

Cálculo II (527150)

Clase 22: Más criterios de convergencia

Criterio de comparación en el límite

Criterio

Sean a_n , b_n dos sucesiones de números positivos, tales que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ es finito y positivo.

$\sum a_n$ es convergente si y sólo si $\sum b_n$ es convergente.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

▶ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 2n^2 + 1}$

▶ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n - 2n}$

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 5n - 1}}$

Criterio de comparación en el límite, versión parcial

Criterio

Sean a_n , b_n dos sucesiones de números positivos, tales que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ es cero.

Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Criterio de Leibniz para series alternadas

Criterio

Sea a_n una sucesión decreciente de números positivos tal que $\lim a_n = 0$.

La serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

▶ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{3n-5}$

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 1}$

Convergencia absoluta y convergencia condicional

Definiciones

- ▶ Una serie $\sum a_n$ se dice *absolutamente convergente* si $\sum |a_n|$ es convergente.
- ▶ Una serie se dice *condicionalmente convergente* si es convergente pero no absolutamente convergente.

Propiedad

Una serie absolutamente convergente es convergente.

Ejemplo

La serie armónica alternante es condicionalmente convergente.

Ejemplo

Estudiar la convergencia de $\sum \frac{\cos(n)}{n^3}$.

Criterios del cociente y de la raíz para convergencia absoluta

Criterio del cociente

Sea $L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

- ▶ Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
- ▶ Si $L > 1$ o diverge al infinito, $\sum a_n$ diverge.

Criterio de la raíz

Sea $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

- ▶ Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
- ▶ Si $L > 1$ o diverge al infinito, $\sum a_n$ diverge.

Ejemplos

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

▶
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

▶
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$$