Introducción.

- **Integral de Riemann.**
- **Relaciones entre derivación e integración Riemann.**
- **Integral de Lebesgue.**

Integral de Riemann.

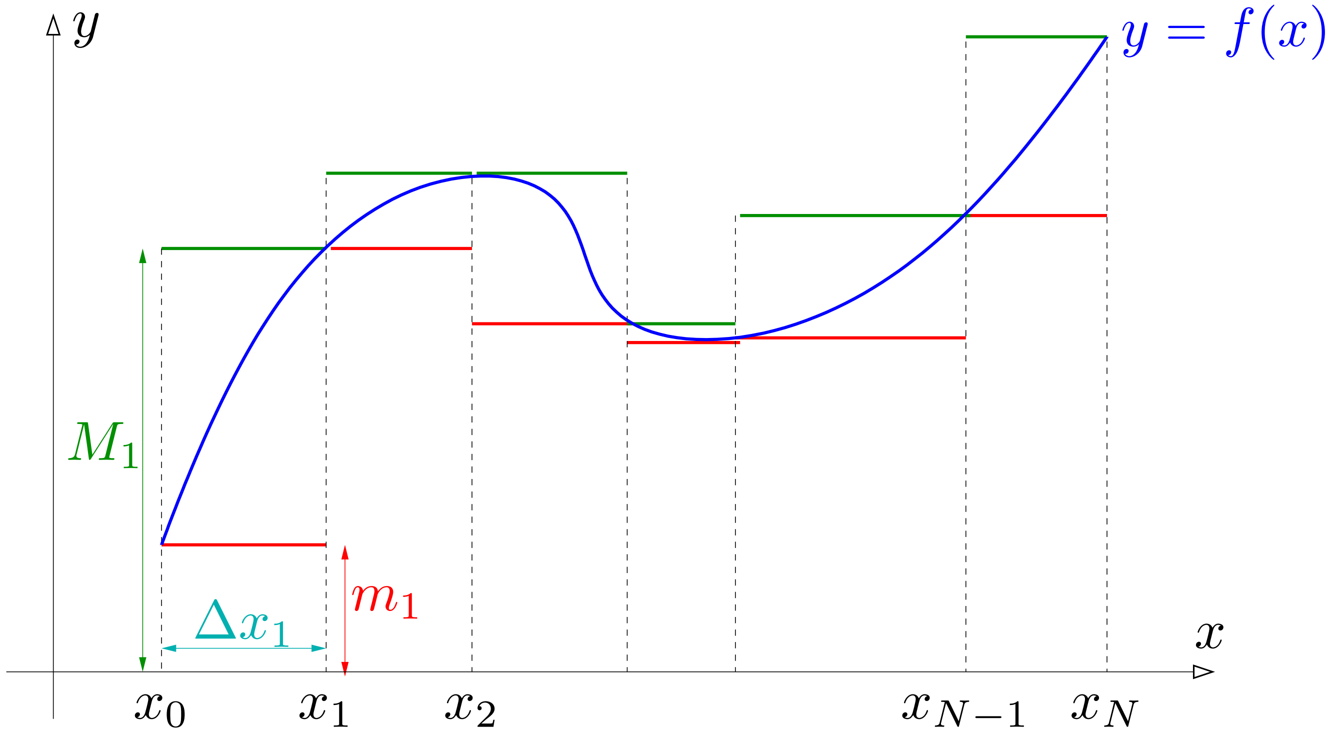
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada.

Sea $P := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ una **partición de** $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Sean $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}$, las longitudes de $[x_{n-1}, x_n]$, $\quad n = 1, \dots, N.$

Sean $\boxed{m_n := \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)}$ y $\boxed{M_n := \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x).}$



Repetimos: sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada.

Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ una partición de $[a,b]$:

Sean $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}$, $n = 1, \ldots, N$.

Sean $m_n := \inf\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$ y $M_n := \sup\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$.

Def.: Las **sumas inferior y superior de f en P** son, respectivamente,

$$L(P,f) := \sum_{n=1}^{N} m_n \Delta x_n \qquad \text{y} \qquad U(P,f) := \sum_{n=1}^{N} M_n \Delta x_n.$$

Las **integrales inferior y superior de f en $[a,b]$**, son, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_P L(P,f) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} f := \inf_P U(P,f).$$

La función f es **integrable Riemann** en $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

En tal caso, la **integral Riemann de f en $[a,b]$** es $\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

- A veces usaremos la notación $\int_a^b f(x)\,dx$ para la integral Riemann de f en $[a,b]$, a fin de resaltar la variable respecto a la cuál se integra.

