

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

CONTENTS

---

## Contents

<b>1 Teorema de Existencia y Unicidad</b>	<b>1</b>
<b>2 Métodos de Solución de EDOs de Primer Orden</b>	<b>3</b>
2.1 Ecuaciones de Variables Separables . . . . .	3
2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$ . . . . .	4
<b>A Interpretación geométrica de EDOs</b>	<b>6</b>
A.1 Campos Direccionales . . . . .	6
<b>B Otras EDOs conocidas</b>	<b>8</b>
B.1 Ecuación de Bernoulli . . . . .	8
B.2 Ecuación de Riccati . . . . .	10
B.3 EDOs tipo Homogéneas . . . . .	11

## 1 Teorema de Existencia y Unicidad

El siguiente teorema nos proporciona las **condiciones suficientes** para garantizar la existencia y unicidad de la solución de un PVI de primer orden:

### Teorema 1.1

*Teorema de Existencia y Unicidad, Picard–Lindelöf*

Sea  $R$  una región rectangular del plano  $XY$  definida por  $R = [a, b] \times [c, d]$ , que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  en su interior. Si en el PVI de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

se tiene que  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $R$ , entonces existe algún intervalo  $I = ]x_0 - h, x_0 + h[$ , con  $h > 0$ , contenido en  $[a, b]$  y una única función  $\phi$  definida en  $I$  que es solución de este PVI.

Para aquellos interesados, en el Apéndice ?? se bosqueja la demostración del resultado anterior.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos el siguiente PVI,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

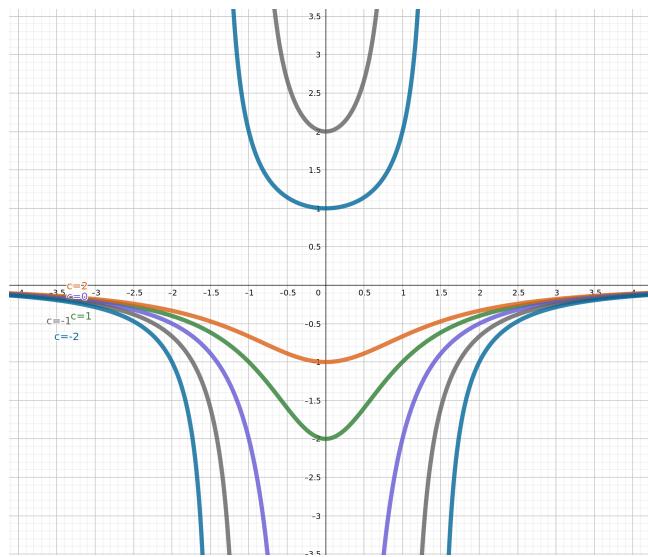
Se tiene que  $f(x, y) = xy^2$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ , estas son funciones continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ , y en particular en cualquier región rectangular  $R$  que contenga al punto  $(1, 2)$ . Luego, por teorema de existencia y unicidad, este PVI tiene única solución.

La familia de funciones  $y = -\frac{2}{c + x^2}$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , son soluciones de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = xy^2$ .

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

---



Note que, en principio, podemos elegir 3 curvas soluciones asociadas a esta función, definidas en los intervalos:  $(-\infty, -\sqrt{-c})$ ,  $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ ,  $(\sqrt{-c}, \infty)$ , si  $c < 0$ . En caso  $c > 0$  tenemos que el intervalo solución es  $\mathbb{R}$ .

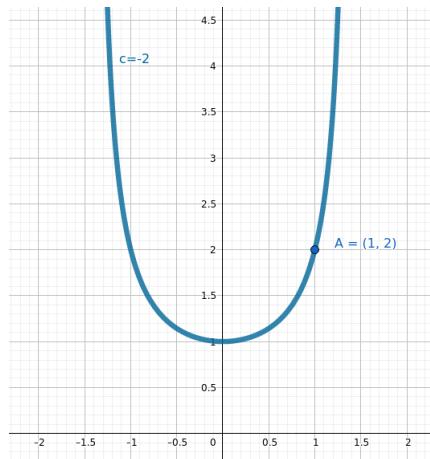
Para determinar cuál de todas las funciones de la familia anterior de soluciones satisface el PVI, además de cuál es el intervalo solución, debemos utilizar la condición inicial. Reemplazamos entonces  $x = 1$  e  $y = 2$ :

$$2 = -\frac{2}{c+1^2} \implies c = -2.$$

Luego, la solución del PVI viene dada por

$$y = -\frac{2}{x^2 - 2}$$

con intervalo solución  $1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .



## 2 Métodos de Solución de EDOs de Primer Orden

En las secciones anteriores, se realizó una introducción a las generalidades de las EDOs y a conceptos fundamentales que ahora utilizaremos para poder resolverlas analíticamente.

### 2.1 Ecuaciones de Variables Separables

Este método consiste en la integración directa de la ED, pero esta debe tener una “forma específica” para poder realizar este tipo de metodología.

#### Definición

Consideremos  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  una EDO de primer orden. Diremos que es una EDO *variables separables* si podemos reescribirla como:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

para algunas funciones  $g$  y  $h$  que dependen únicamente de  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Consideremos una EDO variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

y la reescribiremos como:

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x).$$

Recordemos que  $y$  es una función que depende de  $x$ , es decir  $y(x)$ , entonces **integrando ambos lados respecto a  $x$**  tenemos:

$$\int \frac{1}{h(y(x))} \frac{dy(x)}{dx} dx = \int g(x) dx.$$

Haciendo el cambio de variables  $u = y(x)$ ,  $du = \frac{dy(x)}{dx} dx$ . De donde,

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(x) dx.$$

De esta forma, podemos calcular explícitamente ambas integrales y luego devolver el cambio de variable  $u = y(x)$ .

**Observación.** Informalmente, escribimos la separación de variables como:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx,$$

e integramos

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx,$$

obtendremos el mismo resultado.

Esta separación del diferencial no es matemáticamente correcta. Sin embargo, nos ayuda a obtener la solución más directamente.

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### 2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$

---

**Ejemplo 2.1.** Resuelva el siguiente PVI  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta}$ , considerando primero la condición inicial  $r(1) = 3$  y luego  $r(-1) = 3$ .

Notamos que es una EDO de variables separables. Por Teorema de Existencia, para que  $f(r, \theta) = r/\theta$  sea continuo debe pasar que el intervalo solución es subconjunto de  $\{\theta : \theta > 0\}$  o  $\{\theta : \theta < 0\}$ .

Calculamos ahora la solución separando variables e integrando a ambos de la EDO:

$$\begin{aligned}\int \frac{dr}{r} &= \int \frac{d\theta}{\theta} \\ \ln|r| &= \ln|\theta| + c_1\end{aligned}$$

Aunque no siempre podremos encontrar una expresión de la variable dependiente únicamente en términos de la variable independiente, en este caso sí es posible. En este sentido, para escribir la solución  $r(\theta)$  de manera explícita debemos manipular algebraicamente la expresión anterior.

Aplicando exponencial y denotando  $C = e^{c_1}$  (que es una constante positiva) tenemos:

$$|r| = e^{\ln|\theta|+c_1} = C|\theta|.$$

$$r(\theta) = \begin{cases} C\theta & , \text{si } \theta > 0 \\ -C\theta & , \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

Este signo lo “absorbe” la constante de integración  $C$ , por lo que la solución general será  $r(\theta) = C\theta$ , sin restricciones para  $C$ .

En relación al PVI

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta} \\ r(1) = 3 \end{cases}$$

Desde la solución general  $r(\theta) = C\theta$ , obtenemos

$$3 = r(1) = C,$$

i.e. la solución a este PVI queda como  $r(\theta) = 3\theta$ .

Por otro lado, para el PVI

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta} \\ r(-1) = 3 \end{cases}$$

tendremos que la solución viene dada por  $r(\theta) = -3\theta$ .

### 2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

puede ser reducida a una ED variables separables, si realizamos el cambio de variables:  $u = Ax + By + C$ .

