1. Ecuacion del Calor

Partimos intentado modelar la propagacion de calor en una barra metalica, asumiendo que la barra esta aislada , que las temperaturas de los extremos T_0 y T_1 se mantienen constantes y que no se genera calor dentro de la barra.

1.1. Variables Fisicas

1. $T(x,t)$ representa la temperatura al interior de la barra a una distancia x de la extremidad izquerda a un tiempo t.
2. $j_a(x,t)$ es la densidad de corriente termica, es decir la energia por unidad de area y tiempo.
3. $Q(x,t)$ energia calorifica por unidad de volumen al interior de la barra.

1.2. Leyes Fisicas

1. **Ley de Fourier** el flujo de calor a travez de una seccion transversal de la barra en la posicion x es proporcional al gradiente de temperatura:

$$j_a(x,t) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

2. **Conservacion de la Energia**

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) = C\rho \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) \approx -\frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}$$

Definición (Ecuacion del Calor)

Luego de las deducciones llegamos a la siguiente expresion conocida como Ecuacion del Calor **(E.C)**

$$\partial_t T(x,t) - \kappa \partial_x^2 T(x,t) = 0$$

2. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Definición (Buen planteamiento de un PVIF)

Decimos que un **PVIF** es bien planteado si

1. Tiene solucion unica
2. La solucion depende de manera continua de las condiciones iniciales y de frontera.

Propiedad (Principio de Superposicion)

La ecuacion del calor (**E.C**) satisface el principio de superposicion (es decir es lineal), dadas T_1, T_2 dos soluciones a la EC y $A, B \in \mathbb{R}$ luego $AT_1 + BT_2$ tambien es solucion de la E.C

Definición (Solucion estacionaria)

Una solucion estacionaria de un **PVF** es una solucion $T(x,t) = T(x)$ independiente del tiempo.

Definición Solucion Transciente

Una solucion transciente es aquella que desaparece a tiempo grande.

2.1. Metodo de Separacion de Variables (Sturm Liovuille)

Buscamos soluciones del tipo $T(x,t) = u(x)v(t)$ para la **EC**, Reemplazando en la **E.C** obtenemos

$$\begin{cases} v'(t) + \lambda k v(t) = 0 \\ u''(x) + \lambda u(x) = 0 \end{cases}$$

reemplanzado en las condiciones de fronteras deducimos que $u(0) = u(L) = 0$. asi hemos llegado a lo siguiente

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

el ultimo sistema es un **Problema de Sturm Liuville**

3. Series de Fourier

Definición (Funcion periodica)

Una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periodica si:

$$\exists T > 0 : f(t+T) = f(t) \quad ,\forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto

$$f(t+nT) = f(t) \quad ,\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Propiedad (Invarianza bajo traslacion)

La curva grafica de una funcion $T-$periodica es invariante por traslacion de T en la direccion del eje horizontal.

3.1. Extensiones

Definición (Extension $T-$periodica)

Sea f definida en $[a, a+T]$ definimos

$$\tilde{f}(t) = f(t - nT) \quad ,\text{si} \quad a + nT \leq t \leq a + (n+1)T$$

luego $\tilde{f}$ es $T-$periodica y se le llama la extension $T-$periodica de f.

Definición (Extension $2T-$periodica par)

Si $a = 0$, $f : [0, T] \to \mathbb{R}$. Luego al extender f en una funcion par $\tilde{f}_p$ sobre $[-T, T]$ y luego tomar la extension $2T-$periodica de $\tilde{f}_p$ se obtiene

$$\tilde{f}_p$$

$\tilde{f}_p$ es la extension $2T-$periodica par de f.

Definición (Extension $2T-$periodica impar)

Al extender f en una funcion impar $\tilde{f}_I$ sobre $[-T, T]$ y luego tomar la extension $2T-$ *periodica* de $\tilde{f}_I$ se obtiene:

$$\tilde{f}_I$$

$\tilde{f}_I$ es la extension $2T-$periodica impar de f.

Nota: Que f sea continua en $[0, T]$ no implica que $\tilde{f}_p, \tilde{f}_I$ sean continuas en $[0, T]$.

Propiedad (Cambio de periodicidad)

Sea f una funcion $T-$periodica luego:

$$g(s) = f\left(\frac{sT}{2\pi}\right)$$

es $2\pi-$periodica.

Demostración.

$$g(s + 2\pi) = f\left(\frac{(s + 2\pi)T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{sT + 2T\pi}{2\pi}\right) = f\left(\frac{sT}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{sT}{2\pi}\right) = g(s)$$

□

Por la propiedad anterior sin perdida de generalidad nos podemos restringir a estudiar el caso de funciones $2\pi-$periodicas.

Definición (Polinomio Trigonometrico)

La funcion:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

se llama **Polinomio Trigonometrico**, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\}$

Observacion: La serie de fourier de un polinomio trigonometrico es ella misma.

