Matriz asociada a una transformación lineal

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

May 10, 2021

Matriz Representante (Notar: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{m\times n}$)

Sean $(V,+,\cdot)$ y $(W,\oplus,\odot)$ e.v. sobre $\mathbb{K}$, tales que $\dim(V) = n \wedge \dim(W) = m$, $(n\,,m \in \mathbb{N})$. Esto implica la existencia de al menos una base $B_V := \{v_1,\ldots,v_n\}$ de V y de otra base $B_W := \{w_1,\ldots,w_m\}$ para W.

1. $\forall\, v \in V : \exists!\, \alpha_1\,,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j$. Entonces al vector

   $[v]_{B_V} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ se le llama vector de coordenadas de v c/r a la base B_V de V. En forma análoga, se define $\forall\, w \in W : [w]_{B_W} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, el vector de coordenadas de w c/r a la base B_W de W.

2. Dada una transformación lineal $T : V \to W$, se define la matriz representante de T c/r a B_V y B_W, denotada por $[T]_{B_V}^{B_W} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, como

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,n\} : \left([T]_{B_V}^{B_W}\right)_{\bullet j} := [T(v_j)]_{B_W}\,.$$

   Esto nos dice que la columna j de $[T]_{B_V}^{B_W}$ es $[T(v_j)]_{B_W}$. Esto permite expresar

$$[T]_{B_V}^{B_W} = \Big[[T(v_1)]_{B_W} \mid \cdots \mid [T(v_n)]_{B_W}\Big] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\,.$$

Ejemplos

1. Sean $B_1 := \{(1,1), (-1,1))\}$ y $B_2 := \{(1,2)(-2,1)\}$ dos bases (distintas) del espacio vectorial real $V := \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces, considerando $v = (-1,3) \in \mathbb{R}^2$ se deduce que

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Sean $B_1 := \{(1,0), (1,1)\}$ y $B_2 := \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Definamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, T(x,y) := (x+y, x-y, 2x+y)$, el cual resulta ser una transformación lineal ($\textsc{Verificarlo}$!). Tenemos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0) = (1,1,2) = 1 \cdot (1,1,0) + 0 \cdot (0,1,1) + 2 \cdot (0,0,1) \\ T(v_2) &= T(1,1) = (2,0,3) = 2 \cdot (1,1,0) + (-2) \cdot (0,1,1) + 5 \cdot (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [T]_{B_1}^{B_2} = \Big([T(v_1)]_{B_2} \,|\, [T(v_2)]_{B_2} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cómo calcular T(v) a partir de $[T]_{B_V}^{B_W}$?

Sea $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $B_W := \{w_1, ..., w_m\}$ una base de W. Sea $v \in V$, entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j \Leftrightarrow [v]_{B_V} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Así, $T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(v_j)$. Siendo $[T]_{B_V}^{B_W} := (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se tiene

$$\forall j \in \{1, ..., n\} : T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, w_i \quad \left(j\text{-ésima columna de } [T]_{B_V}^{B_W}\right)$$

$$\Rightarrow T(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \alpha_j\right) w_i\right)$$

$$\Rightarrow T(v) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, w_i \,, \qquad \text{donde } \forall \, i \in \{1, ..., m\} : \beta_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \alpha_j \,.$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = [T]_{B_V}^{B_W} \, [v]_{B_V} \,.$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 := \{(1,0),(1,1)\}$ y $B_2 := \{p_1, p_2, p_3\}$ (de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente), donde $\forall\, x \in \mathbb{R} : p_1(x) := 1$, $p_2(x) := x$, $p_3(x) := x^2$, es

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar $T(2,1)$.
2. Determinar $T(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Determinar $\mathrm{Ker}(T)$.
4. Determinar $\mathrm{Im}(T)$.
5. Determinar la imagen de la transformación, pero sin utilizar la definición de $T(x,y)$.
6. Determinar el núcleo de la transformación T, pero sin utilizar $T(x,y)$.

Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con $\dim(V) = n \wedge \dim(W) = m$. Se recuerda que $\mathcal{L}(V,W) := \{T : V \to W \mid T \text{ es t.l.}\}$, y que además $(\mathcal{L}(V,W), +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El siguiente resultado es de suma importancia.

TEOREMA: $\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demostración:

Sean $B_V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_W := \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente.
Definimos ahora la función $\Phi : \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, de modo que $\forall\, T \in \mathcal{L}(V,W) : \Phi(T) := [T]_{B_V}^{B_W}$.

