Apuntes de 525412 Álgebra IV: Introducción a la Matemática Discreta.

Christopher Thraves Caro

Abstract

Asignatura teórica que introduce a la matemática discreta y muestra su aplicabilidad en la teoría y técnicas de la computación y la investigación de operaciones. Los contenidos que se verán son :

Grafos no digiridos y dirigidos (digrafos), representación, isomorfismos, caminos y ciclos, conexidad, árboles, grafos bipartitos, planaridad, grafos y digrafos Eulerianos, grafos y digrafos Hamiltonianos.

Autómatas celulares, lenguajes formales, autómatas finitos, lenguajes regulares, Máquinas de Turing.

Estructuras algebraicas, monoides, grupos, anillos, cuerpos, morfismos.

1 Grafos

Definición 1.1. Un grafo G es un par ordenado (V, E), donde V es un conjunto de vértices o nodos, y E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan pares de nodos. Típicamente se usa la notación $G = (V, E)$

- Si $E \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| = 2\}$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V, entonces diremos que G es un *grafo simple* o simplemente diremos que es un grafo. Un par no ordenado es un conjunto de la forma $\{a, b\}$ de manera que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Para los grafos, estos conjuntos pertenecen al *conjunto de potencia* de V, denotado $\mathcal{P}(V)$, y son de cardinalidad 2.

- Si $E \subseteq \{(a, b) \in V \times V : a \neq b\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V, entonces diremos que G es un *grafo dirigdo* o *digrafo*. En este caso, dada una arista (a, b), a es el vértice inicial y b es el vértice final de la arista. En el caso de los digrafos las aristas también se llaman *arcos*.

- Si E es un *multiconjunto* de V donde cada elemento tiene cardinalidad 2, entonces diremos que G es un *multi-grafo*. En este caso pueden esistir aristas de la forma $\{a, a\}$ para algún vértice $a \in V$ llamadas *bucles* o *loops*, o multiples aristas iguales llamadas *aristas paralelas*.

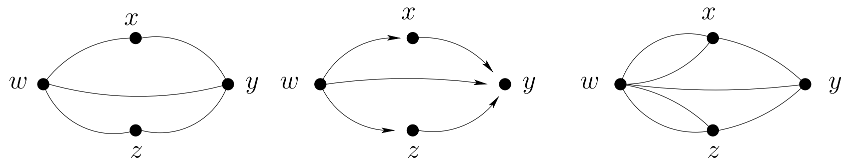

Figure 1: Dibujos del grafo, digrafo y multigrafo del Ejemplo 1.2

Los dos vértices que definen a una arista se llaman los *extremos* de la arista. Cuando dos vértices a y b son extremos de una arista, entonces diremos que a y b son *adyacentes* o *vecinos*.

Ejemplo 1.2.

- Sea $G = (V, E)$ el grafo tal que:

$$V = \{x, y, z, w\}$$

y

$$E = \{\{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{z, y\}, \{x, y\}\}.$$

- Sea $D = (V, A)$ el digrafo tal que:

$$V = \{x, y, z, w\}$$

y

$$A = \{(w, x), (w, y), (w, z), (z, y), (x, y)\}.$$

- Sea $M = (V, F)$ el multigrafo tal que:

$$V = \{x, y, z, w\}$$

y

$$E = \{\{w, x\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{w, z\}, \{z, y\}, \{x, y\}\}.$$

El *dibujo* de un grafo o un multigrafo es un dibujo en un papel en donde cada vértice está representado por un punto y cada arista está representado por una curva que conecta los dos puntos correspondientes a los extremos de la arista. En el caso de los digrafos cada arco está representado por una flecha que va desde el vértice inicial hasta el vértice final del arco. En la Figura 1 se presentan ejemplos de dibujos para el grafo, el digrafo y el multigrafo del Ejemplo 1.2.

Si el conjunto de vértices de un grafo es infinito entonces diremos que el grafo es *infinito*. Sin embargo, en esta asignatura sólo veremos grafos finitos, es decir, grafos cuyo conjunto de vértices es finito.

Definición 1.3. El *complemento* $\bar{G}$ de un grafo simple $G = (V, E)$ es un grafo simple cuyo conjunto de vértices es V (el mismo que G) y conjunto de aristas es $\bar{E} = \{\{a, b\} : \{a, b\} \notin E\}$. Un *clique* en un grafo G es un conjunto de vértices de G donde todos son vecinos. Un *conjunto independiente* en un grafo G es un conjunto de vértices de G en donde todos son **no** vecinos.

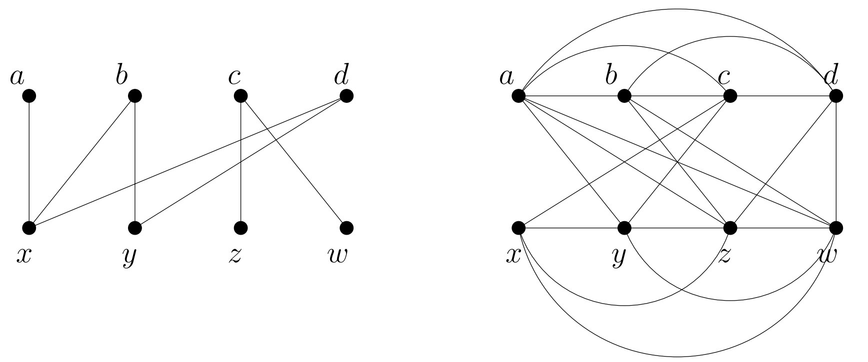

Figure 2: En el dibujo de la izquierda se muestra un grafo bipartito con bipartición $\{a, b, c, d\}$, $\{x, y, z, w\}$. El dibujo de la derecha muestra el complemento del grafo bipartito. Además podemos ver que el conjunto $\{a, x, d\}$ es un conjunto independiente en el grafo bipartito, mientras que el conjunto $\{x, y, c\}$ forma un cilque en su complemento.

Definición 1.4. Un grafo $G = (V, E)$ es *bipartito* si V es la unión de dos conjuntos independientes disjuntos que llamamos *bipartición* de G.

En la Figura 2 se ejemplifica mediante un dibujo las definiciones de complemento de un grafo, clique, conjunto independiente y grafo bipartito.

