UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525151)

Ejercicios del Problema del Camino Más Corto (PCC)

P1) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

a) Sea $G = (V, E)$ un digrafo, $u, v \in V$ y $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso. Entonces se tiene que:

$\delta(u, v) = -\infty \iff$ existe un camino de u a v en G que contiene un ciclo de peso negativo.

b) El digrafo predecesor obtenido al usar Dijkstra contiene un arco de peso mínimo.

c) Sea $G = (V, E)$ un digrafo y $w, w' : E \to \mathbb{R}$ funciones de peso tales que:

$$\forall (u, v) \in E, \quad w'(u, v) = w(u, v) + \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Luego, para todo p camino en G se tiene que:
p es de peso mínimo en (G, w) si y sólo p es de peso mínimo en (G, w').

d) Idem a *b*) considerando ahora:

$$\forall (u, v) \in E, \quad w'(u, v) = \lambda \cdot w(u, v),$$

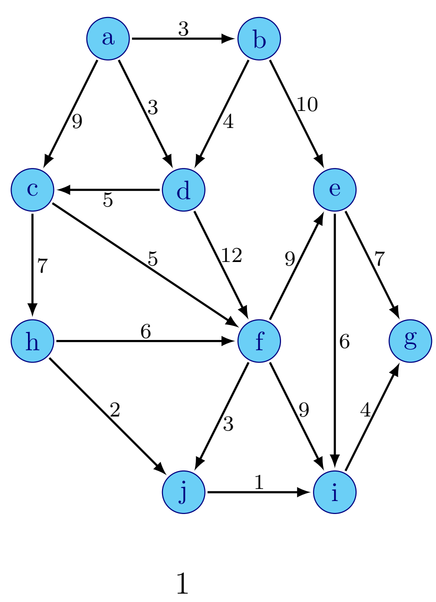
con $\lambda > 0$ fijo.

e) El algoritmo de Dijkstra da una solución a PCC en digrafos con pesos reales en los arcos y que no tienen ciclo de peso negativo.

P2) El siguiente grafo G representa una ciudad donde las calles y su dirección están dados por los arcos y los nodos son la intersección entre ellas. Tres amigos que salen desde los nodos a, b y f deciden juntarse en el nodo g. Si los pesos en los arcos representan el tiempo necesario para ir desde un punto a otro, entonces:

a) Determinar el camino más corto desde el punto de salida de cada amigo al punto g.

b) Si todos los amigos salen al mismo tiempo, calcule el máximo tiempo de espera de los amigos.



P3) **Problema del cambio de monedas**. Dado un conjunto $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ de monedas de valores todos distintos, y donde la moneda m_k tiene un valor de $v_k \in \mathbb{N}$, se desea saber el menor número de monedas requeridas cuyo suma de valores sea igual a una cantidad dada igual a p si existe. Modele este problema como un problema de camino más corto y proponga un algoritmo visto en clases para resolverlo. Justifique su respuesta y dé un ejemplo de funcionamiento.

P4) Sea $G = (V, E)$ un digrafo con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ y $s \in V$ tal que $\forall u \in V \setminus \{s\}$ es alcanzables desde s. Dada una función $h : V \to \mathbb{R}$, se define para cada arco $(u, v) \in E$:

$$w_h(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v).$$

Se dice que h es un potencial para G con w si $w_h(u, v) \geq 0,\ \forall (u, v) \in E$.

a) Pruebe que $\forall v \in V$, p es un camino de peso mínimo de s a v con respecto a w si y sólo si p es un camino de peso mínimo de s a v con respecto a w_h.

b) Demuestre que existe un potencial para G con w si y sólo si G no tiene ciclo de peso negativo con respecto a w (Ind: piense en $h(u) = \delta(s, u)$).

c) Concluya que el algoritmo de Bellman-Ford entrega un potencial para G con w si y sólo si existe.