Definición (Serie de Fourier)

La serie infinita:

$$S(t) = S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

es una **Serie de Fourier**.

Propiedad (Convergencia)

Si se cumple que:

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty \\ \sum_{n\geq 1} |b_n| < \infty \end{cases}$$

Luego la **(S.F.)** converge. Esto se sigue del criterio de comparacion y la desigualdad triangular.

3.2. Identidades Trigonometricas

Partimos de las siguientes identidades

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

Propiedad 1

1. $2\cos(mt)\cos(nt) = \cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)$
2. $2\sin(nt)\sin(mt) = \cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)$
3. $2\sin(nt)\cos(mt) = \sin((n+m)t) + \sin((n-m)t)$

Demostración. Para 1:

$$\begin{aligned}\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t) &= \cos(nt)\cos(mt) - \sin(nt)\sin(mt) + \cos(nt)\cos(mt) + \sin(nt)\sin(mt) \\ &= 2\cos(nt)\cos(mt)\end{aligned}$$

las propiedades 2 y 3 se demuestran analogamente. □

3.3. Coeficientes de Fourier

Dada una funcion f $2\pi-$periodica es posible hallar a_n, b_n tales que $f(t) = S(t) \quad, \forall t \in \mathbb{R}$?

Si suponemos que esto es posible y que la **Serie de Fourier** puede ser integrada termino a termino. se sigue que:

$$f(t) = S(t) \Rightarrow f(t)\cos(mt) = S(t)\cos(mt) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} S(t)\cos(mt)\,dt$$

Luego de integar termino a termino $S(t)$ obtenemos:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt$$

haciendo el razonamiento analogo pero usando $\sin(mt)$ se obtiene

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,dt$$

Definición (Serie de Fourier)

Si las integrales anteriores existen, los coeficientes reales a_n, b_n se llaman **coeficientes de Fourier** de f y la serie.

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$$

es la **Serie de Fourier** de f.

Propiedad (Serie de coseno y seno)

Suponga que los coeficientes de Fourier existen, luego si f es una funcion par

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt))$$

y se le denomina **Serie de Cosenos**, por otro lado si f es una funcion impar, entonces:

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin(nt))$$

y se denomina **Serie de Senos.**

Nota: Suponga que f esta definida en $[0,\pi]$, luego podemos definir 3 distintas series de Fourier.

1. **Serie de Coseno**: es la **SF** de la extension $2\pi-$periodica par $\tilde{f}_p$ de f.
2. **Serie de Senos**: es la **SF** de la extension 2π-periodica impar $\tilde{f}_I$ de f.
3. **Serie de extension π periodica:** Es la **SF** de la extension π periodica $\tilde{f}$ de f.

Como se relacionan sus coeficientes.

3.4. Teorema de Riemann-Lebesgue

Teorema de Lebesgue

Sea $S_{disc} := \{t \in [a,b] : f \text{ es distcontinua en } t\}$. f es Riemann Integrable en $[a,b]$ si y solo si S_{disc} es de **medida nula**.

Teorema de Riemann-Lebesgue

Suponga que f es Riemann-Integrable en $[a,b]$. Luego $f(t)e^{int}$ es Riemann-Integrable en $[a,b]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\, dt = 0$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = 0$$

4. Convergencia puntual de la Serie de Fourier

Teorema de Dirichlet

Si f es 2π-periodica e integrable sobre $[-\pi, \pi]$, f es CPT en $[t-\delta, t+\delta]$ para $\delta > 0$, f tiene derivadas a la izquierda y a a derecha, esto es:

$$\lim_{s \to t^{\pm}} \frac{f(s) - f(t^{\pm})}{s - t}$$

luego la serie de fourier converge y

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Propiedad (Corolario 1 de Dirichlet)

Sea f una funcion 2π-periodica y CPT en $[\pi, \pi]$, Si ademas f es derivable en $(-\pi, \pi)$ salvo en un numero finito de puntos y f' es CPT en $[-\pi, \pi]$, luego la Serie de Fourier de f converge puntualmente en $\mathbb{R}$ y:

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Propiedad (Corolario 2 de Dirichlet)

Si dos funciones cumplen las Hipotesis del **Teorema de Dirichlet** y tienen los mismos coeficientes de fourier a_n, b_n, luego $f(t) = g(t)$ para todos los puntos salvo en las discontinuidades de f y g.

