Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 3 — miércoles 29 de julio de 2020

Entrega: viernes 7 de agosto de 2020, 23.00 horas

Problema 1. Se considera la ecuación

$$x^2 + y + \sin(xy) = 0.$$

¿Es posible resolver esta ecuación en una vecindad de $(0,0)$ en la forma $y = g_1(x)$ o $x = g_2(y)$? Si posible, calcular las derivadas $g_1'(0)$ y $g_2'(0)$.

Problema 2. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Demostrar que en una vecindad de $(2,5)$ el sistema (1) es resoluble mediante una función continuamente diferenciable $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ tal que $u(2,5) = -1$ y $v(2,5) = 0$. Determinar las primeras derivadas de u y v en el punto $(2,5)$.

Problema 3. Se consideran las curvas

$$g_1 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0\bigr\}, \quad g_2 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = -1\bigr\}.$$

Determinar puntos $P = (x_1, y_1) \in g_1$ y $Q = (x_2, y_2) \in g_2$ tales que la distancia euclidiana $d(P,Q)$ es mínima.

Problema 4. ¿Cuál es el volúmen de cada uno de los siguientes cuerpos?

a) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \mathrm{e}^z)^2 + (y - \cos(5\sin(\pi z)))^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$
b) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - \mathrm{e}^y| \leq y, |z - \cos(5\pi y)| \leq 2y, \quad 0 \leq y \leq 1\}$

Problema 5.

a) Determinar la masa del sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\delta(x,y,z) = (x^2 + z^2)^{1/2}$.
b) Calcular la masa del sólido limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ con $z \geq 0$ si su densidad en cada punto $P(x,y,z)$ es $\delta(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

Problema 6. Calcular el volumen y centro de masa del sólido limitado por el cilindro $z = y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.