Definición 1.5. El *número cromático* de un grafo G, denotado $\chi(G)$, es el mínimo número de colores que se requieren para colorear los vértices de G de tal forma que todo vértice sea coloreado con un color distinto al de sus vecinos. Un grafo $G = (V, E)$ es *k-partito* si V puede ser expresado como la unión de k conjuntos independientes (posiblemente vacíos).

El concepto de grafo k-partito generaliza la idea de grafo bipartito (2-partito). Por otro lado, en una coloración de los vértices de un grafo $G = (V, E)$ que cumpla con la condición de que todo vértice debe recibir un color distinto al de sus vecinos, se cumple que los vértices que son coloreados con el mismo color forma un conjunto independiente. Por lo tanto $\chi(G)$ es el mínimo número de conjuntos independientes necesarios para particionar V. Un grafo es k-partito si y sólo si su número cromático es a lo más k. Más adelante estudiaremos el número cromático de grafos que tienen un dibujo en donde sus aristas no se cruzan, este problema también se conoce como el problema de colorear un mapa.

Definición 1.6. Un *camino* es un grafo simple cuyos vértices pueden ser ordenados de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si ellos son consecutivos en el orden. Un *ciclo* es un grafo simple con el mismo número de vértices y aristas, cuyos vértices pueden ser ordenados circularmente de tal forma que dos vértices son adyacentes si y sólo si ellos aparecen de forma consecutiva en el orden.

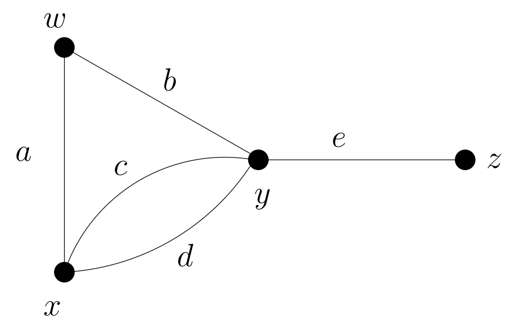

Figure 3: En este dibujo se muestra un grafo con conjunto de vértices $V = \{w, x, y, z\}$ y conjunto de aristas $E = \{a, b, c, d, e\}$.

Definición 1.7. Un *subgrafo* de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En este caso este caso escribimos $H \subseteq G$, y decimos que G *contiene* a H. Un grafo G es *conexo* si todo par de vértices de G pertenece a un camino, en otro caso G es *disconexo*.

Una forma alternativa de presentar un grafo es mediante matrices.

Definición 1.8. Sea G un grafo sin bucles con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. La *matriz de adyacencia* de G, que denotamos $A(G)$, es la matriz $n \times n$ en la que la entrada $a_{i,j}$ es igual al número de aristas en G que conectan al vértice v_i con el vértice v_j. Por otro lado, la *matriz de incidencia* de G, denotada $M(G)$, es la matriz $n \times m$ en la que la entrada $m_{i,j}$ es igual a 1 si v_i es un extremo de la arista e_j y 0 en otro caso.

Ejemplo 1.9. El grafo G de la Figura 3, al ordenar los vértices w, x, y, z, tiene como matriz de adyacencia a la matriz:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y al ordenar a las aristas a, b, c, d, e y a los vértices w, x, y, z, tiene como matriz de incidencia a la matriz:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.10. Si el vértice v es un extremo de la arista e diremos que v y e son *incidentes*. El *grado* de un vértice v en un grafo G sin loops es el número de aristas incidentes que este tiene.

Un grafo G puede tener distintas matrices de adyacencia. Una matriz de adyacencia está determinada por el orden de los vértices del grafo. Toda matriz de adyacencia de un grafo es simétrica. Una matriz de adyacencia de un grafo simple tiene entradas 0 y 1, con ceros en la diagonal. El grado de un vértice v es la suma de las entradas en la fila correspondiente a v en ambas matrices, de adyacencia $A(G)$ y de incidencia $M(G)$.

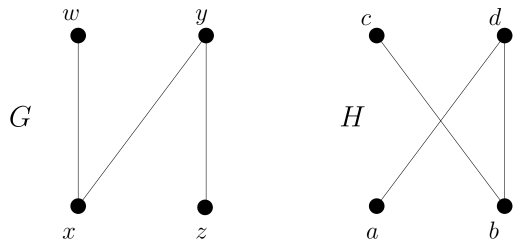

Figure 4: En este dibujo muestra dos grafos isomorfos

Definición 1.11. Un *isomorfismo* de un grafo simple G a un grafo simple H es una biyección $f : V(G) \to V(H)$ tal que $\{u, v\} \in E(G)$ si y sólo si $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. En el caso de que exista un isomorfismo entre G y H, diremos que G y H son isomorfos, y usaremos la notación $G \cong H$.

Ejemplo 1.12. Los grafos G y H de la Figura 4 son dos grafos isomorfos. Un isomorfismo envía w, x, y, z en c, b, d, a, respectivamente. Queda como ejercicio para los alumnos verificar que esto es efectivamente un isomorfismo entre G y H.

Definición 1.13. El camino y el ciclo con n vértices se denotan P_n y C_n, respectivamente. Un grafo es *completo* si es un grafo simple cuyos vértices son todos vecinos. El grafo completo con n vértices es denotado K_n. Un grafo *bipartito completo* es un grafo bipartito en donde dos vértices son vecinos si y sólo si están en particiones distintas. El grafo bipartito completo con particiones de tamaño r y s se denota $K_{r,s}$.

La Figura 5 muestra un dibujo de K_5 y un dibujo de $k_{2,3}$.

Ya se ha definido caminos y ciclos en un grafo, un camino es un grafo G es un subgrafo de G que es un grafo camino, la definición para los ciclos en un grafo es equivalente reemplazando caminos por ciclos. Ahora extenderemos esas definiciones.

Definición 1.14. Una *caminata* en un grafo G es una lista de vértices y aristas de G $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, la arista e_i tiene como extremos a los vértices v_{i-1} y v_i. Un *recorrido* es una caminata en donde no se repiten aristas. Una $u-v$-*caminata* o $u-v$-*recorrido* tiene como primer vértice a u y como último vértice a v. Un $u-v$-camino es un camino con primer vértice

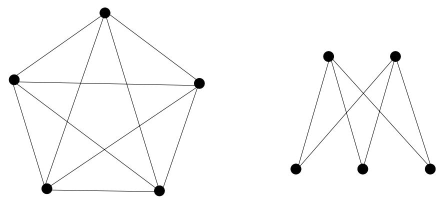

Figure 5: Esta figura muestra un dibujo de K_5 y un dibujo de $k_{2,3}$.

u y último vértice v. Los vértices que no son ni el primero ni el último se llaman *vértices internos*.

