UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Práctica N°13

Álgebra 2 - 525150

1. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -i & i & 1 \\ 1+i & -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

   (a) Determinar el polinomio característico de A.
   (b) Calcular los valores propios de A y sus respectivas multiplicidades.
   (c) Diagonalizar, si es posible, la matriz A.

2. Considere el parámetro $k \in \mathbb{R}$, con el cual se construye la siguiente matriz:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ k^2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, entonces A_k es diagonalizable.
   (b) Determine $\sigma(A_2)$ y una base para cada espacio propio asociado a cada valor propio de A_2.
   (c) Verifique que A_2 es diagonalizable y defina la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D semejante con A_2 correspondiente.
   (d) Calcular el determinante de A^{15}.

3. Demostrar las siguientes proposiciones:

   (a) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A es nilpotente, entonces $\lambda = 0$ es el único valor propio de A, de multiplicidad algebraica n.
   (b) Si $A, P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son tales que P es invertible, D es diagonal y $A = PDP^{-1}$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple que $\det(A - \lambda I) = \det(D - \lambda I)$.

4. Determine si las aplicaciones dadas son aplicaciones lineales

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (0, x^2 + y^2, 0)$ (b) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, T(p) = p(0) + ip(1)$