AFIRMACIÓN 1: Φ ES LINEAL

Sean $T, S \in \mathcal{L}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos

$$\Phi(\lambda T + S) = [\lambda T + S]_{B_V}^{B_W} = \Big([(\lambda T + S)(v_1)]_{B_W} \mid \cdots \mid [(\lambda T + S)(v_n)]_{B_W} \Big).$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sean $[T(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ y $[S(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix}$

Por otro lado,

$$(\lambda T + S)(v_j) = \lambda T(v_j) + S(v_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij} + \beta_{ij}) w_i ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}[(\lambda T + S)(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{1j} + \beta_{1j} \\ \vdots \\ \lambda \alpha_{mj} + \beta_{mj} \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{pmatrix} \\ &= \lambda [T(v_j)]_{B_W} + [S(v_j)]_{B_W} .\end{aligned}$$

Así: $\Phi(\lambda T + S) = [\lambda T + S]_{B_V}^{B_W} = \lambda [T]_{B_V}^{B_W} + [S]_{B_V}^{B_W} = \lambda \Phi(T) + \Phi(S)$, de donde se concluye que Φ es una transformación lineal.

Afirmación 2: Φ es inyectiva

Sea $T \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Entonces $\Phi(T) = [T]_{B_V}^{B_W} = \Theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sea $v \in V$. Invocando la propiedad vista hace poco:

$$[T(v)]_{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = \Theta \in \mathbb{K}^{m\times 1} \Rightarrow T(v) = \Theta_W .$$

En vista que $v \in V$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $T = \Theta_{\mathcal{L}(V,W)}$, y por tanto se concluye que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\Theta_{\mathcal{L}(V,W)}\}$, i.e. Φ es inyectiva.

Afirmación 3: Φ es sobreyectiva

Sea $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ Por definir una transformación lineal $T : V \to W$ de modo que

$$\forall\, j \in \{1, ..., n\} \,:\, [T(v_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall\, j \in \{1, ..., n\} \,:\, T(v_j) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i\,,$$

lo cual implicaría que $[T]_{B_V}^{B_W} = A$. Se define T de tal modo que

$$\forall\, v \in V \,:\, T(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, T(v_j), \text{ donde } [v]_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

A partir de aquí, no es difícil probar que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (Verificarlo!). Esto permite concluir que $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \,:\, \exists\, T \in \mathcal{L}(V, W) \,:\, \Phi(T) = A$, i.e. Φ es sobreyectiva.

Conclusión: Φ es un isomorfismo.

Corolario: $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = m \times n$.

Notación: $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$, se le conoce como el espacio de los endomorfismos.

Proposición: Sean U, V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y $B_U := \{u_1, ..., u_p\}$, $B_V := \{v_1, ..., v_q\}$, $B_W := \{w_1, ..., w_r\}$ bases de U, V, W, respectivamente. Sean además $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces
a) $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$ $\wedge$ *b*) $[S \circ T]_{B_U}^{B_W} = [S]_{B_V}^{B_W} [T]_{B_U}^{B_V}$.

Demostración b)

Sean $[S \circ T]_{B_U}^{B_W} := (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times p}(\mathbb{K})$ (existe gracias a la parte a)), $[S]_{B_V}^{B_W} := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times q}(\mathbb{K})$, y $[T]_{B_U}^{B_V} := (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$. Por definición de matriz asociada, se tiene

$$\forall j \in \{1, ..., p\} : [(S \circ T)(u_j)]_{B_W} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\} : (S \circ T)(u_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj}\, w_k \,.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, ..., p\} \,:\, (S \circ T)(u_j) = S(T(u_j)) &= S\left(\sum_{i=1}^{q} b_{ij} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q} b_{ij}\, S(v_i) = \sum_{i=1}^{q} b_{ij} \sum_{k=1}^{r} a_{ki}\, w_k \\ &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} b_{ij}\, a_{ki}\, w_k = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} a_{ki}\, b_{ij}\, w_k \,. \end{aligned}$$

En vista que la c.l. de un vector c/r a una base, es ÚNICA, se desprende que

$$\forall\, k \in \{1, ..., r\} \;:\; \forall\, j \in \{1, ..., p\} \;:\; c_{kj} \,=\, \sum_{i=1}^{q} a_{ki}\, b_{ij} \;\Rightarrow\; [S \,\circ\, T]_{B_V}^{B_W} \,=\, [S]_{B_V}^{B_W}\, [T]_{B_U}^{B_V}\,.$$

Corolario 1: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, y consideremos la transformación identidad $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$, definido $\forall\, v \in V \,:\, \tilde{I}(v) = v$. Entonces $\left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corolario 2: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B_V := \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un automorfismo, entonces se tiene que $[T^{-1}]_{B_V}^{B_V} = ([T]_{B_V}^{B_V})^{-1}$.

Demostración

Recordar que en vista que T es un automorfismo, $\exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(V)$, y es tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \tilde{I}$ (transformación identidad). Aplicando la proposición anterior, se tiene

$$[T^{-1}]_{B_V}^{B_V}\, [T]_{B_V}^{B_V} \,=\, [T^{-1} \,\circ\, T]_{B_V}^{B_V} \,=\, \left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} \,=\, I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$[T]_{B_V}^{B_V}\, [T^{-1}]_{B_V}^{B_V} \,=\, [T \,\circ\, T^{-1}]_{B_V}^{B_V} \,=\, \left[\tilde{I}\right]_{B_V}^{B_V} \,=\, I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,.$$

Luego, por definición de matriz inversa, se concluye que $[T^{-1}]_{B_V}^{B_V} = ([T]_{B_V}^{B_V})^{-1}$.