P5) Una industria requiere una sola máquina para ejecutar una cierta tarea por los próximos cuatro años, después de lo cual no se necesitará más. El precio de compra de la máquina al inicio de cada año varía de acuerdo a la siguiente tabla:

Año de compra	1	2	3	4
Precio	30	33	40	47

El valor de venta de la máquina depende de los años de su uso de acuerdo a la siguiente tabla:

Años de uso	1	2	3	4
Precio de venta	17	6	3	1

Los costos operacionales varían según los años de uso de acuerdo a la siguiente tabla:

Años de uso	1	2	3	4
Costos operacionales	3	5	8	26

Determine una política de compra de la máquina tal que pueda ser operativa durante los próximos cuatro años y el costo sea el menor posible.

P6) Dado un digrafo $G = (V, E)$, $s \in V$ y $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso en los arcos. El problema del Camino Más Largo (PLC) consiste en encontrar un camino de peso máximo (si existe) de s a todo vértice $u \in V$.

a) Muestre que el siguiente problema de decisión asociado a PLC **sin repetición de vértices** es NP-completo.

LONGEST PATH: Dado $G = (V, E)$ un digrafo, $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso y $k \in \mathbb{N}$ ¿Existe un camino p en G sin repetición de vértices tal que $w(p) \geq k$?

b) Muestre que el problema puede ser resuelto en tiempo polinomial si el digrafo G no tiene ciclos.

c) ¿Qué hipótesis pueden hacerse sobre un digrafo G con ciclos de manera que PCL pueda encontrar una solución (cuando existe) en tiempo polinomial?

P7) **Problema de Gestión de Tareas**: Un proyecto es un conjunto de actividades donde usualmente una actividad puede comenzar sólo si otras actividades han terminado antes. La gestión de un proyecto consiste en planificar el inicio de cada actividad de manera de finalizar todas las actividades del proyecto en el menor tiempo posible. Un camino crítico de un proyecto corresponde a una secuencia de actividades que limitan el tiempo mínimo requerido para la finalización de todas las actividades del proyecto. Para el siguiente proyecto determine un camino crítico y el tiempo total mínimo para su realización.

Actividad	Duración (días)	Predecesores
A	3	-
B	6	-
C	2	D, E
D	6	A, B
E	8	B, F
F	5	A
G	3	B, C, F

P8) Una manera alternativa para determinar los grafos predecesores de los caminos más cortos en el algoritmo de Floyd -Warshall es usar los valores ϕ_{ij}^k en vez de los valores π_{ij}^k, donde ϕ_{ij}^k es definido como el nodo intermedio más grande (de mayor índice) perteneciente al camino (definido en clase) p_{ij}^k si $k \geq 1$ y $\phi_{ij}^0 = \pi_{ij}^0$ en caso contrario.

a) Defina de manera recursiva los valores de $\phi_{ij}^k, \forall i, j = 1, \ldots, n,\ \forall k = 0, 1, \ldots, n$.

b) Modifique el algoritmo de Floyd-Warshall para calcular los valores de ϕ_{ij}^k.

c) Explique cómo determinar un camino más corto del nodo i al nodo j usando los valores ϕ_{ij}^k.

Solución:

P1) *a*) **Verdadero:** Supongamos que $\delta(u, v) = -\infty$. Luego, el conjunto

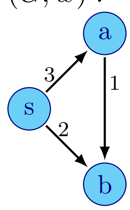
$$P_{u,v} := \{p_{uv} :\ p_{uv} \text{ es camino de } u \text{ a } v \text{ en } G\}$$

no es vacío (pues en ese caso $\delta(u, v) = \infty$) y tampoco es finito, pues en ese caso $\delta(u, v) = \min\{w(p_{uv}) :\ p_{uv} \in P_{u,v}\} \in \mathbb{R}$. Por consiguiente el conjunto P_{uv} es infinito. Luego, existe

