

DERECHO DE AUTOR. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

## ECUACIONES DIFERENCIALES

### ORDINARIAS

Versión 2018

**AXEL OSSES**

Centro de Modelamiento Matemático  
Departamento de Ingeniería Matemática  
*axosses@dim.uchile.cl*

## DERECHO DE AUTOR. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN

Se concede permiso para imprimir o almacenar una única copia de este documento. Salvo por las excepciones más abajo señaladas, este permiso no autoriza fotocopiar o reproducir copias para otro uso que no sea el personal, o distribuir o dar acceso a copias electrónicas de este documento sin permiso previo por escrito del Director del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile.

Las excepciones al permiso por escrito del párrafo anterior son: (1) Las copias electrónicas disponibles bajo el dominio [uchile.cl](http://uchile.cl), (2) Las copias distribuidas por el cuerpo docente de la FCFM en el ejercicio de las funciones que le son propias.

Cualquier reproducción parcial de este documento debe hacer referencia a su fuente de origen.

Este documento fue financiado a través de los recursos asignados por el DIM para la realización de actividades docentes que le son propias.

## DERECHO DE AUTOR. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN

El texto original fue elaborado por el autor en el periodo 2002-2010, fue revisado por Juan Peypouquet el 2008 quien corrigió y agregó varias secciones y ejercicios a lo largo del texto y luego en 2010 por el propio autor. Este texto y el material docente de ejercicios que lo acompaña recibió aportes de los siguientes alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile en el periodo 2002-2017: Francisco Ortega, Oscar Peredo, Andre De Laire, Jorge Lemus, Nicolás Carreño, Felipe Serrano, Esteban Iglesias, Paulina Arena y Rolando Rogers. Otras correcciones han sido enviadas por académicos y alumnos que han encontrado útil este apunte y lo han usado en sus cursos en esta u otras universidades. A todos ellos el autor les agradece enormemente.

DERECHO DE AUTOR. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN

## Índice general

Capítulo 1. Nociones básicas y métodos elementales de resolución	1
1. Motivación: leyes físicas y problemas geométricos	1
2. Definiciones básicas y noción de solución	5
3. Resolución de EDO elementales	7
4. Ecuaciones que se reducen a casos elementales	21
Capítulo 2. El problema de Cauchy: existencia, unicidad y métodos numéricos	31
1. Definiciones preliminares	31
2. El problema de Cauchy	33
3. Los teoremas de existencia y unicidad	34
4. Aproximación del problema de Cauchy mediante métodos numéricos	39
5. Ejemplo numérico: la Ley de Omori en sismología	47
6. Ejemplo numérico: Lotka-Volterra y la pesca en el Mar Adriático	54
7. Ejemplo numérico: Van del Pol y el sonido del caos.	58
Capítulo 3. EDO lineales de orden superior	67
1. La EDO lineal de orden $n$	67
2. Polinomio característico y Propiedades operador diferencial	69
3. Estudio completo de la EDO de orden dos	70
4. El problema de Cauchy. Teorema de Existencia y unicidad.	76
5. Estudio completo de la EDO lineal de orden $n$	76
6. Métodos de resolución de EDO de orden $n$ a coeficientes constantes	81
7. Métodos de resolución de EDO de orden $n$ a coeficientes variables	88
8. Resolución de problemas con condiciones de borde.	92
Capítulo 4. Transformada de Laplace	95
1. Definiciones y ejemplos	95
2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace	99
3. Antitransformadas y aplicaciones	105
4. Funciones y derivadas generalizadas	110
Capítulo 5. Sistemas lineales de primer orden	113
1. Introducción	113
2. Sistemas lineales y ecuaciones de orden superior	115
3. Los teoremas de existencia y unicidad. Demostración.	117
4. Estructura geométrica de las soluciones	124
5. Resolución de sistemas lineales	128
Capítulo 6. Análisis cualitativo de sistemas no lineales	151
1. Sistemas no lineales y sistemas linealizados	153
2. Diagramas de fase y de flujo	158

3.	Clasificación de los puntos críticos	160
4.	Puntos críticos de sistemas lineales	167
5.	Energía, funciones de Liapunov y estabilidad	176

## Capítulo 1

# Nociones básicas y métodos elementales de resolución

## 1. Motivación: leyes físicas y problemas geométricos

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son identidades que vinculan una función con sus derivadas. Por ejemplo, si  $y(t)$  denota el número de bacterias en una colonia en función del tiempo<sup>1</sup>, la ecuación diferencial

$$y'(t) = \sigma y(t)$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva, expresa que el aumento de la población bacteriana, representada por la derivada  $y'$ , es proporcional a la propia población  $y$ , esto es, mientras más bacterias hay, más rápido ellas se multiplican.

La solución de una ecuación diferencial es una función y no un número, a diferencia de las ecuaciones algebraicas. En el ejemplo anterior se trata de encontrar la función  $y(t)$ : número de bacterias en función del tiempo. Una posible solución es la función:

$$y(t) = y_0 e^{\sigma t}$$

donde  $y_0$  es el número inicial de bacterias en  $t = 0$ . Este tipo de soluciones exponenciales aparecerán recurrentemente en la teoría y en la práctica.

De hecho, las ecuaciones diferenciales aparecen con frecuencia en muchas ramas de la matemática, y sirven para plantear y resolver problemas provenientes de la física, la ingeniería, la economía, la biología y de las ciencias sociales, entre otras disciplinas.<sup>2</sup>

Veremos a través de algunas *leyes físicas* y de algunos *problemas geométricos* que una ecuación diferencial es una forma simple de reproducir y en el mejor de los casos explicar una situación real, esto es, al fin y al cabo una forma útil de modelar.

**1.1. Modelamiento de un fenómeno en biología: la osmosis.** Analicemos el fenómeno de la *osmosis*, presente en muchos procesos fisiológicos. Consideremos un experimento en que disponemos dos medios de salmuera  $A$  y  $B$  separados por una membrana impermeable en  $t = 0$  con concentraciones iniciales  $C_A^0$  y  $C_B^0$  con  $C_A^0 < C_B^0$ . En un instante  $t > 0$  la membrana que los separa se vuelve semipermeable y permite el paso de las moléculas de agua, pero no de las moléculas de sal disueltas (ver Figura 1). El problema es modelar la evolución de las concentraciones de sal  $C_A(t)$  y  $C_B(t)$  en función del tiempo. Se observa experimentalmente que a medida que el tiempo transcurre, el agua se desplaza a través de la membrana

<sup>1</sup>A menudo llamaremos a una función  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  por  $y(t)$  simplemente y su derivada por  $y'$  siempre que ésta exista.

<sup>2</sup>Las ecuaciones diferenciales se conocen también bajo otros nombres en ciencias e ingeniería tales como: modelos diferenciales, ecuaciones de evolución, sistemas dinámicos, etc.

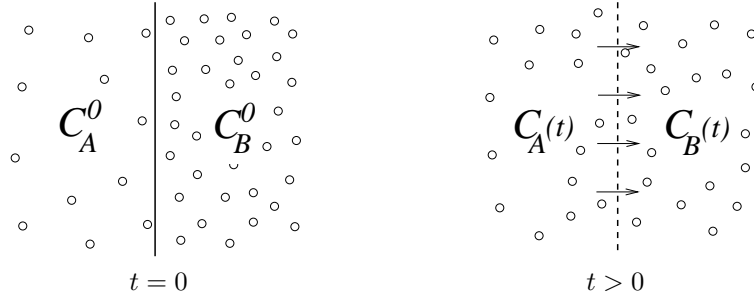
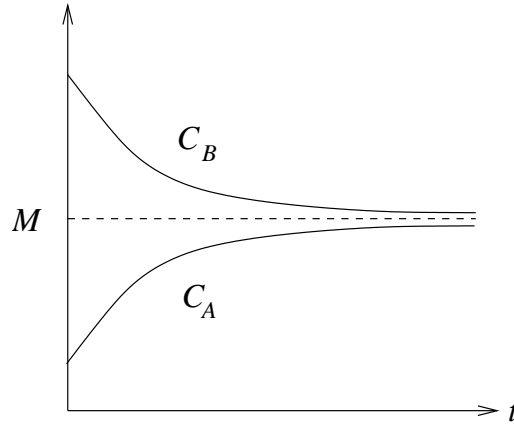


FIGURA 1. Osmosis por una membrana semipermeable.

desde la solución de baja concentración  $A$  hacia la de alta concentración  $B$  hasta alcanzar asintóticamente un valor de equilibrio como se muestra en el gráfico de la Figura 2.

Se constata, también experimentalmente, que este valor de equilibrio corresponde al promedio  $M$  de concentraciones, el cual es conservado a través del tiempo. Esto tiene dos consecuencias: dicho promedio debe ser igual al promedio de las concentraciones iniciales y es por lo tanto conocido. Además, como  $C_A(t) + C_B(t) = 2M$  es constante, podemos obtener en cada instante  $t$  la concentración en  $B$  conociendo la de  $A$  y viceversa. Así es que el problema se reduce a encontrar solamente la función  $C_A(t)$ .

FIGURA 2. Evolución de las concentraciones durante la osmosis que convergen asintóticamente al promedio  $M$  de las concentraciones de ambos medios.

Si registramos en un gráfico el logaritmo natural de la diferencia  $M - C_A(t)$  en función del tiempo, observaremos que la curva experimental se ajusta bien a una recta de pendiente negativa  $-\sigma$ . Una hipótesis razonable es entonces un *ajuste exponencial* de  $C_A(t)$  a la asíntota de ordenada  $M$ , en efecto,

$$\ln(M - C_A(t)) = -\sigma t + C \quad \Rightarrow \quad C_A(t) = M - K e^{-\sigma t},$$



donde  $K$  es una constante que se obtiene imponiendo la condición inicial  $C_A(0) = C_A^0$  lo que nos da  $K = M - C_A^0$ . Reemplazando la constante  $K$  en la expresión anterior, esto nos provee de la fórmula siguiente para la concentración buscada:

$$(1) \quad C_A(t) = M - (M - C_A(0))e^{-\sigma t}.$$

Esta función representa un buen *modelo* de la realidad, ya que se ajusta razonablemente bien a las mediciones experimentales, sin embargo, nos resulta todavía misterioso por qué deberíamos aceptar este modelo de crecimiento exponencial como un modelo razonable y no otro modelo diferente, por ejemplo, un ajuste polinomial por pedazos.

Esto nos lleva a preguntarnos ¿hay alguna ley o principio que explique el fenómeno de la osmosis? Una idea, que resulta ser fundamental, consiste en estudiar *si existe una relación simple entre la concentración  $C_A(t)$  y su aumento  $C'_A(t)$* . Derivando (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} C'_A(t) &= \sigma K e^{-\sigma t} \\ &= \sigma K e^{-\sigma t} + \sigma M - \sigma M \\ &= \sigma(M - (M - K e^{-\sigma t})) \end{aligned}$$

esto es, la relación buscada es:

$$(2) \quad C'_A(t) = \sigma(M - C_A(t)).$$

Entonces la solución (1) satisface (2). Interpretando (2) encontramos una relación diferencial simple y comprensible que podemos enunciar como la ley siguiente:

LEY DE OSMOSIS

*“El aumento de concentración es proporcional en cada instante a la diferencia de concentración entre el promedio asintótico de concentraciones y la concentración actual. La constante de proporcionalidad cuantifica la permeabilidad de la membrana.”*

La ley de osmosis representada por la ecuación diferencial (2) provee una interpretación más intuitiva y profunda del proceso de osmosis. Más adelante veremos que (2) tiene como solución (1). La otra ventaja esta ley es que, aparte de su simplicidad, sirve para modelar por analogía otros problemas similares, como lo es la ley de enfriamiento o algunos modelos de población, que veremos más adelante.

**EJERCICIO PROPUESTO 1.1.** Si en el gráfico del experimento de la Figura 2, el aumento de la concentración en  $A$  hubiese resultado con una forma sigmoide (esto es estrictamente creciente hacia la asíntota pero con un punto de inflexión) ¿Qué modelo diferencial propondría usted para este fenómeno? Indicación: averiguar sobre el modelo de crecimiento logístico.

**1.2. Modelamiento de una ley física: ley de gravitación universal.**

Muchos fenómenos de la naturaleza pueden modelarse a través de relaciones entre cantidades y sus variaciones<sup>3</sup>, esta idea revolucionaria para la ciencia fue introducida en el siglo XVII entre otros por Fermat, Newton y Leibniz. En términos

<sup>3</sup>o *flujiones* en la terminología original de Newton, que da la idea de continuo temporal.

matemáticos, estamos hablando en todos los casos de identidades que relacionan una función y sus derivadas o sea, de ecuaciones diferenciales.

La mayoría de las leyes físicas pueden representarse por ecuaciones diferenciales que involucran alguna función como incógnita, la que puede representar por ejemplo el movimiento de un cuerpo o la concentración de una especie química. Dichas ecuaciones diferenciales suelen ser simples, sin embargo el encontrar la función incógnita puede llegar a ser una ardua o imposible tarea. Un ejemplo es la ley de la gravitación universal, que modela el movimiento de los planetas alrededor del sol:

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

*“La aceleración de un planeta es proporcional a la fuerza que sobre él ejerce el sol, cuya magnitud es inversa al cuadrado de la distancia que los separa.”*

Esta ley del siglo XVII lleva a dos ecuaciones con dos derivadas de la forma:

$$x'' = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad y'' = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

donde  $(x, y)$  es la posición del planeta en el plano de origen en el Sol. Estas ecuaciones tienen como solución elipses en el caso de un solo planeta. En el caso de varios planetas, en realidad también ejercen fuerza sobre un planeta los demás planetas y no solamente el Sol, lo que lleva a órbitas muchísimo más complicadas y al estudio posterior de órbitas caóticas en el siglo XX por Poincaré entre otros.

El movimiento de los planetas hace parte de los esos fenómenos en los que se conoce la ley y por lo tanto las ecuaciones diferenciales que representan dicho fenómeno, pero no se logra comprender completamente la solución a dichas ecuaciones. La ley de movimiento en este caso resulta más simple que el movimiento en sí.<sup>4</sup>

Este ejemplo nos muestra a demás que las ecuaciones diferenciales se pueden presentar en grupos de dos o más formando *sistemas de ecuaciones diferenciales*.<sup>5</sup>

**EJERCICIO PROPUESTO 1.2.** Averigüe quién recopiló los datos a partir de los que Kepler postuló la idea de órbitas elípticas.

**1.3. Modelamiento de algunos problemas geométricos.** Las ecuaciones diferenciales pueden ser también útiles para plantear y resolver problemas geométricos. Puede servir por ejemplo para agrupar una familia de curvas. Veamos el caso de las *familias ortogonales*.

Consideremos la familia  $\mathcal{F}$  de todas las parábolas con vértice en el origen definidas por la ecuación  $y = ax^2$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Derivando con respecto a  $x$  obtenemos  $y' = 2ax$ . Si usamos la expresión anterior para eliminar el parámetro  $a$  obtenemos La ecuación diferencial que representa la familia  $\mathcal{F}$ :

$$y' = 2\frac{y}{x}.$$

<sup>4</sup>Es el caso también de las ecuaciones de Navier-Stokes que modelan el movimiento de un fluido tridimensional, y no se sabe si dan lugar o no a una única solución; o el de la ecuación de Schrödinger, que modela la compleja dualidad onda-partícula de manera increíblemente simple.

<sup>5</sup>Ver Capítulo 5.

Esta ecuación diferencial revela la siguiente propiedad geométrica de esta familia de parábolas: la pendiente en cada punto es el doble de la pendiente de la recta que une el punto con el origen. En general, algunas propiedades geométricas compartidas por las curvas de una familia pueden conocerse al inspeccionar la ecuación diferencial correspondiente.

Tratemos ahora de encontrar la familia  $\mathcal{G}$  de todas las curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de la familia  $\mathcal{F}$ . Esto es,  $\mathcal{G}$  es la *familia ortogonal* a la familia  $\mathcal{F}$ .

Si la función  $z \in \mathcal{G}$  define una de estas curvas entonces  $z'(x)y'(x) = -1$  para toda  $y \in \mathcal{F}$  y para todo  $x \in \mathbb{R}$  siempre que  $z(x) = y(x)$ , esto es, las curvas se intersectan en el punto  $(x, y(x))$ . Dado que  $y'(x) = \frac{2y(x)}{x}$ , la ecuación que define a la familia  $\mathcal{G}$  resulta ser:

$$z'(x) = \frac{-1}{y'(x)} = \frac{-x}{2y(x)} = -\frac{x}{2z(x)}.$$

Notar que reemplazamos  $y$  por  $z$  pues las curvas se intersectan.

Tratemos de resolver la ecuación diferencial anterior. Esto es, tratemos de encontrar la forma de la función  $z(x)$  o más precisamente, las curvas  $(x, z)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} 2z(x)z'(x) &= -x \\ \frac{d}{dx} \left( z(x)^2 \right) &= -x. \end{aligned}$$

Si integramos a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$z(x)^2 = -\frac{x^2}{2} + C,$$

donde  $C$  es una constante. Escrito de otro modo, esto es

$$\frac{z^2}{C} + \frac{x^2}{2C} = 1.$$

La familia  $\mathcal{G}$  está integrada por todas las elipses que están centradas en el origen.

**EJERCICIO PROPUESTO 1.3.** En la discusión anterior, al reemplazar  $y$  por  $z$ , dado que las curvas se intersectan, se obtiene la ecuación  $z' = -\frac{x}{2z}$ . Por otro lado, si hubiésemos reemplazado  $y$  por  $y = ax^2$  llegamos a la ecuación  $z' = -\frac{1}{2ax}$  que es completamente diferente. Convénzase de que no es correcto reemplazar  $y$  por  $y = ax^2$  dado que  $a$  depende de  $x$  por lo que la segunda ecuación no es válida.

## 2. Definiciones básicas y noción de solución

Ahora que ya hemos visto que las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen como una herramienta útil para modelar fenómenos naturales, veamos algunas definiciones.

**DEFINICIÓN 1.1.** Una *ecuación diferencial ordinaria* (abreviada EDO) es una identidad de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

donde  $x$  representa la *variable independiente* e  $y$  una la función incógnita, llamada también *variable dependiente* o *solución* de la EDO. La función  $F$  representa la

relación que liga las derivadas de  $y$  y la variable  $x$ . Se dice que la ecuación es *ordinaria* pues se deriva con respecto a una sola variable independiente<sup>6</sup>.

En algunas situaciones, como en los problemas geométricos, resulta natural usar  $x$  como variable independiente. En otras situaciones, como en los problemas donde se deriva respecto del tiempo, es mucho más natural utilizar la letra  $t$ . En los primeros capítulos hemos escogido arbitrariamente  $x$  como la variable independiente, pero cuando sea apropiado cambiaremos a  $t$ .

Consideraremos aquí que  $F$  es una función a valores escalares, esto corresponde a una sola ecuación diferencial. Se puede considerar también que  $F$  tome valores vectoriales, pero en este caso se tratará de *sistemas* de ecuaciones diferenciales que veremos más adelante en el Capítulo 5.

DEFINICIÓN 1.2. El *orden* de una ecuación diferencial es el grado de derivación máximo que aparece en la ecuación que en este caso es el número natural  $n$ .

DEFINICIÓN 1.3. Una EDO *lineal* de orden  $n$  es de la forma

$$(3) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

donde las funciones  $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  son llamadas *coeficientes* de la EDO.

DEFINICIÓN 1.4. Si  $Q(x)$  (llamado comúnmente *lado derecho* de la EDO) es idénticamente nulo, la EDO lineal se dice *homogénea*. Si  $Q(x) \neq 0$ , la EDO lineal se dice *no homogénea*.

DEFINICIÓN 1.5. Si los coeficientes  $a_i(x)$  no dependen de  $x$ , se dice que la EDO lineal es a *coeficientes constantes*. De lo contrario se dice que ella es a *coeficientes variables*.

En el caso que  $a_n(x) \neq 0$  se puede dividir la EDO (3) por  $a_n(x)$ . La EDO que así se obtiene con

$$\bar{a}_n(x) = 1, \quad \bar{a}_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_n(x)}$$

se dice que está *normalizada*<sup>7</sup>. Utilizaremos la barra sobre los coeficientes y el lado derecho para indicar normalización.

DEFINICIÓN 1.6. Una EDO *no lineal* es simplemente una EDO que no es lineal.

Cabe notar que existe una diferencia fundamental entre una EDO lineal y una no lineal. Por ejemplo, en una EDO lineal, si el lado derecho se duplica, la solución también, en cambio esto no ocurre necesariamente en una EDO no lineal. Gran parte de este texto concierne en el estudio de EDO lineales, que son las más simples, pero también resolveremos algunas EDO no lineales en este capítulo y estudiaremos algunos sistemas no lineales simples en el Capítulo 6 final.

EJEMPLO 1.1.  $y(1 + (y')^2) = 4$ . EDO no lineal, de orden 1. Esta es la EDO de la *curva braquistócrona*, que estudiaremos más a fondo en el Ejemplo 1.9.  $\square$

<sup>6</sup>Si se deriva con respecto a varias variables, se habla de Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Notemos que existen también las inecuaciones diferenciales, donde la igualdad en la Definición 1.1 es reemplazada por una desigualdad.

<sup>7</sup>Si  $a_n(x) = 0$  para valores discretos de  $x$ , se puede normalizar por intervalos.

EJEMPLO 1.2.  $xy' + c \operatorname{sen}(x)y = \tan(x)$ . EDO lineal de orden 1 a coeficientes variables, no homogénea ni normalizada.  $\square$

EJEMPLO 1.3.  $y'' - 2y = 0$ . EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, homogénea y normalizada.  $\square$

$n$	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i, a_i = cte$	coeficientes constantes
$\exists i, a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

CUADRO 1. Clasificación de la EDO lineal  $\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)} = Q(x)$ .

### 3. Resolución de EDO elementales

En este capítulo estudiaremos algunas técnicas que nos permitirán determinar las soluciones de una gran cantidad de EDO. Comenzaremos por analizar cuatro tipos de ecuaciones de primer orden que llamaremos *elementales*:

- integración directa:  $y' = f(x)$ .
- variables separables:  $y' = f(x)g(y)$ .
- lineal de primer orden homogénea:  $y' + \bar{a}_0(x)y = 0$ .
- lineal de primer orden no homogénea:  $y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$ .

Posteriormente estudiaremos algunas otras ecuaciones de primer y segundo orden que pueden reducirse a estos casos elementales.

Nos enfocaremos en la resolución de las ecuaciones y no siempre seremos demasiado rigurosos en los aspectos teóricos que justifican los cálculos. Estos aspectos (existencia, unicidad, regularidad de la solución) serán tratados con más profundidad en capítulos posteriores.

Para resolver los casos elementales, será útil el cálculo de primitivas y recordar el conocido Teorema Fundamental del Cálculo.

TEOREMA 1.1 (TFC). Sea  $f$  integrable en  $[a, b]$ , entonces, dado  $x_0 \in [a, b]$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ , la función  $y$ , definida por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)ds, \quad \text{para } x \in [a, b],$$

es continua en  $[a, b]$  y se tiene  $y(x_0) = y_0$ . Si además  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces la función  $y(x)$  es también derivable<sup>8</sup> en  $[a, b]$  con derivada continua igual a  $f(x)$ ,

<sup>8</sup>Derivable en el cerrado  $[a, b]$  significa derivable en el abierto  $(a, b)$  y con derivadas laterales en  $a^+$  y  $b^-$ .

esto es, se tiene que

$$(4) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(s)ds, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(s)ds = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Las identidades anteriores serán especialmente útiles en este y los próximos capítulos por lo que se sugiere al lector recordarlas siempre, teniendo especial cuidado en no confundir (4) y (5).

**3.1. Integración directa.** Consideramos una EDO del tipo

$$(6) \quad y' = f(x).$$

Si la función  $f$  es integrable (por ejemplo si es continua o continua por pedazos<sup>9</sup>), gracias al TFC las soluciones existen y están dadas por:

$$(7) \quad y = \int f(x)dx + C,$$

donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria.

EJEMPLO 1.4. Las soluciones de la ecuación  $y' = \sin(x)$  son de la forma

$$y = \int \sin(x)dx + C = -\cos(x) + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

□

EJEMPLO 1.5. La ecuación  $y' = x$  tiene como soluciones a las funciones de la forma

$$y = \int xdx + C = \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

□

Denotaremos por  $C$  genéricamente a una constante arbitraria sin importar las eventuales transformaciones biyectivas que la mantienen arbitraria (ponderaciones por un escalar no nulo, cambios de signo, suma de otra constante). Por ejemplo  $C$ ,  $2C$ ,  $C/\sqrt{2}$ ,  $-C$ ,  $C+4$  pueden ser representadas por una misma constante genérica. Si la transformación no es biyectiva, por ejemplo  $C^2$ , entonces se pierde la arbitrariedad y es mejor escribir explícitamente  $C^2$  o precisar de algún modo que la constante no puede ser negativa.

EJEMPLO 1.6. Estudiemos la ecuación  $y' = \frac{1}{x}$  para  $x \neq 0$ .

$$y = \int \frac{dx}{x} + C = \ln(|x|) + C = \ln(|x|) + \ln(k) = \ln(k|x|), \quad k > 0.$$

En el cálculo anterior hemos reemplazado la constante arbitraria  $C$  por  $\ln(k)$  (donde  $k = e^C > 0$ ) para escribir la solución de manera más compacta y sin perder arbitrariedad. Observemos también que el módulo en el logaritmo nos da la primitiva correcta de  $1/x$  cuando  $x < 0$ . Como  $|x|$  no es derivable en  $x = 0$ , se considera

---

<sup>9</sup>Ver Capítulo 4, donde se da la definición de las funciones continuas por pedazos.

la resolución de la EDO separadamente en cada intervalo  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ .  $\square$

Supongamos ahora que queremos encontrar la solución de (6) definida sobre un intervalo  $I$  y que además pase por cierto punto  $(x_0, y_0)$  dado. Esto es, queremos resolver el siguiente problema<sup>10</sup>:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x) \quad \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Integrando la ecuación  $y' = f(x)$  entre  $x_0$  y  $x \in I$  obtenemos

$$\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds$$

y del TFC (identidad (4)), se tiene que

$$(8) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

Detengámonos aquí para comparar (7) y (8). La función  $F(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds$  en (8) es una primitiva bien particular de  $f$ : aquella que cumple  $F(x_0) = 0$ . Entonces la constante  $C$  en (7) deja de ser arbitraria y se tiene que  $C = y(x_0)$ .

En las ecuaciones de primer orden que estudiaremos en este curso, siempre podremos determinar la constante arbitraria si conocemos el valor de la función en un punto del intervalo<sup>11</sup>.

**3.2. Variables separables.** Una EDO en variables separables tiene la forma siguiente:

$$(9) \quad y' = f(x)g(y).$$

Lo primero que observamos es que si  $g(y_0) = 0$  entonces la función constante  $y(x) \equiv y_0$  define una solución de la EDO (9). Para los valores de  $y$  donde  $g(y) \neq 0$  se tiene  $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$ . Integrando y usando el Teorema del cambio de variables obtenemos

$$(10) \quad \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C,$$

donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante. Si  $G$  es una primitiva de  $\frac{1}{g}$  y  $F$  es una primitiva de  $f$  entonces

$$G(y) = F(x) + C.$$

Si queremos una fórmula explícita para las soluciones debemos despejar  $y$  en función de  $x$  en la relación anterior<sup>12</sup>. Si no se puede despejar  $y$ , las soluciones quedan expresadas de manera implícita o paramétrica (ver Ejemplo 1.9).

<sup>10</sup>Ver Capítulo 2 donde se estudia este problema conocido como *problema de Cauchy*.

<sup>11</sup>Para ecuaciones de orden  $n$  necesitaremos conocer los valores de la función y sus derivadas hasta el orden  $n - 1$  pues las integraciones sucesivas arrojarán más constantes.

<sup>12</sup>El Teorema de la Función Implícita, que se estudia en el curso de Cálculo en Varias Variables, da las condiciones para que esto sea posible.

EJEMPLO 1.7. Analicemos la ecuación

$$y' = xy.$$

Aquí  $f(x) = x$  y  $g(y) = y$ . Observemos primero que la función nula  $y(x) \equiv 0$  define una solución de la EDO. Si  $y \neq 0$  hacemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx + C.$$

Tenemos entonces que

$$\ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C,$$

de donde

$$|y| = \exp\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = ke^{\frac{x^2}{2}},$$

donde  $k = e^C > 0$ . Eliminando el módulo y considerando los posibles valores positivos y negativos vemos que todas las soluciones son de la forma

$$y = ke^{\frac{x^2}{2}},$$

con  $k \in \mathbb{R}$  (el valor  $k = 0$  nos da la solución nula). □

EJEMPLO 1.8. Estudiemos ahora la EDO

$$y' = \cos^2(y).$$

En este caso  $f(x) = 1$  y  $g(y) = \cos^2(y)$ . Las soluciones constantes son de la forma  $y(x) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Para encontrar las demás soluciones,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\cos^2(y)} &= \int dx + C \\ \int \sec^2(y) dy &= x + C \\ \tan(y) &= x + C, \end{aligned}$$

donde  $C \in \mathbb{R}$ . Para  $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  esto es

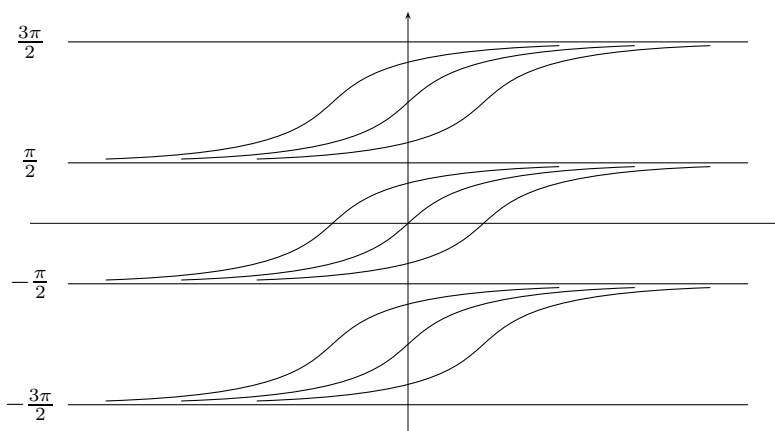
$$y = \arctan(x + C).$$

Para los demás valores de  $y$  debemos tener en cuenta la periodicidad de la función tangente. Tenemos entonces que todas las soluciones no constantes son de la forma

$$y = k\pi + \arctan(x + C),$$

con  $C \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .





□

EJERCICIO PROPUESTO 1.4. Para el problema de Cauchy, vea cómo funciona el método con integrales definidas. Si se integra entre  $x_0 \in I$  y  $x \in I$  a ambos lados de (9), se tiene que

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Como antes, si  $G$  es primitiva de  $\frac{1}{g}$  y  $F$  es primitiva de  $f$ , se tiene que

$$\begin{aligned} G(y(x)) &= F(x) - F(x_0) + G(y(x_0)) \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

con  $C = G(y(x_0)) - F(x_0)$  constante. Compare (10) y (11) como se hizo antes entre (7) y (8). □

En el siguiente ejemplo la solución queda definida *paramétricamente*.

EJEMPLO 1.9 (Braquistócrona). Se denomina así a la forma que debe tener un alambre para que una argolla que se desliza por él sin roce bajo la acción de la gravedad de un punto a otro de menor altura y no en la misma vertical, lo haga en el menor tiempo posible.

El problema de encontrar la curva de tiempo mínimo (braquistócrona en latín) fue propuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli en 1696 para desafiar a la comunidad científica de su tiempo. Él mismo encontró una solución y otras cuatro soluciones aparecieron debidas a Leibniz, a L'Hôpital, al hijo de Jean Bernoulli y una solución anónima que se atribuyó luego a Newton. Todas ellas usan ecuaciones diferenciales y cálculo diferencial.

Para explicar la solución que Jean de Bernoulli encontró, hay primero que explicar la forma continua de la conocida *Ley de Snell* proveniente de la óptica.

Pensemos en un deportista que debe cruzar un río nadando desde un punto A y luego una playa de arena corriendo a un punto B, para llegar en el mínimo tiempo posible de A a B. En el agua nada a velocidad (constante)  $v_1$  mientras que en la arena corre a velocidad (también constante)  $v_2$  con  $v_1 < v_2$ . La intuición nos dice que debe nadar y correr en línea recta, pero nadar menos en el agua y correr más

en la arena para minimizar su tiempo. De modo que su trayectoria debiera ser una línea quebrada de A a B con vértice en C situado en la interfaz agua-arena. Si  $a$  y  $b$  son las distancias verticales de A y B a C y  $c$  y  $x$  son las distancias horizontales de A a B y C respectivamente, entonces en tiempo total de la carrera está dado por:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}$$

Haciendo  $T'(x) = 0$  se obtiene la coordenada  $x$  (lo que determina el punto C) de tiempo mínimo

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{(c-x)^2 + b^2}}$$

de donde se obtiene a su vez, introduciendo los ángulos de incidencia respecto de la normal a la interfaz  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , la conocida Ley de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

Si se agrega ahora un tramo extra de cemento a la carrera de para ir de A a B, primero nadando un tramo de agua desde A, luego atravesando la arena, y finalmente corriendo en el cemento al punto final B, donde el deportista tiene una velocidad  $v_3$  corriendo en el cemento con  $v_1 < v_2 < v_3$ , entonces de manera similar es fácil verificar que la trayectoria óptima es una línea con dos quiebres en  $C_1$  y  $C_2$  en ambas interfaces y se cumple que:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = cte.$$

De manera análoga, la argolla de masa  $m$  que cae bajo la gravedad  $g$  tiene una velocidad  $v$  que va en aumento de acuerdo a la distancia vertical recorrida  $y$ . En efecto, igualando energías cinética y potencial se obtiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Por esta razón, Jean de Bernoulli conjeturó la Ley de Snell generalizada siguiente:

$$\frac{\sin \alpha}{v} = cte$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que instantáneamente forma la tangente a la curva en la posición de la argolla y la vertical. Usando la propiedad geométrica de que la tangente de  $\pi/2 - \alpha$  es la derivada de  $y$  se obtiene que:

$$\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\pi/2 - \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

por lo que, usando la Ley de Snell generalizada, se obtiene

$$v = \frac{1}{cte \sqrt{1 + (y')^2}} = \sqrt{2gy}.$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene la EDO que describe la forma de la curva como sigue:

$$y(1 + (y')^2) = k^2,$$

donde  $k = 1/(2g cte^2)$  es una constante positiva.

Utilizaremos el método de separación de variables para resolver la EDO de la braquistócrona. Se tiene

$$y' = \left( \frac{k^2 - y}{y} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{k^2 - y}} dy = \int dx + C.$$

Haciendo  $y = k^2 \sin^2 \theta \Rightarrow dy = 2k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$  obtenemos

$$\int \frac{k \sin \theta 2k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{k \cos \theta} = x + C$$

$$2k^2 \int \sin^2 \theta d\theta = x + C$$

$$2k^2 \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = x + C$$

$$2k^2 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) = x + C$$

$$x = 2k^2 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - C.$$

Por lo tanto, se tiene que  $x = x(\theta)$  e  $y = y(\theta)$  con

$$x = \frac{k^2}{2} (2\theta - \sin 2\theta) - C$$

$$y = \frac{k^2}{2} (1 - \cos 2\theta).$$

Si ahora hacemos  $\omega = 2\theta$ , vemos que

$$x = \frac{k^2}{2} (\omega - \sin \omega) - C$$

$$y = \frac{k^2}{2} (1 - \cos \omega),$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$ . La solución es una familia de curvas llamadas *cicloides*. Ver Figura 3. Digamos para terminar que el trabajo de toda la vida de Jean Bernoulli quedó mar-

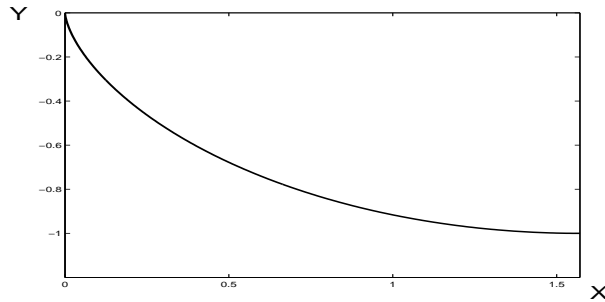


FIGURA 3. Curva Braquistócrona con  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $y \in [-1, 0]$ , parámetro  $k = 1$  y constante  $C = 0$ .

cado por el estudio de la curva cicloide, lo que quedó plasmado en sus obras completas de 1742 donde aparece su retrato sosteniendo un dibujo de la curva.  $\square$

EJEMPLO 1.10 (El problema de la gota de lluvia). Consideremos una gota de masa inicial  $m_0$  y de densidad constante que cae del reposo y calculemos su masa en función del tiempo usando el siguiente principio:

GOTA DE LLUVIA

*“Una gota de lluvia que cae por efecto de su peso va aumentando su volumen a medida que captura gotas más pequeñas en su superficie inferior. Esto es, a una tasa que es proporcional a su velocidad de caída y a su superficie inferior.”*

Supondremos que i) la gota es esférica, ii) la gota alcanza una aceleración constante, iii) esta aceleración límite es menor que la de gravedad. Si el radio de la esfera es  $r(t)$  entonces su volumen es proporcional a  $r^3$  y su superficie media a  $r^2$ . Si la densidad es constante, entonces la masa es  $m(t)$  es proporcional a  $r^3$  de donde despejando  $r(t)$  resulta proporcional a  $m^{1/3}$ . Con esto, suponiendo que  $y$  es la distancia recorrida verticalmente hacia abajo por la gota, la EDO queda:

$$m'(t) = Km^{2/3}y', \quad K > 0 \text{ constante.}$$

Además, la segunda ley de Newton (atención que la masa es variable) es

$$(my')' = mg.$$

Al reemplazar en la primera EDO obtenemos

$$\begin{aligned} m'y' + my'' &= mg \\ Km^{2/3}(y')^2 + my'' &= mg \\ Km^{-1/3}(y')^2 + y'' &= g \\ m^{1/3} &= \frac{K(y')^2}{g - y''}. \end{aligned}$$

Derivando esta expresión vemos que

$$\frac{1}{3} m^{-2/3} m' = \left( \frac{K(y')^2}{g - y''} \right)',$$

de donde

$$\begin{aligned} y' &= 3 \left( \frac{(y')^2}{g - y''} \right)' \\ y' &= 3 \frac{2(g - y'')y'y'' + y'''(y')^2}{(g - y'')^2} \\ y'(g - y'')^2 &= 6(g - y'')y'y'' + 3y'''(y')^2 \\ 3y'''y' &= (g - y'')(g - y'' - 6y'') = (g - y'')(g - 7y''). \end{aligned}$$

Suponiendo que  $y'' < g$  y que la aceleración es constante ( $y''' = 0$ ) se obtiene que

$$y'' = \frac{g}{7}.$$

Ahora integrando entre 0 y  $t$  una vez (y suponiendo que la gota parte del reposo) se obtiene la velocidad

$$y' = \frac{gt}{7}.$$

Reemplazando este valor en la EDO original de la masa se obtiene

$$m' = \frac{gK}{7} t m^{2/3},$$

que es una EDO a variables separables, que podemos resolver:

$$\begin{aligned} \int m^{-2/3} dm &= \frac{gK}{7} \frac{t^2}{2} + C \\ 3m^{1/3} &= \frac{gK}{14} t^2 + C. \end{aligned}$$

Si la masa inicial era  $m_0$ , entonces  $C = 3m_0^{1/3}$ . Luego

$$m(t) = \left( \frac{gK}{42} t^2 + m_0^{1/3} \right)^3.$$

□

**EJERCICIO PROPUESTO 1.5.** ¿Es razonable pensar en el ejercicio anterior que la masa crece de manera no acotada con el tiempo? ¿Qué se podría considerar adicionalmente en el modelo para mejorarlo?

### 3.3. EDO lineal de primer orden: caso homogéneo. Se tiene la EDO:

$$(11) \quad a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Normalizando los coeficientes, es decir, con  $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ ,  $a_1(x) \neq 0$  se obtiene:

$$y' = -\bar{a}_0(x)y.$$

Presentaremos dos formas de resolución:

**Variables separables:** Claramente la función nula  $y(x) \equiv 0$  define una solución para esta EDO. Para los valores donde  $y \neq 0$ , notamos que la EDO (3.3) es de la forma  $y' = f(x)g(y)$  con  $f(x) = \bar{a}_0(x)$  y  $g(y) = y$ . Así

$$\begin{aligned} \ln(|y|) &= - \int \bar{a}_0(x) dx + C \\ |y| &= k \exp \left( - \int \bar{a}_0(x) dx \right), \quad k > 0 \\ y &= k \exp \left( - \int \bar{a}_0(x) dx \right) \end{aligned}$$

con  $k \in \mathbb{R}$ , incluyendo la solución nula.

**Factor integrante:** Definimos el factor

$$\mu(x) = \exp \left( \int \bar{a}_0(x) dx \right)$$

y observamos que  $\mu'(x) = \bar{a}_0(x)\mu(x)$ . Si multiplicamos la ecuación por  $\mu(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(x)y'(x) + \bar{a}_0(x)\mu(x)y(x) &= 0 \\ \mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) &= 0 \\ (\mu(x)y(x))' &= 0,\end{aligned}$$

con lo cual el producto  $\mu(x)y(x)$  es constante y así

$$y(x) = \frac{k}{\mu(x)} = k \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

con  $k \in \mathbb{R}$ , como antes. Este enfoque es la clave para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas.

EJEMPLO 1.11. Encontremos las soluciones de la ecuación  $y' \cos x + \frac{1}{\cos x}y = 0$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  usando el método de separación de variables. Tenemos que

$$\begin{aligned}y' + \frac{1}{\cos^2 x}y &= 0 \\ y' &= -y \sec^2 x \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \sec^2 x dx + C \\ \ln(|y|) &= -\tan x + C \\ y &= k \exp(-\tan x), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.12. Resolvamos ahora el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= \frac{1}{x}y(x) \quad \text{para } x \neq 0, \\ y(1) &= 2, \end{cases}$$

usando el factor integrante. Escribiendo la EDO como  $y' - \frac{1}{x}y = 0$  calculamos

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = \exp(-\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y &= 0 \\ \left(\frac{y}{x}\right)' &= 0 \\ \frac{y}{x} &= k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Así, todas las soluciones son de la forma  $y(x) = kx$  con  $k \in \mathbb{R}$ . De acuerdo con la condición inicial, nos interesa que  $2 = y(1) = k \cdot 1$ , de donde  $k = 2$ . Concluimos que la solución del problema de Cauchy es  $y(x) = 2x$ . □

**3.4. EDO lineal de primer orden: caso no homogéneo.** Se tiene la ecuación:

$$(12) \quad a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

Si  $a_1(x) \neq 0$  podemos normalizar  $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ ,  $\bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_1(x)}$  y reescribir la ecuación como

$$y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x).$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por el factor integrante  $\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$  obtenemos

$$(13) \quad \begin{aligned} (\mu(x)y(x))' &= \mu(x)\bar{Q}(x) \\ \mu(x)y(x) &= \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx + C \\ y(x) &= \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.7. El primer término del lado derecho de (13),

$$y_h(x) = \frac{C}{\mu(x)} = C \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

se denomina *solución homogénea*. Aunque se habla de *la* solución homogénea, en realidad se trata de una familia de soluciones, indexadas por la constante  $C$ .

DEFINICIÓN 1.8. El segundo término en el lado derecho de (13),

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx \\ &= \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right) \int \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) \bar{Q}(x)dx \end{aligned}$$

se denomina *solución particular* (que se obtiene si  $C = 0$ ). Se habla de *la* solución particular, pero depende de la primitiva que se escoja.

EJEMPLO 1.13 (Ley de osmosis). Retomamos el ejemplo de la introducción donde estudiamos básicamente el movimiento de agua desde una solución con baja concentración de soluto (solución A) a través de una membrana semipermeable hacia una solución con alta concentración de soluto (solución B). Si  $C_A(t)$  es la concentración de soluto que hay en la solución A en función del tiempo,  $C_A^0$  es la concentración inicial de soluto en A y si  $C_B^0$  es la concentración inicial de soluto en B, una EDO que modela este fenómeno es:

$$C_A'(t) = \sigma \left( \frac{C_A^0 + C_B^0}{2} - C_A(t) \right), \quad \text{con } \sigma > 0.$$

Introduciendo la concentración promedio  $\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} = M$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 C'_A + \sigma C_A &= \sigma M \\
 C'_A \exp\left(\int \sigma dt\right) + \sigma C_A \exp\left(\int \sigma dt\right) &= \sigma M \exp\left(\int \sigma dt\right) \\
 C'_A e^{\sigma t} + \sigma C_A e^{\sigma t} &= \sigma M e^{\sigma t} \\
 (C_A e^{\sigma t})' &= \sigma M e^{\sigma t} \\
 C_A e^{\sigma t} &= \int \sigma M e^{\sigma t} dt + C \\
 C_A &= C e^{-\sigma t} + \sigma M e^{-\sigma t} \int e^{\sigma t} dt
 \end{aligned}$$

y como  $\int e^{\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} e^{\sigma t}$ , se tiene que

$$C_A(t) = C e^{-\sigma t} + M$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . El resultado es una familia de curvas (indexadas por el parámetro  $C$ ). Si evaluamos en el tiempo inicial  $t = 0$ , se puede encontrar el valor de la constante  $C$ , es decir,  $C_A(0) = C + M$  y  $C_A(0) = C_A^0$ . Luego  $C = C_A^0 - M = \frac{C_A^0 - C_B^0}{2}$ . Por lo tanto, la solución es

$$C_A(t) = \left(\frac{C_A^0 - C_B^0}{2}\right) e^{-\sigma t} + \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$$

□

**EJEMPLO 1.14** (Ley de enfriamiento de Newton). Los más valientes hemos experimentado el hecho de que al bañarnos en el mar cuando se acerca la noche el agua se siente tibia. Daremos una explicación a este hecho, basados en el siguiente principio:

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

*“Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.”*

Sean  $T$  y  $T_A$  las temperaturas del mar y del ambiente respectivamente, la EDO que modela el fenómeno es entonces:

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t)),$$

donde  $k > 0$  es una constante llamada *coeficiente de transferencia térmica*, y depende localmente de la superficie de contacto, calor específico y masas involucradas. Sea  $T(0) = T_0$  es la temperatura inicial del mar.



Supongamos primero que  $T_A$  es constante. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} T' + kT &= kT_A \\ T'e^{kt} + kTe^{kt} &= kT_Ae^{kt} \\ (Te^{kt})' &= kT_Ae^{kt} \\ Te^{kt} &= k \int T_Ae^{kt} dt + C \\ T &= Ce^{-kt} + T_A \end{aligned}$$

de donde, evaluando en  $t = 0$ , se obtiene  $C = T_0 - T_A$ . Con esto,

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A.$$

La temperatura del mar tiende exponencialmente a la temperatura ambiente. Más rápidamente a mayores valores de  $k$ . Ver Figura ??.

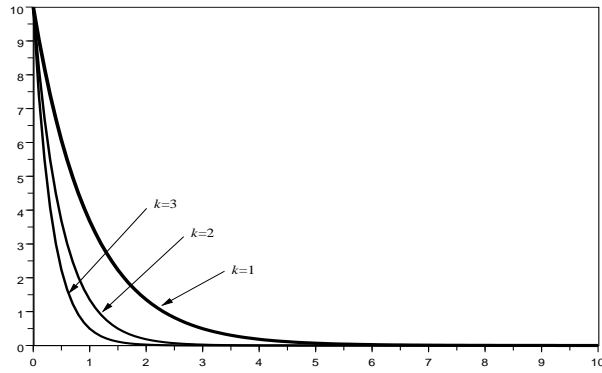


FIGURA 4. Comportamiento de la temperatura del mar  $T(t)$  frente a una temperatura ambiente constante  $T_A = 0$  partiendo de una temperatura inicial  $T(0) = 10$  para distintos valores de la constante  $k$ .

Supongamos ahora que  $T_A$  varía en el tiempo de manera periódica. Más precisamente, supongamos que  $T_A(t) = T_A^0 + A \sin(\omega t)$ , de manera que oscila con frecuencia  $\omega$ . La solución es

$$(14) \quad T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + ke^{-kt} \int A \sin(\omega t) e^{kt} dt$$

Desarrollando  $\int \sin(\omega t) e^{kt} dt$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega t) e^{kt} dt &= \frac{-1}{k} \int \omega \cos(\omega t) e^{kt} dt + \frac{1}{k} \sin(\omega t) e^{kt} \\ &= \frac{-\omega^2}{k^2} \int \sin(\omega t) e^{kt} dt - \frac{\omega}{k^2} \cos(\omega t) e^{kt} + \frac{1}{k} \sin(\omega t) e^{kt}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right) \int \sin(\omega t) e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right).$$

Luego,  $\int A \sin(\omega t) e^{kt} dt = \frac{Ak}{k^2 + \omega^2} e^{kt} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right)$ . Por lo tanto (14) queda de la forma

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak^2}{k^2 + \omega^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right).$$

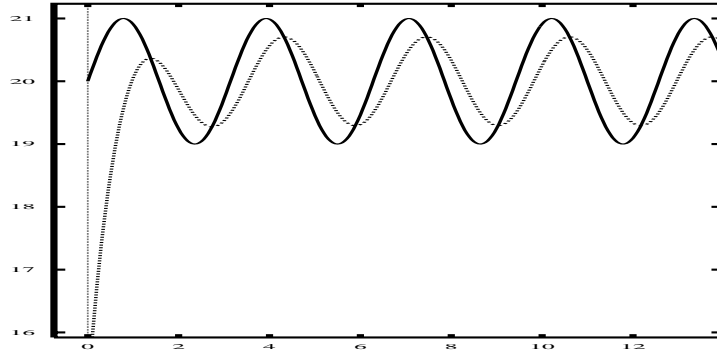


FIGURA 5. Variación de la temperatura del mar  $T(t)$  inicialmente con  $T(0) = 15$  frente a una temperatura ambiente  $T_A(t) = 20 + \sin(2t)$  (línea gruesa). Asintóticamente,  $T(t)$  tiene un desfase positivo y una amplitud menor respecto de  $T_A(t)$ .

