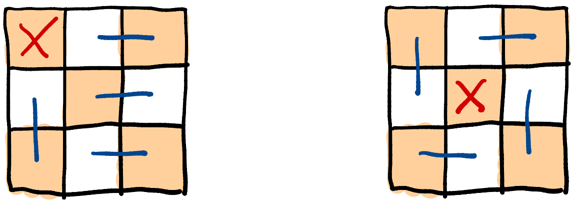
525043 - **Taller de Razonamiento Matemático II**

Evaluación 1 - Solución

Ejercicio 1. Dado $n \geqslant 3$ impar, tenemos un tablero de ajedrez de $n \times n$ cuyas esquinas son de color negro. A este tablero le quitamos una casilla que es de color negro. Muestra que puedes cubrirlo perfectamente con dominós (piezas rectangulares de 2×1).

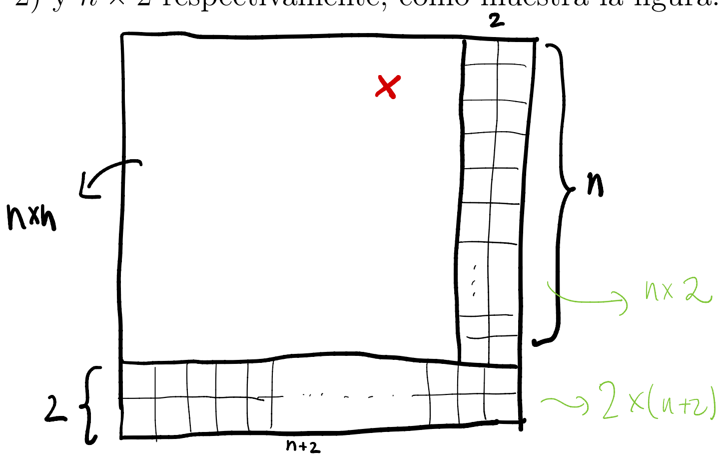
Solución. Como n es impar y al menos 3, podemos escribirlo como $n = 2k + 1$ con $k \geqslant 1$. Probaremos la afirmación por inducción en k.

En el caso base, $k = 1$ y $n = 3$. Salvo simetría, hay solo dos opciones posibles al retirar una casilla negra: retirar una de la esquina o la de al centro. En ambos casos, se puede cubrir el tablero con dominós, como se ve:



Como hipótesis inductiva, supongamos que $k \geqslant 1$ está dado, que $n = 2k + 1$ y que todo tablero de $n \times n$ con esquinas negras al que se le ha quitado una casilla negra puede ser cubierto perfectamente con dominós.

Debemos probar la tesis inductiva, es decir, que dado cualquier tablero de $(n + 2) \times (n + 2)$ con esquinas negras al que se le ha quitado una casilla negra puede ser cubierto perfectamente con dominós. En este tablero grande podemos separarlo en tres partes. La primera forma un subtablero de $n \times n$ y (girando el tablero, si es necesario) contiene la casilla retirada. Los otros dos subtableros son de $2 \times (n + 2)$ y $n \times 2$ respectivamente, como muestra la figura:

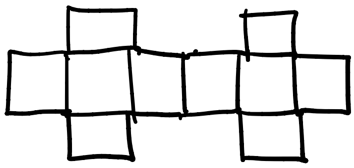


Por hipótesis inductiva, el subtablero de $n \times n$ puede ser cubierto perfectamente con dominós. Para cubrir los otros tableros, notamos simplemente que el de $2 \times (n + 2)$ se puede cubrir con $n + 2$ dominós verticales y el de $n \times 2$ con n dominós horizontales. Luego, el tablero de $(n+2) \times (n+2)$, con la casilla retirada, se cubre perfectamente con dominós. Esto demuestra la tesis inductiva, y termina la demostración. ■

§1. Comentarios

La mayoría intentó hacerlo por inducción, y muchos tenían la intuición correcta.

El error más común fue el siguiente: muchas personas contaron la cantidad de casilla en el tablero y razonaron diciendo algo como “la cantidad de fichas que quedan el tablero es par, cada dominó cubre dos casillas, por lo tanto se puede cubrir el tablero”. El razonamiento es incorrecto y la afirmación es falsa. Ya vimos (Ejercicio 5 del Listado 2) justamente una situación donde la cantidad de casillas es par y no se puede cubrir con dominós. Acá hay otro ejemplo:



10 casillas
pero no se puede
cubrir con dominós!

Algunas personas que sí argumentaron correctamente igual insistían en calcular que la cantidad de casillas y mostrar que es par. Como se ve en la solución planteada, nada de esto era necesario.

Otro error cometido (aunque no tan común) es que algunas personas interpretaron el enunciado como que solo se podía sacar una casilla de la esquina; o que les faltó analizar todos los casos bases.

Algunas personas separaron el tablero en dos formas posibles, quitando “todo el borde” o como se mostró en la solución escrita. En realidad la última separación del tablero es suficiente, porque siempre podemos hacer que el subtablero de $n \times n$ contenga la casilla que quitamos. Por supuesto, esto no es un error, pero hacerlo de la forma presentada ahorra trabajo.