

## Matrices definidas positivas

- ▶ Una matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice **definida positiva** si

$$x^t A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0.$$

- ▶ Estas matrices también aparecen muy habitualmente, por ejemplo, al ajustar parámetros de un modelo por cuadrados mínimos o al resolver problemas de valores de contorno para ecuaciones diferenciales.
- ▶ **Teorema.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica.  $A$  es definida positiva si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:
  1. los valores propios de  $A$  son todos positivos;
  2. los determinantes de las submatrices principales de  $A$  son todos positivos;
  3. existe una matriz  $L$ , triangular inferior y no singular, tal que  $A = LL^t$ .
- ▶ Esta última propiedad nos dice que si la matriz es simétrica y definida positiva, siempre puede obtenerse una factorización en matrices triangulares **sin necesidad de pivoteo**. Además, **no hace falta calcular la matriz triangular superior**, pues es la transpuesta de la triangular inferior. Veremos que esto reduce el costo operacional a la mitad.

## Método de Cholesky (cont.)

- ▶ Para resolver un sistema de ecuaciones  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con **matriz simétrica y definida positiva** por el **método de Cholesky**, una vez calculada  $\mathbf{L}$ , se tiene:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{L}(\mathbf{L}^t\mathbf{x}) = \mathbf{b} \iff \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{L}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases}$$

- ▶ Para resolver los sistemas  $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{L}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , se utiliza el algoritmo que ya conocemos para matrices triangulares, cuyo costo operacional es de  $\approx 2n^2$ .
- ▶ Por lo tanto el costo operacional total del método de Cholesky es de  $\approx \frac{1}{3}n^3$ . Vale decir, **aproximadamente la mitad que el del M.E.G.**
- ▶ Además, se demuestra que si la matriz es **simétrica y definida positiva**, los métodos de factorización son estables respecto a la propagación de errores de redondeo **sin necesidad de estrategia de pivoteo**.

En particular, el método de Cholesky es **estable respecto a la propagación de errores de redondeo**.

## Método de Cholesky en OCTAVE

```
>> A = [2 -1 0; -1 2 -1; 0 -1 2];  
>> R = chol(A)  
R =  
  
    1.41421   -0.70711   0.00000  
    0.00000   1.22474   -0.81650  
    0.00000   0.00000   1.15470  
  
>> L = R'  
L =  
  
    1.41421   0.00000   0.00000  
   -0.70711   1.22474   0.00000  
    0.00000   -0.81650   1.15470
```

Notar que OCTAVE entrega una matriz triangular superior  $R$ .