UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION (521218)

Problema 1. Determine la ecuación de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas definidas por

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+k}{2}\,,$$

siendo $k \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.

Desarrollo:

Primero, deducimos la EDO (de primer orden) que gobierna a la familia de curvas dadas. Derivando (implícitamente) respecto de x, y reduciendo adecuadamente, se tiene

$$\frac{y'}{2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2y}{x^2-2x+y^2}\,.$$

De esta manera, la EDO (de primer orden) que gobierna a la familia de trayectorias ortogonales buscada está dado por

$$y' = \frac{x^2-2x+y^2}{2y} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{2}y = \frac{x^2-2x}{2}y^{-1}\,,$$

la cual es de tipo Bernoulli.

Multiplicando por $2y$ se tiene la EDO

$$2yy' - y^2 = x^2 - 2x\,. \tag{1}$$

Haciendo el cambio $u = y^2$, de donde $u' = 2yy'$, (1) se convierte en

$$u' - u = x^2 - 2x\,,$$

la cual es una EDO lineal de primer orden, con factor integrante $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int dx} = \mathrm{e}^{-x}$, con lo cual tenemos

$$\Big(\mathrm{e}^{-x}u(x)\Big)' = (x^2-2x)\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-x}u(x) = \int (x^2-2x)\mathrm{e}^{-x}\,dx + C\,,$$

siendo C una constante real arbitraria.

Cálculo de la integral indefinida: integrando por partes dos veces se tiene

$$\int (x^2-2x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = -(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x} + \int (2x-2)\mathrm{e}^{-x} = -(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x-2)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}$$

con lo cual se deduce que

$$\mathrm{e}^{-x}u(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x} + C \quad \Rightarrow \quad u(x) = -x^2 + C\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = C\mathrm{e}^x \, , C \in \mathbb{R} \, ,$$

es la familia de trayectorias ortogonales buscada.

PROBLEMA 2.

En un sistema masa-resorte de masa 0.5 Kg, se sabe que la función de entrada (o de forzamiento) $F(t) = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(wt)$ tiene una frecuencia de $\frac{1}{\pi}$ Hz. Si el sistema parte en reposo desde el equilibrio, y suponiendo que no hay fricción, se pide:

(*i*) [**8 puntos**] Determinar w y la constante k del resorte, para que el sistema manifieste resonancia.

(*ii*) [**7 puntos**] Usando **aniquiladores**, resuelva el PVI asociado al sistema anterior.

Desarrollo:

(*i*) La Edo que modela el problema , es:

$$\frac{1}{2}y''(t) \; + \; ky(t) \; = \; \frac{1}{4}\mathrm{sen}(wt) \, .$$

Se sabe que el sistema manifiesta resonancia si $w \; = \; \sqrt{2k}$; siendo la frecuencia $f \; = \; \frac{w}{2\pi}$, debe tenerse que $\frac{w}{2\pi} \; = \; \frac{1}{\pi}$, de donde $w \; = \; 2$. Sigue que $k \; = \; 2$.

(*ii*) El PVI a resolver, es

$$y''(t) \; + \; 4y(t) \; = \; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t) \, . \tag{2}$$

con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

La solución general del problema homogéneo asociado, es:

$$y(t) = A\cos(2t) + B\mathrm{sen}(2t).$$

Así, usando aniquiladores se ve que una solución particular del problema tiene la forma

$$y_p(t) = At\cos(2t) + Bt\mathrm{sen}(2t).$$

Derivando dos veces $y_p(t)$ e introduciendo este valor en (2), al sumar con $4\,y_p(t)$, obtenemos que :

$$-4A\mathrm{sen}(2t) + 4B\cos(2t) \; = \; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t),$$

de donde $A \; = \; -\frac{1}{8}$, $B \; = \; 0$; por tanto

$$y_p(t) \; = \; -\frac{1}{8}t\cos(2t).$$

Se obtiene que la solución general del problema, es

$$y(t) \;=\; y_h(t) \;+\; y_p(t) \;=\; A\cos(2t) \;+\; B\,\mathrm{sen}(2t) \;-\; \frac{1}{8}\,t\cos(2t);$$

Ahora de $y(0) = 0$, sigue que $A = 0$, de donde

$$y(t) \;=\; B\,\mathrm{sen}(2t) \;-\; \frac{1}{8}t\cos(2t);$$

y de $y'(0) = 0$ sigue que $B \;=\; \frac{1}{16}$.
Finalmente, la solución del PVI, es:

$$y(t) \;=\; \frac{1}{16}\mathrm{sen}(2t) \;-\; \frac{1}{8}\,t\cos(2t).$$

PROBLEMA 3. Resolver el PVI: $y' - y = g(t)$, con $y(0) = 2$ y

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ t & 1 \leq t \leq 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

Desarrollo:

$$g(t) = 1 + (t-1)H(t-1) - (t-2)H(t-2)$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) - \mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[1](s) + \mathcal{L}[(t-1)H(t-1)](s) - \mathcal{L}[(t-2)H(t-2)](s)$$

$$(s-1)\mathcal{L}[y(t)](s) - 2 = \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2} - \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2(s-1)} - \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2(s-1)} + \frac{2}{(s-1)}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2(s-1)}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2(s-1)}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right](t)$$

$$\Longrightarrow y(t) = 1 * \mathrm{e}^t + H(t-1)\Big[t * \mathrm{e}^t\Big]_{(t-1)} - H(t-2)\Big[t * \mathrm{e}^t\Big]_{(t-2)} + 2\mathrm{e}^t$$

$$y(t) = \mathrm{e}^t - 1 + H(t-1)(\mathrm{e}^{t-1} - (t-1) - 1) - H(t-2)(\mathrm{e}^{t-2} - (t-2) - 1) + 2\mathrm{e}^t$$

$$y(t) = 3\mathrm{e}^t - 1 + (\mathrm{e}^{t-1} - t)H(t-1) - (\mathrm{e}^{t-2} - t + 1)H(t-2)$$

PROBLEMA 4. Usando valores propios determine la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + t - y(t) \\ y'(t) = \mathrm{e}^t + 2y(t) \end{cases}$$

Desarrollo:

Escribimos el sistema como $X'(t) = AX(t) + B(t)$, donde

$X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $B(t) := \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como $\boxed{X(t) = X_H(t) + X_P(t)}$, donde $X_H(t)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $X_P(t)$ es una solución particular del sistema original.

a) **Cálculo de** $X_H(t)$: calculando los valores propios de A, éstos son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$, es decir,

$\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle \{(1,0)^T\} \rangle \,, \quad S_{\lambda_2} = \langle \{(1,-1)^T\} \rangle \,.$$

Por lo tanto la base del espacio solución está conformado por

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} , \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} .$$

De esta forma, la solución del sistema homogéneo está dado por

$$X_H(t) = A\, X_1(t) + B\, X_2(t) = A \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} ,$$

con A y B constantes reales arbitrarias.

b) **Cálculo de** $X_P(t)$: usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $\boxed{X_P(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t)}$, donde $C_1(t)$ y $C_2(t)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} .$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $C_1'(t) = t\mathrm{e}^{-t} + 1$ y $C_2'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$; y por tanto $C_1(t) = -\mathrm{e}^{-t}(t+1) + t$ y $C_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Así

$$X_P(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 - t + t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} .$$

Finalmente, la solución general del sistema dado, es:

$$X(t) \,=\, A \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \,+\, \begin{pmatrix} -1 \,-\, t \,+\, te^t \,+\, e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

siendo A y B constantes reales arbitrarias.

RBP/FLG/HMM/JMS//rbp//jms.
30/06/2008.