p_3 \rangle \\ \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle & \langle p_2, p_3 \rangle \\ \langle p_3, p_1 \rangle & \langle p_3, p_2 \rangle & \langle p_3, p_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(p_1) \\ S(p_2) \\ S(p_3) \end{pmatrix}$$

Haciendo los cálculos (DEJADOS AL ESTUDIANTE), tenemos:

$$\langle p_1, p_1 \rangle = 2, \langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_2, p_1 \rangle = 0, \langle p_1, p_3 \rangle = \langle p_3, p_1 \rangle = 2/3$$

$$\langle p_2, p_2 \rangle = 2/3, \langle p_2, p_3 \rangle = \langle p_3, p_2 \rangle = 0, \langle p_3, p_3 \rangle = 2/5$$

$$S(p_1) = S(p_2) = 0, S(p_3) = -4/\pi^2.$$



Reemplazando y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $u =$

$$\alpha_1 = \frac{15}{2\pi^2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\frac{45}{2\pi^2}.$$

De esta manera se obtiene

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) := \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j(t) = \frac{15}{2\pi^2} - \frac{45}{2\pi^2} t^2 = -\frac{45}{2\pi^2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right).$$