Si consideramos  $\sin \phi = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$  y  $\cos \phi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$  podemos escribir

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \underbrace{(\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi))}_{\sin(\omega t - \phi)}.$$

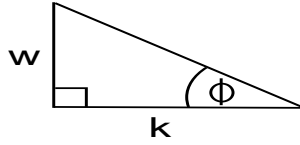


FIGURA 6. Relación entre  $\phi$ ,  $k$  y  $\omega$ .

Finalmente,  $T(t) = \underbrace{Ce^{-kt}}_{y_h} + T_A^0 + \underbrace{\frac{Ak}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \phi)}_{y_p}$ . Las variaciones de la

temperatura del mar se encuentran asintóticamente retrasadas o *con desfase positivo* con respecto a las del ambiente (ver Figura 5). Además, notar que la amplitud

asintótica de la temperatura del cuerpo es menor que la amplitud de variación de la temperatura ambiente ya que  $k/\sqrt{k^2 + \omega^2} < 1$ .

□

**EJERCICIO PROPUESTO 1.6.** Explique cómo se puede estimar el coeficiente  $k$  a partir del tiempo que separa dos máximos sucesivos de la temperatura ambiente y de la temperatura del mar.

#### 4. Ecuaciones que se reducen a casos elementales

Veremos ahora algunas ecuaciones diferenciales que se pueden reducir a casos elementales mediante un cambio de variables.

**4.1. Ecuaciones homogéneas.** Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de dos variables y  $k \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $f$  es *homogénea de grado  $k$*  si  $f(\lambda x, \lambda y) = \pm \lambda^k f(x, y)$  para cada  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ . Observemos que si  $f$  y  $g$  son homogéneas de grado  $k$  entonces el cociente  $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  puede escribirse como una función que depende únicamente del cociente entre  $x$  e  $y$ . En efecto,

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x})}{g(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x})} = \frac{\pm x^k f(1, \frac{y}{x})}{\pm x^k g(1, \frac{y}{x})} = \pm \frac{f(1, \frac{y}{x})}{g(1, \frac{y}{x})} = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Una EDO es de tipo *homogénea*<sup>13</sup> si se puede escribir como

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para resolverlas hacemos el cambio de variable  $z = \frac{y}{x}$ , que reescribimos como  $y = xz$  de manera que  $y' = xz' + z$ . Tenemos entonces que  $xz' + z = h(z)$ , de donde

$$z' = \frac{h(z) - z}{x},$$

que es una ecuación en variables separables.

**EJEMPLO 1.15.** Encontrar las soluciones de la ecuación

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Es fácil verificar que se trata de una ecuación homogénea. Hacemos el cambio  $z = y/x$ , de donde  $y = xz$  e  $y' = z + xz'$ . La ecuación se convierte en

$$z + xz' = \frac{x + zx}{x - zx} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Despejando  $z'$  obtenemos

$$z' = \frac{1}{x} \left[ \frac{1 + z}{1 - z} - z \right] = \frac{1}{x} \left[ \frac{1 + z^2}{1 - z} \right].$$

---

<sup>13</sup>No confundir con una EDO lineal homogénea.

Para resolver esta ecuación en variables separables hacemos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1-z}{1+z^2} \right] z' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{zdz}{1+z^2} &= \int \frac{dx}{x} \\ \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Si ahora deshacemos el cambio de variables obtenemos la solución expresada de manera implícita:

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C.$$

□

EJEMPLO 1.16 (Curva de persecución). Sobre un río, en la posición  $P = (c, 0)$ , un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición  $O = (0, 0)$  como se muestra en la Figura ???. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es  $a$  en dirección  $(0, -1)$ . La rapidez del bote es  $b$  en dirección  $(-\cos\theta, \sin\theta)$  donde  $\theta = \theta(t)$  va variando en el tiempo de manera que este vector apunta siempre hacia  $O$ . Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son  $B = (x, -y)$ , la rapidez en cada eje esta dada por

$$\frac{dx}{dt} = -b \cos\theta, \quad \frac{dy}{dt} = b \sin\theta - a.$$

Aplicando regla de la cadena tenemos que  $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ . Recordando que  $\cos\theta =$

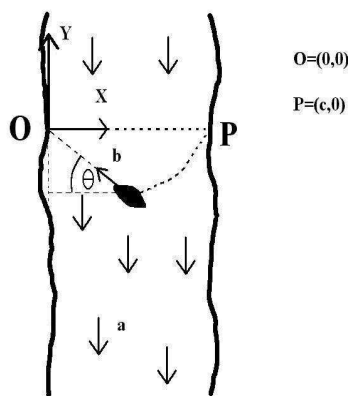


FIGURA 7. Bote con rapidez  $b$  cruzando un río cuya corriente tiene rapidez  $a$ .

$\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$  y  $\sin \theta = \frac{-y}{\sqrt{y^2+x^2}}$  vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{b \sin \theta - a}{-b \cos \theta} \right) = \frac{-a + b \left( \frac{-y}{\sqrt{y^2+x^2}} \right)}{-b \left( \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} \right)} = \frac{-a\sqrt{x^2+y^2} - by}{-bx}.$$

Esta última ecuación es homogénea. Hacemos el cambio de variable  $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz' + z = y'$ . Recordando que  $x$  e  $y$  son positivas tenemos que

$$\begin{aligned} xz' + z &= \frac{a}{b} \sqrt{1+z^2} + z \\ \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{bx} \\ \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{b} \ln x + C. \end{aligned}$$

Reescribimos la constante  $C$  como  $C = \frac{a}{b} \ln k$  con  $k > 0$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln(kx)^{\frac{a}{b}} \\ z + \sqrt{1+z^2} &= (kx)^{\frac{a}{b}} \\ 1 + z^2 &= (kx)^{\frac{2a}{b}} - 2z(kx)^{\frac{a}{b}} + z^2. \end{aligned}$$

Despejando  $z$  y deshaciendo el cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left[ (kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}} \right] \\ \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \left[ (kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}} \right] \\ y &= \frac{x}{2} \left[ (kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}} \right]. \end{aligned}$$

De la condición de borde  $y(c) = 0$  vemos que  $k = \frac{1}{c}$ .

□

**EJERCICIO PROPUESTO 1.7.** Si las ruedas delanteras de un auto se mueven sobre una línea recta que no es paralela a su eje, encuentre la curva que describen las ruedas traseras, considerando que la distancia entre las ruedas delanteras y las traseras permanece constante. Indicación: averigüe sobre la curva *tractriz*. Por ejemplo, si el auto está inicialmente con su eje delantero en el origen y el eje trasero en el punto  $(0, a)$  y se desplaza hacia arriba en la dirección de eje  $y$ , debiera obtener la curva

$$y = a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Otra característica importante de esta curva es que su superficie de revolución en torno al eje  $y$  se conoce como la pseudoesfera y es el espacio de la geometría de Lobachevsky.

**EJERCICIO PROPUESTO 1.8.** Si el coyote parte del punto  $(c, 0)$ ,  $c > 0$  con velocidad  $\omega$  siempre en la dirección del correccaminos que parte del origen a una velocidad  $v$  en la dirección positiva del eje  $y$ , encuentre la curva de persecución del

coyote y demuestre que si  $\omega < v$  el coyote nunca alcanza al correccaminos en cambio si  $\omega > v$  lo alcanza en un tiempo  $t = \frac{c}{v} \frac{a}{1-a^2}$  donde  $a = v/\omega < 1$ .

**4.2. Ecuación de Bernoulli.** La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{con } n \neq 0, n \neq 1.$$

Se realiza el cambio de variable  $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$ . Multiplicando  $(1-n)y^{-n}$  a ambos lados de la ecuación, queda

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)q(x) \\ z' + p(x)(1-n)z &= (1-n)q(x), \end{aligned}$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.

**EJEMPLO 1.17** (Modelo logístico de población). El modelo logístico se basa en el siguiente principio:

**LEY LOGÍSTICA**

*“El aumento de una población es proporcional al producto entre la población misma y su diferencia respecto a un valor máximo que es función de los recursos disponibles limitados.”*

Esto traducido a una EDO queda como

$$(15) \quad P' = \sigma P(M - P),$$

donde  $\sigma > 0$  es constante (por ejemplo la diferencia entre tasas de natalidad y mortalidad) y  $M > 0$  es la carga máxima alcanzable. Si  $P > M$  entonces  $P'$  es negativo y la población decrece. En esta ecuación de Bernoulli hacemos el cambio de variables  $z = \frac{1}{P} \Rightarrow z' = \frac{-P'}{P^2}$  y obtenemos

$$z' = -M\sigma z + \sigma,$$

de donde

$$\frac{1}{P} = \exp\left(-\int_0^t M\sigma(s)ds\right) \left(\frac{1}{P_0} + \int_0^t \exp\left(\int_0^s M\sigma(s)ds\right) \sigma(s)ds\right).$$

Reordenando se obtiene

$$(16) \quad P = \frac{P_0 M}{P_0 + (M - P_0) \exp(-M\sigma t)}.$$

Notemos que  $P(0) = P_0$  y que  $P \rightarrow M$  si  $t \rightarrow \infty$ .

□

**4.3. Ecuación de Riccati.** La ecuación de Riccati es de la forma

$$(17) \quad y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Se realiza el cambio de variable  $y = y_1 + \frac{1}{z}$ , donde  $y_1$  es alguna solución conocida (por ejemplo fácil de calcular) de (17). Derivando con respecto a  $x$  se tiene  $y' =$

$y'_1 - \frac{z'}{z^2}$  y reemplazando en (17),

$$\begin{aligned} y'_1 - \frac{z'}{z^2} &= p(x) \left( y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + q(x) \left( y_1 + \frac{1}{z} \right) + r(x) \\ y'_1 - \frac{z'}{z^2} &= p(x)y_1^2 + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{z} + r(x) \\ y'_1 - \frac{z'}{z^2} &= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + \frac{q(x)}{z} \\ z' &= -2p(x)y_1z - p(x) - q(x)z, \end{aligned}$$

de donde

$$z' + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x),$$

que resulta ser una EDO lineal de primer orden no homogénea en la variable  $z$ .

EJEMPLO 1.18. Analicemos la ecuación diferencial

$$y' = -2 - y + y^2.$$

Como se trata de una ecuación de primer orden a coeficientes constantes, es posible encontrar una solución constante resolviendo la ecuación *algebraica*

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

cuyas raíces son 2 y  $-1$ . Tomemos entonces  $y_1 = 2$  como una solución particular de la ecuación. Siguiendo el procedimiento descrito arriba podemos encontrar la solución general haciendo el cambio

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = 2 + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= -2 - \left( 2 + \frac{1}{z} \right) + \left( 2 + \frac{1}{z} \right)^2 \\ -\frac{z'}{z^2} &= -2 - 2 - \frac{1}{z} + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} \\ -z' &= 3z + 1. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación lineal de primero orden no homogénea multiplicando por el factor integrante  $\mu(x) = \exp(\int 3dx) = e^{3x}$ .

$$\begin{aligned} z'e^{3x} + 3ze^{3x} &= -e^{3x} \\ (ze^{3x})' &= -e^{3x} \\ ze^{3x} &= -\frac{1}{3}e^{3x} + C, \end{aligned}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . Despejando encontramos  $z(x) = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x}$ . Esto nos dice finalmente que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = 2 + \frac{1}{Ce^{-3x} - \frac{1}{3}}, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Notemos que tomando  $C = 0$  recuperamos la otra solución constante  $y(x) \equiv -1$ . Es importante observar también que si  $C > 0$  la solución tiene una asíntota vertical

en  $x = \frac{1}{3} \ln(3C)$ , de modo que  $|y(x)| \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow \frac{1}{3} \ln(3C)$ .  $\square$

**4.4. EDO de segundo orden sin variable dependiente.** En la ecuación

$$G(x, y', y'') = 0$$

no aparece la variable  $y$  explícitamente. En estos casos se realiza el cambio de variable  $p = y'$ , con lo cual la ecuación se transforma en

$$G(x, p, p') = 0,$$

que es una EDO de primer orden.

EJEMPLO 1.19. Para resolver la ecuación

$$y' = \frac{x}{1+x} y'' - 1$$

hacemos el cambio  $p = y'$ ,  $p' = y''$ . Luego,

$$\begin{aligned} p+1 &= \frac{x}{1+x} p' \\ 1 + \frac{1}{x} &= \frac{p'}{p+1} \\ \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= \int \frac{dp}{p+1} \\ x + \ln|x| + C &= \ln|p+1| \end{aligned}$$

y de allí,

$$p = -1 + kxe^x \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}.$$

En términos de  $y$  esto es una ecuación con integración directa

$$\begin{aligned} y' &= -1 + kxe^x \\ y &= -x + k(x-1)e^x + K \quad \text{con} \quad k, K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\square$

**4.5. EDO de segundo orden sin variable independiente.** En la ecuación

$$H(y, y', y'') = 0$$

la variable independiente  $x$  no aparece explícitamente. Se realiza el cambio de variable

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

con lo cual la ecuación se transforma en

$$H\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

que es una EDO de primer orden en la variable  $p$  con variable independiente  $y$ .

EJEMPLO 1.20 (Ley de Hooke). Se tiene el sistema indicado en la Figura ??, siendo  $k > 0$  constante de elasticidad del resorte y  $m$  la masa del cuerpo. La Ley de Hooke establece que:



## LEY DE HOOKE

*“Para pequeños desplazamientos en torno a la posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es proporcional al desplazamiento”.*

Esto es  $my'' = -ky$ . Es decir,  $y'' + w^2y = 0$ , con  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Si  $z = y'$  entonces  $z' = \frac{dz}{dy}y'$  y la ecuación se reescribe como

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy}z + w^2y &= 0 \\ \frac{dz}{dy}z &= -w^2y.\end{aligned}$$

Integrando con respecto a la variable  $y$  vemos que

$$\begin{aligned}\int z dz &= -w^2 \int y dy + C \\ \frac{z^2}{2} &= -w^2 \frac{y^2}{2} + C \\ (y')^2 &= -w^2 y^2 + 2C \\ y' &= \sqrt{2C - w^2 y^2}.\end{aligned}$$

Finalmente usando separación de variables obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{2C - w^2 y^2}} &= \int dt + \phi \\ \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{2C} y^2}} &= \int \sqrt{2C} dt + \phi \\ \arcsen\left(\frac{wy}{\sqrt{2C}}\right) &= \sqrt{2C}t + \phi \\ \frac{wy}{\sqrt{2C}} &= \sen(\sqrt{2C}t + \phi) \\ y &= \frac{\sqrt{2C}}{w} \sen(\sqrt{2C}t + \phi) \quad \text{con } C, \phi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.21 (Cadena cayendo). Para el sistema de la segunda figura, el largo de la cadena es  $L$  y su densidad es  $\rho$  [masa / largo], por lo tanto la EDO que lo describe es

$$\begin{aligned}\rho L y'' &= \rho g y \\ y'' - \frac{g}{L} y &= 0.\end{aligned}$$

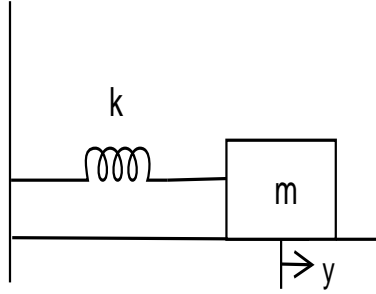


FIGURA 8. Sistema mecánico de un resorte y una masa.

Definiendo  $\sigma = \sqrt{\frac{g}{L}}$  se tiene la EDO  $y'' - \sigma^2 y = 0$ . El mismo cambio de variable nos da

$$\begin{aligned} z \frac{dz}{dy} - \sigma^2 y &= 0 \\ z \frac{dz}{dy} &= \sigma^2 y \\ \frac{z^2}{2} &= \sigma^2 \frac{y^2}{2} + C \\ z &= \sqrt{\sigma^2 y^2 + 2C} \\ y' &= \sigma \sqrt{y^2 + a^2} \quad \text{con} \quad a = \frac{2C}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Esto es

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \sigma \int dt = \sigma t + \phi.$$

Haciendo el cambio de variable  $y = a \sinh \theta$  en el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cosh \theta}{a \cosh \theta} d\theta &= \sigma t + \phi \\ \theta &= \sigma t + \phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $y = a \sinh(\sigma t + \phi)$ , con  $\phi \in \mathbb{R}$  constante.  $\square$

**4.6. Otros casos.** En ocasiones es posible reducir una ecuación complicada a otra más simple mediante un cambio de variables. No hay una regla general para determinar el cambio correcto, de modo que la experiencia es clave.

EJEMPLO 1.22. La ecuación

$$y' = (x + y)^2$$

es de Riccati. Sin embargo, para aplicar el método descrito más arriba es necesario conocer una solución particular, lo que puede no ser evidente. Otra opción es usar el cambio  $w = x + y$ . Esto nos da  $w' = 1 + y'$  y la ecuación se transforma en

$$w' = w^2 + 1,$$

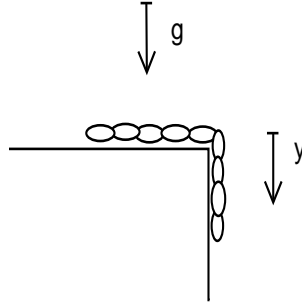


FIGURA 9. Sistema mecánico de una cadena bajo el efecto de  $g$  con un extremo cayendo.

que es una ecuación en variables separables. Para hallar la solución general hacemos

$$\int \frac{dw}{w^2 + 1} = \int dx,$$

de donde  $\arctan(w) = x + C$ . Esto es

$$y = -x + \tan(x + C), \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

EJEMPLO 1.23. En la ecuación

$$y' = \frac{\cos(x + y + 1)}{1 - \cos(x + y + 1)}$$

podemos hacer el cambio  $z = x + y + 1$ . Con esto,  $z' = y' + 1$  y la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{1 - \cos(z)} \\ \int (1 - \cos(z)) dz &= \int dx \\ z - \sin(z) &= x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución queda definida implícitamente como

$$y - \sin(x + y + 1) = C.$$

□

Otro procedimiento útil es integrar la variable independiente en términos de la variable dependiente y luego despejar. La justificación, a grandes rasgos y sin entrar en detalles, es la siguiente: en los intervalos donde  $y'$  existe y no se anula, la expresión  $y = y(x)$  define implícitamente a  $x$  en función de  $y$ . Es decir, podemos escribir  $x = x(y)$ . Observando que  $x(y(x)) = x$  y usando la regla de la cadena vemos que

$$\begin{aligned} x'(y(x))y'(x) &= 1 \\ x'(y) &= \frac{1}{y'(x)}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.24. La ecuación

$$y'(e^y - x) = y$$

puede escribirse como

$$\frac{e^y - x}{y} = \frac{1}{y'} = x'.$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden en  $x$  si se toma  $y$  como variable:

$$x' + \frac{1}{y}x = \frac{1}{y}e^y.$$

Multiplicando por el factor integrante  $\mu(y) = y$  esto nos da

$$\begin{aligned}(xy)' &= e^y \\ xy &= e^y + C\end{aligned}$$

y la solución queda definida de manera implícita.

Otra manera de resolver la ecuación es

$$\begin{aligned}y'x + y &= e^y y' \\ (xy)' &= (e^y)' \\ xy &= e^y + C.\end{aligned}$$

□

## Capítulo 2

## El problema de Cauchy: existencia, unicidad y métodos numéricos

### 1. Definiciones preliminares

Para establecer los teoremas generales de existencia y unicidad de EDO, así como métodos prácticos de resolución por computador, requerimos primero precisar la noción de solución de una EDO.

DEFINICIÓN 2.1. Dado un intervalo real  $I$  (no reducido a un punto), denotaremos por  $\mathcal{C}^n(I)$  el conjunto de las funciones  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  cuyas derivadas hasta el orden  $n$  existen y son continuas en  $I$  y las llamaremos *funciones de clase  $\mathcal{C}^n$* .

Es fácil ver que  $\mathcal{C}^n(I)$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y ponderación por escalar.

Consideremos ahora una función  $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . La noción<sup>1</sup> de solución que estudiaremos es la siguiente:

DEFINICIÓN 2.2. Diremos que una función  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  es *solución* de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

en el intervalo  $I$  si  $y \in \mathcal{C}^n(I)$  y

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

para todo  $x \in I$ . Por otra parte, la *solución general* de una ecuación diferencial es una expresión que agrupa, de manera compacta y explícita, la *familia* de todas las soluciones. Una solución cualquiera se denomina también a veces *solución particular*.

EJEMPLO 2.1. Consideremos la ecuación diferencial  $y'(x) = 0$  en un intervalo  $I$ . Recordemos que la derivada de una función en un intervalo es cero si, y sólo si, la función es constante. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

En muchas ocasiones las ecuaciones diferenciales revelan información cualitativa acerca de solución, como vemos en el siguiente ejemplo:

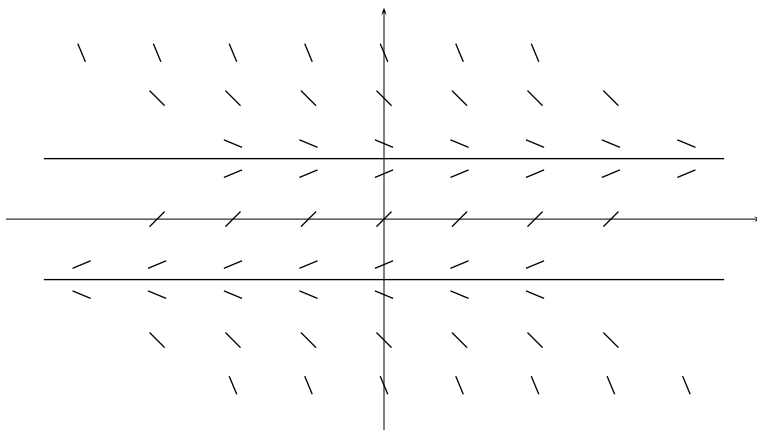
EJEMPLO 2.2. Consideremos la ecuación diferencial  $y' = 1 - |y|$  en  $\mathbb{R}$ . En el capítulo precedente estudiamos las técnicas que nos permiten resolver esta ecuación. Sin embargo, sin necesidad de resolver, solamente al examinar la ecuación diferencial podemos tener una idea de cómo son las soluciones. En efecto, vemos

---

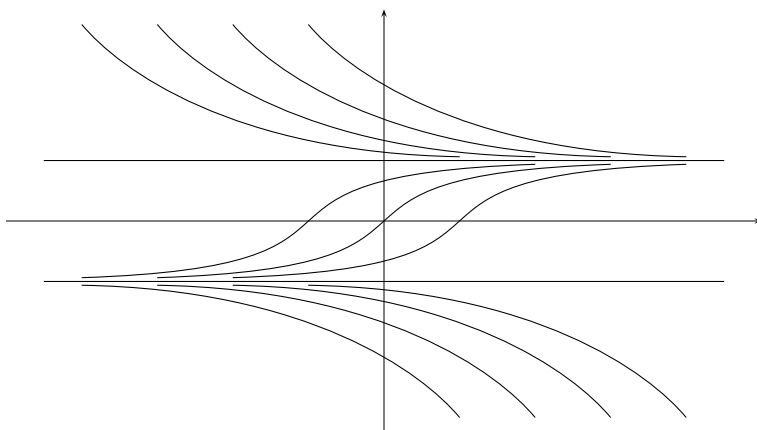
<sup>1</sup>Más adelante, en el capítulo de Transformada de Laplace, veremos un caso más general de soluciones continuas y con derivada continua por pedazos.

que las funciones constantes  $y(x) \equiv 1$  y  $y(x) \equiv -1$  son de clase  $C^1$  y satisfacen  $y' = 1 - |y|$  en  $\mathbb{R}$ , por lo que definen soluciones de la EDO.

Supongamos ahora que  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la EDO. En los puntos donde  $y$  toma valores entre  $-1$  y  $1$ , su derivada es positiva; luego  $y$  es creciente. En otro caso,  $y$  es decreciente. Además mientras más cerca esté  $y(x)$  de los valores  $1$  y  $-1$ , más cercana a  $0$  será su derivada. Si al contrario,  $|y(x)|$  es muy grande, la pendiente será muy pronunciada.



Otro dato que obtenemos directamente de la ecuación es que si  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  define una solución, entonces la función  $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y_c(x) = y(x + c)$  también define una solución (basta sustituir en la ecuación). Esto nos dice que al trasladar una solución hacia la derecha o hacia la izquierda obtenemos más soluciones.<sup>2</sup> Con toda esta información deducimos que, de existir, las soluciones de la EDO deben tener un aspecto bastante similar a las que se muestran a en la gráfica siguiente:



□

<sup>2</sup>Esto es una particularidad de las EDO *autónomas*, que no dependen explícitamente de la variable independiente.

## 2. El problema de Cauchy

En el ejemplo anterior, si bien la ecuación diferencial tiene más de una solución, el gráfico sugiere que por cada punto  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  pasa una y sólo una de estas curvas. Determinar una (o la) solución de una EDO que pasa por cierto punto dado es lo que se conoce como resolver *el problema de Cauchy*.

DEFINICIÓN 2.3. El problema de Cauchy asociado a una ecuación de primer orden consiste en encontrar  $y \in \mathcal{C}^1(I)$  tal que

$$(PC) \begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) & \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

donde  $I$  es un intervalo,  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ . La igualdad  $y(x_0) = y_0$  se llama *condición inicial* o *de borde* según la variable  $x$  se interprete como tiempo o espacio respectivamente.

Las soluciones del problema de Cauchy se ajustan a las condiciones iniciales o de borde. Es importante no confundirlas con la familia de soluciones de la ecuación diferencial sin condiciones iniciales o de borde (solución general).

Dependiendo de  $f$ ,  $x_0$  e  $y_0$ , el problema de Cauchy puede o no tener solución y, en caso de tener, ésta puede o no ser única. Los Teoremas 2.1 y 2.3 más adelante garantizarán *la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy* bajo ciertas condiciones.

Veamos bajo qué hipótesis es razonable esperar que el problema de Cauchy asociado a una EDO tenga una única solución.

En primer lugar, para que  $y'(x)$  sea continua es necesario que  $y(x)$  y  $f(x, y)$  (como función de dos variables) lo sean. Sin más información sobre la función  $y$  es poco probable que la composición  $f(x, y(x))$  sea continua si  $f$  no lo es<sup>3</sup>. Es de esperar que necesitemos imponer que la función  $f$  sea continua para garantizar que el problema tenga solución. Sin embargo, esto no es suficiente para obtener la unicidad, como muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.3. Consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) &= \sqrt{y(x)} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

La función constante  $y(x) \equiv 0$  es solución, al igual que la función

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

Observemos que la derivada de la función  $g(y) = \sqrt{y}$  diverge cerca del valor  $y = 0$ . Más precisamente,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{0}}{y - 0} = \infty.$$

---

<sup>3</sup>A menudo se utiliza el abuso de notación de llamar  $f$  a la función  $x \rightarrow f(x, y(x))$  y a la función  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ .

Entonces, para probar la unicidad de solución para el problema de Cauchy necesitaremos una segunda condición. Esta será que el cociente en el límite anterior se mantenga acotado cerca del punto, y a esto lo llamaremos una *condición de tipo Lipschitz*.

### 3. Los teoremas de existencia y unicidad

DEFINICIÓN 2.4. Sean  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $L > 0$ . Decimos que  $f$  es *globalmente Lipschitz* con respecto a la segunda variable, con constante de Lipschitz  $L$ , si para cada  $y, z \in \mathbb{R}$  y para cada  $x \in I$  se tiene

$$(18) \quad |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|.$$

Esta definición se puede generalizar para espacios normados, por lo cual definiremos lo que es una norma.

DEFINICIÓN 2.5. Una norma es una aplicación  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  (Desigualdad triangular)

Algunos ejemplos de normas son:

EJEMPLO 2.4. Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$

1.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
2.  $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
3.  $\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$

Enunciaremos y demostraremos ahora el Teorema de Existencia y Unicidad Global<sup>4</sup>.

TEOREMA 2.1. Sea  $I$  un intervalo. Supongamos que  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con respecto a su primera variable y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Entonces para cada  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$  existe una única solución global  $y \in C^1(I)$  del problema de Cauchy (PC).

Para realizar la demostración será necesario precisar el teorema de punto fijo de Banach:

TEOREMA 2.2. Sea un operador  $\phi : E \rightarrow E$  contractante (Con constante de Lipschitz  $L < 1$ ) con respecto a una norma tiene un único punto fijo ( $x \in E : x = \phi(x)$ ), siempre que  $E$  sea completo para su norma, es decir que todas las sucesiones de Cauchy convergen.

Un punto fijo puede ser visto gráficamente como:

EJEMPLO 2.5. Algunos espacios de Banach que usaremos son:

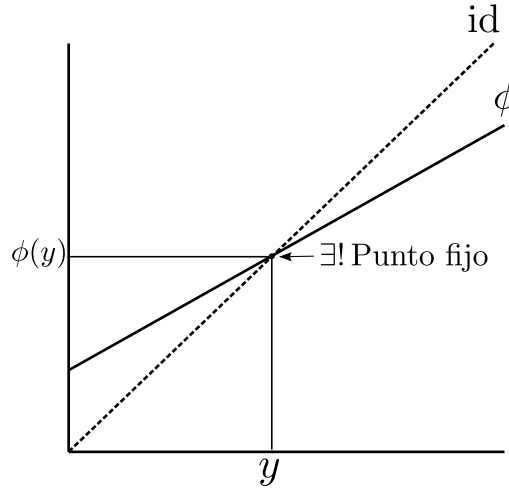
$$E = C^0(I) \text{ con } \|\cdot\|_\infty$$

$$E = \{y \in C^0(I) | \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\} \quad (\psi_1, \psi_2 \text{ continuas en } I)$$

---

<sup>4</sup>Cuya versión más general será el Teorema 5.2 que se demostrará más adelante en este texto.





Ahora procederemos a demostrar el Teorema de existencia y unicidad global.

DEMOSTRACIÓN. Sea el siguiente problema de Cauchy:  $y \in C^1(I)$  tal que

$$(PC) \begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Con  $I$  cerrado y acotado,  $f$  continua con respecto a  $x$  y  $f$  Lipschitz global con respecto a  $y$ .

Para efecto de esta demostración encontraremos una solución a  $(PC)$ , tomando la ecuación del  $(PC)$ :

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ \Leftrightarrow \int_{x_0}^x y' &= \int_{x_0}^x f(x, y) dx \\ \Leftrightarrow y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (*) \end{aligned}$$

Podemos ver que  $(*)$  soluciona el problema de Cauchy, en efecto:

$$(1) \quad y' = \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \right)' = f(x, y)$$

Esto haciendo uso del Teorema fundamental del calculo pues  $f \in C^0$  ( $f$  continua con respecto a  $x$  y como es Lipschitz con respecto a  $y$ , luego es continua).

$$(2) \quad y(0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y) dx = y_0$$

Teniendo esto definimos el siguiente operador integral:

$$\begin{aligned} \phi : C^0(I) &\rightarrow C^0(I) \\ y &\mapsto \phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \end{aligned}$$

Podemos ver que  $\phi$  esta bien definida pues  $\phi(y) \in C^0(I)$  (Por composición de funciones).

La solución de (\*) y equivalentemente del (PC) sería un punto fijo de  $\phi$  tal que  $y = \phi(y)$ . Luego si demostramos que  $\phi$  es contractante, usando el Teorema de punto fijo de Banach 2.2, mostraríamos la existencia y unicidad de el punto fijo de  $\phi$  y por consecuencia la existencia y unicidad de la solución del (PC).

Para mostrar que  $\phi$  es contractante definiremos la siguiente norma en el espacio:  $C^0(I)$

$$\|f\|_{\infty, L} := \sup_{x \in I} [|f(x)| e^{-2L(x-x_0)}]$$

Con  $L$  siendo la constante de Lipschitz de  $y$ , esta norma nos sera útil para mostrar que  $\phi$  es contractante:

$$\begin{aligned} \|\phi(y) - \phi(z)\| &\leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, z)| dx \\ &= \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, z)| e^{-2L(x-x_0)} e^{2L(x-x_0)} dx \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y - z| e^{-2L(x-x_0)} e^{2L(x-x_0)} dx \quad (\text{f Lipschitz}) \\ &\leq L \sup_{x \in I} [|y(x) - y(z)| e^{-2L(x-x_0)}] \int_{x_0}^x e^{2L(x-x_0)} dx \\ &= L \|y - z\|_{\infty, L} \frac{1}{2L} e^{2L(x-x_0)} \Big|_{x_0}^x \\ &= \frac{1}{2} \|y - z\|_{\infty, L} e^{2L(x-x_0)} \\ \Leftrightarrow \|\phi(y) - \phi(z)\| e^{-2L(x-x_0)} &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|_{\infty, L} \end{aligned}$$

Luego tomando supremo en la izquierda sobre  $x \in I$  concluimos que

$$\|\phi(y) - \phi(z)\|_{\infty, L} \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_{\infty, L}$$

$\Rightarrow \phi$  es contractante  $\Rightarrow \exists!$  punto fijo para  $\phi \Rightarrow \exists!$  solución para el (PC)  $\square$

El teorema garantiza que la solución existe en todo el intervalo de definición (para la primera variable) de  $f$ . Por eso la solución es global. En particular, si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces la solución queda definida en todo  $\mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 2.6.** En el Ejemplo 2.2 esbozamos las soluciones de la ecuación  $y' = 1 - |y|$ . En este caso tenemos que la  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f(x, y) = 1 - |y|$ . Claramente esta función es continua con respecto a su primera variable, pues no depende explícitamente de ella. Veamos que es globalmente Lipschitz con respecto a la segunda (verifique gráficamente considerando la pendiente de la recta secante a la función  $f(y) = 1 - |y|$  entre dos puntos cualesquiera  $y$  y  $z$ ):

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |1 - |y| - (1 - |z|)| = ||y| - |z|| \leq |y - z|.$$

El Teorema 2.1 nos dice que por cada punto  $(x, y)$  del plano pasa una única solución, como se aprecia en la figura del Ejemplo 2.2.  $\square$

El que  $f$  verifique (18) para todo  $x \in I$  y para todos  $y, z \in \mathbb{R}$  es una hipótesis bastante restrictiva. Para garantizar existencia y unicidad locales, en realidad basta que la función  $f$  sea Lipschitz con respecto a su segunda variable *en un entorno*

de la condición inicial. Presentamos a continuación un Teorema de Existencia y Unicidad Local<sup>5</sup>.

**TEOREMA 2.3.** *Sea  $I$  un intervalo. Tomemos  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua (con respecto a su primera variable) en  $x_0$ . Supongamos también que existen  $r, \delta, L > 0$  tales que  $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$  siempre que  $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$  y  $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Denotemos*

$$\begin{aligned} M &= \max\{|f(x, y)| \mid x \in I, |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq r\}, \\ \delta_0 &= \min\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\}, \quad y \quad J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0). \end{aligned}$$

Entonces existe una única solución local  $y \in C^1(J)$  del problema de Cauchy (PC).

Notemos que la solución puede no quedar definida en todo  $I$  sino que en un subconjunto  $J$ . Por eso se le llama solución local. De hecho, la solución puede estar definida en un intervalo tanto más pequeño cuanto más grande sea  $M$ . Una función con la propiedad descrita en el teorema decimos que es *localmente Lipschitz* con respecto a su segunda variable en un entorno de  $(x_0, y_0)$ .

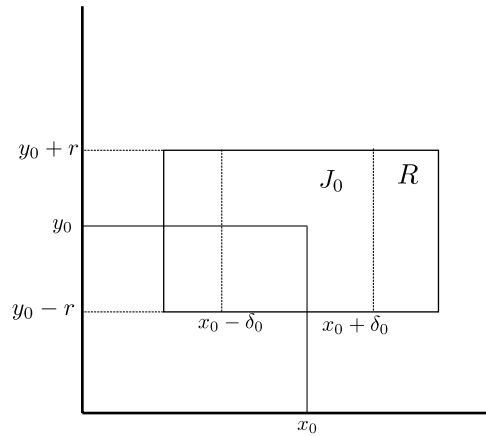
**DEMOSTRACIÓN.** Tomamos el mismo (PC) de la demostración de la existencia y unicidad global, pero ahora  $f$  es localmente Lipschitz con respecto a  $y$ . Luego se tiene que:

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|, \quad L > 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \forall y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$$

Además sea  $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], y \in [y_0 - r, y_0 + r]\}$ .

Luego tomando  $\delta_0 = \min(\delta, \frac{r}{M})$  con  $M := \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$

Luego ocupando esto definimos:  $J_0 = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$  Este conjunto nos servirá para



definir el siguiente espacio:

$$E := \{Y \in C^0(J_0) \mid \min\{y_0 \pm M(x - x_0)\} \leq Y(x) \leq \max\{y_0 \pm M(x - x_0)\}\}$$

<sup>5</sup>Cuya versión más general será el Teorema 5.4 que se demostrará más adelante también.

Ahora ocupamos el mismo operador integral usado en la demostración de TEU global  $\phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ , podemos ver claramente que  $\phi \in E$ , pues:

$$\int_{x_0}^x f(x, y)dx \leq M(x - x_0)$$

(Muy parecido a la noción de integral de Riemann), Ahora como vimos en el ejemplo 2.5 el espacio de funciones acotados por funciones continuas es Banach, es decir  $E$  es un espacio de Banach, se puede evidenciar que  $\phi$  es contractante en este espacio  $\Rightarrow \exists!$  punto fijo para  $\phi \Rightarrow \exists!$  solución para el  $(PC)$  en torno a  $x_0$ .  $\square$

EJEMPLO 2.7. Consideremos la ecuación  $y' = -y^2$ , con condición inicial  $y(0) = y_0 > 0$ . Por el momento sabemos que existe una única solución que está definida cerca de  $x_0 = 0$ . Primero veamos que la función  $f(x, y) = -y^2$  es localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable en un entorno de  $y_0$ .

En efecto, para  $\delta > 0$  cualesquiera y  $0 < r \leq y_0$  se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |y^2 - z^2| = |y + z||y - z| \leq 2(y_0 + r)|y - z|$$

siempre que  $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$  (no hay restricción del tipo  $|x - x_0| \leq \delta$ ) y una constante de Lipschitz es  $L = 2(y_0 + r)$ .

Calculemos los valores de  $M$  y  $\delta_0$  que da el Teorema 2.3 para saber dónde tenemos garantizada la existencia de una única solución.

$$M = \max\{y^2 \mid |y - y_0| \leq r\} = (y_0 + r)^2.$$

Por otra parte,  $\delta_0 = r(y_0 + r)^{-2}$ . Pero como todo lo anterior es válido para cualquier  $r > 0$  podemos tomar

$$\delta_0 = \max_{r>0} \frac{r}{(y_0 + r)^2} = \frac{1}{4y_0}.$$

Todo lo anterior nos dice que existe una única solución y está definida, al menos, en el intervalo  $(-\frac{1}{4y_0}, \frac{1}{4y_0})$ .

Por otra parte, observemos que  $y(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0}}$  es la solución de la ecuación (en el capítulo anterior vimos cómo deducir esto). En realidad ella está definida en el intervalo  $(-\frac{1}{y_0}, \infty)$ , que es más grande de lo que predice el Teorema 2.3. Observemos, sin embargo, que el punto donde  $y$  deja de existir está más cerca de  $x_0 = 0$  cuando más grande sea  $y_0$ .  $\square$

EJEMPLO 2.8. Retomando el Ejemplo 2.3, notemos que la función  $f(x, y) = \sqrt{y}$  no es localmente Lipschitz con respecto a  $y$  en un entorno de  $y_0 = 0$ , de modo que el Teorema 2.3 no permite esperar que exista una única solución. Sin embargo, se puede probar fácilmente que la función sí es localmente Lipschitz si tomamos  $y_0 > 0$ . Se deja al lector verificar esto y encontrar el intervalo de existencia y unicidad.  $\square$

La condición de Lipschitz no es siempre fácil de verificar directamente. Un criterio práctico que funciona a menudo es el siguiente. Supongamos que  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua con respecto a su primera variable y de clase  $\mathcal{C}^1$  con respecto a su segunda variable. Con la ayuda del Teorema del Valor Medio se puede demostrar

que  $f$  satisface las condiciones del Teorema 2.3. En efecto si  $C = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - r, y_0 + r]$  entonces  $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$ , donde<sup>6</sup>

$$L = \max_{(x,y) \in C} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|.$$

#### 4. Aproximación del problema de Cauchy mediante métodos numéricos

En esta sección presentaremos algunos métodos numéricos básicos que se pueden utilizar para aproximar la solución  $y(x)$  de un problema de Cauchy del tipo

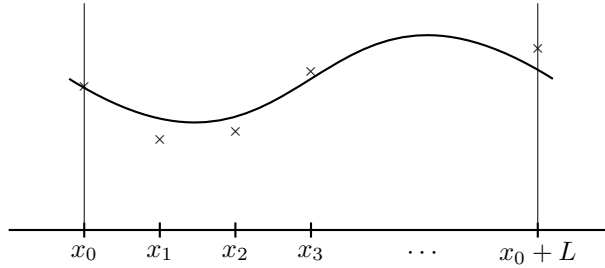
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{para todo } x \in [x_0, x_0 + L], \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde  $L > 0$  es el largo total del intervalo.

En primer lugar dividimos  $[x_0, x_0 + L]$  en  $N$  pequeños subintervalos  $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  de la misma longitud: para ello, escribimos  $h = \frac{L}{N}$  y para  $n = 1, \dots, N$  definimos  $x_n = x_0 + nh$ , de manera que  $x_N = x_0 + L$  y

$$[x_0, x_0 + L] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

La idea es encontrar puntos  $\{y_1, \dots, y_N\}$  tales que el error  $e_n = y_n - y(x_n)$  sea pequeño para cada  $n = 1, \dots, N$ , pero en particular en el punto final  $x_N = x_0 + L$ .



Solución exacta y su aproximación en el intervalo  $[x_0, x_0 + L]$ .

Integrando la ecuación diferencial en cada intervalo  $I_n = [x_n, x_{n+1}]$  obtenemos

$$(19) \quad y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds.$$

La manera de aproximar la integral que aparece del lado derecho nos dará diversos métodos para encontrar los puntos  $\{y_n\}_{n=1}^N$ .

**4.1. Orden del algoritmo. Error local y global.** En las siguientes secciones veremos varios algoritmos de discretización usando la identidad integral (19). Como ya mencionamos, al discretizar nos interesará que los *errores de discretización globales*

$$e_n = y_n - y(x_n)$$

<sup>6</sup>No confundir  $y' = \frac{dy}{dx}$  con  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

sean pequeños, esto es, que la solución discretizada se mantenga cerca de la solución exacta. Sin embargo, el error se va acumulando al pasar de un intervalo  $I_i$  al siguiente y eso quiere decir que los errores en  $I_0, I_1, \dots, I_n$  van a incidir en el error  $e_n$  al final del intervalo en  $x_{n+1}$ . Por eso llamamos a  $e_n$  error global.

Para saber cuál es el error de discretización local en cada intervalo  $I_n$ , hay que considerar el problema de Cauchy local

$$\begin{aligned} z' &= f(x, z), \quad t \in I_n \\ z(x_n) &= y_n \end{aligned}$$

es decir, considerar la solución exacta si ésta coincidiera con la numérica en  $x = x_n$ . En general  $z(x_{n+1})$  difiere de  $y_{n+1}$  lo que lleva a definir el *error de discretización local*:

$$d_n = y_{n+1} - z(x_{n+1}),$$

que también difiere del error global  $e_n$ .

DEFINICIÓN 2.6. El máximo  $p$  tal que

$$|d_n| \leq Ch^{p+1}$$

para una constante  $C$  independiente de  $h$  se define como el *orden* del método.

Que el orden sea  $p$  y no  $p+1$  se explica pues el error de discretización global  $e_N$  luego de  $N = h/L$  iteraciones será comparable con la suma de los  $N$  errores locales  $d_n$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ :

$$|e_N| \leq \sum_{n=0}^{N-1} d_n \leq CNh^{p+1} = \frac{C}{L}h^p$$

por lo que se pierde un orden al sumar y el error acumulado al final del cálculo medido en el último intervalo se comporta solamente como  $h^p$ .

No analizaremos el orden de cada uno de los métodos que veremos en detalle, aunque sí lo indicaremos. Es fácil convencerse de que el orden del método depende principalmente del error de la cuadratura que se escoge para aproximar el término integral de la derecha en (19). Entonces, cuadraturas por rectángulos, trapecios y el método de Simpson generarán métodos de cada vez mayor orden.

**4.2. Métodos de primer orden.** La manera más obvia de aproximar la integral en (19) es usar un rectángulo. Esto nos da los métodos de Euler de primer orden, de acuerdo con el extremo del intervalo que usemos para definir la altura del rectángulo.

**Método de Euler progresivo.** Empezamos haciendo  $y(x_0) = y_0$ . Aproximamos la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(s, y(s)) ds$$

por el área del rectángulo con base en el segmento  $[x_0, x_1]$  y cuya altura esta dada por el valor del integrando en el extremo izquierdo del intervalo  $[x_0, x_1]$ . Tenemos que

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(s, y(s)) ds \sim (x_1 - x_0) f(x_0, y(x_0)),$$

de donde

$$y(x_1) \sim y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y(x_0)).$$

Esto sugiere definir

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

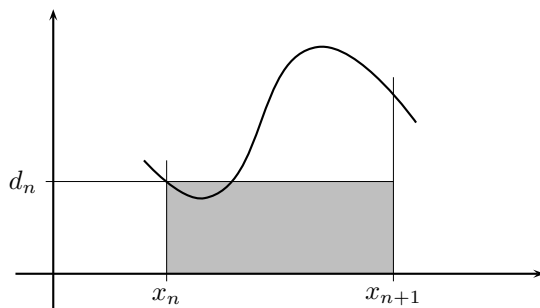
Inductivamente, para  $n = 1, \dots, N - 1$  definimos

$$(20) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Observemos que esto es equivalente a

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) =: d_n.$$

El cociente del lado izquierdo es una aproximación de la derivada de la función  $y$ . Se dice que éste es un método *explícito* pues la expresión (20) nos da una fórmula para  $y_{n+1}$  en términos del valor conocido  $y_n$ .



$$\text{Método de Euler progresivo: } \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim d_n(x_{n+1} - x_n).$$

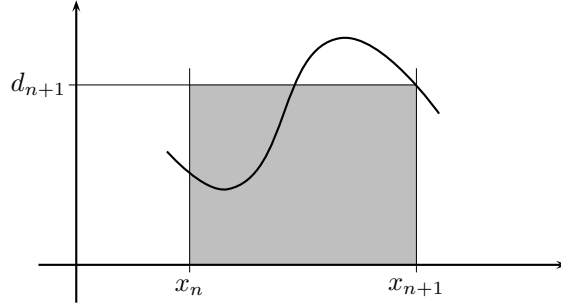
**Método de Euler retrógrado.** Esta vez aproximamos la integral utilizando el valor del integrando en el extremo derecho de cada subintervalo. Para  $n = 0, \dots, N - 1$  definimos

$$(21) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

lo que equivale a

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Se dice que este es un método *implícito* pues es necesario resolver la ecuación (21), que generalmente es no lineal, para determinar  $y_{n+1}$ . Este proceso puede ser difícil, lo cual representa una desventaja de este método. Sin embargo, el método de Euler retrógrado (y los métodos implícitos en general) goza de mejores propiedades de estabilidad, concepto que presentaremos más adelante.



Método de Euler retrógrado:  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim d_{n+1}(x_{n+1} - x_n)$ .

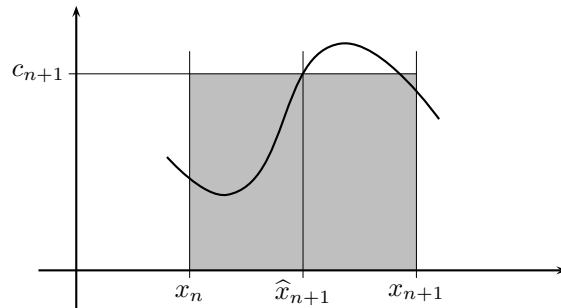
**4.3. Métodos de segundo orden.** Los métodos de segundo orden utilizan dos aproximaciones sucesivas para calcular la integral, basadas en el valor del integrando en dos puntos distintos del subintervalo. Los que presentamos a continuación son casos especiales de los llamados *esquemas de Runge-Kutta*.

