Procesos Estocásticos
CM en tiempo discreto : Clasificación de Estados

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Procesos Estocásticos. 23/06/2020

Outline

Outline

Probabilidad de que la primera visita

- Se define $f_j^{(n)}$ como la probabilidad de que la primera visita al estado x_j ocurra exactamente en la etapa n.
- Se puede definir $f_j^{(n)}$ recursivamente mediante

$$f_j^{(1)} = p_{jj}^{(1)}$$
$$f_j^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_j^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

- $f_j^{(n)} \neq p_{jj}^{(n)}$ para $n > 1$.

Estado recurrente : Definición

- La probabilidad de regresar en algún paso al estado x_j es igual a

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}.$$

- Si $f_j = 1$, el estado j se denomina *recurrente*.

Ejemplo

- Considere la cadena de Markov con la matriz

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-q & 0 & q \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $0 < p, q < 1$.

- Compruebe que los estados son recurrentes.

Solución

$$
\begin{aligned}
f_1^{(1)} &= p \\
f_1^{(2)} &= 0 \\
f_1^{(3)} &= (1-p)1(1-q) \\
f_1^{(4)} &= (1-p)1q(1-q) \\
\ldots \\
f_1^{(n)} &= (1-p)q^{n-3}(1-q), \qquad n \geq 3
\end{aligned}
$$

Solución. Cont.

Luego,

$$\begin{aligned} f_1 &= p + 0 + \sum_{n=3}^{\infty} (1-p)(1-q)q^{n-3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Por tanto, el estado 1 es recurrente.
- En palabras sencillas, al salir del estado 1 es seguro que se podrá regresar. Compruebe este resultado mediante grafo de la cadena.
- Más aún, se puede verificar que los estados 2 y 3 también son recurrentes.

Observación

- Si un estado x_j es recurrente y los estados x_i y x_j se comunican, esto es si

$$\exists n, k: \; p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ y } p_{ji}^{(k)} > 0,$$

entonces x_i también es recurrente.

- Esto se puede interpretar como que ser recurrente es una propiedad "contagiosa".

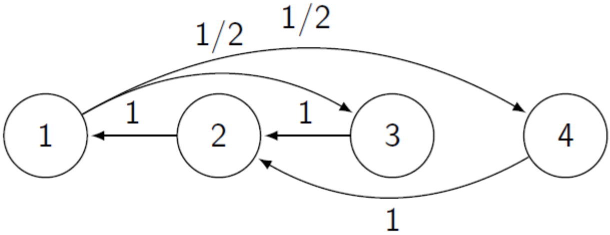
Ejemplo

Considere la cadena de Markov identificada con la matriz de paso

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

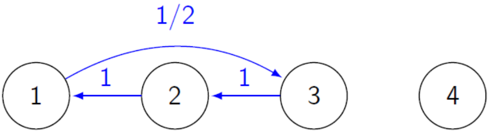
Ejemplo. Cont.

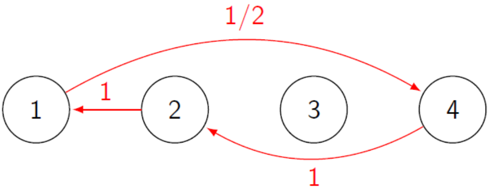
Su grafo es :



Ejemplo. Cont.

Notemos que $f_1^{(1)} = 0$ y $f_1^{(2)} = 0$. Por otro lado, existen dos maneras de volver al estado 1 en tres pasos :





Ejemplo. Cont.

Obtuvimos que $f_1^{(3)} = (1/2) \cdot 1 \cdot 1 + (1/2) \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

Luego, $f_1 = f_1^{(3)} = 1$ y por tanto el estado 1 es recurrente.

- Ya hemos dicho que los estados x_i y x_j se comunican entre sí cuando

$$\exists n, k : \ p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ y } p_{ji}^{(k)} > 0,$$

- Los elementos de una sub cadena que se comunican entre sí forman una clase dentro de la cadena.