Corolario 3: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y B_V una base de V. Entonces, para cualquier $T \in \mathcal{L}(V)$ se cumple $\forall\, \ell \in \mathbb{N} \,:\, [T^{\ell}]_{B_V}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_V}\right)^{\ell}$. Si además, T es un automorfismo, entonces $\forall\, \ell \in \mathbb{Z} \,:\, [T^{\ell}]_{B_V}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_V}\right)^{\ell}$.

Matriz de paso o cambio de base

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $B_1 := \{v_1, ..., v_n\}$, $B_2 := \{w_1, ..., w_n\}$ dos bases de V. Se define la transformación lineal $\tilde{I} : (V, B_1) \to (V, B_2)$ tal que $\forall\, v \in V : \tilde{I}(v) := v$. Se define la matriz de paso o de cambio de base de B_1 a B_2, denotada por $P_{B_1,B_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o $P_{B_1}^{B_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y definida como

$$P_{B_1}^{B_2} := P_{B_1,B_2} := \left[\tilde{I}\right]_{B_1}^{B_2} = \left([\tilde{I}(v_1)]_{B_2} \,|\, \cdots \,|\, [\tilde{I}(v_n)]_{B_2}\right) = ([v_1]_{B_2} \,|\, \cdots \,|\, [v_n]_{B_2}) \, .$$

Como resultado, se cumple

$$\forall\, v \in V \; : \; P_{B_1,B_2}\,[v]_{B_1} = [v]_{B_2} \, .$$

Observación: P_{B_1,B_2} es invertible (no singular), y $(P_{B_1,B_2})^{-1} = P_{B_2,B_1}$.

Ejemplo: Sean $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y
$B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Determine la matriz de paso de B_1 a B_2.
2. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es el vector de coordenadas de una matrix $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respecto de la base B_1, determine $[A]_{B_2}$, sin calcular A.
3. Determine la matriz de paso de B_2 a B_1.

Propiedad importante: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tales que $\forall\, w \in \mathbb{K}^{n\times 1} : A\,w = B\,w$. Entonces $A = B$.

Demostración: Recordamos que la matriz identidad $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puede expresarse como $I_n = \big(e_1 \,|\, \dots \,|\, e_n\big)$, donde $e_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ es el j-ésimo vector canónico de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. De esta manera, tenemos:

$$A = A\,I_n = \big(A\,e_1 \,|\, \dots \,|\, A\,e_n\big) = \big(B\,e_1 \,|\, \dots \,|\, B\,e_n\big) = B\,I_n = B\,,$$

y así se concluye el resultado.

Resultado importante

Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, B_V , $\widetilde{B}_V$ bases de V, y B_W , $\widetilde{B}_W$ bases de W. Sea también $T \in \mathcal{L}(V, W)$. El objetivo es relacionar $[T]_{B_V}^{B_W}$ y $[T]_{\widetilde{B}_V}^{\widetilde{B}_W}$. Para esto, se recuerda que $\forall\, v \in V$:

$$
\begin{aligned}
[T(v)]_{\widetilde{B}_W} &= [T]_{\widetilde{B}_V}^{\widetilde{B}_W} [v]_{\widetilde{B}_V} . && (1)\\
[T(v)]_{\widetilde{B}_W} &= P_{B_W}^{\widetilde{B}_W} [T(v)]_{B_W} . && (2)\\
[v]_{\widetilde{B}_V} &= P_{B_V}^{\widetilde{B}_V} [v]_{B_V} . && (3)\\
[T(v)]_{B_W} &= [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} . && (4)
\end{aligned}
$$

De (4) en (2): $[T(v)]_{\widetilde{B}_W} = P_{B_W}^{\widetilde{B}_W} [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V}$.
De (3) en (1): $[T(v)]_{\widetilde{B}_W} = [T]_{\widetilde{B}_V}^{\widetilde{B}_W} P_{B_V}^{\widetilde{B}_V} [v]_{B_V}$.
De las dos últimas igualdades, se desprende:
$\forall\, [v]_{B_V} \in \mathbb{K}^{\dim(V)\times 1}$: $[T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = \left(\left(P_{B_W}^{\widetilde{B}_W} \right)^{-1} [T]_{\widetilde{B}_V}^{\widetilde{B}_W} P_{B_V}^{\widetilde{B}_V} \right) [v]_{B_V}$. Luego, aplicando la propiedad importante previa, se concluye que $[T]_{B_V}^{B_W} = \left(P_{B_W}^{\widetilde{B}_W} \right)^{-1} [T]_{\widetilde{B}_V}^{\widetilde{B}_W} P_{B_V}^{\widetilde{B}_V}$.