UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Solución Tarea 1.

Problema 1.

i) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de intervalos cerrados no vacíos en $\mathbb{R}$. Muestre que $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ es un intervalo cerrado no vacío. ¿Cuándo la intersección es un solo punto?.

ii) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de intervalos cerrados no vacíos en $\mathbb{R}$, tal que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \quad \forall \alpha,\beta\in\Gamma$. Muestre que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ es un intervalo cerrado no vacío.

Solución:

i) Dado que para todo $n\in\mathbb{N}$, A_n es un intervalo cerrado, podemos escribir

$$A_n =: [a_n, b_n], \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{R}$. Dado que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, entonces

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad A_n \subset A_1 \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1.$$

Así, las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas, y por lo tanto existen $a, b\in\mathbb{R}$ tales que

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \qquad \text{y} \qquad b = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Se mostrará que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [a,b].$$

Sea $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}\,, \quad x\in[a_n,b_n] &\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\,, \quad a_n \leq x \leq b_n \\
&\Longrightarrow x \text{ es cota superior de } \{a_n, n\in\mathbb{N}\} \text{ y cota inferior de } \{b_n, n\in\mathbb{N}\} \\
&\Longrightarrow a \leq x \ \wedge \ x \leq b \qquad \text{(Def. de sup. e inf.)} \\
&\Longrightarrow x\in[a,b].
\end{aligned}$$

Así, $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset [a,b]$. Sea ahora $x\in[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned}
a \leq x \leq b &\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\,, \quad a_n \leq x \leq b_n \\
&\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\,, \quad x\in[a_n,b_n] \\
&\Longrightarrow x\in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset [a,b]$ y se tiene la igualdad. Por lo tanto $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es igual a un intervalo cerrado, y no es vacío pues contiene al menos a a y b. Además, esta intersección será igual a un sólo punto si $a=b$, pues en tal caso

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [a,a] = a.$$

ii) Dado que para todo $\alpha\in\Gamma$, A_α es un intervalo cerrado, podemos escribir

$$A_\alpha =: [a_\alpha, b_\alpha], \quad \forall \alpha\in\Gamma,$$

donde $a_\alpha, b_\alpha \in\mathbb{R},\ \forall\alpha\in\Gamma$. Sean $\alpha,\beta\in\Gamma$, entonces, por hipótesis sabemos que $A_\alpha\cap A_\beta \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R} : \quad x \in [a_\alpha, b_\alpha] \ \wedge \ x \in [a_\beta, b_\beta] \quad &\Longrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad a_\alpha \leq x \leq b_\beta \\ &\Longrightarrow \quad a_\alpha \leq b_\beta. \end{aligned}$$

Así,$\{a_\alpha, \ \alpha \in \Gamma\}$ está acotado superiormente por cualquier $b_\beta, \ \beta \in \Gamma$ y, de igual forma, $\{b_\alpha, \ \alpha \in \Gamma\}$ está acotado inferiormente por cualquier $a_\beta, \ \beta \in \Gamma$. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a = \sup_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha, \qquad \text{y} \qquad b = \inf_{\alpha \in \Gamma} b_\alpha.$$

Finalmente, se propone que

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = [a, b].$$

Le demostración de está igualdad es análoga a la de la parte ii).

Problema 2.

i) Muestre que si A es abierto y B es cerrado, entonces $A \setminus B$ es abierto y $B \setminus A$ es cerrado.

ii) Seas $A, B \subset \mathbb{R}$ con A abierto. Muestre que si $B = \{0\}$, entonces AB no es abierto. Muestre también que si $0 \notin B$, entonces AB es abierto. Considere $AB := \{xy \in \mathbb{R} \ : \ x \in A \text{ y } y \in B\}$

Solución:

i) De la hipótesis sabemos que A^c es cerrado y B^c es abierto. Luego,

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

es abierto por ser intersección finita de abiertos. Y,

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

es cerrado por ser intersección de cerrados.

ii) Si $B = \{0\}$, entonces

$$AB = \{x \cdot 0 \in \mathbb{R} : \quad x \in A\} = \{0\}.$$

Luego, $AB = \{0\}$ no es abierto, pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in \mathbb{Q} \ : \ 0 < x < \varepsilon$ (densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$), por lo que $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \not\subset \{0\}$. Así, no existe una bola centrada en $0 \in AB$ que quede contenida en AB.

Si $0 \notin B$, entonces $A\{y\}$ es abierto para todo $y \in B$. En efecto, sea $y \in B$. Ahora, sea $a \in A$, queremos mostrar que $a \cdot y$ es punto interior de $A\{y\}$. Como A es abierto, entonces $\exists r_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{B}_{r_1}(a) \subset A.$$

Es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \quad |a - x| < r_1 \Longrightarrow x \in A. \tag{1}$$

Definamos $r := r_1 \cdot |y| > 0$. Sea $x \in \mathcal{B}_{r_1}(a \cdot y)$, entonces

$$\begin{aligned} |ay - x| < r \quad &\Longrightarrow \quad |y| \left| a - \frac{x}{y} \right| < r_1 |y| \\ &\Longrightarrow \quad \left| a - \frac{x}{y} \right| < r_1 \\ &\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{x}{y} \in A \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x}{y} y = x \in A\{y\}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\mathcal{B}_r(a \cdot y) \subset A\{y\}$ y se conluye que $A\{y\}$ es abierto.

