

Problema 1. Considere la EDO

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + \omega u(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(a, b)$, ω y κ dados. Asuma que la función κ es continua y positiva en $[a, b]$, y ω es un número positivo. Escriba un programa en Matlab que realice lo siguiente:

- Escriba la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{b} del sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$.
- Calcule la solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$.
- Considere $f(x) = 2e^x(x^2 - x) - 2x - 1$, $\omega = 2$, $\kappa(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, 1]$, cuya solución exacta es $u(x) = x(x-1)e^{-x}$.
- Para la partición con $d = 2$, resuelva a mano el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ y esboce la gráfica de la solución u_h obtenida.
- Programa y resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$. Considere $d = 100$ y grafique tanto u_h como u .
- Calcule los errores $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$.
- Complete la siguiente tabla de convergencia.

n	h	$\ u - u_h\ _{L^2(a,b)}$	r_{L^2}	$\ u - u_h\ _{H^1(a,b)}$	r_{H^1}
4	1/4	—	—	—	—
8	1/8	—	—	—	—
16	1/16	—	—	—	—
32	1/32	—	—	—	—
64	1/64	—	—	—	—

Aquí r es llamado orden de convergencia experimental y se define como

$$r := \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$$

donde e_{h_1} y e_{h_2} son los errores correspondientes a dos discretizaciones consecutivas utilizando subintervalos de longitud h_1 y h_2 ($h_2 < h_1$), respectivamente. ¿Qué observa respecto al comportamiento de r ?

Solución. Sea h la longitud de los subintervalos de la partición uniforme $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$ del intervalo $[a, b]$. Por lo hecho en la tarea 1 se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & a_{d-1d} \\ 0 & 0 & a_{dd-1} & a_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1}{h} \left[\kappa \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \kappa \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right] + \frac{2}{3} \omega h, \text{ con } i \in \{1, \dots, d\} \\ a_{ii+1} &= \frac{-1}{h} \kappa \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{h\omega}{6}, \text{ con } i \in \{1, \dots, d-1\} \\ a_{ii-1} &= \frac{-1}{h} \kappa \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{h\omega}{6}, \text{ con } i \in \{2, \dots, d\} \\ b_i &= \frac{h}{2} \left[f \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) + f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right], \text{ con } i \in \{1, \dots, d\} \end{aligned}$$

considerando $f(x) = 2e^x(x^2 - x) - 2x - 1$, $\omega = 2$, $\kappa(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, 1]$ y $d = 2$ se tiene la partición $\{x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 2/3, x_3 = 1\}$. Luego, el sistema queda

$$\begin{bmatrix} 3(e^{-1/6} + e^{-1/2}) + 4/9 & -3e^{-1/2} + 1/9 \\ -3e^{-1/2} + 1/9 & 3(e^{-1/2} + e^{-5/6}) + 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6(f(1/6) + f(1/2)) \\ 1/6(f(5/6) + f(1/2)) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se tiene

$$\alpha_1 \approx -0,3103 \wedge \alpha_2 \approx -0,4340$$

Gráficamente

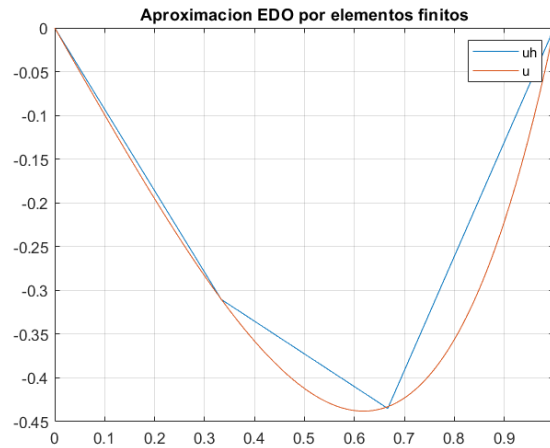


Figura 1: Comparación solución exacta vs aproximación con $d = 2$ nodos interiores.