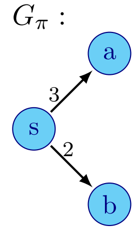
$p_{uv} \in P_{uv}$ con vértices repetidos, i.e. contiene un ciclo. Supongamos que todos los caminos $p_{uv} \in P_{uv}$ que contienen ciclos, éstos son de peso igual a cero. Entonces, para cada uno de estos caminos p_{uv} existe un camino $p'_{uv} \in P_{uv}$ sin vértice repetidos y con igual peso. Luego, $\delta(u,v) = \min\{w(p_{uv}) : \ p_{uv} \text{ es camino de } u \text{ a } v \text{ en } G\} \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, existe $p_{uv} \in P_{uv}$ con ciclo de peso negativo.
En el otro sentido, si existe $p_{uv} \in P_{uv}$ con ciclo de peso negativo, entonces por definición $\delta(u,v) = -\infty$.

b) **Falso:** Para la instancia (G, w, s) del PCC con (G, w) mostrado en la siguiente figura se obtiene como único digrafo predecesor G_π que no contiene el arco de peso mínimo (a, b).

(G, w) :

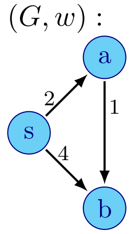


G_π :

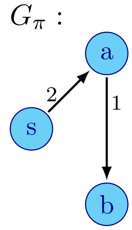


c) **Falso:** Para la instancia (G, w, s) del PCC con (G, w) mostrado en la siguiente figura se obtiene como único digrafo predecesor G_π. Sin embargo, para la función de peso $w' := w + 2$ se obtiene el nuevo digrafo G'_π que no es solución al PCC con instancia (G, w, s) ($p : s, b$ no es camino de peso mínimo respecto a w).

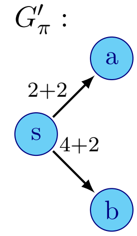
(G, w) :



G_π :



G'_π :



d) **Verdadero:** Sea $G = (V, E)$ un digrafo, $s \in V$ un vértice y $w, w' : E \to \mathbb{R}$ funciones de peso tal que $w' = \lambda w$ con $\lambda > 0$. Notar que si $p : u_1, \ldots, u_k$ es un camino en G, entonces

$$w'(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w'(u_i, u_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda w(u_i, u_{i+1}) = \lambda w(p).$$

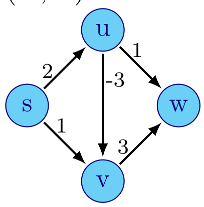
Así, se tiene que $\forall q_{u_1,u_k}$ camino de u_1 a u_k en G:

$$w'(p) \leq w'(q_{u_1,u_k}) \iff \lambda w(p) \leq \lambda w(q_{u_1,u_k}) \iff w(p) \leq w(q_{u_1,u_k}).$$

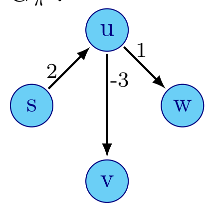
Luego, p es de peso mínimo con respecto a w si y sólo si p es de peso mínimo con respecto a w'.

e) **Falso:** Para la instancia (G, w, s) del PCC con (G, w) mostrado en la siguiente figura y que no tiene ciclo de peso negativo, se tiene que después de aplicar Dijkstra con entrada (G, w, s) se obtiene como digrafo predecesor G_π que no es solución a PCC, pues $p : s, u, w$ no es camino de peso mínimo.

(G, w) :

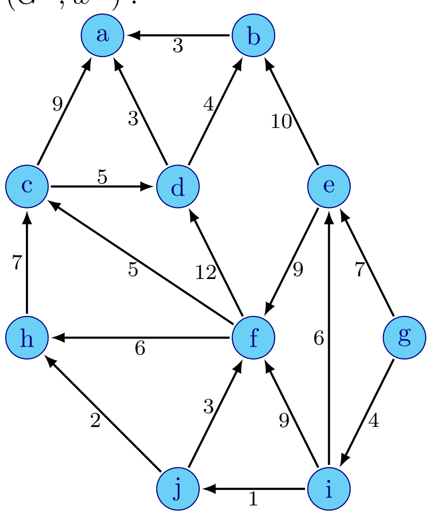


G_π :