**Método de Euler modificado.** También se basa en una aproximación de la integral por un rectángulo, pero esta vez se toma el valor del integrando en el punto medio del subintervalo  $\hat{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}$ . Dicho valor es  $f(\hat{x}_{n+1}, y(\hat{x}_{n+1}))$ . Es necesario estimar el valor de  $y(\hat{x}_{n+1})$ , para lo cual se utiliza el método de Euler progresivo (en lugar de resolver una ecuación no lineal). Así, cada iteración del algoritmo tiene dos etapas. Primero calculamos

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n),$$

que aproxima el valor de  $y(\hat{x}_{n+1})$ . Luego hacemos

$$y_{n+1} = y_n + h f(\hat{x}_{n+1}, \hat{y}_{n+1}).$$



Método de Euler modificado:  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim c_{n+1}(x_{n+1} - x_n)$ .

**Método de Heun.** En esta ocasión utilizamos la regla de los trapecios para aproximar la integral:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))].$$

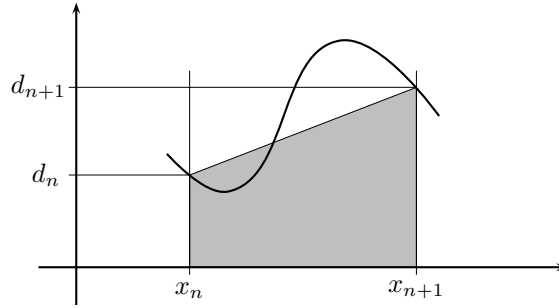


Al igual que en el método de Euler modificado, estimaremos el valor de  $y(x_{n+1})$  usando el método de Euler progresivo. Así, definimos

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

y luego calculamos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[ f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}) \right].$$



$$\text{Método de Heun: } \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim \frac{1}{2}(d_{n+1} + d_n)(x_{n+1} - x_n).$$

EJEMPLO 2.9. Estudiemos el problema

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) + e^x & \text{para } x \in (0, 1), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal de primer orden no homogénea que sabemos resolver.

$$\begin{aligned} y' - y &= e^x \\ e^{-x}y' - e^{-x}y &= 1 \\ (e^{-x}y)' &= 1 \\ e^{-x}y &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la condición inicial, vemos que la solución es

$$(22) \quad y(x) = e^x(x + 1).$$

Veamos ahora cómo funcionan los métodos descritos arriba. Para ello dividimos el intervalo  $[0, 1]$  en 20 subintervalos de longitud 0,05. La siguiente tabla muestra los valores que da la ecuación diferencial (ED) mediante la fórmula (22), los métodos de Euler progresivo (EP), de Euler retrógrado (ER), de Euler modificado (EM) y de Heun (H), junto con los errores cometidos al aplicar cada método.

□

**4.4. Estabilidad.** A grandes rasgos, un método es estable en la medida en que los valores que entrega se mantienen cerca de la solución que se pretende aproximar. Es decir, si el error  $e_n = y_n - y(x_n)$  se mantiene acotado o pequeño. Hay diferentes criterios de estabilidad, pero nosotros nos centraremos en la llamada *estabilidad asintótica*, que tiene que ver con el comportamiento a largo plazo.

X	ED	EP	Error	ER	Error	EM	Error	H	Error
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0.05	1.104	1.100	0.004	1.108	0.004	1.104	0.000	1.104	0.000
0.10	1.216	1.208	0.008	1.224	0.009	1.216	0.000	1.216	0.000
0.15	1.336	1.323	0.013	1.350	0.014	1.336	0.000	1.336	0.000
0.20	1.466	1.447	0.018	1.485	0.020	1.465	0.000	1.465	0.000
0.25	1.605	1.581	0.024	1.631	0.026	1.605	0.000	1.605	0.000
0.30	1.755	1.724	0.031	1.788	0.033	1.754	0.001	1.754	0.000
0.35	1.916	1.878	0.038	1.957	0.041	1.915	0.001	1.915	0.001
0.40	2.089	2.043	0.046	2.138	0.050	2.088	0.001	2.088	0.001
0.45	2.274	2.219	0.055	2.333	0.059	2.273	0.001	2.273	0.001
0.50	2.473	2.409	0.064	2.543	0.070	2.472	0.001	2.472	0.001
0.55	2.687	2.612	0.075	2.768	0.082	2.685	0.001	2.685	0.001
0.60	2.915	2.829	0.086	3.010	0.094	2.914	0.002	2.914	0.001
0.65	3.161	3.061	0.099	3.269	0.108	3.159	0.002	3.159	0.001
0.70	3.423	3.310	0.113	3.547	0.124	3.421	0.002	3.422	0.002
0.75	3.705	3.577	0.128	3.845	0.140	3.702	0.002	3.703	0.002
0.80	4.006	3.861	0.145	4.165	0.159	4.003	0.003	4.004	0.002
0.85	4.328	4.166	0.163	4.507	0.178	4.325	0.003	4.326	0.002
0.90	4.673	4.491	0.182	4.873	0.200	4.670	0.003	4.671	0.003
0.95	5.042	4.838	0.204	5.266	0.224	5.038	0.004	5.039	0.003
1	5.437	5.210	0.227	5.686	0.250	5.432	0.004	5.433	0.003

CUADRO 1. Desempeño de los métodos estudiados

Supongamos que se quiere aproximar la solución de un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad \text{para todo } x \in [x_0, \infty), \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

Tomamos  $h > 0$  y definimos  $x_n = x_0 + nh$ , de manera que

$$[x_0, \infty) = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots$$

Calculamos los valores de  $y_n$  que nos entrega el algoritmo y los comparamos con los valores de la solución exacta del problema de Cauchy. Diremos que un método de aproximación es

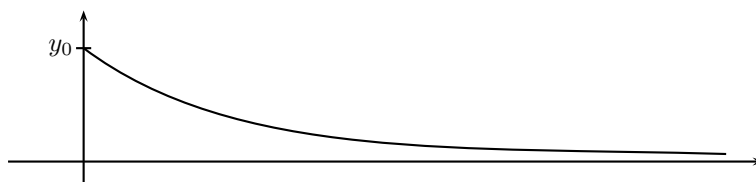
1. *Incondicionalmente estable* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$  para cualquier valor de  $h > 0$ .
2. *Condicionadamente estable* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$  para algunos valores de  $h > 0$ .
3. *Inestable* si  $|y_n - y(x_n)|$  no converge a cero para algún valor de  $h > 0$ .

Para entender mejor este concepto analizaremos la estabilidad de los métodos de primer orden descritos arriba al momento de aproximar ciertas ecuaciones.

EJEMPLO 2.10. Estudiaremos el problema

$$\begin{cases} y'(x) &= -ay(x) \quad \text{para } x \in (0, \infty), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

con  $a > 0$  e  $y_0 > 0$ . Se trata de una ecuación lineal de primer orden cuya solución es  $y(x) = y_0 e^{-ax}$ . Observemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$  para todos los valores de  $a$  e  $y_0$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = 0$ .



Solución de la ecuación diferencial.

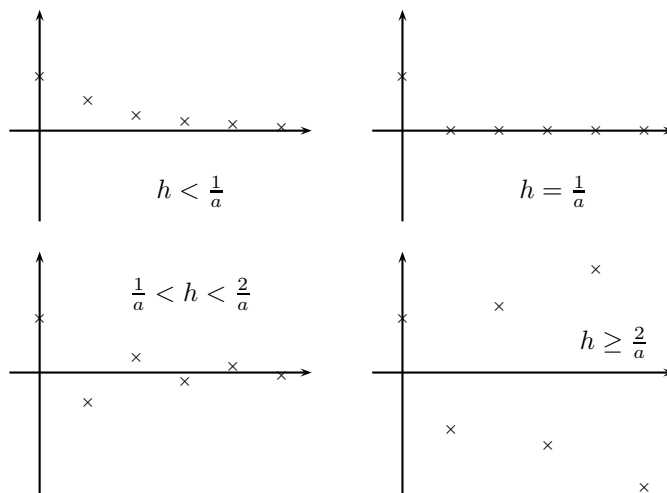
Al aplicar el método de Euler progresivo tenemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-ay_n) = (1 - ah)y_n = (1 - ah)^{n+1}y_0.$$

Tenemos dos casos:

1. Si  $h < 2/a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  y por ende  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$ .
2. Si  $h \geq 2/a$ , la sucesión diverge y no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)|$ .

Por lo tanto el método es condicionalmente estable (e inestable si  $h \geq 2/a$ ). Notemos que la inestabilidad se manifiesta por *oscilaciones no acotadas* de la solución numérica. Este hecho resulta ser mucho más general y se aplica incluso como definición de inestabilidad en métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.

Método de Euler progresivo con distintos valores de  $h$ .

□

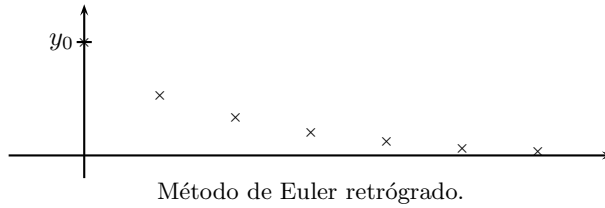
EJEMPLO 2.11. Si aplicamos el método de Euler retrógrado para el problema de Ejemplo 2.10 obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(-ay_{n+1}).$$

Despejando vemos que

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+ah} y_n = \frac{1}{(1+ah)^{n+1}} y_0.$$

Como  $1+ah > 1$  para todo  $h > 0$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$  sin importar el valor de  $h$ . Esto nos dice que el método es incondicionalmente estable.  $\square$



La estabilidad condicional es frecuente entre los métodos explícitos y la incondicional, entre los implícitos. Como resumen del análisis precedente, digamos que el error de los métodos de Euler progresivo y retrógrado es similar cuando  $h$  es pequeño y ambos métodos son estables, pero si  $h$  crece, el método de Euler progresivo se vuelve inestable.

EJEMPLO 2.12. Estudiemos ahora la ecuación

$$\begin{cases} y'(x) &= ay(x) \quad \text{para } x \in (0, \infty), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

con  $a > 0$  e  $y_0 > 0$ . Se trata de una ecuación lineal de primer orden cuya solución es  $y(x) = y_0 e^{ax}$ . Esta vez no es cierto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$  para ningún valor de  $a$ .

El método de Euler progresivo nos da  $y_n = (1+h)^n y_0$ , mientras que el método de Euler retrógrado nos da  $y_n = (1-h)^{-n} y_0$ . En ningún caso existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)|$ . Esto se ve fácilmente pues ambos límites son de la forma  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b^n - c^n|$  con  $b \neq c$ . Por lo tanto, ambos métodos son inestables.  $\square$

**4.5. Métodos de Runge Kutta de orden 4.** Al hacer una cuadratura del tipo Simpson para la integral:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \approx \frac{h}{6} (f(y(x_n), x_n) + 2f(y(x_{n+\frac{1}{2}}), x_{n+\frac{1}{2}}) + f(y(x_{n+1}), x_{n+1}))$$

donde  $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + h/2$  se inspira el siguiente algoritmo que hace parte de los métodos de Runge-Kutta de orden 4 explícitos. Este algoritmo es uno de los más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(0) \\
g_1 &= f(x_n, y_n) \\
g_2 &= f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} g_1\right) \\
g_3 &= f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} g_2\right) \\
g_4 &= f(x_{n+1}, y_n + h g_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)
\end{aligned}$$

No daremos aquí mayores detalles de la deducción del método, para lo cual puede consultar un libro especializado en métodos numéricos. Sin embargo, para acercarse a su comprensión haga el siguiente ejercicio.

**EJERCICIO PROPUESTO 2.1.** Verifique que si  $f$  no depende de  $x$  se tiene que  $g_2 = g_3$  y se recupera en este caso la idea de la cuadratura de Simpson.

### 5. Ejemplo numérico: la Ley de Omori en sismología

En esta sección veremos como se aplica una variante de la ley de Omori proveniente de la sismología, que, usando ecuaciones diferenciales ordinarias, se usa para la predicción de réplicas de sismos. Trabajaremos con los datos del terremoto del 27 de Febrero del 2010 en Chile. Primero resolvemos la EDO analíticamente para compararla con soluciones aproximadas usando los métodos numéricos de Euler, de Euler modificado y de Heun, para valores de parámetros apropiados.

Sea  $y_M$  en número acumulado de réplicas de magnitud mayor o igual que  $M$  en función del tiempo, donde  $t = 0$  corresponde al tiempo de ocurrencia del sismo principal. La ley de Omori modificada<sup>7</sup> dice lo siguiente:

$$(23) \quad y'_M(t) = k_M \frac{p}{e^{pt} - 1},$$

donde  $p$  y  $k_M$  son constantes positivas. Esto es, el número de réplicas de una magnitud mayor o igual que  $M$  decrecen con  $t$ , donde  $t$  es el tiempo que lleva transcurrido desde el sismo principal.

**5.1. Solución analítica comparada con las aproximaciones numéricas.** La solución analítica se obtiene fácilmente por integración directa:

$$y_M(t) = \ln(e^{pt} - 1) - pt + c, c \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

Para la discretización, consideramos un paso de discretización  $h > 0$ ,  $t_n = t_0 + nh$ ,  $y_n$  aproxima  $y_M(t_n)$ ,  $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2}$ . Se define:

$$f(t) = k_M \frac{p}{e^{pt} - 1}.$$

Notar que  $f$  no depende de  $y$ .

a) Método de Euler:

$$\begin{aligned}
y_0 &= y_M(t_0) \\
y_{n+1} &= y_n + hf(t_n)
\end{aligned}$$

<sup>7</sup>B.-F. Apostol, *Eulers transform and a generalized Omoris law*, *Physics Letters A* 351 (2006) 175-176.

b) Método de Euler modificado:

$$\begin{aligned}y_0 &= y_M(t_0) \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2}f(t_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

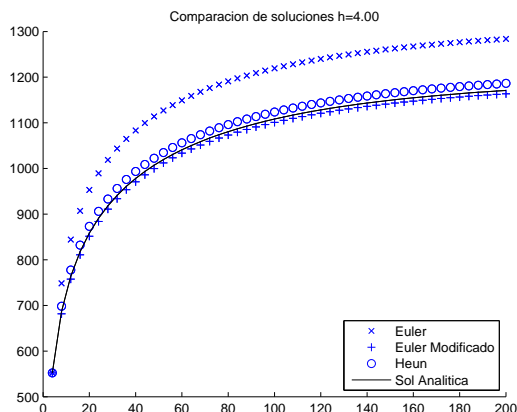
Notar que el paso 2 de este método resulta innecesario pues  $f$  no depende de  $y$ .

c) Método de Heun:

$$\begin{aligned}y_0 &= y_M(t_0) \\ \hat{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(f(t_n) + f(t_{n+1})).\end{aligned}$$

Notar que el paso 2 de este método resulta innecesario pues  $f$  no depende de  $y$ .

Ahora comparamos la solución analítica con las aproximaciones numéricas. Notar que en  $t = 0$  la función  $y_M$  está indefinida, por ello hay que escoger como condición inicial algún  $t_0 > 0$  cercano a cero y partir del valor de la solución analítica en ese tiempo. Por ejemplo si elegimos  $c = 1200$ ,  $k_M = 200$ ,  $p = 0,01$ ,  $T = 200$ ,  $t_0 = h = 4$ , la comparación de métodos da como resultado la Figura siguiente.



El código de matlab para producir el gráfico es:

```
1 %Ley de Omori modificada
2 % Valor de parametros elegidos
3 % constantes
4 p=0.01; kM=200; c=1200;
5 % solucion analitica
6 yM=@(t) kM*(log(exp(p*t)-1)-p*t)+c;
7 % intervalo de tiempo:
8 T=200; h=8; t0=h; t=t0:h:T; N=(T-t0)/h;
9 % lado derecho de la EDO
10 f=@(t) kM*p/(exp(p*t)-1);
11 % soluciones numericas
12 % 1.- Metodo de Euler progresivo
13 y_Euler(1)=yM(t0);
```

```

14 for i=1:N
15     ti=t0+(i-1)*h;
16     y_Euler(i+1) = y_Euler(i) + h*f(ti);
17 end
18 % 2.- Metodo de Euler modificado
19 y_Euler_Mod(1)=yM(t0);
20 for i=1:N
21     tim=t0+(i-1)*h+h/2;
22     y_Euler_Mod(i+1) = y_Euler_Mod(i) + h*f(tim);
23 end
24 % 3.- Metodo de Heun
25 y_Heun(1)=yM(t0);
26 for i=1:N
27     ti=t0+(i-1)*h;
28     tf=t0+i*h;
29     y_Heun(i+1) = y_Heun(i) + h/2*(f(ti)+f(tf));
30 end
31 figure(2)
32 hold on
33 plot(t,y_Euler,'x');
34 plot(t,y_Euler_Mod,'+');
35 plot(t,y_Heun,'o');
36 plot(t,yM(t),'k');
37 legend('Euler','Euler Modificado','Heun','Sol ...
    Analitica','Location','SouthEast')
38 title(sprintf('Comparacion de soluciones h=%3.2f',h))
39 hold off

```

Los gráficos muestran que para valores decrecientes de  $h$  el desempeño del método de Euler es siempre muy deficiente (del orden de 10 % al final del intervalo) en cambio los métodos de Euler modificado y de Heun muestran menor error (del orden de 1 % al final del intervalo). En todo caso Heun aproxima por exceso y Euler modificado por defecto.

**5.2. Lectura y análisis de datos de réplicas.** Los datos de réplicas se pueden obtener de la base de datos del servicio geológico de EEUU (USGS) de la página: usando los parámetros siguientes:

- Output File Type: Spreadsheet Format (comma delimited)
- Database: USGS/NEIC (PDE) 1973 - Present
- Latitude of Rectangular Area: top -32, bottom -40
- Longitude of Rectangular Area: left -75, right: -70
- Date: 2010/02/27 - 2010/04/15
- Magnitude, Depth, Intensity: nada

Debería obtener una lista como la siguiente la que debe almacenar en el archivo `ascii datos.txt`:

```

Year,Month,Day,Time(hhmmss.mm)UTC,Latitude,Longitude,Magnitude,Depth
2010,02,27,063412.62,-36.03, -72.85,8.8, 26
2010,02,27,065234.01,-34.87, -72.61,6.2, 35
2010,02,27,065626.19,-34.35, -72.20,5.6, 34
2010,02,27,065931.92,-33.97, -72.12,5.3, 21
2010,02,27,070204.26,-38.10, -73.71,5.1, 35
...

```

Aparecen en primer lugar los datos del terremoto del 27 de Febrero a las 06:34

UTC (tiempo universal coordinado correspondiente al horario de Greenwich), que corresponde restando 3 horas a las 3:34 de la madrugada hora local de Chile continental, y tuvo una magnitud de 8.8. Luego aparecen otros sismos en la misma región rectangular que supondremos son réplicas del sismo inicial.

El siguiente programa de matlab `leer_datos.m` le facilitara la lectura de los datos:

```

1  % Lectura de datos separados por coma, 1 significa una linea de ...
    comentarios
2  A=importdata('datos.txt',' ',1);
3  % Lectura de magnitudes. A.data son los datos numericos
4  magnitudes=A.data(:,7);
5  mmin=nanmin(magnitudes);
6  mmax=nanmax(magnitudes);
7  mstep=0.2;
8  % Graficos de numero de replicas >= magnitud_min
9  % y(t) es la funcion interpolada de los datos
10 hold on
11 i=0; y=[];
12 for M=mmin+0.6:mstep:mmax-2.8
13     seleccion=find(magnitudes>=M);
14     B=A.data(seleccion,:);
15     agno=B(:,1); mes=B(:,2); dia=B(:,3); UTC=B(:,4);
16     aux=UTC/10^4; hora=fix(aux); min=fix((aux-hora)*100);
17     seg=fix(((aux-hora)*100-min)*100);
18     fecha=datetime(agno,mes,dia,hora,min,seg);
19     ndatos=length(fecha);
20     numero_replicas=1:ndatos;
21     % interpolacion de datos a malla de tiempo uniforme
22     % y almacenados en el cell array y{i}
23     t=nanmin(fecha):0.25:nanmax(fecha);
24     i=i+1;
25     y{i}.data=interp1(fecha,numero_replicas,t);
26     y{i}.magnitud_min=M;
27     y{i}.fechas=t;
28     % graficos
29     plot(fecha,numero_replicas,'r. ');
30     plot(t,y{i}.data);
31     title('Num acumulado de replicas en funcion del tiempo')
32     xlabel('tiempo'); ylabel('numero de replicas');
33     label=sprintf('Magn>= %3.1f (y%d)',M,i);
34     text(fecha(ndatos),ndatos,label);
35     datetick('x','dd/mm'); grid on
36 end
37 hold off

```

Los datos de las réplicas quedan almacenados como `y{1}.data`, `y{2}.data`, `y{3}.data`, etc. Las magnitudes mínimas respectivas son `M(i)=y{i}.magnitud_min`. Una unidad de tiempo corresponde a 6 horas, `y{i}.data(1)` es 1 y corresponde al sismo inicial y `y{i}.data(5)` es el número de réplicas de magnitud mayor o igual que `M(i)` luego de transcurridas  $(5 - 1) * 6 = 24$  horas del terremoto. Si desea ver las curvas tiene que hacer simplemente:

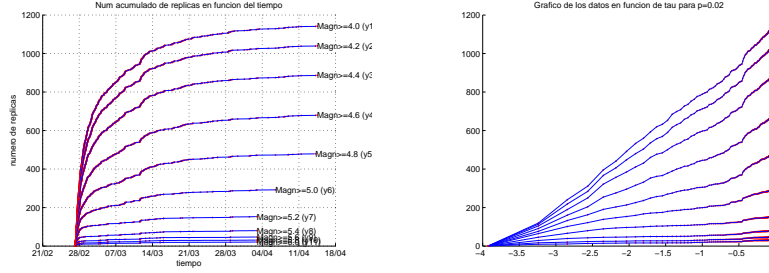
```

plot(y{i}.data) o bien
plot(y{i}.fechas,y{i}.data); datetick('x','dd/mm')

```



para verlo con fechas. Si graficamos los datos reales de las réplicas  $y\{1\}$ ,  $y\{2\}$ ,  $y\{3\}$ , etc. para el sismo del 27 de Febrero del 2010 en función de una nueva variable  $\tau = \ln(e^{pt} - 1) - pt$  para distintos valores de  $p$ . Se obtiene aproximadamente un haz de rectas que se intersectan en un punto, esto es  $y - y_0 = k_M(\tau - \tau_0)$  donde  $y_0, \tau_0$  se pueden estimar.



Se observa que el valor  $p = 0,02$  da rectas aproximadas que se intersectan en un punto. Usando las pendientes de estas rectas, podemos aproximar  $k_M$  para cada valor de  $M$ . Esto se resume en la siguiente tabla de valores.

$y\{i\}$	$M$	$k_M$	$y_0$
1	4.0	290	396
2	4.2	258	367
3	4.4	211	322
4	4.6	150	254
5	4.8	93	190
6	5.0	51	139
7	5.2	19	89
8	5.4	9	45
9	5.6	6	25
10	5.8	4	15

Se toma  $t \in [t_i, t_f]$  con  $t_i = 5$ ,  $t_f = 45$ ,  $\tau_0 = \tau(t_i)$ . Las pendientes

$$k_M = \frac{y\{i\}(t_f) - y\{i\}(t_i)}{\tau(t_f) - \tau(t_i)}$$

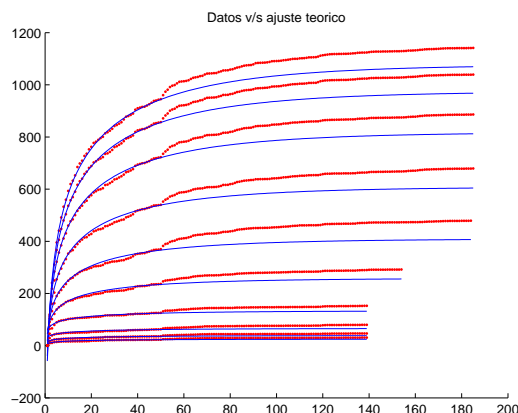
proveen los  $k_M$  respectivos y las posiciones están dadas por

$$y_0 = y\{i\}(t_i).$$

**5.3. Comparación entre datos reales y modelo.** La solución analítica está dada por:

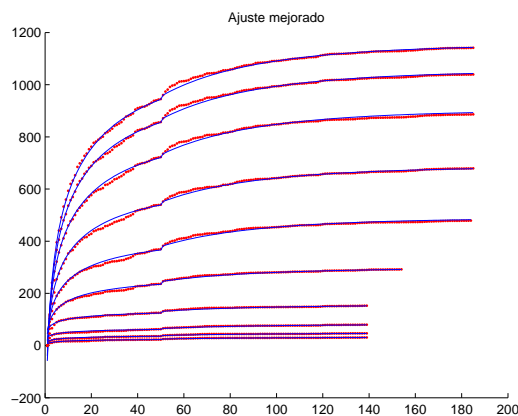
$$y_M(t) = y_0 + k_M(\tau - \tau_0), \quad \tau(t) = \log(e^{pt} - 1) - pt$$

al reemplazar los valores obtenidos en la parte anterior se obtiene el siguiente gráfico, donde en azul se grafica la solución analítica y en rojo los datos reales: La comparación con las curvas numéricas de Euler modificado o Heun es similar, dado que ya vimos que las curvas teórica y numérica se ajustaban bien en estos casos. Se



observa un buen ajuste al comienzo de las curvas hasta  $t = 50$  aproximadamente que corresponde al 10 de marzo del 2010. Los valores de  $k_M$  y de  $y_0$  dependen de  $M$ , pero no al parecer los valores de  $\tau_0$  ni  $p$  que son los mismos para todas las curvas.

**5.4. Modificación del modelo.** Observe del gráfico anterior que el día 11 de marzo se produce una discontinuidad en la derivada de las curvas y  $M$ . Podemos mejorar el modelo aproximando el haz de rectas por una función lineal por pedazos, esto es  $k_M$  es una constante diferente antes y después del 11 de marzo. Al hacer esto, se obtienen ajustes como el de la figura, donde en azul se grafica la solución numérica usando el método de Euler modificado y en rojo los datos reales: Notemos que



aunque todavía es posible obtener una solución analítica en este caso, si  $k_M = k_M(t)$  fuera una función complicada del tiempo, de modo tal que  $k_M(t) \frac{p}{e^{pt}-1}$  no tenga una primitiva analítica, entonces no podría obtenerse una solución analítica y el único recurso serían los métodos numéricos. Esto suele suceder en la práctica en la ingeniería y las ciencias, en que los modelos simples con que se introducen y se estudian los fenómenos tienen solución analítica, pero para aplicarlos en la práctica

es necesario introducir modelos más complejos que suelen no tener dichas soluciones y es necesario recurrir a las aproximaciones numéricas.

**5.5. Capacidad predictiva.** ¿Sería posible estimar con nuestro mejor modelo el número de réplicas con magnitud mayor o igual a 5 que se producirían del 16 de abril al 16 de mayo del 2010? El modelo puede dar una predicción. Tomando  $M = 5$  y calculando  $y_M(16/05/2010) - y_M(16/04/2010)$  con el modelo de sección anterior se obtienen 2 réplicas de magnitud mayor o igual a 5.

El código matlab para estos últimos pasos se pueden consultar a continuación, la programación de la parte predictiva se deja como ejercicio al lector interesado.

```

1  %% Ley de Omori modificada, parte 2
2  % Datos reales de replicas
3  leer_datos
4  % Grafico
5  p=0.02;
6  ti=5;
7  tf=45;
8  figure(3)
9  hold on
10 for i=1:10
11     t=1:length(y{i}.data);
12     tau=log(exp(p*t)-1)-p*t;
13     plot(tau,y{i}.data,'r.',tau,y{i}.data,'-');
14     kM(i)=(y{i}.data(tf)-y{i}.data(ti))/(tau(tf)-tau(ti));
15     y0(i)=y{i}.data(ti);
16 end
17 hold off
18 title(sprintf('Grafico de los datos en funcion de tau para ...
19             p=%3.2f',p));
19 tau0=tau(ti);
20
21 figure(4)
22 M=4:0.2:5.8;
23 plot(M,kM,'+',M,kM,'-');
24 title('KM eb funcion de M')
25
26 %% Datos y ajuste teorico
27 figure(5)
28 hold on
29 for i=1:10
30     t=1:length(y{i}.data);
31     tau=log(exp(p*t)-1)-p*t;
32     y_analitica=y0(i)+kM(i)*(tau-tau0);
33     plot(t,y{i}.data,'r.',t,y_analitica,'-');
34 end
35 title('Datos v/s ajuste teorico');
36 hold off
37
38 % Ajuste lineal por pedazos
39 % Ajuste en el segundo tramo de las curvas
40 p2=0.02;
41 ti2=51;
42 tf2=100;
43 for i=1:10

```

```

44     t=1:length(y{i}.data);
45     tau2=log(exp(p2*t)-1)-p2*t;
46     kM2(i)=(y{i}.data(tf2)-y{i}.data(ti2))/(tau2(tf2)-tau2(ti2));
47     y02(i)=y{i}.data(ti2);
48 end
49 tau02=tau(ti2);
50 % Grafico
51 figure(6)
52 hold on
53 for i=1:10
54     t=1:length(y{i}.data);
55     tau=log(exp(p*t)-1)-p*t;
56     tau2=log(exp(p2*t)-1)-p2*t;
57     y_analitica=y0(i)+kM(i)*(tau-tau0);
58     y_analitica2=y02(i)+kM2(i)*(tau-tau02);
59     y_analitica3=y_analitica.*(t<ti2)+y_analitica2.*(t>=ti2);
60     plot(t,y{i}.data,'r.',t,y_analitica3,'-');
61 end
62 title('Ajuste mejorado')
63 hold off

```

## 6. Ejemplo numérico: Lotka-Volterra y la pesca en el Mar Adriático

Notar que en este capítulo solo se explicó cómo resolver ecuaciones de primer orden:

$$y' = f(x, y(x))$$

pero los métodos numéricos presentados pueden aplicarse tanto si  $f$  es una función a valores escalares, o sea, una sola EDO, o si  $f$  es a valores vectoriales, es decir, un *sistema* de varias EDO<sup>8</sup>.

Aunque veremos sistemas de EDO hasta más adelante, en este punto resulta relativamente fácil generalizar los métodos anteriores a sistemas, lo cual será útil en la práctica. Esto será útil también para resolver de EDO de orden superior, que serán revisadas en los próximos capítulos, pues veremos que es posible reducirlas a un sistema de EDO.

En efecto, en el caso de sistemas, la función incógnita  $y$  es un vector de varias componentes. Por ejemplo, en el caso de dos componentes,  $f = (f_1, f_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  y esto sería:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_2' &= f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \end{aligned}$$

por lo que los métodos para discretizar (19) se extienden simplemente usando integración y operaciones por componentes.

Ilustremos esto con un ejemplo donde aprovechamos además de aplicar el método de Runge-Kutta. Se trata de un ejemplo histórico: la pesca en el Mar Adriático.

Después de la primera guerra, los pescadores del Mar Adriático estaban sorprendidos pues la cantidad de presa para pescar había disminuido en vez de aumentar, a pesar de que durante los años de la guerra se había dejado de pescar. Se propuso

<sup>8</sup>Esta sección puede leerse también junto con el Capítulo 5, aunque no se requiere.

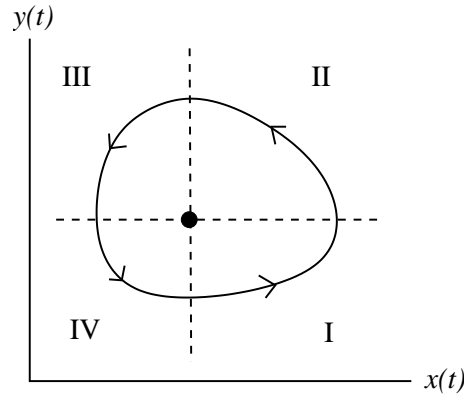


FIGURA 1. Órbita del sistema de Lotka-Volterra en el plano de fases en torno al punto de equilibrio. En el cuadrante I, las presas ( $x(t)$ ) y predadores ( $y(t)$ ) aumentan. En el cuadrante II, las presas comienzan a disminuir, pero los predadores siguen en aumento. En III, tanto presas como predadores disminuyen. En el cuadrante IV, las presas comienzan de nuevo a aumentar, mientras los predadores siguen disminuyendo. Esta dinámica poblacional se repite cada ciclo pasando nuevamente por I, II, III y IV y así sucesivamente.

el siguiente modelo para explicar la situación, que es un sistema de dos EDO de primer orden no-lineales:

$$\begin{aligned}\frac{x'}{x} &= a - by \\ \frac{y'}{y} &= -c + dx\end{aligned}$$

Si  $x$  e  $y$  representan las poblaciones de presa y predador respectivamente, la presa crece relativamente ( $a > 0$ ) si no hay predador y el predador decrece relativamente ( $-c < 0$ ) si no hay presa. Por otro lado, los encuentros entre presa y predador favorecen a los predadores ( $d > 0$ ) y merman las presas ( $-b < 0$ ). Es fácil ver que si  $x' = y' = 0$  entonces hay un punto de equilibrio dado por

$$x = \frac{c}{d}, \quad y = \frac{a}{b}$$

Estas ecuaciones son un clásico modelo del tipo predador-presa, y son llamadas ecuaciones de Lotka-Volterra en honor a Vito Volterra (1860-1940) físico y matemático italiano y su contemporáneo Alfred J. Lotka (1880-1949) químico americano.

Resulta cómodo representar la solución  $x(t)$ ,  $y(t)$  del sistema de Lotka-Volterra como pares ordenados  $(x(t), y(t))$ , los que se dibujan como puntos en un plano, llamado *plano de fases*. La curva descrita por la solución, partiendo del punto inicial  $(x_0, y_0)$ , al variar  $t$  se denomina *trayectoria*. Asimismo, el punto de equilibrio del sistema también puede representarse por un punto del plano:

$$(x, y) = \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right).$$

Es posible mostrar que las poblaciones de predador y presa, si no están en equilibrio, describen curvas cerradas que al cabo de un cierto tiempo vuelven a pasar por el punto inicial y giran (o se dice que oscilan) en torno al punto de equilibrio. A estas trayectorias cerradas se les llama *órbitas periódicas* (ver Figura 1).

Si ahora se provoca un cambio en los parámetros de la forma

$$\begin{aligned} a &\rightarrow a + \Delta a \\ c &\rightarrow c - \Delta c \end{aligned}$$

esto equivale a pasar de una situación con pesca a una nueva situación sin pesca. Este cambio hace que el punto de equilibrio se mueva de la posición en el plano de la siguiente forma:

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \rightarrow \left(\frac{c - \Delta c}{d}, \frac{a + \Delta a}{b}\right)$$

esto es, en una disminución de las presas y un aumento de los predadores en una situación sin pesca, lo que se traduce en un desplazamiento de las órbitas del plano hacia arriba y hacia la izquierda, La Figura 2 muestra una síntesis del análisis anterior.

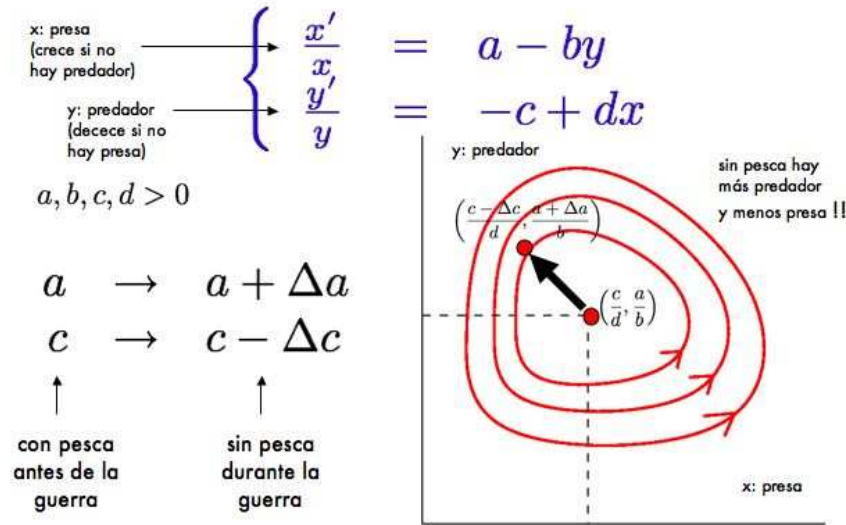


FIGURA 2. Modelo de explicación de la disminución de presas después de la Primera Guerra Mundial en el Mar Adriático.

El resultado que explicaba el aparentemente extraño fenómeno fue muy celebrado en la época y hasta hoy este modelo es utilizado en modelos más complejos de planificación de pesca y de otros recursos renovables.

Para la resolución numérica de este modelo utilizaremos un método de Runge-Kutta de orden 4. Notar que en este caso la función  $f$  es una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}$$

que no depende explícitamente del tiempo (pues supusimos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  constantes) y el par  $(x, y)$  se maneja como vector. Con todo, el método numérico queda:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (x(0), y(0)) \\ g_1 &= f(x_n, y_n) \\ g_2 &= f\left(x_n, y_n + \frac{h}{2} g_1\right) \\ g_3 &= f\left(x_n, y_n + \frac{h}{2} g_2\right) \\ g_4 &= f\left(x_n, y_n + h g_3\right) \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) &= (x_n, y_n) + \frac{h}{6} (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \end{aligned}$$

De hecho, es posible verificar que un método de tipo Euler de orden 1 o de Runge-Kutta de orden 2 no provee suficiente precisión para que las órbitas sean cerradas, y es por esto que es necesario utilizar un método de orden 4.

Los resultados numéricos obtenidos con el método de Runge-Kutta de orden 4 descrito más arriba se muestran en la Figura 3, donde se hizo la simulación del paso de una situación con pesca (líneas oscuras) a una situación sin pesca (líneas claras)<sup>9</sup>. Observe que el punto de equilibrio que está en el centro de las órbitas se desplaza arriba y hacia la izquierda como predice la teoría.

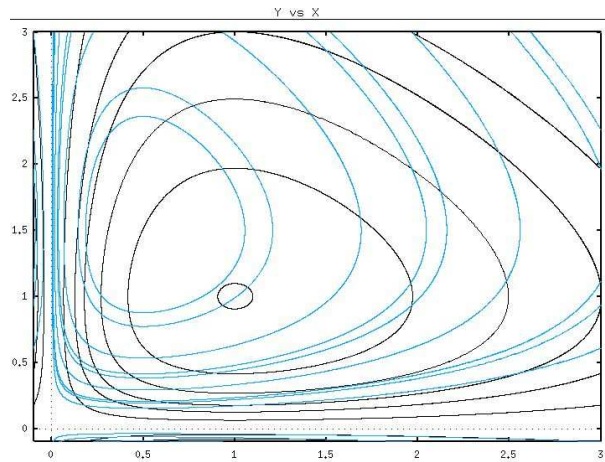


FIGURA 3. Resultado de la aproximación utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 para estudiar los equilibrios con (órbitas centradas a la derecha y abajo) y sin pesca (órbitas centradas a la izquierda y arriba). Se observa una disminución de las presas (eje  $x$ ) de 1 a 0.5 a pesar de la prohibición de pesca. Esto se explica por el aumento de predadores (eje  $y$ ) de 1 a 1.5. Hay un desplazamiento del punto de equilibrio de  $(1, 1)$  a  $(0.5, 1.5)$ .

<sup>9</sup>Ver <http://www.dim.uchile.cl/%7Eaxosses/Home/ODE.html> donde se pueden ver ésta y otras simulaciones relacionadas con este texto.

### 7. Ejemplo numérico: Van del Pol y el sonido del caos.

La idea es aproximar y estudiar numéricamente algunas propiedades del llamado oscilador de Van der Pol, además de reproducir el histórico sonido del caos asociado a esta ecuación. Considere el oscilador de Van der Pol:

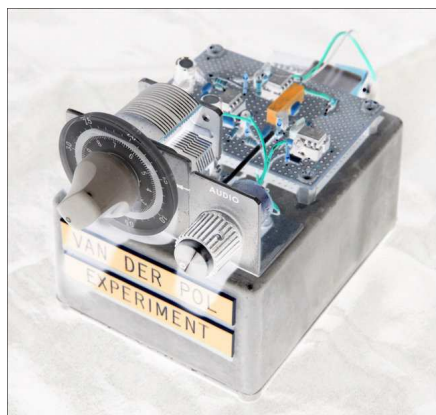
$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = f(t), \quad t > 0,$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0.$$

Esta EDO no lineal de orden 2 fue usada en los años 20 por los holandeses Balthasar van der Pol y J. van der Mark para modelar los latidos del corazón<sup>10</sup>.

Ellos mismos construyeron un circuito eléctrico en que el voltaje se comportaba como este oscilador y notaron un curioso hecho: cuando el sistema estaba forzado por una función periódica  $f$  de cada vez mayor frecuencia, se podía registrar con un micrófono conectado al circuito una escala de sonidos puros, que correspondían a la respuesta por bloqueo de frecuencia que buscaban, pero intercalados de un extraño y misterioso sonido. En ese momento se lo atribuyeron al sistema de audio, pero más tarde se sabría que era debido a la alternancia de orden y caos del oscilador: era el sonido del caos registrado por primera vez en 1927. El circuito original ya no existe, pero hay al menos una copia moderna que funciona con semiconductores<sup>11</sup> y que pertenece al célebre escritor y divulgador de la Teoría del Caos, James Gleick.



**7.1. Simulación numérica cado no forzado:** Consideramos la variable auxiliar  $y = x'$  y escribimos la EDO original de la forma  $X' = F(t, X)$  donde  $X = (x, y)$  es de dimensión 2, esto es:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \mu(1 - x^2)y - x. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>B. van der Pol and J. van der Mark, *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7*, 6, 763-775, 1928

<sup>11</sup>*There's No Quiet Without Noise*, by David Colman, *New York Times*, July 8, 2011.



Programamos un método de Runge Kutta de orden 4 para resolver este último sistema usando los métodos de las secciones precedentes, teniendo cuidado con el cambio de notación. Para ello, definimos las variables en un solo vector  $X$  y una función con que calculamos el lado derecho de  $X' = F(t, X)$ :

```

1  % Funcion que implementa el sistema de EDO de Van der Pol Caso No ...
    Forzado.
2  %   dX = F(t,X,mu) entrega el vector de dimension 2 correspondiente ...
    a la
3  %   derivada de X dada por la EDO de Van der Pol con el parametro ...
    mu, caso
4  %   no forzado, ie, f = 0.
5
6  function dX = F(t,X,mu)
7  x=X(1);
8  y=X(2);
9  dX=[y;mu*(1-x^2)*y-x];
10 end

```

Utilizamos  $N$  intervalos de tiempo y hacemos que la rutina Runge-Kutta retorne  $(x, y)$  y el arreglo con los puntos de discretización del tiempo `tintervalo: function [tintervalo x y]=RK(I,X0,mu,N)`.

El método Runge Kutta de orden 4, con  $x_{n+\frac{h}{2}} = x_n + \frac{h}{2}$  y corresponde al siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(0) \\
 g_1 &= f(x_n, y_n) \\
 g_2 &= f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}g_1\right) \\
 g_3 &= f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}g_2\right) \\
 g_4 &= f(x_{n+1}, y_n + hg_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)
 \end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
 x &\leftarrow t \\
 y &\leftarrow X = (x, y) \text{ de la EDO} \\
 f &\leftarrow dX = F(t, X, \mu) \\
 h &\leftarrow \frac{I(2) - I(1)}{N}
 \end{aligned}$$

A continuación se presenta el código del archivo `RK.m` en matlab:

```

1  % Funcion que implementa Runge-Kutta de orden 4.
2  %   [tintervalo x y]=RK(I,X0,mu,N) entrega las soluciones x,y del ...
    metodo

```

## 60 2. EL PROBLEMA DE CAUCHY: EXISTENCIA, UNICIDAD Y MÉTODOS NUMÉRICOS

```

3 % Runge-Kutta de orden cuatro para el problema del oscilador de ...
  Van der
4 % Pol con condiciones iniciales 'X0' (en R2) y parametro 'mu'(en R),
5 % sobre el intervalo 'I'([a,b], a,b en R). Ademas, entrega un ...
  arreglo
6 % 'tintervalo' de tamano (N+1) que corresponde a la ...
  discretizacion del
7 % intervalo 'I' en N intervalos iguales.
8
9 function [tintervalo x y]=RK(I,X0,mu,N)
10     h = (I(2)-I(1))/N; % tamano de cada intervalo.
11     tintervalo = I(1):h:I(2); % se genera la discretizacion del tiempo.
12     x(1) = X0(1); y(1) = X0(2); % guardo las condiciones iniciales.
13     for i = 1:N
14         % Ejecucion de Runge Kutta de orden 4.
15         X = [x(i); y(i)]; % actualizo X.
16         t = tintervalo(i);
17         g1 = F( t , X ,mu);
18         g2 = F(t+h/2, X+h/2*g1,mu);
19         g3 = F(t+h/2, X+h/2*g2,mu);
20         g4 = F( t+h , X+h*g3 ,mu);
21         X = X+(h/6)*(g1 +2*g2 +2*g3 +g4);
22         x(i+1) = X(1); y(i+1) = X(2); % guardo el resultado.
23     end
24 end

```

Ahora consideramos  $f \equiv 0$ ,  $t \in [0, 60]$ ,  $N = 100, 500$  y  $1000$  intervalos de tiempo, y resolvemos la ecuación para  $\mu \in \{0, 1, 5\}$  graficando  $(t, x(t))$  y  $(x(t), y(t))$  para condiciones iniciales  $(x_0, y_0) = (3, 1)$  y  $(x_0, y_0) = (0, 5, 0)$ . Para realizar las gráficas, se creó la función **vanderpol RK.m** siguiente:

```

1 % Oscilador de Van der Pol
2
3 function vanderpol_RK()
4 I = [0 60];
5 %iteracion sobre las condiciones iniciales.
6 for i = 1:2
7     if i==1; X0 = [3;1];
8     else X0 = [0.5;0];
9     end
10    %iteracion sobre mu.
11    for mu = [0.01 1 5]
12        figure % se abre una ventana para cada mu
13        p = 1; % indica posicion en el subplot
14        %iteracion sobre N.
15        for N = [100 500 1000]
16            % se resuelve el sistema con RK orden 4.
17            [t x y]=RK(I,X0,mu,N);
18            % Graficas
19            subplot(3,2,p)
20            plot(t, x); % grafica (t,x)
21            xlabel('t'); ylabel('solucion')
22            title(['van der Pol, mu = ',num2str(mu),', N = ...
23                ',num2str(N)']);
24            subplot(3,2,p+1)
25            plot(x, y); % grafica (x,y) con y = x'

```

```

25         title(['van der Pol, mu = ', num2str(mu), ', N = ...
26               ', num2str(N)]);
27         xlabel('x'); ylabel('y = dx')
28         p = p+2; % se pasa a la siguiente fila del subplot
29     end
30 end
31 end

```

Algunos de los gráficos obtenidos se muestran en las páginas a continuación. Se observa un ciclo límite, esto es, una órbita periódica del sistema tal que otras trayectorias no cerradas tienden en espiral hacia ella, desde el interior o desde el exterior, cuando el tiempo tiende a infinito.

Se observa que a mayor  $\mu$ , más fina tiene que ser la discretización para garantizar la convergencia del método. Esto se deduce al comparar las figuras 4, 5 y 6 (caso  $(x_0, y_0) = (3, 1)$ ).