5. Series de Fourier de Funciones $T-$periodicas.

Los resultados obtenidos en esta seccion son consecuencia directa de lo obtenido anteriormente para funciones 2π-periodicas, los extendemos usando que:

$$g(s) = f\left(\frac{Ts}{2\pi}\right)$$

es 2π periodica e integrable, en base a ello deducimos lo siguiente:

Definición (Coeficientes de Fourier de series T periodicas)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion $T-$periodica e integrable sobre $[-T/2, T/2]$ luego los coeficientes de fourier de f son:

$$a_n := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si f esta definida en $[0, T/2]$

1. **Serie de Cosenos:** Es la **SF** de la extension $T-$periodica par $\tilde{f}_p$ de f.
2. **Serie de Senos:** Es la **SF** de la extension T-periodica impar $\tilde{f}_I$ de f.
3. **Serie de extension $T/2$ periodica:** Es la **SF** de la extension $T/2$ periodica $\tilde{f}$ de f.

relacion entre los coeficientes.

Teorema Dirichlet para funciones $T-$periodicas.

Si f es T-periodica e integrable sobre $[-T/2, T/2]$, f es CPT en $[t-\delta, t+\delta]$ para $\delta > 0$, f tiene derivadas a la izquerda y a a derecha, esto es:

$$\lim_{s \to t^{\pm}} \frac{f(s) - f(t^{\pm})}{s - t}$$

luego la serie de fourier converge y

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Observacion: Los corolarios del Teorema de Dirichlet tambien son validos para funciones T periodicas y poseen formulaciones analogas.

6. Forma exponencial de la Serie de Fourier

Del curso de Calculo complejo recordemos las siguientes definiciones:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

en base a lo anterior deducimos lo siguiente

Definición (Serie Exponencial)

La serie de fouier exponencial es

$$S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

con

$$c_n := \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & \text{, si } n > 0 \\[2ex] \dfrac{a_0}{2} & \text{, si } n = 0 \\[2ex] \frac{a_{|n|}+ib_{|n|}}{2}, & \text{si } n < 0. \end{cases} \qquad = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp\left(-i\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Propiedad (Relacion entre los coeficientes)

$$a_n = c_n - c_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

7. Propiedades de los Coeficientes de Fourier

Si suponemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π periodica y de clase C^k en $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}^*$, integrando por partes el coeficiente de la SF de la q esima derivada de f se obtiene:

Teorema Coeficientes de la Derivada

Si suponemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π periodica y de clase C^k en $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$c_n^{(q)} = (in)^q c_n^{(0)}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, k-1.$$

es posible generalizar el teorema anterior, obteniendo

Teorema (Coeficientes de la derivada de funciones T periodicas)

Si suponemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T periodica y de clase C^k en $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$c_n^{(q)} = \left(\frac{2i\pi n}{T}\right)^q c_n^{(0)}, \quad \forall q = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Observacion: usando lo anterior podemos deducir que la serie de fourier puede ser derivada termino a termino $(k-1)$ veces.

Definición 1

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion de numeros reales o complejos, si $k>0$ escribimos

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{si} \quad n^k u_n \to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

Teorema (Rapidez de convergencia de los coeficientes)

Sea f una funcion T periodica de clase C^{k-1} en $\mathbb{R}$ tal que f^{k-1} es derivable salvo en un numero finito de puntos en $(-T/2, T/2)$ y $f^{(k)}$ es CPT en $[-T/2, T/2]$ luego los coeficientes de Fourier satisfacen.

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad c_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Por tanto la regularidad de f afecta a la rapidez"de convergencia de los coeficientes de fourier.

8. Producto Convolucion

Definición (Producto de convolucion)

Sean f, g dos funciones T periodicas e integrables en $[-T/2, T/2]$. La funcion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-s)g(s)\,ds$$

se llama el producto de convolucion de f y g y se escribe $h = f * g$.

Observacion: h es T periodica, por otro lado la operacion convolucion entre funciones T periodica satisface

1. Conmutativa
2. Asociativa
3. Distributiva con respecto a la suma de funciones.

Si nos preguntamos como se relacionan los coeficientes $c_n(h)$ y $c_n(f), c_n(g)$ y usando **Fubini** obtenemos:

Teorema 1

Si f y g son T periodicas e integrables sobre $[-T/2, T/2]$ luego los coeficientes de fourier complejos de $h = f * g$ existen y estan dados por

$$c_n(h) = c_n(f)c_n(g) \quad ,\forall n\in\mathbb{Z}$$

9. Fenomeno de Gibbs

Propiedad 1

Para N grande, $S_{f,N}(t)$ presenta oscilaciones cerca de cualquier discontinuidad de la funcion, ademas se puede probar que lo hace con un $9\,\%$ con respecto al salto.

10. Identidad de Parseval

Teorema Identidad de Parseval

Si f es $T-$periodica y f^2 es integrable sobre $[-T/2, T/2]$ luego

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt$$

11. Convergencia Uniforme

Definición Convergencia Uniforme

La serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon \quad, \forall x \in [a,b]$$

o equivalentemente si se cumple:

1. La serie converge puntualmente
2. $\sup_{x\in[a,b]} |R_N(x)| \to 0, x \to \infty$

Ademas el caracter de convergente, no cambia al modificar un numero finito de terminos.

