UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CAMBIOS DE VARIABLE Y APLICACIONES
CÁLCULO III (525221)

Teorema 1 (Fubini). Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to \mathrm{R}$ una función acotada e integrable en el rectángulo, entonces

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dydx$$

y si $f(x,y)=g(x)h(y)$ entonces

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy$$

Teorema 2 (de Cambio de Variable en $\mathbb{R}^2$). Sea $f:B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua de variables x,y definida en la región B y sea $T:A\to B$ tal que $(x,y)=T(u,v)$ una función inyectiva en B de clase C^1 con jacobiano no nulo, es decir

$$JT(u,v)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

entonces para todo $(u,v)\in A$

$$\iint_B f(x,y)d(x,y)=\iint_A f(x(u,v),y(u,v))|JT(u,v)|d(u,v)$$

Teorema 3 (de Cambio de Variable en $\mathbb{R}^3$). Sea $f:B\subset\mathbb{R}^3\to \mathrm{R}$ una función continua de variables $x\ y,z$ definida en la región B y sea $T:A\to B$ tal que $(x,y,z)=T(u,v,w)$ una función inyectiva en B de clase C^1 con jacobiano no nulo, entonces para todo $(u,v,w)\in A$

$$\iiint_B f(x,y)d(x,y)=\iiint_A f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|JT(u,v,w)|d(u,v,w)$$

Cambios de Variable usuales.

1. Coordenadas Polares: $\Psi:[0,+\infty[\times[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\Psi\left(r,\theta\right)=(x,y)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right),\quad\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}\right|=r$$

2. Coordenadas Cilíndricas: $\Psi:[0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\Psi\left(r,\theta,z\right)=(x,y,z)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta,z\right),\quad\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\theta,z\right)}\right|=r$$

3. Coordenadas Esféricas: $\Psi:[0,+\infty[\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\Psi\left(r,\theta,z\right)=(x,y,z)=\left(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi\right),\quad\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\theta,\varphi\right)}\right|=-r^2\sin\varphi$$

Aplicaciones

(1) Área

- $A(S) = \iint_S dA$

(2) Volumen

- $V(S) = \iiint_S dV$

(3) Masa

Denotamos $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la densidad del sólido S.

- $m(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)\ dV$

(4) Densidad Media

- $\bar{\rho}(x,y,z) = \dfrac{m(S)}{V(S)}$

(5) Masa Puntual

- $M_x(S) = \iiint_S x\rho(x,y,z)\ dV$
- $M_y(S) = \iiint_S y\rho(x,y,z)\ dV$
- $M_z(S) = \iiint_S z\rho(x,y,z)\ dV$

(6) Centro de Gravedad (Masa)

- Centro de Masa: $\left(\dfrac{M_x}{m}, \dfrac{M_y}{m}, \dfrac{M_z}{m}\right)$

(7) Momentos de Inercia

- $I_x(S) = \iiint_S \left(y^2 + z^2\right) \rho(x,y,z)\ dV$
- $I_y(S) = \iiint_S \left(x^2 + z^2\right) \rho(x,y,z)\ dV$
- $I_z(S) = \iiint_S \left(x^2 + y^2\right) \rho(x,y,z)\ dV$