Producto de Convolución

Carlos M. Mora

Producto de Convolución

Sean $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes. Llamamos convolución de f y g a la aplicación:

$$(f, g) \xmapsto{\;*\;} f * g\,(t) := \int_0^t f\,(t-s)\; g\,(s)\; ds \qquad\qquad \forall t \geq 0.$$

Ejemplo: $f\,(t) = t^2$, $g\,(t) = t$

$$f * g\,(t) = \int_0^t (t-s)^2\, s\, ds$$

$$f * g\,(t) = \int_0^t \left(t^2 - 2\,t\,s + s^2\right) s\, ds = \int_0^t \left(t^2\,s - 2\,t\,s^2 + s^3\right)\, ds$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2\, s^2 - \frac{2}{3}\,t\,s^3 + \frac{1}{4} s^4\right)\Bigg|_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{12} t^4$$

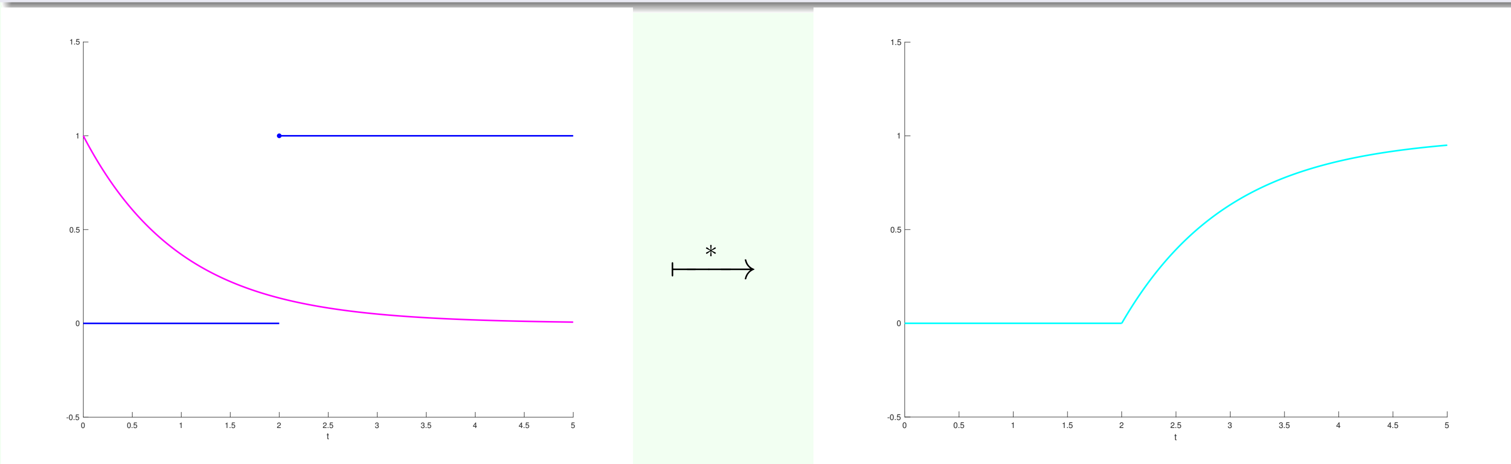
$$t^2 * t = \frac{1}{12} t^4$$

Ejemplo

Encontrar $U_a(t) * exp(-t)$, donde $a > 0$ y $\mathcal{U}_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$.

$$U_a(t) * e^{-t} = e^{-t} * U_a(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}\, U_a(s)\, ds = \int_{min\{a,t\}}^t e^{-(t-s)}\, ds = \int_0^{t-min\{a,t\}} e^{-u}\, du$$

$$U_a(t) * e^{-t} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ 1 - e^{-(t-a)} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Producto de Convolución

Sean $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes. Llamamos convolución de f y g a la aplicación:

$$(f, g) \stackrel{*}{\longmapsto} f * g\,(t) := \int_0^t f\,(t-s)\; g\,(s)\; ds \qquad\qquad \forall t \geq 0.$$

