UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525151)

Ejercicios del Problema del Camino Más Corto (PCC)

P1) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

a) Sea $G = (V, E)$ un digrafo, $u, v \in V$ y $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso. Entonces se tiene que:

$\delta(u, v) = -\infty \iff$ existe un camino de u a v en G que contiene un ciclo de peso negativo.

b) El digrafo predecesor obtenido al usar Dijkstra contiene un arco de peso mínimo.

c) Sea $G = (V, E)$ un digrafo y $w, w' : E \to \mathbb{R}$ funciones de peso tales que:

$$\forall (u, v) \in E, \quad w'(u, v) = w(u, v) + \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Luego, para todo p camino en G se tiene que:
p es de peso mínimo en (G, w) si y sólo p es de peso mínimo en (G, w').

d) Idem a *b*) considerando ahora:

$$\forall (u, v) \in E, \quad w'(u, v) = \lambda \cdot w(u, v),$$

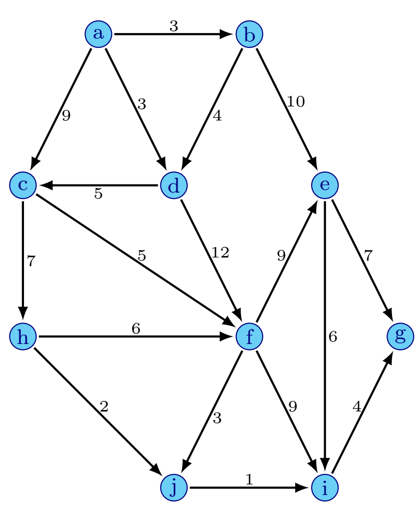
con $\lambda > 0$ fijo.

e) El algoritmo de Dijkstra da una solución a PCC en digrafos con pesos reales en los arcos y que no tienen ciclo de peso negativo.

P2) El siguiente grafo G representa una ciudad donde las calles y su dirección están dados por los arcos y los nodos son la intersección entre ellas. Tres amigos que salen desde los nodos a, b y f deciden juntarse en el nodo g. Si los pesos en los arcos representan el tiempo necesario para ir desde un punto a otro, entonces:

a) Determinar el camino más corto desde el punto de salida de cada amigo al punto g.

b) Si todos los amigos salen al mismo tiempo, calcule el máximo tiempo de espera de los amigos.



P3) **Problema del cambio de monedas**. Dado un conjunto $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ de monedas de valores todos distintos, y donde la moneda m_k tiene un valor de $v_k \in \mathbb{N}$, se desea saber el menor número de monedas requeridas cuyo suma de valores sea igual a una cantidad dada igual a p si existe. Modele este problema como un problema de camino más corto y proponga un algoritmo visto en clases para resolverlo. Justifique su respuesta y dé un ejemplo de funcionamiento.

P4) Sea $G = (V, E)$ un digrafo con función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ y $s \in V$ tal que $\forall u \in V \setminus \{s\}$ es alcanzables desde s. Dada una función $h : V \to \mathbb{R}$, se define para cada arco $(u, v) \in E$:

$$w_h(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v).$$

Se dice que h es un potencial para G con w si $w_h(u, v) \geq 0,\ \forall (u, v) \in E$.

a) Pruebe que $\forall v \in V$, p es un camino de peso mínimo de s a v con respecto a w si y sólo si p es un camino de peso mínimo de s a v con respecto a w_h.

b) Demuestre que existe un potencial para G con w si y sólo si G no tiene ciclo de peso negativo con respecto a w (Ind: piense en $h(u) = \delta(s, u)$).

c) Concluya que el algoritmo de Bellman-Ford entrega un potencial para G con w si y sólo si existe.

P5) Una industria requiere una sola máquina para ejecutar una cierta tarea por los próximos cuatro años, después de lo cual no se necesitará más. El precio de compra de la máquina al inicio de cada año varía de acuerdo a la siguiente tabla:

Año de compra	1	2	3	4
Precio	30	33	40	47

El valor de venta de la máquina depende de los años de su uso de acuerdo a la siguiente tabla:

Años de uso	1	2	3	4
Precio de venta	17	6	3	1

Los costos operacionales varían según los años de uso de acuerdo a la siguiente tabla:

Años de uso	1	2	3	4
Costos operacionales	3	5	8	26

Determine una política de compra de la máquina tal que pueda ser operativa durante los próximos cuatro años y el costo sea el menor posible.

P6) Dado un digrafo $G = (V, E)$, $s \in V$ y $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso en los arcos. El problema del Camino Más Largo (PLC) consiste en encontrar un camino de peso máximo (si existe) de s a todo vértice $u \in V$.

a) Muestre que el problema de decisión asociado a PLC (i.e determinar si existe un camino de s a u de peso mayor o igual a k) es NP-completo.

b) Muestre que el problema puede ser resuelto en tiempo polinomial si el digrafo G no tiene ciclos.

c) ¿Qué hipótesis pueden hacerse sobre un digrafo G con ciclos de manera que PCL pueda ser resuelto en tiempo polinomial?

P7) **Problema de Gestión de Tareas**: Un proyecto es un conjunto de actividades donde usualmente una actividad puede comenzar sólo si otras actividades han terminado antes. La gestión de un proyecto consiste en planificar el inicio de cada actividad de manera de finalizar todas las actividades del proyecto en el menor tiempo posible. Un camino crítico de un proyecto corresponde a una secuencia de actividades que limitan el tiempo mínimo requerido para la finalización de todas las actividades del proyecto. Para el siguiente proyecto determine un camino crítico y el tiempo total mínimo para su realización.

Actividad	Duración (días)	Predecesores
A	3	-
B	6	-
C	2	D, E
D	6	A, B
E	8	B, F
F	5	A
G	3	B, C, F