Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ I: límites y continuidad
Dos ejemplos adicionales
Módulo 2, entre presentaciones 4 y 5

Raimund Bürger

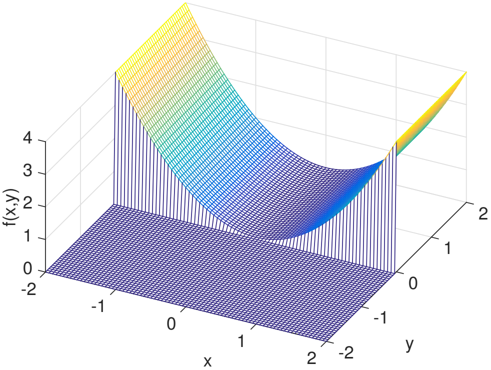
25 de mayo de 2020

Ejemplo 1

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{para } y > 0, \\ 0 & \text{para } y \leqslant 0. \end{cases}$$

Se solicita analizar en qué puntos la función f es continua.



Ejemplo 1

Solución sugerida

1.) Sea $x^0 \in \mathbb{R}$, $y^0 < 0$, y $r = \frac{1}{2}|y^0| > 0$. Entonces $f = 0$ sobre $U_r(x^0, y^0)$. Esto implica que $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U_r(x^0,y^0)$. En particular, ambas derivadas parciales existen y son acotadas en la vecindad $U_r(x^0,y^0)$ de (x^0,y^0). Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 2.3 concluimos que f es continua en (x^0,y^0).

2.) Sea $x^0 \in \mathbb{R}$, $y^0 > 0$, y $r = \frac{1}{2}|y^0| > 0$. Entonces $f(x,y) = x^2$ sobre $U_r(x^0,y^0)$. Esto implica que $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U_r(x^0,y^0)$. derivadas parciales existen en $U_r(x^0,y^0)$, y se tiene

$$\left|f_x(x,y)\right| = |2x| \leqslant \text{máx}\left\{2\left|x^0 + \frac{y^0}{2}\right|, 2\left|x^0 - \frac{y^0}{2}\right|\right\},$$

$$f_y(x,y) = 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in U_r(x^0,y^0).$$

Como ambas derivadas parciales son acotadas en la vecindad $U_r(x^0,y^0)$, podemos concluir que de acuerdo al Teorema 2.3, f es continua en (x^0,y^0).

Ejemplo 1

Solución sugerida (continuación).

3.) Sea $x^0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $y^0 = 0$. Para estos puntos se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\left|f(x^0, y^0 + h) - f(x^0, y^0)\right| &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}|(x^0)^2 - 0| \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(x^0)^2}{h} \overset{h\to 0, h>0}{\longrightarrow} \infty,\end{aligned}$$

es decir este límite no existe y por lo tanto $f_y(x^0, y^0)$ no existe. Esto significa que no podemos aplicar el Teorema 2.3. Efectivamente, f es discontinua en estos puntos. Sea la sucesión $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $x_k = x^0$ y $y_k = 1/k$. Entonces $f(x_k, y_k) = (x^0)^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $(x_k, y_k) \to (x^0, 0)$ cuando $k \to \infty$, pero

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = (x^0)^2 \neq f(x^0, 0) = 0.$$

Esta desigualdad significa que f no es continua en puntos $(x^0, y^0) = (x^0, 0)$ cuando $x^0 \neq 0$.

Ejemplo 1

Solución sugerida (continuación).

4.) Queda por analizar $(x^0, y^0) = (0,0)$. En este caso, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left|f(x^0, y^0 + h) - f(x^0, y^0)\right| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}|0 - 0| = 0,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left|f(x^0 + h, y^0) - f(x^0, y^0)\right| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}|0 - 0| = 0.$$

Ambas derivadas parciales existen en (x^0, y^0) y son evidentemente acotadas. Pero para cualquier $\tilde{x} \neq 0$ se tiene

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\left|f(\tilde{x}, y^0 + h) - f(\tilde{x}, y^0)\right| = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\tilde{x}^2}{h} \xrightarrow{h\to 0, h>0} \infty,$$

es decir la derivada parcial f_y no existe en ningún punto $(\tilde{x}, 0)$ con $\tilde{x} \neq 0$. Por lo tanto, no existe ninguna vecindad $U_r(x^0, y^0)$ tal que f_y existe y es acotada para todo $(x, y) \in U_r(x^0, y^0)$.

Ejemplo 1

Solución sugerida (continuación).

5.) Concluimos que el Teorema 2.3 no puede ser aplicado. No obstante, f es continua en $(0,0)$. Para ver esto, notamos que

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| \leqslant |x^2 - 0| = x^2.$$

Es decir, para $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| < \varepsilon$$

si

$$|(x,y) - (0,0)| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon}.$$

Esto significa que f es continua en $(0,0)$.

Ejemplo 2

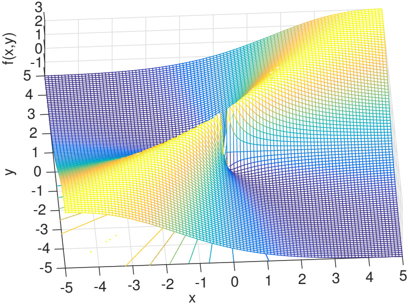
Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy}{x^2-xy+y^2} & \text{para } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{para } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Demostrar que $-1\leqslant f(x,y)\leqslant 3$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) Analizar en qué puntos la función f es continua.

Se solicita analizar en qué puntos la función f es continua.



Ejemplo 2

Solución sugerida

a) Si $xy = 0$, entonces $f(x,y) = 0$, es decir $-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 3$. Supongamos que $xy \neq 0$. En tal caso,

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0,$$

y podemos calcular

$$\frac{3xy}{x^2 - xy + y^2} \leqslant 3 \Leftrightarrow 3xy \leqslant 3x^2 - 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow 6xy \leqslant 3x^2 + 3y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0,$$
$$\frac{3xy}{x^2 - xy + y^2} \geqslant -1 \Leftrightarrow 3xy \geqslant -x^2 + xy - y^2 \Leftrightarrow 0 \geqslant -(x+y)^2.$$

Combinando las desigualdades, obtenemos $-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

Solución sugerida (continuación)

b) Para $(x, y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3y(x^2 - xy + y^2) - 3xy(2x - y)}{(x^2 - xy + y^2)^2} = \frac{3y(y^2 - 2x)}{(x^2 - xy + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x(x^2 - 2y)}{(x^2 - xy + y^2)^2}.$$

Para $(x, y) \neq (0,0)$, ambas funciones son bien definidas y acotadas sobre cada vecindad $U_r(x^0, y^0)$ si, por ejemplo, $r = \frac{1}{2}|(x_0, y_0)|$. Por lo tanto, f es continua en $(x^0, y^0) \neq (0,0)$.
Para $(x^0, y^0) = (0,0)$, consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = 3 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Ejemplo 2

Solución sugerida (continuación)

b) Consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, -1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) = -1 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Como ambos limites son desiguales, f no es continua en $(0,0)$.