

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II

- ▶ Método de Euler implícito
- ▶ Estabilidad y EDO *stiff*.
- ▶ Sistemas de EDO.

Método de Euler Implícito

Recordemos Método de Euler, el que se conoce también como **Euler Explícito**.

Algoritmo (Euler)

```
For  $i = 0, \dots, N - 1$   
     $x_i = a + ih$   
     $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$   
end
```

El Algoritmo del Método de **Euler Implícito** es:

Algoritmo (Euler Implicito)

```
For  $i = 0, \dots, N - 1$   
     $x_i = a + ih$   
     $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$   
end
```

Estabilidad y EDO *stiff*

Una E.D.O. $y' = f(x, y)$ se dice **estable** si $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ pues, dadas dos soluciones de la E.D.O. con distintas condiciones iniciales,

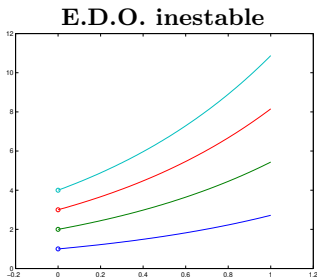
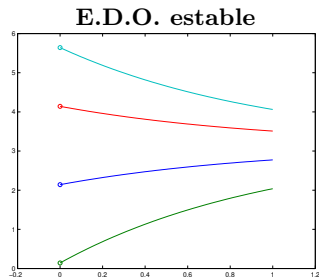
$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y), \\ y(a) = y_0, \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}), \\ \hat{y}(a) = \hat{y}_0, \end{array} \right.$$

se demuestra que

$$|y(x) - \hat{y}(x)| < |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a.$$

Recíprocamente, una E.D.O. $y' = f(x, y)$ se dice **inestable** si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ pues, en tal caso, se demuestra que dos soluciones de la E.D.O. con distintas condiciones iniciales satisfacen

$$|y(x) - \hat{y}(x)| > |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a.$$



Al aplicar un método numérico a una E.D.O. inestable es natural que los errores crezcan con x_i .

En cambio, para una E.D.O. estable sería deseable que los errores no crezcan significativamente con x_i .

Los métodos numéricos que satisfacen esto último, se denominan **estables**. Los que no, **inestables**.

Ejemplo. Considere el siguiente P.V.I. $\begin{cases} y'(x) = -\alpha(y - \sen x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Solución exacta:

$$y(x) = -\frac{e^{-\alpha x} (\alpha e^{\alpha x} \cos x - \alpha^2 e^{\alpha x} \sen x - \alpha^2 - \alpha - 1)}{\alpha^2 + 1}.$$

$$f(x, y) = -\alpha(y - \sen x) \implies \frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha \implies \text{E.D.O. estable para } \alpha > 0.$$

Para este problema se usaron los métodos

- **Euler (explícito):** $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - h\alpha(y_i - \sen x_i),$
- **Euler Implícito:** $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i - h\alpha(y_{i+1} - \sen x_{i+1}).$

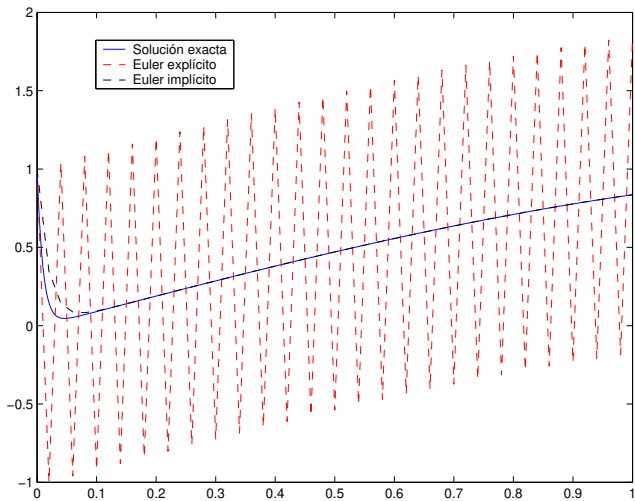
Como en este caso la E.D.O. es lineal, en el método implícito puede despejarse y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{y_i + h\alpha \sen(x_{i+1})}{(1 + h\alpha)}.$$

