Espacios Vectoriales

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

April 20, 2021

Definición de cuerpo (revisión)

Definición

Un **cuerpo** es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones binarias cerradas

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad \text{y} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x + (y + z) = (x + y) + z,$ (asociatividad)
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \ : \ x + y = y + x,$ (conmutatividad)
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{K} \ : \ \forall x \in \mathbb{K} \ : \ 0 + x = x,$ (existencia del elemento neutro para $+$)
4. $\forall\, x \in \mathbb{K} \ : \ \exists (-x) \in \mathbb{K} \ : \ x + (-x) = 0,$ (existencia del elemento inverso para $+$)
5. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$ (asociatividad)
6. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot y = y \cdot x,$ (conmutatividad)
7. $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \ : \ \forall x \in \mathbb{K} \ : \ 1 \cdot x = x,$ (existencia del elemento neutro para $\cdot$)
8. $\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ \exists x^{-1} \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot x^{-1} = 1,$ (existencia del elemento inverso para $\cdot$)
9. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \ : \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$ (distributividad)

Propiedades de un cuerpo

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo. Hemos denotado por:

- 0 al elemento neutro para $+$, llamado también elemento neutro aditivo,
- 1 al elemento neutro para $\cdot$, llamado también elemento neutro multiplicativo,
- $-x$ al elemento inverso para $+$ de x, llamado también elemento inverso aditivo,
- x^{-1} al elemento inverso para $\cdot$ de x, llamado también elemento inverso multiplicativo.

Entonces,

1. $\mathbb{K} \neq \emptyset$,
2. los elementos neutros para ambas operaciones son únicos,
3. para cada $x \in \mathbb{K}$, su inverso para $+$ es único,
4. para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, su inverso para $\cdot$ es único,
5. para cada $x \in \mathbb{K}$ se cumple que $0 \cdot x = 0$,
6. para cada $x \in \mathbb{K}$, $(-x) = (-1) \cdot x$,
7. para cada $x \in \mathbb{K}$, $-(-x) = x \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$,
8. para cada par de valores $x, y \in \mathbb{K} : x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \quad \vee \quad y = 0)$.

Ejemplos: **$(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos**.

Definición

Un **espacio vectorial (e. v.)** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto V junto con dos operaciones binarias cerradas

$$\oplus : V \times V \to V \quad \text{y} \quad \odot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall\, x, y, z \in V \ : \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ (asociatividad)
2. $\forall\, x, y \in V \ : \ x \oplus y = y \oplus x,$ (conmutatividad)
3. $(\exists\, \Theta \in V)(\forall x \in V) \ : \ \Theta \oplus x = x,$ (existencia del elemento neutro para $\oplus$)
4. $(\forall\, x \in V)(\exists y \in V) \ : \ x \oplus y = \Theta,$ (existencia del elemento inverso para $\oplus$)
5. $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall u, v \in V):$
   a) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u,$
   b) $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v,$
   c) $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u,$
6. $(\forall\, u \in V) \ : \ 1 \odot u = u$, donde 1 denota el neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$.

Propiedades de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Sea $(V, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. A los elementos de V se le llaman VECTORES.

- Θ representa al elemento neutro para $+$, llamado vector nulo,
- para cada $x \in V$, $-x$ representa al elemento inverso de x para $+$, llamado el inverso aditivo de x,

entonces

1. el vector nulo Θ es único,
2. para cada $x \in V$, el inverso aditivo de x es único,
3. $\forall\, x \in V \;:\; 0 \cdot x = \Theta$,
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \alpha \cdot \Theta = \Theta$,
5. $\forall\, x \in V \;:\; -x \;=\; (-1) \cdot x$, i.e. el inverso aditivo de cualquier $x \in V$ se caracteriza por $(-1) \cdot x$,
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in V \;:\; (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$,
7. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in V \;:\; \alpha \cdot x = \Theta \Leftrightarrow \alpha = 0 \;\vee\; x = \Theta$.

Ejemplos de espacios vectoriales

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces los siguientes conjuntos, con las operaciones usuales de adición entre elementos de cada uno de ellos y multiplicación entre un elemento de ellos y un elemento en $\mathbb{K}$, son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

1. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, el conjunto de n-uplas ordenadas, $n \in \mathbb{N}$, con componentes en $\mathbb{K}$.
2. $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, el conjunto de las matrices de m filas, n columnas, $m, n \in \mathbb{N}$, y coeficientes en $\mathbb{K}$.
3. $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$, el conjunto de las funciones de $X \subseteq \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$.
4. $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.

- Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y
$$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ es función} \} .$$
Este conjunto, con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación escalar real por una función, es un espacio vectorial real
Estas operaciones son tales que
$$+ : \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{R}), \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(X,\mathbb{R}).$$
Para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ la función
$$f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
es tal que $\forall\, x \in X \ : \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
Además para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y para cada $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ la función
$$\alpha\, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
es tal que $\forall\, x \in X \ : \ (\alpha\, f)(x) = \alpha\, f(x)$.

Definición

Sean $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial (e.v.) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que que $(U, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial (s.e.v.) de $(V, +, \cdot)$ si $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$, y $(U, +, \cdot)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$.

Lema: Caracterización de subespacios vectoriales

Sean $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $U \subseteq V$.
U es **subespacio vectorial de V** si y sólo si

i. $U \neq \emptyset$,

ii. $\forall\, u, w \in U \;:\; u + w \in U$, (+ es cerrada en U)

iii. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, u \in U \;:\; \lambda \cdot u \in U$. ($\cdot$ es cerrada en U)

Observaciones:

1. Las condiciones ii. y iii. del Lema anterior, son equivalentes a
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \forall\, u, w \in U : \lambda \cdot u + w \in U$.
2. Para chequear que $U \neq \emptyset$, se suele validar si acaso $\Theta \in U$. Si es cierto, entonces $U \neq \emptyset$. Caso contrario, U NO PUEDE SER s.e.v. de V.

Ejemplos de subespacios vectoriales

- $(V,+,\cdot)$ y $(\{\Theta\},+,\cdot)$ son los únicos s.e.v. triviales del e.v. $(V,+,\cdot)$.
- Sea $\mathcal{F}(A,B) := \{f : A \to B : f \text{ es función}\}$. Luego, $(\mathcal{F}(A,B),+,\cdot)$ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$, donde $+$ y $\cdot$ son definidas por

$$(a)\ \forall\, f\,, g \in \mathcal{F}(A,B) : \forall\, x \in A : (f+g)(x) := f(x) + g(x)\,,$$
$$(b)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \forall\, f \in \mathcal{F}(A,B) : \forall\, x \in A : (\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x)\,.$$

  Aquí, $(B,+,\cdot)$ debe ser un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Por ejemplo, $A := \mathbb{R}$, $B := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Cuando $A = B = \mathbb{R}$, y $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es función continua}\}\,,$$

  es s.e.v. de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de adición entre polinomios y multiplicación por escalar (real), define un espacio vectorial real (es subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$).
- $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ es un espacio vectorial real (es subespacio vectorial de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).
- Se tiene $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \le \mathcal{P}(\mathbb{R}) \le \mathcal{C}(\mathbb{R}) \le \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donde $\le$ se lee "es s.e.v. de".

Ejemplos de subespacios vectoriales (continuación)

En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con sus operaciones binarias $+$ y $\cdot$ usuales:

1. $W_1 := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A}$ es triangular superior o inferior$\}$ no es s.e.v. de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ pues para

$$\boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_1$$

se tiene $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \notin W_1$, i.e. la operación binaria adición $+$ NO ES CERRADA en W_1.

2. Se destacan los s.e.v.

$$(a)\ U := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{t}\},$$
$$(b)\ W := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{t}\}.$$

Subespacios Intersección y Suma

Sean $(U,+,\cdot)$ y $(W,+,\cdot)$ s.e.v. del e.v. $(V,+,\cdot)$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, se tiene que

1. $(U\cap W,+,\cdot)$ es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$,
2. $(U+W,+,\cdot)$ es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$, donde $U+W := \{a+b : a\in U \wedge b\in W\}$. Además, cuando $U\cap W = \{\Theta\}$, se dice que $U+W$ es suma directa y se denota por $U\bigoplus W$. La descomposición en este caso, es única. Es decir

$$\forall\, v\in V : \Big(v\in U\bigoplus W \Leftrightarrow \exists!\, a\in U : \exists!\, b\in W : v = a+b\Big).$$

Observaciones:

