Espacios L_p.

- **Normas y seminormas.**
- **Espacios $L_p,\ 1 \leq p < +\infty$.**

Normas y seminormas.

Recordemos:

Def.: Sea V un espacio vectorial real. La función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una **norma** si:

a) $\forall x \in V : \; x \neq 0, \quad \|x\| > 0;$

b) $\forall x \in V, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|;$

$\Big\} \Longrightarrow \|x\| = 0 \iff x = 0.$

c) $\forall x, y \in V, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

En tal caso, $(V, \|\cdot\|)$ se denomina un **espacio vectorial normado (E.V.N.)**.

Def.: La función $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ es una **seminorma** si satisface (b-c), pero no (a); es decir, si $\exists \, x \in V : \; x \neq 0,$ pero $|x| = 0.$

Ejemplo: Sea $\ell_1 := \left\{ a := \{a_n\} \subset \mathbb{R} : \; \|a\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \right\}.$

$\|\cdot\|_1$ es una norma en ℓ_1 de modo que $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es un E.V.N. **Ej.**

En cambio $|a| := \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ no es una norma en ℓ_1, sino una seminorma. **Ej.**

Ejemplo: Sea $\ell_p := \left\{ a := \{a_n\} \subset \mathbb{R} : \; \|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$

$\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ_p, de modo que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un E.V.N.

Dem.: (a-b) **Ej.** (c) es la **desigualdad de Minkowski**, que ya demostraremos.

Las siguientes propiedades ya fueron demostrados en distintos lemas y teoremas:

Lema: El espacio de funciones integrables Lebesgue $L(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio vectorial y $|f|_\mu := \int |f|\, d\mu$ es una seminorma en ese espacio. Además, $|f|_\mu = 0 \iff f = 0$ c.t.p.

Para que $|\cdot|_\mu$ sea norma en $L(X, \mathscr{X}, \mu)$, identificamos funciones iguales c.t.p.

Def.: • $f, g \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ son **μ-eqivalentes** si $f = g$ c.t.p.

- **Clase de equivalencia:** $[f] := \{g \in L(X, \mathscr{X}, \mu) :\ f = g \text{ c.t.p}\}$.
- **Espacio cociente:** $L_1 := L_1(X, \mathscr{X}, \mu) := \{\, [f],\ f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)\}$.
- $\|[f]\|_1 := \int |f|\, d\mu$, **no depende del representante de** $[f]$.

Teor.: $\big(L_1(X, \mathscr{X}, \mu), \|\cdot\|_1\big)$ es un E.V.N.

Dem.: La suma de clases de equivalencia, $[f] + [g] := [f + g]$ y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\,[f] := [\lambda f]$, no dependen de los representantes. **Ej.**

Por lo tanto, $L_1(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un E.V.

Además, $\|\cdot\|_1$ es una norma en ese espacio, pues satisface (b-c) **Ej.**

y (a): $\|[f]\|_1 = \int |f|\, d\mu = 0 \iff f = 0$ c.t.p $\iff [f] = [0]$. ■

- De ahora en más, a fin de simplificar la notación, cuando no haya posibilidad de confusión, a la clase de equivalencia de f la denotaremos simplemente f en vez de $[f]$.

Sin embargo, debemos tener presente que cada propedad que demostremos de f debe ser satisfecha por cualquier representante $g \in [f]$, vale decir, por cualquier $g:\ g = f$ c.t.p.

Por ejemplo, escribiremos $\|f\|_1$ en vez de $\|[f]\|_1$ y es válido porque,

$$\forall g:\ g = f \text{ c.t.p.,} \quad \|f\|_1 = \int |f|\, d\mu = \int |g|\, d\mu = \|g\|_1 \, .$$

- $\big(L_1(X, \mathscr{X}, \mu), \|\cdot\|_1\big)$ se define para cualquier espacio de medida $(X, \mathscr{X}, \mu)$.

En el caso particular de $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_\#)$ con $\mu_\#$ la medida de contar, todas las clases de equivalencia tienen un único representente: $[a] = \{a\}$. En efecto, para todo par de sucesiones numéricas, $a = \{a_n\}$ y $b = \{b_n\}$,

$$a = b \text{ c.t.p.} \iff \mu_\#(\{n \in \mathbb{N}:\ a_n \neq b_n\}) = 0 \iff a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En este caso, $\|a\|_1 = \int |a|\, d\mu_\# = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ coincide con la norma $\|\cdot\|_1$ que ya hemos definido en ℓ_1 y $L_1(X, \mathscr{X}, \mu_\#)$ coincide con el espacio ℓ_1.

Espacios $L_p,\ 1 \le p < +\infty$.