Ejemplo

$$sen\,(a\,t) * sen\,(a\,t) = \int_0^t sen\,(a\,(t-s))\; sen\,(a\,s)\; ds = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos\,(a\,t - 2a\,s) - \cos\,(a\,t))\; ds$$

pues $sen\,(\beta)\, sen\,(\gamma) = \frac{1}{2}\,(\cos\,(\beta-\gamma) - \cos\,(\beta+\gamma))$.

$$sen\,(a\,t) * sen\,(a\,t) = \frac{1}{4a}\int_{-at}^{at} \cos\,(u)\; du - \frac{t}{2}\cos\,(a\,t) = \frac{1}{2a} sen\,(a\,t) - \frac{t}{2}\cos\,(a\,t)$$

Propiedad

Considere las funciones $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de orden exponencial α. Entonces

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s)$$

para todo $s \in Dom(f) \bigcap Dom(g)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f * g(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-st} f(t-u)\, g(u)\, du\, dt = \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-st} f(t-u)\, g(u)\, dt\, du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{+\infty} g(u) \int_u^{+\infty} e^{-st} f(t-u)\, dt\, du \\
&= \int_0^{+\infty} g(u) \int_0^{+\infty} e^{-s(w+u)} f(w)\, dw\, du = \int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-su} \int_0^{+\infty} e^{-sw} f(w)\, dw\, du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-sw} f(w)\, dw \cdot \int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-su}\, du
\end{aligned}$$

Propiedad

Considere las funciones $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de orden exponencial α. Entonces

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s)$$

para todo $s \in Dom(f) \bigcap Dom(g)$.

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\, du\right)(s)$ con $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de orden exponencial α.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\, du\right)(s) &= \mathcal{L}\left(\int_0^t \mathbf{1} \cdot f(u)\, du\right)(s) = \mathcal{L}(\mathbf{1} * f)(s) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{1})(s) \cdot \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)(s) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}(F)(u)\, du$$

Asuma que $\boxed{F(s) = \mathcal{L}(f)(s)}$ y $\boxed{G(s) = \mathcal{L}(g)(s)}$, donde $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ son de orden exponencial α. Como $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s)$,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)\,G(s))(t) = f * g(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) * \mathcal{L}^{-1}(G(s))(t).$$

Ejemplo

Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t)$ con $a > 0$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)(t) = \frac{1}{a^2} sen(a\,t) * sen(a\,t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t) = \frac{1}{a^3} sen(a\,t) - \frac{1}{a^2}\frac{t}{2}\cos(a\,t) = \frac{1}{2a^3}\left(sen(a\,t) - a\,t\cos(a\,t)\right)$$

Ejemplo

Encuentre la función $y\left(x\right)$ tal que

$$y\left(x\right)=x^{3}+\int_{0}^{x} sen\left(x-t\right)y\left(t\right)\,dt$$

$$\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\mathcal{L}\left(x^{3}+\int_{0}^{x} sen\left(x-t\right)y\left(t\right)\,dt\right)\left(s\right)$$

$$\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\mathcal{L}\left(x^{3}\right)\left(s\right)+\mathcal{L}\left(sen\left(x\right)*y\left(x\right)\right)\left(s\right)$$

$$\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{3!}{s^{4}}+\mathcal{L}\left(sen\left(x\right)\right)\left(s\right)\,\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)$$

$$\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{6}{s^{4}}+\frac{1}{1+s^{2}}\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)$$

$$s^{2}\,\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right)=\frac{6\left(1+s^{2}\right)}{s^{4}}$$