1. Si $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $U\subseteq V$ es tal que $\Theta\notin U$, entonces U no es un subespacio vectorial de V.
2. $(U\cup W,+,\cdot)$ no siempre es s.e.v. de $(V,+,\cdot)$. En realidad, se prueba que

$$(U\cup W,+,\cdot) \text{ es s.e.v de } (V,+,\cdot) \Leftrightarrow U\subseteq W \vee W\subseteq U$$

Ejemplo

Se puede probar que $U := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x\}$ y $W := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ son s.e.v. de $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (Verificarlo). Tenemos que $(1,1)\in U\subseteq U\cup W$, y $(1,2)\in W\subseteq U\cup W$, pero $(1,1)+(1,2) = (2,3)\notin U\cup W$.
Esto permite afirmar que $U\cup W$ no es s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos de Suma y Suma Directa

1. Para el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, se introducen

$$U := \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$
$$W := \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Puede probarse que U y W son s.e.v. de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Además, $U + W = \mathbb{R}^3$, pero NO ES SUMA DIRECTA ¿POR QUÉ?

2. Considere el espacio vectorial real $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con las operaciones usuales. Se definen

$$U := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R})(p(-x) = p(x))\},$$
$$W := \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R})(p(-x) = -p(x))\},$$

Puede probarse que U y W son s.e.v. de $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. También se tiene $U + W = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Es más, $U \bigoplus W = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ¿POR QUÉ?

3. En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con sus operaciones binarias $+$ y $\cdot$ usuales, se consideran los s.e.v. (vistos en un ejemplo anterior)

$$U := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\},$$
$$W := \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\}.$$

Se puede probar que $U + W = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Es más, $U \bigoplus W = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ¿POR QUÉ?

Intersección y Suma de una familia de subespacios

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\{U_j\}_{j\in I}$ una familia de subespacios vectoriales de V. Se puede probar que

1. $\displaystyle\bigcap_{j\in I} U_j$ es un subespacio vectorial de V, conocido como Espacio Intersección de la familia de subespacios $\{U_j\}_{j\in I}$.
2. $\displaystyle\sum_{j\in I} U_j := \left\{ z\in V : \exists\, m\in\mathbb{N} : \exists\, (u_j)_{j=1}^{m} \in \prod_{j=1}^{m} U_j : z = \sum_{j=1}^{m} u_j \right\}$ también es un subespacio vectorial de V, llamado Espacio Suma de la familia de subespacios $\{U_j\}_{j\in I}$.

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\{U_j\}_{j\in I}$ una familia de subespacios vectoriales de V.

Definición: V es la Suma Directa de la familia de subespacios vectoriales $\{U_j\}_{j\in I}$, lo cual se denota por $\displaystyle\bigoplus_{j\in I} U_j$, si

$$a)\ V = \sum_{j\in I} U_j$$

$$b)\ \forall\, k\in I : U_k \cap \sum_{j\in I\setminus\{k\}} U_j = \{\Theta\}.$$

Espacio generado y sistema generador

Definición: Combinación lineal

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \subseteq V$ (subconjunto no vacío, finito o no finito). Se dice que $w \in V$ es **combinación lineal (c.l.)** de vectores de A, si $\exists\, m \in \mathbb{N} : \exists\, v_1, \dots, v_m \in A : \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} : w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$.

Definición: Espacio generado

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $A \subseteq V$ (subconjunto no vacío, finito o no finito). Se define el espacio generado por A como

$$\langle A \rangle := \{v \in V : v \text{ es c.l. de vectores de } A\}.$$

Al conjunto A se le llama conjunto/sistema generador.

Observaciones: $\forall\, A, B$ subconjuntos no vacíos del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, se verifica:

1. $\langle A \rangle$ es un s.e.v. de $(V,+,\cdot)$ sobre $\mathbb{K}$ (el más pequeño que contiene a A).
2. $\langle \{\Theta\} \rangle = \{\Theta\}$, y $\langle V \rangle = V$.
3. $A \subseteq \langle A \rangle$, pues $\forall\, v \in A : v = 1 \cdot v \in \langle A \rangle$.
4. Si además $A \subseteq B$, entonces $\langle A \rangle \leq \langle B \rangle$.
5. Si $\{A_j\}_{j \in I}$ familia de subconjuntos de V, entonces $\left\langle \bigcup_{j \in I} A_j \right\rangle = \sum_{j \in I} \langle A_j \rangle$.