Teorema 1

$\sum_{n\geq 1} f_n$ es uniformemente convergente y cada f_n es continua en $[a,b] \quad, \forall n \in \mathbb{N}^*$, entonces f es continua en $[a,b]$

Teorema Integracion Termino a Termino (General)

$\sum_{n\geq 1} f_n$ es uniformememente convergente en $[a,b]$ y f_n integrable sobre $[a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{es integrable en } [a,b] \text{ y } \int_a^b S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

Teorema Derivacion Termino a Termino (General)

Si se cumple que

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge puntualmente en $[a,b]$
2. f_n es convergente en $[a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$

$$\Rightarrow S(x) \text{ es derivable en } [a,b] \text{ y } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \quad , \forall x \in [a,b]$$

12. Convergencia Normal

Definición Convergencia Normal

$\sum_{n\geq 1} f_n$ es normalmente convergente en $[a,b]$ si la serie numerica $\sum_{n\geq 1} \sup_{[a,b]} |f_n(x)|$ es convergente.

Teorema M-test de Weistrass

Si $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalmente en $[a,b]$ entonces tambien converge uniformemente en $[a,b]$.

12.1. Convergencia Uniforme de la Serie de Fourier

Teorema 1

Sea f una funcion T-periodica continua en $\mathbb{R}$ derivable en $]-T/2, T/2[$ salvo quizas en un numero finito de puntos, de derivada f' CPT en $[-T/2, T/2]$.
Luego la Serie de Fourier $S_f(t)$ de f converge normalmente en $\mathbb{R}$ y $S_f(t) = f(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R}$

En particular lo anterior es cierto si $f \in C^1(\mathbb{R})$
En particular la serie de senos de una funcion continua y definida en $[0, T/2]$ no converge uniformemente salvo si:

$$f(0) = f(T/2) = 0$$

Teorema Derivada termino a termino

Sea f una funcion $T-$periodica, de clase $C^1(\mathbb{R})$ de derivada f' derivable en $]-T/2, T/2[$ salvo quizas en un numero finito de puntos, ademas su derivada f'' es CPT en $[-T/2, T/2]$
Entonces la serie de fouier de f y f' convergen normalmente y

$$S_{f'} = f' = S_f' = \sum \frac{2\pi n}{T} \left(b_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - a_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right) \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Teorema Integracion de Series de Fourier

Supongamos que f es $T-$periodica y CPT en $[-T/2, T/2]$. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, Luego:

$$\int_{t_0}^{t} f(u)\, du = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\, du$$

Notar que cuando se calcule la integral podria aparecer un termino constante dentro de la sumatoria, este termino es calculado mediante :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{t_0}^{s} f(u)\, du\, ds$$

13. Ecuacion de Calor

Recordamos que anteriormente vimos que la propagacion de calor en una barra metalica cuasi-unidemensional de superficie lateral aislada termicamente y de extremidades conectadas a termostatos esta modelada por el **PVIF1**

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = & k\partial_x^2 T(x,t) \\ T(0,t) = & T_0 \\ T(L,t) = & T_1 \\ T(x,0) = & f_0(x) \end{cases}$$

Ademas hemos visto que las soluciones del **PVIF1** se descomponen como

$$T(x,t) = T_e(x) + T_{tr}(x,t)$$

con

$$T_e(x) = \frac{(T_1 - T_0)}{L}x + T_0$$

y $T_{tr}(x,t)$ es solucion del **PVIF** homogeneo, esto se hace pues buscamos aplicar el principio de superposicion. Finalmente usando el metodo de separacion de variables (MSV) obtubimos

$$T_{tr}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Definición Hipótesis (H)

Sea $f : [0,L] \to \mathbb{R}$. Se dice que f cumple la **hipótesis (H)** si satisface las siguientes condiciones:

1. f es continua en el intervalo $[0,L]$.
2. f es derivable en $(0,L)$, excepto posiblemente en un número finito de puntos.
3. La derivada f' es continua por tramos (CPT) en $[0,L]$.
4. f verifica las condiciones de frontera: $f(0) = T_0$ y $f(L) = T_1$.

Teorema Solucion del PVIFH

Suponga que f_0 satisface **(H)** con $T_0 = T_1 = 0$. Supongamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los coeficientes de fourier de la serie de senos de f Luego la serie

$$T_{tr}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Converge **uniformemente** en

$$\overline{D} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$$

y su suma $T_{tr}(x,t)$ define una funcion continua en $\overline{D}$, de clase C^2 en

$$D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L, t > 0\}$$

Ademas $T_{tr}(x,t)$ es solucion del **PVIFH** y

$$\lim_{t\to\infty} T_{tr}(x,t) = 0 \quad ,\forall x \in [0,L]$$

13.1. Principio del Maximo y Estabilidad

Teorema Principio del Maximo

Suponga que $T(x,t)$ satisface la ecuacion del calor en

$$D_\tau = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < L, 0 < t \leq \tau\}$$

y que ella es continua en

$$\overline{D_\tau} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \tau\}$$

con $\tau > 0$.