Ejemplo

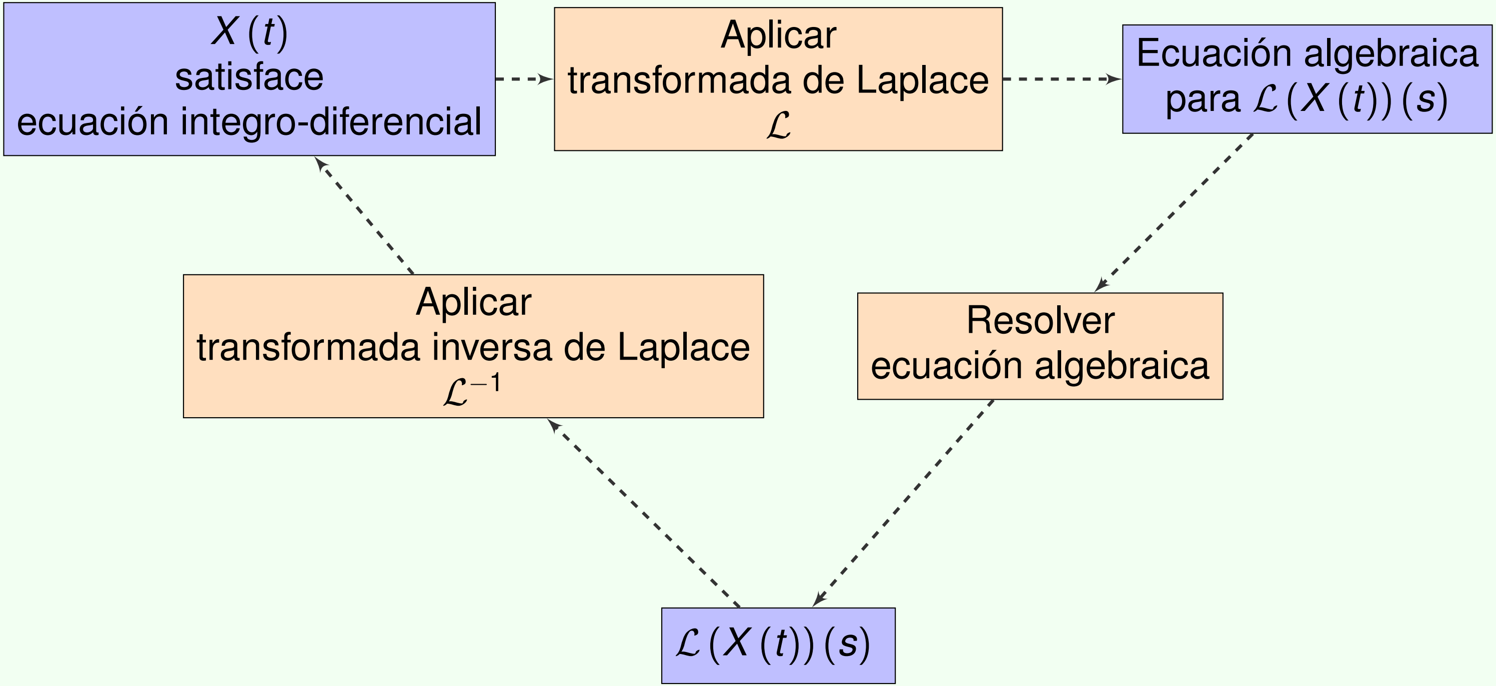
Encuentre la función $y\left(x\right)$ tal que: $y\left(x\right) = x^3 + \int_0^x sen\left(x-t\right)y\left(t\right)\,dt$

$$\mathcal{L}\left(y\left(x\right)\right)\left(s\right) = 6\,\frac{1}{s^6} + 6\,\frac{1}{s^4}$$

$$y\left(x\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(6\,\frac{1}{s^6} + 6\,\frac{1}{s^4}\right)\left(x\right) = 6\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\right)\left(x\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4}\right)\left(x\right)$$

$$y\left(x\right) = \frac{1}{20}x^5 + x^3$$

Método


$X(t)$
satisface
ecuación integro-diferencial
Aplicar
transformada de Laplace
$\mathcal{L}$
Ecuación algebraica
para $\mathcal{L}(X(t))(s)$
Resolver
ecuación algebraica
$\mathcal{L}(X(t))(s)$
Aplicar
transformada inversa de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$

Producto de Convolución

Sean $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes. Llamamos convolución de f y g a la aplicación:

$$(f, g) \stackrel{*}{\longmapsto} f * g\,(t) := \int_0^t f\,(t-s)\; g\,(s)\; ds \qquad\qquad \forall t \geq 0.$$

Propiedades

- $f * g = g * f$
- $f * 0 = 0$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$