Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Práctica 4 — miércoles 27 de mayo de 2020

Problema 1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Demostrar que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla(fg)(x, y) = f(x, y)\nabla g(x, y) + g(x, y)\nabla f(x, y)$.

Problema 2. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = xy^2 + 3x^2 \sin(xy).$$

a) Demostrar que f es diferenciable para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) ¿Qué ecuación que satisface el plano tangencial $P(1, 1)$ en $(x^0, y^0) = (1, 1)$?

Problema 3. Se considera la función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = 3xyz + \cos(x^2 y) + z^4.$$

a) Demostrar que f es diferenciable para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

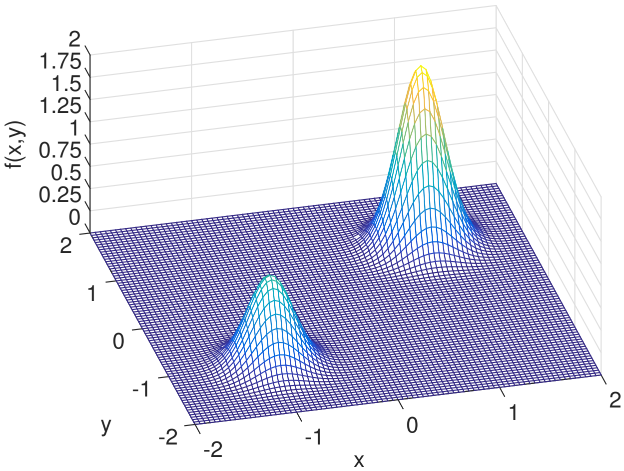
b) ¡Qué ecuación satisface el hiperplano tangencial $P(0, 0, 0)$ en $(x^0, y^0, z^0) = (0, 0, 0)$?

Problema 4. La superficie de una montaña admite aproximadamente el modelo

$$h(x, y) = 5000 - 0{,}001x^2 - 0{,}004y^2.$$

a) ¿En qué dirección debe mover si desea ascender (descender) con la mayor rapidez posible?
b) En este caso, ¿la dirección de mayor pendiente coincide con la dirección directa hacia la cima?
c) ¿Existen ejemplos de funciones h donde la respuesta es contraria a la respuesta de (b)?

$$h(x,y) = \exp\Big(-10\big((x+1)^2 + (y+1)^2\big)\Big) + 2\exp\Big(-10\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big)\Big)$$



Problema 5. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) ¿La función f es diferenciable o continua en $(0,0)$?

b) Determine todas las direcciones $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ tales que la derivada direccional $(\partial f/\partial \vec{a})(0,0)$ exista.