Sea $\gamma_\tau := \overline{D_\tau} - D_\tau$. Luego $T(x,t)$ alcanza su maximo en γ_τ

Nota: Recordar que un **PVIF** esta bien planteado si

1. Su solucion es **unica**
2. Esta solucion es continua con respecto a los cambios en las condiciones de frontera o las condiciones iniciales.

Teorema 1

Si f satisface (H), luego el **(PVIF)**

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = & k\partial_x^2 T(x,t) \\ T(0,t) = & T_0 \\ T(L,t) = & T_1 \\ T(x,0) = & f_0(x) \end{cases}$$

Satisface 1. y 2. (es bien planteado). Ademas, si $f_0 \geq 0$, $T_0, T_1 \geq 0$, luego la solucion $T(x,t)$ satisface que $T(x,t) \geq 0 \quad, \forall (x,t) \in \overline{D}$.

14. Problemas de Sturm Liuville

Definición (PSL)

Sean $-\infty < a < b < \infty$ y $p : [a,b] \to \mathbb{R}^+, q : [a,b] \to \mathbb{R}, w : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, con p, q, w continuas en $[a,b]$ ademas $p \in C^1(a,b)$, $p(x), w(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$ luego un problema de Sturm Liuville se define como

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) & = \lambda w(x)y(x) \\ \\ a_1 y(a) - b_1 y'(a) & = 0 \\ \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) & = 0 \end{cases}$$

con $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

Definición (Tipos de C.F)

1. Si $b_1 = b_2 = 0$ y $a_1, a_2 \neq 0$ luego las condiciones de frontera son de tipo **Dirichlet**.
2. Si $a_1 = a_2 = 0$, $b_1, b_2 \neq 0$ uno dice que las condiciones de frontera son del tipo **Neumann**.
3. En otro caso se dice que las condiciones de frontera son de tipo **Mixta**.

Definición (Valor Propio de un PSL)

Si $\lambda = \lambda_n \in \mathbb{R}$ es tal que el (PSL) tiene soluciones **NO triviales** $y_n(x) \neq 0$, deducimos que λ_n es un valor propio del (PSL) y los y_n son funciones propias.

Definición (Ortogonalidad de Funciones)

Decimos que 2 funciones $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ (integrables sobre $[a,b]$) se dicen otrogonales con respecto al producto interior

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\, dx$$

si se cumple que

$$< f, g >_w = 0$$

Teorema Ortogonalidad Funciones Propias

Si $p(a) = 0 \vee (a_1, b_1) \neq (0, 0)$ Dos funciones propias y_1, y_2 de un **(PSL)** con valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e integrables sobre $[a, b]$ son **ortogonales** con respecto al producto interior:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

Teorema Proporcionalidad Funciones Propias

Si $(p(a) \neq 0 \wedge (a_1, b_1) \neq (0, 0)) \vee (p(b) \neq 0 \wedge (a_2, b_2) \neq (0, 0)$. Luego las funciones propias asociadas al mismo valor propio λ son proporcionales entre si.

Teorema No negatividad de los Valores Propios de un PSL

Considere un (**PSL**) definido en el intervalo $[a, b]$. Con $q(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Suponga además que los coeficientes de las condiciones de frontera satisfacen:

- $a_1 \geq 0,\ b_1 \geq 0$ tales que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$, o bien $p(a) = 0$.
- $a_2 \geq 0,\ b_2 \geq 0$ tales que $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, o bien $p(b) = 0$.

Entonces:

1. Los valores propios del PSL son no negativos, es decir, $\lambda \geq 0$.
2. $\lambda = 0$ es un valor propio si y solo si:

$$q(x) \equiv 0 \quad \text{y} \quad p(a)a_1 = p(b)a_2 = 0.$$

3. En este caso $(\lambda = 0)$, las funciones propias asociadas son **funciones constantes**.

Definición Regularidad de un PSL

Un problema de Sturm Liuville se dice regular si y solo si

1. $p(x) > 0 \quad , \forall x \in [a, b]$
2. $w(x) > 0 \quad , \forall x \in [a, b]$
3. $(a_1, b_1) \neq (0, 0) \quad , \quad (a_2, b_2) \neq (0, 0)$
4. $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$

Nota: La tercera hipotesis puede ser reemplazada por la condicion

$$a_1 b_1 \geq 0 \quad \wedge \quad a_2 b_2 \geq 0$$

Definición Ceros Simples

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1([a, b])$ tiene un cero simple en $x = r$ si y solo si $f(r) = 0 \wedge f'(r) \neq 0$

Teorema Cantidad de Valores Propios

Un **PSL** regular tiene una infinidad numerable de valores propios

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

ademas las funciones propias $y_n(x)$ asociadas a λ_n tienen exactamente ceros $(n-1)$ en (a, b) y estos son simples.

