Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Evaluación 2
Álgebra con Software (527282)

Instrucciones. Desarrollar justificadamente las respuestas a los problemas planteados.

Problema 1. (XX puntos)
Sea A un dominio euclidiano que no es un campo. Sea $f : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ la función euclidiana de A.

1. Dado $x \in A$, $x \neq 0$, mostrar: cada clase no nula de $A/(x)$ contiene un elemento y tal que $f(y) < f(x)$.
2. Usando el resultado anterior: mostrar que existe $z \in A$, z no invertible, tal que cada clase no nula de $A/(z)$ contiene un elemento invertible.

Problema 2. (XX puntos)
Se construye una superficie S en $\mathbb{R}^3$ como unión de las infinitas rectas R_t, $t \in \mathbb{R}$, donde R_t es la recta que pasa por los puntos $(t, 0, 1)$ y $(0, 1, t)$.

1. Construir una descripción paramétrica de S.
2. Utilizar bases de Gröbner para construir una ecuación implícita cuyo conjunto solución contenga a S.

Problema 3. (XX puntos)
Sea F un campo finito con p^r elementos. Para $a \in F$, diremos que el *grado de a es d* si el menor subcampo de F que contiene a a tiene p^d elementos.
(Recordar: el polinomio minimal de a es un polinomio de $\mathbb{F}_p[x]$ irreducible del cual a es raíz.)

1. Si a tiene grado d, mostrar que el polinomio minimal de a tiene grado d.
2. Si el polinomio minimal de a tiene grado d, mostrar que a tiene grado d.
3. Si a tiene grado d, mostrar que $\tau(a)$ también tiene grado d. *(Indicación: τ es el Frobenius $x \mapsto x^p$. Mostrar que a y $\tau(a)$ tienen el mismo polinomio minimal.)*

Problema 4. (XX puntos)
Determinar el conjunto solución del siguiente sistema, e indicar la cardinalidad de dicho conjunto.

```
R = GF(5)
M = matrix(R, [[1,2,3,0],[2,3,2,1],[2,4,3,3]])
b = column_matrix(R, [1,5,3])
M_b = M.augment(b, subdivide=True)
```

$$M_b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

con coeficientes en el campo R: `Finite Field of size 5`.