

PL[4-5] -CÁLCULO IV (MAT 225212 & MAT 225252)

**Tema: Funciones Complejas Elementales II: Ramas Logarítmicas y Potencias.**

1. **Ramas del argumento y del logaritmo complejo.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $z \neq 0$

- $\alpha$ -rama principal de  $\arg(z)$ :  $\text{Arg}_\alpha(z) \in ]\alpha, \alpha + 2\pi]$
- $\alpha$ -rama principal de  $\log(z)$ :  $\text{Log}_\alpha(z) = \ln|z| + i\text{Arg}_\alpha(z)$ ,  $\alpha < \text{Arg}_\alpha(z) \leq \alpha + 2\pi$

2. **Potencias complejas.** Sea  $z \neq 0$  y  $q \in \mathbb{C}$  fijo.

- $\alpha$ -potencia multivaluada:  $z^q = e^{q \log_\alpha(z)}$
- $\alpha$ -potencia principal (univaluada):  $z^q = e^{q \text{Log}_\alpha(z)}$

**PL[4]**

1. Explicitar los conjuntos y comparar las selecciones indicadas.

(a)  $\log(i) \wedge \log_0(i)$  (b)  $\log(-i+1) \wedge \log_{\frac{\pi}{2}}(-i+1)$  (P)  $\log(-i) \wedge \log_{\frac{3\pi}{2}}(-i)$

2. Evaluar el logaritmo de las siguientes expresiones, usando

(a)  $\ln(z) = \log(z)$  y  $\text{Ln}(z) = \text{Log}(z)$  (b)  $\log_\alpha(z)$  y  $\text{Log}_\alpha(z)$  para  $|\alpha| = \frac{\pi}{3}$

(1)  $2i$  (3)  $e^{i\frac{\pi}{7}}$  (P)  $1+i\sqrt{3}$  (6)  $\frac{1}{(1+i)^4}$

(2)  $-3-3i$  (4)  $(1+i)^7$  (5)  $e^{-1-i\frac{\pi}{7}}$  (P)  $\frac{e^{-i\frac{\pi}{7}}}{2e^{-i\frac{\pi}{5}}}$

3. Explicitar los conjuntos

(a)  $\log_6(1)$  (b)  $\log_{\sqrt{3}}(1+i)$  (P)  $\log_5(-5i)$  (c)  $\log_{2\pi}(i)$ .

4.1 Evaluar  $\text{Ln}(e^{i\pi})$ ,  $\text{Ln}(e^{i3\pi})$  y  $\text{Ln}(e^{i5\pi})$ .

(P) Establecer la propiedad:  $\text{Ln}(z) = i\text{Arg}(z) \iff |z| = 1$ .

5. Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

(a)  $e^z = 3$  (c)  $e^{z+3} = i$  (P)  $e^{2z} + 5 = 0$

(b)  $e^{-z} = 1+i$  (d)  $e^{2z} + 3e^z + 2 = 0$  (P)  $e^z = \frac{1+i}{1-i}$

6. Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

(a)  $\text{Log}_0(1) = 0$  (P)  $\text{Log}_{\frac{\pi}{4}}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

(P) Para  $z \neq 0$  encontrar el entero  $k$  tal que  $\text{Ln}(z) = \text{Log}_0 + (2k\pi)i$ .

## PL[5]

- 8.1 Visualizar en el plano de Argand que para todo  $l \in \mathbb{N}$  la fase no cambia para el escalamiento  $lz$ , es decir,  $\text{Arg}(lz) = \text{Arg}(z)$ . Mientras que  $|lz| = l|z|$
- 8.2 Establecer que solo si  $a \in \mathbb{R}^+$ , se verifica que  $\text{Ln}(az) = \ln(a) + \text{Ln}(z)$ . Se deben presentar contra ejemplos si  $a \in \mathbb{R}^-$  y para  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im}(a) \neq 0$ .

(P) Resolver la ecuación  $\text{Ln}(z) + \text{Ln}(2z) = \frac{3\pi}{2}$  y verificar que la expresión encontrada satisface la ecuación.

10. Idem:  $\text{Ln}(iz) - i\text{Ln}(z) = \frac{3\pi}{2}$

11.1 Evaluar el valor principal de las siguientes funciones.

(a)  $5^i$                       (b)  $(1+i)^{3+i}$                       (c)  $i^i$                       (P)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^i$

11.2 Encontrar todos los valores de las potencias complejas del problema [11.1]

12 Repetir el problema [11.1] y [11.2] para las siguientes potencias complejas. Ensayar resolver con *IA*

(a)  $(3i)^4$                       (b)  $(1+i\sqrt{3})^{\frac{2}{7}}$                       (c)  $(-i)^i$                       (P)  $(-e)^{\frac{i}{2}}$

13 Dilucidar las regiones del plano de Argand donde se verifica  $\text{Ln}(\bar{z}) \neq \overline{\text{Ln}(z)}$ .

(P) Resolver  $\cos(z) = \sin(z)$ .

(P) Recordando que

$$w = \cos^{-1}(z) \iff z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Establecer, que el valor principal de  $\cos^{-1}(z)$  es

$$\cos^{-1}(z) = -i\text{Ln}(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}).$$