Teorema de Lioville

Los valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ de un PSL **regular** satisfacen

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty \quad n \to \infty$$

15. Series de Fourier Generalizadas

Definición Serie de Fourier Generalizada

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funcion integrable sobre $[a, b]$ y $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia ortonormal de funciones propias de un PSL regular. Los coeficientes

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle_w = \int_a^b f(x)\varphi_n w(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

se llaman coeficientes de fourier de f con respecto a $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

es la Serie de Fourier generalizada de f.

Teorema (Dirichlet Generalizado)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funcion CPT en $[a, b]$, derivable en (a, b) salvo en un numero finito de puntos de derivada CPT, Luego la Serie de Fourier Generalizada de f con respecto a $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) \quad , \forall x \in (a, b)$$

Si ademas f es continua en $[a, b]$ y satisface las condiciones de frontera

$$\begin{cases} a_1 f(a) - b_1 f'(a) = 0 \\ a_2 f(b) + b_2 f'(b) = 0 \end{cases}$$

Luego la Serie de Fourier generalizada **Converge Normalmente** y por tanto **Uniformemente** en $[a, b]$.

Definición Hipotesis H1

PSL regular.

Definición Hipotesis H2

f es continua en $[0, L]$ derivable en $(0, L)$ salvo en un numero finito de puntos de derivada f' CPT en $[0, L]$ y f satisface las CF

$$\begin{cases} a_1 f(0) - b_1 f'(0) = 0 \\ a_2 f(L) + b_2 f'(L) = 0 \end{cases}$$

Teorema (Convergencia de la S.F.G.)

Suponga que **(H1)** y **(H2)** son ciertas.

Sea $T_e(x)$ la solucion estacionaria del **(PVIF)**, Sean $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ los valores propios del (PSL). Con $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una familia de funciones propias y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los coeficientes de fourier de f con respecto a $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Luego la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)e^{-\lambda_n t}$$

Converge normalmente en $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ y su suma $T_{tr}(x,t)$ es continua en $\overline{D}$, de clase C^2 en $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}$ y satisface el (PVIFH). Ademas $T_{tr}(x,t) \to 0, t \to \infty, \quad \forall x \in [0,L]$. Por lo tanto

$$T(x,t) = T_{tr}(x,t) + T_e(x) = T_e(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)e^{-\lambda_n t}$$

Es **continua** en $\overline{D}$, de clase C^2 en D y satisface (PVIF). Ademas

$$T(x,t) \to T_e(x), t \to \infty \quad , \forall x \in [0,L]$$

15.1. Funciones de Green

Bajo las hipotesis del Teorema anterior, la solucion del (PVIF) se escribe como

$$\begin{aligned} T_{tr}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n(x)e^{-\lambda_n t} \\ &= \int_0^L f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x')\varphi_n(x)e^{-\lambda_n t} w(x')\, dx' \end{aligned}$$

Donde definimos

$$G(x',x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x')\varphi_n(x)e^{-\lambda_n t} w(x')$$

como la **Funcion de Green** asociada al (PVIFH).

16. Ecuacion de Onda

Definición (Ecuacion de Onda (E.O.))

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) = c^2 \partial_x^2 y(x,t) \\ y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \\ y(x,0) = f(x) \\ \partial_t y(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Teorema (D'Alembert)

La solucion general de la ecuacion de onda esta dada por:

$$y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \quad ,0 \leq x \leq L \quad , \quad t \geq 0$$

Donde $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $G : (-\infty, L]$ son funciones arbitrarias de clase C^2.

Teorema (Solucion de la E.O.)

Suponga que f es de clase C^2 y g de clase C^1 en $[0, L]$ y que

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0, \quad f''(0) = f''(L) = 0$$

Luego el **PVIF** es bien planteado y su unica solucion esta dada por (1), donde $\tilde{f}_I$ $\tilde{g}_I$ son las extensiones $2L-$periodicas impares de f y g.

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}_I(x+ct) + \tilde{f}_I(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}_I(x')\,dx' \tag{1}$$

17. Ecuacion de Laplace

18. Transformada de Fourier

Definición (Localmente Integrable)

Una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice localmente integrable si es integrable sobre cualquier compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definición Transformada de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funcion localmente integrable, si la integral

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt$$

converge para todo $w \in \mathbb{R}$, esa integral es la **Transformada de Fourier** de f la cual es una funcion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definición Valor Principal

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrable, el valor principal de la integral se define como el limite

$$(VP) \int_{-\infty}^{\infty} f\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f\, dx$$

Si f es integrable sobre $\mathbb{R}$ luego el (VP) existe y es igual a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f\, dx$

Nota: La reciproca **NO** es cierta.