Otra observación es que para el caso  $\mu = 0,1$  la órbita es circular, luego se estira y se asemeja a un rectángulo de esquinas curvas ( $\mu = 1$ ), para luego adoptar una forma con mayor curvatura (caso  $\mu = 5$ )

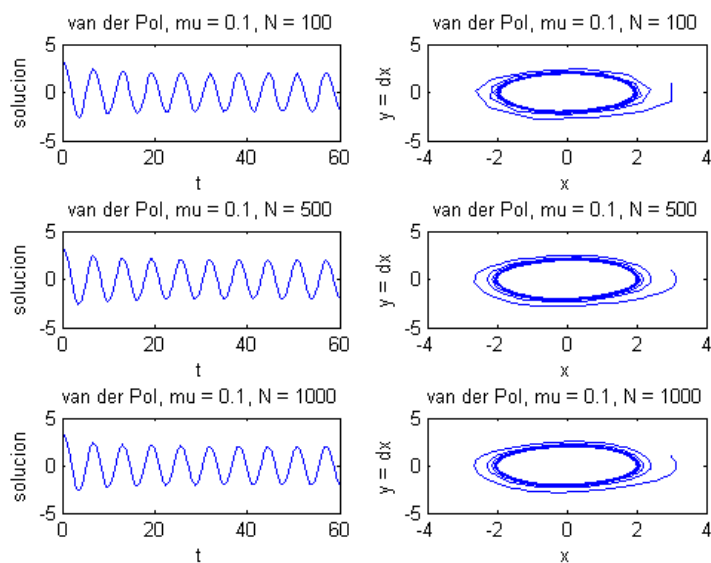
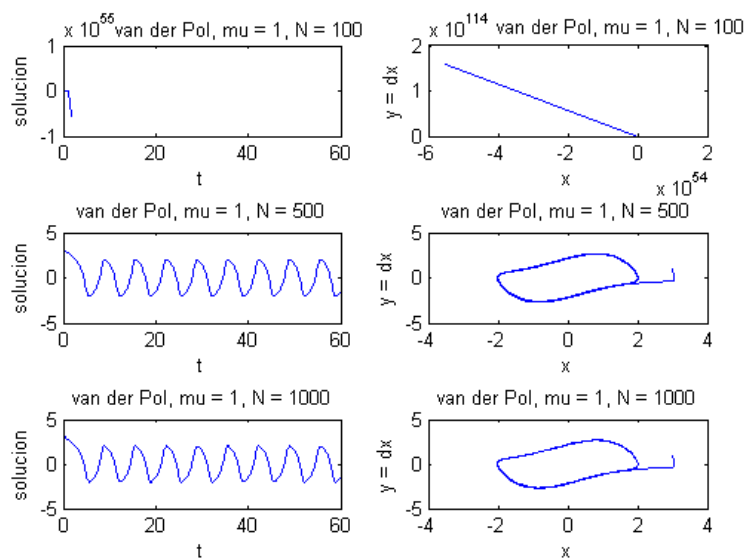
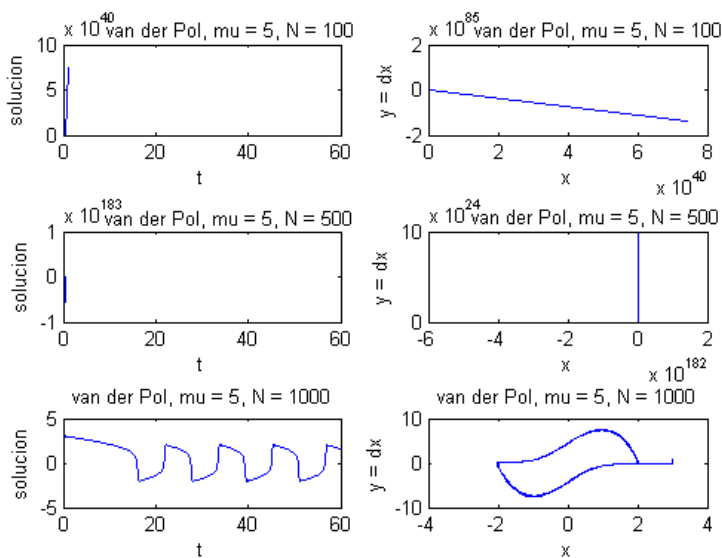


FIGURA 4. Solución Van der Pol para  $\mu = 0,1$ ,  $(x_0, y_0) = (3, 1)$ .

FIGURA 5. Solución Van der Pol para  $\mu = 1$ ,  $(x_0, y_0) = (3, 1)$ .FIGURA 6. Solución Van der Pol para  $\mu = 5$ ,  $(x_0, y_0) = (3, 1)$ .

También se podría hacer la implementación utilizando el comando `ode45` de matlab obteniéndose resultados muy similares al método previamente programado. Al programar se utiliza la misma función `F` que definimos antes:

```
edo = @(t,X) F(t,X,mu)
[t,X]=ode45(edo,I,X0);
```

**7.2. Simulación numérica caso forzado.** Consideremos ahora  $f(t) = A\sin(\omega t)$ , con  $A = 1.2$ ,  $\omega = 2\pi/10$ ,  $t \in [0, 1000]$ . Escibimos esta vez la ecuación como:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= \mu(1 - x^2)y - x + A\cos(z) \\ z' &= \omega\end{aligned}$$

y definiendo una función `F(t,X,mu,A,omega)`. Calculamos la solución (usando esta vez `ode45`) y graficando  $(t, x(t))$  y  $(x(t), y(t))$  para  $\mu \in \{6, 8.53, 12\}$  y para condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$ . Los siguientes programas muestran la implementación de este sistema de EDO en matlab y su resolución usando `ode45`.

```
1 % Funcion que implementa el sistema de EDO de Van der Pol Caso Forzado.
2 % dX = F2(t,X,mu,A,omega) entrega el vector de dimension 3 que
3 % corresponde a la derivada de X del sistema de EDO de Vander Pol ...
  con el
4 % parametro mu y una funcion f(t) = A*sin(omega*t).
5
6 function dX = F2(t,X,mu,A,omega)
7     x=X(1);
8     y=X(2);
9     z=X(3);
10    dX=[y;mu*(1-x^2)*y-x+A*cos(z);omega];
11 end
```

```
1 % Oscilador de Van der Pol
2 %Caso forzado f(t) = Asin(wt)
3
4 function vanderpol2()
5
6     A = 1.2;
7     omega = 2*pi/10;
8     I = [0 1000];
9     X0 = [2;0;0];
10
11     figure % se abre una ventana
12     p = 1; % indica posicion en el subplot
13
14     %iteracion sobre mu.
15     for mu = [6 8.53 12]
16
17         edo = @(t,X) F2(t,X,mu,A,omega);
18         [t,X] = ode45(edo,I,X0); % se resuelve el sistema %
19         x = X(:,1); y = X(:,2);
20
21         % Graficas
```

```

22     subplot(3,2,p)
23     plot(t, x); % grafica (t,x)
24     xlabel('t'); ylabel('solucion')
25     title(['van der Pol, mu = ', num2str(mu)]);
26     subplot(3,2,p+1)
27     plot(x, y); % grafica (x,y)
28     title(['van der Pol, mu = ', num2str(mu)]);
29     xlabel('x'); ylabel('y = dx')
30
31     p = p+2; % se pasa a la siguiente fila del subplot
32     soundsc(x) % con esto se 'escucha' la solucion.
33
34     end
35
36 end

```

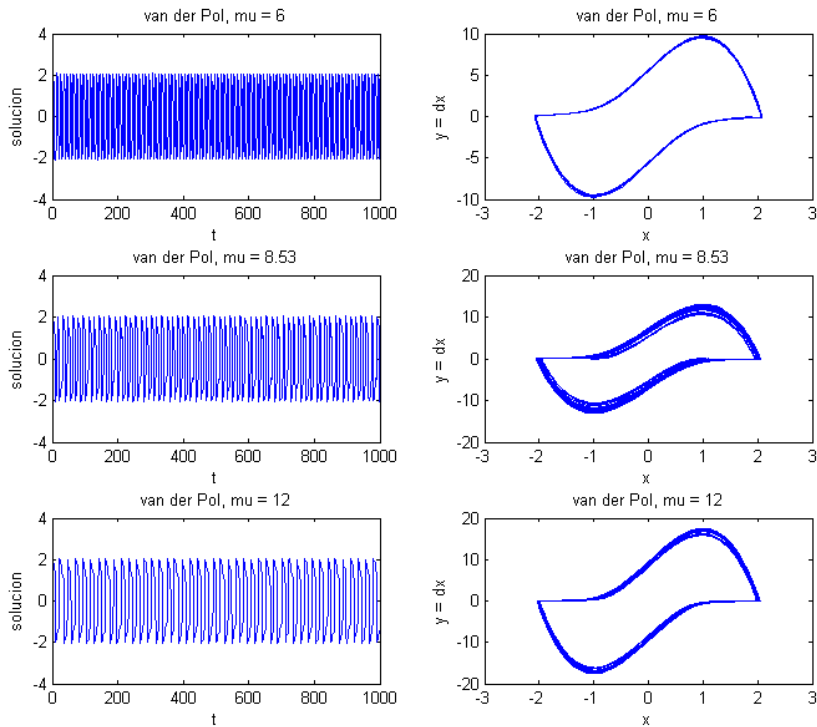


FIGURA 7. Soluciones Van der Pol en el intervalo  $[0, 1000]$  para  $(x_0, y_0) = (2, 0)$  y  $\omega = 0$

Notar que al final del código utilizamos el comando de matlab:

`x=X(:,1); soundsc(x)`

para “escuchar” la solución. Estos son los sonidos que escuchó van der Pol y su colega en 1927. Para  $\mu = 6$  se escucha un sonido de frecuencia constante, para  $\mu = 12$  se escucha un sonido más variable, pero no tanto como para  $\mu = 8.53$ , con

el que se escucha un sonido más irregular, como un ruido. Para  $\mu = 6$ , cuya solución se escucha como un sonido regular, el ciclo límite se observa con gran nitidez, al contrario del caso  $\mu = 8,53$ , cuya solución se escucha como un ruido irregular, donde se tiene que la gráfica de  $(x, y)$  está delimitada, pero es difícil determinar a partir de la gráfica si existe un ciclo límite o no. De lo anterior se deduce que el orden (solución periódica) corresponde al caso  $\mu = 6$  y el caos, al caso  $\mu = 8,53$ .

**EJERCICIO PROPUESTO 2.2.** El siguiente es un modelo epidemiológico introducido por Kermack & McKendrick, ambos británicos, en 1927<sup>12</sup>. Modela la composición de una población constante  $N = x + y + z$  ante una enfermedad, donde  $x(t)$  representa el número de personas susceptibles de contagiarse,  $y(t)$  el número de infectados y  $z(t)$  el número de inmunes a la enfermedad para cada  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}x' &= -\beta xy \\y' &= \beta xy - \gamma y \\z' &= \gamma y \\x(0) &= x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0, z(0) = 0, x_0 + y_0 = N,\end{aligned}$$

donde  $\beta > 0$  es un parámetro de infección y  $\gamma > 0$  la tasa de inmunización. Todo esto suponiendo que las soluciones  $x, y, z$  existen, son únicas, no negativas, continuas y con derivada continua para  $t \geq 0$ . Pruebe los siguientes hechos a partir del modelo:

- La epidemia crece inicialmente en el número de infectados si el número inicial de susceptibles supera el umbral  $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$ , esto es  $x_0 > \rho \Rightarrow y'(0) > 0$ .
- Suponiendo que existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x, y, z) = (x_\infty, y_\infty, z_\infty)$$

se puede demostrar que  $y_\infty = 0$ ,  $x_\infty = N - z_\infty$  y  $z_\infty$  es raíz de la función:

$$F(z) = N - z - x_0 \exp\left(\frac{-z}{\rho}\right).$$

Esto puede obtenerse de dividir la primera y última de las EDO.

- Se puede usar el Teorema del Valor intermedio para probar que la raíz anterior existe y es única.

Discretice estas ecuaciones para valores de los parámetros que elija, tal como se hizo en el ejemplo anterior (notar que la variable dependiente es  $t$  no  $x$  como antes, además hay tres componentes y no dos como antes). Tomando un número de individuos susceptibles inferior y superior al umbral teórico  $\rho$  y simule.

---

<sup>12</sup>Kermack, W. O. y McKendrick, A. G. A contribution to the theory of epidemics, *Proc. Roy. Soc. (A)* 115 (1927), 700–721, 139 (1932), 55–83.

DERECHO DE AUTOR. PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN



## Capítulo 3

## EDO lineales de orden superior

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Comenzaremos por dar las definiciones necesarias para formular el problema de Cauchy y enunciar el Teorema de Existencia y Unicidad, que será demostrado más adelante. Con el fin de presentar de una manera más clara la estrategia de resolución de estas ecuaciones comenzaremos por hacer un estudio detallado del caso de orden 2. Esto nos permitirá mostrar las técnicas en un contexto más abordable. En seguida veremos cómo resolver la ecuación de orden arbitrario a coeficientes constantes y daremos ideas de lo que puede hacerse cuando los coeficientes son variables, caso mucho más complejo.

1. La EDO lineal de orden  $n$ 

Primero daremos una breve introducción a los operadores diferenciales lineales, lo que nos ayudará a plantear y resolver en algunos casos las diferentes EDO lineales que nos interesa estudiar.

## 1.1. Definiciones generales.

DEFINICIÓN 3.1. Una *EDO lineal de orden  $n$*  tiene la forma general:

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_1(x)y' + \overline{a}(x)y = \overline{Q}$$

Donde  $\overline{a}_k$  son los coeficientes (con  $\overline{a}_n = 1$ ) y  $\overline{Q}$  el lado derecho<sup>1</sup>.

Así como una función transforma números en números:  $f(x) = y$ , un operador transforma funciones en funciones:  $P(f) = g$ . Por ejemplo, la derivada o la integral son operadores que transforman una función en su derivada o primitiva, respectivamente.

Los operadores que involucran solamente derivadas de una función se denominan operadores diferenciales (en oposición a los operadores integrales, que involucran primitivas).

Aplicaremos los operadores a funciones de clase  $\mathcal{C}^n$ , recordemos que  $\mathcal{C}^n$  denota el subespacio de funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$  existen y son continuas en el intervalo  $I$ .

DEFINICIÓN 3.2. Denotaremos por

$$D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ veces}} = \frac{d^k}{dx^k}$$

el operador *derivada de orden  $k$* , entendiendo que la *derivada de orden 0* es el operador identidad  $I$  (que a menudo se omite).

---

<sup>1</sup>Asumimos la ecuación normalizada, eso explica por qué ponemos barras sobre los coeficientes y el lado derecho.

DEFINICIÓN 3.3. Un *operador diferencial lineal de orden  $n$  a coeficientes variables* tiene la forma general:

$$\begin{aligned} P(x, D) &= \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k \\ &= a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \dots + a_1(x) D + a_0(x), \end{aligned}$$

donde  $a_k(x)$  son funciones definidas en  $I$ . Si  $a_n = 1$  el operador se dice *normalizado*.

Más precisamente, si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , entonces  $P(x, D)f$  es la *función* (continua si los  $a_k$  lo son) cuyo valor en el punto  $x \in I$  es

$$P(x, D)f(x) = a_n(x)f^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x).$$

Si los coeficientes  $a_k$  son todos constantes se dice que el operador diferencial lineal es *a coeficientes constantes*

DEFINICIÓN 3.4. Un *operador diferencial lineal de orden  $n$  a coeficientes constantes* tiene la forma:

$$P(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0.$$

El operador diferencial nos servirá para definir las EDOs lineales de orden  $n$  de mejor forma.

DEFINICIÓN 3.5. Una *EDO lineal de orden  $n$  a coeficientes variables* es una identidad de la forma general

$$P(x, D)y = \overline{Q}(x),$$

donde  $P(x, D) = \sum_{k=0}^n \overline{a}_k(x) D^k$  es un operador diferencial de orden  $n$

DEFINICIÓN 3.6. Una *EDO lineal de orden  $n$  a coeficientes constantes* es una identidad de la forma

$$P(D)y = \overline{Q}(x),$$

donde  $P(x) = \sum_{k=0}^n \overline{a}_k D^k$ ,  $\overline{a}_k \in \mathbb{R}$ ,  $\overline{a}_n = 1$

DEFINICIÓN 3.7. Una EDO lineal a coeficientes variables o constantes se dice *homogénea* si  $\overline{Q} \equiv 0$ .

Usando la notación anterior, podemos organizar el estudio de las EDO lineales separando en cuatro grupos como resume la tabla siguiente. En ella se indican además en *itálica* algunos conceptos y temas que se tratarán en este capítulo, por lo que la tabla sirve de guía de estudio.

EDO lineal orden $n$	homogénea <i>subespacio <math>\mathcal{H}</math> de soluciones homogéneas</i>	no homogénea <i>hiperplano <math>\mathcal{S}</math> de soluciones particulares</i>
coefi- cientes constantes	$P(D)y = 0$ <i>polinomio característico valores característicos</i>	$P(D)y = \overline{Q}$ <i>coeficientes indeterminados variación de parámetros</i>
coefi- cientes variables	$P(x, D)y = 0$ <i>fórmula de Abel fórmula de Liouville</i>	$P(x, D)y = \overline{Q}$ <i>representación de Green variación de parámetros</i>

FIGURA 1. Tabla resumen del estudio de EDO lineales de este capítulo.

## 2. Polinomio característico y Propiedades operador diferencial

DEFINICIÓN 3.8. El *polinomio característico* asociado a la EDO de la Definición 3.6 es

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n \overline{a}_k \lambda^k$$

y sus raíces se llaman *valores característicos* de la EDO.

Esto lo usaremos más adelante, primero para ecuaciones de orden 2 y luego de orden arbitrario, primero necesitaremos la relación entre este polinomio y los operadores diferenciales de orden  $n$  que definen la EDO para poder usarlo.

Para esto nos resultara útil mostrar algunas propiedades de este operador.

La suma y ponderación por escalar de operadores se define de la misma manera que para funciones. Con estas operaciones los operadores forman un espacio vectorial:

$$(P_1 + P_2)(f) = P_1(f) + P_2(f), \quad (\alpha P_1)(f) = \alpha P_1(f).$$

El producto de operadores diferenciales corresponde a su composición:

$$P_1 P_2 = P_1 \circ P_2.$$

Con este producto y suma, los operadores lineales forman de hecho una estructura algebraica de *anillo* donde la unidad es el operador identidad  $I$ . En particular, se tiene la distributividad por la derecha y por la izquierda, que es una propiedad heredada de la composición de funciones:

$$(P_1 + P_2)Q = P_1 Q + P_2 Q, \quad Q(P_1 + P_2) = Q P_1 + Q P_2.$$

Aunque el producto (o composición) de operadores no es en general conmutativo, en el caso de operadores lineales a *coeficientes constantes* sí lo es:

$$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D) \quad \text{si } P_1, P_2 \text{ son operadores lineales,}$$

por lo que el anillo resulta conmutativo.

Además los operadores diferenciales tienen la propiedad de factorización:

PROPIEDADES 3.1. (*Factorización*) Sea  $P(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k$  operador diferencial de orden  $n$ , luego puede ser escrito como:

$$P(D)y = \prod_{j=1}^l (D - \lambda_j)^{m_j} y$$

Con  $m_j$  multiplicidad algebraica y  $l$  la cantidad de valores característicos diferentes.

Demostraremos esta propiedad para  $n = 1$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $P(D) = D^2 + a_1 D + a_0$   $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ , luego  $P(D)y = y'' + a_1 y' + a_0 y$ . Tomamos el polinomio característico asociado a la EDO  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son raíces del polinomio luego deben cumplir:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -a_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a_0\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y &= (D - \lambda_1)(y' - \lambda_2 y) \\ &= y'' - \lambda_2 y' - \lambda_1 y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= y'' - y'(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= y'' + a_1 y' + a_0 y = P(D)y\end{aligned}$$

□

La generalización para  $n > 1$  es análoga.

En la demostración anterior podemos evidenciar la relación entre el polinomio característico y  $P(D)$ , en efecto vimos que los operadores diferenciales lineales a coeficientes *constantes* forman un anillo conmutativo, por lo que resulta natural hacer un paralelo<sup>2</sup> entre los operadores diferenciales lineales de orden  $n$  a coeficientes constantes y los polinomios de grado  $n$  que también tienen propiedades de anillo conmutativo.

EJERCICIO PROPUESTO 3.1. La verificación de las propiedades distributivas y conmutativa en el caso de operadores lineales se deja como ejercicio al lector.

EJERCICIO PROPUESTO 3.2. Verifique que si  $P_1$  es de orden  $n_1$  y  $P_2$  es de orden  $n_2$  entonces  $P_1 P_2$  es de orden  $n_1 + n_2$ .

### 3. Estudio completo de la EDO de orden dos

Aunque se puede comenzar el estudio de las ecuaciones lineales de orden  $n$  inmediatamente, por razones pedagógicas es preferible comenzar con el estudio de las ecuaciones de orden 2. Además nos permitirá introducir otros temas importantes en las aplicaciones como son la resonancia, el amortiguamiento, los problemas con condiciones de borde, los problemas espectrales, etc<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Matemáticamente hablando, se trata de un homeomorfismo.

<sup>3</sup>Agreguemos que los problemas de segundo orden aparecen de manera natural debido a las aplicaciones en todos los ámbitos de la segunda ley de Newton.

Consideremos una EDO lineal de segundo orden normalizada a coeficientes constantes

$$(24) \quad y'' + \bar{a}_1 y' + \bar{a}_0 y = \bar{Q}$$

con  $\bar{a}_0, \bar{a}_1$  en  $\mathbb{R}$ . En notación de operadores esto es

$$P(D)y = D^2 y + \bar{a}_1 D y + \bar{a}_0 y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = \bar{Q},$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0.$$

Introduciendo la variable auxiliar  $z = (D - \lambda_2)y$  se obtiene el siguiente sistema de dos EDO lineales de primer orden que sabemos resolver:

$$\begin{cases} (D - \lambda_1)z &= \bar{Q} \\ (D - \lambda_2)y &= z. \end{cases}$$

De la primera ecuación encontramos  $z$ , que sustituimos en la segunda ecuación para obtener  $y$ . Más precisamente, los resultados de la Sección 3 nos dan

$$\begin{aligned} z &= C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} \bar{Q}(x) dx \\ y &= C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} z(x) dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{C_2 e^{\lambda_2 x} + C_1 e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx}_{\text{Solución Homogénea } y_h(x)} \\ &\quad + \underbrace{e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \left( \int e^{-\lambda_1 t} \bar{Q}(t) dt \right) dx}_{\text{Solución Particular } y_p(x)}. \end{aligned}$$

**3.1. Solución homogénea.** Se tienen tres casos para los valores característicos:

**1.** Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos vemos inmediatamente que la solución queda de la forma  $y_h(x) = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$ .

**2.** Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$  entonces  $y_h(x) = A e^{\lambda x} + B x e^{\lambda x}$ .

**3.** Finalmente, si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos conjugados de la forma  $\sigma \pm iw$  con  $w \neq 0$  tendremos que  $y_h(x) = e^{\sigma x} (A e^{iw x} + B e^{-iw x})$ . Estas soluciones nos dan valores complejos, lo cual es un inconveniente. Para resolver este problema recordemos que  $e^{iw x} = \cos(wx) + i \sin(wx)$ , de donde

$$\frac{e^{iw x} + e^{-iw x}}{2} = \cos(wx) \quad \text{y} \quad \frac{e^{iw x} - e^{-iw x}}{2i} = \sin(wx).$$

Así podemos escribir  $y_h(x) = e^{\sigma x} (C \cos(wx) + D \sin(wx))$ , con  $C = (A + B)/i$  y  $D = (A - B)$ .

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.1.** *La solución homogénea  $y_h$  de la EDO (24) a coeficientes constantes con valores característicos  $\lambda_1, \lambda_2$  está dada por:*

1.  $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$  si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ .
2.  $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$  si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ .
3.  $y_h = C_1 e^{\sigma x} \sin wx + C_2 e^{\sigma x} \cos wx$  si  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$ , con  $w \neq 0$ .

**EJEMPLO 3.1** (Analogía electromecánica). En la figura 2, observamos a la izquierda un sistema mecánico en el cual  $m$  es la masa del objeto,  $k$  es la constante de elasticidad del resorte y  $b$  es la constante de amortiguamiento. La fuerza total del sistema, en función del tiempo se representa por  $F(t)$ . El sistema de la derecha representa un circuito eléctrico  $RCL$ , donde  $L$  es la inductancia de la bobina,  $C$  es la capacidad del condensador y  $R$  es la resistencia.  $E(t)$  representa el voltaje aplicado en función del tiempo. La corriente que circula se representa por  $\frac{dq}{dt}$ .

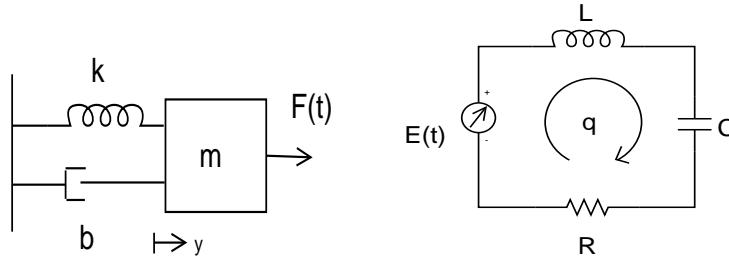


FIGURA 2. Analogía electromecánica.

Las ecuaciones que describen estos sistemas son

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m} \quad \text{y} \quad q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q = \frac{E(t)}{L},$$

respectivamente. En ambos casos se trata de una EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes. Si identificamos  $m \sim L$ ,  $b \sim R$  y  $k \sim \frac{1}{C}$  (todas constantes positivas), entonces son análogos. El polinomio característico es  $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$  y sus raíces son  $\lambda = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$ , donde  $\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$ . Escribamos por comodidad  $B = b/2m$  y supongamos que al sistema no se le aplica fuerza o voltaje; es decir,  $F(t) = 0$  o  $E(t) = 0$ , según el caso. Hay 3 situaciones posibles:

1. Si  $\Delta > 0$  entonces  $b > 2\sqrt{km}$  (la constante de amortiguamiento  $b$  es grande), por lo que decimos que el sistema está en *régimen sobreamortiguado*. Las raíces son reales, negativas y distintas. La solución es

$$y_h = C_1 e^{-(B-\sqrt{\Delta})t} + C_2 e^{-(B+\sqrt{\Delta})t}.$$

2. Si  $\Delta = 0$  las raíces son reales e iguales. Decimos que el sistema está *críticamente amortiguado* ( $b = 2\sqrt{km}$ ). En este caso la solución es

$$y_h = C_1 e^{-Bt} + C_2 t e^{-Bt}.$$

**3.** Finalmente, si  $\Delta < 0$  las raíces son complejos conjugados. Decimos que el sistema está *subamortiguado* ( $b < 2\sqrt{km}$ ) y la solución es

$$y_h = C_1 e^{-Bt} \sen(\sqrt{-\Delta} t) + C_2 e^{-Bt} \cos(\sqrt{-\Delta} t).$$

De manera equivalente podemos escribir  $y_h = C_3 e^{-Bt} \sen(\sqrt{-\Delta} t + C_4)$ , pues  $\sen(a + b) = \sen a \cos b + \sen b \cos a$ .

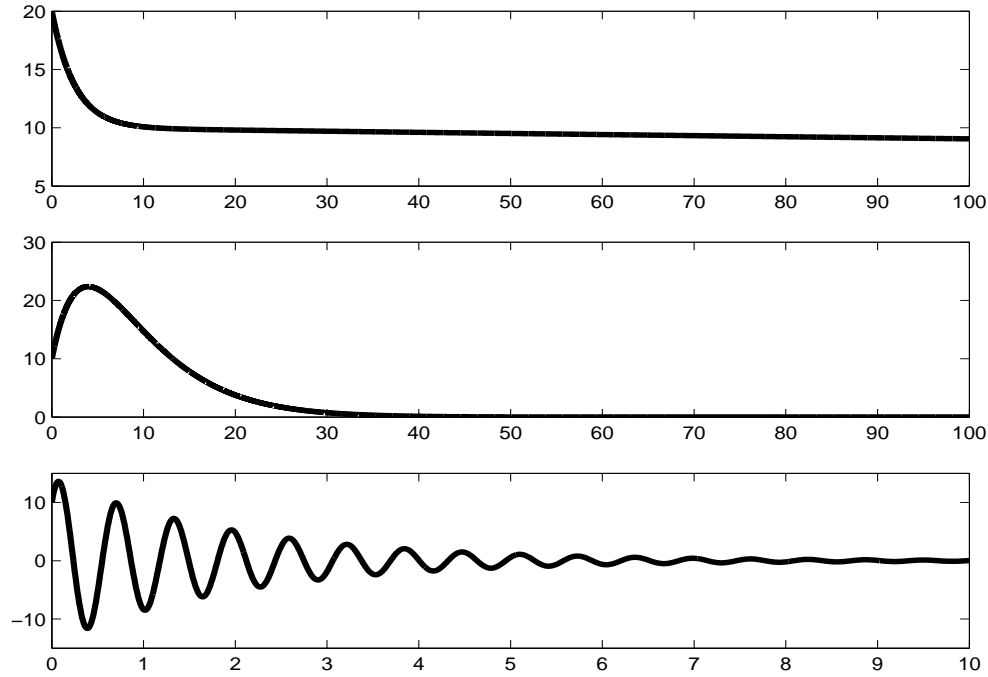


FIGURA 3. Regímenes sobreamortiguado (arriba), críticamente amortiguado (centro) y subamortiguado (abajo), con  $C_1 = C_2 = 10$ .

□

**3.2. Condiciones de borde.** Hemos visto que una ecuación lineal de segundo orden tiene una única solución si especificamos el valor de la función y su derivada en un punto. Otro problema interesante es determinar si existe alguna solución que parta de un punto y llegue a otro predefinido. Este tipo de problema aparece con frecuencia en física, ingeniería y economía. Consideremos, por ejemplo, un problema del tipo

$$\begin{cases} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

Deseamos saber para cuáles valores de  $\lambda$  este problema tiene soluciones y cuántas. De acuerdo con el signo de  $\lambda$  podemos distinguir 3 casos:

1.  $\lambda = 0$ . Si  $y'' = 0$  entonces  $y(x) = Ax + B$ . Reemplazando en  $x = 0$  vemos que  $B = 0$  y reemplazando en  $x = 1$  vemos que  $A = 0$ . La función nula es la única solución del problema.

2.  $\lambda = -w^2 < 0$ . Las soluciones son de la forma

$$y(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}.$$

Las condiciones en 0 y 1 nos dan el sistema

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ Ae^w + Be^{-w} &= 0 \end{cases}$$

para  $A$  y  $B$ . Como  $w \neq 0$ , la única solución es  $A = B = 0$ . De nuevo, sólo obtenemos la solución nula.

3.  $\lambda = w^2 > 0$ . En este caso las soluciones están dadas por

$$y(x) = A \operatorname{sen}(wx) + B \cos(wx).$$

Esta vez las condiciones en 0 y 1 nos dan el sistema

$$\begin{cases} B &= 0 \\ A \operatorname{sen}(w) &= 0 \end{cases}$$

para  $A$  y  $B$ . Si

$$w = k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

entonces toda función de la forma  $y(x) = A \operatorname{sen}(wx)$  es solución del problema.

Este tipo de problema se encuentra en la naturaleza a través de la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Buscamos soluciones de la forma  $u(x, t) = y(x)e^{iwt}$ , luego reemplazando en la ecuación llegamos a una ecuación para  $y$  de la siguiente forma:

$$w^2 y + y'' = 0$$

Tomando  $w^2 = \lambda$  llegamos a la ecuación presentada al inicio.

**3.3. El fenómeno de resonancia.** Todos hemos experimentado el siguiente hecho: una copa de cristal puede hacerse sonar si se frota suavemente con el dedo índice ligeramente humedecido y apoyado en un movimiento giratorio sobre el borde de la copa. Otro ejemplo es cuando tomamos impulso sobre un columpio o cuando un auto va sobre calaminas. Se trata de fenómenos oscilatorios en que la amplitud de la oscilación alcanza valores muy considerables ante una cierta solicitación externa específica.

Lo mismo ocurre para afinar algunos instrumentos musicales, en especial los de cuerda, utilizando un instrumento llamado *diapasón* o cuando un cantante de ópera hace vibrar su cuerpo y su cabeza para proyectar el sonido de su voz en una sala. También, y en relación al Ejemplo 3.1 de la analogía electromecánica, un circuito de radio puede ser sintonizado, es decir, pueden ser elegidos adecuadamente los valores de  $L$ ,  $C$  y  $R$  para que amplifique una frecuencia de onda electromagnética determinada que se capta de la atmósfera. Recordemos que la ecuación es

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}.$$



Resolveremos para el caso de que  $F(t) = A\cos(\omega_0 t)$  Notemos que la resonancia solo depende de el forzamiento en la parte no homogenea, por lo que podremos evidenciarlo en la solución particular. Como vimos en la seccion de estudio completa de la ecuación de orden dos, la solución particular esta dada por:

$$y_p = e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \left( \int e^{-\lambda_1 t} \overline{Q}(t) dt \right) dx$$

Para simplificar el calculo de estas integrales trabajaremos la EDO original:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y &= \frac{A\cos(\omega_0 t)}{m} \\ y'' + \overline{b}y' + \overline{k}y &= \overline{A}\cos(\omega_0 t) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Luego tomamos  $y = \overline{A}\operatorname{Re}(z)$ , luego podemos pasar a una a una EDO para  $z$  compleja.

$$z'' + \overline{b}z' + \overline{k}z = e^{i\omega t}$$

Los valores caracteristicos de el polinomio caracteristico de esta EDO son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\overline{b} \pm \sqrt{\overline{b}^2 - 4\overline{k}}}{2} = \sigma \pm i\omega \quad \text{con} \quad \overline{b}^2 < 4\overline{k}$$

Luego:

$$\begin{aligned} z_p &= e^{(\sigma - i\omega)x} \int e^{2i\omega x} dx \left( \int e^{-(\sigma + i\omega)t} e^{i\omega_0 t} dt \right) \\ &= e^{(\sigma - i\omega)x} \int \frac{e^{-(\sigma - i(\omega - \omega_0))x} dx}{-(\sigma + i(\omega - \omega_0))} \\ &= \frac{e^{i\omega_0 x}}{(\sigma + i(\omega - \omega_0))(\sigma - i(\omega + \omega_0))} \\ &= \frac{e^{i\omega_0 x}}{((\sigma^2 + \omega^2 - \omega_0^2) - 2\omega_0 \sigma i)} \end{aligned}$$

Luego lo que nos interesa es el modulo de  $z_p$  y su relacion con la amplitud de  $y_p$ :

$$\begin{aligned} |z_p| &= \frac{|e^{i\omega_0 x}|}{|(\sigma^2 + \omega^2 + \omega_0^2) - 2\omega_0 \sigma i|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + \omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2 \sigma^2}} \quad \text{Como} \quad \sigma = \frac{-\overline{b}}{2} \quad \omega = \sqrt{\overline{k} - \frac{\overline{b}^2}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\overline{k} - \omega_0^2)^2 + (\omega_0 \overline{b})^2}} \end{aligned}$$

Luego como:

$$\begin{aligned} y_p &= \overline{A}\operatorname{Re}(z_p) \quad \text{y} \quad z_p = |z_p|e^{i\omega_0 x} \\ \Rightarrow y_p &= \overline{A}|z_p|\cos(\omega_0 x) \Rightarrow |y_p| = \overline{A}|z_p| \end{aligned}$$

Teniendo esta relación podemos concluir que:

$$|y_p| = \frac{\overline{A}}{\sqrt{(\overline{k} - \omega_0^2)^2 + (\omega_0 \overline{b})^2}}$$

Podemos ver que el fenómeno de la resonancia se alcanzara cuando el denominador de la amplitud se acerque a cero, es decir para un  $\omega_0$  tal que  $(\bar{k} - \omega_0^2)^2 + (\omega_0 \bar{b})^2$  sea muy pequeño. Si consideramos a  $\bar{b}$  suficientemente pequeño (es decir un oscilador con bajo coeficiente de roce) luego si  $\omega_0^2 \rightarrow \bar{k}$  se entra en un estado de resonancia, además si  $\bar{b} = 0$  cuando  $\omega_0^2 \rightarrow \bar{k}$  la amplitud de oscilación se va a infinito. Podemos evidenciar este fenómeno en el siguiente gráfico para distintos valores de  $\bar{b}$  cuando  $\omega_0^2 \rightarrow \bar{k}$ :

#### 4. El problema de Cauchy. Teorema de Existencia y unicidad.

Necesitaremos aceptar un resultado de existencia y unicidad de soluciones para poder desarrollar la teoría y los métodos de resolución más adelante. Para establecerlo, introduzcamos primero la noción precisa de solución de una EDO lineal:

DEFINICIÓN 3.9. Se dice que  $y$  es solución de la EDO lineal

$$P(x, D)y = \bar{Q}$$

en el intervalo  $I$  si  $y \in \mathcal{C}^n(I)$  y  $P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x)$  para todo  $x \in I$ .

Ahora bien, dado  $x_0 \in I$ , nos daremos para la EDO anterior  $n$  condiciones iniciales en  $x_0$ . Esto es, nos damos los valores de las primeras  $n - 1$  derivadas en  $x_0$ . Esto escrito en forma de  $n$ -tuplas corresponde a:

$$\left( y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \right) = \left( y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)} \right)$$

donde el lado derecho es un vector dado en  $\mathbb{R}^n$ .

Con todo esto, podemos introducir el problema de Cauchy correspondiente:

DEFINICIÓN 3.10. El problema de Cauchy para EDO lineales de orden  $n$  consiste en encontrar  $y \in \mathcal{C}^n(I)$  tal que

$$(25) \quad \begin{cases} P(x, D)y(x) = \bar{Q}(x) & \forall x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}) \end{cases}$$

TEOREMA 3.2 (Existencia y Unicidad). Supongamos que las funciones  $\bar{a}_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$  y  $\bar{Q}(x)$  son continuas en el intervalo  $I$ . Entonces para cada  $x_0 \in I$  y para cada vector de condiciones iniciales, el problema de Cauchy (25) tiene una única solución.

COROLARIO 3.1. Notemos que, bajo las hipótesis del teorema anterior, si la EDO lineal es homogénea y con condiciones iniciales nulas, la única solución es la solución nula. Esto es si  $\bar{Q} \equiv 0$  y  $y_0^{(k)} = 0$  para cada  $k = 0, \dots, n - 1$ , entonces  $y \equiv 0$ .

Aplicaremos numerosas veces el Teorema de Existencia y Unicidad en este Capítulo pero más adelante lo demostraremos en el Capítulo 5.

#### 5. Estudio completo de la EDO lineal de orden $n$

Comencemos por extender las nociones de dependencia e independencia lineal:

DEFINICIÓN 3.11. Las funciones  $y_1, \dots, y_k$  en  $\mathcal{C}^n(I)$  son linealmente independientes (l.i.) si la afirmación

$$(26) \quad C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) \equiv 0 \text{ para todo } x \in I$$

implica necesariamente que todos los coeficientes  $C_1, \dots, C_k$  son cero. Si por el contrario existen  $C_1, \dots, C_k$  tales que al menos uno es distinto de cero y se tiene (26), decimos que las funciones  $y_1, \dots, y_k$  son *linealmente dependientes* (l.d.).

**EJEMPLO 3.2.** Dos funciones  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente dependientes si, y sólo si, una es múltiplo de la otra. Más adelante veremos cómo el Wronskiano puede ayudarnos a comprobar si  $k$  funciones ( $k \geq 2$ ) son linealmente independientes.  $\square$

### 5.1. La estructura geométrica de la solución: los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}$ .

Vamos a estudiar la estructura de la solución general de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$ . En primer lugar, denotemos por  $\mathcal{H}$  el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\mathcal{H} = \left\{ y \in \mathcal{C}^n(I) \mid y^{(n)}(x) + \dots + \bar{a}_1(x)y'(x) + \bar{a}_0(x)y(x) = 0 \ \forall x \in I \right\}.$$

**TEOREMA 3.3.**  $\mathcal{H}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{C}^n(I)$  de dimensión  $n$ , es decir  $\exists$  una base de soluciones de dimensión  $n$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Definimos el siguiente operador:

$$\begin{aligned} T_{x_0} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos ver que  $T_{x_0}$  es una función biyectiva gracias al Teorema de existencia y unicidad (La existencia nos da la sobreyectividad y la unicidad la inyectividad), como  $\mathcal{H}$  y  $\mathbb{R}^n$  son ambos espacios vectoriales de dimensión finita y existe una biyección entre ellos  $\Rightarrow \dim \mathcal{H} = \dim \mathbb{R}^n = n$ . Para encontrar la base de  $\mathcal{H}$  definimos la base canónica de  $\mathcal{H}$  (Inducida por  $\mathbb{R}^n$ ) como:

$$\begin{aligned} P(x, D)y_i &= 0 \\ T_{x_0}(y_i) &= e_i \quad (\text{Base canónica de } \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$\square$

Denotamos por  $\mathcal{S}$  el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden  $n$  no homogénea

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathcal{C}^n(I) \mid y^{(n)} + \dots + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q} \text{ en } I \right\}.$$

Sean  $X$  un espacio vectorial,  $A$  un subespacio de  $X$  y  $x \in X$ . Un *hiperplano* o *subespacio afín* es un conjunto de la forma

$$x + A = \{ z \in X \mid z = x + a \text{ para algún } a \in A \}.$$

**TEOREMA 3.4.** Si  $y_p \in \mathcal{S}$  es cualquier solución de la ecuación no homogénea, entonces  $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$ .

Geométricamente, esto quiere decir que  $\mathcal{S}$  es un hiperplano que se obtiene al desplazar por  $y_0$  el subespacio  $\mathcal{H}$ .

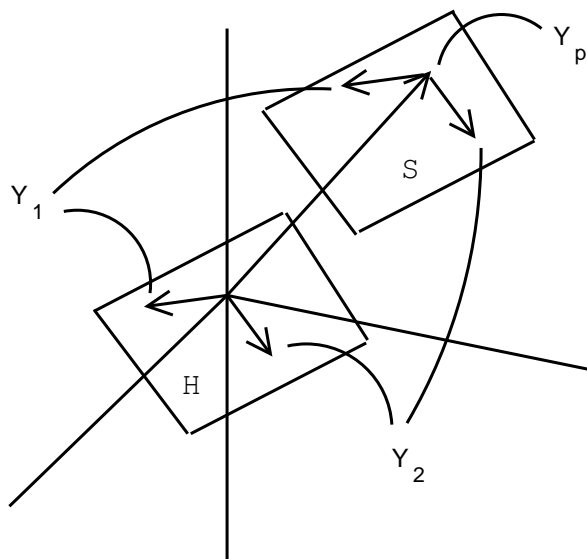


FIGURA 4. Representación de los espacios  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{S}$  en 2 dimensiones sobre  $\mathcal{C}^2(I)$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que la resta de dos funciones en  $\mathcal{S}$  está en  $\mathcal{H}$ ; es decir, es solución de la ecuación homogénea. Pero esto es inmediato de la linealidad de la ecuación.  $\square$

COROLARIO 3.2. *Todo elemento de  $\mathcal{S}$  se escribe de la forma*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p,$$

donde  $y_1, \dots, y_n$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea,  $y_p$  es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea y las  $C_i \in \mathbb{R}$  son constantes arbitrarias que dependen del vector de condiciones iniciales.<sup>4</sup>

## 5.2. Wronskiano y Fórmula de Abel.

DEFINICIÓN 3.12. El *Wronskiano* asociado a  $n$  funciones  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$  es

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Notar que  $W$  es una *función* de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$ . Usamos también la notación  $W(y_1, \dots, y_n)$  para enfatizar la dependencia de las funciones  $y_1, \dots, y_n$ .

Enunciaremos ahora dos resultados técnicos sobre determinantes que necesitaremos en las demostraciones que siguen:

LEMA 3.1. *El determinante es multilineal por filas y columnas.*

<sup>4</sup>Las  $C_i$  no son los  $\beta_i$  calculados en la demostración del Teorema 3.3.

Por ejemplo, si  $\det(A) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , donde  $F_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $A$ , se tendrá que

$$\begin{aligned} \det(F_1, \dots, a + \lambda b, \dots, F_n) &= \det(F_1, \dots, a, \dots, F_n) \\ &\quad + \lambda \det(F_1, \dots, b, \dots, F_n). \end{aligned}$$

LEMA 3.2. *Sea  $A(x)$  una matriz con entradas variables (dependientes de  $x$ ). Como arriba escribimos  $\det(A) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$ , donde las  $F_i$  y las  $C_j$  son las filas y columnas de  $A$ , respectivamente. Tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |A(x)| &= \sum_{i=1}^n \det(F_1, \dots, F'_i, \dots, F_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Con esto, la técnica para derivar el determinante de una matriz es la siguiente:

1. Se deriva la primera fila (o columna) y se calcula el determinante de la matriz así obtenida.
2. Se hace lo mismo con cada una de las filas (o columnas) de la matriz.
3. Se suman los resultados parciales.

La demostración del Lema 3.2 puede hacerse fácilmente por inducción o utilizando la definición de derivada y el Lema 3.1.

Recordemos que si dos filas en una matriz son iguales, su determinante es cero.

Cuando calculamos la derivada del Wronskiano usando el método descrito arriba (por filas) nos encontramos con que la mayoría de los sumandos, salvo el último, tienen una fila repetida y por lo tanto son cero. Así obtenemos

$$W'(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Como las funciones  $y_1, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación homogénea, la última fila se reescribe para obtener

$$W'(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i(x) y_1^{(i)} & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i(x) y_n^{(i)} \end{vmatrix}.$$

Gracias al Lema 3.1, podemos expandir la última fila. Todos los sumandos, salvo el último, tienen una fila repetida, por lo que la derivada del Wronskiano queda de la forma

$$(27) \quad W'(x) = -\bar{a}_{n-1}(x)W(x).$$

Al integrar la ecuación (27) obtenemos la Fórmula de Abel:

TEOREMA 3.5 (Fórmula de Abel). Sean  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$ . Entonces el Wronskiano  $W$  satisface

$$W(x) = C \exp \left( - \int \bar{a}_{n-1}(x) dx \right)$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . En particular, si se anula en un punto, se anula siempre.

Resumiremos algunas propiedades del Wronskiano que tienen que ver con independencia lineal de funciones en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.6. Sean  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ .

1. Si  $W(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in I$  entonces  $y_1, \dots, y_n$  son linealmente independientes.
2. En general, el que  $W(x) = 0$  para todo  $x \in I$  no basta para garantizar que  $y_1, \dots, y_n$  sean linealmente dependientes.
3. Si  $y_1, \dots, y_n$  son funciones en  $\mathcal{H}$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - a)  $W(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in I$ ;
  - b)  $W(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ ; y
  - c)  $y_1, \dots, y_n$  son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN. La parte 1 se deja como ejercicio al lector. Un contraejemplo para la parte 2 es  $y_1 = x^3$  e  $y_2 = |x^3|$ , para  $n = 2$ .

En cuanto a la parte 3, la equivalencia entre a) y b) es evidente gracias a la fórmula de Abel y la implicancia b)  $\Rightarrow$  c) es clara gracias a la parte 1. Para la otra implicancia, probemos que si  $W(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in I$ , entonces  $y_1, \dots, y_n$  son linealmente dependientes. En efecto, si  $W(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in I$ , se tiene que existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

pues la matriz del lado izquierdo no es invertible. Definiendo  $z(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} z(x_0) &= \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) &= 0 \\ z'(x_0) &= \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x_0) &= \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $z \in \mathcal{H}$ , por el Teorema de Existencia y Unicidad, se tiene que  $z(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Luego existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que  $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$  para todo  $x \in I$ .  $\square$

Nota: si  $y_1, \dots, y_n$  son una base de  $\mathcal{H}$ ; es decir, si son  $n$  soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, la matriz siguiente es invertible

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

y se denomina *matriz fundamental de soluciones* asociada a la base  $y_1, \dots, y_n$ . No se debe confundir la matriz fundamental con el Wronskiano, que es  $W = \det \Phi$ . Esta matriz será reaparecerá en el Capítulo 5 sobre sistemas lineales.

## 6. Métodos de resolución de EDO de orden $n$ a coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos varios métodos para resolver la ecuación diferencial lineal de orden  $n$  a coeficientes constantes. Para la ecuación homogénea describiremos un método que sigue la misma línea de lo que se hizo para la ecuación de orden 2, usando los valores característicos. Finalmente nos enfocaremos en la búsqueda de soluciones particulares de la ecuación homogénea.

### 6.1. Solución homogénea. La EDO

$$y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0y = 0$$

se escribirá de la forma  $P(D)y = 0$ , donde  $P(D)$  es el operador diferencial

$$P(D) = D^n + \bar{a}_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1D + \bar{a}_0 = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i D^i$$

con  $\bar{a}_n = 1$ . El operador  $P(D)$  está asociado al *polinomio característico*

$$p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0.$$

Como se trata de un polinomio de grado  $n$ , tendrá  $n$  raíces reales o complejas llamadas *valores característicos* (quizá repetidos). Supondremos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  son las  $l$  raíces distintas y tienen multiplicidades  $m_1, \dots, m_l$ , respectivamente. Recordemos que como los coeficientes del polinomio son reales, las raíces que sean complejas vendrán en pares conjugados. El polinomio se puede descomponer de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l} = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

donde  $n = \sum_{i=1}^l m_i$ . La factorización de  $p(\lambda)$  induce una análoga en  $P(D)$ , donde el producto corresponde a una composición:

$$P(D) = \underbrace{(D - \lambda_1) \circ \cdots \circ (D - \lambda_1)}_{m_1 \text{ veces}} \circ \cdots \circ \underbrace{(D - \lambda_l) \circ \cdots \circ (D - \lambda_l)}_{m_l \text{ veces}}$$

Note que esta factorización permite de hecho resolver la EDO de orden  $n$  como una serie de EDO de orden 1. En efecto, es claro que

$$P(D)y = 0 \Leftrightarrow (D - \lambda_1)^{m_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_l)^{m_l}y = 0,$$

entonces si definimos nuevas variables  $z_i$  de la forma:

$$(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_1) \circ \dots \circ (D - \lambda_l) \circ \underbrace{(D - \lambda_l)y}_{z_{n-1}} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{z_1}$$

lo que genera un sistema en cascada de  $n$  EDO's lineales de orden 1:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)z_1 &= 0 \\ (D - \lambda_1)z_2 &= z_1 \\ &\vdots \\ (D - \lambda_1)z_{m_1} &= z_{m_1-1} \\ &\vdots \\ (D - \lambda_l)y &= z_{n-1} \end{aligned}$$

En principio, este es un método válido para resolver la EDO (incluso la no-homogénea) pero veremos a continuación que la solución homogénea se puede obtener de una forma mucho más explícita.

### PROPIEDADES 3.2. (Traslación)

1.  $P(D + \lambda)1 = p(\lambda)$
2.  $P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(D + \lambda)1 = e^{\lambda x}p(\lambda)$
3.  $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D + \lambda)f(x)$

La demostración queda propuesta para el lector.

