UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2

Optimización II (525352-1)

Danae Orellana
Mauricio Oses
Brayan Sandoval

Problema 1. Considere el problema para minimizar $f(x)$ sujeto yo $x \in X$ y $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, ..., m$. Sea $\bar{x}$ un punto factible, y sea $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suponga que X está abierto y cada uno g_i para $i \notin I$ es continuo en $\bar{x}$. Además, suponga que el conjunto

$$\{\mathbf{d} : \nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} \leq 0 \text{ para } i \in J, \nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} < 0 \text{ para } i \in I - J\}$$

no está vacío, donde $J = \{i \in I : g_i\}$ es pseudocóncavo en $\bar{x}$. Demuestre que esta condición es suficiente para validar las condiciones KKT en $\bar{x}$. (Esta es la calificación de restricción Arrow Hurwicz-Uzawa)

Sabemos que X es un conjunto abierto, que las funciones cuyo subíndice pertenece a J son pseudocóncavo y que $\bar{x}$ las funciones de las restricciones no vinculadas son continuas. Por propiedad sabemos que si el vector d satisface

$$\begin{aligned}
&\nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} \leq 0 \text{ para } i \in J \\
&\nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} < 0 \text{ para } i \in I - J
\end{aligned}$$

y $\bar{x}$ es una dirección factible. Si $\bar{x}$ es mínimo local entonces el sistema

$$\begin{aligned}
&\nabla f(\bar{x})^t\mathbf{d} < 0 \\
&\nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} \leq 0 \text{ para } i \in J \\
&\nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} < 0 \text{ para } i \in I - J
\end{aligned}$$

no tiene solución. Considere el siguiente problema primal donde $y \in \mathbb{R}$ es una variable artificial:

$$\begin{aligned}
\max\ & y \\
& \nabla f(\bar{x})^t\mathbf{d} + y \leq 0 \\
& \nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} + y \leq 0 \text{ para } i \in I - J \\
& \nabla g_i(\bar{x})^t\mathbf{d} \leq 0 \text{ para } i \in J
\end{aligned}$$

y su dual definido como

$$\min 0$$

$$u_0 \nabla f(\bar{x})^t + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})^t = 0 \tag{1}$$

$$u_0 + \sum_{i \in I} u_i = 1 \tag{2}$$

$$u_0 \leq 0, u_i \leq 0 \quad \text{para } i \in I \tag{3}$$

Dado que el sistema anterior no tiene solución, debemos tener que el primal tiene un valor óptimo de 0 y el dual es factible por lo tanto (1),(2) y (3) tienen solución, si $u_0 > 0$ en cualquiera de las soluciones, $\bar{x}$ es un punto KKT, tomamos el caso de que $u_0 = 0$ y por (2) se obtiene que $I - J \neq \emptyset$ Además, d pertenece al conjunto no vacío dado que

$$\nabla g_i(\bar{x})^t \mathbf{d} \leq 0 \text{ para } i \in J$$
$$\nabla g_i(\bar{x})^t \mathbf{d} < 0 \text{ para } i \in I - J \neq \emptyset$$

al tomar el producto interno de (2) con d se tiene lo que sigue

$$\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})^t d + \sum_{i\in I-J} u_i \nabla g_i(\bar{x})^t d = 0 \tag{4}$$

podemos ver que el primer término de (4) no es positivo y que el segundo término de (4) es estrictamente negativo porque $u_i > 0$ ya que

$$i \in I - J \neq \emptyset$$

por lo que podemos ver que

$$\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\bar{x})^t d + \sum_{i\in I-J} u_i \nabla g_i(\bar{x})^t d < 0$$

lo cual serial una contradicción con (4) por lo tanto $u_0 > 0$, y $\bar{x}$ es un punto KKT.

■

Problema 2. Considere la región factible $S = \{x \in X : g_1(x)^t \leq 0\}$, donde $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ y X es el conjunto de combinaciones convexas de los puntos $(-1,0)^t, (0,1)^t, (1,0)^t$, y $(0,-1)^t$.

a. Encontrar el cono de contingencia T de S para $\bar{x} = (1,0)^t$.

b. Probar que $T \supseteq G'$, donde $G' = \{d : \nabla g_1(\bar{x})^t d \leq 0\}$.

c. Reemplace el conjunto X por cuatro restricciones de desigualdad. Repetir a y b, considerando $G'(\bar{x}) = \{d : \nabla g_i(x)^t d \leq 0 \text{ para } i \in I\}$ con $i \in I$ el conjunto de índices activos vinculadas a $\bar{x} = (1,0)^t$