Teorema Dirichlet para TF

Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, CPT en un intervalo $[t - \delta, t + \delta]$ con $\delta > 0$ y tiene derivadas a la izquierda y derecha en t. Luego $\hat{f}$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$ y el valor principal

$$(VP) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}\, dw = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

Si ademas $\hat{f}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$ luego f es continua en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}\, dw = (VP) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}\, dw$$

$$= f(t)$$

Definición Integral de Fourier

La integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}\,dt$$
se llama la **Integral de Fourier**

Teorema Propiedades de la Transformada de Fourier

1. $(\widehat{f+\alpha g})(w) = \hat{f}(w) + \alpha\hat{g}(w)$
2. Si $g(t) = f(-t)\forall t \in \mathbb{R}$ luego
$$\hat{g}(w) = \hat{f}(-w)$$
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ luego
$$\hat{g}(w) = \overline{\hat{f}(w)} \quad ,\forall t \in \mathbb{R}$$
En particular si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par o impar respectivamente se cumple que
$$\hat{f}(w) \in \mathbb{R} \quad , \quad \hat{f}(w) \in i\mathbb{R} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$
3. Sea $\mathcal{L}_{t_0}f(t) := f(t-t_0)$ la traslada de f por t_0 luego
$$(\widehat{\mathcal{L}f})(w) = \hat{f}(w)e^{-iwt_0} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$
4. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $g(t) = f(at)$ luego
$$\hat{g}(w) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$$
5. Si f es continua e integrable sobre $\mathbb{R}$, f es derivable en $[-a,a]$ salvo en quizas un numero finito de puntos y f' es CPT en $[-a,a], \forall a > 0$ y si f' es integrable sobre $\mathbb{R}$ luego
$$\hat{f}(w) = iw\hat{f}'(w) \quad ,\forall w \in \mathbb{R}$$
6. Suponga que f es CPT en cualquier intervalo compacto de $\mathbb{R}$, integrable sobre $\mathbb{R}$ y tal que $h(t) = tf(t)$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, entonces:
$$\hat{h}(w) = i\frac{d\hat{f}}{dw}(w) \quad ,\forall w \in \mathbb{R}$$

Teorema (Riemann-Lebesgue Generalizado)

Si f es integrable luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{irt}\,dt \to 0 \quad r \to \infty$$

Definición (Producto de Convolucion)

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrables, el producto de convolucion de f, g es la funcion $f * g$ definida por

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds \quad ,\forall t \in \mathbb{R}$$

Teorema (Propiedades del Producto de Convolucion)

Suponga que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables sobre $\mathbb{R}$, g es acotada y CPT en cualquier intervalo compacto de $\mathbb{R}$,luego $f * g$ es integrable sobre $\mathbb{R}$ y

$$(\widehat{f * g})(w) = 2\pi \hat{f}(w)\hat{g}(w) \quad ,\forall w \in \mathbb{R}$$

Ademas se puede mostar que

Teorema Identidad de Parseval

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, acotada y CPT en cualquier compacto de $\mathbb{R}$ y que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)(f(s \pm \varepsilon) - f(s))\,ds$$

existe, Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = (VP) \quad 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,dw$$

19. Solución de la Ecuación de Laplace en el semiplano

Consideremos el Problema de Valores de Frontera (PVIF) en el semiplano superior
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$:

$$\begin{cases} \Delta\phi(x,y) = 0, & (x,y) \in D \\ \phi(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \phi \text{ es acotada en } D \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable y continua por tramos (CPT) en cualquier intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Hemos visto anteriormente que una posible solución en términos de la transformada de Fourier está dada por:

$$\phi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-|w|y} e^{iwx}\, dw, \quad y > 0$$

Definamos ahora la función auxiliar $\hat{g}_y(w) = e^{-|w|y}$. Sea $g_y(x)$ su transformada de Fourier inversa. Recordando resultados previos, sabemos que:

$$g_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|y} e^{iwx}\, dw = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

A la función $g_y(x)$ se le denomina **Núcleo de Poisson**. Finalmente, aplicando el Teorema de Convolución, podemos reescribir la solución como:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= TF^{-1}\left(\hat{f}(w)\hat{g}_y(w)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(f * g_y)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{2y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \end{aligned}$$

Teorema 1

Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, acotada y continua en $\mathbb{R}$, luego

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} f * g_y$$

Es acotada en $\overline{D}$, se prolonga por continuidad de $\overline{D}$, es armonica en D y

$$\lim_{y \to 0^+} \phi(x,y) = f(x) \quad , \forall x \in D$$

19.1. Metodo directo para encontar la solucion del PVF usando TF

1. Tomar la T.F de la EDP con respecto a x. de aca tenemos que

$$(\widehat{\partial_x^2 \phi}) = (iw)^2 \hat{\phi}(x, y)$$

   Suponiendo que

$$(\widehat{\partial_y^2 \phi})(x, y) = \partial_y^2 \hat{\phi}(x, y)$$

   se obtiene

$$\partial_y^2 \hat{\phi}(x, y) = w^2 \hat{\phi}(x, y)$$

   Lo cual es una EDO para $y \mapsto \hat{\phi}(x, y)$.

