

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521.218)
 PRÁCTICA N°3 (EDO Lineal de Orden Superior)

Problemas a resolver en práctica: Recuerde que si $y = y(x)$ entonces $Dy := \frac{dy}{dx}$.

1. Desarrolle la expresión $(D^3 - D^2 + D)(e^{3x})$.

Solución: Desarrollando, se obtiene:

$$(D^3 - D^2 + D)(e^{3x}) = \frac{d^3}{dx^3}(e^{3x}) - \frac{d^2}{dx^2}(e^{3x}) + \frac{d}{dx}(e^{3x}) = 27e^{3x} - 9e^{3x} + 3e^{3x} = 21e^{3x}.$$

2. Determine si $y(x) = e^{3x}$ es solución de la EDO lineal $(D^3 - D^2 + D)y(x) = 0$.

Solución: Dada la función $y(x) = e^{3x}$, del Problema 1 sabemos que

$$(D^3 - D^2 + D)y(x) = 21y(x).$$

Dado que $y(x) = e^{3x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que esta función **NO** es solución de la EDO lineal dada.

3. Desarrolle la expresión: $(D + 1)(xD - x)(3e^{2x})$.

Solución: Desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} (D + 1)(xD - x)(3e^{2x}) &= 3(D + 1)(xD - x)(e^{2x}) = 3(D + 1)(2xe^{2x} - xe^{2x}) \\ &= 3(D + 1)(xe^{2x}) = 3(e^{2x} + 2xe^{2x} + xe^{2x}) = 3(1 + 3x)e^{2x}. \end{aligned}$$

4. Sea L el operador diferencial lineal definido por $L = (D - x)(xD - 2)$.

Muestre que la EDO dada por $Ly = \ln(x^2 + 1)$, corresponde a la EDO lineal de segundo orden y de coeficientes variables $xy''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución: Desarrollando el operador diferencial lineal:

$$\begin{aligned} Ly(x) &= (D - x)(xD - 2)y(x) = (D - x)(xy'(x) - 2y(x)) \\ &= y'(x) + xy''(x) - 2y'(x) - x^2y'(x) + 2xy(x) \\ &= xy''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la EDO dada por $Ly = \ln(x^2 + 1)$ equivale a la EDO

$$xy''(x) - (1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \ln(x^2 + 1).$$

5. Para x en $]0, 1]$, estudie la independencia lineal del conjunto $\{\ln(x), x \ln(x)\}$.

Solución: Estudiando la independencia lineal por medio del wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \ln(x) & x \ln(x) \\ 1/x & \ln(x) + 1 \end{vmatrix} = \ln^2(x) + \ln(x) - \ln(x) = \ln^2(x).$$

Por lo tanto $W(x) = \ln^2(x)$, función que es positiva para $x \in]0, 1]$ (salvo en $x = 1$). Por lo tanto el conjunto de soluciones $\{\ln(x), x \ln(x)\}$ es linealmente independiente.

6. Sean y_1 la solución sobre $(0, \infty)$ de $x^2 y'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, e y_2 la solución sobre $(0, \infty)$ de $x^2 y'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$,
a) Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es conjunto fundamental de soluciones de $x^2 y'' + y' + xy = 0$
b) Sea y_3 la solución de

$$x^2 y'' + y' + xy = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

Determine las constantes reales c_1 y c_2 de modo que $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Solución a): Por definición, el conjunto $\{y_1, y_2\}$ satisface la EDO $x^2 y'' + y' + xy = 0$. El wronskiano viene dado por $W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$. Evaluando en $x = 1$, se obtiene $W(1) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -1$, es decir, el wronskiano es distinto de cero en un punto del intervalo $(0, \infty)$, por lo tanto las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes en el intervalo y $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la EDO indicada.

Solución b): Es evidente que la solución $y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la EDO. Para satisfacer las condiciones iniciales, se requiere que $y_3(1) = 2$ y $y_3'(1) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) &= 2 \\ c_1 y_1'(1) + c_2 y_2'(1) &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 2,$$

que son los valores buscados las constantes reales c_1 y c_2 .