**Ejemplo 2.2.** Resuelva el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### 2.2 Forma Especial $f(Ax + By + C)$

---

Consideremos el cambio de variables  $u = 3x + 2y + 2$ , entonces

$$\frac{du}{dx} = 3 + 2\frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{3}{2}.$$

Sustituimos en la EDO asociada al PVI:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2} \\ \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{3}{2} &= \frac{u - 2}{u} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{5u - 4}{u}.\end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a una EDO de primer orden de variables separables y con variable dependiente  $u$  e independiente  $x$ . Resolvemos esta EDO:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{5u - 4}{u} \\ \int \frac{u}{5u - 4} du &= \int dx \\ \frac{u}{5} + \frac{4}{25} \ln(5u - 4) &= x + C.\end{aligned}$$

Devolvemos el cambio de variables y tenemos que la solución implícita es:

$$\frac{3x + 2y + 2}{5} + \frac{4}{25} \ln(15x + 10y + 6) = x + C.$$

A partir de la condición inicial hallamos el valor de  $C$ , que en este caso es  $C = \frac{6}{5}$ . Luego, la solución del PVI está dada por:

$$\frac{3x + 2y + 2}{5} + \frac{4}{25} \ln(15x + 10y + 6) = x + \frac{6}{5}.$$

## A Interpretación geométrica de EDOs

A partir de los criterios de las derivadas podemos dar un bosquejo de la solución de la ED. En efecto, si consideramos el subespacio del plano en donde  $k = 0$ ,  $k > 0$  o  $k < 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} k = 0 : \quad & 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x, \\ k > 0 : \quad & 2x - y > 0 \Rightarrow y < 2x, \\ k < 0 : \quad & 2x - y < 0 \Rightarrow y > 2x \end{aligned}$$

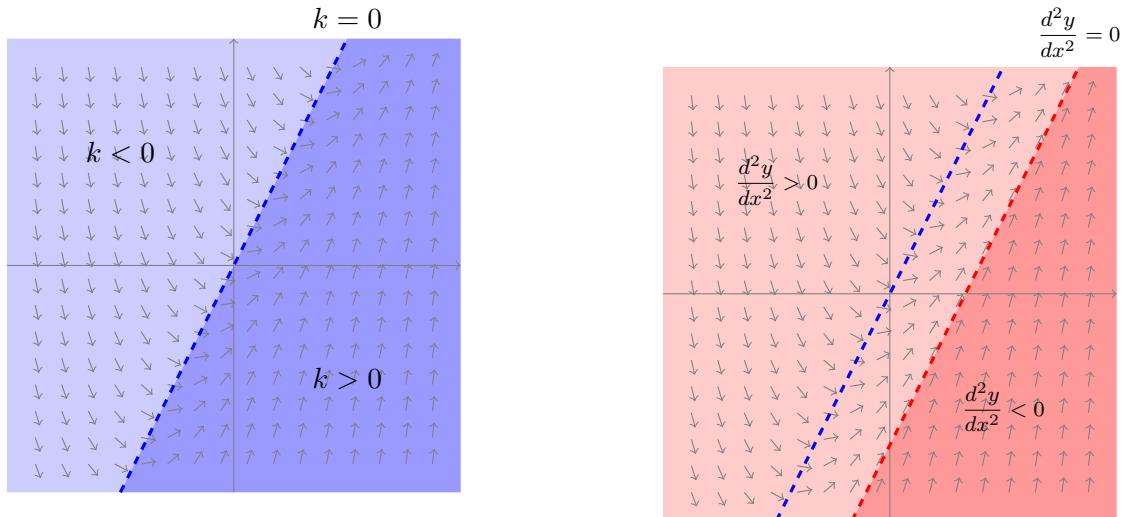
Esto nos dice que en la región del plano donde  $y > 2x$  la curva solución será decreciente (derivada negativa). Si por el contrario estamos en la región del plano donde  $y < 2x$ , la curva será creciente (derivada positiva). Mientras que los puntos críticos estarán sobre la recta  $y = 2x$ .

Haciendo el mismo análisis para la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(2x - y) \\ &= 2 - \frac{dy}{dx} \\ &= 2 - (2x - y). \end{aligned}$$

Luego, la convexidad o concavidad de la curva solución estará caracterizada por el signo de  $y$  respecto de  $2x - 2$ :

$$\begin{aligned} y > 2x - 2 &\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow \text{convexa}, \\ y < 2x - 2 &\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{cónica} \end{aligned}$$



**Ejercicio:** Compruebe que la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$y(x) = 2(x - 1) + Ce^{-x},$$

para cualquier  $C \in \mathbb{R}$ .

