

ALGEBRA III (525201)

Ayudantía 6

La ayudantía 6 fue realizada el 26 de abril de 2022, pero solo alcanzamos a realizar el ejercicio 1 presentado a continuación y revisar el certamen 1.

1. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $D \subseteq V$ linealmente independiente. Pruebe que si $v \in V - \langle D \rangle$, entonces $D \cup \{v\}$ es linealmente independiente.

Solución.

Supongamos que $D \cup \{v\}$ es linealmente dependiente, i.e. existen $\{u_1, \dots, u_{n+1}\} \subseteq D \cup \{v\}$ tales que

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i u_i = \theta \quad (1)$$

con $\lambda_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Por hipótesis sabemos que lo anterior no es cierto si sólo se toman vectores en D , por lo que necesariamente la combinación lineal anterior debe incluir a v . Supongamos $u_{n+1} = v$. Luego, (1) se escribe

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} v = \theta$$

que, a su vez, se puede reordenar como

$$v = \sum_{i=0}^n \frac{-\lambda_i}{\lambda_{n+1}} u_i$$

lo cual es una contradicción, pues $v \notin \langle D \rangle$.