- Una clase se dice *cerrada*, si no comunica con otra clase de la cadena.

Cadena irreducible y estados transientes

- Una cadena de Markov finita se denomina *irreducible* si tiene una sola clase. En otras palabras, una cadena irreducible es aquella en la que todos los estados son alcanzables desde cualquier otro estado de la cadena en un número finito de pasos. Esto es, para cada par de estados i y j, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

- Un estado se dice *transiente* si no es recurrente. Es decir, j es transiente si y sólo si $f_j < 1$.

Ejemplo

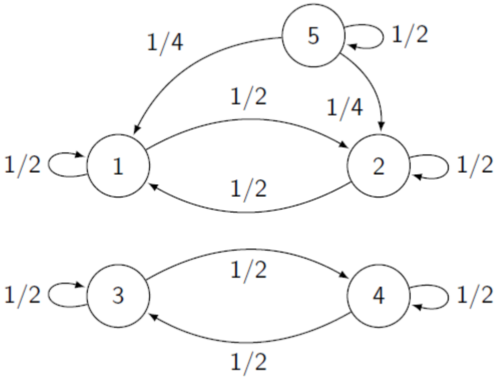
Considere la cadena de Markov identificada con la matriz de paso

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notamos que la matriz no es irreducible pues $p_{15}^{(n)} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Cont.

El grafo de la cadena es



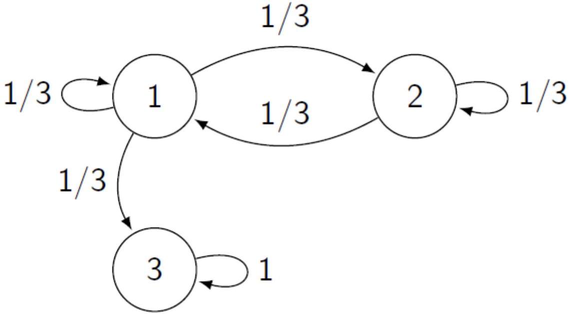
Ejemplo. Cont.

- Conjuntos cerrados (que forman subcadenas) $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$.

- Además, el estado 5 es transiente pues $f_5^{(1)} = 1/2$ y $f_5^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 2$. Por lo tanto, $f_5 = 1/2 < 1$, entonces es un estado transiente.

Ejemplo

Para la cadena con el siguiente grafo, los estados 1 y 2 son transientes, pero el estado 3 es *absorbente*.



Estados peiódicos. Definición

Si se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} &= 0 \text{ para } n \neq k, 2k, 3k, \ldots \\
p_{ii}^{(n)} &\neq 0 \text{ para } n = k, 2k, 3k, \ldots
\end{aligned}
$$

se dice que el estado i es *periódico* de perÃodo k. En caso contrario, si no existe $k \in \mathbb{N}$ que verifique la propiedad anterior, se dice que el estado es *aperiódico*.

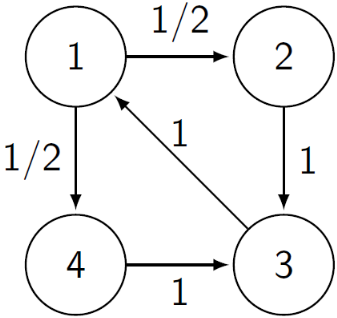
Ejemplo

Considere la cadena de Markov identificada con la matriz

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo. Cont.

Observando el grafo, notamos que la cadena es irreducible y todos los estados tienen período 3.



Ejemplo. Cont.

En efecto, se tiene que

$$S := \mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \mathbb{P}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = S$$

Así, S es idempotente.

Ejemplo. Cont.

Luego, se tiene que

$$\mathbb{P}^{3k} = S^k = S = \mathbb{P}^3 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}^{3k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Cont.

Por tanto, para $i = 1, 2, 3, 4$

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} &= 0, \qquad && n \neq 3, 6, 9, \ldots \\
p_{ii}^{(n)} &\neq 0, \qquad && n = 3, 6, 9, \ldots
\end{aligned}
$$