Sucesiones y series de funciones.

- **Sucesiones y series de funciones.**
- **Convergencia uniforme de sucesiones.**
- **Sucesiones uniformemente de Cauchy.**
- **Convergencia uniforme de series.**
- **Convergencia en** $\mathscr{B}(E)$.

Sucesiones y series de funciones.

A lo largo de esta clase, X e Y son espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente, y $E \subset X$.

Def.: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una **sucesión de funciones** $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.
La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en** E a $f : E \to Y$, si para cada $x \in E$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y. En tal caso, denotamos

$$f_n \xrightarrow{n} f \qquad \text{o} \qquad \lim_n f_n = f.$$

A veces diremos que la sucesión **converge puntualmente,** para distinguir ésta de otras formas de convergencia. Es decir que

$$\boxed{f_n \xrightarrow{n} f \text{ puntualmente en } E} \iff \boxed{f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \quad \forall x \in E.}$$

Def.: Sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$, o $\mathbb{R}^k$), $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge (puntualmente) en** E si $\forall x \in E$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en $\mathbb{R}$.
En tal caso, la **suma de la serie de funciones** es la función $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$.

Preguntas:

- Si $f_n : E \to Y$ son continuas $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en E ¿es f continua?

- Si $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ son derivables $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en (a,b) ¿es f derivable?

- Si $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ son derivables $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente y f es derivable en (a,b) ¿se cumple que $f_n' \xrightarrow{n} f'$ en (a,b) ?

- Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann en $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en $[a,b]$ ¿es f integrable Riemann en $[a,b]$?

- Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann en $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en $[a,b]$ y f es integrable Riemann en $[a,b]$ ¿se cumple que $\int_a^b f_n \xrightarrow{n} \int_a^b f$?

La respuesta a todas estas preguntas es que, en general, **¡no!** Veremos ejemplos que muestran esto.

La conclusión es que la convergencia puntual es una forma demasiado débil de convergencia como para que se cumplan esas propiedades.

Veamos con mayor detalle la primera de estas preguntas.

Sean $f_n : E \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, continuas en un punto de acumulación $x \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en E ¿es f continua en x ?

$$f \text{ continua en } x \iff \lim_{t \to x} f(t) = f(x) = \lim_{n} f_n(x)$$

$$\iff \lim_{t \to x} \left[\lim_{n} f_n(t) \right] = \lim_{n} \left[\lim_{t \to x} f_n(t) \right].$$

Es decir que la continuidad de la función f en un punto equivale a que el valor de un límite doble sea independiente del orden en el que se calculen esos dos límites.

Sin embargo, en general, el valor de un límite doble depende de ese orden.

Ejemplo: **Sucesiones dobles.** Sean $s_{m,n} := \dfrac{m}{m+n}$, $\quad m, n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{m,n} := \frac{m}{m+n} = \frac{1}{1+n/m} \xrightarrow{m} 1 \implies \lim_{n} \left(\lim_{m} s_{m,n} \right) = 1.$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ s_{m,n} := \frac{m}{m+n} = \frac{1}{1+n/m} \xrightarrow{n} 0 \implies \lim_{m} \left(\lim_{n} s_{m,n} \right) = 0.$$

Por lo tanto, $\displaystyle \lim_{m} \left(\lim_{n} s_{m,n} \right) \neq \lim_{n} \left(\lim_{m} s_{m,n} \right).$ $\square$

Ejemplo: Límite discontinuo de funciones continuas.

Sean $f_n(x) := \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, la función f_n y la suma parcial $S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ son continuas en $\mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0 \implies S_n(0) = 0 \implies F(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n = 1$ $\boxed{\text{Ej.}}$

$$\implies F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

$\implies F$ es discontinua en $x = 0$ (tiene una discontinuidad evitable), pese a que $F = \lim_n S_n$ y las sumas parciales S_n son continuas $\square$

Ejemplo: Límite no derivable de funciones derivables.

En el ejemplo anterior, las funciones f_n no sólo son continuas, sino que son derivables, al igual que las sumas parciales S_n. Sin embargo el límite de éstas, F, es discontinuo en $x = 0$ y por lo tanto no es derivable en ese punto. $\square$

Ejemplo: Límite de funciones derivables.

Sean $f_n(x) := \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $f(x) := \lim_n f_n(x) = \lim_n \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Las funciones f_n son derivables y $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

La función límite f también es derivable y su derivada es $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, $f_n'(0) = \sqrt{n} \xrightarrow{n} +\infty$, de modo que $f_n'(0) \overset{n}{\not\to} f'(0)$. $\square$

Ejemplo: Límite no integrable Riemann de funciones integrables Riemann.