Por otro lado, usando $d = 100$ nodos interiores, se obtiene la aproximación Finalmente, del método programado en

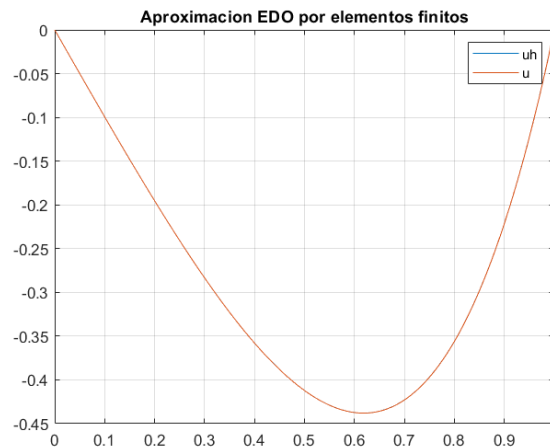


Figura 2: Comparación solución exacta vs aproximación con $d = 100$ nodos interiores.

matlab, se tiene la siguiente tabla de convergencia

n	h	$\ u - u_h\ _{L^2(a,b)}$	r_{L^2}	$\ u - u_h\ _{H^1(a,b)}$	r_{H^1}
4	1/4	$6,76 \times 10^{-4}$	—	$3,51 \times 10^{-2}$	—
8	1/8	$1,57 \times 10^{-4}$	2,1062	$1,53 \times 10^{-2}$	1,1977
16	1/16	$3,82 \times 10^{-5}$	2,0394	$6,94 \times 10^{-3}$	1,1424
32	1/32	$9,47 \times 10^{-6}$	2,0110	$3,28 \times 10^{-3}$	1,0831
64	1/64	$2,36 \times 10^{-6}$	2,0028	$1,59 \times 10^{-3}$	1,0447

De la tabla anterior se puede observar que r_{L^2} converge a 2 y r_{H^1} converge a 1, esto quiere decir que el error medido en las normas L^2 y H^1 decaen a una tasa de h^2 y h respectivamente, lo cual es consistente con la teoría. \square

Problema 2. Considere la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega :=]0, 1[^2 \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Modifique el programa de FreeFem (adjunto) para resolver este problema en los siguientes casos. Para cada caso complete la siguiente tabla:

h	$\ u - u_h\ _{L^2(a,b)}$	r_{L^2}	$\ u - u_h\ _{H^1(a,b)}$	r_{H^1}
1/4	—	—	—	—
1/8	—	—	—	—
1/16	—	—	—	—
1/32	—	—	—	—
1/64	—	—	—	—

(a) Caso 1: $f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$, $g(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$. Se sabe que la solución exacta del problema es $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$.

(b) Caso 2: $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x + y$. Se sabe que la solución exacta del problema es $u(x, y) = x + y$.

Solución. (a) Caso 1.

h	$\ u - u_h\ _{L^2(a,b)}$	r_{L^2}	$\ u - u_h\ _{H^1(a,b)}$	r_{H^1}
1/4	$7,072 \times 10^{-2}$	—	$8,385 \times 10^{-1}$	—
1/8	$1,899 \times 10^{-2}$	1,896	$4,318 \times 10^{-1}$	0,957
1/16	$4,839 \times 10^{-3}$	1,972	$2,175 \times 10^{-1}$	0,989
1/32	$1,215 \times 10^{-3}$	1,992	$1,089 \times 10^{-1}$	0,997
1/64	$3,043 \times 10^{-4}$	1,998	$5,451 \times 10^{-1}$	0,999

(b) Caso 2

h	$\ u - u_h\ _{L^2(a,b)}$	r_{L^2}	$\ u - u_h\ _{H^1(a,b)}$	r_{H^1}
1/4	$1,384 \times 10^{-15}$	—	0,577	—
1/8	$3,758 \times 10^{-15}$	-1,440	0,577	0
1/16	$2,088 \times 10^{-14}$	-2,474	0,577	0
1/32	$8,252 \times 10^{-14}$	-1,982	0,577	0
1/64	$3,336 \times 10^{-13}$	-2,015	0,577	0

□