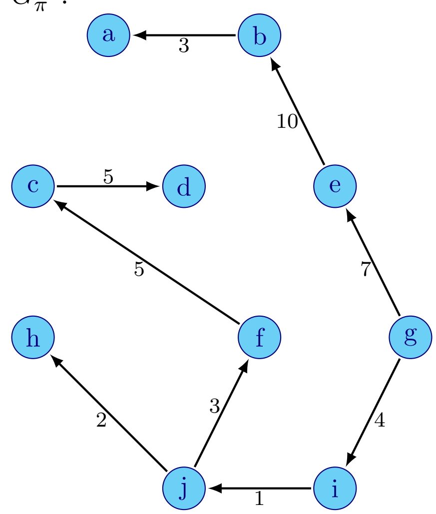


P2) a) Para resolver el problema definimos el digrafo reverso $G^R = (V^R, E^R)$ asociado a $G = (V, E)$ donde $V^R = V$ y $E^R = \{(u, v) : \ (v, u) \in E\}$ y la función de peso $w^R : E^R \to \mathbb{R}$ con $\forall(u, v) \in E^R, \ w^R(u, v) = w(v, u)$. Luego, aplicamos el algoritmo Dijkstra a la instancia (G^R, w^R, g) obteniendo el digrafo predecesor G^R_π mostrado a continuación que contiene los caminos más cortos (pero en sentido contrario) para ir hasta g desde el punto de salida de cada amigo.

(G^R, w^R) :



G^R_π :



b) Como en (G^R, w^R) se tiene que $\delta(g, a) = 20$, $\delta(g, b) = 17$ y $\delta(g, f) = 8$, entonces si todos los amigos salen al mismo tiempo, el primero en llegar será el amigo que parte desde f y el último el que parte desde a. Luego el tiempo máximo de espera es: $\delta(g, a) - \delta(g, f) = 12$.

P3) Dado un conjunto $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ de monedas de valores todos distintos, y donde la moneda m_k tiene un valor de $v_k \in \mathbb{N}$, definamos el digrafo $G = (V, E)$ con $V = \{0, 1, 2, \ldots, p\}$ y

$$E = \{(i, j) \in V \times V : \ \exists l \in \{1, \ldots, k\}, \ i + v_l = j\}.$$

Además, definamos la función de peso $w : E \to \mathbb{R}^+$ constante igual a uno, ie. $\forall(i, j) \in E, \ w(i, j) = 1$. Luego, el camino más corto (o de peso mínimo pues todos los pesos son de igual valor) del vértice 0 al vértice p (si existe) me da la combinación de menor cantidad de monedas cuyos valores suman p. Para resolver este problema podemos usar el algoritmo Dijkstra con entrada $(G, w, 0)$ o bien el algoritmo BFS a partir de 0 y obtener el camino más corto de 0 a p (ver ejemplo de clase práctica).

P4) a) Notar que si $p : u_1, \ldots, u_k$ es un camino en G, entonces

$$w_h(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w_h(u_i, u_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (w(u_i, u_{i+1}) + h(u_i) - h(u_{i+1})) = w(p) + h(u_1) - h(u_k).$$

Así, se tiene que $\forall q_{u_1,u_k}$ camino de u_1 a u_k en G:

$$w_h(p) \le w_h(q_{u_1,u_k}) \iff w(p)+h(u_1)-h(u_k) \le w(q_{u_1,u_k})+h(u_1)-h(u_k) \iff w(p) \le w(q_{u_1,u_k}).$$

Luego, p es camino de peso mínimo respecto a w_h si y sólo si p es camino de peso mínimo respecto a w.

b) Supongamos que h es un potencial para G con w. Sea $c = v_1, \ldots, v_k, v_1$ un ciclo de G. Luego, si $v_{k+1} \equiv v_1$, entonces

$$w_h(c) = \sum_{i=1}^{k} w_h(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} (w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})) = \sum_{i=1}^{k} w(v_i, v_{i+1}) = w(c).$$