El *largo* de una caminata, un recorrido, un camino y un ciclo viene dado por el número de aristas que tengan. Una caminata y un recorrido son *cerrados* si sus vértices inicial y final son el mismo.

La razón para listar las aristas en caminatas, recorridos o caminos es que, en el caso de los multigrafos, pueden existir más de una arista que conecte a dos vértices, por esto es necesario definir cuál de todas ellas pertenece a la caminata, recorrido o camino. En el caso de los grafos simples, esto no ocurre por lo que no es necesario listar las aristas cuando se presentan caminatas, recorridos o caminos. En ese caso los vértices serán suficientes para especificar al objeto deseado.

Diremos que una caminata W *contiene* a un camino P cuando los vértices y aristas de P aparezcan como una sublista de los vértices y aristas de W en el mismo orden que en P, pero no necesariamente de forma consecutiva.

Lema 1.15. *Toda $u - v$-caminata contiene un $u - v$-camino.*

Proof. La demostración será por inducción en el largo l de la $u - v$-caminata.

El caso base es $l = 0$, es decir, la caminata no tiene aristas y $u = v$. En ese caso la $u - v$-caminata es un $u - v$-camino de largo 0.

Supongamos cierta la afirmación para $l \geq 1$. Ahora, si la $u-v$-caminata tiene largo $l+1$ y no tiene vértices repetidos, entonces es un $u - v$-camino, por lo que no habría nada que demostrar. Luego, supongamos que la $u - v$-caminata tiene al menos un vértice w que se repite en la lista. Luego, su borramos las aristas y vértices entre dos apariciones de w, dejando una copia de w, encontramos una $u - v$-caminata más corta contenida en la caminata original. Por inducción esta caminata contiene un $u - v$-camino, y por lo tanto la caminata original también contiene un $u - v$-camino. $\square$

Definición 1.16. Un grafo $G = (V, E)$ es *conexo* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existe un $u - v$-camino, en otro caso diremos que G es *disconexo*.

Si G tiene un $u - v$-camino, diremos que u y v están conectados en G. Vale la pena remarcar que la *relación de conexión* entre vértices es una relación de equivalencia. Queda como tarea para el estudiante demostrar esta afirmación.

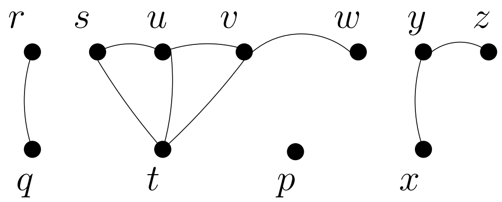

Figure 6: Esta figura presenta un grafo con 3 componentes conexas. Los conjuntos de vértices de las componentes son: $\{r, q\}$, $\{s, u, v, w, t\}$, $\{p\}$, $\{x, y, z\}$.

Las *componentes conexas* de un grafo G son sus subgrafos conexos maximales. Diremos que una componente es *trivial* si no tiene aristas. Diremos que un vértice está *aislado* si tiene grado 0.

Vale la pena notar que los vértices de las componentes conexas de un grafo son las clases de equivalencia de la relación conexión. En la Figura 6 se muestra un ejemplo de un grafo disconexo con tres componentes conexas.

Definición 1.17. Una *arista de corte* o un *vértice de corte* de un grafo G es una arista o un vértice de G tal que si los borramos el número de componentes conexas de G aumenta. Escribimos $G - e$ para denotar al grafo que se obtiene al borrar a la arista e del grafo G. Esta notación se extiende para:

- conjunto de aristas, $G - M$, donde M es un conjunto de aristas,
- un vértice, $G - v$, donde v es un vértice de G, y
- conjunto de vértices, $G - S$, donde $S \subseteq V$.

Definición 1.18. Un *subgrafo inducido* de un grafo G es el subgrafo que se obtiene de borrar un subconjunto de vértices. Denotamos $G[T]$ al grafo $G - \bar{T}$, donde $\bar{T} = V - T$, este es el subgrafo inducido por T.

Teorema 1.19. *Una arista es de corte si y sólo si ésta no pertenece a ningún ciclo.*

Proof. Sea $e = \{x, y\}$ una arista en un grafo G. Sea H la componente conexa que contienen a e. Como el borrar la arista e no afecta a otras componentes conexas, nos basta con demostrar que $H - e$ es conexo si y sólo si e pertenece a un ciclo.

Primero supongamos que $H - e$ es conexo. Esto implica que existe un $x - y$-camino en $H - e$. Este camino junto con e forman un ciclo.

Por otro lado, supongamos que e pertenece a un ciclo C. Tomemos dos vértices u y v en $V(H)$. Como H es conexo existe un $u - v$-camino en H, que llamamos P. Si P no contiene a e, entonces P también es un $u - v$-camino en $H - e$. Si P contiene a e, entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que x está entre u e y en P. Como $H - e$ contiene un $u - x$-camino en P, un

$x-y$-camino en C y un $y-v$-camino en P, uniendo estos caminos encontramos una $u-v$-caminata en $H-e$. Por el Lema 1.15 existe un $u-v$-camino en $H-e$. Como esto lo podemos repetir para todo par de vértices en $V(H)$, entonces $H-e$ es conexo. □

Diremos que una caminata cerrada W *contiene* a un ciclo C si los vértices y aristas de C aparecen como una sublista de W en el mismo orden cíclico de C pero no necesariamente de forma consecutiva.

Lema 1.20. *Toda camina cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.*

Proof. Para demostrar este resultado usaremos inducción en el largo l de la caminara cerrada W.

El caso base de la inducción es cuando $l = 1$. En este caso, como la caminata es cerrada, estamos hablando de un bucle, luego es un ciclo de largo 1. También podríamos considerar que el caso base es cuando $l = 3$ en el caso de grafos simples. En ese caso, queda como ejercicio ver que la única caminata cerrada posible de largo 3 es un ciclo de largo 3.

En la hipótesis de inducción suponemos que toda caminata cerrada de largo menor estricto que l, con l impar, contiene un ciclo de largo impar.

