UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación de Recuperación (521218-525221)

Problema 1. (20 puntos)
Considere el sistema de Ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneo

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

(i) Usando el método de valores y vectores propios, determine la solución del sistema homogéneo asociado.

(ii) Usando el método de variación de parámetros, determine una solución particular para el sistema no homogéneo dado. Escriba claramente la forma de la solución particular buscada.

(iii) Determine la solución general del sistema no homogéneo dado.

Solución: (i) El sistema homogéneo asociado es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Primero, calculamos los Valores propios de $\boldsymbol{A}$ donde $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 + 1 = 0\,,$$

de donde obtenemos los valores propios

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

Los respectivos espacios propios resultan ser:

$$S_{\lambda_1} := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{2\times 1} : (\boldsymbol{A} - 5\,\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

En modo similar,

$$S_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

De este modo la solución general del sistema homogéneo asociado es

$$\boldsymbol{X}(t) = k_1\, \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\, \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

siendo k_1, k_2 constantes reales arbitrarias. **(8 puntos)**

(ii) Solución particular: Mediante el método de variación de parámetros se propone la solución particular

$$X_p(t) = c_1(t)\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son funciones a determinar y son tales que sus respectivas derivadas satisfacen la igualdad

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{5t} \end{pmatrix}. \qquad (\mathbf{4\,puntos})$$

Así, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} e^{5t} {c_1}'(t) + e^{-t} {c_2}'(t) = 2 \\ \\ e^{5t} {c_1}'(t) - e^{-t} {c_2}'(t) = e^{5t} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\begin{cases} {c_1}'(t) = \dfrac{1}{2} e^{-5t} \left(2 + e^{5t}\right) \\ \\ {c_2}'(t) = \dfrac{1}{2} e^{t} \left(2 - e^{5t}\right) \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{-1}{5} e^{-5t} + \dfrac{1}{2} t \\ \\ c_2(t) = e^{t} - \dfrac{1}{12} e^{6t} \end{cases}$$

Reemplazando, obtenemos la solución particular

$$X_p(t) = \left(-\frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{1}{2} t\right) \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \left(e^{t} - \frac{1}{12} e^{6t}\right) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{6\,puntos})$$

(iii) Sabemos que la solución general del sistema es de la forma

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

en este caso, se obtiene:

$$X(t) = k_1\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{1}{2} t\right) \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \left(e^{t} - \frac{1}{12} e^{6t}\right) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

donde k_1, k_2 constantes reales arbitrarias. **(2 puntos)**

Problema 2. **[20 puntos]** Usando el método de aniquiladores, determine la solución del siguiente problema con valor inicial

$$\begin{cases} X''(t) - 3\,X'(t) + 2\,X(t) = 2\,e^{2t}, \\ X(0) = 1,\; X'(0) = -2 \end{cases}$$

Solución:

Tenemos que

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

donde $X_h(t)$ es la solución general de la EDO

$$X_h''(t) - 3\,X_h'(t) + 2\,X_h(t) = 0$$

y $X_p(t)$ es una solución particular de

$$X_p''(t) - 3\,X_p'(t) + 2\,X_p(t) = 2\,e^{2t}. \tag{1}$$

[2 puntos]

El polinomio característico es

$$p\,(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 1)\,,$$

que tiene las raíces simples 1 y 2. Por lo tanto

$$X_h(t) = C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{t}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

[6 puntos]

El aniquilador de $2\,e^{2t}$ es $D-2$, donde $D = \frac{d}{dt}$. Aplicando $D-2$ a (1) se llega a

$$(D-2)^2\,(D-1)\,X_p(t) = (D-2)\left(2\,e^{2t}\right) = 0.$$

Lo que nos lleva a buscar $X_p(t)$ con la forma

$$X_p(t) = A\,t\,e^{2t},$$

donde la constante $A \in \mathbb{R}$ debe ser determinada.

[6 puntos]

Derivando se llega a que

$$X_p'(t) = A\,e^{2t} + 2A\,t\,e^{2t}$$

y

$$X_p''(t) = 4A\,e^{2t} + 4A\,t\,e^{2t}$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$Ae^{2t} = 2e^{2t}.$$

Luego $A = 2$. Entonces,

$$X_p(t) = 2\,t\,e^{2t}.$$

[3 puntos]

Por lo tanto

$$X(t) = C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{t} + 2\,t\,e^{2t},$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ya que $X(0) = 1$,

$$1 = C_1 + C_2.$$

Además,

$$X'(t) = 2\,C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{t} + 2\,e^{2t} + 4\,t\,e^{2t}.$$

De donde obtenemos

$$-2 = X'(0) = 2\,C_1 + C_2 + 2.$$

Así que

$$-4 = 2\,C_1 + C_2.$$

Lo que implica que $C_1 = -5$ y $C_2 = 6$. Hemos llegado a que

$$X(t) = -5\,e^{2t} + 6\,e^{t} + 2\,t\,e^{2t},$$

[3 puntos]

Problema 3. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$r'(t) = \frac{\ln(t)}{t}\,r^2(t) - \frac{a}{t}\,r(t), \qquad \text{para } t \geq 1, \text{ y } a \text{ una constante real.} \tag{2}$$

(a) **[6 puntos]** Si $a = 0$, ¿qué tipo de Ecuación Diferencial Ordinaria es (2)? Resuélvala.