Lema (Espacio generado por un conjunto finito)

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. Dado $A := \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$, el conjunto $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}\rangle$ es, en efecto un subespacio vectorial de V, llamado **espacio generado por el conjunto $A = \{v_1, , \ldots, v_m\}$**.
Al conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ se le denomina **sistema generador** de $\langle\{v_1, \ldots, v_m\}\rangle$.

Ejemplos:

Se definen $\{p_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0^+} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como sigue.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p_0(x) := 1 \text{ si } j = 0\,,$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p_j(x) := x^j \text{ si } j \in \mathbb{N}\,.$$

Entonces se puede probar que: $(a)\,\langle\,\{p_j\}_{j=0}^m\rangle = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})\,,\quad (b)\,\left\langle\,\{p_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0^+}\right\rangle = \mathcal{P}(\mathbb{R})\,.$

Observación: Dos conjuntos diferentes pueden generar el mismo subespacio vectorial. Por ejemplo, en el espacio vectorial $V := \mathbb{R}^3$, consideramos los conjuntos $A_1 := \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ y $A_2 := \{(1,0,0),(1,1,0)\}$. Se verifica que $A_1 \neq A_2$ y $\langle A_1\rangle = \langle A_2\rangle = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ (PLANO $z = 0$).

Conjunto linealmente dependiente / Independiente

Definición

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. $A \subseteq V$ se dice que es conjunto linealmente dependiente (l.d.) si $\exists\, v \in A \,:\, v \in \langle A \backslash \{v\} \rangle$.
En caso contrario, se dirá que A es linealmente independiente (l.i.)
Cuando A es finito, por ejemplo $A := \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq V$, para algún $m \in \mathbb{N}$, se dice que A es **l.d.** si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \Theta\,,$$

lo que es equivalente a decir $\exists\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, v_j \in \langle A \backslash \{v_j\} \rangle$.
Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ no es l.d., se dice que es **linealmente independiente (l.i.)**.
Equivalentemente, $\{v_1 \; \ldots \; , v_m\}$ es l.i. si

$$\forall\, \lambda_1\,, \ldots\,, \lambda_m \,\in \mathbb{K} \,:\, \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, v_j \,=\, \Theta \,\Rightarrow\, \forall\, j \in \{1, ..., m\} \,:\, \lambda_j \,=\, 0\,.$$

Lema de Dependencia Lineal

Sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. sobre $\mathbb{K}$, y $\{v_1\,, \ldots\,, v_m\} \subseteq V$ un conjunto de vectores l.d. Entonces, existe $\{v_{i_1}\,, \ldots\,, v_{i_n}\} \subseteq \{v_1\,, \ldots\,, v_m\}$ conjunto de vectores l.i., tal que
$\langle\{v_1\,, \ldots\,, v_m\}\rangle \,=\, \langle\{v_{i_1}\,, \ldots\,, v_{i_n}\}\rangle$.

Idea de la demostración

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v_1 \neq \Theta$. Como $A := \{v_1, ..., v_m\}$ es l.d., entonces AFIRMAMOS:

$$\exists\, j \in \{2, ..., m\} \,:\, v_j \in \langle \{v_1, ..., v_{j-1}\} \rangle \,.$$

ESTA AFIRMACIÓN ES VERDADERA, pues de no serlo, se tendría

$$\forall\, j \in \{2, ..., m\} \,:\, v_j \notin \langle \{v_1, ..., v_{j-1}\} \rangle \,\Rightarrow\, \{v_1, ..., v_m\} \text{ es l.i. } (\rightarrow\leftarrow)\,.$$

De esta forma, v_j (al ser c.l. de $\{v_1, ..., v_{j-1}\}$) será extraído del conjunto A. Esto nos conduce a afirmar que

$$\langle \{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_m\} \rangle \,=\, \langle\, A \,\rangle\,.$$

Lo que sigue ahora es repetir el proceso anterior para extraer otro vector (si existe) que haga que $A \backslash \{v_j\}$ sea l.d. De esta manera, vamos eliminando aquellos vectores de A que la hacen ser un conjunto l.d., hasta que deje de serlo. Al final, obtendremos un conjunto l.i. $\{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\} \subseteq A$ tal que

$$\langle\, \{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\}\, \rangle \,=\, \langle\, A \,\rangle\,,$$

y termina la demostración.