Luego, supongamos que W tiene largo impar $l > 1$. Si W no tiene ningún vértice repetido (distinto al primero y el último que se repiten porque W es cerrada), entonces W es un ciclo y tiene largo impar. En otro caso, supongamos que W tiene un vértice v que se repite. De esta forma, podemos ver W como dos caminatas que empiezan en v, donde cada una es una caminata cerrada que empieza y termina en v. Como W tiene largo impar, entonces una de esas dos caminatas cerradas tiene largo impar. Luego por hipótesis de inducción, dicha subcaminata contiene un ciclo de largo impar, y luego W contiene un ciclo de largo impar. □

Notar que el largo de la caminata debe ser impar. No es verdad que una caminata cerrada de largo par contenga un ciclo, ni de largo par, de largo impar. Por ejemplo, un camino que va y vuelve por las mismas aristas forma una caminata cerrada de largo par y no contiene ningún ciclo. El Lema 1.20 nos ayudará a caracterizar a los grafos bipartitos.

Definición 1.21. Una *bipartición* de un grafo simple G es la especificación de dos conjuntos disjuntos independientes de G cuya unión es $V(G)$. A veces diremos, sea G un grafo bipartito con bipartición X, Y para dar la bipartición. Un $X-Y$-*bigrafo* es un grafo bipartito con bipartición X, Y.

Teorema 1.22 (König 1936)**.** *Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de largo impar.*

Proof. Primero supongamos que G es un grafo bipartito con bipartición X, Y y demostremos que no tiene ciclos de largo impar. Supongamos que una caminata W comienza en algún vértice de X. Para que esta caminata pueda se pueda cerrar, y por ende eventualmente formar un ciclo, la caminata tiene que volver a X, pero esto ocurre siempre luego de un número par de pasos ya que G es bipartito. Lo mismo ocurre si la caminata comienza en Y. Luego G no contiene ciclos de largo impar.

Ahora supongamos que G no tiene ciclos de largo impar y queremos ver que G es bipartito. Para demostrar esto construiremos una bipartición de G para cada componente conexa no trivial. Sea u un vértice de G en una componente conexa no trivial H. Para cada $v \in V(H)$ definimos $f(v)$ como el mínimo largo de un $u-v$-camino. Como H es conexo entonces este valor está bien definido para todo vértice $v \in V(H)$.

Definimos la bipartición como sigue:

$$X = \{v \in V(H) : f(v) \text{ es par o } 0\},$$

e

$$Y = \{v \in V(H) : f(v) \text{ es impar}\}.$$

Veremos que X, Y es una bipartición de G. Lo primero es notar que $X \cup Y = V(H)$, ya todo vértice en H tiene un camino de largo par o impar a u. Ahora, supongamos que existe una arista $\{v, v'\}$ que conecta dos vértices de X, (v y v'). Por la definición de X, entonces existe un $u-v$-camino de largo par y un $u-v'$-camino de largo par. Estos dos caminos de largo par junto con la arista $\{v, v'\}$ forman una caminata cerrada de largo impar. Luego, por Lema 1.20 esta caminata contiene un ciclo de largo impar, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego no puede existir la arista $\{v, v'\}$. El argumento para demostrar que no puede existir una arista que conecta dos vértices en Y es equivalente.

Por lo tanto G es bipartito y X, Y es una bipartición de G. □

Definición 1.23. Diremos que un grafo es *Euleriano* si tiene un recorrido cerrado que contiene a todas las aristas. Un tal recorrido cerrado será llamado *circuito Euleriano.*

De esta forma, la pregunta original sobre recorrer todos los puentes de Königsberg consiste en determinar si el grafo que representa la ciudad contiene un circuito Euleriano. En lo que sigue daremos una caracterización de los grafos Eulerianos.

Lema 1.24. *Si todo vértice en un grafo G tiene grado al menos 2, entonces G contiene un ciclo.*

Proof. Sea G un grafo tal que todos sus vértices tienen grado al menos 2. Sea P un camino maximal en G. Es decir, no existe en G un subgrafo isomorfo a un camino que tenga más vértices que P. Sea u el vértice inicial de P. Como u es un vértice de G tiene grado al menos 2. Como P es maximal, el u no puede tener un vecino fuera de P. Luego, el primer vecino de u es el vértice adyacente a u en P, y el segundo vecino de u es algún otro vértice de P, digamos v. Entonces la arista $\{u, v\}$ junto a la porción correspondiente de P forman un ciclo. □

Teorema 1.25. *Un grafo G es Euleriano si y sólo si tiene a lo más una componente conexa no trivial y todos sus vértices tienen grado par.*

Proof. Primero demostraremos que si G es Euleriano, entonces tiene a lo más una componente conexa no trivial y todos sus vértices tienen grado par. Entonces, supongamos que G es Euleriano, luego tiene un circuito Euleriano. Si tiene un circuito Euleriano que visita a todas las aristas, entonces tiene una componente conexa no trivial ya que dos aristas pueden estar en el mismo recorrido siempre y cuando formen parte de la misma componente conexa. Por otro lado, cada vez que el circuito Euleriano visita un vértice también debe salir del mismo vértice. Luego, para todo vértice en G, cada arista por la que el circuito entra está emparejada con una arista por la que el circuito sale. Como el circuito es Euleriano, todas las aristas están contenidas en el mismo, lo que nos permite concluir que todos los vértices del grafo tienen grado par.

Ahora, supongamos que G tiene una única componente conexa no trivial y además todos sus vértices tienen grado par. Usaremos inducción para demostrar que es Euleriano en m, el número de aristas de G. Si G no tiene aristas ($m = 0$), entonces un vértice cualquiera de G nos da un circuito Euleriano. Supongamos entonces, que todo grafo con $m > 0$ aristas que tiene una única componente conexa no trivial y todos sus vértices tienen grado par es Euleriano.

Consideremos un grafo con $m + 1$ aristas que cumple con las hipótesis del teorema. Como todo vértice en la componente no trivial tiene grado par al menos 2, entonces, por Lema 1.24, la componente conexa no trivial de G contiene un ciclo C. Sea G' el grafo que obtenemos de G al borrar las aristas de C.

Como C tiene grado 0 o 2 en cada vértice de G, entonces los vértices de G' siguen teniendo grado par. Como cada componente conexa de G' tiene a lo más m aristas, podemos aplicar la hipótesis de inducción y entonces cada una de esas componentes conexas tiene un circuito Euleriano. Ahora, combinamos esos circuitos Eulerianos en uno para G de la siguiente forma. Recorremos C, pero cuando una componente conexa de G' es visitada por primera vez, recorremos el circuito Euleriano correspondiente a esa componente conexa. Al hacer este recorrido obtenemos un circuito Euleriano ya que se recorren todas las aristas de G una vez, y volvemos al vértice de origen. □

Ahora veremos una forma de contar las aristas de un grafo.

