UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III
525201

Prof.: Anahí Gajardo

Listado 6

## Ejercicios de práctica

1. Considere los siguientes operadores

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z,t) &= (x,x,x,t+x-z) \\ P_2(x,y,z,t) &= (y-x,0,0,0) \end{aligned}$$

   *a*) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que $P_1$ es idempotente y calcule su espectro, polinomio característico, y sus núcleos iterados para cada uno de sus valores propios y el exponente de estabilización de $P_1 - \lambda id$ para cada valor de $\lambda$.

   *b*) **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que $P_1$ y $P_2$ son independientes.

   *c*) **(propuesto)** Considere el operador $T = 3P_1 - P_2$. Calcule su espectro, polinomio característico, y sus núcleos iterados para cada uno de sus valores propios y el exponente de estabilización de $T - \lambda id$ para cada valor de $\lambda$. Demuestre que $T$ es diagonalizable.

2. Sean $T$ y $L$ dos operadores lineales tales que $T \circ L = L \circ T$ y sea $p(x)$ un polinomio.

   *a*) **(propuesto)** Demuestre que $L$ conmuta con $p(T)$.

   *b*) Demuestre que $Ker(p(T))$ e $Im(p(T))$ son $L$-invariantes.

3. Dada una transformación lineal $T : V \to V$ y dado un sub espacio vectorial $S \subseteq V$ $T$-invariante, demuestre que si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ tales que $\lambda v - T(v) \in S$ entonces $S + < \{v\} >$ es también $T$-invariante.

4. **(a realizar por los alumnos)** Demuestre que los siguientes subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ están en suma directa dos a dos, pero no como familia **(concluir por la ayudante)**.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{K} \right\} \\ S_2 &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\ S_3 &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

## Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $T^2 = \Theta_{\mathcal{L}}$ si y solo si $Im(T) \subseteq Ker(T)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, 0)$.

    *a*) Para todo $i = 1, \ldots, n$ hallar un subespacio $T$-invariate de dimensión $i$.

    *b*) Demuestre que no existen $S$ y $T$ subespacios propios de $T$ tal que $\mathbb{R}^n = S \oplus T$.

3. Demuestre que si $\{F_i\}_{i=1}^k$ es una familia de operadores idempotentes e independientes dos a dos, es decir tales que $\forall i \neq j, F_i \circ F_j = \Theta_{\mathcal{L}}$. Demuestre que entonces los espacios $\{Im(F_i)\}_{i=1}^k$ están en suma directa.

4. Sea la función $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida como sigue.

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt$$

    *a*) Muestre que $T$ es lineal.

    *b*) Muestre que $T$ es inyectiva pero no sobreyectiva.

    *c*) Considere $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, el operador derivada: $D(p(x)) = p'(x)$. Demuestre que es lineal y que no es inyectivo.

    *d*) Demuestre que $T \circ D = id$.

    *e*) Concluya que $D$ es sobreyectivo.

    *f*) Calcule $D \circ T$ y decida si $D$ y $T$ conmutan o no.

5. Demuestre que si $T$ es idempotente, entonces $T + I$ es inyectivo.

6. Considere el operador $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(a, b, c) = (a + b + c, b, c)$. Calcule su espectro, polinomio característico, y sus núcleos iterados para cada uno de sus valores propios y el exponente de estabilización de $F - \lambda id$ para cada valor de $\lambda$. Demuestre que $F$ no es diagonalizable.