Sea $\{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una numeración de los racionales de $[0,1]$.

Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = q_n, \\ 0, & \text{si } x \neq q_n, \end{cases}$

Sea $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Entonces, $F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ **Ej.**

Las funciones f_n, $n \in \mathbb{N}$, son integrables Riemann, **Ej.**

Por lo tanto, las sumas parciales $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ también lo son.

Sin embargo, $F(x) = \lim_n S_n$ no es integrable Riemann. $\square$

Ejemplo: **Límite de funciones integrables Riemann.**

Dado $\alpha \geq 0$, sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f_n(x) := n^\alpha x \left(1 - x^2\right)^n, \quad 0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(0) \xrightarrow{n} 0, \\ \forall x \in (0,1),\ f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^n} \xrightarrow{n} 0 \qquad \left(\text{pues } \frac{1}{1-x^2} > 1\right). \\ f_n(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(1) \xrightarrow{n} 0. \end{cases}$$

$$\implies f_n \xrightarrow{n} f \equiv 0.$$

Por otra parte, usando la regla de sustitución (con $t = x^2$),

$$\int_0^1 f_n = n^\alpha \int_0^1 x\left(1 - x^2\right)^n dx \overset{\boxed{\text{Ej.}}}{=} \frac{n^\alpha}{2(n+1)} \xrightarrow{n} \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq 1$, $\int_0^1 f_n \overset{n}{\not\to} 0 = \int_0^1 f.$ $\square$

Convergencia uniforme de sucesiones.

Sean $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : E \to Y$.

Recordemos que $f_n \xrightarrow{n} f$ puntualmente en E si $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \quad \forall x \in E$, que por la definición de convergencia de una sucesión es equivalente a

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.}$$

En esta definición, N depende no sólo de ε, sino también del punto $x \in E$.

En lo que sigue, definiremos una noción de convergencia de una sucesión de funciones más fuerte que la convergencia puntual: la convergencia uniforme.

Def.: Sean $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $f : E \to Y$.
La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente a f en E** si

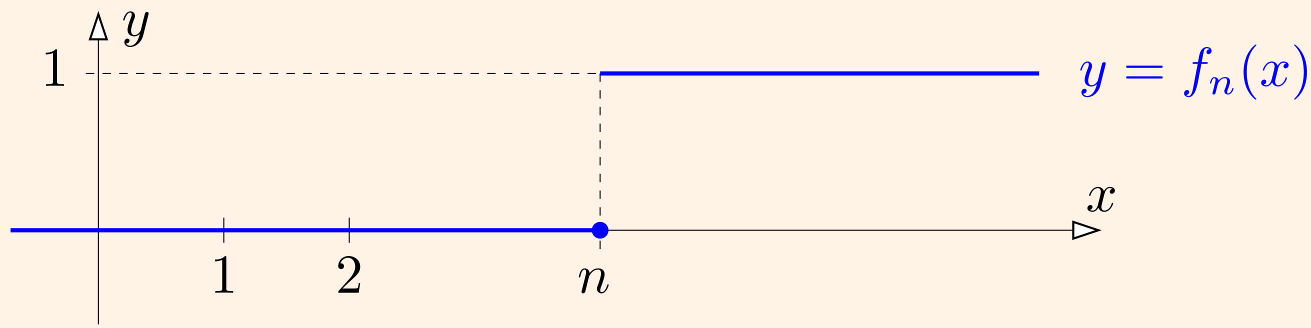
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in E, \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.}$$

- En esta definición, N depende sólo de ε, no del punto $x \in E$.
- Notemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en E si y sólo si

$$\boxed{\sup_{x\in E} d_Y(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{n} 0.}$$

Claramente, la convergencia uniforme implica la puntual, pero no vale la recíproca.

Ejemplo: Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por $f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \le n, \\ 1, & \text{si } x > n. \end{cases}$



Para cada $x \in X$, sea $N \in \mathbb{N} : N \ge x$. Entonces, $\forall n \ge N$, $n \ge x$
$\implies f_n(x) = 0 \implies f_n \xrightarrow{n} 0$ puntualmente.

En cambio, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > n$, $f_n(x) = 1 \implies \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 1 \overset{n}{\not\to} 0$.
$\implies f_n \overset{n}{\not\to} 0$ uniformemente. $\square$

Ej. Sean $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por $f_n(x) := \begin{cases} n, & \text{si } x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } x \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$

Demuestra que $f_n \xrightarrow{n} 0$ puntualmente, pero no uniformemente. $\square$

Sucesiones uniformemente de Cauchy.