Definición 1.26. El *grado* de un vértice v en un grafo G, que denotamos $d_G(v)$ o $d(v)$, es el número de aristas incidentes a v, excepto en el caso de los bucles (loops) en v que se cuentan dos veces. El *grado máximo* de un grafo se denota $\Delta(G)$, mientras que el *grado mínimo* se denota $\delta(G)$. Diremos que un grafo G es regular si $\Delta(G) = \delta(G)$, y diremos que es k-regular si es regular y todos sus vértices tienen grado k. El vecindario de un vértice v en G es el conjunto de vecinos de v y lo denotamos $N_G(v)$ o simplemente $N(v)$.

Tipicamente el número de vértices de un grafo G se denota $n(G)$, y el número de aristas $m(G)$. Cuando es claro del grafo en cuestión usaremos n y m.

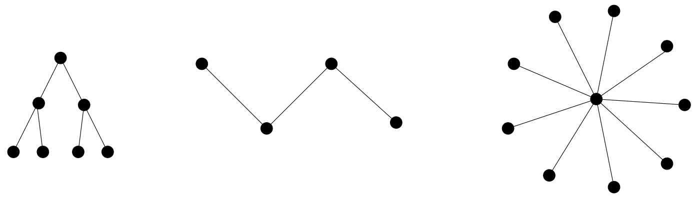

Figure 7: Ejemplo de un bosque con tres componentes conexas. Cada componente conexa es un árbol. En total el bosque de la figura tiene 15 hojas.

La formula siguiente cuenta el número de aristas de un grafo. Esta fórmula, a pesar de ser simple, es muy úitil, tanto así que para algunas personas es conocida como *El primer teorema de la Teoría de Grafos*.

Lema 1.27 (Lemma del saludo de mano)**.** *Sea G es un grafo, entonces:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m(G).$$

Proof. Si sumamos los grados de cada vértice, estaremos sumando cada arista dos veces ya que cada arista tiene dos extremos y contribuye en uno al grado de cada uno de ellos. □

De esta formula podemos concluir varias observaciones interesantes.

Corolario 1. *En un grafo G, el grado promedio es $2m(G)/n(G)$, y se cumple:*

$$\delta(G) \leq \frac{2m(G)}{n(G)} \leq \Delta(G).$$

Corolario 2. *Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.*

Corolario 3. *Un grafo k-regular con n vértices tiene $nk/2$ aristas.*

Definición 1.28. Si un grafo no tiene ciclos lo llamaremos *aciclico* o un *bosque*. Un *árbol* es un grafo aciclico conexo. Una *hoja* en un grafo aciclico es vértice de grado 1.

Por otro lado, para un grafo G, un subgrafo que contenga a todos los vértices de G será llamado un *subgrafo recubridor*. Además, todo subgrafo recurbridor de G que sea un árbol, será llamado un *árbol recubridor* de G.

La Figura 7 muestra un bosque en donde cada componente conexa es un árbol. Dicho bosque tiene 15 hojas.

Lema 1.29. *Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas. Si borramos una hoja de un árbol con n vértices obtenemos un árbol con $n-1$ vértices.*

Proof. Sea G un árbol con al menos dos vértices. Como G tiene al menos dos vértices, es conexo y no tiene ciclos, por el Lema 1.24 tiene al menos un vértice de grado 1. Llamemos a ese vértice u. Ahora tomemos un camino maximal que comience en u (como u tiene grado 1, entonces dicho camino tiene al menos una arista). Sea v el otro extremo del camino maximal en consideración. Usando el mismo argumento que se uso en la demostración del Lema 1.24, y además el hecho de que G no tiene ciclos, podemos concluir que vértice v tiene grado 1. Luego, G tiene al menos dos vértices de grado 1.

Sea u una hoja de G, y sea $G' = G - u$. Un vértice de grado 1 no está contenido en ningún camino que conecta a dos vértices que distintos a u. Por lo tanto, para cualquier par de vértices v, w en $V(G')$, se cumple que un $v - w$-camino en G también es un $v - w$-camino en G'. Luego, G' es conexo. Finalmente, al borrar un vértice no se forman ciclos, por lo tanto G' no tiene ciclos. Luego G' es un árbol. □

En el siguiente teorema, se da una serie de caracterizaciones para los árboles.

Teorema 1.30. *Sea G un grafo con n vértices (con $n \geq 1$). Las siguientes afirmaciones son todas equivalentes (y todas caracterizaciones de un árbol).*

i) G es conexo y no tiene ciclos.

ii) G es conexo y tiene $n - 1$ aristas.

iii) G tiene $n - 1$ aristas y no tiene ciclos.

iv) Para cada u, v en $V(G)$, existe un único $u - v$-camino.

Proof. Primero vemos que *i)* es la definición de árbol. En lo que sigue demostraremos que *i)*, *ii)* y *iii)* son equivalentes. Para esto, primero vemos que *i)* implica *ii)*. Sea G un grafo conexo y sin ciclos, y queremos demostrar que tiene $n-1$ aristas. La demostración es por induccción en n. Si $n = 1$, entonces como G no tiene ciclos (ni bucles), G no tiene aristas. Luego, se cumple la base de la inducción. Supongamos que ahora que para todo grafo G conexo sin ciclos con $n - 1$ vértices se cumple que tiene $n - 2$ aristas. Tomemos ahora un grafo conexo sin ciclos con n vértices. Por Lema 1.29, sabemos que dicho grafo tiene al menos una hoja, y que si la borramos obtenemos un grafo conexo sin ciclos. El grafo resultante tendrá $n - 1$ vértices y por hipótesis de inducción $n - 2$ aristas. Luego, el grafo original tenín n vértices y $n - 1$ aristas.

Ahora veremos que *ii)* implica *iii)*. Sea G un grafo conexo con $n-1$ aristas. Sea G' un grafo que se obtiene al borrar una arista de cada ciclo de G una a una de tal forma que ya no tenga ciclos. Como las aristas que se borran pertenecen a ciclos, entonces no son aristas de corte, luego G' es conexo y sin ciclos. Luego por el párrafo anterior, G' tiene $n-1$ aristas, las mismas que G, el grafo original. Luego no se borró ninguna arista. Por lo tanto $G' = G$, y G no tiene ciclos.