Def.: Dado $p \in [1, +\infty)$, sea

$$L_p := L_p(X, \mathscr{X}, \mu) := \left\{ [f]\,,\ f \in M(X, \mathscr{X}) : \int |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

y $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \ d\mu \right)^{1/p}$.

Notemos que para $p = 1$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ coincide con $(L_1, \|\cdot\|_1)$, tal como lo definimos antes. En este caso, ya demostramos que $(L_1, \|\cdot\|_1)$ es un E.V.N.

Para $p \in (1, \infty)$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ también es un E.V.N. La demostración de esto es inmediata (**Ej.**) a excepción de la desigualdad triangular y de la propiedad de que la suma de funciones de L_p está en L_p.

La desigualdad triangular en L_p tiene un nombre propio, la **desigualdad de Minkowski** y su demostración se basa en otra desigualdad, también con nombre propio: la **desigualdad de Hölder.**

Def.: $p, q > 1$ son **conjugados** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teor. [desigualdad de Hölder]: Sean $p, q > 1$ conjugados, $f \in L_p$ y $g \in L_q$. Entonces, $(fg) \in L_1$ y $\boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|q\|_q \, .}$

Dem.: Dado $\alpha \in (0,1)$, sea $\varphi(t) := \alpha t - t^\alpha, \quad t > 0.$

Es fácil verificar que φ alcanza su mínimo en $t = 1$ **Ej.**

$\implies \forall t > 0, \; \alpha t - t^\alpha = \varphi(t) \geq \varphi(1) = \alpha - 1 \implies t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$

Dados $a, b > 0$, tomando $t := \frac{a}{b}$, se tiene que $\frac{a^\alpha}{b^\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + (1 - \alpha) \implies$

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)\, b \qquad \forall a, b > 0.$$

Sean $p, q > 1$ conjugados. Sea $\alpha := \frac{1}{p} \in (0,1) \implies (1 - \alpha) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$

Dados $A, B > 0$, sean $a := A^p$ y $b := B^q \implies$

$a^\alpha = a^{1/p} = A$ y $b^{1-\alpha} = b^{1/q} = B \implies$

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \qquad \forall A, B > 0.$$

Sean $f \in L_p$ y $g \in L_q$ no nulas (si alguna es nula, la desigualdad es trivial). (fg) es medible y tomando $x \in X$, $A := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $B := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, se tiene que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \qquad \forall x \in X.$$

Como los dos sumandos del segundo miembro son integrables, $(fg) \in L_1$ e, integrando, $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|q\|_q \, .$ ■

Corol. [desigualdad de Minkowski]: Sea $p \in [1, +\infty)$.

$\forall f, g \in L_p$, $(f+g) \in L_p$ y $\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.}$

Dem.: Sea $p > 1$ (el caso $p = 1$ ya lo vimos). La suma $(f+g)$ es medible y

$$|f(x)+g(x)|^p \leq \big[\,|f(x)| + |g(x)|\,\big]^p \leq \big[2\max\{|f(x)|\,,|g(x)|\}\,\big]^p$$
$$= 2^p \max\big\{\,|f(x)|^p\,,|g(x)|^p\,\big\} \leq 2^p\big[\,|f(x)|^p + |g(x)|^p\,\big] \quad \forall x \in X$$

$\Longrightarrow$ $(f+g) \in L_p$. Lo que resta es demostrar la desigualdad de Minkowski.

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}\,. \qquad (1)$$

Sea q el conjugado de p. Entonces, $p - 1 = \frac{p}{q}$ $\boxed{\textbf{Ej.}}$

$$\Longrightarrow \big(\,|f+g|^{p-1}\,\big)^q = |f+g|^p \Longrightarrow |f+g|^{p-1} \in L_q.$$

$$\Longrightarrow \int |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p\,\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q$$
$$= \|f\|_p\,\Big[\int |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\Big]^{1/q} \overset{(p-1)q=p}{=} \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q}\,. \qquad (2)$$

Procediendo análogamente, $\int |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q}\,.$ $\qquad (3)$

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p\,d\mu \overset{(1)}{\leq} \int |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu$$
$$\overset{(2\text{-}3)}{\leq} \big(\,\|f\|_p + \|g\|_p\,\big)\,\|f+g\|_p^{p/q}\,. \qquad (4)$$

$$p - p/q = 1 \Longrightarrow \|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p-p/q} \overset{(4)}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p\,. \quad \blacksquare$$

Otra desigualdad clásica, la de Cauchy–Schwarz, es un caso particular de la desigualdad de Hölder:

Corol. [desigualdad de Cauchy–Schwarz]: $\forall f, g \in L_2,\ (fg) \in L_1$ y

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \int |fg|\ d\mu \leq \|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

Dem.: Es la desigualdad de Hölder para $p = q = 2$. ■