Derivada Radón–Nikodým.

- Continuidad absoluta entre medidas.
- Derivada Radón–Nikodým.
- Descomposición de Lebesgue.
- Funcionales lineales acotados.

Continuidad absoluta entre medidas.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X})$ es un espacio medible. Recordemos:

Def.: Dadas dos medidas λ y μ definidas en $\mathscr{X}$, λ es **absolutamente continua** con respecto a μ si $\forall E \in \mathscr{X}$ con $\mu(E) = 0$, $\lambda(E) = 0$.
En tal caso, denotamos $\lambda \ll \mu$.

La relación de continuidad absoluta también se define para medidas con signo, a través de sus variaciones totales:

Def.: Sean λ y μ medidas con signo en $\mathscr{X}$. λ es **absolutamente continua** con respecto a μ si $|\lambda| \ll |\mu|$.

Recordemos el siguiente corolario, que demostramos clases atrás:

Corol.: Sean $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ y $\lambda : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida definida $\forall E \in \mathscr{X}$ por $\lambda(E) := \int_E f \, d\mu$. Entonces, λ es absolutamente continua respecto a μ.

En la clase de hoy veremos el **Teorema de Radón–Nikodým**, que establece que para medidas σ-finitas, vale el recíproco de este corolario.

El siguiente lema da un caracterización analítica de la relación de continuidad absoluta para medidas finitas:

Lema: Sean λ y μ medidas finitas en $\mathscr{X}$. Entonces,
$\lambda \ll \mu$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall E \in \mathscr{X} : \ \mu(E) < \delta, \ \lambda(E) < \varepsilon.$

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Por el absurdo. Supongamos que
$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta = 2^{-n}, \ n \in \mathbb{N}, \ \exists E_n \in \mathscr{X} : \ \mu(E_n) < 2^{-n}$ y $\lambda(E_n) \geq \varepsilon.$

Sean $F_n := \bigcup_{k \geq n} E_k \implies \mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\mu(E_k)}_{<2^{-k}} < 2^{-n+1}, \ n \in \mathbb{N},$
mientras que $\lambda(F_n) \geq \lambda(E_n) \geq \varepsilon, \ n \in \mathbb{N}.$

Sea $F := \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Como por hipótesis λ y μ son medidas finitas:
$\mu(F) = \lim_n \mu(F_n) \leq \lim_n 2^{-n+1} = 0$ y
$\lambda(F) = \lim_n \lambda(F_n) \geq \varepsilon > 0 \implies \lambda \not\ll \mu.$ $\rhd\!=\!\lhd$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $E \in \mathscr{X} : \ \mu(E) = 0 \implies \mu(E) < \delta \quad \forall \delta > 0.$ Entonces,
por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0, \ \lambda(E) < \varepsilon \implies \lambda(E) = 0 \implies \lambda \ll \mu.$ ■

Derivada Radón–Nikodým.

Teor. [Radón–Nikodým]: Sean λ y μ medidas σ-finitas en $\mathscr{X}$ tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces, existe $f \in M^+(X, \mathscr{X})$ tal que $\lambda(E) := \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \mathscr{X}$. Además, f es única c.t.p.

Dem.: Ver la dem. del Teor. 8.9. ∎

Def.: La función f del teorema anterior se denomina la **derivada Radón–Nikodým de λ respecto de μ** y se denota $\frac{d\lambda}{d\mu}$.

En los **Ej. 8.N–Q** se demuestra que la derivada Radón–Nikodým satisface propiedades análogas a las de las derivadas de funciones. Esa es la razón de este nombre y esta notación.

Notemos que, en el teorema anterior, la función f no tiene por qué ser integrable Lebesgue. De hecho, $f \in L(X, \mathscr{X}, \mu)$ si y sólo si λ es una medida finita.

Descomposición de Lebesgue.

Def.: λ y μ, medidas en $\mathscr{X}$, son **mutuamente singulares**, si $\exists A, B \in \mathscr{X}$: $X = A \,\dot\cup B$, con $\lambda(A) = 0$ y $\mu(B) = 0$. En tal caso, denotamos $\lambda \perp \mu$.

Teor. [descomposición de Lebesgue]: Sean λ y μ medidas σ-finitas en $\mathscr{X}$. Entonces, $\exists \lambda_1, \lambda_2$ medidas en $\mathscr{X}$: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, con $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$.

Dem.: Sea $\nu := \lambda + \mu$. $\overset{\text{Ej.}}{\Longrightarrow}$ ν es una medida σ-finita, $\lambda \ll \nu$ y $\mu \ll \nu$.

$\overset{\text{T.R.N}}{\Longrightarrow}$ $\exists f \in M^+(X, \mathscr{X})$: $\mu(E) = \int_E f \, d\nu \quad \forall E \in \mathscr{X}$.

Sean $A := \{x \in X : f(x) = 0\}$ y $B := \{x \in X : f(x) > 0\}$.

