UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°4$ (Teorema de Fubini y producto de medidas)

Problemas a resolver en práctica

1. **Recordatorio:**

En el Listado de Ejercicios 1 a todo espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ le asociamos la σ-álgebra

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \text{ existen } B, C \in \mathcal{F} \text{ tales que } B \subset A \subset C \text{ y } \mu(C \setminus B) = 0\}$$

unida a la medida positiva sobre $\overline{\mathcal{F}}$ dada por

$$\overline{\mu}(A) = \mu(B),$$

donde $B, C \in \mathcal{F}$ satisfacen $B \subset A \subset C$ y $\mu(C \setminus B) = 0$. Luego, se demostró que $\overline{\mu}$ es una medida completa sobre $\left(\Omega, \overline{\mathcal{F}}\right)$.

Pregunta:

Considere los espacios de medidas positivas $(Y_1, \mathcal{U}_1, \lambda_1)$ y $(Y_2, \mathcal{U}_2, \lambda_2)$. Demuestre que $\overline{\mathcal{U}_1} \otimes \overline{\mathcal{U}_2} \subset \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}$.

Solución

Considere $A \in \overline{\mathcal{U}_1}$ y $B \in \overline{\mathcal{U}_2}$. Luego existen $A_1, A_2 \in \mathcal{U}_1$ tales que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $\lambda_1(A_2 \setminus A_1) = 0$, conjuntamente con $B_1, B_2 \in \mathcal{U}_2$ que satisfacen $B_1 \subset B \subset B_2$ y $\lambda_2(B_2 \setminus B_1) = 0$. Entonces

$$A_1 \times B_1 \subset A \times B \subset A_2 \times B_2.$$

Como

$$(A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = ((A_1 \cap A_2) \times (B_2 \setminus B_1)) \cup ((A_2 \setminus A_1) \times B_2),$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \otimes \lambda_2 \left((A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) \right) \\
&= \lambda_1 \otimes \lambda_2 \left((A_1 \cap A_2) \times (B_2 \setminus B_1) \right) + \lambda_1 \otimes \lambda_2 \left((A_2 \setminus A_1) \times B_2 \right) \\
&= \lambda_1 (A_1 \cap A_2) \lambda_2 (B_2 \setminus B_1) + \lambda_1 (A_2 \setminus A_1) \lambda_2 (B_2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $A \times B \in \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}$. Lo que implica $\overline{\mathcal{U}_1} \times \overline{\mathcal{U}_2} \in \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}$, de donde se tiene que $\sigma\left(\overline{\mathcal{U}_1} \times \overline{\mathcal{U}_2}\right) \subset \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}$. Como $\overline{\mathcal{U}_1} \otimes \overline{\mathcal{U}_2} = \sigma\left(\overline{\mathcal{U}_1} \times \overline{\mathcal{U}_2}\right)$,

$$
\overline{\mathcal{U}_1} \otimes \overline{\mathcal{U}_2} = \sigma\left(\overline{\mathcal{U}_1} \times \overline{\mathcal{U}_2}\right) \subset \overline{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2}.
$$

2. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{U}, \lambda)$ dos espacios de medidas σ-finitas. Asuma que $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}$. Recordemos que para todo $x \in X$ se define

$$
E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.
$$

Demuestre que $\mu \otimes \lambda (E) = 0$ si y solo si $\lambda (E_x) = 0 \;\; \mu$ casi dondequiera.

Solución

Primero, supongamos que $\lambda (E_x) = 0 \;\; \mu$ casi dondequiera. Luego

$$
\mu \otimes \lambda (E) = \int_X \lambda (E_x) \, d\mu (x) = 0 \cdot d\mu (X) = 0.
$$

Por otro lado, asumimos que $\mu \otimes \lambda (E) = 0$. Entonces

$$
\int_X \lambda (E_x) \, d\mu (x) = \mu \otimes \lambda (E) = 0.
$$

Lo que implica $\lambda (E_x) = 0 \;\; \mu$ casi dondequiera, porque $\lambda (E_x) \geq 0$ (ver Ejercicio 1 del Listado 2).

3. Considere el espacio de medida positiva $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Suponga que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una función medible no negativa. Demuestre que

$$
\int_\Omega f \, d\mathbb{P} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}\right) \nu (dx),
$$

donde ν es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, i.e., ν es la única medida sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ que satisface $\nu(]a,b]) = b-a$ para todo $b>a$.

Solución

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(]x,+\infty[)\right) = \int_\Omega I_{f^{-1}(]x,+\infty[)} d\mathbb{P}.$$

Así que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}) = \int_\Omega I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Para todo $(\omega,x) \in \Omega \times \mathbb{R}$ definimos la función

$$g(\omega,x) = f(\omega) - x.$$

Como g es $\mathcal{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-medible,

$$\{(\omega,x) \in \Omega\times\mathbb{R} : f(\omega) > x\} = g^{-1}(]0,+\infty[) \in \mathcal{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Luego $(\omega,x) \mapsto I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x)$ es $\mathcal{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-medible. Ya que

$$I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x) \geq 0,$$

aplicando el aplicando el teorema de Fubini llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,+\infty[} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\})\, d\nu(x) \\
&= \int_{\Omega\times[0,+\infty[} I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x)\, d\mathbb{P}\otimes\nu(\omega,x) \\
&= \int_\Omega \left(\int_{[0,+\infty[} I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x)\, d\nu(x) \right) d\mathbb{P}(\omega).
\end{aligned}$$

Como $I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x) = I_{[0,f(\omega)[}(x)$ para cada $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty[} I_{\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}: f(\omega)>x\}}(\omega,x)\, d\nu(x) &= \int_{[0,+\infty[} I_{[0,f(\omega)[}(x)\, d\nu(x) \\
&= \nu([0,f(\omega)[) = f(\omega).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{[0,+\infty[} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\})\, d\nu(x) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Considere el espacio medible $(Y, \mathcal{U})$ y $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}$. Demuestre que la aplicación $y \mapsto \mu(E^y)$ es $\mathcal{U}$-medible, donde

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

2. Sea ν es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

   b) $\nu \otimes \nu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}) = 0$

3. Sean $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ y $(X_3, \mathcal{F}_3, \mu_3)$ espacios de medidas σ-finitas. Identifique los productos cartesianos $(X_1 \times X_2) \times X_3$ y $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ con $X_1 \times X_2 \times X_3$. Demuestre que $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes (\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3)$ y que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

CMG/cmg.