- Cuando las integrales inferior y superior de f en $[a,b]$ no coinciden, **la integral Riemann de f no existe.** En cambio, las integrales inferior y superior existen siempre. En efecto, si f es acotada, sean $m, M \in \mathbb{R}$: $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$. Entonces, $m \le m_n \le M_n \le M \implies$

$$m(b-a) = \sum_{n=1}^{N} m\Delta x_n \le \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \Delta x_n}_{L(P,f)}$$

$$\le \underbrace{\sum_{n=1}^{N} M_n \Delta x_n}_{U(P,f)} \le \sum_{n=1}^{N} M\Delta x_n = M(b-a)$$

$\implies$ las sumas inferiores y superiores están acotadas $\implies$ tienen supremo e ínfimo $\implies$ las integrales inferior y superior, están bien definidas.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada. Entonces $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

Teor.: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada. Entonces, f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$.

Teor.: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

Teor.: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

Ejemplo: No todas las funciones acotadas son integrables Riemann.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$.

Entonces, $\boxed{m_n := \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) = 0}$ y $\boxed{M_n := \sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) = 1}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L(P,f) = \sum_{n=1}^{N} 0\, \Delta x_n = 0 \quad \forall P, \\ U(P,f) = \sum_{n=1}^{N} 1\, \Delta x_n = b-a \quad \forall P, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{\int_a^b} f = 0, \\ \overline{\int_a^b} f = b-a \end{cases}$$

$\Longrightarrow \underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f \Longrightarrow f$ **no es integrable Riemann.**

Teor.: Sean $f_1, \; f_2$ y f integrables Riemann en $[a,b]$. Entonces:

a) $(f_1 + f_2)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2;$$

b) $\forall c \in \mathbb{R}, \; (cf)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f;$$

c) si $f_1(x) \leq f_2(x) \;\; \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2;$$

d) $\forall c \in (a,b), \; f$ es integrable Riemann en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f;$$

e) $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

Relaciones entre derivación e integración Riemann.

Teor. [Fundamental del Cálculo (T.F.C.)]: Sea f integrable Riemann en $[a, b]$. Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Entonces, F es continua en $[a, b]$.

Además, si f es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

- A la funcion $F(x) := \displaystyle\int_a^x f$ se la denomina la **primitiva de** f.

Corol.: Si una función es continua, su primitiva es derivable y la derivada de la primitiva es la propia función.

Teor. [Regla de Barrow]: Sean f integrable Riemann en $[a,b]$ y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable y tal que $F'(x)=f(x)$. Entonces.

$$\int_a^b f = F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a).$$

- A una funcion F tal que $F'=f$ se la denomina una **antiderivada de** f.

  De acuerdo al teorema anterior, para calcular la integral de una función en un intervalo, basta encontrar una antiderivada y evaluarla en los extremos del intervalo.

Teor. [integración por partes]: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivables. Si f' y g' son integrables Riemann en $[a,b]$, entonces $(f'g)$ y (fg') son integrables Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f'g) = -\int_a^b (fg') + (fg)\Big|_a^b.$$

Teor. [regla de sustiución o cambio de variable]: Sea $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ biyección creciente y derivable, tal que φ' es integrable en $[\alpha, \beta]$. Entonces, para toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann, se tiene que $(f \circ \varphi)\, \varphi'$ es integrable Riemann en $[\alpha, \beta]$ y

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\, \varphi'.$$

- Vale un teorema análogo (salvo signo) si φ es una biyección decreciente.

- La forma clásica en la que se suele enunciar esta regla es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Integral de Lebesgue.

Deficiencias de la Integral Riemann:

- La integral Riemann se define sólo para **funciones acotadas en dominios acotados.**
- Las integrales impropias **no son integrales Riemann**, sino límites de integrales Riemann, lo que a veces dificulta su análisis o su cálculo.
- Hay funciones sencillas que **no son integrables Riemann.**
- Sólo sabemos pasar al límite dentro de una integral Riemann si hay **convergencia uniforme.** Por ejemplo,

$$\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{n} 0 \quad \forall x > 0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow{n} 0,$$

pero intenten demostrarlo...

Alternativa: la integral de Lebesgue.

Recordemos algunas propiedades que hemos visto de la integral de Riemann.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, acotada.