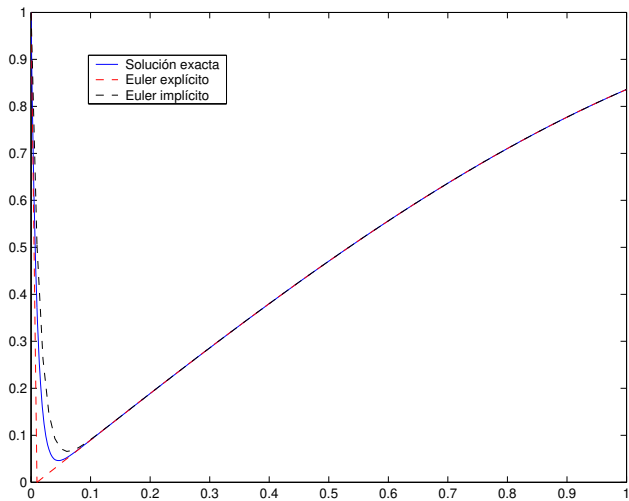
La siguiente tabla muestra los errores al resolver el P.V.I. anterior para $\alpha = 100$ y diferentes pasos h .

	$h = 0.05$		$h = 0.02$		$h = 0.01$	
x	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	16.1500	0.0280	-1.0100	0.0041	-0.4169e-04	9.3664e-04
0.2	258.5500	7.3867e-04	1.0100	-0.0014e-04	0.0911e-04	-0.0783e-04
0.3	4136.9000	-0.4340e-04	-1.0100	-0.2692e-04	0.1398e-04	-0.1365e-04
0.4	66191.0000	-0.8821e-04	1.0100	-0.3646e-04	0.1870e-04	-0.1839e-04
0.5	1.0591e+06	-1.1167e-04	-1.0100	-0.4558e-04	0.2324e-04	-0.2294e-04
0.6	1.6945e+07	-1.3345e-04	1.0101	-0.5423e-04	0.2754e-04	-0.2726e-04
0.7	2.7112e+08	-1.5387e-04	-1.0099	-0.6235e-04	0.3157e-04	-0.3131e-04
0.8	4.3379e+09	-1.7276e-04	1.0101	-0.6984e-04	0.3528e-04	-0.3504e-04
0.9	6.9407e+10	-1.8992e-04	-1.0099	-0.7663e-04	0.3864e-04	-0.3842e-04
1.0	1.1105e+12	-2.0519e-04	1.0101	-0.8266e-04	0.4162e-04	-0.4143e-04

$$\alpha = 100 \quad h = 0.02$$



$$\alpha = 100 \quad h = 0.01$$



La tabla y los gráficos anteriores muestran que, en este ejemplo, el método de Euler explícito sólo es estable si el paso h es suficientemente chico.

En cambio, el método de Euler implícito es estable cualquiera sea el paso h .

Este es un ejemplo de una **E.D.O. stiff**. Estas E.D.O. se caracterizan por

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ muy grande.}$$

En este ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha = -100$.

Lo que observamos en este ejemplo vale en general:

- ▶ Para las E.D.O. stiff, los métodos explícitos sólo dan resultados aceptables con pasos h excesivamente pequeños. Cuando el paso h no es suficientemente chico, los métodos explícitos aplicados a una E.D.O. stiff dan soluciones numéricas que oscilan alrededor de la solución exacta con amplitud creciente.
- ▶ Para las E.D.O. stiff, sólo deben utilizarse métodos implícitos. Estos métodos son estables cualquiera sea el paso que se utilice.

Sistemas de E.D.O.

Considere el P.V.I. definido por el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ \vdots &= \vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \quad x \in [a, b], \\ y_1(a) &= y_1^0, \quad y_2(a) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(a) = y_n^0 \quad (\text{dados}). \end{cases}$$

Este sistema se escribe:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), & x \in [a, b], \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}^0 \quad (\text{dado}), \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix},$$

Los métodos numéricos vistos para una ecuación se generalizan directamente al caso de un sistema de n ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, el método de Euler (RK_{11}) se expresa como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^0 : \text{dato}, \\ \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), & i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Todos los otros métodos numéricos estudiados en este capítulo se pueden formular similarmente en forma vectorial para sistemas.