Ahora veremos que *iii)* implica *i)*. Sea G un grafo con $n - 1$ aristas y sin ciclos. Supongamos por contradicción que G no es conexo, y sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G. Como cada vértice de G aparece sólo en una componente $\sum_i n(G_i) = n$. Como G no tiene ciclos, ninguna de las componentes tiene ciclos, y por lo tanto satisfacen las condiciones dadas por B. Por lo tanto $m(G_i) = n(G_i) - 1$. Sumando sobre i obtenemos que $m(G) = \sum_i [n(G_i) - 1] = n(G) - k$. Pero $m(G) = n - 1$ por la hipótesis del enunciado. Luego $k = 1$, y entonces G tiene una única componente conexa.

Finalmente demostraremos que *i)* y *iv)* son equivalentes. Supongamos primero que tenemos un grafo G conexo y sin ciclos. Por contradicción, supongamos que existe un par de vértices u, v en G que tienen dos $u-v$-caminos distintos. Como estos dos $u - v$-caminos son distintos difieren al menos en una aristas, por lo tanto la unión de ambos caminos forma un ciclo. Lo que contradice el hecho de que G no tenga ciclos.

El sentido opuesto, es decir *iv)* implica *i)*, tomemos un grafo G en donde todo par de vértices tiene un único camino que los une. Como todo par de vértices tiene un camino que los une, entonces G es conexo. Supongamos que G tiene un ciclo. Tomemos cualquier par de vértices de ese ciclo, y entonces para ese par de vértices existen dos caminos que los unen. Luego, G no tiene ciclos. □

Corolario 4.

- *Toda arista de un árbol es una arista de corte.*
- *Si agregamos una arista a un árbol se forma un ciclo.*
- *Todo grafo conexo contiene un árbol recubridor.*

Definición 1.31. Sea G un grafo simple, y u y v dos vértices de G. Si G tiene un $u - v$-camino definimos la *distancia* entre u y v, denotada $d_G(u, v)$ o $d(u, v)$, como el largo del $u - v$-camino más corto. Si G no tiene ningún $u - v$-camino, entonces $d_G(u, v) = \infty$. El *diámetro* de G se define como $diam(G) := \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$. La *excentricidad* de un vértice u de G se define como $\epsilon(u) := \max_{v \in V(G)} d(u, v)$. Finalmente el *radio* de G se define como $rad(G) := \min_{u\ \in V(G)} \epsilon(u)$.

El diámetro de un grafo es igual a la excentricidad máxima de sus vértices. En un grafo disconexo, el diametro y el radio son infinitos, ya que la distancia entre vértices en componentes conexas diferentes es infinito. La Figura 8 muestra un grafo y la excentricidad de cada uno de sus vértices. El radio del grafo en el ejemplo es 2 y el diámetro es 4.

Teorema 1.32. *Sea G un grafo simple y $\bar{G}$ su complemento. Entonces:*

$$diam(G) \geq 3 \implies diam(\bar{G}) \leq 3.$$

Proof. Supongamos que tenemos un grafo G tal que $diam(G) \geq 3$. Como el diámetro de G es al menos 3, entonces existen dos vértices que están a distancia 3 o más entre ellos, digamos u y v. Esto quiere decir, que u y v no tienen un vecino en común (si lo tuvieran estarían a distancia dos) y además no son vecinos (en dicho caso estarían a distancia 1). Luego, todo vértice $x \in V(G) - \{u, v\}$ no es vecino de al menos uno de estos dos vértice en G. Eso hace que todo vértice

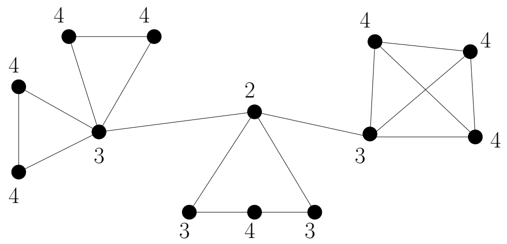

Figure 8: Esta figura presenta un grafo y las excentricidades de cada vértice. Además el diámetro de este grafo es 4 y el radio es 2.

x sea vecino de u o de v en $\bar{G}$. Como también tenemos que $\{u, v\} \in E(\bar{G})$, para cualquier par de vértices x, y existe un $x - y$-camino de largo a lo más 3 en $\bar{G}$ a través de los vértices u, v. Luego, el diámetro de $\bar{G}$ es menor o igual a 3. $\square$

Definición 1.33. El *centro* de un grafo G es el subgrafo G inducido por los vértices con menor excentricidad.

Teorema 1.34. *El centro de un árbol es un vértice o dos vértices y una arista.*

Proof. Sea T un árbol. La demostración es por inducción en el número de vértices de T. Si $n(T) = 1$, entonces el centro es el mismo árbol. Si $n(T) = 2$, entonces el árbol tiene una arista, ambos vértices tienen excentricidad igual a 1, y luego el centro del grafo es T que está compuesto por dos vértices y una arista. La hipótesis de inducción entonces consiste en suponer que el enunciado es cierto para todo árbol T tal que $n(T) < n$.

Supongamos que T tiene n aristas. Como ya hemos visto, todo árbol tiene al menos dos hojas. Todo vértice de T que está a distancia máxima de un vértice $u \in V(T)$ es una hoja, ya que en caso contrario, si no fuera una hoja, entonces el camino podría ser extendido y habría un vértice más lejano. Ahora, al remover las hojas de un árbol, seguimos teniendo un árbol, y nos quedamos con los vértices internos (al menos uno). Entonces, borramos las hojas de T y obtenemos un árbol T' que tiene estrictamente menos que n vértices. Como todas las hojas fueron borradas, entonces $\epsilon_{T'}(u) = \epsilon_T(u) - 1$ para todo vértice $u \in V(T)$. Luego, los vértices con menos excentricidad en T' son los mismos que en tienen menor excentricidad en T, luego ambos árboles tienen el mismo centro. Ahora, como T' tiene menos que n vértices podemos aplicar la hipótesis de inducción, y por lo tanto tiene un vértice como centro o dos vértices y una arista. Lo que nos permite concluir que T tiene un vértice como centro o dos vértices y una arista. $\square$