Con ayuda de la propiedad 2) se pueden encontrar  $l$  soluciones de la ecuación homogénea. Si  $\lambda_i$  es una raíz del polinomio  $p(\lambda)$ , se tiene que:

$$P(D)e^{\lambda_i x} = e^{\lambda_i x} \underbrace{p(\lambda_i)}_{=0} = 0$$

Lo que quiere decir que  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_l x}$  son soluciones de (H). Veamos que son l.i.:

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_l x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_l x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l e^{\lambda_l x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l^{l-1} e^{\lambda_l x} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_l^{l-1} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) C \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$



Como  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ , el Wronskiano es distinto de cero y las funciones son l.i. Para formar la base necesitamos  $n$  funciones l.i., por lo tanto hay que encontrar  $n - l$  más. De la propiedad 3), se tiene que  $(\lambda_i$  es una raíz del polinomio  $p(\lambda)$ ):

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\lambda_i x}) &= e^{\lambda_i x} P(D + \lambda_i) x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_i - \lambda_i)^{m_i} \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_{i-1} - \lambda_i)^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1} - \lambda_i)^{m_{i+1}} \\ &\quad \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} D^{m_i} x^k \end{aligned}$$

Como  $D^{m_i} x^k = 0 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_i - 1$ , se encuentran  $m_i - 1$  soluciones de (H):

$$x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}$$

Repitiendo este procedimiento para cada  $m_i$ , se encuentran  $n - l$  soluciones, ya que  $\sum_{i=1}^l (m_i - 1) = \sum_{i=1}^l m_i - l = n - l$ .

EJEMPLO 3.3.

$$(D - 1)^2 (D + 3)^5 D^3 y = 0$$

En este caso  $n = 10$ . Veamos todas las soluciones que se encuentran con este método:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, m_1 = 2 &\Rightarrow \{e^x, x e^x\} \\ \lambda_2 = -3, m_2 = 5 &\Rightarrow \{e^{-3x}, x e^{-3x}, x^2 e^{-3x}, x^3 e^{-3x}, x^4 e^{-3x}\} \\ \lambda_3 = 0, m_3 = 3 &\Rightarrow \{1, x, x^2\} \end{aligned}$$

Veamos si son l.i. Para todo  $x \in I$  se debe cumplir:

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,1} e^x + \alpha_{1,2} x e^x + \\ &\alpha_{2,1} e^{-3x} + \alpha_{2,2} x e^{-3x} + \alpha_{2,3} x^2 e^{-3x} + \alpha_{2,4} x^3 e^{-3x} + \alpha_{2,5} x^4 e^{-3x} + \\ &\alpha_{3,1} + \alpha_{3,2} x + \alpha_{3,3} x^2 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando  $(D - 1)^3 (D + 3)^5 D^2$  a esta expresión, se transforma en

$$2\alpha_{3,3} = 0$$

Aplicando  $(D - 1)^3 (D + 3)^5 D$ , se obtiene

$$\alpha_{3,2} = 0$$

Y sucesivamente, se obtiene que  $\alpha_{i,j_i} = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , por lo tanto, son l.i.

En general, las  $n$  soluciones encontradas son l.i., pues dada la ecuación

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,1} e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{1,m_1} x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} + \\ &\alpha_{2,1} e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_{2,m_2} x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} + \\ &\quad \vdots \\ &\alpha_{l,1} e^{\lambda_l x} + \dots + \alpha_{l,m_l} x^{m_l-1} e^{\lambda_l x} = 0 \end{aligned}$$

Al aplicar el operador  $(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_i)^{m_i-1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{i,m_i-1} (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} (D - \lambda_i)^{m_i-1} (x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}) &= 0 \\ e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} \underbrace{(D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_l + \lambda_i)^{m_l}}_{\tilde{p}(\lambda_i)} \underbrace{D^{m_i-1} x^{m_i-1}}_{(m_i-1)!} &= 0 \\ e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} (m_i - 1)! \tilde{p}(\lambda_i) &= 0 \end{aligned}$$

Se verifica que  $\tilde{p}(\lambda_i) \neq 0$  y  $(m_i - 1)! \neq 0$ , por lo tanto  $\alpha_{i,m_i-1} = 0$ . Repitiendo la aplicacion progresivamente, se verifica que todos los  $\alpha_{i,m_i-1}$  son iguales a cero, con lo cual las  $n$  funciones son l.i..

Antes de pasar a los ejemplos resumiremos la discusión anterior en el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.7.** *Supongamos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  son los valores característicos, con multiplicidades  $m_1, \dots, m_l$ , de la ecuación homogénea*

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} y = 0.$$

*Una base para  $\mathcal{H}$  es la generada por las siguientes funciones linealmente independientes:*

- Para cada valor característico  $\lambda$  real

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

- Para cada par de valores característicos complejos  $\alpha \pm i\beta$ ,

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x). \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.4.**

$$(D - 1)^2 (D + 3)^5 D^3 y = 0.$$

En este caso  $n = 10$ . Veamos todas las soluciones que se encuentran con este método:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad m_1 = 2 &\Rightarrow \{e^x, x e^x\}, \\ \lambda_2 = -3, \quad m_2 = 5 &\Rightarrow \{e^{-3x}, x e^{-3x}, x^2 e^{-3x}, x^3 e^{-3x}, x^4 e^{-3x}\}, \\ \lambda_3 = 0, \quad m_3 = 3 &\Rightarrow \{1, x, x^2\}. \end{aligned}$$

□

**EJEMPLO 3.5.** Resolveremos ahora la ecuación diferencial

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

El polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces las soluciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad m_1 = 1 &\Rightarrow \{e^x\}, \\ \lambda_2, \overline{\lambda_2} = \pm i, \quad m_2 = 2 &\Rightarrow \{\cos(x), \sin(x), x \cos(x), x \sin(x)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, toda solución homogénea se escribe como combinación lineal de estas funciones, por lo que la solución general es

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \cos(x) + C_5 x \sin(x).$$

□

**6.2. Ecuación no homogénea.** Estudiaremos dos métodos para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea.

El método de *coeficientes indeterminados*, que puede usarse cuando el lado derecho involucra únicamente polinomios, senos, cosenos y exponenciales. Consiste en postular que la solución es de cierto tipo (similar al lado derecho), pero con coeficientes que son determinados *a posteriori*. Tiene la ventaja de que los cálculos son extremadamente sencillos ya que involucran únicamente derivación de polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas.

El método de *variación de parámetros* se basa en la representación de la ecuación de orden  $n$  como un sistema lineal de primer orden. De hecho, también es un método valioso para encontrar soluciones particulares de estos sistemas. Consiste en representar la solución particular como una combinación *variable* de las soluciones homogéneas. Tiene dos ventajas notables en cuanto a su rango de aplicaciones: en primer lugar, sirve para cualquier tipo de lado derecho; en segundo lugar, el método también es útil, al menos teóricamente, para el estudio de ecuaciones a coeficientes variables. También tiene dos puntos en contra: es necesario conocer una base del espacio de soluciones homogéneas y además involucra operaciones con matrices y cálculo de integrales.

**6.2.1. Método de los coeficientes indeterminados.** Este método puede aplicarse para encontrar una solución particular de la ecuación

$$P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x}$$

con  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  y  $q_{k_0}e^{\lambda_0 x}$  una función que puede ser un polinomio por una exponencial, un polinomio por seno o coseno por una exponencial o cualquier combinación lineal de estos, donde  $\text{gr}(q_{k_0}) \leq k_0$  en caso de ser un polinomio.

Este método tiene la desventaja aparente de ser muy restrictivo en cuanto al tipo de lado derecho para el cual es útil. Sin embargo, estas funciones son sumamente frecuentes en la aplicaciones.

El operador diferencial que anula el lado derecho es  $(D - \lambda_0)^{k_0+1}$ , pues

$$\begin{aligned} (D - \lambda_0)^{k_0+1} P(D)y &= (D - \lambda_0)^{k_0+1} q_{k_0}(x) e^{\lambda_0 x} \\ &= e^{\lambda_0 x} D^{k_0+1} q_{k_0}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , la ecuación se transforma una homogénea de orden  $n + k_0 + 1$  que sabemos resolver.

Si  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , se aplica además el operador  $(D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}$  a ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene  $(D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1} (D - \lambda_0)^{k_0+1} P(D)y = 0$ , que es una homogénea de orden  $n + 2(k_0 + 1)$ . Hay dos casos que se estudiarán:

**A. Caso no resonante:**  $\lambda_0 \neq \lambda_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, l\}$

**A.1** Caso real:  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La idea es obtener  $y_p$  comparando  $\tilde{y}_h$  e  $y_h$ , más precisamente, como combinación lineal de aquellas funciones que aparezcan en  $\tilde{y}_h$  y que sean l.i. con las que aparezcan en  $y_h$ .

Se sabe que  $y_h$  es combinación lineal de funciones pertenecientes a

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{\lambda_i \in \mathbb{R}} \{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}\} \cup \\ &\quad \bigcup_{\lambda_j = \sigma_j \pm iw_j} \{e^{\sigma_j x} \cos w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \cos w_j x\} \cup \\ &\quad \{e^{\sigma_j x} \sin w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \sin w_j x\} \end{aligned}$$

E  $\tilde{y}_h$  es combinación lineal de elementos pertenecientes a

$$\tilde{M} = M \cup \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k_0}e^{\lambda_0 x}\}$$

Luego,  $y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$ , con  $A_i$  constantes en  $\mathbb{R}$  a determinar.

Reemplazando  $y_p$  en  $P(D)y$ :

$$\begin{aligned} P(D)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x} &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ e^{\lambda_0 x}P(D + \lambda_0)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0}) &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ r_{k_0}(x) &= q_{k_0}(x), \end{aligned}$$

donde  $r_{k_0}(x)$  es un polinomio cuyos coeficientes dependen de  $A_i$  para  $i \in \{0, \dots, k_0\}$ . Igualando coeficientes se obtiene un sistema lineal de  $(k_0 + 1) \times (k_0 + 1)$ , de donde se calculan los coeficientes.

**EJEMPLO 3.6.** Encontraremos una solución particular de la ecuación

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^{3x}.$$

Tenemos que  $\alpha = 3$ , que no es un valor característico de la ecuación. Como el polinomio que acompaña a la exponencial en el lado derecho tiene grado 1, proponemos como solución

$$y_p(x) = (A_0 + A_1x)e^{3x}.$$

Aplicamos a  $y_p$  el operador diferencial  $P(D) = (D - 1)(D - 2) = D^2 - 3D + 2$  y obtenemos

$$\begin{aligned} P(D)y_p(x) &= (6A_1 + 9A_0 + 9A_1x)e^{3x} \\ &\quad - 3(A_1 + 3A_0 + 3A_1x)e^{3x} \\ &\quad + 2(A_0 + A_1x)e^{3x} \\ &= (3A_1 + 2A_0 + 2A_1x)e^{3x}. \end{aligned}$$

Comparando con el lado derecho de la ecuación tenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 &= 3A_1 + 2A_0 \\ 1 &= 2A_1, \end{cases}$$

cuya solución es  $A_0 = -3/4$ ,  $A_1 = 1/2$ . De aquí, una solución particular de la ecuación es

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{3x}.$$

□

### A.2 Caso complejo: $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}(D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

Comparando  $y_h$  con  $\tilde{y}_h$ , se tiene que

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \cos w_0x + \\ &\quad (B_0 + B_1x + \dots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \sin w_0x \end{aligned}$$

Al reemplazar  $y_p$  en la EDO se obtienen  $2k_0 + 2$  ecuaciones.

#### EJEMPLO 3.7.

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^{3x} \cos x$$

En este caso  $\lambda_0 = 3 \pm i$ , y la solución homogénea es  $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$ , luego

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x)e^{3x} \cos x + (B_0 + B_1x)e^{3x} \sin x \\ y'_p &= (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{B}_0 + \tilde{B}_1x)e^{3x} \sin x \text{ (verificar)} \\ y''_p &= (\tilde{\tilde{A}}_0 + \tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0 + \tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x} \sin x \text{ (verificar)} \end{aligned}$$

donde  $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{\tilde{A}}_0, \tilde{\tilde{B}}_0, \tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{B}}_1$  están en función de  $A_0, B_0, A_1, B_1$ . Reemplazando  $y_p$  en la EDO, se tiene que

$$(\tilde{\tilde{A}}_0 + \tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0 + \tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x} \sin x = xe^{3x} \cos x$$

De donde se deduce que  $\tilde{\tilde{A}}_0 = 0, \tilde{\tilde{A}}_1 = 1, \tilde{\tilde{B}}_0 = 0$  y  $\tilde{\tilde{B}}_1 = 0$ , lo que permite encontrar  $A_0, B_0, A_1$  y  $B_1$ .

### B. Caso resonante: $\lambda_0 = \lambda_j$ para algún $j \in \{1, \dots, l\}$

#### B.1 Caso real: $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h. \end{aligned}$$

La segunda ecuación se puede escribir de la forma

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_0)^{m_0+k_0+1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} \tilde{y} = 0$$

Es decir,  $\lambda_0$  aumenta su multiplicidad, luego, comparando  $\tilde{y}_h$  y  $y_h$ , se tiene que  $y_p$  es combinación lineal de elementos de

$$\{x^{m_0}e^{\lambda_0 x}, x^{m_0+1}e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{m_0+k_0}e^{\lambda_0 x}\}$$

es decir,

$$y_p = x^{m_0}(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$$

Al factor  $x^{m_0}$  se le llama *factor de resonancia*.

**B.2** Caso complejo:  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  Repitiendo el proceso, se observa que  $y_p$  es de la forma

$$y_p = x^{m_0}(A_0 + A_1x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \cos w_0 x \\ + x^{m_0}(B_0 + B_1x + \cdots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \sen w_0 x.$$

EJEMPLO 3.8. Queremos encontrar una solución particular de la ecuación

$$(D-1)^2(D+1)y = (4x+3)e^x.$$

Vemos que el coeficiente  $\alpha = 1$  en la exponencial del lado derecho es valor característico de multiplicidad 2. En vista de lo discutido anteriormente proponemos una solución de la forma

$$y_p(x) = x^2(A_0 + A_1x)e^x = (A_0x^2 + A_1x^3)e^x.$$

El operador diferencial es  $P(D) = (D-1)^2(D+1) = D^3 - D^2 - D + 1$ . Tenemos

$$\begin{aligned} Dy_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x)e^x \\ D^2y_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0)e^x \\ D^3y_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 9A_1)x^2 + 6(A_0 + 3A_1)x + 6(A_0 + A_1))e^x, \end{aligned}$$

de modo que

$$P(D)y_p = (4A_0 + 6A_1 + 12A_1x)e^x.$$

Al igualar al lado derecho obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 3 &= 4A_0 + 6A_1 \\ 4 &= 12A_1, \end{cases}$$

cuya solución es  $A_0 = 1/4$ ,  $A_1 = 1/3$ . Con esto encontramos la solución particular

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)e^x.$$

□

## 7. Métodos de resolución de EDO de orden $n$ a coeficientes variables

### 7.1. Ecuación homogénea.

**7.1.1. Fórmulas de Abel y Liouville.** En el caso de la ecuación homogénea con coeficientes variables, el método de los valores característicos no se puede aplicar y no existe una metodología general para encontrar las soluciones. No obstante, podemos fácilmente encontrar una solución linealmente independiente a partir de otra concida en el caso de orden dos, utilizando la fórmula de Abel, dada en el Teorema 3.5. Esta dice que si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden dos entonces el Wronskiano  $W$  satisface

$$W(x) = C \exp\left(-\int \bar{a}_1(x)dx\right).$$

Más precisamente, la Fórmula de Abel nos dice que

$$y_2'y_1 - y_1'y_2 = C \exp\left(-\int \bar{a}_1(x)dx\right).$$

En los intervalos donde  $y_1 \neq 0$  obtenemos

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{C}{y_1} \exp \left( - \int \bar{a}_1(x) dx \right),$$

que es una ecuación lineal de primer orden que sabemos resolver. Multiplicamos la ecuación por el factor integrante

$$\mu(x) = \exp \left( - \int \frac{y_1'}{y_1} dx \right) = \frac{1}{y_1}$$

y obtenemos

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{C}{y_1^2} \exp \left( - \int \bar{a}_1(x) dx \right).$$

Integrando obtenemos

$$y_2 = D y_1 + y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left( - \int \bar{a}_1(x) dx \right) du.$$

Si tomamos  $D = 0$  obtenemos la *Fórmula de Liouville*

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left( - \int \bar{a}_1(x) dx \right) du.$$

**EJEMPLO 3.9.** Se tiene la EDO  $x^2 y'' + x y' - y = 0$  y una solución  $y_1 = x$ . Se pide encontrar otra solución linealmente independiente  $y_2$ . Para ello escribimos la ecuación normalizada:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

La fórmula de Abel nos da

$$x y_2' - y_2 = C \exp \left( \int -\frac{dx}{x} \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} y_2' - \frac{1}{x^2} y_2 &= \frac{C}{x^3} \\ \left( \frac{y_2}{x} \right)' &= \frac{C}{x^3} \\ \frac{y_2}{x} &= \frac{C}{-2x^2} + D. \end{aligned}$$

Tomamos  $C = -2$ ,  $D = 0$  y obtenemos  $y_2 = \frac{1}{x}$ . □

Este método puede aplicarse a la ecuación de orden  $n > 2$ , teniendo en cuenta que la fórmula de Abel nos entregará una EDO de orden  $n - 1$  a coeficientes variables. Si bien no se obtiene de manera tan sencilla la solución faltante, esto constituye una *reducción de orden* con lo que la búsqueda de la  $n$ -ésima solución linealmente independiente puede ser más tratable.

7.1.2. *La ecuación de Euler.* La ecuación de Euler es de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son constantes y  $a_n \neq 0$ . Se hace el cambio de variable  $x = e^u$ ,  $z(u) = y(e^u)$ , siempre y cuando  $x \neq 0$ . Con esto

$$z'(u) = e^u y'(e^u) = x y'(x).$$

Luego

$$z''(u) = e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u) = x y'(x) + x^2 y''(x),$$

con lo cual

$$x^2 y''(x) = z''(u) - z'(u)$$

y así sucesivamente. Al final queda una ecuación lineal de orden  $n$  a coeficientes constantes.

EJEMPLO 3.10. Estudiaremos la ecuación

$$x^2 y''(x) + x y'(x) = 0.$$

Los cambios de variable descritos arriba nos conducen a  $z''(u) - z'(u) + z'(u) = 0$ . Es decir,  $z''(u) = 0$ . Las soluciones de esta ecuación son de la forma  $z(u) = Au + B$ , con  $A, B \in \mathbb{R}$ . Así,

$$y(x) = z(\ln(x)) = A \ln(x) + B, \quad x \neq 0.$$

□

EJEMPLO 3.11. Para la ecuación

$$x^3 y'''(x) + x^2 y''(x) - 4x y'(x) = 0$$

vemos que

$$\begin{aligned} x y'(x) &= z'(u) \\ x^2 y''(x) &= z''(u) - z'(u) \\ x^3 y'''(x) &= z'''(u) - 3z''(u) + 2z'(u). \end{aligned}$$

La ecuación se transforma en

$$z'''(u) - 2z''(u) - 3z'(u) = 0.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

de donde los valores característicos son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 3$  y  $\lambda_3 = -1$ . Así, las soluciones son de la forma

$$z(u) = A + B e^{3u} + C e^{-u},$$

de donde

$$y(x) = A + B x^3 + C x^{-1}.$$

□

## 7.2. Ecuación no homogénea.



7.2.1. *Método de variación de parámetros.* Notemos que la ecuación de orden  $n$  puede escribirse como un sistema de la forma

$$\begin{cases} z'(x) &= A_c(x)z(x) + b(x) & \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) &= y^{(k-1)}(x_0) & \text{para } k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

donde

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{Q} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que tenemos una base  $y_1, \dots, y_n$  de soluciones de la ecuación homogénea. Recordemos que

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental de soluciones y notemos que

$$A_c \Phi = \begin{pmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \Phi'.$$

Buscaremos una solución de la forma

$$y_p(x) = F_1(x)y_1(x) + \cdots + F_n(x)y_n(x).$$

Observemos que esta expresión es justamente la primera componente del vector  $\Phi F$  y las otras componentes son sus derivadas. La idea es encontrar el vector  $F$  de manera que  $\Phi F$  sea solución del sistema de primer orden:

$$(\Phi(x)F(x))' = A_c(x)\Phi(x)F(x) + b(x).$$

La regla para la derivación de un producto es válida para matrices (ver Lema 5.1). Luego

$$\begin{aligned} (\Phi(x)F(x))' &= \Phi'(x)F(x) + \Phi(x)F'(x) \\ &= A_c(x)\Phi(x)F(x) + \Phi(x)F'(x), \end{aligned}$$

de manera que si encontramos  $F$  tal que  $\Phi(x)F'(x) = b(x)$ , entonces la primera componente del vector  $\Phi(x)F(x)$  será una solución particular de la ecuación de orden  $n$  original. Ahora bien, la matriz  $\Phi$  es invertible pues está formada por soluciones linealmente independientes de la ecuación. De este modo podemos tomar

$$F(x) = \int \Phi(x)^{-1} b(x) \, dx.^5$$

---

<sup>5</sup>Se puede usar la regla de Cramer en lugar de calcular la inversa. Esto da origen a la fórmula de representación de Green, que estudiaremos más adelante.

EJEMPLO 3.12. Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Los valores característicos de la ecuación son 1 y  $-1$ , por lo que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son  $e^x$  y  $e^{-x}$ . Construimos

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\Phi(x)^{-1}b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-x}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+e^{-x})} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = -\ln \sqrt{1 + e^{-x}}$$

y

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x dx}{1 + e^{-x}} = -\frac{e^x}{2} + \ln \sqrt{1 + e^x}.$$

Finalmente obtenemos la solución particular

$$\begin{aligned} y_p(x) &= F_1(x)e^x + F_2(x)e^{-x} \\ &= -e^x \ln \sqrt{1 + e^{-x}} - \frac{1}{2} + e^{-x} \ln \sqrt{1 + e^x}. \end{aligned}$$

□

## 8. Resolución de problemas con condiciones de borde.

En el caso de EDO lineales de segundo orden, ya vimos algunos problemas con condiciones de borde, como era el caso del problema espectral de la Sección 3.2. En el caso de EDO lineales de orden  $n$ , se pueden plantear también problemas con condiciones de borde, y al menos estudiar bajo qué condiciones la solución puede existir y ser única.

Notemos que en estos problemas no se aplica directamente el Teorema de Existencia y Unicidad por no estar el problema planteado directamente como un problema de Cauchy (con todas las condiciones de borde en solo un punto). Esto se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.13. Dada la ecuación  $y^{(4)} + p(x)y = g(x)$  con  $p$  y  $g$  continuas en  $x \in (0, 1)$  y condiciones de borde  $y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$ . Suponiendo que para  $g = 0$  la única solución es la nula, demostremos que existe una única solución si  $g \neq 0$ .

Dado que  $p$  (coeficiente) y  $g$  (lado derecho) son funciones continuas, sabemos que la solución general  $y$  tiene la forma:

$$y = \underbrace{Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4}_{y_h} + y_p$$

donde  $A, B, C, D$  son constantes,  $y_1, y_2, y_3, y_4$  son soluciones (l.i.) de clase  $C^4([0, 1])$  de la ecuación homogénea  $y^{(4)} + p(x)y = 0$  e  $y_p$  es cualquier solución particular de  $y^{(4)} + p(x)y = g(x)$ .

Imponiendo las cuatro condiciones de borde se obtiene:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= Ay_1(0) + By_2(0) + Cy_3(0) + Dy_4(0) + y_p(0) \\ y(1) = 0 &= Ay_1(1) + By_2(1) + Cy_3(1) + Dy_4(1) + y_p(1) \\ y''(0) = 0 &= Ay_1''(0) + By_2''(0) + Cy_3''(0) + Dy_4''(0) + y_p''(0) \\ y''(1) = 0 &= Ay_1''(1) + By_2''(1) + Cy_3''(1) + Dy_4''(1) + y_p''(1) \end{aligned}$$

Esto escrito como un sistema lineal queda así

$$(*) \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0) & y_4''(0) \\ y_1''(1) & y_2''(1) & y_3''(1) & y_4''(1) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p(0) \\ -y_p(1) \\ -y_p''(0) \\ -y_p''(1) \end{pmatrix}$$

Si  $g = 0$  una solución particular es  $y_p = 0$ . En este caso sabemos del enunciado que la única solución es la solución nula, entonces

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B = C = D = 0$$

de donde  $M$  es invertible, por lo que el sistema  $(*)$  también tiene solución única cualquiera sea el  $y_p$  escogido. Por ello siempre hay una solución (para cada  $y_p$  elegido hay un set de constantes  $A, B, C, D$  asociadas soluciones del sistema  $(*)$ ).

Para convencerse de que es única, basta tomar dos soluciones  $y, z$ , y la resta de ambas  $u = y - z$  satisface la ecuación homogénea con las mismas condiciones de borde, que sabemos por enunciado debe ser nula. Por esto  $u = 0$  es decir  $y = z$ .

**EJEMPLO 3.14.** Dada la ecuación  $y'' + \alpha y = \cos(\beta x)$  en  $(0, 1)$ ,  $\alpha > 0$  con condiciones de borde  $y'(0) = y'(1) = 0$ , analicemos la solución en términos de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Igual que en el ejemplo anterior, la solución tiene la forma:

$$y = Ay_1 + By_2 + y_p$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes,  $y_1$  e  $y_2$  son dos soluciones l.i. de la ecuación homogénea e  $y_p$  es una solución particular cualquiera. En este caso, por ser la EDO a coeficientes constantes, podemos obtener explícitamente  $y_1$  e  $y_2$  a partir de los valores característicos:

$$\lambda^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\alpha}$$

de donde  $y_1 = \cos(\omega x)$  e  $y_2 = \sin(\omega x)$ . Con esto:

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + y_p.$$

Imponiendo las condiciones de borde se obtiene:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 = A\omega \sin(\omega \cdot 0) - B\omega \cos(\omega \cdot 0) + y_p'(0) = -B\omega + y_p'(0) \\ y'(1) &= 0 = A\omega \sin(\omega) - B\omega \cos(\omega) + y_p'(1) \end{aligned}$$

El sistema que se obtiene es el siguiente:

$$(**) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega \sin(\omega) & -\omega \cos(\omega) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p'(0) \\ -y_p'(1) \end{pmatrix}$$

La matriz  $M$  es invertible si y sólo si  $\sin(\omega) \neq 0$ , es decir, si  $\omega \neq k\pi$  para ningún  $k$  entero. Si es así, la solución es única tal y como ocurrió en el ejemplo anterior. Si por el contrario  $\omega = k_0\pi$  para algún  $k_0$  entero, entonces la solución existe si  $\begin{pmatrix} -y_p'(0) \\ -y_p'(1) \end{pmatrix}$  pertenece al núcleo de  $M$ , esto es, si su segunda componente es nula:

$$(***) \quad y_p'(1) = 0$$

si por el contrario  $y_p'(1) \neq 0$  no hay solución que sea compatible con las condiciones de borde.

Por otro lado  $y_p$  tiene la forma

$$(i) \quad y_p = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \quad \text{si } \beta \neq \pm\omega \text{ (caso no resonante)}$$

o bien

$$(ii) \quad y_p = Cx \cos(\beta x) + Dx \sin(\beta x) \quad \text{si } \beta = \pm\omega \text{ (caso resonante)}$$

de donde la condición (\*\*\*) queda en el caso (i)

$$C\beta \sin(\beta) = D\beta \cos(\beta)$$

que se cumple en particular si  $\beta = 0$  o si  $\tan \beta = D/C$ . En el caso (ii) se puede llegar a una condición similar que liga  $C$  con  $D$ .

## Capítulo 4

## Transformada de Laplace

## 1. Definiciones y ejemplos

DEFINICIÓN 4.1. Dada  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *transformada de Laplace* de  $f$  a la función

$$(28) \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

que asocia a  $s \in \mathbb{R}$  el valor  $\mathcal{L}[f](s)$  cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para  $s > c$ , a la mínima cota “ $c$ ” se le llama *asíntota* de la transformada.

Veamos algunos ejemplos para funciones conocidas:

EJEMPLO 4.1. Primero  $f(t) = 1$ . Claramente, si  $s \leq 0$  la integral  $\int_0^\infty e^{-st} dt$  no converge. Si  $s > 0$  entonces

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Luego  $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$  para  $s > 0$  (la asíntota es  $c = 0$ ). □

EJEMPLO 4.2. Analicemos ahora  $f(t) = e^{at}$  con  $a \in \mathbb{C}$ . Al igual que antes, es evidente que si  $s \leq \operatorname{Re}(a)$  entonces la integral  $\int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$  no converge. Si  $s > \operatorname{Re}(a)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

De allí,  $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$  para  $s > \operatorname{Re}(a)$  (la asíntota es  $c = \operatorname{Re}(a)$ ). □

EJEMPLO 4.3. Recordemos ahora que  $\cos wt + i \operatorname{sen} wt = e^{iwt}$ , de manera que  $\operatorname{Re}(e^{iwt}) = \cos wt$  e  $\operatorname{Im}(e^{iwt}) = \operatorname{sen} wt$  son la parte real e imaginaria de  $e^{iwt}$ , respectivamente. De ejemplo anterior tenemos que

$$\mathcal{L}[e^{iwt}](s) = \frac{1}{s-iw} = \frac{s+iw}{s^2+w^2} \quad \text{para } s > 0.$$

En virtud de la definición de la transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[\operatorname{Re}(f)] = \operatorname{Re}\mathcal{L}[f] \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\operatorname{Im}(f)] = \operatorname{Im}\mathcal{L}[f],$$

con lo cual

$$\mathcal{L}[\cos wt](s) = \frac{s}{s^2 + w^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[\operatorname{sen} wt](s) = \frac{w}{s^2 + w^2} \quad \text{para } s > 0.$$

□

De la linealidad de la integral tenemos la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 4.1. *La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y si  $f$  y  $g$  son funciones de  $[0, +\infty)$  en  $\mathbb{R}$  tales que  $\mathcal{L}[f](s)$  y  $\mathcal{L}[g](s)$  existen, entonces*

$$\mathcal{L}[f + \lambda g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \lambda \mathcal{L}[g](s).$$

EJEMPLO 4.4. Recordemos que  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  y  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . Para  $s > 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cosh(t)](s) &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}[e^t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - 1}, \\ \text{y} \quad \mathcal{L}[\sinh(t)](s) &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 - 1}. \end{aligned}$$

□

Una función  $f$  tiene una *discontinuidad de salto* en  $a \in \operatorname{Dom}(f)$  si los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  existen, son finitos y distintos.

Una función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *continua por pedazos* si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en  $[0, +\infty)$ , pero sobre cada subintervalo acotado de  $[0, +\infty)$  tiene a lo más un número finito de éstas.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 4.5. La función

$$f(t) = (-1)^{[t]} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

extendida periódicamente a  $[0, \infty)$  con período 2, se llama *onda cuadrada* y es continua por pedazos.

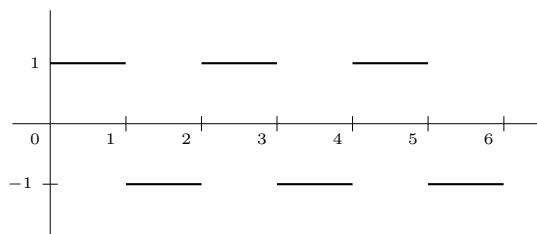


Gráfico de la onda cuadrada.

□

EJEMPLO 4.6. La función  $f(t) = t - [t]$  o bien  $f(t) = t, 0 \leq t < 1$  extendida periódicamente a  $[0, \infty)$  con período 1, llamada *onda de dientes de sierra*, es continua por pedazos.

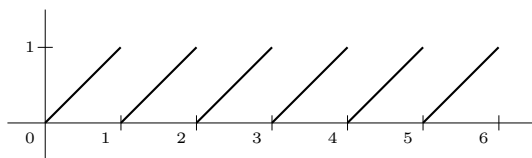


Gráfico de la onda de dientes de sierra.

□

EJEMPLO 4.7. La función  $f(t) = \tan(t)$  no es continua por pedazos pues

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty.$$

□

EJEMPLO 4.8. La función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

tampoco es continua por pedazos.

□

DEFINICIÓN 4.2. Una función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es *de orden exponencial* si existen  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $M > 0$  tales que  $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$  para todo  $t \geq 0$ . Al menor de tales  $\alpha$  se le llama *orden exponencial* de  $f$ . Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre  $M e^{\alpha t}$  y  $-M e^{\alpha t}$ .

DEFINICIÓN 4.3. El espacio  $\mathcal{C}_\alpha$  es el conjunto de las funciones  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que son continuas por pedazos y de orden exponencial  $\alpha$ . Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de  $[0, +\infty)$  en  $\mathbb{R}$ .

Observemos que si  $f' \in \mathcal{C}_\alpha$  entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(s)| ds \\ &\leq |f(0)| + \frac{M}{\alpha} e^{\alpha x} \\ &\leq \widetilde{M} e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

de modo que  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ .

PROPIEDAD 4.2. Si  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  entonces para todo  $s > \alpha$ , existe  $\mathcal{L}[f](s)$  (y converge absolutamente). Además

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo  $s > \alpha$ . En particular,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que si la integral converge absolutamente, entonces converge. Con esto basta probar que

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo  $s > \alpha$ . En efecto,

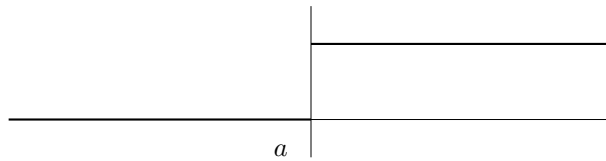
$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt &= \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &\leq M \frac{1}{-s + \alpha} e^{(-s+\alpha)t} \Big|_0^\infty \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha}. \end{aligned}$$

□

EJERCICIO PROPUESTO 4.1. Demostrar que  $t^k, k \in \mathbb{N}$ , tiene transformada de Laplace y que  $\mathcal{L}[t^k](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, s > 0$ .

La función escalón de Heaviside se define como

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$



Función escalón de Heaviside  $H_a(t)$ .



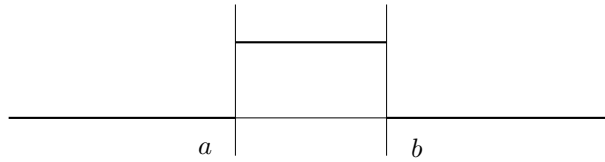
Observemos que si  $a \geq 0$ , entonces  $H_a(t) = H_0(t - a)$ . La transformada de Laplace de  $H_a$ , con  $a \geq 0$  es

$$\mathcal{L}[H_a](s) = \int_0^\infty e^{-st} H_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

para  $s > 0$ .

Si  $a < b$  definimos el *pulso entre a y b* como

$$P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b. \end{cases}$$



Pulso entre  $a$  y  $b$ .

Notar que  $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$ . Luego, su transformada de Laplace para  $0 \leq a < b$  será

$$\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t) - H_b(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t)](s) - \mathcal{L}[H_b(t)](s).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs}) \quad \text{para } s > 0.$$

## 2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

En esta sección estudiaremos reglas operacionales que serán útiles para aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales de primer orden.

**2.1. Transformada de una derivada.** Sea  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  derivable. Calculemos la transformada de Laplace de su derivada para  $s > \alpha$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty \\ &= s\mathcal{L}[f](s) + \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t). \end{aligned}$$

Como  $f$  es de orden exponencial  $\alpha$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} e^{\alpha t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$$

pues  $s > \alpha$ . Llamando  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  tenemos que

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \quad \text{para } s > \alpha.$$

Para la segunda derivada, si  $s > \alpha$  tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0^+) \\ &= s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)) - f'(0^+) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+).\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos, para  $s > \alpha$ ,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0^+).$$

**EJEMPLO 4.9.** Un cohete despegue con velocidad inicial  $v_0$  desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración  $a > 0$  durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es  $g$ , encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa  $m$  y  $(t_1, t_2)$  es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con  $t_2 > t_1$ .

De la sumatoria de fuerzas obtenemos

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -mg + ma(P_{t_1 t_2}(t)),$$

donde  $y(t)$  es la posición del cohete con respecto a la Tierra. Las condiciones iniciales del cohete son  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = v_0$ . Eliminando  $m$  a ambos lados y aplicando  $\mathcal{L}$  se obtiene la ecuación

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = a\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s) - g\mathcal{L}[1](s)$$

recordando las expresiones para  $\mathcal{L}[y''(t)](s)$ ,  $\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s)$  y  $\mathcal{L}[1](s)$ , la expresión queda

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) = \frac{a}{s}(e^{-t_1 t} - e^{-t_2 t}) - \frac{g}{s}$$

Pero  $y(0^+) = 0$  y  $y'(0^+) = v_0$ . Luego

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3}e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3}e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}$$

En breve veremos cómo recuperar una función a partir de su transformada. Continuaremos este cálculo en el Ejemplo 4.12.  $\square$

**2.2. Transformada de una primitiva.** Sea  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  localmente integrable.

Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Encontremos la transformada de la función  $F(t) = \int_a^t f(u)du$ . Para  $s > \alpha$  se tiene

$$\mathcal{L}[F'](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0^+).$$

Por lo tanto, la transformada de  $F$  es

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(u)du$$

para  $s > \alpha$ .

Si denotamos  $\int_a^t \int_a^t f(u) du = \int_a^t \left( \int_a^u f(v) dv \right) du$ . La transformada de esta expresión es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \int_a^t \int_a^t f(u) du \right] (s) &= \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[ \int_a^t f(u) du \right] (s) - \frac{1}{s} \int_0^a \int_a^t f(u) du \\ &= \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s^2} \int_0^a f(u) du - \frac{1}{s} \int_0^a F(t) dt. \end{aligned}$$

repetiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la  $n$ -ésima integral:

$$\mathcal{L} \left[ \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n \text{ veces}} f(u) du \right] (s) = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^k} \int_0^a \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n-k \text{ veces}} f(u) du.$$

**2.3. Traslaciones.** Una traslación en el dominio temporal  $t$  corresponde a un factor exponencial en el dominio de Laplace  $s$ . Si  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  y  $a \in \mathbb{R}$ , la función  $f$  trasladada hacia la derecha se define en *todo*  $[0, \infty)$  como  $H(t-a)f(t-a)$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} H(t-a) f(t-a) dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}[f(t)](s). \end{aligned}$$

De manera análoga, una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} e^a f(t) dt \\ &= \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s). \end{aligned}$$

**2.4. Igualdad de transformadas.** Nos proponemos ver ahora cuándo una función está unívocamente determinada por su transformada de Laplace. Nos interesa saber cuándo  $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$  implica que  $f = g$ . La respuesta está dada por el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración:

**TEOREMA 4.1** (Lerch). *Si  $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$  y  $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$  para todo  $s > \alpha$  entonces  $f(t) = g(t)$  para todo  $t \geq 0$ , salvo en la unión de las discontinuidades de  $f$  y  $g$ .*

**2.5. Convolución.** Sean  $f$  y  $g$  funciones en  $\mathcal{C}_\alpha$ . El *producto de convolución* entre  $f$  y  $g$  se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds.$$

Se deja al lector verificar la siguiente:

PROPIEDAD 4.3. *El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en  $\mathcal{C}_\alpha$ .*

TEOREMA 4.2. *Sean  $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ . Entonces*

$$\mathcal{L}[(f * g)](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s).$$

*En palabras, la transformada de la convolución es el producto de las transformadas.*

DEMOSTRACIÓN. Dadas  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{C}_\alpha$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(u)g(t-u)du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt. \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración y haciendo un cambio de variables tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+u)} f(u)g(w)dwdu \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sw} g(w)dw \\ &= \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s). \end{aligned}$$

□

**2.6. Transformada de funciones periódicas.** Sea  $f$  función  $T$ -periódica, notemos que si  $f$  es acotada, luego  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ , entonces si  $f$  es continua o acotada  $\Rightarrow f \in \mathcal{C}_\alpha$ .

PROPIEDAD 4.4. *Sea  $f$  función  $T$ -periódica, luego su transformada de Laplace esta dada por:*

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

DEMOSTRACIÓN. Dadas  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ , tenemos que

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$$

Luego notemos que  $([kT, (k+1)T])_{k \in \mathbb{N}}$  es una partición disjunta de  $[0, \infty)$ , luego:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-su} f(t) du &= \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-su} f(u) du \quad u = kT + t \quad du = dt \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^T e^{-s(kT+t)} f(kT+t) du \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^T e^{-s(kT+t)} f(kT+t) du \\
 &= \sum_{k=0}^\infty e^{-skT} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \\
 &= \left( \sum_{k=0}^\infty (e^{-sT})^k \right) \int_0^T e^{-st} f(t) dt
 \end{aligned}$$

Luego como  $|e^{-sT}| \leq 1 \quad \forall s \geq 0$ , entonces  $\sum_{k=0}^\infty (e^{-sT})^k = \frac{1}{1-e^{-sT}}$  (serie geométrica) luego teniendo esto:

$$\left( \sum_{k=0}^\infty (e^{-sT})^k \right) \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Concluyendo lo pedido.  $\square$

**2.7. Convergencia Uniforme.** Veremos ahora unos detalles técnicos de convergencia. Sean  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  y  $M > \alpha_0 > \alpha$ . Definimos

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{y} \quad \Phi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t) dt,$$

con  $s \in I = [\alpha_0, M]$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &= \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \\
 &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n}
 \end{aligned}$$

para todo  $s \in I$ . Si  $\|g\|_I = \sup_{s \in I} |g(s)|$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_n - \Phi\|_I &\leq \sup_{s > \alpha} \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \\
 &= \frac{C}{\alpha_0 - \alpha} e^{-(\alpha_0 - \alpha)n}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|\Phi - \Phi_n\|_I \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con lo que  $\Phi_n$  converge uniformemente a  $\Phi$  en  $I$ .

**2.8. Diferenciabilidad.** Sea  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ . Calcularemos la derivada con respecto a  $s$  de la transformada de Laplace de  $f$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)](s). \end{aligned}$$

La derivación bajo el signo integral se justifica por la convergencia uniforme. Repitiendo el proceso, la derivada  $n$ -ésima de la transformada de Laplace de  $f$  se expresa como

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

**2.9. Integrabilidad.** Gracias de nuevo a la convergencia uniforme, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du &= \int_0^s \left( \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right) du \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-ut} f(t) du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{-1}{t} e^{-ut} \Big|_0^s f(t) \right) dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \\ &= -\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

para  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ . Si en la fórmula de la derivada de la transformada, se toma  $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ , se obtiene

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] = -\mathcal{L}[f(t)](s).$$

Por lo tanto

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (s) - \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (s) = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du.$$

Si  $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$  se tiene  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (s) = 0$ . En consecuencia

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du$$

Se puede verificar que  $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$  cuando  $f(t) \in \mathcal{C}_\alpha$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$  existe y es finito. Bajo esta condición obtenemos

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt,$$

que equivale a integrar desde 0 a  $\infty$ . Es decir,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

### 3. Antitransformadas y aplicaciones

Una función  $f$  (en el dominio temporal) es *antitransformada* de una función  $\rho$  (en el dominio de Laplace) si se cumple que  $\mathcal{L}[f] = \rho$ . Se denota como  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\rho](t)$ .

En esta sección estudiaremos un método para calcular antitransformadas de funciones racionales y presentaremos aplicaciones a la ecuación diferencial lineal de orden  $n$  y a sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

**3.1. Descomposición en fracciones Parciales.** Repasaremos el método de descomposición en fracciones parciales estudiado en el curso de cálculo integral. Supongamos se tiene la expresión racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , donde  $p$  y  $q$  son polinomios a coeficientes reales tales que  $gr(p) < gr(q)$ . Se quiere escribir  $\frac{p(x)}{q(x)}$  como una suma de expresiones más simples. Se pueden presentar varios casos:

1.  $q(x)$  tiene  $n$  raíces reales distintas y simples:  $q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ , con  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ . Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

2.  $q(x)$  tiene una raíz real de multiplicidad  $n$ :  $q(x) = (x - a)^n$ . Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}.$$

3.  $q(x)$  tiene 1 raíz compleja simples. Entonces su conjugado también es raíz simple, de modo que  $q(x) = ax^2 + bx + c = (x - z)(x - \bar{z})$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

4. Si  $q(x)$  tiene 1 raíz compleja de multiplicidad  $n$ :  $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n = (x - z)^n(x - \bar{z})^n$  con  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

5. Cualquier combinación de estos casos.

Una vez descompuesta la expresión original, se deben encontrar los valores de los coeficientes de la parte derecha. Existen varias formas de encontrarlos, veremos 2 métodos:

- Método 1: Multiplicar por  $q(x)$  a ambos lados y evaluar raíz por raíz (sirve cuando las raíces son simples).

- Método 2: Desarrollar la suma de la parte derecha e igualar coeficientes.

EJEMPLO 4.10. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2}.$$

Las raíces son  $s = 1$  y  $s = 2$ , ambas simples. La expresión se descompone como

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2}.$$

Utilizamos el método 1. Para ello multiplicamos a ambos lados por  $q(s)$ . Obtenemos

$$s = A(s - 2) + B(s - 1).$$

Evaluyendo en  $s = 1$  vemos que  $A = -1$  y evaluando en  $s = 2$  vemos que  $B = 2$ .  $\square$

EJEMPLO 4.11. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)}.$$

Las raíces son  $s = 0$ , con multiplicidad 2, y  $s = a \pm bi$ , ambas simples.

Utilizando una combinación de **2.** y **4.**, la descomposición queda

$$(29) \quad \frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C +Ds}{(s - a)^2 + b^2}.$$

Como hay una raíz doble usaremos el método 2. Desarrollamos el lado derecho de (29) y obtenemos

$$\frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)} = \frac{As((s - a)^2 + b^2) + B((s - a)^2 + b^2) + (C + sD)s^2}{s^2((s - a)^2 + b^2)}.$$

Reordenando los términos deducimos una igualdad para los numeradores:

$$1 = s^3(A + D) + s^2(-2aA + B + C) + s(A(a^2 + b^2) - 2aB) + (Ba^2 + Bb^2).$$

Igualando los coeficientes obtenemos 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= A + D \\ 0 &= -2aA + B + C \\ 0 &= A(a^2 + b^2) - 2aB \\ 1 &= Ba^2 + Bb^2 \end{aligned}$$

que nos dan

$$A = \frac{2a}{(a^2 + b^2)^2}, \quad B = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{3a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad D = \frac{-2a}{(a^2 + b^2)^2}.$$

$\square$

Más adelante, en el Ejemplo 5.11, mostraremos una aplicación concreta del método de fracciones parciales a un problema de intercambio de masas atmosféricas.



**3.2. Aplicación a la EDO lineal de orden  $n$ .** Se tiene la siguiente EDO a coeficientes constantes:

$$P(D)y(t) = \overline{Q}(t)$$

con  $P(D)$  un operador diferencial de orden  $n$  normalizado ( $a_n = 1$ ) y  $\overline{Q}(t)$  combinación lineal de funciones en  $\mathcal{C}_\alpha$ . Aplicando  $\mathcal{L}$  a ambos lados de la EDO, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \sum_{j=1}^n a_j D^j y \right] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}](s) \\ \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{L}[D^j y] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}](s). \end{aligned}$$

Pero se sabe que

$$\mathcal{L}[D^j y] (s) = s^j \mathcal{L}[y](s) - R_j(s),$$

donde

$$R_j(s) = \sum_{k=0}^{j-1} s^k y^{(j-k-1)}(0^+).$$

Con esto la ecuación queda

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j s^j \right) \mathcal{L}[y](s) - \sum_{j=1}^n a_j R_j(s) = \mathcal{L}[\overline{Q}](s).$$

Escribimos entonces

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{R(s)}{P(s)} + \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}](s)}{P(s)},$$

donde

$$P(s) = \sum_{j=1}^n a_j s^j \quad \text{y} \quad R(s) = \sum_{j=1}^n a_j R_j(s).$$

Llamando  $y_h(t)$  e  $y_p(t)$  a las funciones tales que

$$\mathcal{L}[y_h](s) = \frac{R(s)}{P(s)} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[y_p] = \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}](s)}{P(s)}$$

se tiene que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[y_h] + \mathcal{L}[y_p].$$

Luego

$$y_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{R}{P} \right] (t) \quad \text{e} \quad y_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}]}{P} \right] (t).$$

Para encontrar  $y_p(t)$ , consideremos  $G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{P} \right] (t)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[G(t)](s) \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[(G * \overline{Q})(t)](s)] (t) \\ &= (G * \overline{Q})(t) \\ &= \int_0^t G(t - \theta) \overline{Q}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Todo se reduce entonces a encontrar antitransformadas de funciones de la forma  $\frac{T(s)}{P(s)}$ , donde  $T$  y  $P$  son polinomios y  $gr(P) > gr(T)$  (observe que  $P$  es de grado  $n$ ,  $R$  es de grado  $n-1$  y  $1$  es de grado cero).