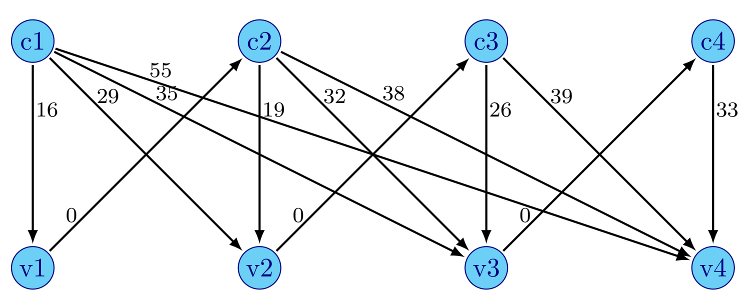
Dado que $w_h(u,v) \ge 0,\ \forall (u,v) \in E$, entonces $w_h(c) = w(c) \ge 0$. Así G no tiene ciclo de peso negativo.
En en sentido inverso, sabemos que $\forall (u,v) \in E,\ \delta(s,v) \le \delta(s,u) + w(u,v)$. Luego, $\forall (u,v) \in E,\ w_h(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v) \ge 0$. Por consiguiente, h es un potencial para G con w.

c) Sabemos que si G no tiene ciclo de peso negativo, entonces el algoritmo de Bellman-Ford retorna $\forall v \in V,\ d[v] = \delta(s,v)$. Definamos entonces $\forall u \in V,\ h(u) = \delta(s,u)$ se tiene de *b*) que h es un potencial. Por el contrario, si G tiene un ciclo de peso negativo, de *a*) se sabe que no existe un potencial.

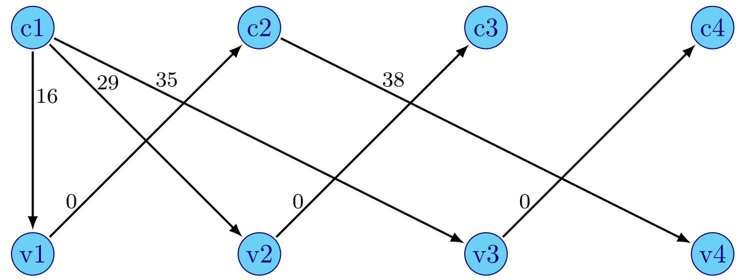
P5) Se define el digafo $G = (V,E)$ donde $V = \{c_1, c_2, c_3, c_4, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde c_i y v_j representan las acciones de comprar al inicio del año i y vender al final del año j respectivamente. Además,

$$E = \{(c_i, v_j) :\ i,j \in \{1,2,3,4\}, j \ge i\} \ \cup\ \{(v_i, c_{i+1}) :\ i \in \{1,2,3\}\}.$$

Por último se define la función peso $w : E \to \mathbb{R}^+$ por:
$\forall (c_i, v_j) \in E :\ w(c_i, v_j) =$ precio de compra en año i + costos operacionales de $(j-i+1)$ años de uso - precio de venta por $(j-i+1)$ años de uso, y
$\forall (v_i, c_{i+1}) \in E :\ w(v_i, c_{i+1}) = 0$. Por ejemplo: $w(c_1, v_1) = 30+3-17 = 16$ y $w(c_3, v4) = 40+5-6 = 39$. Así, (G,w) es representado como sigue:



Aplicando el algoritmo Dijkstra a (G,w) con vértice inicial c_1 se obtiene el siguiente digrafo predecesor G_π:



Luego, el camino de peso (costo) mínimo desde c_1 a v_4 es $p : c_1, v_1, c_2, v_4$ con peso $w(p) = 54$ que representa la política de compra y venta de la máquina con en menor costo posible.

P6) *a*) Mostremos que HAMPATH (en digrafos) $\leq_p$ LP.

