UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Una demostración del TEOREMA DEL RANGO

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define:

1. El RANGO POR FILAS de A como la dimensión del espacio generado por las filas de A.

2. El RANGO POR COLUMNAS de A como la dimensión del espacio generado por las columnas de A.

EJEMPLO: Para la matriz $A := \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, se verifica que el RANGO POR FILAS de A es 2. Asimismo, el RANGO POR COLUMNAS de A también es 2. ¿Se puede inferir algo a partir de esta ocurrencia?
Con elementos vistos a la fecha de ÁLGEBRA LINEAL, se puede demostrar el resultado siguiente, conocido como el

TEOREMA DEL RANGO: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces,

RANGO POR FILAS de A = RANGO POR COLUMNAS de A.

PROOF: Sean r y s los rangos por filas y por columnas de A, respectivamente. La estrategia es probar que $r \leq s$ y $s \leq r$, para concluir la igualdad de r y s.

PROBEMOS QUE $s \leq r$: Dado que r es el RANGO POR FILAS de A, existen r filas de A que son l.i. Las restantes filas, en consecuencia, dependen de ellas. Sin pérdida de generalidad, suponemos que las primeras r filas de A son l.i. Considerando $A := \begin{pmatrix} f_1 \\ \hline \vdots \\ \hline f_r \\ \hline f_{r+1} \\ \hline \vdots \\ \hline f_m \end{pmatrix}$, tenemos que para cada $i \in \{r+1, ..., m\}$, la i-ésima fila de A, $f_i := (a_{i1}, \cdots, a_{in})$, depende de $\{f_j\}_{j=1}^r$. En consecuencia,

$$\forall\, i \in \{r+1, ..., m\} : \exists\, \{\alpha_{ij}\}_{k=1}^r \subseteq \mathbb{K} : f_i = \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} f_k \,,$$

$$\Rightarrow \forall\, i \in \{r+1, ..., m\} : \forall\, j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = \sum_{k=1}^r \alpha_{ik}\, a_{kj} \,.$$

De esta manera, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, la j-ésima columna de A, denotada por $c_j := (a_{1j}, \cdots, a_{mj})^{\mathtt{t}}$, se puede expresar como

$$\begin{aligned} c_j &= (a_{1j}, \cdots, a_{rj}, a_{r+1,j}, \cdots, a_{mj})^{\mathtt{t}} \\ &= \left(a_{1j}, \cdots, a_{rj}, \sum_{k=1}^r \alpha_{r+1,k}\, a_{kj}, \cdots, \sum_{k=1}^r \alpha_{mk}\, a_{kj} \right)^{\mathtt{t}} \\ &= a_{1j}\,(1, 0, \cdots, 0, \alpha_{r+1,1}, \cdots, \alpha_{m1})^{\mathtt{t}} + \\ &\quad\ a_{2j}\,(0, 1, 0, \cdots, 0, \alpha_{r+2,2}, \cdots, \alpha_{m2})^{\mathtt{t}} + \\ &\quad\ \cdots + \\ &\quad\ a_{rj}\,(0, \cdots, 0, 1, \alpha_{r+1,r}, \cdots, \alpha_{mr})^{\mathtt{t}} \\ &= \sum_{k=1}^r a_{kj} w_k \,. \qquad ¿w_k := ? \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\{c_j\}_{j=1}^n$ y $\{w_k\}_{k=1}^r$ generan el mismo subespacio vectorial (¿POR QUÉ?), lo que implica que $s \leq r$.

PROBEMOS QUE $r \leq s$: El razonamiento es muy similar a lo descrito anteriormente. Es dejado de ejercicio al lector.

CONCLUSIÓN: RANGO POR FILAS de A = RANGO POR COLUMNAS de A. $\square$

En virtud a esto, se puede prescindir de los términos RANGO POR FILAS o RANGO POR COLUMNAS de una matriz, y referirse simplemente como RANGO.

RBP/rbp 24.05.2021