Gracias a la linealidad, si descomponemos en fracciones parciales, basta averiguar cuáles son las antitransformadas de cada uno de los términos que aparecen en la descomposición. Primero recordemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-\lambda} &= \mathcal{L}[H(t)](s-\lambda) = \mathcal{L}[e^{\lambda t}H(t)](s) \\ \frac{1}{(s-\lambda)^k} &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s-\lambda) = \mathcal{L}\left[e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) \\ \frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2} &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{w}\sin(wt)\right](s-\sigma) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\sigma t}}{w}\sin(wt)\right](s) \\ \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2} &= \mathcal{L}[\cos(wt)](s-\sigma) = \mathcal{L}[e^{\sigma t}\cos(wt)](s). \end{aligned}$$

Inmediatamente obtenemos las antitransformadas

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}H(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right](t) \\ e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right](t) \\ \frac{e^{\sigma t}}{w}\sin(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t) \\ e^{\sigma t}\cos(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t). \end{aligned}$$

Esto es casi todo lo que se necesita para determinar la antitransformada de una función de la forma  $\frac{T(s)}{P(s)}$ . Sólo falta encontrar las antitransformadas de fracciones del tipo

$$1. \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^n}\right](t) \quad \text{y} \quad 2. \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}\right](t)$$

para  $n \geq 2$ . Haremos los cálculos para  $n = 2$  y dejamos el caso general como ejercicio para el lector.

1. Basta considerar  $\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t) &= \frac{-1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2}\right](t) \\ &= \frac{-1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin(at)](s)\right](t) \\ &= \frac{1}{2a}t\sin(at). \end{aligned}$$

2. Recordando que  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right](t) \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2a} t \sin(at)\right](s)\right](t) \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{2a} t \sin(at)\right](s)\right](t) \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2a} t \sin(at) \\
 &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at)\right).
 \end{aligned}$$

Resumimos los ejemplos más relevantes de funciones y sus transformadas en la siguiente tabla:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w} \sin(wt)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t} \cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

EJEMPLO 4.12. Continuando el Ejemplo 4.9 del cohete, hay que encontrar las funciones que al ser transformadas por  $\mathcal{L}$ , equivalen a cada uno de los sumandos del miembro derecho de la ecuación

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3} e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3} e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}.$$

Utilizando las conclusiones de la discusión precedente vemos que

$$\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}\left[v_0 t + \frac{a}{2}(t - t_1)^2 H(t - t_1) - \frac{a}{2}(t - t_2)^2 H(t - t_2) + \frac{gt^2}{2}\right].$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento del cohete es

$$y(t) = v_0 t + \frac{a}{2}(t - t_1)^2 H(t - t_1) - \frac{a}{2}(t - t_2)^2 H(t - t_2) + \frac{gt^2}{2}.$$

□

EJEMPLO 4.13. Resolvamos ahora el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace. Para ello observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] \\ &= s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) \\ &\quad + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathcal{L}[y](s) \\ &= (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) - s - 3. \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= 0 \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) - s - 3 &= 0 \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) &= s + 3 \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}. \end{aligned}$$

Como las raíces de  $s^2 + 2s + 2 = 0$  son complejas, se escribe ese polinomio de la forma  $(s + 1)^2 + 1$ , con lo que se obtiene

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s + 3}{(s + 1)^2 + 1} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2 + 1}.$$

Como  $\mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1}$  y  $\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) + 2\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) \\ \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x](s) \\ y(x) &= e^{-x}(\cos x + 2 \sin x). \end{aligned}$$

□

#### 4. Funciones y derivadas generalizadas

**4.1. Funciones generalizadas.** Sea  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. La acción de  $\Psi$  sobre una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\Psi[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)f(t) dt$$

cuando esta integral esté bien definida.

La **delta de Dirac** pertenece a las llamadas **funciones generalizadas o distribuciones**. No es exactamente una función, sino más bien una regla que a

cada función continua  $f$  le asigna un número real, que es su valor en cero  $f(0)$ . Las funciones generalizadas se definen en términos de su acción sobre cierto tipo de funciones. En estricto rigor, definimos la acción de la delta de Dirac sobre una función continua  $f$  mediante

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0).$$

La notación de integral es bastante sugerente pero se debe recordar que la delta de Dirac no es una función, aunque comparta ciertas propiedades con las funciones integrables. Siguiendo la notación presentada arriba, escribiremos

$$\delta_a[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt = f(a).$$

La delta de Dirac modela un impulso, golpe o chispazo. Se interpreta como un gran estímulo aplicado instantáneamente a un sistema.

EJEMPLO 4.14. Tomando la función continua  $f(t) \equiv 1$  tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1.$$

□

Una propiedad interesante de la delta de Dirac es que se puede aproximar, en cierto sentido, por funciones propiamente tales. Más precisamente, su acción sobre una función continua se puede obtener como el límite de las acciones de una sucesión de funciones integrables. Sea  $\Phi = P_{01}$  el pulso entre 0 y 1. Si  $\Phi_n(t) = n\Phi(nt)$  entonces

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t)dt = 1$  para cada  $n$ .
- Si  $a > 0$  y  $f$  es continua entonces

$$\int_{-\infty}^{-a} f_n(t)f(t)dt = \int_a^{+\infty} f_n(t)f(t)dt = 0.$$

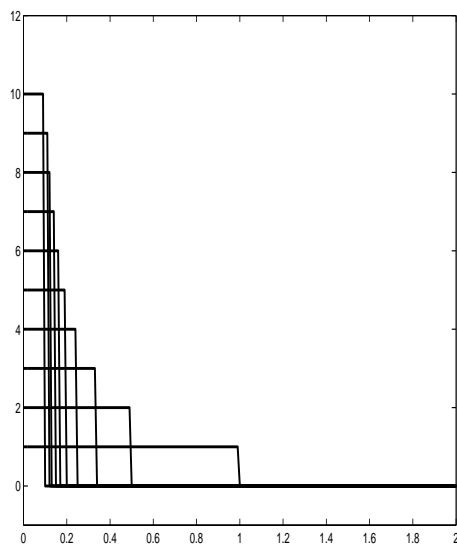
- Si  $f$  es continua entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(t)dt = f(0) = \delta[f].$$

**Observación:** Cabe destacar que las funciones  $\Phi_n$  no son las únicas que dan origen a  $\delta$ ; basta con que cumplan las propiedades enunciadas.

La transformada de Laplace de una función  $f$  en el punto  $s$  puede interpretarse como la acción de  $f$  sobre la función  $t \mapsto e^{-st}$ . Tiene sentido entonces definir la transformada de Laplace de la delta de Dirac mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta](s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\Phi_n](s) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \Phi_n(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} ne^{-st}dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s}(1 - e^{-s/n}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

FIGURA 1. Las funciones  $\Phi_n$ .

para  $s \in \mathbb{R}$ .

Observemos que esto es consistente con

$$\mathcal{L}[\delta](s) = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = e^0 = 1.$$

Por otra parte, la delta de Dirac es el elemento neutro para el producto de convolución. Es decir, para  $f \in \mathcal{C}_\alpha$  se tiene

$$\mathcal{L}[f * \delta] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[\delta] = \mathcal{L}[f].$$

Por el Teorema de Lerch,  $f * \delta_0 = \delta_0 * f = f$  (salvo, quizá, en una cantidad numerable de puntos).

## Capítulo 5

## Sistemas lineales de primer orden

## 1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones lineales con una sola función incógnita. Estudiaremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto porque permiten modelar problemas físicos que involucran la interacción de diversas variables dependientes, como también porque a ellos pueden reducirse las ecuaciones lineales de grado superior.

Comenzaremos por comentar algunos resultados acerca de funciones vectoriales y matriciales.

DEFINICIÓN 5.1. El espacio

$$\mathcal{C}^n(I)^m = \underbrace{\mathcal{C}^n(I) \times \cdots \times \mathcal{C}^n(I)}_{m \text{ veces}}$$

está conformado por los vectores de  $m$  funciones  $n$  veces continuamente derivables en el intervalo  $I$ . De manera análoga,  $\mathcal{C}^n(I)^{m \times k}$  son las matrices de  $m \times k$  funciones  $n$  veces continuamente derivables en el intervalo  $I$ . Haremos la identificación  $\mathcal{C}^n(I)^{m \times 1} = \mathcal{C}^n(I)^m$ .

Estos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial para la suma y ponderación por escalar componente a componente. La integración y derivación se hace componente a componente:

$$\begin{aligned} \int \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int f_{1,1} & \cdots & \int f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int f_{m,1} & \cdots & \int f_{m,k} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,k} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} f'_{1,1} & \cdots & f'_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m,1} & \cdots & f'_{m,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además tenemos la regla para la derivación de un producto.

LEMA 5.1. Si  $A(t) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  y  $B(t) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ , con  $n, m, p \in \mathbb{N}$ , entonces

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la componente  $ip$  se cumple que

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) b_{jp}(t) \right)' &= \sum_{j=1}^m (a_{ij}(t) b_{jp}(t))' \\
 &= \sum_{j=1}^m (a'_{ij}(t) b_{jp}(t) + a_{ij}(t) b'_{jp}(t)) \\
 &= \sum_{j=1}^m a'_{ij}(t) b_{jp}(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) b'_{jp}(t).
 \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 5.2. Un *sistema lineal* de EDO en  $\mathbb{R}^n$  es un sistema de  $n$  ecuaciones escrito de la forma

$$(30) \quad \begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) & \text{para } t \in I \\ X(t_0) &= X_0, \end{cases}$$

donde  $I$  es un intervalo,  $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^n$  para cada  $t$  en  $I$ , y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  son condiciones iniciales en  $t = t_0 \in I$ . En el caso  $B \equiv 0$  se dice que el sistema es *homogéneo*. En el caso que  $A$  es una matriz constante, se dice que el sistema es *a coeficientes constantes*.

EJEMPLO 5.1 (Polución en dos estanques). Dos estanques 1 y 2, que contienen  $V[m^3]$  de agua, se encuentran interconectados por medio de un canal, por el cual fluye agua desde 1 a 2 a razón de  $b[\frac{m^3}{s}]$ . El sistema es alimentado a través del estanque 1 a razón de  $b[\frac{m^3}{s}]$ , con un poluente de concentración  $\sigma[\frac{kg}{m^3}]$ , que contamina el agua. El agua sale del sistema por un canal del estanque 2, con un caudal de  $b[\frac{m^3}{s}]$ . En esta situación se produce una contaminación del agua en ambos estanques. Para tratar de disminuir este efecto negativo, se propone añadir otro canal que conecte a los dos estanques, para que devuelva flujo de 2 a 1, a razón de  $b\lambda[\frac{m^3}{s}]$ , donde  $\lambda > 0$ . Sin embargo, para evitar el rebalse del sistema, se debe aumentar el flujo del canal ya existente a  $b(1 + \lambda)[\frac{m^3}{s}]$ . ¿Cuánto ayuda esta solución a disminuir la polución del agua en los estanques?

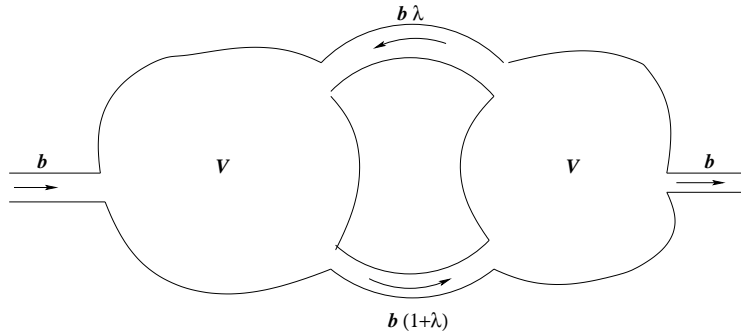


FIGURA 1. Polución en dos estanques del ejemplo 5.1



Para el estanque 1, tenemos que la variación de la cantidad de poluente por unidad de tiempo es la diferencia de las concentraciones que entran y las que salen por unidad de tiempo, es decir:

$$x_1' = b\sigma + b\lambda x_2 \frac{1}{V} - b(1 + \lambda)x_1 \frac{1}{V}.$$

Repitiendo el razonamiento para el estanque 2, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b\sigma + \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b(1 + \lambda)}{V}x_1(t) \\ x_2'(t) &= \frac{b(1 + \lambda)}{V}x_1(t) - \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b}{V}x_2(t). \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones que se puede escribir, en forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V} & \frac{b\lambda}{V} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V} & -\frac{b(1+\lambda)}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden no homogéneo a coeficientes constantes.  $\square$

## 2. Sistemas lineales y ecuaciones de orden superior

### 2.1. Paso de una ecuación lineal de orden $n$ a un sistema lineal.

Veamos cómo una ecuación lineal de orden  $n$  puede interpretarse como un sistema de  $n$  ecuaciones lineales de primer orden con  $n$  incógnitas.

Para ello, consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Derivando cada nueva variable, se tiene

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x) \\ &\vdots \\ z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -\bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) - \cdots - \bar{a}_0(x)y(x) + \bar{Q} \\ &= -\bar{a}_{n-1}(x)z_n(x) - \cdots - \bar{a}_0(x)z_1(x) + \bar{Q}. \end{aligned}$$

Con esto, el sistema queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}'}_{z'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{Q} \end{pmatrix}}_b.$$

Las condiciones iniciales  $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  corresponden a las condiciones iniciales en el sistema  $z_1(x_0), \dots, z_n(x_0)$ . El problema de Cauchy se escribe

$$\begin{cases} z'(x) &= A_c(x)z(x) + b(x) & \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) &= y^{(k-1)}(x_0) & \text{para } k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Llamaremos a  $A_c(x)$  la *matriz compañera* de la ecuación de orden  $n$ .

## 2.2. Paso de un sistema lineal a una ecuación lineal de orden $n$ .

Veamos ahora la identificación recíproca. Para explicar cómo se hace esta identificación presentaremos dos métodos aplicados a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El caso general lo dejamos como ejercicio al lector.

Consideremos el sistema

$$(31) \quad x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$$

$$(32) \quad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$$

con las condiciones iniciales  $x_1(0) = x_1^0$  y  $x_2(0) = x_2^0$ .

*2.2.1. Método de sustitución.* Suponiendo  $a_{21} \neq 0$ , despejamos  $x_1$  de (32) para obtener

$$(33) \quad x_1 = \frac{x'_2 - a_{22}x_2 - b_2}{a_{21}}$$

y luego derivamos

$$(34) \quad x'_1 = \frac{x''_2 - a_{22}x'_2 - b'_2}{a_{21}}.$$

Reemplazando (33) y (34) en (31) resulta

$$x''_2 - (a_{11} + a_{22})x'_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + b'_2,$$

que es una ecuación de segundo orden con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_2(0) &= x_2^0 \\ x'_2(0) &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + b_2(0). \end{aligned}$$

*2.2.2. Método de reducción.* Utilizando la notación de operador diferencial  $Dx = x'$  el sistema (31)-(32) se reescribe

$$(35) \quad (D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = b_1$$

$$(36) \quad -a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 = b_2.$$

Aplicando el operador  $D - a_{11}$  a la segunda ecuación, multiplicando por  $a_{21}$  la primera y sumando, se obtiene

$$(37) \quad (D - a_{11})(D - a_{22})x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 + (D - a_{11})b_2,$$

que es la misma EDO de orden 2 para  $x_2$  que la obtenida con el método anterior.

**Observación:** Puede verificar que en todos los casos, despejando  $x_1$  o  $x_2$ , se llega a una EDO del tipo

$$x''_i - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{tr(A)}x'_i + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{det(A)}x_i = f_i, \quad i = 1, 2$$

y con polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = det(A - \lambda I).$$

Se deja al lector comprobar usando el método de reducción que un sistema lineal a coeficientes constantes de tamaño  $n \geq 1$  se identifica con una ecuación lineal de orden  $n$  cuyo polinomio característico es  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

### 3. Los teoremas de existencia y unicidad. Demostración.

En esta sección demostraremos la existencia y unicidad de solución para un sistema lineal de ecuaciones de primer orden.

**TEOREMA 5.1** (Existencia y Unicidad, caso lineal). *Sea  $I$  un intervalo cerrado y acotado. Si  $A \in \mathcal{C}(I)^{m \times m}$  y  $B \in \mathcal{C}(I)^m$ , entonces dados  $X_0 \in \mathbb{R}^m$  y  $t_0 \in I$ , existe una única solución  $X \in \mathcal{C}^1(I)^m$  del sistema lineal*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t), & t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Entre las consecuencias más relevantes mencionamos las siguientes:

1. De aquí se obtiene inmediatamente el Teorema 3.2, que da la existencia y unicidad de solución para la EDO lineal de orden  $n$  gracias a la identificación presentada en el Capítulo 3.
2. La única solución de un sistema homogéneo con condición inicial nula es la función nula.
3. Si dos soluciones  $X$  e  $Y$  coinciden en un punto, entonces coinciden en todo el intervalo. Esto dice que los gráficos de dos soluciones distintas no se cruzan, propiedad que se conoce como *determinismo*. Esto se debe a que si  $X(t_1) = Y(t_1)$  entonces la diferencia  $X - Y$  es solución de un sistema homogéneo con condición inicial nula y por lo tanto  $X(t) = Y(t)$  para todo  $t$ .
4. Si  $A$  o  $B$  son continuas por pedazos, el Teorema 5.1 sigue siendo cierto, salvo porque  $X'$  es sólo continua por pedazos (se suele decir que  $X$  es  $\mathcal{C}^1$  por pedazos).
5. El Teorema se generaliza para cualquier tipo de intervalo  $I$ . Más aún, si  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^{m \times m}$  y  $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^m$ , entonces la solución  $X$  queda definida en todo  $\mathbb{R}$ .

Veremos en realidad la existencia y unicidad de solución en un contexto más amplio que el de los sistemas lineales, en la línea de los teoremas 2.1 y 2.3 (ver Teoremas 5.2 y 5.4).

Dada una matriz  $A = (a_{ij})$  de tamaño  $m \times p$ , definimos su *norma de Frobenius* como

$$\|A\| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Observe que coincide con la definición usual de norma euclídeana para vectores (pensados aquí como matriz fila o columna).

LEMA 5.2. Si  $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$  y  $X \in \mathbb{R}^p$  entonces

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|.$$

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz vemos que

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^p x_j^2 \right) = \|A\| \|X\|.$$

□

Observemos primero que la función

$$F(t, X) = A(t)X + B(t)$$

es *Lipschitz* con respecto a su segunda variable. Es decir, existe  $L > 0$  tal que

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L\|X - Y\|$$

para todo  $t \in I$  y para todos los  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ . En efecto,

$$\begin{aligned} |F(t, X) - F(t, Y)| &\leq \|A(t)(X - Y)\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t) \right)^{1/2} \|X - Y\|. \end{aligned}$$

Como los coeficientes de  $A$  son continuos (o al menos continuos por pedazos), están acotados en  $I$ . Luego,

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq L\|X - Y\|, \quad \text{donde} \quad L = \sup_{t \in I} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t) \right)^{1/2}.$$

TEOREMA 5.2 (de Cauchy-Lipschitz-Picard, Existencia y Unicidad, caso general). Sea  $I$  un intervalo cerrado y acotado. Supongamos que  $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^m)$  es una función *Lipschitz* con respecto a la segunda variable. Para cada  $t_0 \in I$  y cada  $X_0 \in \mathbb{R}^m$ , existe una única solución  $X \in C^1(I)^m$  del problema de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \text{para todo } t \in I \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Este resultado generaliza los Teoremas 3.2 y 5.1.

Para la demostración del Teorema 5.2 primero observemos que, integrando entre  $t_0$  y  $t$  la ecuación diferencial, obtenemos

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds.$$

Definimos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : C^0(I)^m &\rightarrow C^0(I)^m \\ X &\mapsto \mathcal{T}(X), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{T}(X)$  es la función definida por

$$(38) \quad \mathcal{T}(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds \quad \text{para } t \in I.$$

Un *punto fijo* de  $\mathcal{T}$  es una función  $\bar{X} \in \mathcal{C}^0(I)^m$  tal que  $\bar{X} = \mathcal{T}(\bar{X})$ . Es decir,

$$\bar{X}(t) = \mathcal{T}(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, \bar{X}(s)) ds$$

para todo  $t \in I$ . Además, todo punto fijo tiene que ser de clase  $\mathcal{C}^1$ , por ser primitiva de una función continua. Al derivar tenemos que todo punto fijo de  $\mathcal{T}$  es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)) & \text{para todo } t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Recíprocamente, toda solución del problema de Cauchy debe ser un punto fijo de  $\mathcal{T}$ . Por lo tanto, para demostrar el Teorema 5.2 basta verificar que  $\mathcal{T}$  tiene un único punto fijo.

**3.1. El Teorema del Punto Fijo de Banach.** Primero recordemos dos propiedades importantes de  $\mathbb{R}$ :

1. Una sucesión  $\{x_n\}$  es *de Cauchy* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x_k| < \varepsilon$  si  $k, n \geq N$ . En  $\mathbb{R}$  *toda sucesión de Cauchy es convergente*. Es decir, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

2. Una función  $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  es *contractante* si existe  $K \in (0, 1)$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$  si  $x, y \in \text{dom}(f)$ . Sea  $C \subset \mathbb{R}$  un conjunto cerrado y supongamos que  $f : C \rightarrow C$  es contractante. Entonces  $f$  *tiene un único punto fijo*.

Veremos que estas dos propiedades también son válidas en el conjunto de las funciones continuas de  $I$  en  $\mathbb{R}^m$ . Comencemos por definir lo que es una sucesión de Cauchy en este espacio. En primer lugar, la *norma del supremo* de una función  $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$  es

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} \|f(t)\|.$$

Con esto, decimos que una sucesión de  $\{f_n\}$  de funciones en  $\mathcal{C}^0(I)^m$  es *de Cauchy* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, n \geq N.$$

Diremos también que una sucesión  $\{f_n\}$  en  $\mathcal{C}^0(I)^m$  *converge* a  $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$  si  $n \geq N$ .

**TEOREMA 5.3 (Banach).** *Sea  $I$  un intervalo cerrado y acotado. En el espacio  $\mathcal{C}^0(I)^m$  todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{C}^0(I)$ . Fijamos  $t \in I$  y denotamos por  $f_n^j(t)$  la  $j$ -ésima componente del vector  $f_n(t) \in \mathbb{R}^m$ . Para cada  $j = 1, \dots, m$  la sucesión  $\{f_n^j(t)\}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$  pues

$$|f_n^j(t) - f_k^j(t)| \leq \|f_n(t) - f_k(t)\| \leq \|f_n - f_k\|_\infty$$

y esta última cantidad tiende a cero cuando  $n$  y  $k$  tienden a infinito. Esto nos dice que la sucesión  $f_n^j(t)$  tiene un límite en  $\mathbb{R}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Haciendo el mismo

procedimiento para cada  $t \in I$  y cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  vamos definiendo una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  cuya  $j$ -ésima componente es

$$f^j(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^j(t).$$

Veremos ahora que  $f_n$  converge a  $f$  en  $\mathcal{C}^0(I)^m$ . Esto nos dirá automáticamente que  $f$  es continua por ser límite *uniforme* de funciones continuas (componente a componente). Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon/2$  si  $n, k \geq N$ . Por lo tanto, para cada  $t \in I$  se tiene que

$$\|f_n(t) - f_k(t)\| < \varepsilon/2$$

si  $n, k \geq N$ . Tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  vemos que

$$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Observando que  $n \geq N$  no depende de  $t$ , tomamos supremo para  $t \in I$  y vemos que

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

para todo  $n \geq N$ . Concluimos que  $f_n$  converge a  $f$  en  $\mathcal{C}^0(I)^m$ .  $\square$

Decimos que un operador  $T : \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m$  es *contractante* si existe  $K \in (0, 1)$  tal que  $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq K\|f - g\|_\infty$  para todas  $f, g \in \mathcal{C}^0(I)^m$ .

**COROLARIO 5.1** (Teorema del Punto Fijo de Banach). *Cada operador contractante de  $\mathcal{C}^0(I)^m$  en  $\mathcal{C}^0(I)^m$  tiene un único punto fijo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $T : \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m$  un operador contractante. En primer lugar observemos que  $T$  no puede tener más de un punto fijo. En efecto, si  $T(g) = g$  y  $T(h) = h$  con  $g \neq h$ , entonces

$$\|g - h\|_\infty = \|T(g) - T(h)\|_\infty \leq K\|g - h\|_\infty < \|g - h\|_\infty,$$

lo cual es imposible. Dicho esto, escojamos cualquier  $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$  y definamos recursivamente la sucesión  $\{f_n\}$  en  $\mathcal{C}^0(I)^m$  mediante la relación

$$f_0 = f \quad \text{y} \quad f_n = T(f_{n-1}) = \dots = T^n(f) \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Si  $T(f) = f$  ya tenemos el punto fijo. Si no, probaremos que la sucesión  $\{f_n\}$  es de Cauchy. El Teorema anterior nos dirá entonces que  $f_n$  converge a una cierta  $\bar{f} \in \mathcal{C}^0(I)^m$  que tiene que satisfacer  $T(\bar{f}) = \bar{f}$  pues  $f_n = T(f_{n-1})$ .

Sean  $n, k \in \mathbb{N}$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que  $n \geq k$  y escribimos la diferencia como una suma telescópica:

$$f_n - f_k = \sum_{j=k+1}^n f_j - f_{j-1} = \sum_{j=k+1}^n T^j(f) - T^{j-1}(f).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_k\|_\infty &\leq \sum_{j=k+1}^n \|T^j(f) - T^{j-1}(f)\|_\infty \\
&\leq \sum_{j=k+1}^n K^{j-1} \|T(f) - f\|_\infty \\
&\leq \|T(f) - f\|_\infty \frac{K^k - K^n}{1 - K} \\
&\leq \frac{\|T(f) - f\|_\infty}{1 - K} K^k.
\end{aligned}$$

Tomemos  $\varepsilon > 0$ . Dado que  $K^k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  (pues  $K < 1$ ), existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K^k < \frac{\varepsilon(1-K)}{\|T(f)-f\|_\infty}$  para todo  $k \geq N$ . Tenemos entonces que  $\|f_n - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$  si  $n, k \geq N$ . Al ser una sucesión de Cauchy, el Teorema 5.3 nos dice que es convergente. Como mencionamos arriba, el límite es el único punto fijo de  $T$ .  $\square$

**3.2. Demostración del Teorema 5.2.** Recordemos que sólo nos resta probar que el operador  $\mathcal{T}$  definido en (38) tiene un único punto fijo. Para ello usaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach, pero primero demostraremos un resultado auxiliar:

LEMA 5.3. *Supongamos que para cierto  $N \in \mathbb{N}$  el operador*

$$\mathcal{T}^N = \underbrace{\mathcal{T} \circ \dots \circ \mathcal{T}}_{N \text{ veces}}$$

*tiene un único punto fijo. Entonces lo mismo es cierto para  $\mathcal{T}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\bar{X}$  el único punto fijo de  $\mathcal{T}^N$ . Como  $\mathcal{T}^N(\bar{X}) = \bar{X}$  tenemos que

$$\mathcal{T}^N(\mathcal{T}(\bar{X})) = \mathcal{T}^{N+1}(\bar{X}) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^N(\bar{X})) = \mathcal{T}(\bar{X}),$$

de donde  $\mathcal{T}(\bar{X})$  también es un punto fijo de  $\mathcal{T}^N(\bar{X})$ . Como  $\mathcal{T}^N$  tiene un único punto fijo, tenemos que  $\mathcal{T}(\bar{X}) = \bar{X}$  y así  $\bar{X}$  es un punto fijo de  $\mathcal{T}$ . Para ver que es el único, supongamos que  $\bar{Y}$  es un punto fijo de  $\mathcal{T}$ . Entonces  $\bar{Y}$  también es punto fijo de  $\mathcal{T}^N$  y por lo tanto  $\bar{Y} = \bar{X}$ .  $\square$

El Teorema 5.2 quedará demostrado si encontramos una potencia de  $\mathcal{T}$  que sea contractante.

LEMA 5.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.2, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{T}^N$  es contractante.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $X, Y \in \mathcal{C}^0(I)^m$  y sea  $L$  la constante de Lipschitz de la función  $F$  con respecto a su segunda variable. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(X)(t) - \mathcal{T}(Y)(t)\| &= \int_{t_0}^t \|F(s, X(s)) - F(s, Y(s))\| \, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t \|X(s) - Y(s)\| \, ds \\
&\leq L(t - t_0) \|X - Y\|_\infty.
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}^2(X)(t) - \mathcal{T}^2(Y)(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|\mathcal{T}(X)(s) - \mathcal{T}(Y)(s)\| ds \\ &\leq L^2 \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^s \|X(\sigma) - Y(\sigma)\| d\sigma \right] ds \\ &\leq \frac{L^2(t-t_0)^2}{2} \|X - Y\|_\infty.\end{aligned}$$

Si repetimos este argumento vemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\|\mathcal{T}^n(X)(t) - \mathcal{T}^n(Y)(t)\| \leq \frac{(t-t_0)^n L^n}{n!} \|X - Y\|_\infty.$$

Denotamos por  $M$  la longitud del intervalo  $I$ . Tenemos entonces que

$$\|\mathcal{T}^n(X) - \mathcal{T}^n(Y)\|_\infty \leq \frac{(ML)^n}{n!} \|X - Y\|_\infty.$$

Como  $\frac{a^n}{n!}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ , podemos escoger  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{(ML)^N}{N!} < 1$ , de donde  $\mathcal{T}^N$  resulta ser contractante.  $\square$

Esto termina la demostración del Teorema 5.2. Observemos que, dada la función constante  $\tilde{X}(t) \equiv X_0$ , la sucesión de funciones  $X_n = \mathcal{T}^n(\tilde{X})$  converge a la única solución del problema de Cauchy. Estas funciones se llaman *aproximaciones sucesivas de Picard*.

### Algunas observaciones:

1. El Teorema 5.2 es válido para cualquier tipo de intervalo. Observemos además que la solución del problema de Cauchy está definida en todo el intervalo  $I$ . Si la función  $F$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  entonces la solución quedará definida en todo  $\mathbb{R}$ .
2. El que la función  $F$  sea Lipschitz con respecto a su segunda variable es una hipótesis bastante restrictiva, que deja fuera muchos casos interesantes para los cuales también se tiene la existencia y unicidad de solución. En el Capítulo 6 presentaremos una versión local de este teorema, que sólo requiere que la función  $F$  sea Lipschitz en un entorno de la condición inicial. El Teorema 5.4 garantiza la existencia y unicidad de solución en las cercanías de  $t_0$ .
3. También se puede demostrar el teorema en el caso en que la función  $F$  es sólo continua por pedazos con respecto a su primera variable. Esto se hace resolviendo la ecuación por subintervalos y luego “pegando” las soluciones que se obtienen.

**3.3. Existencia y unicidad locales.** El Teorema 5.2 exige que la función  $F$  sea Lipschitz. Ésta es una hipótesis demasiado restrictiva y el teorema también puede demostrarse bajo una condición más débil. Sin embargo, sólo se puede garantizar la existencia y unicidad de solución en un entorno de la condición inicial. Enunciaremos el Teorema de Existencia y Unicidad en su versión *local*.



Sean  $I$  un intervalo abierto,  $t_0 \in I$ ,  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Para  $r > 0$  denotamos  $B_r(X_0) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - X_0\| \leq r\}$ . Suponemos que  $F : I \times B_r(X_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua y que para ciertos  $r, \delta > 0$  se tiene

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L\|X - Y\| \quad \text{si } X, Y \in B_r(X_0) \quad \text{y } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

El siguiente teorema se refiere al sistema no lineal

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

TEOREMA 5.4 (Existencia y Unicidad, versión local). *Con la notación e hipótesis descritas arriba, definimos*

$$\begin{aligned} M &= \max\{\|F(t, x)\| \mid t \in I, |t - t_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq r\}, \\ \delta_0 &= \min\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\} \\ y \quad J &= I \cap (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0). \end{aligned}$$

Entonces existe una única solución del problema de Cauchy, al menos en  $J$ .

Notemos que basta que la función  $F$  sea Lipschitz en la segunda variable sólo en un entorno de  $X_0$ . Por otra parte, se garantiza la existencia de solución en el intervalo  $I \cap (t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M})$ , que incluye puntos que están *suficientemente cerca* de  $t_0$  (ver Ejemplo 5.2).

EJEMPLO 5.2. Un interesante ejemplo en que no se cumple la condición de Lipschitz global (pero sí local) es el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

donde  $x_0 > 0$ . Se trata de una ecuación en variables separables cuya solución viene dada por

$$x(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}.$$

La solución está definida en el intervalo  $(-\infty, t_0 + x_0^{-1})$  y explota al acercarse al extremo derecho. Este modelo sirve para modelar una combustión o explosión (observe que mientras más grande  $x_0$ , más rápido se va a  $\infty$  la solución).  $\square$

En ocasiones la función  $F$  es diferenciable con respecto a la segunda variable. Esta condición, cuando está presente, puede ser más fácil de verificar que la condición de Lipschitz. Veremos que toda función de clase  $\mathcal{C}^1$  es Lipschitz, lo que implica que el teorema anterior también es válido para funciones de este tipo. Es preciso observar, sin embargo, que no toda función Lipschitz es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable en un abierto  $D$ . Sea  $C$  una bola cerrada contenida en  $D$ . Si la matrix jacobiana  $JG$  es continua en  $C$ , entonces  $G$  es Lipschitz en  $C$ . Es decir, existe  $L_C > 0$  tal que  $\|G(Y) - G(Z)\| \leq L_C\|Y - Z\|$  si  $Y, Z \in C$ .*

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema del Valor Medio (o de los incrementos finitos) y la continuidad de  $JG$  vemos que

$$\begin{aligned}\|G(Z) - G(Y)\| &\leq \sup_{X \in C} \|JG(X)\| \|Z - Y\| \\ &= L_C \|Z - Y\| \quad \text{si } Y, Z \in C.\end{aligned}$$

□

#### 4. Estructura geométrica de las soluciones

De manera similar a lo hecho para el estudio de la ecuación lineal de orden  $n$ , definiremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X, t \in I\}$$

es el espacio de soluciones del sistema homogéneo y

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X + B(t), t \in I\}$$

es el hiperplano de soluciones del sistema no homogéneo. En efecto, es fácil ver que  $\mathcal{H}$  es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de  $I$  en  $\mathbb{R}^n$ . En particular, cualquier combinación lineal de elementos de  $\mathcal{H}$  está en  $\mathcal{H}$ . Por otra parte, observemos que la diferencia entre dos soluciones  $X_1$  y  $X_2$  del sistema no homogéneo satisface

$$\begin{aligned}(X_1(t) - X_2(t))' &= X_1'(t) - X_2'(t) \\ &= A(t)X_1(t) + B(t) - A(t)X_2(t) - B(t) \\ &= A(t) [X_1(t) - X_2(t)].\end{aligned}$$

Por lo tanto, es solución del sistema homogéneo. Esto demuestra el siguiente:

**TEOREMA 5.5.** *Dada una solución particular  $X_p$  de  $X' = AX + B$ , toda solución del sistema se escribe como suma de  $X_p$  y alguna solución del sistema homogéneo. Es decir,*

$$\mathcal{S} = X_p + \mathcal{H}.$$

En lo que sigue fijamos  $t_0 \in I$ . Del Teorema de Existencia y Unicidad sabemos que, para cualquier condición inicial, el sistema lineal homogéneo tiene una única solución.

Dado  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la  $k$ -ésima *solución fundamental canónica*,  $\phi_k$ , es la solución del sistema

$$\begin{cases} \phi_k'(t) &= A(t)\phi_k(t), \quad t \in I \\ \phi_k(t_0) &= e_k, \end{cases}$$

donde  $e_k$  es el vector que tiene un 1 en la posición  $k$  y 0 en las demás. A la matriz cuyas columnas son las soluciones fundamentales canónicas se llamará *matriz fundamental canónica* y se denotará por  $\Phi$ . Su determinante,  $W = \det(\Phi)$ , es el *Wronskiano* del sistema.

**LEMA 5.5.** *Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental canónica del sistema.*

1.  $\Phi$  es la única función en  $C^1(I)^{n \times n}$  que satisface

$$(39) \quad \Phi(t_0) = I_n \quad y \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

2.  $\Phi(t)$  es invertible para todo  $t \in I$ .

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que  $\Phi$  satisface (39). Ahora, si  $\Psi$  también cumple (39) entonces para cualquier  $Z_0 \in \mathbb{R}^n$  la función

$$Z(t) = [\Phi(t) - \Psi(t)]Z_0$$

verifica

$$\begin{cases} Z'(t) &= A(t)Z(t) & \text{para todo } t \in I \\ Z(0) &= 0. \end{cases}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad,  $Z(t) = [\Phi(t) - \Psi(t)]Z_0 = 0$  para todo  $t \in I$  y para todo  $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ , de donde  $\Phi(t) = \Psi(t)$  para todo  $t \in I$ .

Veremos ahora que  $\Phi(t)$  es invertible para todo  $t \in I$ . Supongamos por el contrario que existe  $t_1 \in I$  tal que  $\Phi(t_1)$  no es invertible. Entonces existe  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con  $\Phi(t_1)v = 0$ . Esto es,

$$\sum_{k=1}^n v_k \phi_k(t_1) = 0.$$

Definimos  $\psi(t) = \sum_{k=1}^n v_k \phi_k(t)$ . Tenemos que

$$\begin{cases} \psi'(t) &= A(t)\psi(t) & \text{para todo } t \in I \\ \psi(t_1) &= 0. \end{cases}$$

En virtud del Teorema de Existencia y Unicidad,  $\psi(t) = 0$  para todo  $t \in I$  y en consecuencia  $\Phi(t)v = 0$  para todo  $t \in I$ . Pero entonces  $\Phi(t_0)v = I_n v = v = 0$ , lo que contradice el hecho de que  $v \neq 0$ .  $\square$

EJEMPLO 5.3 (Cadena con resortes). Se tiene una cadena con extremos fijos formada por  $n$  cuentas conectadas por resortes idénticos de constante elástica  $k$  y largo natural  $l_0$ . Cada cuenta de masa  $m_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , tiene libertad para oscilar horizontalmente, pero presenta un rozamiento lineal con el medio de constante  $c_i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Para cada cuenta tenemos la ecuación de movimiento

$$m_i x_i'' = -c_i x_i' - k[(x_i - x_{i+1}) + (x_i - x_{i-1})], \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

donde  $x_0 = x_{n+1} = 0$ . Matricialmente tenemos

$$\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}'' = - \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' - k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene la forma  $MX'' + CX' + KX = 0$ , con  $X \in \mathbb{R}^n$ . Si hacemos el cambio de variables

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \quad Z' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix},$$

podemos reescribir el sistema como

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} Z.$$

Para determinar el conjunto de soluciones fundamentales canónicas bastará resolver el sistema anterior con condiciones iniciales

$$Z(t_0) = e_k, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

(Es un sistema de  $2n$  ecuaciones).  $\square$

**TEOREMA 5.6.** *El conjunto  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  es una base de  $\mathcal{H}$ , llamada base fundamental canónica. En consecuencia,  $\dim(\mathcal{H}) = n$  y la solución del sistema homogéneo*

$$\begin{cases} X_h'(t) &= A(t)X_h(t) & t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

*está dada por*

$$X_h = \Phi(t)X_0 = x_0^1\phi_1(t) + \dots + x_0^n\phi_n(t).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Debemos probar que todo elemento de  $\mathcal{H}$  se escribe como combinación lineal de  $\phi_1, \dots, \phi_n$  y que estas funciones son linealmente independientes.

Partamos por la primera afirmación. Sea  $X_h \in \mathcal{H}$  la solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} X_h'(t) &= A(t)X_h(t), & \text{para } t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Escibimos  $X_0 = x_0^1e_1 + \dots + x_0^ne_n$  con  $x_0^1, \dots, x_0^n \in \mathbb{R}$ . Demostraremos que  $X_h = x_0^1\phi_1 + \dots + x_0^n\phi_n$ . Para esto definimos

$$Z(t) = x_0^1\phi_1(t) + \dots + x_0^n\phi_n(t) = \Phi(t)X_0.$$

Derivando obtenemos

$$Z'(t) = x_0^1\phi_1'(t) + \dots + x_0^n\phi_n'(t),$$

de donde

$$\begin{aligned} Z'(t) &= A(t) [x_0^1\phi_1(t) + \dots + x_0^n\phi_n(t)] \\ &= A(t)Z(t) \end{aligned}$$

pues  $\phi_k' = A\phi_k$  para cada  $k$ . Además, por la definición de los  $\phi_k$  tenemos que

$$Z(t_0) = x_0^1e_1 + \dots + x_0^ne_n = X_0.$$

Tenemos entonces que  $Z$  es solución del mismo sistema de ecuaciones diferenciales que  $X_h$ , con las mismas condiciones iniciales. En virtud del Teorema de Existencia y Unicidad,

$$X_h(t) = Z(t) = \Phi(t)X_0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Veamos ahora que  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  son linealmente independientes. Suponemos que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0$  para todo  $t \in I$ . Debemos probar que, necesariamente,  $\alpha_k = 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$ . Observemos primero que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\alpha.$$

En virtud del Lema 5.5, la matriz  $\Phi(t)$  es invertible para cada  $t$  y por lo tanto  $\alpha = 0$ .  $\square$

Para generalizar los resultados anteriores, definamos una matriz fundamental (no necesariamente la canónica) como

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

con  $t \in I$ , donde  $\psi_k$  es solución del sistema

$$\begin{cases} \psi'_k(t) &= A(t)\psi_k(t) \\ \psi_k(t_0) &= v_k \end{cases} \quad \text{para } t \in I$$

y  $\{v_k\}_{k=1}^n$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ .

**COROLARIO 5.2.** *Sea  $M(t)$  una matriz fundamental del sistema. Entonces  $\det(M(t)) \neq 0$  para todo  $t \in I$  y*

$$X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Observemos que la matriz  $M(t_0)$  es invertible y satisface  $M(t_0)e_k = v_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Luego  $M(t_0)^{-1}v_k = e_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . La matriz

$$\Psi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$$

satisface (39) pues

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= M(t_0)M(t_0)^{-1} = I_n \\ \Psi'(t) &= M'(t)M(t_0)^{-1} = A(t)M(t)M(t_0)^{-1} = A(t)\Psi(t). \end{aligned}$$

De acuerdo con el Lema 5.5,  $\Phi(t) = \Psi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

Para el sistema no homogéneo aplicaremos el método de variación de parámetros estudiado en el capítulo 3 para ecuaciones de orden superior. Recordemos la regla para derivar un producto contenida en el Lema 5.1 y la propiedad de  $\Phi$  dada por la ecuación (39) en el Lema 5.5. Buscamos una solución particular de la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)F(t),$$

donde  $\Phi$  es la matriz fundamental canónica y  $F$  es una incógnita.  $X_p$  debe satisfacer

$$\begin{aligned} B(t) &= X'_p(t) - A(t)X_p(t) \\ &= (\Phi(t)F(t))' - A(t)\Phi(t)F(t) \\ &= \Phi'(t)F(t) + \Phi(t)F'(t) - A(t)\Phi(t)F(t) \\ &= \Phi(t)F'(t), \end{aligned}$$

para lo cual basta que

$$\begin{aligned} F'(t) &= \Phi(t)^{-1}B(t) \\ F(t) &= \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds. \end{aligned}$$

Como consecuencia de los Teoremas 5.5 y 5.6 tenemos

TEOREMA 5.7 (Variación de Parámetros). *La solución del sistema*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

*está dada por*

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

*donde  $\Phi$  es la matriz fundamental canónica.*

EJERCICIO PROPUESTO 5.1. Escriba una fórmula análoga usando cualquier matriz fundamental  $M$ .

## 5. Resolución de sistemas lineales

De acuerdo con lo visto en la sección anterior, la resolución de un sistema lineal, homogéneo o no, se reduce a encontrar la matriz fundamental canónica  $\Phi$ . En lo que queda de este capítulo nos centraremos en las técnicas para hacerlo.

**5.1. Exponencial de una Matriz.** Veremos que la matriz fundamental canónica puede encontrarse directamente a partir de la matriz  $A$  mediante la llamada fórmula exponencial.

Sea  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . La *exponencial* de  $M$  se define como

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Las entradas de la matriz  $e^M$  están definidas en términos de una serie que, en principio, podría no ser convergente. Veremos que sí lo es. Para  $n \in \mathbb{N}$  escribimos

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k.$$

Denotamos por  $s_n(i, j)$  la entrada  $ij$  de la matriz  $S_n$ . Veremos que la sucesión  $\{s_n(i, j)\}_{n=0}^{\infty}$  es convergente para cada  $i$  y  $j$ . Para ello probaremos que es una sucesión de Cauchy. Observemos primero que si  $n \geq m$  entonces

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} M^k.$$

Como  $|s_n(i, j) - s_m(i, j)| \leq \|S_n - S_m\|$  y  $\|M^n\| \leq \|M\|^n$ , se tiene que

$$|s_n(i, j) - s_m(i, j)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|M\|^k.$$

Como la serie del lado derecho es convergente a cero, la sucesión  $\{s_n(i, j)\}_{n=0}^{\infty}$  es de Cauchy. Concluimos que la exponencial de una matriz está bien definida.

Las principales propiedades de la exponencial se resumen en el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5.2. Sean  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $e^{0 \cdot t} = e^{A \cdot 0} = I$ .
2.  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ .
3.  $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$ . En particular,  $e^{At}$  es invertible y su inversa es  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ .
4.  $AB = BA$  si, y sólo si,  $B e^{At} = e^{At} B$ .
5.  $AB = BA$  si, y sólo si,  $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ .

DEMOSTRACIÓN. La propiedad 1. es inmediata de la definición.

2. En cada intervalo  $[-b, b]$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , las componentes de la matriz  $At$  están uniformemente acotadas por  $|\max(a_{ij})||b|$ , luego tenemos la convergencia uniforme de  $h_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$ . Como  $h_p$  converge uniformemente a  $h$  y la sucesión  $h'_p(t) = \sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$  converge uniformemente en  $(-b, b)$  a  $\sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$ , tenemos que  $h(t)$  es derivable y

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$$

para todo  $t \in (-b, b)$ . Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij} t^k}{k!} = (A^k)_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!},$$

de donde

$$\frac{d}{dt} (e^{At})_{ij} = A_{ij} (e^{At})_{ij} \quad \text{para todo } t \in (-b, b).$$

Dado que  $b$  era arbitrario, el resultado es válido en todo  $\mathbb{R}$ .

3. Para  $s$  fijo tomamos la función

$$\psi(t) = e^{A(t+s)} - e^{At} e^{As},$$

que satisface

$$\psi'(t) = A\psi(t) \quad \text{y} \quad \psi(0) = 0.$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad  $\psi$  es la función nula y así  $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$ .

4. Por inducción se prueba que  $AB = BA$  si, y sólo si,  $A^k B = B A^k$  para cada  $k \geq 1$ . Luego

$$B e^{At} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot B = e^{At} B.$$

5. Se prueba como 3.

□

De las propiedades 1 y 2 y el Lema 5.5 tenemos que

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} \quad \text{para todo } t \in I$$

pues ambas satisfacen la misma ecuación diferencial. De la fórmula

$$X(t) = \Phi(t) X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) B(s) ds,$$

dada por el Teorema 5.7 podemos escribir la solución en términos de la matriz exponencial mediante la *fórmula exponencial*:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) ds.$$

Una consecuencia importante de esta fórmula es que si  $X$  e  $Y$  son soluciones de un sistema lineal, entonces

$$\begin{aligned} \|X(t) - Y(t)\| &= e^{A(t-t_0)} \|X(t_0) - Y(t_0)\| \\ &\leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|X(t_0) - Y(t_0)\|. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que si las condiciones iniciales están cerca, entonces las soluciones se mantienen cerca durante un tiempo. Más precisamente, dados  $\varepsilon, T > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|X_0 - Y_0\| < \delta$  entonces  $\|X(t) - Y(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**5.2. Exponencial de una matriz diagonalizable.** Recordemos que una matriz  $A$  es diagonalizable si se puede expresar como

$$A = PDP^{-1},$$

donde  $D$  es una matriz diagonal que contiene los valores propios de  $A$  y  $P$  es una matriz invertible cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Más precisamente, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A$ , y  $v_1, \dots, v_n$  sus respectivos vectores propios, entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

El cálculo de la exponencial de una matriz diagonalizable es sumamente sencillo.

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k t^k}{k!} = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1},$$

donde

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la solución del sistema homogéneo se puede escribir como:

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 = Pe^{Dt} \underbrace{e^{-Dt_0} P^{-1} X_0}_C = Pe^{Dt} C,$$

donde  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$  es un vector constante que depende de las condiciones iniciales.

Desarrollando el producto podemos escribir

$$X_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} v_n.$$



OBSERVACIÓN. Esta última fórmula puede obtenerse fácilmente viendo que cada función de la forma  $e^{\lambda t}v$  es solución del sistema lineal siempre que  $v$  sea un vector propio asociado al valor propio  $\lambda$ . Como toda matriz diagonalizable de tamaño  $n \times n$  tiene  $n$  vectores linealmente independientes, es evidente que las funciones de esta forma generan todo el espacio de soluciones homogéneas. Sin embargo, preferimos construir las soluciones a partir de la exponencial para que el lector se familiarice con este método, imprescindible en el caso no diagonalizable.

EJEMPLO 5.4 (Confort de un auto). Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$x'' = -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\theta$$

$$\theta'' = (k_1L_1 - k_2L_2)x - (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta,$$

donde las constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L_1$  y  $L_2$  son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas  $G$  del auto. En un instante  $t > 0$ ,  $x(t)$  representa la posición vertical de  $G$  y  $\theta(t)$  el giro del auto en torno a  $G$ .