Grafique además la solución considerando la condición inicial

- a)  $y(0) = -1$
- b)  $y(1) = -1$

y verifique el comportamiento sugerido del análisis anterior.

## B Otras EDOs conocidas

### B.1 Ecuación de Bernoulli

#### Definición

Consideramos ahora EDOs de la forma

$$y' + P(x)y = f(x)y^n, \quad (1)$$

con  $n \neq 0, n \neq 1$ . A estas ecuaciones se les conoce como **Ecuaciones de Bernoulli**.

Note que si  $n = 0$  en (2), esta ecuación es una EDO de variables separables. En el caso  $n = 1$  es una EDO lineal de primer orden.

La ED de Bernoulli es no es lineal, pero

Podemos convertirla en una EDO lineal con el cambio de variable:

$$u(x) = y^{1-n}(x),$$

lo que produce

$$\frac{du}{dx} = (1 - n)y^{-n}(x)\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo el cambio en la ED (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} (1 - n)y^{-n}y' + (1 - n)y^{1-n}P(x) &= (1 - n)f(x) \\ u' + (1 - n)P(x)u &= (1 - n)f(x). \end{aligned}$$

Note que esta es una EDO lineal de variable dependiente  $u$  e independiente  $x$  (que ya sabemos cómo resolver).

**Ejemplo B.1.** Resuelva el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{5x^2y^3}{2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Por Teorema 1.1, existe una única solución en algún subintervalo de  $(0, +\infty)$ .

Notemos que esta ecuación diferencial es de Bernoulli, con  $n = 3$ , identificando  $P(x) = -1/x$  y  $f(x) = -5x^2/2$ . Considerando el cambio de variable  $u = y^{-2}$ , se obtiene  $\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$  y así la ED se convierte en

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 5x^2.$$

La expresión obtenida es una ED lineal, para la cual consideramos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{2}{x} \cdot u &= 5x^2 && / \cdot x^2 \\ \frac{d}{dx}(x^2u) &= 5x^4 && / \int dx \\ x^2u &= x^5 + C && / \cdot x^{-2} \end{aligned}$$

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### B.2 Ecuación de Riccati

---

y finalmente la solución de la ED lineal queda como

$$u(x) = x^3 + \frac{C}{x^2},$$

para  $C$  constante.

Devolvemos ahora el cambio de variable  $u = y^{-2}$  y obtenemos

$$|y| = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{x^3 + \frac{C}{x^2}}},$$

para  $x^3 + Cx^{-2} > 0$ .

A partir de la condición inicial  $y(1) = 2$ , se considerará la solución  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + Cx^{-2}}}$  para  $x^3 + Cx^{-2} > 0$ , y así

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1+C}} \Leftrightarrow C = -\frac{3}{4}.$$

El dominio de la solución, está dado por

$$x^3 - \frac{3x^{-2}}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^5 - 3}{4x^2} > 0 \Leftrightarrow 4x^5 - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[5]{\frac{3}{4}}$$

Finalmente, la solución de este PVI es

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^3 - \frac{3}{4x^2}}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^5 - 3}},$$

para  $x \in I := (\sqrt[5]{\frac{3}{4}}, \infty)$ . Note que, en efecto,  $1 \in I$ .

## B.2 Ecuación de Riccati

### Definición

Llamaremos **Ecuación de Riccati** a las EDOs de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \quad (2)$$

con  $P, Q, R$  funciones continuas.

Para resolver estas ecuaciones de Riccati debemos conocer una solución particular  $y_1(x)$  de la EDO y luego realizar dos sustituciones:

La sustitución  $y = z + y_1$  reduce la Ecuación (3) a una ecuación de Bernoulli con  $n = 2$ .

1. Recuerde que  $z$  es una función de variable  $x$ , al igual que  $y_1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \\ \frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} &= P(x) + Q(x)(z + y_1) + R(x)(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) \\ \frac{dz}{dx} &= (Q(x) + 2y_1R(x))z + R(x)z^2 - \underbrace{\frac{dy_1}{dx} + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2}_{=0} \\ \frac{dz}{dx} &= (Q(x) + 2y_1R(x))z + R(x)z^2. \end{aligned}$$

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### B.3 EDOs tipo Homogéneas

2. Podemos resolver la Ecuación de Bernoulli obtenida con la sustitución:  $u = z^{-1}$ .

**Ejemplo B.2.** Resuelva la siguiente EDO:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2},$$

con  $x \neq 0$ . Considera la solución particular  $y_1 = -\frac{1}{x}$ .