Solución:

a. Por definición de cono contingente

> **Defінción**
>
> Sea $K \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in \bar{K}$ se define el cono contingente de K en $\bar{x}$ como
>
> $$T(K;\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda_k > 0, \exists x_k \in K, x_k \longrightarrow \bar{x} \text{ y } \lambda_k (x_k - \bar{x}) \longrightarrow v\}$$

Sea $v \in T(S;\bar{x})$, además sea, $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \in S$ tal que $x_k \longrightarrow \bar{x}$ y sea $\lambda_k = k$, entonces;

$$\lambda_k (x_k - \bar{x}) = \lambda_k \left[\left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) - (1,0)\right] = \left(\lambda_k - \frac{\lambda_k}{k} - \lambda_k, \frac{\lambda_k - 0}{k}\right) = \left(-\frac{k}{k}, \frac{k}{k}\right) = (-1,1) \longrightarrow (-1,1)$$

Entonces se tiene $(-1,1) \in T(S;\bar{x})$ y por lo tanto

$$T(S;\bar{x}) = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 \leq 0\}$$

■

b. Deseamos demostrar que $G'(\bar{x}) \subseteq T(S;\bar{x})$
Sea $v \in G'(\bar{x})$, entonces $\nabla g_1(\bar{x})^t v \leq 0$. Además notemos que

$$\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2) \Longrightarrow \nabla g_1(\bar{x}) = (2,0)$$

Así, se tiene

$$\nabla g_1(\bar{x})^t v \leq 0 \iff (2,0)^t(v_1,v_2) \leq 0 \iff 2v_1 \leq 0 \iff v_1 \leq 0$$

Entonces, $v \in T(S;\bar{x})$. Por tanto $G'(\bar{x}) \subseteq T(S;\bar{x})$. $\blacksquare$

c. Primero notemos que X es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos $(-1,0)^t$, $(0,1)^t$, $(1,0)^t$ y $(0,-1)^t$ es decir;

$$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

Lo que es equivalente a decir

$$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 1 \wedge x_1 + x_2 \leq 1 \wedge -x_1 - x_2 \leq 1 \wedge -x_1 + x_2 \leq 1\}$$

De lo anterior se deducen cuatro restricciones mas;

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} g_2(x) &= x_1 - x_2 - 1 \\ g_3(x) &= x_1 + x_2 - 1 \\ g_4(x) &= -x_1 - x_2 - 1 \\ g_5(x) &= -x_1 + x_2 - 1 \end{aligned}$$

Ahora veremos cuales g_i tales que $i \in I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$

$$\begin{aligned} g_2(\bar{x}) &= 0 \Longrightarrow 2 \in I \\ g_3(\bar{x}) &= 0 \Longrightarrow 3 \in I \\ g_4(\bar{x}) &= -2 \Longrightarrow 4 \notin I \\ g_5(\bar{x}) &= -2 \Longrightarrow 5 \notin I \end{aligned}$$

Para calcular $T(S;\bar{x})$. Sea $v \in T(S;\bar{x})$, además sea, $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \in S$ tal que $x_k \longrightarrow \bar{x}$ y sea $\lambda_k = k$, entonces;

$$\lambda_k\left(x_k - \bar{x}\right) = \lambda_k\left[\left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) - (1,0)\right] = \left(\lambda_k - \frac{\lambda_k}{k} - \lambda_k, \frac{\lambda_k - 0}{k}\right) = \left(-\frac{k}{k}, \frac{k}{k}\right) = (-1,1) \longrightarrow (-1,1)$$

Entonces se tiene $(-1,1) \in T(S;\bar{x})$ y por lo tanto

$$T(S;\bar{x}) = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 \leq 0\}$$

Ya obtenido el cono de contingencia procedemos a probar que $G'(\bar{x}) \subseteq T(S;\bar{x})$. Sea $v \in G'(\bar{x}) = \{d : \nabla g_i(\bar{x})d \leq 0 : i \in I\}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla g_1(\bar{x}) &= (2x_1, 2x_2) \Longrightarrow \nabla g_1(\bar{x}) = (2,0) \\
\nabla g_2(\bar{x}) &= (1,-1) \Longrightarrow \nabla g_2(\bar{x}) = (1,-1) \\
\nabla g_3(\bar{x}) &= (1,1) \Longrightarrow \nabla g_3(\bar{x}) = (1,1)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\nabla g_1(\bar{x})^t v \leq 0 &\Longrightarrow v_1 \leq 0 \\
\nabla g_2(\bar{x})^t v \leq 0 &\Longrightarrow v_1 \leq v_2 \\
\nabla g_3(\bar{x})^t v \leq 0 &\Longrightarrow v_1 \leq -v_2
\end{aligned}$$

Entonces, $v \in T(S;\bar{x})$. Por tanto $G'(\bar{x}) \subseteq T(S;\bar{x})$. ■