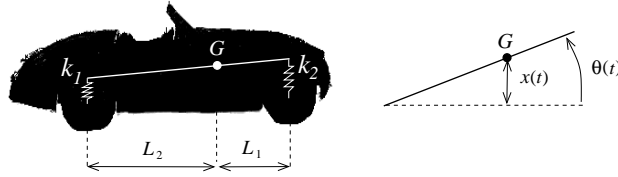


FIGURA 2. Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 5.4

Este sistema de orden 2, lo llevamos a un sistema lineal tomando las variables:  $x, \theta, x', \theta'$ , resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_1L_1 - k_2L_2 & 0 & 0 \\ k_1L_1 - k_2L_2 & -(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue supondremos que  $k_2 = \mu k_1$  y  $L_1 = \mu L_2$ , donde  $0 < \mu < 1$ , pues generalmente el  $G$  de los autos está hacia delante del auto, debido al peso del motor. De esta forma se anulan los términos de acoplamiento  $k_1L_1 - k_2L_2$ . Tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix},$$

donde  $a = -(1 + \mu)k_1$  y  $b = -\mu(1 + \mu)k_1 L_2^2$ . Dado que tenemos la forma  $X' = AX$ , podemos calcular la exponencial de la matriz. Para esto analicemos cómo son las potencias de  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

luego, elevando a  $k$ ,

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix},$$

y si multiplicamos por  $A$  queda

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo todas las potencias calculadas, procedemos a determinar la matriz exponencial

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si tomamos  $a = -\alpha^2$  y  $b = -\beta^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\beta t), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) & 0 & \frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \\ -\alpha \sin(\alpha t) & 0 & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & -\beta \sin(\beta t) & 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Si ponemos alguna condición inicial, como por ejemplo una frenada, representada por

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -1,$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \\ -\frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ -\cos(\alpha t) \\ -\cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Es decir, la solución del movimiento es:

$$x(t) = \frac{-\sin(\alpha t)}{\alpha}, \quad \theta(t) = \frac{-\sin(\beta t)}{\beta},$$

con  $\alpha = \sqrt{(1+\mu)k}$  y  $\beta = L\sqrt{\mu(1+\mu)k}$ , que físicamente representan las frecuencias de cada modo.

Otro método para solucionar este problema es analizar los valores y vectores propios del sistema.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b).$$

En términos de las variables antes definidas quedan los valores propios imaginarios puros:

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\beta, \quad \lambda_4 = -i\beta,$$

que tienen asociados respectivamente los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución general será:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sólo nos interesan las variables  $x$  y  $\theta$ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{(ic_2e^{-i\alpha t} - ic_1e^{i\alpha t})}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(ic_4e^{-i\beta t} - ic_3e^{i\beta t})}{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí se ve que el movimiento del sistema se expresa fundamentalmente sólo como el movimiento vertical de  $G$  (representado en el vector  $(1, 0)$  y separadamente la rotación del eje que une los resortes, en torno a  $G$ , representado en el vector  $(0, 1)$ , y por tanto la solución general del sistema no es más que la combinación lineal de estos dos movimientos fundamentales llamados modos propios. Los valores propios cuando son imaginarios puros, representan la frecuencia natural de cada modo propio, en este caso al modo de movimiento vertical  $(1, 0)$  tiene asociado la frecuencia propia  $w = \alpha$ . Una aplicación del conocimiento de este valor es que si se deseara tener un fenómeno de resonancia, bastaría aplicar una fuerza externa sinusoidal sobre el auto con esta misma frecuencia ( $F = F_0 \sin(\alpha t)$ ,  $F_0$  constante). La misma interpretación se tiene para la frecuencia  $\beta$  en el modo  $(0, 1)$ . Para comprobar que este método entrega la misma solución que la exponencial de la matriz, imponemos las mismas condiciones iniciales, para determinar las constantes:

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_3 + c_4 &= 0 \\ \frac{-i}{\alpha}c_1 + c_2 \frac{-i}{\alpha} &= -1 \\ \frac{-i}{\beta}c_3 + c_4 \frac{-i}{\beta} &= -1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}$ , por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(-e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(-e^{-i\beta t} + ie^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix};$$

recordando la identidad  $e^{is} - e^{-is} = 2i \sin(s)$ , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = -\sin(\alpha t) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\beta t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix},$$

que es el mismo resultado antes obtenido.  $\square$

**5.3. Exponencial de una matriz que no es diagonalizable.** Si  $A$  es una matriz cuadrada cualquiera (en particular no diagonalizable) siempre existe la descomposición denominada *forma canónica de Jordan*, que estudiaremos a continuación. Sólo enunciaremos los resultados necesarios para construir la forma de Jordan sin entrar en los detalles teóricos, pues involucran técnicas sutiles de álgebra lineal que no viene al caso estudiar en este curso. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, el libro *The Theory of Matrices* de Peter Lancaster.

DEFINICIÓN 5.3. Se llama *bloque de Jordan* de tamaño  $k \times k$  y valor propio  $\lambda \in \mathbb{C}$  a la matriz  $B \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$  dada por

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se llama *suprabloque de Jordan* de tamaño  $m \times m$  y valor propio  $\lambda \in \mathbb{C}$  a una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es un bloque de Jordan de valor propio  $\lambda$ . Una matriz está escrita en *forma canónica de Jordan* si es diagonal por bloques, formada por suprabloques de Jordan.

EJEMPLO 5.5. La siguiente matriz, escrita en la forma canónica de Jordan, está formada por

- un suprabloque de tamaño 2 y valor propio 8, formado a su vez por dos bloques de tamaño 1;
- un suprabloque de tamaño 3 y valor propio 3, formado un bloque de tamaño 1 y otro de tamaño 2; y
- un suprabloque de tamaño 1 y valor propio 4.

$$\begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & & & & \\ 0 & \boxed{8} & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \boxed{4} \end{pmatrix}.$$

□

PROPOSICIÓN 5.3. Sea  $\lambda$  valor propio de  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  de multiplicidad algebraica  $m$ . Sea  $E_s = \ker(A - \lambda I)^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $p$ ,  $1 \leq p \leq m$ , tal que:

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots E_p = E_{p+1} = E_{p+2} = \cdots.$$

Los espacios  $E_s$ ,  $1 \leq s \leq p$ , de la Proposición 5.3 se denominan *espacios propios generalizados de  $A$  de orden  $s$*  asociados al valor propio  $\lambda$ .

Un elemento no nulo  $v$  tal que  $v \in E_s$  y  $v \notin E_{s-1}$  se dice *vector propio generalizado de  $A$  de orden  $s$* .

**Observación:** Con la definición anterior, los vectores propios usuales son vectores propios generalizados de orden 1.

PROPOSICIÓN 5.4.  $v_s$  es un vector propio generalizado de  $A$  de orden  $s$  ( $s \geq 2$ ) asociado a  $\lambda$  si y sólo si  $v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s$  es un vector propio generalizado de  $A$  de orden  $s - 1$  asociado a  $\lambda$ .

De la proposición 5.4 tenemos que si tomamos  $v_s$  (vector propio generalizado de orden  $s$ ), entonces  $v_{s-1}$  dado por

$$v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s \Leftrightarrow Av_s = \lambda v_s + v_{s-1}$$

es un vector propio generalizado de orden  $s - 1$ , y así recursivamente tenemos definidos:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_s &= \lambda v_s + v_{s-1}, \end{aligned}$$

donde  $v_1$  es el vector propio usual. Una cadena  $v_1, v_2, \dots, v_s$  así construida, se denomina *cadena de Jordan* de largo  $s$ , asociada al vector propio  $v_1$ . Cuando es maximal ( $s = p$ ) o si  $s < p$ , entonces el problema

$$(A - \lambda I)v = v_s$$

no tiene solución con  $v$  vector propio generalizado de orden  $s + 1$ .

**PROPOSICIÓN 5.5.** *Los elementos de una cadena de Jordan son linealmente independientes.*

**PROPOSICIÓN 5.6.** *El número  $k_s$  de cadenas de Jordan de largo  $s$  es*

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1},$$

donde  $l_0 = 0$  y  $l_s = \dim E_s = \dim \ker(A - \lambda I)^s$  para  $s > 0$ .

**TEOREMA 5.8** (Descomposición de Jordan). *Toda matriz puede expresarse en la forma canónica de Jordan mediante un cambio de base. Más precisamente, dada una matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , existen una matriz  $J$  en forma de Jordan y una matriz  $P$  invertible tales que*

$$A = PJP^{-1}.$$

*Además, la matriz  $J$  es única, salvo permutaciones de sus bloques.*

**Observación:** Para construir la descomposición se puede proceder de la siguiente manera:

- Se calculan los valores propios de  $A$ .
- Se toma un valor propio  $\lambda$  de multiplicidad algebraica  $m$ , y se determina la dimensión de los espacios  $\ker(A - \lambda I)^s$ , aumentando  $s$  hasta  $m$ .
- Se calculan los  $k_s$ , de donde se obtiene un bloque de Jordan de tamaño  $k_s$  asociado a cada cadena, y los respectivos valores propios generalizados asociados determinan la matriz  $P$ .

**EJEMPLO 5.6.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $A$  son:  $\lambda_1 = -1$ , con multiplicidad algebraica 1; y  $\lambda_2 = 1$ , con multiplicidad algebraica 4. La matriz  $J$  estará formada por dos suprabloques, uno asociado a cada valor propio.

Como  $\lambda_1$  tiene multiplicidad 1, sólo le corresponderá un bloque de Jordan de tamaño 1. Tomamos como vector propio asociado  $(0, 1, 1, 0, 0)$ .

Para  $\lambda_2$  calculamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \dim \ker(A - I) = 2 \\ l_2 &= \dim \ker(A - I)^2 = 4 \\ l_s &= \dim \ker(A - I)^s = 4, \forall s \geq 2. \end{aligned}$$

Como  $l_0 = 0$ , tenemos que  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 2$ . En virtud de la Proposición 5.6 no hay cadenas de largo 1, pero hay 2 cadenas de largo 2. Cada cadena de largo 2 determina un bloque de  $2 \times 2$ , por lo que tenemos completamente determinada la matriz  $J$ :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora los vectores propios generalizados. Para  $\lambda_2$  tenemos

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 = 0 &\Rightarrow v_1 = (\alpha, \alpha, 0, \beta, \beta) \\ (A - I)v_2 = v_1 &\Rightarrow v_2 = (\beta + \gamma, \gamma, \alpha, \alpha + \delta, \delta). \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 0, 0, 1, 1) \Rightarrow v_2 = (1 + \gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$ . Si  $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$ .

Si  $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1 + \delta, \delta)$ . Si  $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$ .

La matriz  $P$  de cambio de base tiene por columnas los vectores propios generalizados:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Para el cálculo de  $e^{At}$  en el caso general veamos la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix},$$

una matriz diagonal por bloques. Entonces

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que las matrices por bloques se pueden multiplicar como si los bloques fueran escalares:

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, por inducción,

$$M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix}$$

y de allí concluimos que

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

□

Calculemos ahora la exponencial de un bloque de Jordan de tamaño  $m$ :

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + N)t}, \quad \text{donde} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $\lambda I$  y  $N$  conmutan. Luego

$$e^{Jt} = e^{\lambda It + Nt} = e^{\lambda It} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}$$

por la propiedad 5 de la Proposición 5.2 Sólo nos resta calcular  $e^{Nt}$ . Para esto veamos las potencias de  $N$ :



$$\begin{aligned}
N^0 &= I \\
N^1 &= N \\
N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así sucesivamente la línea de unos va alejándose de la diagonal principal. Al final va quedando

$$\begin{aligned}
N^{m-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
N^m &= 0_{m \times m},
\end{aligned}$$

donde  $0_{m \times m}$  denota la matriz nula de tamaño  $m \times m$ . Vemos entonces que  $N$  es una matriz nilpotente de orden  $m$ , y la exponencial se escribe como una suma finita

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k t^k}{k!} \\
&= I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En conclusión,  $e^{Nt}$  es una matriz triangular superior de la forma

$$[e^{Nt}]_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si } j - i = k \geq 0 \\ 0 & \text{si } j - i < 0 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma hemos demostrado el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 5.8.** *Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , y sea  $A = PJP^{-1}$  su representación en forma canónica de Jordan. Entonces*

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**EJEMPLO 5.7.** Consideremos el sistema:

$$X' = AX,$$

con condición inicial  $X(0) = X_0$ , donde la matriz  $A$  está dada en el Ejemplo 5.6. Ya habíamos calculado su forma canónica de Jordan. En virtud de la proposición anterior se tiene que la solución es:

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

donde  $P$  es la matriz de cambio de base descrita en el Ejemplo 5.6.  $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de la forma canónica de Jordan a un sistema dinámico discreto.

**EJEMPLO 5.8 (Equilibrio Marino).** Suponga que la población de ballenas  $b$ , plancton  $p$  y la temperatura del mar  $T$  están regidas por el siguiente sistema discreto, donde  $n$  designa el año y  $\lambda > 0$  es un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $b_0, p_0, T_0$  positivas.

Se quiere saber cómo evoluciona este sistema en el tiempo, dependiendo del parámetro  $\lambda$ . El sistema anterior se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ p_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ T_n \end{pmatrix}, \text{ con condición inicial } \begin{pmatrix} b_0 \\ p_0 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos primero un caso más general de sistemas discretos:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0,$$

con condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ , donde  $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ ,  $B_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 0$ . Como  $X_0$  es la condición inicial, iterando tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + B_0 \\ X_2 &= AX_1 + B_1 = A(AX_0 + B_0) + B_1 = A^2X_0 + AB_0 + B_1 \\ X_3 &= AX_2 + B_2 = A^3X_0 + A^2B_0 + AB_1 + B_2 \\ &\vdots \\ X_n &= A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}. \end{aligned}$$

Probemos por inducción que efectivamente la solución del sistema está dada por:

$$X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}, \quad n \geq 1$$

Para  $n = 1$  resulta

$$X_1 = AX_0 + B_0,$$

que es solución del sistema. Suponemos ahora que  $X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}$  satisface el sistema propuesto. Hay que probar que

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1}$$

también lo satisface. En efecto,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n+1-j}B_{j-1} + A^{n+1-(n+1)}B_{(n+1)-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + A \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} + I_{d \times d}B_n \\ &= A \left( A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} \right) + B_n \\ &= AX_n + B_n. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la solución del sistema discreto homogéneo, para el caso en que  $A$  sea diagonalizable, es decir  $A = PDP^{-1}$ , con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ son los valores propios de } A.$$

Según lo anterior, la solución de este sistema será:  $X_n = A^n X_0$ , pero  $A^n = PD^n P^{-1}$ , entonces:

$$X_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

De esta forma si queremos que nuestro problema tenga solución, es decir que exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , debemos imponer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n$  exista  $\forall k = 1, \dots, d$ , lo que equivale a pedir que  $|\lambda_k| < 1$  ó  $\lambda_k = 1$ ,  $\forall k = 1, \dots, d$ .

Si volvemos al problema específico de las ballenas, estamos en el caso de un sistema homogéneo discreto, pero donde la matriz  $A$  no es diagonalizable (tiene la forma de un bloque de Jordan). Sin embargo, sigue siendo válida la solución  $X_n = A^n X_0$ . Sólo resta calcular  $A^n$ . Para esto usaremos la siguiente propiedad:

$$AB = BA \Rightarrow (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \forall n \geq 0,$$

es decir, si las matrices conmutan, se tiene la propiedad del Binomio de Newton, (la demostración puede hacerse por inducción, al igual que en el caso escalar). En este caso podemos usar esta fórmula, pues claramente

$$\lambda I_d N = \lambda N = N \lambda = N \lambda I_d.$$

Luego:

$$A^n = (\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k I^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k},$$

con  $N$  una matriz nilpotente de orden 3, pero  $N^{n-k} = 0$  cuando  $n - k \geq 3 \Rightarrow n - 3 \geq k$ , luego la suma sin los términos nulos queda:

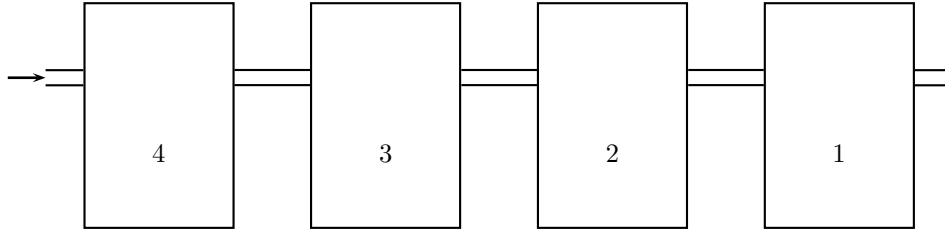
$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=n-2}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-2} \lambda^{n-2} N^2 + \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n I \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \lambda^n I. \end{aligned}$$

En el desarrollo sobre las formas de Jordan, habíamos calculado todas las potencias de una matriz nilpotente, resulta entonces:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n I \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^n I \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que se repite la solución que teníamos para el caso diagonalizable: independiente de las condiciones iniciales, nuestro modelo indica que cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $|\lambda| > 1$ , el sistema diverge, es decir las poblaciones de ballenas y plancton se expanden indefinidamente, al igual que la temperatura, mientras que si  $|\lambda| < 1$ , las poblaciones se extinguen y la temperatura del mar descende a 0. En el caso crítico  $|\lambda| = 1$  se tiene que las poblaciones animales divergen, pero con temperatura constante del mar  $T_0$ .  $\square$

**EJEMPLO 5.9.** Supongamos que se tienen 4 estanques conectados por tuberías, como se muestra en la figura.



En el estanque  $j$ , que tiene volumen  $V_j$ , hay una cantidad  $C_j$  de una sustancia en solución. Por todas las tuberías corre un flujo  $F$  de solución. La solución que entra al estanque 4 tiene una concentración  $m_0$ . Esto nos da el siguiente sistema para las cantidades  $C_1, \dots, C_4$ :

$$\begin{cases} C_1' &= -K_1 C_1 + K_2 C_2 \\ C_2' &= -K_2 C_2 + K_3 C_3 \\ C_3' &= -K_3 C_3 + K_4 C_4 \\ C_4' &= -K_4 C_4 + m_0 F, \end{cases}$$

donde  $K_j = F/V_j$ . Escrito en forma matricial esto es

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -K_1 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_0 F \end{pmatrix}.$$

Nos queda una matriz triangular superior. Si todos los estanques tienen distinto volumen, la matriz es diagonalizable pues tiene 4 valores propios distintos. Si por el contrario, todos los estanques el mismo volumen  $V$ , escribimos  $K = F/V$  y el sistema se reduce a

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}' = K \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_0 F \end{pmatrix}.$$

Si denotamos

$$A = K \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{At} = e^{-Kt} \begin{pmatrix} 1 & Kt & \frac{1}{2}K^2t^2 & \frac{1}{6}K^3t^3 \\ 0 & 1 & Kt & \frac{1}{2}K^2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & Kt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se deja al lector escribir la solución general usando la fórmula de variación de parámetros y analizar los casos en que hay algún volumen (y por lo tanto algún valor propio) repetido.  $\square$

**5.4. Sistemas lineales y transformada de Laplace.** También es posible resolver sistemas lineales usando la transformada de Laplace. Para comenzar con un ejemplo simple, consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{cases}$$

Si queremos encontrar soluciones definidas para  $t > 0$  podemos intentar aplicar la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones. Obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_1 - x_1^0 &= a_{11}\mathcal{L}x_1 + a_{12}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_1 \\ s\mathcal{L}x_2 - x_2^0 &= a_{21}\mathcal{L}x_1 + a_{22}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_2, \end{aligned}$$

donde  $x_1^0 = x_1(0)$  y  $x_2^0 = x_2(0)$ . Así tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} (s - a_{11})\mathcal{L}x_1 - a_{12}\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_1 + x_1^0 \\ -a_{21}\mathcal{L}x_1 + (s - a_{22})\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_2 + x_2^0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por  $s - a_{22}$  y la segunda por  $a_{12}$  podemos reducir  $\mathcal{L}x_2$  y obtener

$$P(s)\mathcal{L}(x_1) = \phi(s),$$

donde

$$\begin{aligned} P(s) &= (s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ \phi(s) &= (s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0). \end{aligned}$$

Despejando obtenemos expresiones para  $\mathcal{L}x_1$  y  $\mathcal{L}x_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x_1 &= \frac{(s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{(s - a_{11})(\mathcal{L}b_2 + x_2^0) + a_{21}(\mathcal{L}b_1 + x_1^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5.10** (Polución en dos estanques, continuación). Si reemplazamos los valores que teníamos en el sistema de los estanques en el Ejemplo 5.1 obtenemos

$$\left[ s^2 + \frac{2b(1+\lambda)}{V}s + \frac{b^2(1+\lambda)}{V^2} \right] \mathcal{L}x_1 = \left[ s + \frac{b(1+\lambda)}{V} \right] \left[ \frac{b\sigma}{s} + x_1^0 \right] + \frac{bx_2^0\lambda}{V}.$$

Resolvamos la ecuación cuadrática del lado izquierdo:

$$s = \frac{-b(1+\lambda)}{V} \pm \frac{b(1+\lambda)}{V} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{1+\lambda}}}_{\theta}.$$

Si  $\lambda \geq 0$  entonces  $\theta \in [0, 1]$  y

$$s_1 = \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1+\theta) < 0 \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1-\theta) < 0.$$

Si introducimos los parámetros

$$\alpha = \frac{b(1+\lambda)}{V}, \quad \beta = \frac{b\lambda}{V},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x_1 &= \frac{b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{sx_1^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ &\quad + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{\alpha(x_1^0 + x_2^0)}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{sx_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ &\quad + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))}. \end{aligned}$$

Los tres sumandos de cada ecuación anterior tienen una antitransformada conocida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-a)(s-b)} \right] &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s-a)(s-b)} \right] &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} \right] &= \frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} \\ &\quad + x_1^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} \\ &\quad + \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)} \\ x_2 &= -\alpha(x_1^0 + x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} \\ &\quad + x_2^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} \\ &\quad + \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_1 t} + C_3 \\ x_2 &= \tilde{C}_1 e^{s_1 t} + \tilde{C}_2 e^{s_1 t} + \tilde{C}_3, \end{aligned}$$

donde  $C_1, \tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_2, C_3, \tilde{C}_3$  son constantes dadas de la agrupación de términos semejantes en las expresiones anteriores, y que dependen sólo de las condiciones iniciales y de la geometría del sistema.

Es importante notar que cuando  $t \rightarrow \infty$  las soluciones convergen a un *estado estacionario*, que es una solución constante. En efecto, dado que  $s_1, s_2 < 0$  tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= C_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \tilde{C}_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V.\end{aligned}$$

Después de un tiempo suficientemente largo, la cantidad de poluente en cada estanque será muy cercana a  $\sigma V$ , independientemente del valor de  $\lambda$ . Tenemos la misma solución que si  $\lambda = 0$ , que era como inicialmente estaba el sistema de estanques. En realidad la situación es más compleja, ya que graficando las soluciones para  $\lambda > 0$  y  $\lambda = 0$  se aprecia que la polución es menor en el caso  $\lambda > 0$  para un intervalo de  $t$  considerable (aunque el límite es el mismo). Ver Figura 3.

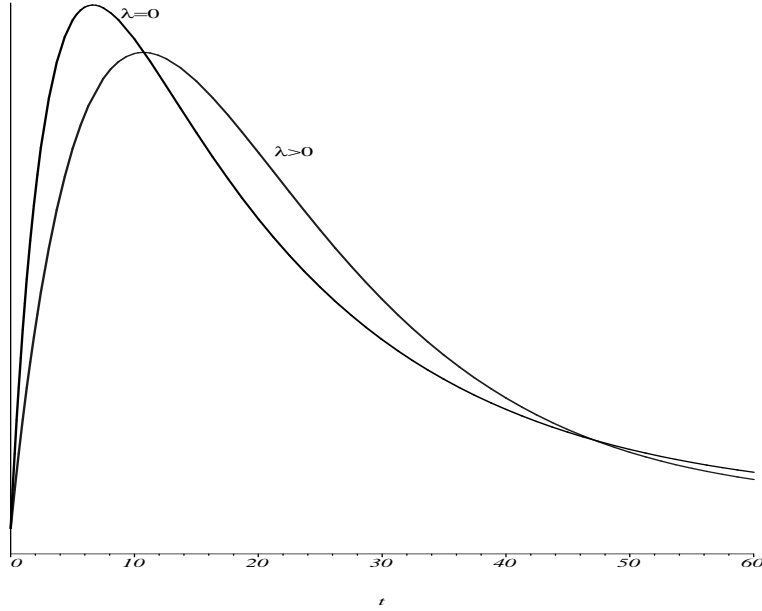


FIGURA 3. Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 5.10

□

Veamos ahora el método de la Transformada de Laplace en caso de un sistema lineal general *a coeficientes constantes*:

$$(40) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t), & \text{con } B, X \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ X(0) = X_0, & \text{con } X_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La  $i$ -ésima fila del sistema es

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad x_i(0) = x_i^0.$$



Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j + \mathcal{L}b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ s\mathcal{L}x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j &= \mathcal{L}b_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial esto es

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}X(s) - A\mathcal{L}X(s) &= \mathcal{L}B(s) + X_0 \\ (sI - A)\mathcal{L}(X)(s) &= \mathcal{L}B(s) + X_0. \end{aligned}$$

Sea  $M$  el máximo de las partes reales de los valores propios de  $A$ . Si  $s > M$  entonces la matriz  $(sI - A)$  es invertible y podemos despejar  $\mathcal{L}(X)$ .

TEOREMA 5.9. *La solución del sistema lineal (40) satisface*

$$\mathcal{L}(X)(s) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B)(s) + X_0), \quad s > M.$$

EJEMPLO 5.11 (Masas atmosféricas). El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte ( $c_1$ ) y el hemisferio sur ( $c_2$ ) de la Tierra (ver figura ??):

$$(41) \quad \begin{cases} c_1' = f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \\ c_2' = f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2. \end{cases}$$

La constante  $\alpha > 0$  representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante  $\beta > 0$  (desconocida) el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas  $f_1 = 30$  y  $f_2 = 10$  en [kton/año]. Inicialmente  $c_1^0 = 84$  y  $c_2^0 = 60$  en [kton].

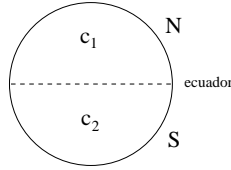


FIGURA 4. Masas atmosféricas del Ejemplo 5.11

Introduzcamos la masa media entre los dos hemisferios como  $\bar{c}(t) = \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t))$  y la emisión media como  $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ . Si derivamos la expresión de la masa media con respecto al tiempo obtenemos

$$\bar{c}'(t) = \frac{1}{2}(c_1'(t) + c_2'(t)).$$

Luego, si sumamos las EDO que tenemos para  $c_1$  y  $c_2$ , nos queda

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' &= 2\bar{c}' = (f_1 + f_2) - \alpha(c_1 - c_2 + c_2 - c_1) - \beta(c_1 + c_2) \\ \bar{c}' &= \bar{f} - \beta\bar{c} \end{aligned}$$

que es una EDO lineal de primer orden para  $\bar{c}$ . La condición inicial está dada por

$$\bar{c}(0) = \frac{1}{2}(c_1(0) + c_2(0)) = \frac{1}{2}(84 + 60)[kton] = 72[kton].$$

La solución del problema de Cauchy asociado es

$$\bar{c}(t) = 72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Se estima que el límite de  $\bar{c}(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  es de 100 [kton]. De allí podemos encontrar una estimación para el tiempo de vida del contaminante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{c}(t) = 100[kton] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \right] = \frac{\bar{f}}{\beta}.$$

Como  $\bar{f} = 20$  [kton/año], tenemos que

$$\beta^{-1} = \frac{100[kton]}{20[kton/año]} = 5 \text{ [años]}.$$

El tiempo estimado de vida del contaminante es de 5 años.

Resolveremos ahora el sistema (41) utilizando la transformada de Laplace. Primero escribimos el sistema en forma matricial como  $C' = AC + B$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

El Teorema 5.9 nos dice que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X)(s) &= (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}B(s) + X_0) \\ &= \begin{pmatrix} s + \alpha + \beta & -\alpha \\ -\alpha & s + \alpha + \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{s} + c_1^0 \\ \frac{f_2}{s} + c_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1\phi_1(s) + k_2\phi_2(s) + k_3\phi_3(s) \\ \tilde{k}_1\phi_1(s) + \tilde{k}_2\phi_2(s) + \tilde{k}_3\phi_3(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1 + c_2^0\alpha + c_1^0\alpha + c_1^0\beta & \tilde{k}_1 &= f_2 + c_1^0\alpha + c_2^0\alpha + c_2^0\beta \\ k_2 &= c_1^0 & \tilde{k}_2 &= c_2^0 \\ k_3 &= f_1\alpha + f_1\beta + f_2\alpha & \tilde{k}_3 &= f_2\alpha + f_2\beta + f_1\alpha \end{aligned}$$

son constantes conocidas y

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{1}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ \phi_2(s) &= \frac{s}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

son funciones cuyas antitransformadas debemos encontrar para determinar el vector  $X$ . Para ello vamos a descomponerlas en fracciones parciales.

$$\begin{aligned}
 \phi_1(s) &= \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} \\
 &= \frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}, \\
 \phi_2(s) &= \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} \\
 &= \frac{s}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{s}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}, \\
 \phi_3(s) &= \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} \\
 &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)s} - \frac{1}{(2\alpha\beta)(s+\beta)} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)(s+2\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

Recordando que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right](t) = e^{-at} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+a}\right](t) = \delta(t) - ae^{-at},$$

vemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}[\phi_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}\right] \\
 &= \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] - \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
 &= \frac{1}{2\alpha}e^{-\beta t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-(2\alpha+\beta)t}, \\
 \mathcal{L}^{-1}[\phi_2(s)] &= \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+\beta}\right] - \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
 &= \frac{1}{2\alpha}(\delta(t) - \beta e^{-\beta t} - \delta(t) + (2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t}) \\
 &= \frac{1}{2\alpha}\left((2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t} - \beta e^{-\beta t}\right), \\
 \mathcal{L}^{-1}[\phi_3(s)] &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2\alpha\beta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
 &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} - \frac{1}{2\alpha\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}e^{-(2\alpha+\beta)t}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando constantes, la cantidad de contaminante en cada hemisferio resulta:

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= p_1e^{-\beta t} + q_1e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_1 \\
 c_2(t) &= p_2e^{-\beta t} + q_2e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_2,
 \end{aligned}$$

donde  $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2$  y  $r_2$ , son constantes que dependen sólo de  $c_1^0, c_2^0, f_1, f_2, \alpha$  y  $\beta$ .

Es interesante notar que después de un tiempo suficientemente largo, se llega a un equilibrio en las cantidades de contaminación. Para el hemisferio Norte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = r_1 = \frac{(\alpha + \beta)f_1 + \alpha f_2}{\beta(2\alpha + \beta)}$$

y para el hemisferio Sur

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = r_2 = \frac{\alpha f_1 + (\alpha + \beta)f_2}{\beta(2\alpha + \beta)}.$$

□

**5.5. Sistemas lineales de orden 2.** En muchos problemas físicos nos encontramos con sistemas de cuerpos que sus fuerzas ejercidas solo dependen de la posición de cada cuerpo (por ejemplo en los osciladores acoplados en condiciones ideales).

Por lo que obtenemos un sistema lineal del tipo:

$$\begin{cases} X''(t) &= AX(t) \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistemas se puede agregar variables ( $y_j = x_j$ ) agregando dimensiones al sistema lineal, pero si además la matriz  $A$  es diagonalizable, el sistema se puede resolver sin la necesidad de agregar dimensiones. Notemos que si  $A$  es diagonalizable, luego  $\exists P, D \in M_{n \times n}$  con  $D$  matriz diagonal tal que  $A = PDP^{-1}$ , luego la EDO puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} X''(t) &= AX(t) \\ &= PDP^{-1}X(t) \\ \Rightarrow P^{-1}X''(t) &= DP^{-1}X(t), \text{ Sea } Y(t) = P^{-1}X(t) \\ \Rightarrow Y''(t) &= DY(t) \end{aligned}$$

Este ultimo sistema es mucho más fácil de resolver, pues al ser  $D$  diagonal entonces si  $(\lambda_i)_{i=1}^m$  son los valores propios de  $A$ , entonces el sistema:

$$Y''(t) = DY(t) \Rightarrow y_j'' = \lambda_j y_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

donde  $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$ , estas ultimas  $n$  ecuaciones se pueden resolver usando los métodos vistos en los capítulos anteriores (son EDOs lineales de orden 2).

## Capítulo 6

## Análisis cualitativo de sistemas no lineales

Muchos fenómenos de la naturaleza se comportan de forma un poco más complicada que un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se suele utilizar la aproximación de la Ley de Hooke  $F = -kx$  para modelar resortes, aunque en realidad esta fuerza suele tener otras componentes de orden no lineal, pero que habitualmente son despreciables. En general estas ecuaciones presentan grandes desafíos, pues es bastante complicado encontrarles soluciones explícitas. Sin embargo, muchas veces se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones, que nos indique sobre el comportamiento general del sistema no lineal.

Dados un intervalo abierto  $I$  y una función  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  en  $t_0 \in I$ :

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Si la función  $F$  no es lineal con respecto a la variable  $X$ , se dirá que es un *sistema no lineal* (SNL). Si además  $F$  no depende explícitamente de la variable  $t$ , se dirá que es un *sistema no lineal autónomo* (SNLA). Generalmente un (SNLA) corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Estos sistemas son invariantes bajo traslaciones temporales (variable  $t$ ). En particular, si  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución del sistema entonces la función  $X_c : I_c \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $X_c(t) = X(t - c)$  también lo es. Aquí  $I_c$  denota el intervalo  $I$  desplazado hacia la derecha en  $c$ .

El vector  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ , que es la solución del sistema en un punto  $t \in I$ , se llama *vector de estado*.

OBSERVACIÓN. Dada una función  $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , toda ecuación de orden superior de la forma

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

se puede llevar, mediante un cambio de variables, a la forma (SNL). Claramente, si  $h$  no depende explícitamente de  $t$ , se puede llevar a la forma (SNLA). Esto se puede realizar de la siguiente manera:

Tenemos que  $y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  y  $(y^{(j)})' = y^{(j+1)} \quad \forall j \in \{0, \dots, n-2\}$ , luego haciendo el cambio de variable  $y^{(j)} = x_j$ , con esto obtenemos el siguiente (SNL) :

$$\begin{cases} x'_{n-1} = h(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ x'_j = x_{j+1} \quad \forall j \in \{0, \dots, n-2\} \end{cases}$$

EJEMPLO 6.1 (El péndulo simple amortiguado). Un péndulo simple sometido a un ambiente con roce (por ejemplo aire, agua, aceite, etc.) y a una fuerza externa, queda descrito por la siguiente ecuación de movimiento de segundo orden:

$$\begin{aligned} m\theta'' + c\theta' + \frac{mg}{L}\sin(\theta) &= f(t) \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= \theta'_0, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical y  $c$  el coeficiente de roce, producto de una fuerza de roce viscoso lineal:  $\vec{F}_{roce} = -c\vec{v}$ , donde  $v = L\theta'$ . Haciendo el cambio de variables:  $x = \theta$ ,  $y = \theta'$ , la ecuación anterior toma la forma de (SNL):

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) + f(t). \end{aligned}$$

La no linealidad se aprecia claramente en el término  $\sin(\theta)$  pues

$$\sin(\lambda\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2).$$

El (SNLA) del péndulo corresponde al caso en que no hay forzamiento externo:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6.2 (Atractor de Lorenz). El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fue un modelo desarrollado por Lorenz, que en principio se proponía tratar de comprender los fenómenos meteorológicos. El modelo que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección. Las ecuaciones que describen este proceso son:

$$\begin{cases} x' &= s(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz, \end{cases}$$

donde  $x$  que representa el flujo convectivo;  $y$ , la distribución horizontal de temperaturas; y  $z$  la distribución vertical de temperaturas. Además, tenemos tres parámetros que intervienen en las ecuaciones:  $s$  es el cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica;  $r$ , la diferencia de temperaturas entre la capas inferior y superior; y  $b$  el cociente entre la altura y el ancho del rectángulo. Este es un modelo muy importante que tiene muchas propiedades interesantes, pero por ahora sólo notamos que es un sistema autónomo, pero no lineal, pues aparecen los términos  $xy$  y  $xz$ . □

### 1. Sistemas no lineales y sistemas linealizados

De aquí en adelante nos restringiremos a problemas en dos dimensiones y autónomos de la forma (SNLA):

$$\begin{cases} x' &= F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' &= G(x, y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con  $F$  y  $G$  funciones continuamente diferenciables. El Teorema 5.4 garantiza que siempre tendremos una única solución local.

Decimos que  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un **punto crítico** o **de equilibrio** del (SNLA) si

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ G(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Se llama **nulclina en  $x$**  a la curva definida por  $F(x, y) = 0$  y **nulclina en  $y$**  a la curva definida por  $G(x, y) = 0$ .

Los puntos críticos son las intersecciones de las nulclinas. El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Si hacemos una expansión de Taylor en el (SNLA) en torno a un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$ , resulta:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ G(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_G(r), \end{aligned}$$

donde  $r = (x, y) - (\bar{x}, \bar{y})$  (recordemos que  $F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ). Además

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_F(r)}{\|r\|} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_G(r)}{\|r\|} = 0.$$

Para simplificar la notación definimos

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{y} \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y});$$

constantes que dependen del punto crítico. Notamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde  $J$  es la matriz Jacobiana de la función

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$$

evaluada en el punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Ahora, si reemplazamos en (SNLA) queda:

$$(SNLA) \quad \begin{cases} x' &= a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ y' &= c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) + h_G(r). \end{cases}$$

Consideramos el *sistema linealizado*

$$(SL) \quad \begin{cases} x' &= a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \\ y' &= c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}). \end{cases}$$

Un sistema  $(SNLA)$  es *degenerado* en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$  si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ . Un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  de  $(SNLA)$  es **aislado** si existe  $\delta > 0$  tal no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  y radio  $\delta$ . De lo contrario se dice que los puntos críticos son *densos en torno a*  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

PROPIEDADES 6.1. Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de  $(SNLA)$ .

1. Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es el único punto crítico de  $(SL)$ . En particular es aislado para  $(SL)$ .
2. Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ , entonces los puntos críticos de  $(SL)$  son densos en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Más precisamente, el conjunto  $\mathcal{C}$  es una recta que contiene a  $(\bar{x}, \bar{y})$  si  $J(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0_{2 \times 2}$  y es todo el plano si  $J(\bar{x}, \bar{y}) = 0_{2 \times 2}$ .
3. Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un punto crítico aislado de  $(SNLA)$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que  $(x, y)$  es punto crítico de  $(SL)$  si, y sólo si,

$$\begin{cases} a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) &= 0 \\ c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) &= 0. \end{cases}$$

Es decir, si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = V_0,$$

donde  $V_0$  es un vector constante que depende de  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

1. Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$  el sistema tiene solución única  $(\bar{x}, \bar{y})$ .
2. Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$  el sistema tiene infinitas soluciones, que forman una recta si  $J(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$  y todo el plano si  $J(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ .
3. Por contradicción, supongamos que para cada  $\delta > 0$  existe otro punto crítico  $(\bar{w}, \bar{z})$  de  $(SNLA)$  tal que  $|(\bar{x}, \bar{y}) - (\bar{w}, \bar{z})| < \delta$ . Por definición,

$$\begin{cases} a(\bar{w} - \bar{x}) + b(\bar{z} - \bar{y}) + h_F(\bar{r}) &= 0 \\ c(\bar{w} - \bar{x}) + d(\bar{z} - \bar{y}) + h_G(\bar{r}) &= 0, \end{cases}$$

donde  $\bar{r} = (\bar{w}, \bar{z}) - (\bar{x}, \bar{y})$ . De manera equivalente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$  tenemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Tomando norma y acotando obtenemos

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{h_F(\bar{r})^2 + h_G(\bar{r})^2} \\ 1 &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{\left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{h_G(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2}. \end{aligned}$$



Pero el lado derecho tiende a cero cuando  $\bar{r} \rightarrow 0$ , con lo que llegamos a una contradicción.  $\square$

En resumen, un sistema que no es degenerado en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$  cumple que  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un punto crítico aislado de  $(SNLA)$  y es el único punto crítico de  $(SL)$ . El Ejemplo 6.5 muestra que el recíproco del punto 3 es falso en general.

EJEMPLO 6.3 (Conejos y ovejas). Supongamos un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales que luchan por recursos en un hábitat reducido:

$$\begin{cases} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy, \end{cases}$$

donde  $x$  es la población de conejos e  $y$  la de ovejas. Los puntos críticos de este sistema se encuentran resolviendo:

$$\begin{cases} x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ y(42 - 3y - 2x) = 0. \end{cases}$$

Tenemos varios casos:

- Si  $x = 0$  obtenemos los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 14)$ .
- Si  $y = 0$  obtenemos  $(0, 0)$  y  $(20, 0)$ .
- Si  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  nos queda el sistema  $\begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ 3y + 2x = 42, \end{cases}$  cuya única solución es  $(12, 6)$ .

Tenemos entonces que  $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}$ , conjunto que muestra las posibilidades de equilibrio entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden coexistir ambas especies es  $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$ . En los demás casos, al menos una de las especies se extingue. Aun así, todas son soluciones de equilibrio. El Jacobiano

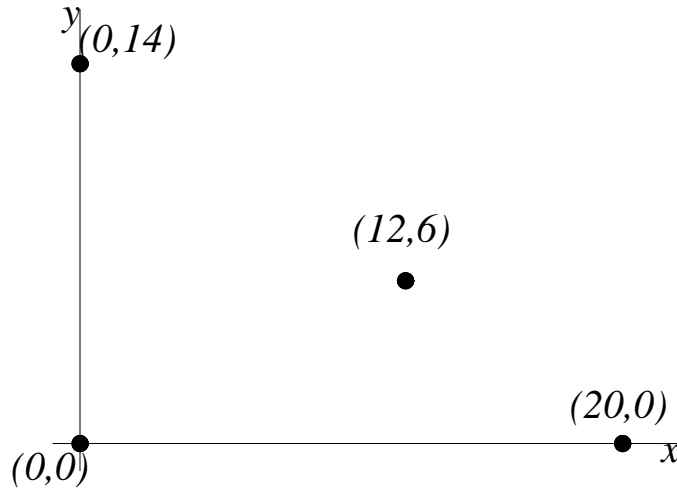


FIGURA 1. Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas

en este caso está dado por:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Evaluando el Jacobiano en cada punto crítico encontramos los respectivos sistemas linealizados:

1.  $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$  es invertible. El sistema linealizado alrededor de  $(0, 0)$  es

$$(SL)_1 \begin{cases} x' &= 60(x - 0) + 0(y - 0) \\ y' &= 0(x - 0) + 42(y - 0). \end{cases}$$

2.  $J(20, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  también es invertible y

$$(SL)_2 \begin{cases} x' &= -60(x - 20) - 80(y - 0) \\ y' &= 0(x - 20) + 2(y - 0). \end{cases}$$

3.  $J(0, 14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$  también lo es y

$$(SL)_3 \begin{cases} x' &= 4(x - 0) + 0(y - 14) \\ y' &= -28(x - 0) - 42(y - 14). \end{cases}$$

4. Finalmente,  $J(12, 6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$  es invertible y

$$(SL)_4 \begin{cases} x' &= -36(x - 12) - 48(y - 6) \\ y' &= -12(x - 12) - 18(y - 6). \end{cases}$$

Así, el modelo no es degenerado en torno a cada uno de sus puntos críticos.  $\square$

EJEMPLO 6.4. Habíamos visto que las ecuaciones de un péndulo sin forzamiento están dadas por

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{cases}$$

Sus puntos críticos satisfacen

$$\begin{cases} 0 &= \bar{y} \\ 0 &= -\frac{c}{m}\bar{y} - \frac{g}{L}\sin(\bar{x}), \end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

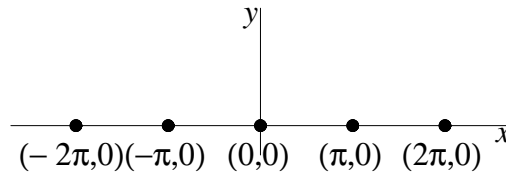


FIGURA 2. Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal

El Jacobiano es

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

que es invertible. El sistema linealizado en torno al origen es

$$(SL) \begin{cases} x' &= 0(x-0) + 1(y-0) \\ y' &= -\frac{g}{L}(x-0) - \frac{c}{m}(y-0) \end{cases}$$

y tiene sólo un punto crítico.  $\square$

EJEMPLO 6.5. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3. \end{cases}$$

Vemos que  $(0,0)$  es un punto crítico aislado de este sistema. Sin embargo

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, este sistema es degenerado en torno al  $(0,0)$ . Si intentamos hacer la linealización en torno a  $(0,0)$  obtenemos

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0, \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , como asegura la Proposición 6.1.  $\square$

EJEMPLO 6.6. Consideremos el  $(SNLA)$

$$\begin{cases} x' = 3x + x^2 + 2y + y^2 \\ y' = 6x - x^2 + 4y + y^2. \end{cases}$$

Claramente el punto  $(0,0)$  es un punto crítico. Para ver que es el único (y por tanto es aislado) se puede tratar de resolver explícitamente el sistema, pero esto resulta un poco engorroso. Dado que cada ecuación representa una cónica, otra forma de buscar puntos críticos es analizar el gráfico. Si completamos cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 &= \frac{13}{4} \\ -(x-3)^2 + (y+2)^2 &= -5, \end{aligned}$$

que corresponden a una circunferencia y una hipérbola, respectivamente. El bosquejo del gráfico se puede ver en la Figura 3.

Para ver que en  $(0,0)$  las dos curvas efectivamente son tangentes como sugiere el gráfico, calculemos la derivada en dicho punto:

$$\begin{aligned} 3 + 2x + 2y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{3+2x}{2(1+y)} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2} \\ 6 - 2x + 4y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-3}{2+y} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La matriz jacobiana está dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 2x & 2 + 2y \\ 6 - 2x & 4 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{y luego} \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

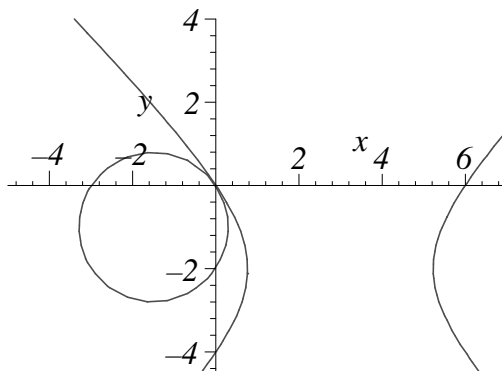


FIGURA 3. Intersección de Cónicas

que no es invertible. Por lo tanto el sistema es degenerado. El sistema linealizado en torno a  $(0, 0)$  es

$$\begin{cases} x' &= 3x + 2y \\ y' &= 6x + 4y, \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3}{2}x\}$ . Aquí el punto  $(0, 0)$  tampoco es aislado.  $\square$

## 2. Diagramas de fase y de flujo

Dado el (SNLA)

$$\begin{cases} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y) \end{cases}$$

con condición inicial  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ , a la solución del problema de Cauchy se le llama **trayectoria que parte de**  $(x_0, y_0)$ . Más precisamente, es la función

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: I_0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)), \end{aligned}$$

donde  $I_0$  es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad). El **recorrido**  $\mathcal{R}$  de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función  $\mathcal{T}$ . Es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I_0\}.$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Un **diagrama de fases** de este sistema autónomo es a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales. El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama **plano de fase**. El interés de los diagramas de fase es que al eliminar el tiempo de las ecuaciones, obtenemos gráficos en 2 dimensiones en lugar de 3, lo que hace más fácil su estudio. Por otra parte, al señalar el sentido de recorrido podemos conocer muchas propiedades, en particular asíntotas, de las trayectorias.

Una consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad es la siguiente

PROPOSICIÓN 6.1. *Si dos trayectorias se intersectan, entonces sus recorridos coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Si dos trayectorias  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  se intersectan como en la Figura 4, entonces existen  $t_1, t_2$  tales que

$$(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)).$$

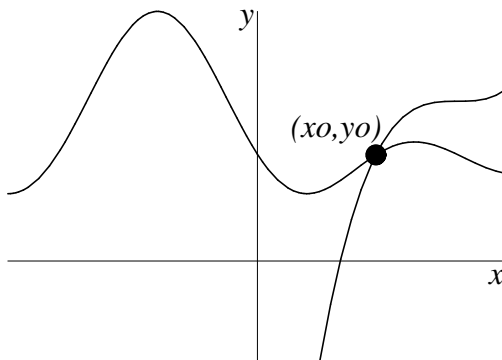


FIGURA 4. Intersección de Recorridos

Denotamos este punto por  $(x_0, y_0)$ . La trayectoria  $\mathcal{T}_3$  definida por  $(x_3(t), y_3(t)) = (x_2(t + t_2 - t_1), y_2(t + t_2 - t_1))$  tiene el mismo recorrido que  $\mathcal{T}_2$  porque es una traslación en tiempo y el sistema es autónomo. Pero también tiene el mismo recorrido que  $\mathcal{T}_1$  porque es solución del mismo problema de Cauchy.  $\square$

Esto nos dice que las curvas en el diagrama de fase no se intersectan, de modo que una situación como la presentada en la Figura 4 es imposible.