$\Longrightarrow \quad X = A \,\dot\cup B.$

Sean $\lambda_1(E) := \lambda(E \cap A)$ y $\lambda_2(E) := \lambda(E \cap B)$, $E \in \mathscr{X}$, medidas $\boxed{\textbf{Ej. 3.A}}$

$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E)$, $E \in \mathscr{X} \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$\mu(A) = \int_A f \, d\nu = 0$ y $\lambda_1(B) = \lambda(B \cap A) = \lambda(\emptyset) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 \perp \mu.$

Falta demostrar que $\lambda_2 \ll \mu$. Sea $E \in \mathscr{X}$: $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f \, d\nu = 0$

$\overset{f \geq 0}{\Longrightarrow}$ $f|_E = 0$ ν-c.t.p $\Longrightarrow \nu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = \nu(E \cap B) = 0$

$\overset{\lambda \ll \nu}{\Longrightarrow}$ $\lambda(E \cap B) = 0 \Longrightarrow \lambda_2(E) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 \ll \mu.$ ■

Funcionales lineales acotados.

A lo largo de esta sección, $\left(E, \|\cdot\|\right)$ es un espacio vectorial normado (E.V.N.)

Def.: • A cualquier función $G: E \to \mathbb{R}$ se la denomina un **funcional** en E y se suele denotar $Gf := G(f), \quad f \in E$.

• Un funcional $G: E \to \mathbb{R}$ es **lineal** si

$$G(f+g) = Gf + Gg \quad \text{y} \quad G(\alpha f) = \alpha Gf \qquad \forall f, g \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

• Un funcional $G: E \to \mathbb{R}$ es **acotado** si $\exists M \geq 0$:

$$|Gf| \leq M \, \|f\| \qquad \forall f \in E.$$

• El **espacio dual** de E es el conjunto E' de todos los funcionales lineales acotados:

$$E' := \{G: E \to \mathbb{R}, \text{ funcional lineal acotado}\}.$$

• Sea $\|\cdot\|': E' \to \mathbb{R}$, definida por $\|G\|' := \sup\limits_{f \in E:\ f \neq 0} \dfrac{|Gf|}{\|f\|}, \quad G \in E'$.

Lema: a) $\left(E', \|\cdot\|'\right)$ es un **E.V.N.**

b) $|Gf| \leq \|G\|' \, \|f\|$ y $\|G\|' = \sup\limits_{f \in E:\ \|f\| \leq 1} |Gf| = \sup\limits_{f \in E:\ \|f\| = 1} |Gf|$.

Dem.: $\boxed{\text{Ej.}}$

Lema: Un funcional lineal es acotado si y sólo si es continuo.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $G: E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal acotado

$\Longrightarrow \exists M \geq 0 : |Gf| \leq M \|f\| \quad \forall f \in E.$

Sean $f, g \in E$. Entonces, $|Gf - Gg| = |G(f-g)| \leq M \|f - g\|$

$\Longrightarrow$ G **Lipschitz continuo.**

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $G: E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo $\Longrightarrow$ G continuo en 0

$\Longrightarrow$ para $\varepsilon = 1, \ \exists \delta > 0 : \ \forall f \in E : \|f\| \leq \delta, \ |Gf| \leq \varepsilon = 1.$ (1)

Veamos que $\forall f \in E, |Gf| \leq M \|f\|$ con $M = \frac{1}{\delta}$.

Si $f = 0$ no hay nada que demostrar.

Si $f \neq 0$, $\quad |Gf| = \left| G\left(\frac{\|f\|}{\delta} \frac{\delta f}{\|f\|} \right) \right| = \frac{\|f\|}{\delta} \left| G\left(\frac{\delta f}{\|f\|} \right) \right| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|,$

pues, por (1), $\left\| \frac{\delta f}{\|f\|} \right\| = \delta \Longrightarrow G\left(\frac{\delta f}{\|f\|} \right) \leq \varepsilon = 1.$

Entonces, G **es acotado.** ■

Notemos que en realidad hemos demostrado que un funcional lineal es acotado (y por lo tanto continuo) si y sólo si es **continuo en 0.**

El siguiente lema es un primer paso para caracterizar el espacio dual de L_p.

Lema: Sean p y q conjugados con $1 \leq p < +\infty$.
Dada $g \in L_q$, sea $G: L_p \to \mathbb{R}$ definida por

$$Gf := \int fg\,d\mu, \qquad f \in L_p.$$

Entonces G es un funcional lineal acotado en L_p y $\|G\|_p' = \|g\|_q$.

Dem.: Claramente G es un funcional lineal en L_p.
Por la desigualdad de Hölder, $|Gf| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$$\Longrightarrow G \text{ acotado y } \|G\|_p' = \sup_{f \in E:\ f \neq 0} \frac{|Gf|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q.$$

La otra desigualdad (y por lo tanto la igualdad) se demuestra en el **Ej.6.O** ■

Este lema muestra que si $p < \infty$, cada función de L_q induce un funcional lineal acotado en L_p. La clase próxima veremos que si μ es σ-finita, vale un resultado recíproco:

$$\forall G \in L_p', \quad \exists g \in L_q: \quad Gf := \int fg\,d\mu \quad \forall f \in L_p.$$

De ese modo, podremos identificar L_p' y L_q.