Base y dimensión

Definición: Espacio vectorial de dimensión finita e infinita

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ se dice ser finito dimensional si admite al menos un sistema generador finito. Es decir, si existe $S := \{w_j\}_{j=1}^{p} \subseteq V$, para algún $p \in \mathbb{N}$, tal que $\langle S \rangle = V$. Caso contrario, se dirá que $(V, +, \cdot)$ es infinito dimensional.

Definición: Base

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. $B \subseteq V$ es una base de V si B es l.i. y $\langle B \rangle = V$.

Lema (Existencia de bases - caso finito dimensional)
Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, con $V \neq \{\Theta\}$. Entonces, cualquier sistema generador de V contiene al menos una base de V. En consecuencia, todo espacio vectorial finito dimensional admite al menos una base.

Demostración: En vista que $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\exists\, S := \{w_j\}_{j=1}^{p} \subseteq V$, para algún $p \in \mathbb{N}$, tal que $\langle S \rangle = V$. Por analizar ahora dos casos posibles:

1. S es l.i. En tal caso, S resulta ser una base de V, y se tiene el resultado.
2. S es l.d. Luego, invocando el Lema de Dependencia Lineal, $\exists\, \{\Theta\} \neq U \subset S$ tal que U es l.i. y $\langle U \rangle = \langle S \rangle = V$, i.e. U es una base de V. Así se deduce el resultado también.

Observaciones para espacios vectoriales de dimensión finita $(V, +, \cdot)$

1. Definición (Base): Sea B una base de V. La dimensión de V, denotada por $\dim(V)$, se define por $\dim(V) := |B|$. Por convención: $\dim(\{\Theta\}) = 0$.
2. Si W es un sistema generador finito de V, entonces $|W| \geq \dim(V)$.
3. Si B y B' son bases de V, con $|B| = m$ y $|B'| = n$, entonces $m = n$.

Teorema de la Base Incompleta

En un espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ finito dimensional, todo conjunto de vectores de V linealmente independiente puede completarse hasta obtener una base de V.

Demostración: Supongamos que $\dim(V) = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Además sea $B := \{u_j\}_{j=1}^n$ una base de V, y $S := \{w_k\}_{k=1}^p \subset V$ con $p \in \mathbb{N}$ y $p < n$, un conjunto l.i. La estrategia consiste en completar S con vectores de B hasta obtener un conjunto l.i.

Afirmación 1: $\exists\, j_1 \in \{1, ..., n\} : u_{j_1}$ no es c.l. de S.

En efecto, pues de lo contrario se tendría: $\forall\, j \in \{1, ..., n\} : u_j$ es c.l. de S, lo cual implica que S es un sistema generador de V, y al ser l.i., otra base de V. Esto implica que $\dim(V) = |S| = p < n = \dim(V)$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Consecuencia 1: $S \cup \{u_{j_1}\}$ es l.i.

Luego, por analizar dos casos:

1. Si $p + 1 = n$, se ha completado la base, la cual es $S \cup \{u_{j_1}\}$.
2. Si $p + 1 < n$, el proceso continúa como al principio, ahora considerando $B \setminus \{u_{j_1}\}$ en el proceso de completación de la base.

De esta forma, al cabo de a lo más $n - p$ etapas, se obtiene el conjunto $S \cup \{u_{j_1}, ..., u_{j_{n-p}}\}$, el cual es l.i. y por tanto otra base de V. $\square$

Corolario (Dimensión de un subespacio)

Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}-$espacio finito dimensional y S un s.e.v. de V cualquiera. Entonces

1. $\dim(S) \leq \dim(V)$,
2. $\dim(S) = \dim(V) \quad \Leftrightarrow \quad S = V$.

Demostración: Es dejada al lector como ejercicio.

Teorema de Grassmann

Sea $(V,+,\cdot)$ un e.v. de dimensión finita, y $(U,+,\cdot)$ y $(W,+,\cdot)$ dos s.e.v. de $(V,+,\cdot)$. Entonces,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)\,.$$

En particular, si $U \cap W = \{\Theta\}$, entonces $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Demostración: Estará disponible en Infoda.

Observaciones

1. La existencia de bases para Espacios vectoriales infinito dimensionales también está garantizada. Sin embargo, la demostración de este resultado escapa al contenido del presente curso. Requiere manejo del conocido Lema de Zorn (equivalente al Axioma de elección).
2. Lema de Zorn: Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.