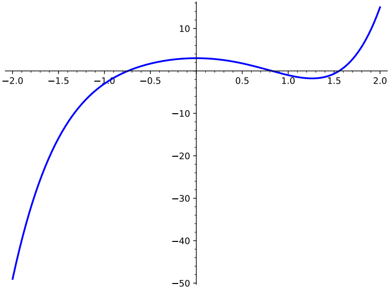
Cálculo II (527150)

Clase 01: Integración

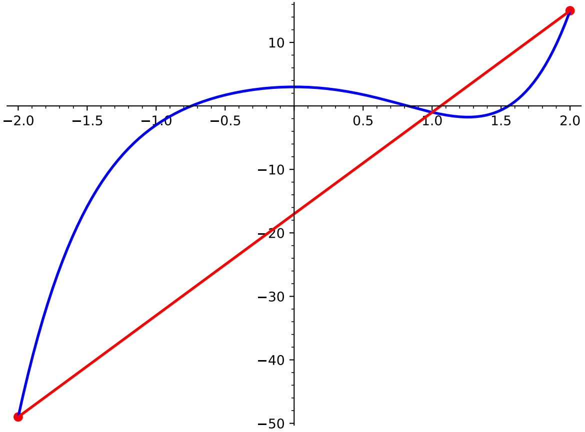
Ejemplo inicial

Problema

Estimar la longitud de la curva de ecuación $f(x) = x^5 - 5\,x^2 + 3$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

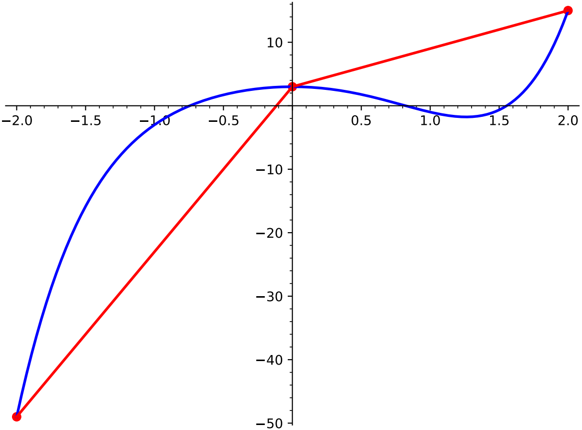


Primera aproximación



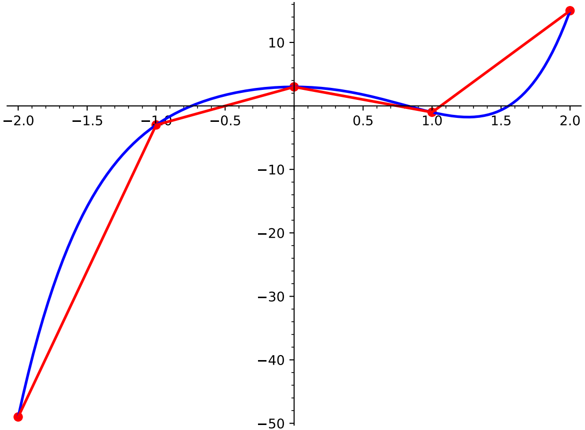
La longitud de este segmento es 64.1248781675256.

Segunda aproximación



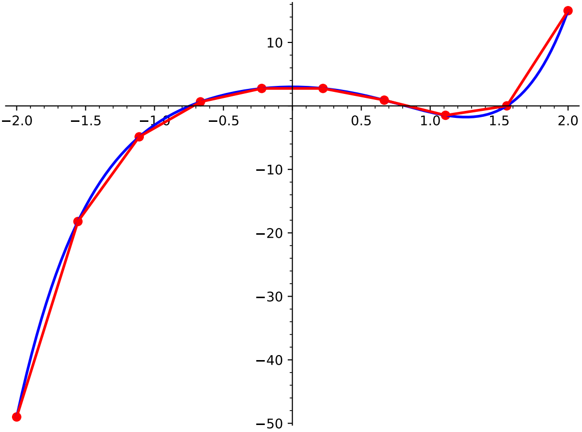
La longitud de estos segmentos es
$52.03844732503075 + 12.165525060596439 = 64.2039723856272.$

Tercera aproximación



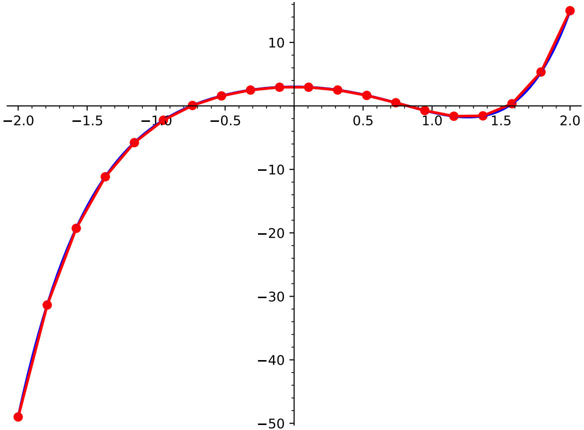
La longitud total de estos segmentos es 72.24795597910665.

Cuarta aproximación



La longitud total de estos segmentos es 73.14946251294188.

Quinta aproximación



La longitud total de estos segmentos es 73.7690728062437.

Integración

- Esta idea - descomponer un problema en una gran cantidad de problemas aproximables por unos más sencillos, y luego sumar las respuestas individuales - es muy antigua: Arquímedes la utiliza para estudiar áreas y perímetros de círculos, entre otras cosas, en el siglo III a.C.
- Problema: es muy laboriosa de calcular con precisión, especialmente en aplicaciones más complicadas, por ejemplo para estudiar la trayectoria de un objeto que va perdiendo masa en función de su movimiento.
- En el siglo XVII, Newton y Leibniz dan con un método para obtener estas sumas de forma directa, sin recurrir a la colección de sumas cada vez más masivas. Este método requiere que, para estudiar una función, se necesite otra: una *antiderivada* de la original.

Primitivas

Definición

Sea f una función. Una *primitiva* o *antiderivada* de f es una función F tal que $F' = f$.

Ejemplos

- Una primitiva de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
- Una primitiva de $f(x) = 5$ es $F(x) = 5x - 2$.
- Una primitiva de $f(x) = \cos(x)$ es $F(x) = \operatorname{sen}(x) + \pi$.

Propiedades

Observaciones

- Una función puede tener múltiples primitivas.
- Si el dominio de una función se compone de distintos intervalos disjuntos, es posible que tenga primitivas distintas en cada uno.
  Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene la primitiva $\log x$ en el dominio $(0, +\infty)$ y la primitiva $\log(-x)$ en el dominio $(-\infty, 0)$.

Propiedad

Si F y G son primitivas de una misma función f en un mismo intervalo, entonces $F - G$ es una constante.

Integral indefinida

Definición

La *integral indefinida* de f es el conjunto de todas las primitivas de f. Se denota por

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C,\ \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Álgebra de integrales indefinidas

Propiedades

Para funciones f, g y número real λ:

- $$\int (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x$$
- $$\int \lambda f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

Método de sustitución

Definición

Si $y = f(x)$ es una función derivable, su *diferencial* es

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Ejemplos

Calcular:

(a) $\displaystyle\int x^2(x^3+4)^7\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$