1. Consideremos la sustitución  $y = z - \frac{1}{x}$ , y su derivada  $y' = z' + \frac{1}{x^2}$ . Sustituimos en la EDO, obteniendo:

$$\begin{aligned} z' + \frac{1}{x^2} + z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{x^2} \\ z' - \frac{2z}{x} &= -z^2 \end{aligned}$$

Esta última ecuación es de Bernoulli.

2. Ahora, consideramos la sustitución de variable  $u = z^{-1}$  y su derivada  $u' = -z^{-2}z'$ . De donde obtenemos la EDO lineal de primer orden:

$$u' + \frac{2u}{x} = 1$$

Calculamos el factor integrante (FI):

$$\mu(x) = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln|x|} = x^2.$$

Multiplicamos la EDO por el FI y resolvemos:

$$\begin{aligned} x^2 u' + 2xu &= x^2 \\ \frac{d}{dx}[x^2 u] &= x^2 \quad / \quad \int \\ x^2 u &= \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Ahora, devolvemos las sustituciones realizadas para obtener la solución de la EDO original con variable  $y$ .

De la sustitución  $u = z^{-1}$ , tenemos  $z = \frac{3x^2}{x^3 + C}$ . Finalmente, del cambio de variables  $y = z - \frac{1}{x}$  se tiene:

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 + C)},$$

en un subconjunto de  $\mathbb{R}_+$  o  $\mathbb{R}_-$ .

### B.3 EDOs tipo Homogéneas

#### Definición

Si para una función  $f$  existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  de manera que

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

se dirá que  $f$  es una función homogénea de grado  $\alpha$ .

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### B.3 EDOs tipo Homogéneas

**Ejemplo B.3.** La función  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ , es una función homogénea de segundo grado, ya que

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + y^2 + xy) = t^2 f(x, y).$$

**Ejemplo B.4.** La función  $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , es una función homogénea de grado cero, ya que

$$g(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = t^0 g(x, y).$$

#### Definición

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  recibe el nombre **homogénea** si  $f(x, y)$  es una función homogénea de grado cero.

Esta definición nos indica que  $f(x, y)$  es homogénea de grado cero, siempre que se pueda representar como una función del cociente  $y/x$ , es decir, siempre que  $f(x, y) = g(y/x)$ .

**Ejemplo B.5.** Del ejemplo B.4 tenemos que la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

es homogénea. Note que podemos reescribirla como:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1 - (\frac{y}{x})^2}{1 + (\frac{y}{x})^2}}_{g(\frac{y}{x})}.$$

#### ¿Cómo resolvemos una EDO Homogénea?

Para resolver una EDO homogénea, realizamos el cambio de variables:

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u,$$

que permite reducir la EDO homogénea a una EDO de variables separables.

En efecto, a partir del cambio  $u = \frac{y}{x}$ , o equivalentemente  $y = ux$ . Luego, desde la regla del producto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u.$$

Reemplazando en la EDO original  $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$  tenemos:

$$u + x \frac{du}{dx} = g(u) \quad \Rightarrow \quad x \frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Ecuaciones de Primer Orden

### B.3 EDOs tipo Homogéneas

---

**Ejemplo B.6.** Resolvamos la EDO:

$$x \frac{dy}{dx} = y \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Podemos reescribir la EDO de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

en  $\mathbb{R}_+$  o  $\mathbb{R}_-$ .

Es fácil notar que el cambio de variables adecuado es  $u = \frac{y}{x}$ , así  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ . Reemplazando en la EDO tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ u + x \frac{du}{dx} &= u \ln(u) \end{aligned}$$

que corresponde a una EDO de variables separables.

Separando variables e integrando obtenemos:

$$\int \frac{du}{u(\ln(u) - 1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Para resolver la integral del lado izquierdo consideramos el cambio  $z = \ln(u) - 1$ , así  $dz = \frac{du}{u}$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|z| &= \ln|x| + C \\ |z| &= C|x|. \end{aligned}$$

Devolvemos los cambios, y tenemos:

$$u(x) = e^{C|x+1|} \implies y = xe^{C|x+1|}.$$