UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EB/JB/GD/CF/NH/RM/CM/MN/LP/JQ/MV

LISTADO 5 - APLICACIONES DE LA DERIVADA

Cálculo I - 527140

1. Calcular los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hôpital:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(8x)}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^3}}{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan(x)}$

   (h) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\tan(x)-1)\sec(2x)$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^3-\cos\left(x^2\right)}{x^3}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

   (k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{3x}$

   (l) $\lim\limits_{x\to \pi/2^+} \dfrac{\tan(x)}{\tan(3x)}$

   (m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (n) $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \left(\sec^3(x)-\tan^3(x)\right)$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -xe^{-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2\ln\left(x^2\right) & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{2x^3-4x^2+2x}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

   (a) Justificar por qué f es derivable para todo $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ y determine $f'(x)$ para $x>1$.
   (b) Determinar si f es continua en $x=1$.
   (c) Determinar si f es derivable en $x=0$.
   (d) Hallar, si es posible, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$.

3. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) El valor de $x=1/2$ satisface el teorema del valor medio para la función real $f(x)=x^2+2x-1$ en el intervalo $[0,1]$.
   (b) La función $f(x)=x\ln(x)-x$ es estrictamente creciente en el intervalo $]0,+\infty[$.
   (c) El gráfico de la función $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-ax$, $a\in\mathbb{R}$, tiene un punto de inflexión en $(2, f(2))$.
   (d) Si f es continua tal que $f(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}$ y

$$f'(x)=xf(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

   entonces f no tiene puntos de inflexión.

(e) Si x_0 es un punto crítico para f entonces, él es un punto de extremo local de f.

(f) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función dos veces derivable con $f''(x_0)=0$, entonces x_0 es un punto de inflexión del gráfico de f.

(g) Si la función f es definida por $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, entonces la recta $y=e$ es asíntota horizontal de f.

4. Muestre que la ecuación $4x^3+3x^2+2x+1=0$ tiene una única raíz real.

5. Considerar la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+x+1$. Chequear que f verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio y demostrar que el punto $c\in]a,b[$, al cual se refiere el teorema, corresponde al punto medio del intervalo.

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x^2+1)+2$

(a) Analizar la naturaleza de los puntos críticos de f.

(b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

7. Determinar para cada una de las siguientes funciones, puntos críticos, máximos y mínimos relativos y/o absolutos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, puntos de inflexión e intervalos de concavidad. Luego, esbozar el gráfico de f.

(a) $f:[-2.+\infty[\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x(x-4)$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-3x^2-12x$

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}(x^2+2x)$

(d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2-4)\left(x^2+1\right)^{-1}$

(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+2\right)$

8. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

(a) $f(x)=-x^3-x^2+5x$, con $x\in[-2,2]$

(b) $f(x)=x^4(x-1)^2$, con $x\in[-1,2]$

(c) $f(x)=x^2-2|x|$, con $x\in[-2,3]$

(d) $f(x)=2\cos(2x)-\cos(4x)$, con $x\in[0,2\pi]$.

9. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

10. Un rectángulo está posicionado en el primer y segundo cuadrante del plano cartesiano, de modo que dos de sus vértices se encuentran ubicados en el eje X y los otros dos sobre en la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=5$. Determine las longitudes de los lados del rectángulo de modo que tenga área máxima.

11. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=2e^x-x^2$, de modo que la pendiente sea mínima.

12. Un faro se encuentra ubicado en un punto A, a 4 millas del punto más cercano O de una costa recta; en un punto B, también en la costa y a 4 millas de O hay una tienda. Si el guardafaros puede remar a 4 millas por hora y caminar a 5. ¿Qué camino debe seguir para llegar del faro a la tienda en el mínimo de tiempo?

13. Determinar la longitud de la varilla más larga que se puede transportar horizontalmente en la esquina que une un pasillo de 8 m de ancho con otro de 4 m de ancho.

14. Considerar los puntos $P(3,4)$ y $Q\,(x_0, 0)$ con $x_0 > 3$. Determinar:

    (a) la ecuación de la recta L que pasa por los puntos P y Q.

    (b) el área del triángulo R limitado por la recta L y los ejes coordenados.

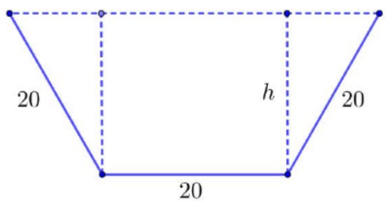
    (c) el valor de x_0 de modo que el área de R sea mínima.

15. Una página rectangular debe contener 96 centímetros cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 3 centímetros de ancho y los laterales de 2 centímetros. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerido?

16. Determine la distancia vertical máxima entre las gráficas de las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x$, con $x \in [-2, 1]$.

17. Dos postes verticales de alturas 3 y 4 metros están ubicados en un suelo nivelado y a una distancia de 5 metros entre ellos. Calcular la longitud mínima de cable que se necesita para formar dos tramos rectos: desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo, y desde ahí hasta la punta del otro poste.

18. Con un trozo rectangular de latón de 60 m de ancho y 5 m de largo se construye una canaleta como se indica: se dobla en tres partes iguales de 20 cm de ancho y 5 m de largo de modo que su sección transversal es un trapecio isósceles como se muestra en la figura:



    (a) Verifique que la función que modela el volumen (en cm^3) de la canaleta en función del ángulo θ, que se forma con las caras laterales de dicha canaleta y la vertical h, está dada por:

$$V(\theta) = 200000(\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

    (b) Determine el ángulo θ de modo que el volumen de la canaleta sea máximo.