UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

# Práctica N°12

Álgebra 2 - 525150

1. Considere el espacio vectorial $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, provisto del siguiente producto interior

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R},\ \langle f, g\rangle = 2f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

Sean $p_1, p_2, f \in V$, definidos por:

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = 1$$

con $x \in \mathbb{R}$. Además, se define el subespacio $S = \langle \{p_1, p_2\} \rangle$.

   (a) Determinar el sistema de ecuaciones lineales que permite obtener la $\mathrm{Proy}_S(f)$.
   (b) Calcular el valor de la distancia entre $f$ y $S$.

2. Demostrar las siguientes proposiciones:

   (a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, un valor propio de $A$, entonces el conjunto

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)x = \theta\}$$

   es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$

   (b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ es invertible, entonces $\lambda \in \sigma(A)$ ssi $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$
   (c) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ son valores propios de $A$, entonces $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, ..., \alpha\lambda_k$ también son valores propios de $A$, donde $\alpha \in \mathbb{K}$.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinar el polinomio característico de $A$.
   (b) Calcular los valores propios de $A$ y sus respectivas multiplicidades.