

### Evaluación 3

1. (20 puntos) Sea  $V$  un e.v. complejo de dimensión  $n$  y sea  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal cuyos valores propios son todos nulos.

- a) (10 puntos) Demuestre que  $T$  es nilpotente.
- b) (10 puntos) Si  $V = \mathbb{R}^5$  y  $T$  está definida por  $T(a, b, c, d, e) = (7b, 0, 0, 0, 2b + 4c)$ ; encuentre la base  $B$  de  $\mathbb{R}^5$  que hace que  $[T]_B$  esté en su forma canónica racional.

2. (20 puntos) Sea  $F : V \rightarrow V$  un operador lineal en un espacio  $V$  de dimensión finita  $n$ , y sea

$$m(x) = \prod_{i=1}^k (p_i(x))^{r_i}$$

su polinomio minimal descrito como producto de factores irreducibles.

Demuestre que si  $v$  es un vector propio de  $F$ , entonces existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $v \in \ker((p_i(T))^{r_i})$ .

3. (20 puntos) Considere el e.v.  $V = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y considere el siguiente operador lineal:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \\ A &\longrightarrow L(A) = A - \text{tr}(A)I_n, \end{aligned}$$

donde  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  es la traza de  $A$ , e  $I_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .

- a) (7 puntos) Demuestre que el polinomio minimal de  $L$  es  $m(x) = x^2 - (n+2)x + n+1$ .
- b) (3 puntos) Demuestre que  $L$  es diagonalizable.
- c) (5 puntos) Si  $n = 3$ , encuentre la base de  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  que diagonaliza a  $L$ .
- d) (5 puntos) Si se considera el p.i. usual de matrices:

$$\langle A ; B \rangle = \text{tr}(B^t A).$$

Calcule el operador adjunto de  $L$ .