(b) **[6 puntos]** Cuando $a \neq 0$, (2) corresponde a una EDO de Bernoulli. A partir del cambio de variable $u = r^{-1}$, reduzca la ecuación (2) a una EDO de lineal de primer orden.

(c) **[8 puntos]** Resuelva la ecuación diferencial lineal obtenida en el ítem anterior, considerando la condición inicial $r(1) = 1$. Exprese la solución final en términos de la variable original $r(t)$.

Solución:

(a) Cuando $a = 0$ nos queda una EDO de variables separables:

$$\frac{dr}{dt} = r^2\frac{\ln(t)}{t}. \tag{3}$$

Separando variables e integrando ambos lados, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}dr &= \tfrac{\ln(t)}{t}dt \\ \int \frac{1}{r^2}dr &= \textstyle\int \tfrac{\ln(t)}{t}dt \end{aligned}$$

Del lado izquierdo nos queda la integral

$$\int \frac{1}{r^2}dr = -\frac{1}{r} + C_1;$$

mientras que del lado derecho podemos usar el cambio de variable $z = \ln(t)$, lo que nos da

$$\int \frac{\ln(t)}{t}dt = \int z\,dz = \frac{(\ln(t))^2}{2} + C_2.$$

Es decir, la solución general de la EDO de variables separables (3) queda como

$$-\frac{1}{r(t)} = \frac{(\ln(t))^2}{2} + C \Rightarrow r(t) = -\left(\frac{(\ln(t))^2}{2} + C\right)^{-1},$$

con C una constante arbitraria.

(b) Cuando $a \neq 0$ notamos que la Ecuación (2) corresponde a una EDO de Bernoulli. Para resolverla consideramos el cambio $u = r^{1-2} = r^{-1}$, donde

$$\frac{du}{dt} = -r^{-2}\frac{dr}{dt}.$$

Multiplicando la EDO (2) por $-r^{-2}$ y sustituyendo el cambio de variables obtenemos la siguiente EDO lineal:

$$\begin{aligned} -r^{-2}\frac{dr}{dt} &= -\frac{\ln(t)}{t} + r^{-1}\frac{a}{t} \\ \frac{du}{dt} - u\frac{a}{t} &= -\frac{\ln(t)}{t}. \end{aligned} \tag{4}$$

(c) La EDO lineal (4) ltiene como factor integrante a la función

$$\mu(t) \quad = e^{-\int \frac{a}{t}dt} = |t|^{-a}.$$

Multiplicando la EDO lineal (4) por el factor integrante y reescribiendo:

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-a}\,u\right) = -\frac{\ln(t)}{t}t^{-a}.$$

Integrando ambos lados respecto de t, y considerando el cambio de variable $z = \ln(t)$, nos queda

$$\begin{aligned} t^{-a}u(t) &= -\int \frac{\ln(t)}{t}t^{-a}dt \\ &= -\int ze^{-az}dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Aplicando integrales por partes con

$$\begin{aligned} u &= z & dv &= e^{-az}dz \\ du &= dz & v &= -\frac{e^{-az}}{a} \end{aligned}$$

tenemos

$$\int ze^{-az}dz = -z\frac{e^{-az}}{a} - \frac{e^{-az}}{a^2} + C$$

Volviendo a (5) y devolviendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} t^{-a}u(t) &= -\int ze^{-az}dz \\ &= z\frac{e^{-az}}{a} + \frac{e^{-az}}{a^2} + C \\ &= \ln(t)\frac{e^{-a\ln(t)}}{a} + \frac{e^{-a\ln(t)}}{a^2} + C \\ &= \ln(t)\frac{t^{-a}}{a} + \frac{t^{-a}}{a^2} + C. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $r = u^{-1}$, la solución general de la EDO (5) viene dada por:

$$u(t) = \frac{\ln(t)}{a} + \frac{1}{a^2} + C\,t^a \tag{6}$$

En términos de la variable original r, nos queda

$$r(t) = \frac{1}{\frac{\ln(t)}{a} + \frac{1}{a^2} + C\,t^a}$$
$$r(t) = \frac{a^2}{a\ln(t) + 1 + C\,t^a}, \tag{7}$$

con C constante arbitraria.

Finalmente, usando que $r(1) = 1$, tenemos

$$1 = r(1) = \frac{a^2}{1+C} \Rightarrow C = a^2 - 1.$$

De lo anterior, la solución particular de (4), cuando $r(1) = 1$, es

$$r(t) = \frac{a^2}{a\ln(t) + 1 + (a^2-1)\,t^a}.$$

Julio, 22 de 2025.
KMR/JMS/CMG//kmr/jms/cmg