Sea $f : I_{HAMPATH} \to I_{LP}$ definido por: para todo digrafo $G = (V, E)$, $f(G) = (G, w = 1, k = |V| - 1)$ donde $w = 1$ significa la función constante igual a 1. Luego si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces G tiene un camino p sin repetición de vértices y con $w(p) = |V| - 1 \geq k = |V| - 1$. Recordar que como $w = 1$ entonces $w(p)$ corresponde al largo de p. En el sentido contrario, si G tiene un camino p sin repetición de vértices y con $w(p) \geq k = |V| - 1$, entonces p es un camino Hamiltoniano en G. Como f puede ser obviamente calculada por un algoritmo polinomial, entonces HAMPATH $\leq_p$ LP. Así, LP es NP-hard. Por otro lado, es fácil ver que un certificado para LP es un camino de largo $|V| - 1$ que puede ser verificado por un algoritmo polinomial. Luego, LP es NP-completo.

Observar que de lo anterior, el problema particular de decisión LP donde los pesos son todos iguales a uno, es decir determinar un camino sin repetición de vértices de largo máximo, es también NP-completo. En cambio, el problema del camino más corto en digrafos (cuando los vértices extremos del camino son dados) con peso igual a uno puede ser resuelto en tiempo polinomial usando Dijkstra.

b) Notar que dado $G = (V, E)$ un digrafo, $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso y $s \in V$, si $P_{u,v}$ denota el conjunto de caminos de u a v en G y $p \in P_{u,v}$, entonces

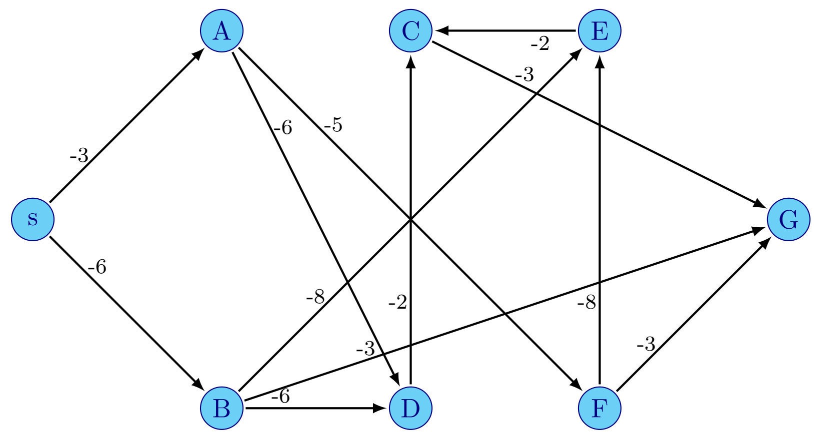
$$w(p) = \max\{w(q) : \ q \in P_{u,v}\} \Longleftrightarrow -w(p) = \min\{-w(q) : \ q \in P_{u,v}\}.$$

Luego, p es un camino de peso máximo con respecto a w si y sólo si p es un camino de peso mínimo con respecto a $-w$. Así, una forma de resolver PCL con instancia (G, w, s) es resolver PCC con instancia $(G, -w, s)$. Como G no tiene ciclos (y por ende no tiene ciclos negativos), entonces el algoritmo Bellman-Ford da una solución en tiempo polinomial a PCC con instancia $(G, -w, s)$ y así PCL puede ser resuelto también en tiempo polinomial.

c) De *b*) sabemos que una forma de resolver PCL con instancia (G, w, s) con w función de peso de valores reales es resolver PCC con instancia $(G, -w, s)$. Sabemos que este último tiene solución para todo vértice $u \in V$si no existe ciclo de peso negativo alcanzables desde s. Luego, si por hipótesis G no tiene ciclo positivo con respecto a w alcanzables desde s, entonces G no tiene ciclo de peso negativo con respecto a $-w$ alcanzable desde s, y así puede mediante Bellman-Ford puede resolver en tiempo polinomial PCC con entrada $(G, -w, s)$ obteniendo caminos de peso mínimo de s a los otros vértices del digrafo que serían caminos de peso máximo con respecto a w, resolviendo entonces PCL con instancia (G, w, s) en tiempo polinomial.