Def.: Sean $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **uniformemente de Cauchy en** E si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ \forall x \in E,\ d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon.}$$

- Como en la convergencia uniforme, N depende de ε, pero no de x.
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en E si y sólo si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ \sup_{x\in E} d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon.}$$

- Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en E, entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y para todo $x \in E$.

Teor. [criterio de Cauchy para convergencia uniforme]: Si Y es completo, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en E si y sólo si es uniformemente de Cauchy en E.

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en E.

Sea $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ \forall x \in E,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow\ \forall m, n \geq N,\ \forall x \in E,$

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq \underbrace{d_Y(f_m(x), f(x))}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{d_Y(f_n(x), f(x))}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow\ \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en E.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente de Cauchy en E.

Entonces, $\forall x \in E,\ \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y.

Y completo $\Longrightarrow\ \forall x \in E,\ \exists y_x \in Y :\ f_n(x) \xrightarrow{n} y_x$. Sea $\begin{array}{l} f:\ E \to Y, \\ \quad\ \ x \mapsto y_x. \end{array}$

Entonces, $\forall x \in E,\ f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$. Veamos que la convergencia es uniforme.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en E, entonces

$\exists\, N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ \forall x \in E,\ d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $d_Y(\cdot, f_n(x))$ es continua, tomando $\lim_m d_Y(f_m(x), f_n(x))$,

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow\ f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en E. $\square$

Convergencia uniforme de series.

Def.: Dadas $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$, o $\mathbb{R}^k$), $n \in \mathbb{N}$, consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Sean $S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, las respectivas sumas parciales.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente en** E si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo hace.

En tal caso, si $\lim_n S_n = S$, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ **uniformemente en** E.

Así mismo, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **es uniformemente de Cauchy en** E si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es.

Teor.: Sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$, o $\mathbb{R}^k$), $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E.

Dem.: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces es de Cauchy.

$\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m \geq n \geq N, \ \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon.$

$\Longrightarrow$ $\forall x \in E, \ |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon.$

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente de Cauchy en E

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E. $\square$

Convergencia en $\mathscr{B}(E)$.

Recordemos:

- $\mathscr{B}(E) := \{f : E \to \mathbb{R}, \text{ acotadas}\}$, espacio vectorial (E.V.);
- $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$, norma en $\mathscr{B}(E) \implies (\mathscr{B}(E), \|\cdot\|_\infty)$, E.V.N.;
- $d(f,g) := \|f-g\|_\infty$, métrica en $\mathscr{B}(E)$ inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teor.: Sean $f_n \in \mathscr{B}(E)$, $n \in \mathbb{N} : f_n \to f$ uniformemente en E.
Entonces $f \in \mathscr{B}(E)$.

Dem.: Sea $\varepsilon = 1$. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = 1$

$\implies |f(x)| < |f_N(x)| + 1 \quad \forall x \in E$

$\implies |f(x)| < \|f_N\|_\infty + 1 \quad \forall x \in E$

$\implies f$ acotada $\implies f \in \mathscr{B}(E)$. $\square$

En lo que sigue veremos que, en $\mathscr{B}(E)$, la convergencia uniforme coincide con la convergencia en $\|\cdot\|_\infty$ y que lo mismo ocurre con la propiedad de ser de Cauchy.

Prop.: Sean $f_n \in \mathscr{B}(E)$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

a) $f_n \to f$ uniformemente en E si y sólo si $f_n \to f$ en $\mathscr{B}(E)$;

b) $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en E si y sólo si es de Cauchy en $\mathscr{B}(E)$.

Dem.: a) $f_n \to f$ uniformemente en E $\iff$ $\underbrace{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_\infty = d(f_n, f)} \xrightarrow{n} 0$

$\iff$ $f_n \xrightarrow{n} f$ en $\mathscr{B}(E)$.

b) $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en E

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n \geq N, \quad \underbrace{\sup_{x\in E} |f_m(x) - f_n(x)|}_{\|f_m - f_n\|_\infty = d(f_m, f_n)} < \varepsilon.$

$\iff$ $\{f_n\}$ es de Cauchy en $\mathscr{B}(E)$. $\square$

Corol.: $\mathscr{B}(E)$ dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un E.V.N. completo.

Dem.: $\boxed{\textbf{Ej.}}$ Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y del criterio de Cauchy para convergencia uniforme. $\square$

A los E.V.N. completos se los llama **espacios de Banach.**

El corolario anterior muestra que $\mathscr{B}(E)$ es un espacio de Banach.