UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo (con algunas indicaciones) propuesto
Test 5 Taller de Razonamiento Matemático I 525041-1

1. (a) Demostrar $\forall\, A \subseteq \mathcal{U} \,:\, \forall\, B \subseteq \mathcal{U} \,:\, \forall\, C \subseteq \mathcal{U} \,:\, (A\backslash B)\backslash C \subsetneq A\backslash(B\backslash C)$. **10 puntos**

   Demostración: Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ fijos, pero arbitrarios. Recordando la definición de $\backslash$ y aplicando propiedades de operatoria de conjuntos, tenemos

$$(A\backslash B)\backslash C = (A \cap B^{\mathsf{c}}) \cap C^{\mathsf{c}} \subseteq A \cap B^{\mathsf{c}} \subseteq (A \cap B^{\mathsf{c}}) \cup (A \cap C) = A \cap (B^{\mathsf{c}} \cup C) = A \cap (B \cap C^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$$
$$\Rightarrow (A\backslash B)\backslash C \subseteq A\backslash(B\backslash C)\,.$$

   Como $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ son fijos pero arbitrarios, se concluye la propiedad. $\square$

   (b) Exhibir con un caso particular, que se cumple la inclusión estricta en (1a). **05 puntos**

   Desarrollo: Sean, $\mathcal{U} := \mathbb{N}$, $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 3\}$, $C := \{1\}$. Resulta

$$(A\backslash B)\backslash C = \{1\}\backslash\{1\} = \emptyset\,,$$
$$A\backslash(B\backslash C) = \{1, 2, 3\}\backslash\{2, 3\} = \{1\}\,,$$

   de donde se observa que para la elección de conjuntos indicada, se cumple la inclusión estricta pedida. $\square$

2. Considere la familia de subintervalos en $\mathbb{R}$, $\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}_0^+}$, donde $\forall\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, A_m := [2^m, 2^{m+1})$.
   Demostrar que $\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}_0^+}$ es una partición de $[1, +\infty)$. **15 puntos**

   Hint: El Principio del Buen Orden puede ser útil en alguna parte del desarrollo.

   Desarrollo: Deben verificarse las tres condiciones que caracterizan a una partición.

3. Considere la sucesión de *números de Fermat*, $\{F_m\}_{m\in\mathbb{Z}_0^+}$, tales que $\forall\, m \in \mathbb{Z}_0^+ \,:\, F_m := 2^{2^m} + 1$.
   Aplicando el Principio de Inducción Matemática, demostrar que
   $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+\backslash\{1\} \,:\, F_m = \overset{\circ}{10} + 7$.
   Debe definir, en primer lugar, el Conjunto de validez correspondiente. **15 puntos**

   Demostración: Definimos el Conjunto de validez asociado. Para esto, primero introducimos $\mathbb{A} := \mathbb{Z}^+\backslash\{1\}$.

$$S \,:=\, \{m \in \mathbb{A} \,:\, q(m)\}\,, \quad \text{siendo} \quad q(m) \,:\, F_m = \overset{\circ}{10} + 7\,.$$

   Validemos las condiciones del Principio de Inducción Matemática (3ra forma).
   $2 \in S$: en efecto, tenemos que $2 \in \mathbb{A}$. Luego, resta mostrar que $q(2)$ es cierta.

   Tenemos $q(2) \,:\, F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 = 10(1) + 7$, de donde $F_2 = \overset{\circ}{10} + 7$. Así, $q(2)$ es V, y en consecuencia $2 \in S$.

   Hipótesis de Inducción: $m \in S$, es decir $m \in \mathbb{A} \quad \wedge \quad q(m)$ es V. Esto significa que $\exists\, k \in \mathbb{Z}^+ \,:\, 2^{2^m} + 1 = 10(k) + 7$, es decir $2^{2^m} = 10(k) + 6$.

   Tesis de Inducción: $m + 1 \in S$, es decir $m + 1 \in \mathbb{A} \quad \wedge \quad q(m + 1)$ es V.
   Por un lado, como $m \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, resulta que $m + 1 \in \mathbb{A}$. Queda por probar que $q(m + 1)$ es verdadera.

En efecto,

$$\begin{aligned} q(m+1)\,:\, F_{m+1} = 2^{2^{m+1}}+1 = 2^{2\cdot 2^m}+1 = (2^{2^m})^2+1 &\overset{\text{(H.I.)}}{=} (10(k)+6)^2+1 \\ &= 100k^2+120k+37 = 10(\underbrace{10k^2+12k+3}_{\in\mathbb{Z}})+7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; F_{m+1} = \overset{\circ}{10}+7\,.$$

De esta manera, se establece que $q(m+1)$ es V. Así, $m+1 \in \mathbb{A}$.

Finalmente, invocando el Principio de Inducción Matemática - 3ra forma, se concluye que $S = \mathbb{A}$, es decir $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\,:\, F_m = \overset{\circ}{10}+7$. □

4. (a) Sean $a, b, p \in \mathbb{Z}^+$, siendo p un número primo.
   Demostrar: $p \mid ab \Rightarrow (p \mid a \vee p \mid b)$. **10 puntos**
   Desarrollo: Hipótesis: $p \mid ab$. Debe demostrarse la Tesis: $p \mid a \vee p \mid b$.

   (b) Determinar una terna $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, tales que $mcd(a, b, c) = 1$, pero $mcd(a, b) \neq 1$, $mcd(b, c) \neq 1$ y $mcd(a, c) \neq 1$. **05 puntos**
   Desarrollo: Consideremos los nḿeros enteros $a = 6 = (2)(3)$, $b = 10 = (2)(5)$ y $c = 15 = (3)(5)$. Se verifica lo pedido:

$$mcd(a, b, c) = mcd(6, 10, 15) = 1\,,\; mcd(a, b) = mcd(6, 10) = 2 \neq 1\,,$$
$$mcd(b, c) = mcd(10, 15) = 5 \neq 1\,,\; mcd(a, c) = mcd(6, 15) = 3 \neq 1\,.$$

- $\mathcal{U}$ denotará un conjunto universo (no vacío).
- $\mathcal{U}^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \mathcal{U}$,
- $(A^c)^c = A$,
- $A \cap A^c = \emptyset$,
- $A \cup A^c = \mathcal{U}$.
- $A \cup A = A$,
- $A \cup \emptyset = A$,
- $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap \mathcal{U} = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- Principio del Buen Orden: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_0^+$, posee un primer elemento.
- Sean $m, r \in \mathbb{N}$, con $r \in \{0, ..., m-1\}$. Entonces $x = \overset{\circ}{m} + r$ se lee: "x es un múltiplo de m, más r".