EJEMPLO 6.7. Lo que sí se puede dar para dos trayectorias distintas, es que sus recorridos se confundan. Por ejemplo, tomemos la trayectorias:

$$(42) \quad (x_1(t), y_1(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (0, 1)$$

$$(43) \quad (x_2(t), y_2(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

Elevando al cuadrado cada componente y sumando vemos que ambas trayectorias satisfacen  $x^2 + y^2 = 1$ . También es fácil ver que recorren toda la circunferencia. Sin embargo lo hacen en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 5. Si queremos hacer que las dos trayectorias recorran la curva en el mismo sentido basta modificar (43) a

$$(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t)) = (\cos(t), -\sin(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

$\square$

El **diagrama de flujo** se construye al graficar en una colección de puntos  $(x, y)$  representativos el vector  $(F(x, y), G(x, y))$ . Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \text{y luego} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoria es tangente al flujo.

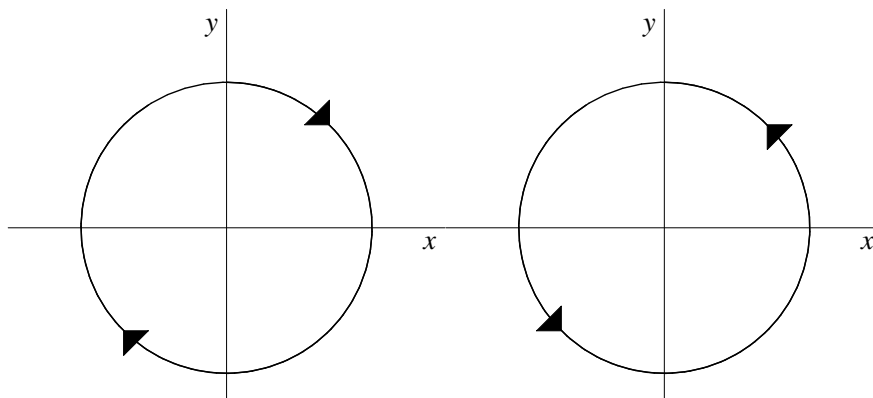


FIGURA 5. A la izquierda el recorrido orientado de (42) y a la derecha el de (43).

### 3. Clasificación de los puntos críticos

Los puntos críticos de un (SNLA) pueden ser de diferentes naturalezas. Un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  es **estable** si para cada  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  de manera que  $\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon$  para todo  $t$ , siempre que  $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$ . De lo contrario se dice que es **inestable**. En palabras, un punto crítico es estable si las trayectorias que parten cerca de él se mantienen cerca.

Por otra parte, un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  es **asintóticamente estable** si es estable y además existe  $\delta > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{siempre que } \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta.$$

Notemos que no todo punto estable es asintóticamente estable.

EJEMPLO 6.8. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -ky, \end{cases}$$

donde  $k$  es una constante no nula, con condiciones iniciales:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , que tiene como solución:

$$(44) \quad \begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-kt}. \end{cases}$$

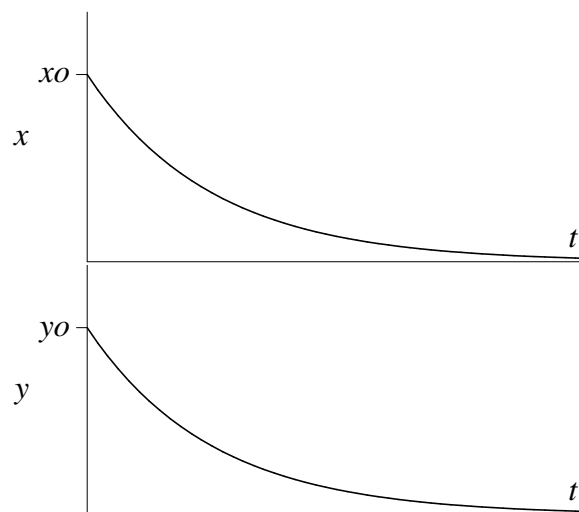
Así tenemos una solución  $(x(t), y(t))$  que depende de  $(x_0, y_0)$ . Para distintos valores de  $k$ , esta solución tiene distintas formas.

Si tomamos  $k = 1$ , resultan las soluciones

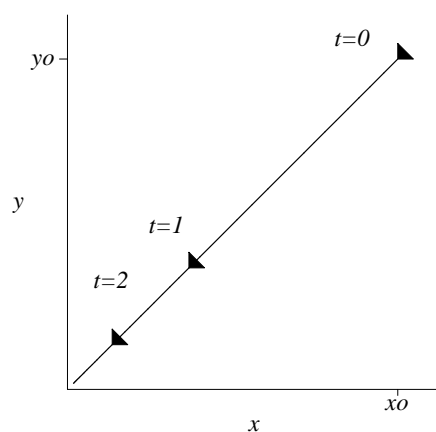
$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones

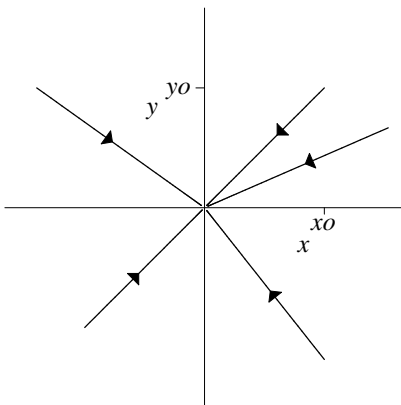
$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t),$$

FIGURA 6. Soluciones de (44) para  $k > 0$ .

que representan rectas de pendiente  $\frac{y_0}{x_0}$ , cuyo gráfico en el plano  $XY$  queda ilustrado en la Figura 7, donde las flechas indican el sentido positivo del tiempo. Cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos que  $(x(t), y(t)) \rightarrow 0$ .

FIGURA 7. Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases  $XY$ 

Si graficamos las soluciones para diferentes valores positivos y negativos de  $x_0$  y de  $y_0$  construimos el diagrama de fase de la Figura 8, donde se aprecia claramente que todas las soluciones concurren al origen. Esta característica hace que este punto crítico sea asintóticamente estable.

FIGURA 8. Diagrama de fase completo para  $k = 1$ 

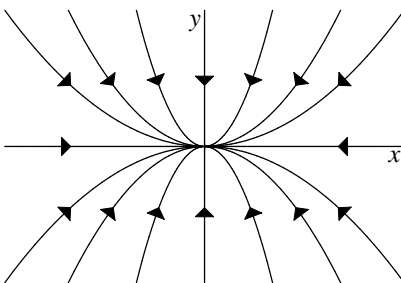
Ahora, si cambiamos el parámetro a  $k = 2$ , resulta

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-2t}, \end{cases}$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$  las soluciones también se acercan al origen. Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazando en la segunda vemos que

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2(t).$$

El diagrama de fases se muestra en la Figura 9. Las soluciones se mueven a lo largo de parábolas y el origen sigue siendo asintóticamente estable.

FIGURA 9. Diagrama de fase para  $k = 2$ 

Analicemos ahora el caso  $k = -1$ . Esta vez

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^t. \end{cases}$$

Al multiplicar ambas ecuaciones y despejar  $y$  obtenemos

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$



de modo que las soluciones se mueven a lo largo de hipérbolas cuando  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$ . Además notamos que cuando  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow 0$ , mientras que  $y \rightarrow \pm\infty$  según el signo de  $y_0$ . En este caso el origen deja de ser estable.

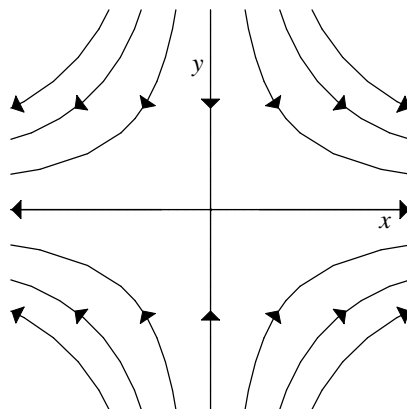


FIGURA 10. Diagrama de fase para  $k = -1$

□

Se dice que una trayectoria  $t \mapsto (x(t), y(t))$  **converge** o **tiende** al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}.$$

Análogamente se define la convergencia cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Las trayectorias pueden converger de distintas formas, como se muestra en la Figura 11. Hay una gran diferencia geométrica: en el gráfico izquierdo de la Figura 11, la trayectoria se aproxima al origen sin una dirección específica, a diferencia del gráfico derecho, donde claramente tiende a una dirección fija cuando se acerca al origen. Si además de converger al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}},$$

entonces se dice que la trayectoria **entra** al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  tangente a una semirrecta de pendiente  $l$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . De la misma forma, si además de converger al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

se dice que la trayectoria **sale** del punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  tangente a una semirrecta de pendiente  $l$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Un punto crítico aislado  $(\bar{x}, \bar{y})$  se llama **nodo** si todas las trayectorias vecinas, o bien entran al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , o bien salen de él.

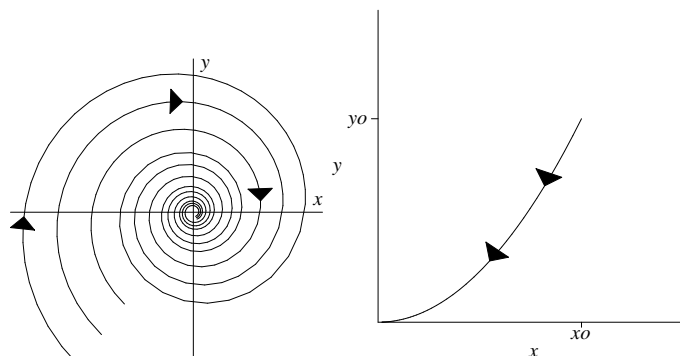


FIGURA 11. Trayectorias que convergen al origen

EJEMPLO 6.9. Para el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ya sabemos que las trayectorias convergen a  $(0,0)$ . Además, cualquier trayectoria vecina que tenga una condición inicial  $(x_0, y_0)$ , tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 e^{-t} - 0}{x_0 e^{-t} - 0} = \frac{y_0}{x_0},$$

de modo que entra tangente a una semirrecta de pendiente  $y_0/x_0$  (vertical si  $x_0 = 0$ ). Por lo tanto  $(0,0)$  es efectivamente un nodo.  $\square$

EJEMPLO 6.10. En el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$$

también se tiene que el punto crítico  $(0,0)$  es un nodo. Todas las trayectorias entran al nodo con pendiente  $l = 0$  salvo aquellas que parten de algún punto sobre el eje  $OY$ , que entran con pendiente vertical.  $\square$

Un punto crítico aislado  $(\bar{x}, \bar{y})$  se llama **punto silla** si existen dos trayectorias que entran a él tangentes a semirrectas opuestas y dos que salen de la misma forma. Las restantes trayectorias no convergen a  $(\bar{x}, \bar{y})$  y tienen como asíntotas a las semirrectas antes mencionadas.

EJEMPLO 6.11. En el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y, \end{cases}$$

el origen es punto silla (ver Figura 12).  $\square$

Diremos que un punto crítico es punto **espiral** si todas las trayectorias en una vecindad del punto convergen pero no entran cuando  $t \rightarrow \infty$ , o convergen pero no salen cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Un punto crítico es un **centro** si todas las trayectorias en

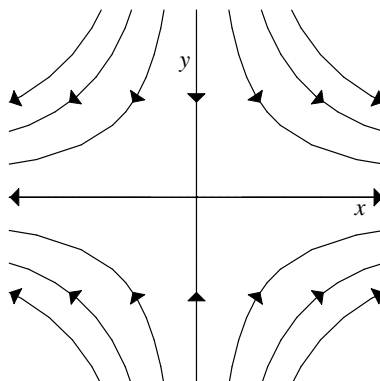


FIGURA 12. Punto silla

una vecindad del punto son cerradas y existen trayectorias arbitrariamente cerca del punto.

EJEMPLO 6.12. Consideremos el sistema

$$(45) \quad \begin{cases} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y, \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  dadas, que tiene claramente el único punto crítico  $(0, 0)$ . Este es un sistema lineal de matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego  $A$  es diagonalizable y  $A = PDP^{-1}$ , donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,  $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$  y

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}e^{\beta t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}e^{-\beta t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en un ángulo  $\beta t$ , mientras que  $e^{\alpha t}$  es un factor de escala.

Finalmente, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para bosquejar los diagramas de fase del sistema, sólo es necesario considerar los signos de  $\alpha$  y  $\beta$ . La trayectoria se aleja del origen si  $\alpha > 0$  pues  $e^{\alpha t}$  es creciente. Si  $\alpha < 0$ , la trayectoria se acerca. Por otra parte, la rotación ocurre en sentido horario si  $\beta > 0$  y antihorario si  $\beta < 0$  (ver Figuras 13, 14, 15).

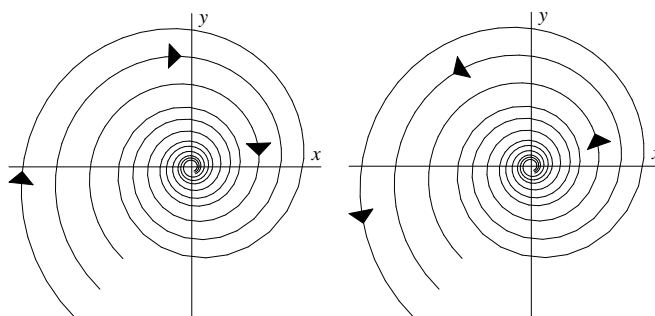


FIGURA 13. Diagrama de fase del sistema (45). A la izquierda  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ , y a la derecha  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ .

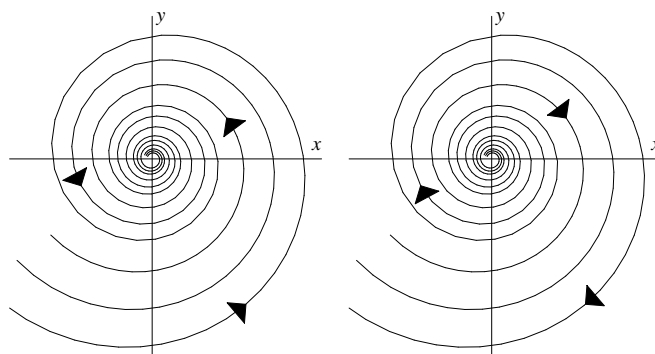


FIGURA 14. Diagrama de fase del sistema (45). A la izquierda  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ , y a la derecha  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Si  $\alpha = 0$  el módulo de  $(x(t), y(t))$  permanece constante por lo que la trayectoria define circunferencias. Si  $\beta = 0$  no hay rotación y las soluciones se mueven a lo largo de rectas por el origen.

Las Figuras 13, 14 y 15 nos dicen también las características de estabilidad del punto crítico  $(0, 0)$ : si  $\alpha < 0$  es un punto espiral asintóticamente estable; si  $\alpha > 0$  es un punto espiral inestable; si  $\alpha = 0$  es un centro estable. Si  $\beta = 0$  es un nodo (estable o inestable según el signo de  $\alpha$ ).  $\square$

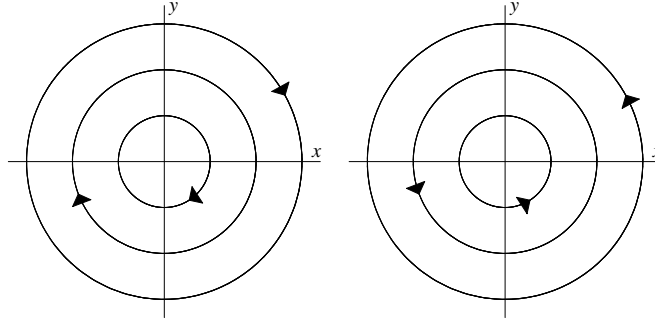


FIGURA 15. Diagrama de fase del sistema (45) para  $\alpha = 0$ . A la izquierda  $\beta > 0$ , y a la derecha  $\beta < 0$ .

#### 4. Puntos críticos de sistemas lineales

Nos interesa estudiar ahora con profundidad los sistemas linealizados, puesto que Henri Poincaré demostró que bajo las hipótesis adecuadas, si se logra clasificar cualitativamente un punto crítico, por ejemplo en términos de nodo, espiral, etc., entonces estas mismas características se mantendrán en el sistema original no lineal. Y por otra parte, Alexander Liapunov demostró que bajo ciertas hipótesis, se conservaba la estabilidad asintótica de los puntos críticos al linealizar. Por esta razón, ahora nos concentraremos en los sistemas lineales y pospondremos un momento el enunciado exacto de estos teoremas.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer como punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$  (si este no fuera el caso, basta efectuar una traslación), y entonces consideramos el sistema lineal:

$$(46) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ , y con  $ad - bc \neq 0$ , para que de esta forma el punto  $(0, 0)$  sea el único punto crítico del sistema (y sea aislado).

Tomamos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$ . Recordemos que una matriz invertible no tiene al cero como valor propio. Luego  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ . Pueden ocurrir los siguientes casos:

##### A. Casos Principales:

1.  $\lambda_1, \lambda_2$  reales distintos pero de igual signo.
2.  $\lambda_1, \lambda_2$  reales distintos y de distinto signo.
3.  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos (conjugados), con parte real no nula.

##### B. Casos Frontera:

1.  $\lambda_1, \lambda_2$  reales e iguales.
2.  $\lambda_1, \lambda_2$  imaginarios puros (conjugados).

Examinaremos por separado cada uno de los casos descritos arriba.

**A. Casos Principales:**

En todos estos casos los valores propios son distintos, por ende la matriz es diagonalizable, es decir, se puede escribir de la forma  $A = PDP^{-1}$ , con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2),$$

donde  $v_1, v_2$  son los vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. De esta forma la solución del sistema lineal es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, el problema se desacopla en estas nuevas coordenadas  $\tilde{x}, \tilde{y}$  introducidas por las direcciones de los vectores propios (llamadas también **direcciones propias**). Resulta simplemente

$$\begin{cases} \tilde{x} &= e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} &= e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0. \end{cases}$$

Observemos que si, por ejemplo,  $\lambda_1 < 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = 0.$$

Si  $\lambda_1 > 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = \pm\infty,$$

donde el signo de  $\pm\infty$  está dado por el signo de la condición inicial. El mismo argumento es válido para  $\lambda_2$ .

Si queremos estudiar el diagrama de fase, eliminamos la variable  $t$  de las ecuaciones anteriores y obtenemos

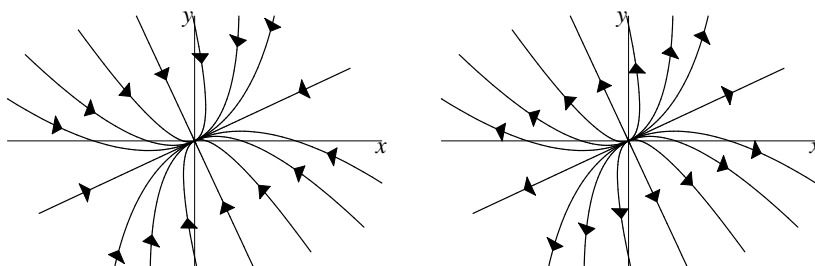
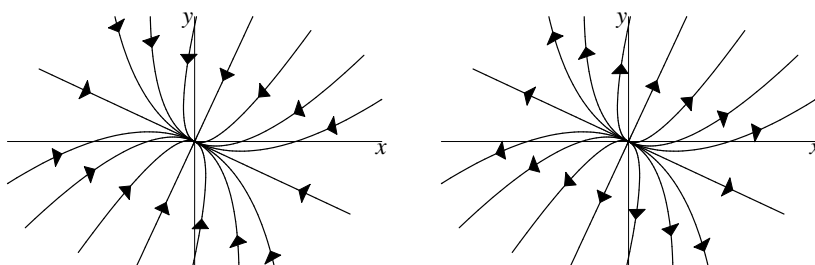
$$\tilde{y} = c_0 \tilde{x}^{\lambda_2/\lambda_1},$$

donde  $c_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0^{\lambda_2/\lambda_1}}$  es una constante.

**A.1.  $\lambda_1, \lambda_2$  reales distintos de igual signo.**

Sólo hay dos casos:  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  o  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ . El bosquejo del diagrama de fases para el caso  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  se tiene en la Figura 16. En el gráfico de la izquierda, para  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , el origen es inestable.

Para el caso  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ , se tiene la Figura 17. En el gráfico de la izquierda, para  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ , el origen es inestable.

FIGURA 16. Diagramas de fase de (46) para  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ .FIGURA 17. Diagramas de fase de (46) para  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ .

Como conclusión tenemos que en ambos casos el punto  $(0,0)$  es un nodo. Si los valores propios son negativos, es asintóticamente estable; si son positivos, entonces es inestable. Además, vemos que en general para el caso de valores propios reales distintos de igual signo, los recorridos de las trayectorias son siempre tangentes a la recta dada por la dirección del vector propio asociado al valor propio *de menor módulo*.

En efecto:

- $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow$  recorrido tangente a  $v_1$ .
- $|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Rightarrow$  recorrido tangente a  $v_2$ .

#### A.2. $\lambda_1, \lambda_2$ reales con distinto signo.

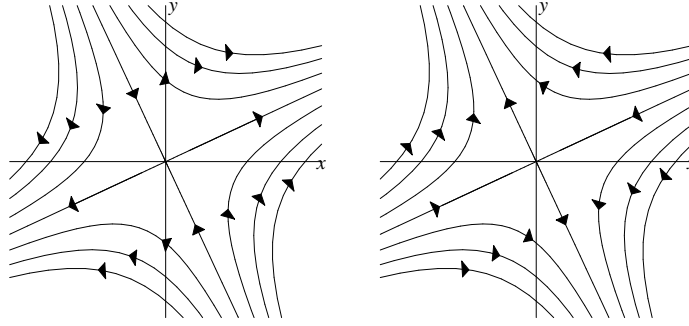
Los diagramas de fase serán los de la Figura 18. El punto crítico es un punto silla, que por supuesto es inestable. Las trayectorias entran en la dirección propia asociada al valor propio negativo y salen en la dirección propia asociada al valor propio positivo.

**EJEMPLO 6.13** (Continuación de conejos y ovejas). Volvamos al ejemplo de los conejos compitiendo con las ovejas:

$$\begin{cases} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy &\equiv F(x, y) \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy &\equiv G(x, y). \end{cases}$$

Sabemos que

$$\mathcal{C} = \{(0,0), (0,14), (20,0), (12,6)\}.$$

FIGURA 18. Diagramas de fase de (46) para  $\lambda_2$  y  $\lambda_1$  de signos distintos.

Vimos que este sistema no era degenerado entorno a ninguno de estos cuatro puntos críticos, que ahora clasificaremos con respecto al sistema linealizado. Ya habíamos evaluado el jacobiano en cada punto crítico:

1.  $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ . Sus valores propios son  $\lambda_1 = 60$  y  $\lambda_2 = 42$ , por lo que se trata de un nodo inestable. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección  $v_2$  (salvo los 2 que son tangentes a  $v_1$ ).

2.  $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Sus valores propios son  $\lambda_1 = -60$  y  $\lambda_2 = 2$ , por lo que éste es un punto silla. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix},$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección  $v_1$ .

3.  $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ . Sus valores propios son  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = -42$ , por lo que éste también es un punto silla. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección  $v_2$ .

4.  $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ . Sus valores propios son  $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52,6$  y  $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1,4$  por lo que el punto crítico  $(12,6)$  es un nodo asintóticamente estable. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 - \sqrt{73} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección  $v_2$  (salvo los 2 que son tangentes a  $v_1$ ).



En conclusión tenemos que en el punto  $(0, 0)$  donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos  $(20, 0)$  y  $(0, 14)$ . El punto  $(12, 6)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto  $(12, 6)$ . Podemos hacer ahora un esbozo del diagrama de fases.

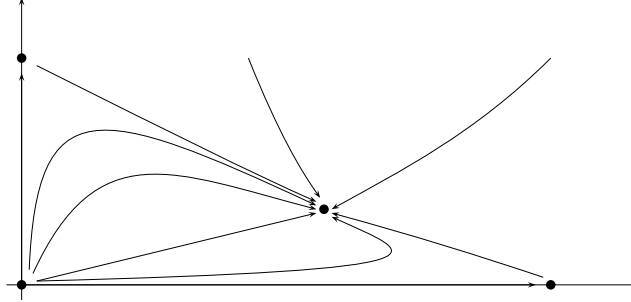


Diagrama de fases del modelo de conejos y ovejas.

□

**A.3.**  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados, con parte real no nula, esto es

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta \neq 0.$$

Esto es equivalente (salvo cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \tilde{x}' &= \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \\ \tilde{y}' &= -\beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y} \end{cases}$$

pues las matrices  $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , tienen igual polinomio característico. Ya habíamos analizado este caso en el Ejemplo 6.12. Vimos que el origen es un punto espiral asintóticamente estable si  $\alpha < 0$  y un espiral inestable si  $\alpha > 0$ .

Notemos que dado que hay un cambio de base, se pierde la información del sentido del giro y ya no se puede deducir de los valores o vectores propios. Para determinar el sentido del giro, lo más fácil es calcular el flujo directamente del sistema original en algunos puntos estratégicos.

**EJEMPLO 6.14** (Péndulo no lineal). Ahora que tenemos más herramientas, seguiremos con el ejemplo del péndulo no lineal. El sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) \end{cases}$$

tiene puntos críticos  $\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , y el Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

por tanto los valores propios dependerán de la paridad de  $k$ .

**$k$  impar:** Tenemos que  $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda - \frac{g}{L} = 0$ , de donde

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{g}{L}}.$$

Puesto que todas las constantes son positivas tenemos dos valores propios reales de distinto signo. Los puntos críticos resultan ser puntos sillas inestables.

**$k$  par:** Aquí  $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{g}{L} = 0$  y luego

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}.$$

Analicemos por casos el signo de la cantidad subradical:

1. *Sobreamortiguado:* El caso  $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{L}$  nos entrega dos valores propios reales distintos, ambos negativos, por lo que los puntos críticos  $(k\pi, 0)$  resultan nodos asintóticamente estables.
2. *Subamortiguado:* El caso  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$  nos entrega dos valores propios complejos conjugados, por lo que los puntos críticos  $(k\pi, 0)$  resultan puntos espirales, que además son asintóticamente estables pues  $\alpha = -\frac{c}{2m} < 0$ . Este caso corresponde al más común, que ocurre cuando el coeficiente de roce es pequeño (notar que  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$  si, y sólo si,  $c < 2m\sqrt{\frac{g}{L}}$ ). El sentido de giro de las espirales se puede determinar calculando el flujo en algunos puntos vecinos (ver flechas en la Figura 19).

Notemos que si el péndulo está en posición vertical hacia arriba, que corresponde a los puntos  $k$  impar, está en un equilibrio inestable. Intuitivamente, si en esta posición lo perturbamos ligeramente, el péndulo oscila hasta la posición vertical hacia abajo, que son los puntos espirales asintóticamente estables con  $k$  par (ver situación cerca de  $(\pi, 0)$  en la Figura 19).

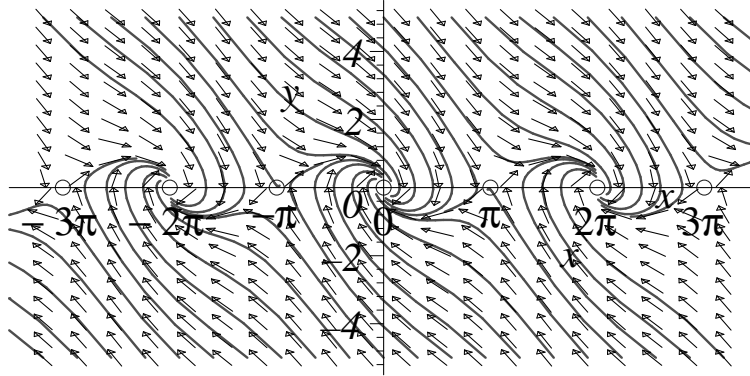


FIGURA 19. Diagramas de fase del péndulo subamortiguado.

3. *Críticamente amortiguado:* El caso  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$  nos entrega un sólo valor propio real negativo de multiplicidad doble. Este caso aún no lo hemos analizado, pero lo analizaremos a continuación (corresponde a un nodo en  $S$ ).

□

**B. Casos Frontera.****B.1.** Un sólo valor propio  $\lambda$  con multiplicidad 2.

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{cases}$$

con la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  no es necesariamente diagonalizable (pues tiene el valor propio repetido), pero siempre se puede llevar a su forma canónica de Jordan  $A = PJP^{-1}$ , donde  $J$  puede tener uno o dos bloques. En el caso de tener dos bloques, la matriz es diagonalizable, con

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y de aquí} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Luego, la ecuación en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados  $v_1, v_2$  es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} &= e^{\lambda t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} &= e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

El diagrama de fase de este caso ya es bien conocido del comienzo del capítulo (ver Figura 8 para caso  $\lambda < 0$ ). El punto crítico será un nodo asintóticamente estable si el valor propio es negativo y un nodo inestable si es positivo. Este tipo de nodos se denomina nodos estrella.

Si la matriz no es diagonalizable, tenemos:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y entonces} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma el sistema en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados  $v_1, v_2$ , es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} &= e^{\lambda t} \tilde{x}_0 + te^{\lambda t} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y} &= e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

De aquí se tiene que si  $\lambda < 0$  resulta un nodo asintóticamente estable, y si  $\lambda > 0$ , es un nodo inestable. De hecho, de la segunda ecuación se puede despejar  $t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right)$ . Reemplazando en la primera obtenemos

$$\tilde{x} = \tilde{y} \left( \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right).$$

Pero esta función es difícil de graficar. Una estrategia es notar primero que las trayectorias con  $\tilde{y}_0 = 0$  se mantienen sobre el eje propio y que las trayectorias con  $\tilde{x}_0 = 0$  (por ejemplo si  $\lambda < 0$ ) decrecen (en módulo) exponencialmente en  $\tilde{y}$  y en  $\tilde{x}$  primero crecen en módulo (debido al factor  $t$ ) y luego decrecen (en módulo)

exponencialmente. Esto da trayectorias en forma de  $S$ . Además, dividiendo  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  se obtiene:

$$\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0 + t\tilde{y}_0}$$

que tiende a cero si  $t$  tiende a infinito así que las trayectorias resultan tangentes al eje propio cerca del origen. El análisis para  $\lambda > 0$  es similar. Este tipo de puntos críticos se denominan nodos en  $S$ . Son asintóticamente estables si  $\lambda < 0$  e inestables si  $\lambda > 0$ .

**B.2.**  $\lambda_1, \lambda_2$  imaginarios puros conjugados. Esto equivale (con un cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \beta\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= -\beta\tilde{x}. \end{cases}$$

Del Ejemplo 6.12 se tiene que el punto crítico es un centro y resulta ser estable.

Ahora que ya sabemos como se comporta el sistema lineal en función de sus valores propios, podemos resumir los resultados de este capítulo que llevamos hasta aquí en los que se conocen como los teoremas de Poincaré y Liapunov:

**TEOREMA 6.1** (Poincaré). *Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $J(\bar{x}, \bar{y})$ . El punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  en el (SNLA) será:*

- (i) *Un nodo si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  son distintos y tienen el mismo signo. En este caso además todas las trayectorias (excepto dos) son tangentes en  $(\bar{x}, \bar{y})$  a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.*
- (ii) *Un punto silla si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tienen distinto signo. En este caso además hay dos trayectorias convergentes a  $(\bar{x}, \bar{y})$  en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntotas las direcciones propias.*
- (iii) *Un punto espiral si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , con partes real e imaginaria distintas de cero.*

**TEOREMA 6.2** (Liapunov). *Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $J(\bar{x}, \bar{y})$ . El punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  en el (SNLA) será:*

- (i) *Asintóticamente estable si las partes reales son negativas.*
- (ii) *Inestable si alguno tiene parte real positiva.*

**OBSERVACIÓN.** Por simplicidad en los teoremas anteriores se ha hecho referencia a las trayectorias pero las afirmaciones de tipo geométrico se refieren en realidad a sus recorridos.

Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera. Por ejemplo, en el caso del péndulo críticamente amortiguado en que  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$ , el sistema linealizado tenía un sólo valor propio negativo, lo que correspondería a un nodo (en  $S$ ) asintóticamente estable en el sistema lineal, pero esto no nos permite saber exactamente qué comportamiento tiene el sistema no lineal. Volveremos

más adelante sobre este mismo punto cuando analicemos la energía de sistemas conservativos.

**4.1. El enfoque traza - determinante.** Consideremos el sistema lineal  $X'(t) = AX(t)$ , donde  $A \in M_{2 \times 2}(R)$  es una matriz invertible. El origen es el único punto crítico del sistema. Veremos cómo clasificarlo de acuerdo con las relaciones entre la traza y el determinante de  $A$ . Para simplificar la notación introducimos las variables

$$x = \text{tr}(A) \quad \text{e} \quad y = \det(A)$$

que determinan el *plano traza - determinante*.

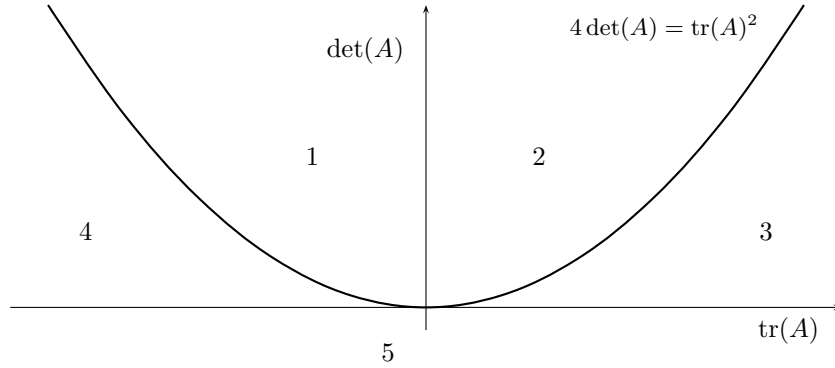
El polinomio característico de la matriz  $A$  es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Sus raíces son

$$\lambda = \frac{-\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Las raíces son reales sobre la parábola  $4\det(A) = \text{tr}(A)^2$ . Con la notación dada arriba esto es  $4y = x^2$ .



Plano traza - determinante.

Cuando estemos en el caso  $4y > x^2$  (por encima de la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas. Si  $\text{tr}(A) < 0$  (región 1) tendremos un punto espiral inestable; si  $\text{tr}(A) = 0$  (eje  $OY$ ), un centro; y si  $\text{tr}(A) > 0$  (región 2), un punto espiral estable.

En el semiplano  $\det(A) < 0$  (región 5) las raíces son reales y tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos sillas inestables.

Veamos qué pasa entre la parábola  $4y = x^2$  y la recta  $y = 0$ . Si  $\text{tr}(A) > 0$  (región 3) hay dos raíces reales negativas, por lo que tenemos un nodo asintóticamente estable; si  $\text{tr}(A) < 0$  (región 4), hay dos raíces reales positivas y tenemos un nodo inestable.

Sobre la parábola tenemos una raíz real con multiplicidad 2. Se tienen nodos inestables si  $\text{tr}(A) < 0$  y nodos asintóticamente estables si  $\text{tr}(A) > 0$ .

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios explícitamente. Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias, para el caso que corresponda.

### 5. Energía, funciones de Liapunov y estabilidad

Un concepto útil en física para clasificar los puntos de equilibrio de un sistema es el de energía, gracias al siguiente principio:

*“En sistemas conservativos, un punto crítico es estable si es un mínimo local de la energía total.”*

A grandes rasgos una función de Liapunov es *una energía, en un sentido amplio*. En breve daremos una definición más precisa.

Antes introduzcamos las llamadas curvas de iso-energía que se pueden obtener directamente para el péndulo no lineal en el caso conservativo ( $c = 0$ ). En general, si tenemos el sistema conservativo:

$$x'' + f(x) = 0$$

si multiplicamos por  $x'$  e integramos entre  $t_1$  y  $t_2$ , queda

$$\int_{t_1}^{t_2} x' x'' dt + \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) x'(t) dt = 0$$

usando que  $\frac{d|x'|^2}{dt} = 2x'x''$  y haciendo el cambio de variables  $x = x(t)$  se tiene que

$$\frac{|x'(t_1)|^2}{2} - \frac{|x'(t_2)|^2}{2} + \int_{x_1}^{x_2} f(s) ds = 0$$

y si llamamos  $F$  a una primitiva de  $f$  esto es:

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

entonces

$$\frac{|x'(t_1)|^2}{2} + F(x_1) = \frac{|x'(t_2)|^2}{2} + F(x_2).$$

Esto quiere decir que la siguiente cantidad (que es exactamente la energía salvo una constante multiplicativa y/o aditiva) es conservada a lo largo de las trayectorias:

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x).$$

Las curvas de iso-energía quedan así parametrizadas por  $E$  de la forma

$$y = \pm \sqrt{2(E - F(x))}.$$

Retomemos el Ejemplo 6.14 del péndulo. Supongamos primero que  $c = 0$ , lo que significa que *no hay roce*. El sistema es

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{L} \sin(x). \end{cases}$$

En este caso la cantidad conservada es:

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{g}{L} \cos(x).$$

Las curvas de iso-energía tienen la forma

$$y = \pm \sqrt{2 \left( E + \frac{g}{L} \cos(x) \right)}$$

y están parametrizadas por  $E$  de  $-1$  a  $\infty$ . En la Figura 20 se muestran algunas de dichas curvas.

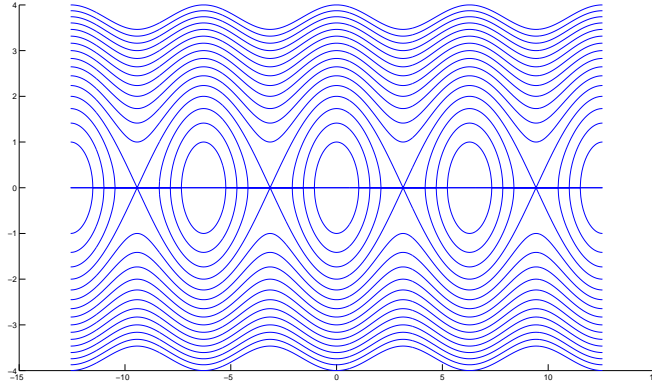


FIGURA 20. Curvas de iso-energía en el caso del péndulo no lineal conservativo ( $c = 0$ ).

Notar que la energía cinética de este sistema es  $K = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2$ , y la energía potencial  $U = mgL(1 - \cos(\theta)) = mgL(1 - \cos(x))$ , entonces la energía total es

$$V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

y podemos verificar que  $V$  y  $E$  se diferencian solamente en una constante multiplicativa y una constante aditiva:

$$V(x, y) = mL^2E(x, y) + mgL$$

de manera que las curvas de nivel de  $E$  y  $V$  son cualitativamente iguales (ver Figura 20) y da lo mismo cuál de las dos funciones energía considerar.

Si queremos verificar directamente que  $V$  es conservada a lo largo de las trayectorias, derivemos la función  $V$  con respecto al tiempo usando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = mgL \sin(x)x' + mL^2yy'.$$

Reemplazando  $x', y'$  de las ecuaciones del sistema no lineal, tenemos que

$$V'(t) = mgL \sin(x)y + mL^2 y \left( -\frac{g}{L} \sin(x) \right) = 0$$

para todo  $t$ , lo que significa que  $V(t) = V_0$  para todo  $t$ . Es decir, la energía se mantiene constante, por lo que hemos verificado una vez más que el sistema es **conservativo**.

Por otra parte, los mínimos locales de  $V$  (o de  $E$ ) son efectivamente los puntos críticos del sistema:  $\{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Si el sistema parte de uno de estos puntos, permanece en él; pero si parte de un punto distinto las trayectorias no pueden tender a ningún punto crítico pues ellas se mantienen a niveles constantes de energía. Esto dice que ningún punto crítico puede ser asintóticamente estable.

Consideremos ahora el péndulo *con roce*:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L} \sin(x) \end{cases}$$

Las ecuaciones para la energía son exactamente las mismas, por lo que todavía  $V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2 y^2 + mgL(1 - \cos(x))$ , pero si derivamos y luego reemplazamos  $x', y'$  obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -cL^2 y^2 \leq 0.$$

La energía disminuye con el paso del tiempo y se dice que el sistema es **disipativo**. En este caso la pérdida o disminución de energía se debe al roce y es natural pensar que entonces debe tener más posibilidad de evolucionar hacia un punto de equilibrio estable. Es más, antes ya vimos que la posición vertical hacia abajo es punto de equilibrio asintóticamente estable.

Esto es más general, si consideramos el sistema siguiente:

$$x'' + f(x) + g(y) = 0$$

tal que  $yg(y) \geq 0$  entonces si  $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x)$  como antes, se cumplirá que

$$\frac{dE}{dt} = yy' + f(x)y = y(-f(x) - g(y)) + f(x)y = -yg(y) \leq 0$$

es decir el sistema disipará energía.

Dado un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ , una *corona* alrededor de  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un conjunto  $\mathcal{D}_r$  de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < r\}.$$

Notemos que si a  $\mathcal{D}_r$  le agregamos el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  obtenemos la bola abierta  $B_r(\bar{x}, \bar{y})$ . Una *vecindad perforada* de  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un abierto que no contiene a  $(\bar{x}, \bar{y})$  pero contiene a una corona alrededor de  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Consideremos el (SNLA)

$$\begin{cases} x' &= F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' &= G(x, y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones continuamente diferenciables.

Sean  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico aislado del (SNLA) y  $\mathcal{D}_r$  una corona alrededor de  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Una función continuamente diferenciable  $V : B_r(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de Liapunov* para el sistema en torno al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  si satisface las siguientes condiciones:



1. Se anula en  $(\bar{x}, \bar{y})$  y es positiva en todo  $\mathcal{D}_r$ .
2.  $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq 0$  en  $\mathcal{D}_r$ .

Si la igualdad en (2) es siempre estricta, decimos que  $V$  es una función de Liapunov **estricta**.

Observemos que, a lo largo de las soluciones del sistema, la función de Liapunov decrece. Más precisamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}y'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}F(x(t), y(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x(t), y(t)) \leq 0 \end{aligned}$$

lo que hace evidente la cercanía entre las funciones de Liapunov y la energía.

**TEOREMA 6.3** (Estabilidad por funciones de Liapunov). *Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico aislado del (SNLA).*

1. *Si existe una función de Liapunov en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$ , entonces el punto crítico es estable.*
2. *Si además la función de Liapunov es estricta, el punto es asintóticamente estable.*
3. *Por el contrario, si existe una función con las mismas características pero con  $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G > 0$  en  $\mathcal{D}_r$ , entonces el punto crítico es inestable.*

**DEMOSTRACIÓN.** 1. Sea  $\varepsilon > 0$ . Para probar la estabilidad debemos encontrar  $\delta > 0$  tal que si  $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$  entonces  $x(t), y(t) \in B_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$  para todo  $t > 0$ . Como  $V$  es continua existe

$$\min\{V(x, y) \mid (x, y) \in \partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})\} = m > 0,$$

donde  $\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$  es la bola cerrada de centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  y radio  $\varepsilon$  y  $\partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$  denota su frontera (que es cerrada y acotada). Por la continuidad de  $V$  y dado que  $V$  se anula en  $(\bar{x}, \bar{y})$ , existe  $\delta \in (0, r)$  tal que  $V(x, y) < m/2$  para todo  $(x, y) \in \overline{B}_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ . En  $t_0$  tomemos la condición inicial  $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ , y la trayectoria asociada  $(x(t), y(t))$ . Sabemos que  $V(x_0, y_0) < m/2$ . Además

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = V_x F + V_y G \leq 0$$

de donde

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m/2 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Como  $(x(t), y(t))$  es una función continua (esto viene del teorema de existencia y unicidad), la curva que describe no interseca  $\partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$  para ningún  $t$  pues allí  $V$  vale  $m$ . Concluimos que  $(\bar{x}, \bar{y})$  es estable.

2. Para la estabilidad asintótica debemos  $\delta > 0$  de manera que si  $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ . Como la función

$$t \mapsto V(x(t), y(t))$$

es positiva y decreciente para cualquier condición inicial, ella tiene un límite  $L$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $L = 0$ , la continuidad de  $V$  asegura que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) =$

$(\bar{x}, \bar{y})$  que es el único punto donde  $V$  se anula. Probaremos ahora que  $L$  no puede ser positivo. En efecto, si  $L > 0$  entonces  $V(x(t), y(t)) \geq L$  para todo  $t$ . Por otro lado, siempre se tiene que  $V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0)$ . Además, el punto 1 dice que  $(\bar{x}, \bar{y})$  es estable, de modo que existe  $\delta > 0$  tal que si  $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$  entonces  $(x(t), y(t)) \in B_{r/2}(\bar{x}, \bar{y})$ . En virtud de la continuidad de  $V$  el conjunto

$$\mathcal{K} = \{ (x, y) \in \overline{B}_{r/2}(\bar{x}, \bar{y}) \mid L \leq V(x, y) \leq V(x_0, y_0) \}$$

es cerrado y acotado. Además contiene a la trayectoria y no contiene a  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Luego

$$\max \left\{ \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \mid (x(t), y(t)) \in \mathcal{K} \right\} = -k < 0.$$

Tenemos entonces que

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) - kt,$$

cantidad que tiende a  $-\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto es imposible puesto que  $V$  no toma valores negativos.

3. Se deja como ejercicio al lector. □

Para el ejemplo del péndulo sin roce la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

claramente se anula en los puntos críticos, y es estrictamente positiva en todos los otros puntos, y vimos que  $\frac{dV}{dt} \equiv 0$ , por lo que por el Teo. anterior, tenemos que los puntos críticos son estables, que es la misma conclusión que obtuvimos con el análisis de linealización del sistema.

Para el sistema amortiguado, si tomamos la misma función  $V$  anterior, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema, pero como  $\frac{dV}{dt} = -cLy^2 \leq 0$ , sólo podemos concluir que el origen es estable, aunque en realidad sabemos que es asintóticamente estable.

En un sistema cualquiera, la función de Liapunov es una herramienta muy útil, pero el problema es que hay que probar con diferentes funciones y tratar de encontrar una que sirva. En el caso de sistemas físicos conservativos, la energía total del sistema es una buena función a considerar, pero ya notamos que en el caso del péndulo amortiguado quizá pueda hacerse algo mejor.

En el péndulo amortiguado, tomemos  $\frac{c}{m} = \frac{g}{L} = 1$  para facilitar los cálculos. Probemos que la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

es una función de Liapunov estricta en el origen.

La función claramente cumple con la condición de anularse sólo en el punto  $(x, y) = (0, 0)$ , es positiva fuera del origen, continuamente diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  y además

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G &= (x + y + 2x)y - (x + y + y)(y + \sin(x)) \\ &= 2xy - y^2 - (x + 2y)\sin(x). \end{aligned}$$

Por el teorema de Taylor sabemos que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{3}x^3$$

para algún  $\xi$  entre 0 y  $x$ . Como para usar el teorema basta encontrar una vecindad del origen, consideremos  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , con lo que  $0 < \cos(\xi) < 1$ . Reemplazando esto vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -(x^2 + y^2) + \frac{\cos(\xi)}{3}x^3(x + 2y).$$

No es directo establecer si esta expresión cambia de signo o no, pero si hacemos el cambio a coordenadas polares:  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ , obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 + \frac{\cos(\xi)}{3}r^4 (\cos^4(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)).$$

Claramente

$$-1 < \cos^4(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) < 3$$

y entonces

$$-\frac{1}{3} < \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos^4(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)) < 1.$$

Luego, tomando  $r < 1$ , se tiene

$$\left| r^2 \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos^4(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)) \right| < 1,$$

de donde vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 \left\{ 1 + r^2 \left( \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos^4(\theta) + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)) \right) \right\} < 0$$

en una vecindad del origen. El teorema de estabilidad por funciones de Liapunov nos dice entonces que el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Este último ejemplo nos muestra que una función de Lyapunov no es necesariamente la función de energía del sistema.

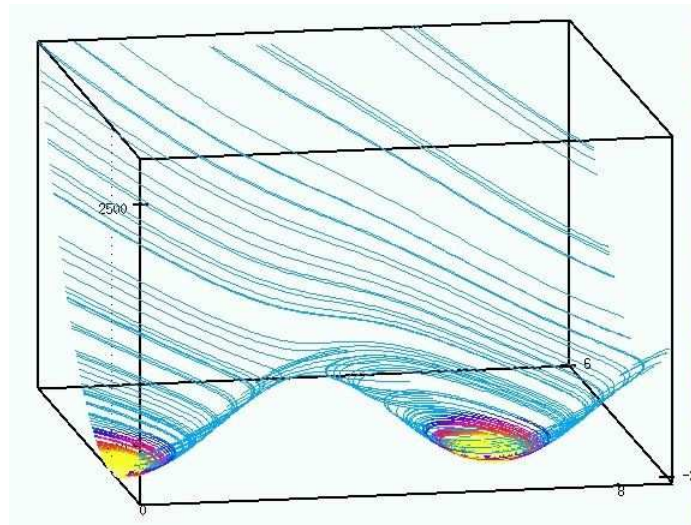


FIGURA 21. Evolución de la energía total a lo largo de las trayectorias para el péndulo no-lineal. La energía total resulta ser una función de Lyapunov no estricta ya que no decrece estrictamente cuando  $y = \theta' = 0$ .