Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación de recuperación — lunes 31 de agosto de 2020

Entrega: hasta las 19.00 horas (cierre de CANVAS)

Problema 1. (12 puntos) Utilizando el Teorema Integral de Green, calcular las siguientes integrales de línea:

a) Si Γ es la curva $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ recorrida en sentido antihorario,

$$I = \int_\Gamma \bigl(y^3 - xy^2 \sin(xy)\bigr)\,\mathrm{d}x + \bigl(4xy^2 - x^2 y \sin(xy)\bigr)\,\mathrm{d}y.$$

b) Si C es el camino de $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre la gráfica de $y = x^3$ y de $(1,1)$ a $(0,0)$ sobre la gráfica $y = x$,

$$\int_C y^3\,\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2)\,\mathrm{d}y.$$

Problema 2. (12 puntos)

a) Sea R la region interior de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Utilizando el Teorema de Green, calcular la integral de línea

$$\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2x)\,\mathrm{d}y,$$

donde C es la frontera de R.

b) Sea ahora R una región plana, limitada por una curva plana cerrada simple y suave a trozos (curva de Jordan) C. Demostrar que el área de R, denotada $|R|$, viene dada por

$$|R| = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

c) Utilizando (b), calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Problema 3. (12 puntos) Calcular la integral de superficie

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

en cada uno de los siguentes casos:

a) S la parte de $x^2+z^2=4$ correspondiente a $x\geq 0$, $z\geq 0$ e $0\leq y\leq 1$, $f(x,y,z)=xyz$.

b) S la parte de la superficie $x^2+z^2+(z-a)^2=a^2$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2=ay$, debajo del plano $z=a$ $(a>0)$, y

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2az-z^2}}.$$

(Se puede utilizar que $\arcsin(x/a)$ es una primitiva de la función $1/\sqrt{a^2-x^2}$.)

Problema 4. (12 puntos) Utilizando el Teorema Integral de Gauss, calcular:

a) La integral $\iint\limits_D \vec{f}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$, donde D es el sólido limitado por $x^2+y^2=4$, el plano $x+z=6$ y el plano (x,y), S es la superficie de D, $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal exterior de S, y

$$\vec{f}(x,y,z)=\{x^2+\sin z, xy+\cos z, \mathrm{e}^y\}.$$

b) La integral $\iint\limits_D \vec{f}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$, donde D es la región sólida limitada por los planos de coordenadas y el plano $2x+2y+z=6$, y

$$\vec{f}(x,y,z)=\{x,y^2,z\}.$$

Problema 5. (12 puntos) Usando el Teorema de Stokes, calcular la integral de línea

$$\int_\Gamma 3y\,\mathrm{d}x-xz\,\mathrm{d}y-yz^2\,\mathrm{d}z,$$

donde Γ es la intersección de la superficie definida por $2z=x^2+y^2$ recorrida en sentido antihorario vista desde el eje z positivo hacia el origen.