- La integral Riemann $\int_a^b f$, cuando existe, es el **supremo de las sumas inferiores** de f sobre todas las particiones P del intervalo $[a,b]$:

$$\sup_P L(P,f).$$

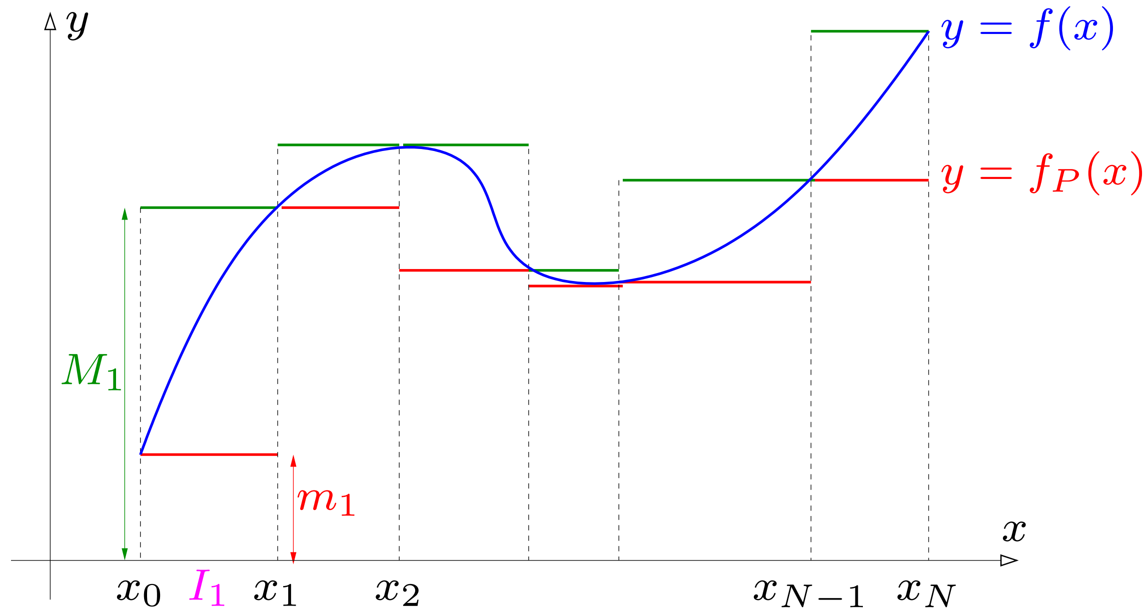
- Las sumas inferiores son las integrales de **funciones escalonadas** menores o iguales a f.

- Las funciones escalonadas son combinaciones lineales de **funciones características** de intervalos:

$$\chi_I(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I, \\ 0, & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

En efecto. Sea P **partición de** $[a,b]$**:** $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

Sean $\quad I_n := [x_{n-1}, x_n], \qquad m_n := \inf_{x \in I_n} f(x), \qquad n = 1, \ldots, N.$



La suma inferior de f en la partición P es $L(P,f) := \sum_{n=1}^{N} m_n \operatorname{long}(I_n)$.

Sea f_P la función escalonada definida por $f_P := \sum_{n=1}^{N} m_n \, \chi_{I_n}$.

Entonces, $L(P,f) = \int_a^b f_P$, $\quad$ de modo que $\boxed{\int_a^b f = \sup_P \int_a^b f_P.}$

Por lo tanto, si f es integrable en $[a,b]$, su integral es el supremo de las integrales de las funciones escalonadas menores o iguales a f.

- La integral de Lebesgue se basa en considerar el supremo sobre funciones más generales que las escalonadas, las así llamadas **funciones simples medibles:**

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \, \chi_{E_n},$$

  donde E_n no son en general intervalos (como en el caso de las funciones escalonadas), sino conjuntos más generales, que habrá que definir y que llamaremos **conjuntos medibles.**

- En la definición, en lugar de la longitud de I_n, se usará la **medida de E_n,** que es una generalización de la noción de longitud a conjuntos medibles y que también habrá que definir.

- Este cambio de intervalos I_n a conjuntos medibles E_n conduce a una nueva definición de integral: **la integral de Lebesgue,** que resulta mucho más rica que la integral Riemann.

- La integral de Lebesgue es una generalización de la integral Riemann. Si una función es integrable Riemann, también es integrable Lebesgue y, en tal caso, ambas integrales coinciden.

Algunas ventajas de la integral de Lebesgue:

- La mayoría de las integrales Riemann impropias son integrales de Lebesgue, lo que permite utilizar las herramientas que veremos en el curso para estas integrales.
- Muchas funciones sencillas que no sn integrables Riemann son integrables Lebesgue. Por ejemplo, la característica de los racionales: $\chi_{\mathbb{Q}}$.
- La propiedad más importante es que para la integral de Lebesgue veremos dos teoremas:
  - el Teorema de la Convergencia Monótona (T.C.M.) y
  - el Teorema de la Convergencia Dominada (T.C.D.)

  Estos dos teoremas de paso al límite dentro de la integral, son de aplicación muy sencilla y permiten demostrar bajo condiciones fáciles de chequear que

$$f_n \xrightarrow{n} f \quad \Longrightarrow \quad \int f_n \xrightarrow{n} \int f.$$