Practica I

1) Determinar si V o F (Justificar).

- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. V
- $\{x\} \in \{\{x\}\}$. F
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$ V
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$ V
- $x \in \{x\}$ V
- $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$ ✓.

2. Demuestre las sgtes Tautologías sin usar tablas de Verdad.

- $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

$$
\begin{aligned}
(\neg p \Leftrightarrow \neg q) &\Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q) \land (\neg q \Rightarrow \neg p) && \text{(Tautología } (r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow (r \Rightarrow s \land s \\
&\Leftrightarrow (\neg\neg p \lor \neg q) \land (\neg\neg q \lor \neg p) && \text{(Regla del condicional)} \\
&\Leftrightarrow (p \lor \neg q) \land (q \lor \neg p) && \text{(Doble Negación)} \\
&\Leftrightarrow (q \lor \neg p) \land (p \lor \neg q) && \text{(Conmutatividad de } \land) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) && \text{(Conmutatividad de } \lor) \\
&\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p) && \text{(Regla del Condicional)} \\
&\Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

- $\neg [(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)] \iff (p \iff q)$

Dem: $\neg [(p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)] \iff \neg (p \land \neg q) \land \neg (\neg p \land q)$ (De Morgan)

$\iff (\neg p \lor \neg\neg q) \land (\neg\neg p \lor \neg q)$

$\iff (\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$

$\iff (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$

$\iff p \iff q.$

$\rightarrow \quad \lor$

- $[(p \Rightarrow q) \land (\neg s \Rightarrow \neg r)] \Rightarrow [\neg p \lor \neg r \lor (q \land s)]$

$\iff [\neg [(p \Rightarrow q) \land (\neg s \Rightarrow \neg r)]] \lor [\neg p \lor \neg r \lor (q \land s)]]$

$\iff \neg [(\neg p \lor q) \land (s \lor \neg r)] \lor [\neg p \lor \neg r \lor (q \land s)]$

$\iff [(p \land \neg q) \lor (\neg s \land r)] \lor [\neg p \lor \neg r \lor (q \land s)].$

$\iff [(p \land \neg q) \lor \neg p] \lor [(\neg s \land r) \lor \neg r] \lor (q \land s)$

$\iff [(p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)] \lor [(\neg r \lor \neg s) \land (\neg r \lor r)] \lor (q \land s)$

$\iff [\cancel{V} \land (\neg \lor \neg p)] \lor [\cancel{V} \land (\neg r \lor \neg s)] \lor (q \land s)$

(Podemos obviar escribir V dado la Tautología $((p \land V) \iff p)$
$(p \lor F) \iff p)$

$\iff (\neg q \lor \neg p) \lor (\neg r \lor s) \lor (q \land s)$

$\iff (\neg q \lor \neg s) \lor (\neg p \lor \neg r) \lor (q \land s)$

$\iff \neg (q \land \neg s) \lor (\neg p \lor \neg r) \lor (q \land s)$

$\iff V \lor (\neg p \lor \neg r)$

$\iff V.$

3. Negar.

$\begin{cases} f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{una función} \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

- $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$
  $(\forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

Al Negar resulta:

$\forall L \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 :$
$(\exists x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$ (De Morgan)

4. - $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

Dem: $(A - C) \cup (B - C) = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$
$= (A \cup B) \cap C^c$ (Distributividad de $\cap$ sobre $\cup$)
$= (A \cup B) - C$

- $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$

($\Leftarrow$) Supongamos que $A = \emptyset$. luego, $A^c = \mathcal{U}$. y $A^c \cap B = B$
Además, $A \cap B^c = \emptyset \cap B^c = \emptyset$
Entonces, $\underbrace{(A \cap B^c)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A^c \cap B)}_{B} = \emptyset \cup B = B$.

($\Rightarrow$) Supongamos $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ (Queremos probar $P \Rightarrow Q$ $\Leftrightarrow \neg P \vee Q$)

Procedemos por contradicción:

Es decir, supongamos $A \neq \emptyset$.

Digamos $x \in A$. Hay 2 opciones.

i) Si $x \in B$, $x \in A \cap B$ $\therefore x \notin B^c$, luego $x \notin A \cap B^c$ por lo que $x \in A^c \cap B \Rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$, ¡contradicción!

ii) Si $x \notin B$, $x \in B^c$, $x \in A \cap B^c \subseteq B$. Luego, $x \in B$, ¡contradicción!

Finalmente, como ambos razonamientos llevan a contradicciones, $A = \emptyset$.

Como ya vimos ambas implicancias se concluye la dem.

5. $\mathcal{F} \subseteq P(\mathcal{U})$ → familia de conjuntos

Definir $\odot : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

$A \odot B := A^c \cap B^c$.

a) $A^c \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}$

Sea $A \in \mathcal{F}$, $A \odot A = A^c \cap A^c = A^c$, $A^c \in \mathcal{F}$

b) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F}$

Dem: Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Por a) $\cdot A^c \in \mathcal{F}$ $\cdot B^c \in \mathcal{F}$

$$A^c \odot B^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{F}$$

c) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$

Dem: Sean $A, B \in \mathcal{F}$ por a) $\cdot A^c \in \mathcal{F}$ $\cdot B^c \in \mathcal{F}$ y por b) $A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$.
Por a) de nuevo, $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in \mathcal{F}$.

Como A y B eran cualesquiera, $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$

d) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \triangle B \in \mathcal{F}$.

En efecto, Sean $A, B \in \mathcal{F}$. luego

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (B \cap A) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \end{aligned}$$

Por c) $A \cup B \in \mathcal{F}$
Por b) $A \cap B \in \mathcal{F}$
Por a) $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$
Por b) $(A \cup B) \cup (A \cap B)^c \in \mathcal{F}$

e) $\emptyset \in \mathcal{F}$: Sea $A \in \mathcal{F}$. Por a) $A^c \in \mathcal{F}$

Por b) $A \cap A^c = \emptyset \in \mathcal{F}$