2. Resolver la **EDO** para $w \in \mathbb{R}$ fijo. Asi deducimos que la solucion es

$$\hat{\phi}(w, y) = C_w e^{-|w|y} + D_w e^{|w|y} \quad , y > 0$$

   Imponiendo las condiciones de frontera se debe tener que ϕ es acotada en D por tanto

$$D_w = 0$$
$$\Rightarrow \hat{\phi}(w, y) = C_w e^{-|w|y}$$

3. Tomar la **T.F** de la C.F.
   En nuestro caso $\phi(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$, luego

$$\hat{\phi}(w, 0) = \hat{f}(w) \quad , w \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(w, 0) = C_w = \hat{f}(w)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(w, y) = \hat{f}(w) w e^{-|w|y}$$

4. Determinar la **T.F** inversa de $\hat{\phi}(w, y)$.
   Por lo visto anteriormente concluimos que

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} f * g_y$$

19.2. Ecuacion del Calor en una barra unidimensional Infinita

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\partial_x^2 T(x,t) \quad , (x,t) \in D \\ \lim_{x\to\infty} T(x,t) = 0 \\ T(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Donde f es integrable sobre $\mathbb{R}$, acotada y continua en $\mathbb{R}$ y

$$D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, t > 0\}$$

20. Apendice

20.1. Criterios de Convergencia

Teorema Criterio de comparacion Directa

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y

$$\sum b_n \text{ converge, entonces } \sum a_n \text{ converge.}$$

$$\sum a_n \text{ diverge, entonces} \sum b_n \text{ diverge.}$$

Teorema Criterio de Comparacion al Limite

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

con $0 < L < \infty$, entonces ambas convergen o divergen simultaneamente.

Teorema Criterio del Cociente

Si existe el limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Entonces

- Si $L < 1$ la serie converge absolutamente
- Si$L > 1$ o $L = \infty$ entonces la serie diverge
- Si $L = 1$ entonces el criterio no entrega informacion.

Teorema (Criterio de la raiz)

Sea

$$L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- Si $L < 1$ **converge absolutamente.**
- Si $L > 1$ **diverge.**
- Si $L = 1$ **no concluye.**

Teorema Criterio de la Integral

Si $f(x)$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$ entonces

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ converge}$$

Teorema Criterio de Leibniz

Dada una serie de la forma

$$\sum(-1)^n a_n \quad , a_n > 0$$

luego si:

- $a_{n+1} \leq a_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

entonces la serie converge.

20.2. Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

Dada una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

su polinomio característico asociado es

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Las soluciones de la EDO vienen dadas por

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

donde:

- $y_1(x)$ corresponde a la combinación de exponentiales asociadas a las raíces **distintas** del polinomio característico:

  $$y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_m e^{\lambda_m x},$$

  con $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathbb{C}$ raíces simples de $p(\lambda)$.

- $y_2(x)$ agrupa los términos asociados a las raíces **múltiples** de $p(\lambda)$, y tiene la forma

  $$y_2(x) = \sum_{j=1}^{r} \left(C_{j,1} e^{\lambda_j x} + C_{j,2} x e^{\lambda_j x} + \cdots + C_{j,m_j} x^{m_j - 1} e^{\lambda_j x} \right),$$

  donde λ_j es una raíz de multiplicidad $m_j > 1$.

En particular, cada raíz real o compleja del polinomio característico genera un conjunto de soluciones linealmente independientes que, combinadas, forman la **solución general** de la ecuación.

20.3. EDOs Euler-Cauchy

Las Edo de Euler-Cauchy son de la forma

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} \cdots + x y' + \alpha y = 0 \tag{1}$$

hacemos el cambio $x = e^s$, posteriormente hacemos $u(s) = y(e^s)$, de esto obtenemos

$$\begin{aligned} u'(s) &= y'(e^s) e^s \\ u''(s) &= y'(e^s) e^s + e^{2s} y''(s) \\ &\vdots \\ u^{(n)}(s) &= e^{ns} y^{(n)} + \ldots e^s y'(e^s) \end{aligned}$$

Asi (1) se reescribe

$$u^{(n)}(s) + \alpha u(s) = 0$$

Lo cual es una EDO lineal.