UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 3 ALGEBRA III 525201-0

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada item (9.1, 9.2, etc) tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.

Problema 9. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $A := \{v_1, ..., v_n\}$ y $B := \{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente $(n\,, m \in \mathbb{N})$.

9.1 Demuestre que $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \;:\; \exists\, T_{ij} \in \mathcal{L}(V,W)$, tal que $\forall\, k \in \{1,...,n\} \;:$
$$T_{ij}(v_k) := \begin{cases} \Theta_W & k \neq i \\ w_j & k = i\,. \end{cases}$$

9.2 ¿Será $\{T_{ij}\}_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}$ una base de $\mathcal{L}(V,W)$? Justifique/demuestre según su respuesta.

Problema 10. Sea $V := \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, y $L \in \mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V)$ (i.e. L es un endomorfismo sobre V) definido por
$$\forall\, p \in V \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, (L(p))(x) := (1-x^2)p''(x) - x\,p'(x) + a^2\,p(x)\,,$$
siendo a un parámetro real fijo.

a) Determine para qué valores de a, L es un automorfismo.

b) Determinar explícitamente L^{-1}.

c) Determinar $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$ para aquellos valores de a en los cuales L es singular (no invertible).

Problema 11. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 := T \circ T = T$. Sabiendo que $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ denota la transformación identidad, demuestre que $T + \tilde{I}$ es un automorfismo.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 28.05.2020, 12:30 horas

---

RBP/rbp 15.05.2020