7. Sea $L = (D - a)$ donde a es una constante real. Muestre que y definida por $y(x) = e^{ax} \in \text{Ker}(L)$; además muestre que $\{e^{ax}, x e^{ax}\}$ forma una base para el $\text{Ker}(L^2)$. En general se puede demostrar que para $m \in \mathbb{N}$, $x^{m-1} e^{ax} \in \text{Ker}(L^m)$.

Observación: Lo anterior no es valido si L tiene coeficientes variables.

Solución: Aplicando el operador L a la función y :

$$Ly(x) = (D - a)(e^{ax}) = De^{ax} - ae^{ax} = ae^{ax} - ae^{ax} = 0,$$

lo que prueba que $y(x) \in \text{Ker}(L)$. Veamos ahora que el conjunto $\{e^{ax}, x e^{ax}\}$ pertenece al $\text{Ker}(L^2) = \text{Ker}((D - a)^2)$:

$$L^2(e^{ax}) = (D - a)(D - a)(e^{ax}) = (D - a)(0) = 0,$$

$$L^2(xe^{ax}) = (D - a)(D - a)(xe^{ax}) = (D - a)(e^{ax} + axe^{ax} - axe^{ax}) = (D - a)(e^{ax}) = 0.$$

Para ver que este conjunto forma una base de $\text{Ker}(L^2)$, calculamos el wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} & x e^{ax} \\ a e^{ax} & (1 + ax) e^{ax} \end{vmatrix} = (1 + ax) e^{2ax} - a x e^{2ax} = e^{2ax},$$

el cual es estrictamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el conjunto $\{e^{ax}, x e^{ax}\}$ es efectivamente una base para el $\text{Ker}(L^2)$.

Problemas propuestos para el estudiante

1. Desarrolle la expresión $(D^2 - D)(e^{3x} + 3x^3)$.

2. Para $D = \frac{d}{dx}$, muestre que $D[xD] \neq [xD]D$.

Observación: Operadores diferenciales lineales con coeficientes variables, en general, no conmutan!

3. (a) Muestre que $(D - x)(xD - 2)y \neq (xD - 2)(D - x)y$
(b) Muestre que $y_1(x) = ax^2$ con a constante real, es solución de $(xD - 2)y = 0$, pero no lo es de $(xD - 2)(D - x)y = 0$.
(c) Muestre que $y_2(x) = bx e^{1/2 x^2}$ con b constante real, es solución de $(D - x)y = 0$, pero no lo es de $(D - x)(xD - 2)y = 0$.
(d) Muestre que $(D - x)(xD - 2)y_1 = 0$
(e) ¿Qué puede concluir de todo lo anterior ?
4. Resuelva la EDO lineal homogénea $Ly = 0$, cuando:
- (i) $L = (D + 6)(D - 2)(D + 3)(D - 2)$
(ii) $L = D^3 - 3D^2 + 4$, sabiendo que $y = e^{-x}$ pertenece al Kernel de L .
(iii) $L = (D + 2)(D^2 - 6D + 10)^2(D^2 - 25)^3$.
5. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = (D - 1)^2(D + 1)^2$. Sabiendo que la función z definida por $z(x) = 2x^3 - 14x$ es una solución particular de $L(y) = 2x^3 - 26x$, determine la solución general de la EDO lineal no homogénea $y^{(iv)} - 2y'' + y = 2x^3 - 26x$.
6. Determine una EDO lineal a coeficientes constantes reales:
- a) que tenga a $y_1(x) = e^{-3x}$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple este requisito?
b) de orden 4 que tenga entre sus soluciones a $y_1 = e^{-3x}$ e $y_2 = x^2 e^{5x}$,
c) de menor orden posible, tal que las funciones $y_1(x) = x^4 e^{-2x} \sin(3x)$, $y_2(x) = x^2 e^{4x}$ pertenezcan al Kernel del operador diferencial L inducido por la EDO.
7. Buscando soluciones del tipo $y(x) = e^{\beta x}$, determine la solución general de $L(y) = 0$, cuando: (a) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)$, (b) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)(D - 3)$.
8. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = D^4 + 2D^3 - 3D^2 - 4D + 4$. Resuelva la EDO lineal $Ly = 0$, sabiendo que $(D + 2)$ y $(D - 1)$ son factores de L .