Definición 1.35. Una *k-coloración* de un grafo G es asignación de etiquetas $f : V(G) \to S$, donde $|S| = k$ (normalmente usaremos $S = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$). A las etiquetas las llamaremos *colores*. Los vértices a los que se les asigna un mismo color forman una *clase*. Una k-coloración es *propia* si vértices adyacentes tienen asignado colores diferentes. Un grafo es *k-coloreable* si admite una k-coloración

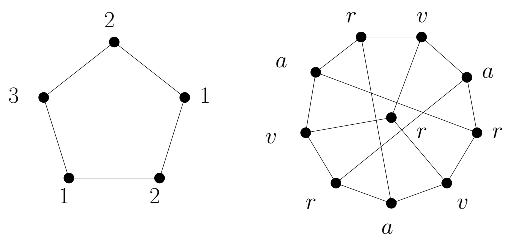

Figure 9: Esta figura muestra dos grafos, C_5 y un grafo conocido como el grafo de Petersen (cuya construcción aparece en el Listado 1). Es fácil ver que ninguno de estos dos grafos es bipartito, por lo tanto su número cromático es mayor estricto que 2. Además, en la figura vemos una 3-coloración para cada uno de ellos, lo que nos permite concluir que ambos tienen número cromático igual a 3.

propia. El *número cromático* de un grafo G, denotado $\chi(G)$, es igual al menor k tal que G es k-coloreable.

En una coloración propia, cada clase es un conjunto independiente, por lo tanto G es k-coloreable si y sólo si $V(G)$ es la unión de k conjuntos independientes. Luego, k-coloreable y k-partito son dos conceptos equivalentes.

La Figura 9 muestra dos ejemplos de grafos con una coloración propia. Podemos ver que en ambos casos, los grafos no son bipartitos, luego no son 2-coloreables. Por otro lado, la Figura 9 muestra una 3 coloración propia de cada uno de los grafos, por lo tanto ambos tienen número cromático igual a 3.

Definición 1.36. El *número de clique* de un grafo G, denotado $\omega(G)$, es el tamaño máximo de un clique (conjunto de vértices donde todos son adyacentes) en G. El *número de independencia* de un grafo G, denotado $\alpha(G)$, es el tamaño máximo de un conjunto independiente en G.

Lema 1.37. *Para todo grafo G se cumple que: $\chi(G) \geq \omega(G)$ y $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$.*

Proof. La primera cota sigue del hecho que cada vértice de un clique en G tiene que ser coloreado con un color distinto. La segunda cota se obtiene ya que cada clase forma un conjunto independiente, y por lo tanto, cada clase tiene a lo más $\alpha(G)$ elementos en un grafo G. $\square$

Las dos cotas anteriores son cotas inferiores en el núermo cromático de un grafo. Sin embargo, uno también está interesado en cotas superiores del número cromático. Dichas cotas superiores están dadas por algoritmos que producen una coloración. En lo que sigue presentaremos un algoritmo para colorear grafos y luego analizaremos qué tan bueno es su resultado.

Algoritmo glotón de coloración *El algoritmo es simple, priemro ordene los vértices del grafo $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Luego coloree los vértices en orden desde v_1 hasta v_n tal que en el paso i se colorea al vértice v_i usando el menor color posible que no haya sido usado en los vecinos de v_i ya coloreados.* Este algoritmo es simple y nos permite demostrar los siguientes resultados.

Lema 1.38. *Sea G un grafo simple, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, donde $\Delta(G)$ denota al grado máximo de un vértice en G.*

Proof. Usamos el algoritmo glotón de coloración. Cualquier orden del conjunto de vértice cumple, para todo i, que v_i tiene a lo más $\Delta(G)$ vecinos previos. De esta forma, el algoritmo glotón siempre usará a lo más $\Delta(G)+1$ colores. Luego, como existe una coloración con a lo más $\Delta(G) + 1$ colores para un grafo G, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. □

La cota $\Delta(G) + 1$ es la peor cota que el algoritmo glotón produce. Si escogemos el orden de los vértices de forma cuidadosa podemos obtener una mejor cota. La idea es evadir los problemas que producen los vértices con grado alto poniéndolos primeros en el orden, de esta forma no tendrán muhos vecinos previos.

Lema 1.39. *Si un grafo G tiene una secuencia de grados $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ (donde d_i es el grado del vértice v_i), entonces $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$.*

Proof. Aplicamos el algoritmo glotón tomando los vértices ordenados según su grado de tal forma que la secuencia de grados sea no decreciente. Cuando el algoritmo colorea al vértice v_i, encontramos que tiene a lo más $\min\{d_i, i-1\}$ vecinos previos en el orden. Por lo tanto, a lo más ese número de colores están prohibidos para el vértice v_i. Luego, el algoritmo glotón asigna a v_i a lo más el color $1 + \min\{d_i, i-1\}$. Esto se cumple para todos los vértices, por lo tanto la coloración usa a lo más $1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$ colores, y luego $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$. □

Definición 1.40. Un grafo es *planar* si tiene un dibujo en donde sus aristas no se cruzan. Un tal dibujo se conoce como una *incrustación plana* del grafo, y un *grafo plano* es una de esas incrustaciones planas de un grafo planar.

Definición 1.41. Un conjunto *abierto* en el plano es un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que para cada punto $p \in U$, todos los puntos dentro de alguna distancia arbitrariamente pequeña de p pertenecen a U. Una *región* es un conjunto abierto U que contiene una $u - v$-curva poligonal para todo par de puntos u, v en U. Una *cara* de un grafo plano es una región maximal del plano que no contiene ningún punto del dibujo.

El *largo* de una cara f en un grafo plano G es el largo total de la caminata cerrada en G rodeando a f. Invito a los estudiantes a que demuestren la siguiente identidad: $2m(G) = \sum l(f_i)$, donde $l(f)$ denota el largo de la cara f, y la lista $\{f_i\}$ denota al conjunto de todas las caras de un grafo G. Euler encontró una herramienta fundamental que relaciona el número de vértices, aristas y caras en un grafo plano.

Teorema 1.42 (Fórmula de Euler, 1758)**.** *Si un grafo conexo plano G tiene exactmanete n vértices, m aristas y f caras, entonces:*

$$n - m + f = 2.$$

Proof. La demostración es por inducción en el número de vértices. El primer paso de la inducción es para $n = 1$. En este caso, si el grafo no tiene aristas, entonces tiene una única cara, y por lo tanto se cumple la fórmula. Si el grafo tiene aristas, estas son bucles. Cada bucle agrega una nueva cara (y una nueva arista), por lo que la fórmula se sigue cumpliendo.