P7) Dado $P = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ el conjunto de tareas, se define el digrafo $G = (V, E)$, donde $V = P \cup \{s\}$ y $E = \{(u, v) \in P \times P : \text{ el inicio de la tarea } v \text{ requiere el haber terminado la tarea } u\} \cup \{(s, A), (s, B)\}$, y la función de peso $w : E \to \mathbb{R}^-$, donde $\forall (u, v) \in E, \ w(u, v) = \text{duración de la tarea } v$.

De esta forma, (G, w) queda representado por la siguiente figura.



Aplicando el algoritmo de Bellman-Ford se obtiene que el camino crítico es: A,F,E,C,G con un tiempo total del proyecto de 21 días. De esta forma, una planificación posible del inicio de cada tarea que permite realizar el proyecto en 21 días y respetando las restricciones de precedencia de cada tarea está dada por la siguiente tabla:

Día de Inicio	1	4	9	17	19	1	7
Tarea	A	F	E	C	G	B	G

P8) a) De manera análoga a la definición de las matrices Π^k definimos la matriz $\Phi^0 = \Pi^0 \in M_m(\{1, \ldots, n\})$ y $\forall k = 1, \ldots, n$ la matriz $\Phi^k = (\phi_{ij}^k) \in M_m(\{1, \ldots, n\})$ donde ϕ_{ij}^k es el nodo intermedio de mayor índice en un camino p_{ij}^k, es decir

$$\phi_{ij}^0 = \begin{cases} N\ (Null) & \text{si } i = j \vee (i,j) \notin E, \\ i & \text{si } i \neq j \wedge (i,j) \in E. \end{cases}$$

y $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\phi_{ij}^k = \begin{cases} \phi_{ij}^{k-1} & \text{si } d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}, \\ k & \text{si } d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}. \end{cases}$$

b) De esta manera el algoritmo modificado que permite calcular las matrices Φ^k está dado por:

Algorithm Floyd-Warshall modificado (G,w)

Require: $G = (V, E)$ un digrafo y $w : E \to \mathbb{R}$ función de pesos tal que no hay ciclos de peso negativo.

$D^0 \leftarrow W$
for $i, j =$ to $|V|$ **do**
    if $i \neq j \wedge w_{ij} < \infty$ **then**
        $\phi^0_{ij} \leftarrow i$
    else
        $\phi^0_{ij} \leftarrow N$ (Null)
    end if
end for
for $i, j, k = 1$ to $|V|$ **do**
    if $d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj} < d^{k-1}_{ij}$ **then**
        $d^k_{ij} \leftarrow d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj}$
        $\phi^k_{ij} \leftarrow k$
    else
        $d^k_{ij} \leftarrow d^{k-1}_{ij}$
        $\phi^k_{ij} \leftarrow \phi^{k-1}_{ij}$
    end if
end for
return (D^n, Φ^n)

c) Notar de la definición de la matriz Φ^n se tiene directamente que para todo $i, j = 1, \ldots, n$, existe camino de peso mínimo p_{ij} de i a j en G si y sólo si $\phi^n_{ij} \neq N$ (ejercicio). Luego, si existe un camino de peso mínimo p_{ij} de i a j en G es igual a p^n_{ij} y éste puede ser calculado recursivamente como sigue:

$$\forall k \geq 1, \quad p^k_{ij} = \begin{cases} p^{k-1}_{ik},\ k,\ p^{k-1}_{kj} & \text{si } \phi^k_{ij} = k, \\ p^{k-1}_{ij} & \text{si } \phi^k_{ij} = \phi^{k-1}_{ij}. \end{cases}$$

Con $p^0_{ij} = i, j$.

Notar que $\forall k \geq 1, \quad p^k_{ij}$ queda en función de caminos cuyos vértices intermedios están en el conjunto $\{1, \ldots, k-1\}$ o que no tienen vértices intermedios. En cualquier caso la recursión termina en a lo más n pasos.