Ahora, mostremos que
$$AB = \bigcup_{y \in B} A\{y\}.$$
Sea $xy \in AB$, con $x \in A$ e $y \in B$. Entonces $xy \in A\{y\}$ y por lo tanto $xy \in \cup_{y\in B} A\{y\}$. Por otro lado, es claro que $A\{y\} \subset AB$, por lo que $\cup_{y\in B} A\{y\} \subset AB$.

Así, AB es unión de conjuntos abiertos y se conluye entonces que AB también es abierto.

Problema 3. En el espacio métrico de los racionales con la métrica euclidea, considere
$$E = \{x \in \mathbb{Q} \ : \quad 5 < x^2 < 6\}.$$
Muestre que E es cerrado y acotado, pero no es compacto. Decida si E es abierto en $\mathbb{Q}$.

Solución:

- Para ver que E es cerrado, se probará que E^c es abierto.

Notemos que $G = (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{6}, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$ por ser unión de conjuntos abiertos. Además,
$$\begin{aligned}
G \cap \mathbb{Q} &= \{x \in \mathbb{R} : (x < -\sqrt{6} \ \vee \ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \ \vee \ \sqrt{6} < x) \ \wedge \ x \in \mathbb{Q}\} && \text{(Definición de G)}\\
&= \{x \in \mathbb{Q} : x < -\sqrt{6} \ \vee \ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \ \vee \ \sqrt{6} < x\} && (\text{Pues } \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})\\
&= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 6 \ \vee \ x^2 < 5\} && \text{(Trabajando las inecuaciones)}\\
&= \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 6 \ \vee \ x^2 \leq 5\} && (\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{6} \notin \mathbb{Q})\\
&= \{x \in \mathbb{Q} : \sim (5 < x^2 < 6)\} && \text{(Ley de DeMorgan)}\\
&= E^c && \text{(Def. de complemento)}
\end{aligned}$$
Así, como $(\mathbb{Q}, d)$ es sub espacio métrico de $(\mathbb{R}, d)$, se tiene que E^c es abierto en $(\mathbb{Q}, d)$, concluyendose así que E es cerrado en $(\mathbb{Q}, d)$.

- Veamos ahora que es acotado. Para ello consideremos la bola de centro en 0 y radio 5 $\mathcal{B}_5(0)$ en $(\mathbb{Q}, d)$. Para todo elemento x en E se tiene que
$$\begin{aligned}
5 < x^2 < 6 &\implies 0 \leq x^2 < 25 && \text{(Transitividad)}\\
&\implies |x| < 5 && \text{(Def. de valor absoluto)}\\
&\implies x \in \mathcal{B}_5(0) && \big(\text{Def. de } \mathcal{B}_5(0)\big)
\end{aligned}$$
Así, $E \subset \mathcal{B}_5(0)$. Por lo tanto E es acotado.

- Recordemos que $\mathbb{Q}$ es numerable, por lo que E también lo es (pues es un subconjunto infinito de $\mathbb{Q}$). Así E se puede representar como $E = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Sea $g_n = |e_n|$ y $G_n = \mathcal{B}_{g_n}(0) =]-g_n, g_n[$, es fácil ver que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos de E, en efecto,
$$\begin{aligned}
e_i \in E &\implies |e_i| \in E && (e_i^2 = |e_i|^2)\\
&\implies \exists l \in \mathbb{N} : \ |e_i| < e_l && (E \text{ no tiene máx}^1)\\
&\implies e_i \in G_l && \text{(Def. de bola)}\\
&\implies e_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n && \text{(Def. de unión)}
\end{aligned}$$

[1] : Sabemos que entre dos reales existe un racional, así, para todo $a \in E$ existe un racional entre $|a|$ y $\sqrt{6}$, que, por transitividad, sigue estando en E.

Así, $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Y dado que toda bola abierta en $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, se comprueba lo deseado. Ahora, supongamos que se puede tomar un subcubrimiento finito a partir de $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, existen $d_1, d_2, \cdots, d_M \in \mathbb{N}$ tales que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{M} G_{d_i}$$

Sea $g_r = \text{máx}_{1\leq i\leq M}\, g_{d_i}$, luego, como E no tiene máximo, existe $g_R \in E$ tal que $g_r < g_R$. Así, g_R no esta en el subcubrimiento finito, ocrruiendo una contradicción. Y esta contradicción ocurre por suponer que existe un subcubrimiento finito de E. Así, no existe subcubrimiento finito de E y se concluye que E no es compacto.

Observación: También se puede probar que E no es cerrado en $\mathbb{R}$, y por teorema de Heine-Borel, concluir que E no es compato en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, tampoco lo es en $\mathbb{Q}$. Para esto, se puede usar la densidad de $\mathbb{Q}$ para mostrar que, por ejemplo, $\sqrt{6} \notin E$ es punto de acumulación de E.

- Sea $T = (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \sqrt{6})$, que, por ser unión de abiertos en $\mathbb{R}$, también es abierto en $\mathbb{R}$. Notemos que

$$T \cap \mathbb{Q} = E$$

Así, como $(\mathbb{Q}, d)$ es sub espacio métrico de $(\mathbb{R}, d)$, se concluye que E es abierto en $\mathbb{Q}$.