UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Práctica 2
Análisis Real II (525302)
$\sigma-$Álgebras, Medidas y Funciones Medibles.

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

Definición 1 Sea A un conjunto. Se denota $A \sim \mathbb{N}$ si y sólo si A es a lo sumo numerable.

Definición 2 Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se denota $\sigma(\mathcal{C})$ como la $\sigma-$Álgebra en X más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 1 *Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces, $\sigma(\mathcal{C})$ es igual a la intersección de todas las $\sigma-$Álgebras que contienen a $\mathcal{C}$.*

Proposición 2 *Sean X un conjunto y $A, B \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $A \subseteq B$, entonces $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$.*

Problema 1 Sea X un conjunto no numerable y $\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \sim \mathbb{N} \vee A^C \sim \mathbb{N}\right\}$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es $\sigma-$Álgebra sobre X.

Problema 2 Sean X e Y dos conjuntos, y $f : X \to Y$ una función. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos $\sigma-$Álgebras definidas sobre X e Y, respectivamente.

1) Demuestre que $\mathcal{Y}' = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{X}\}$ es una $\sigma-$Álgebra sobre Y.
2) Demuestre que $\mathcal{X}' = f^{-1}(\mathcal{Y}) = \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{Y}\}$ es una $\sigma-$Álgebra sobre X.
3) Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Demuestre que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Problema 3 Demuestre que toda $\sigma-$Algebra sobre $\mathbb{R}$ contiene a todos los intervalos abiertos y acotados si y sólo si contiene a todos los intervalos cerrados y acotados.

Problema 4 Sean $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la $\sigma-$Álgebra de Borel, $I_1 = \{(a, b] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid a < b\}$, $I_2 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ e $I_3 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_1) = \sigma(I_2) = \sigma(I_3)$$

Indicación: Si le es útil, considere el resultado del problema anterior y el siguiente resultado probado en Análisis Real I (su demostración queda como ejercicio).

Proposición 3 *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, con A abierto, Entonces, existe una familia numerable de intervalos cerrados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tales que*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Definición 3 Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *clase monótona* si, para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona creciente y para toda sucesión monótona decreciente $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n, \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.

Definición 4 Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se denota $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ como la clase monótona en X más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 4 *Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces, $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ es igual a la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{C}$.*

Problema 5 Demuestre que toda $\sigma-$Álgebra es una clase monótona. Dé un contraejemplo en el cual la afirmación recíproca no se cumple.

Problema 6 Sean X un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Demuestre que $C \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Problema 7 Sean X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sean A el conjunto de todos los elementos $x \in X$ que pertenecen a una cantidad infinita de conjuntos A_n y B el conjunto de todos los elementos $x \in X$ que pertenecen a todos los conjuntos A_n, salvo una cantidad finita. Demuestre que

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

Definición 5 Sean X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se definen el *límite inferior* y *superior* de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotados por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, respectivamente, por

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

Si se cumple la igualdad, entonces se define el *límite* de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$.

Problema 8 Sean X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Demuestre que, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona (creciente o decreciente, respecto a la inclusión), entonces $\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$.

Problema 9 Sean X un conjunto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1) Demuestre que, $\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X$.

2) Dé un ejemplo de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\liminf A_n = \emptyset$ y $\limsup A_n = X$.

3) Dé un ejemplo de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no sea monótona tal que $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Problema 10 Sea X un conjunto y $\mathcal{X}$ una $\sigma-$Álgebra sobre X. Dé un ejemplo de una función $f : X \to \mathbb{R}$ tal que f no es $\mathcal{X}-$medible, pero que $|f|$ y f^2 son medibles.

Problema 11 Sean X un conjunto, $\mathcal{X}$ una $\sigma-$Álgebra sobre X, $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{X}-$medible y $a > 0$. Demuestre que la función $f_a : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_a(x) = \begin{cases} -a & \text{si } f(x) < -a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a & \text{si } f(x) > a \end{cases}$$

es $\mathcal{X}-$medible.

Problema 12 Sean X un conjunto, $\mathcal{X}$ una $\sigma-$Álgebra sobre X y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que f es medible si y sólo si

$$(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))\ \ f^{-1}(A) \in \mathcal{X}$$

Problema 13 Sean X un conjunto, $\mathcal{X}$ una $\sigma-$Álgebra sobre X, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $A, B \in \mathcal{X}$ tales que $A \cup B = X$. Demuestre que f es $\mathcal{X}-$medible si y sólo si $f|_A$ y $f|_B$ son $\mathcal{X}-$medibles.

Problema 14 Sean X un conjunto, $\mathcal{X}$ una $\sigma-$Álgebra sobre X, $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{X}-$medible y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que la función $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{X}-$medible.

---

18 de Agosto de 2014