Supongamos que la fórmula se cumple para todo grafo plano conexo con N vértices. Ahora tenemos que demostrar que la fórmula se sigue cumpliendo para todo grafo plano con $N + 1$ vértices conexo. Como el grafo es conexo existe al menos una arista que no es un bucle. Tomamos una de ellas y la contraemos (es decir, la borramos y juntamos los dos vértices que une). Este proceso de contracción de la arista mantiene la planaridad del grafo, reduce el número de aristas en uno, reduce el número de vértices en uno, y mantiene el mismo número de caras. Luego, si n', m', y f' denotan al número de vértices, aristas y caras del nuevo grafo, respectivamente, entonces tenemos que $n' = n - 1$, $m' = m - 1$ y $f' = f$. Como el nuevo grafo tiene N vértices, podemos aplicar la fórmula de Euler y obtenemos:

$$n - m + f = n' + 1 - (m' + 1) + f' = n' - m' + f' = 2.$$

□

Teorema 1.43. *Si G es un grafo simple plano con al menos tres vértices, entonces $m(G) \leq 3n(G) - 6$. Ahora, si G no tiene triángulos (ciclos de largo 3), entonces $m(G) \leq 2n(G) - 4$.*

Proof. Sea G un grafo plano conexo. (Si G no es conexo, entonces podemos agregar aristas hasta hacerlo conexo). Como G es simple, cada cara tiene largo al menos 3. Luego, podemos $2m = \sum l(f_i) \geq 3f$. Al sustituir en la fórmula de Euler obtenemos:

$$m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \implies m \leq 3n - 6.$$

Ahora, si G no tiene triángulos, entonces cada cara tiene largo al menos 4, luego tenemos $2m = \sum l(f_i) \geq 4f$, y al reemplazar en la fórmula de Euler obtenemos:

$$m \leq 2n - 4.$$

□

Ahora, usando estas identidades, podemos ver que K_5 y $K_{3,3}$ no son planares ya que tienen muchas aristas como para serlo.

Corolario 5. *Los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planares.*

Proof. El número de aristas de K_5 es 10, sin embargo $3n(K_5) - 6 = 9$, por lo que K_5 no es planar. En el caso de $K_{3,3}$ tenemos un grafo sin triángulos. Ahora, su número de aristas es 9, sin embargo $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$. □

Definición 1.44. Un *polígono regular* es un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. Un *poliedro regular* es un cuerpo geométrico en el que sus caras son todas polígonos regulares iguales, con el mismo número de caras tocando cada vértice.

Notemos que un grafo tiene un dibujo plano si y sólo si tiene un dibujo sin cruces de aristas en una esfera. De hecho, dado un dibujo sin cruces de aristas en una esfera podemos tomar un punto dentro de una de las caras y usar la *proyección estereográfica* usando ese punto como foco. El resultado será un dibujo plano del grafo. La cara donde se encuentra el foco se transforma en la cara no acotada del dibujo. Como el proceso es reversible, entonces tenemos una equivalencia.

De esta manera, un poliedro regular puede ser visto como un grafo planar en donde todas sus caras tienen el mismo largo y todos sus vértices tienen el mismo grado. Usaremos la Fórmula de Euler para ver cuantos polígonos regulares pueden existir.

Sea G un grafo con n vértices, m aristas y f caras, tal que todo vértice tiene grado k todas las caras tienen largo l. Usando las igualdades $\sum d(v) = 2m$ y $\sum l(f_i) = 2m$ podemos concluir que $kn = 2m = lf$. Ahora, si sustituimos n y f en la Fórmula de Euler obtenemos:

$$m(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l}) = 2.$$

Como m y 2 son números positivos, entonces $2/k - 1 + 2/l > 0$ lo que es equivalente a decir $2/k + 2/l > 1$, lo cual implica $2l + 2k > kl$. Esta desigualdad es equivalente a $(k-2)(l-2) < 4$.

El caso $k = 2$ se descarta porque cualquier grafo conexo 2-regular forma un ciclo (sería un polígono regular, pero no un poliedro regular). Luego tenemos que $k \geq 3$ y $l \geq 3$. Para que se cumple $(k-2)(l-2) < 4$ entonces tenemos que $k \leq 5$ y $l \leq 5$. Los únicos pares de enteros que satisfacen todos estos requisitos son: $(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$, donde la primera coordenada representa a k y la segunda a l. Una vez fijos los valores de k y l tenemos un único grafo k-regular con caras de largo l planar. Esto nos da como resultado que sólo existen 5 poliedros regulares conocidos como sólidos Platónicos y la lista es la siguiente tabla:

k	l	m	n	f	**Nombre**
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Cubo
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Hemos visto que K_5 y $K_{3,3}$ no son planares. Ahora veremos que de hecho, estos dos grafos son cruciales a la hora de describir al conjunto de grafos planares.

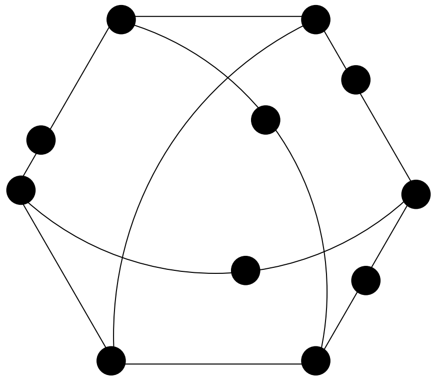

Figure 10: Subdivisión de $K_{3,3}$.

Definición 1.45. Una *subdivisión* de un grafo G es es cualquier grafo que se pueda obtener a partir de G reemplazando aristas por caminos.

La Figura 10 muestra una subdivisión de $K_{3,3}$.

Si un grafo G tiene como subgrafo a K_5 o $K_{3,3}$ no puede ser planar, ya que si lo fuera entonces tendría un dibujo plano y al borrar los vértices y las aristas necesarias para quedarnos con K_5 o $K_{3,3}$, según corresponda, entonces nos quedaríamos con un dibujo plano de estos grafos. Esta afirmación la podemos extender y decir que si un grafo G tiene como subgrafo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$ no puede ser planar. Para ver que esta afirmación es correcta basta con ver que una subduvusión de K_5 o $K_{3,3}$ no puede ser planar, luego aplicamos el mismo razonamiento anterior. Pero transformar aristas en caminos no afecta la planaridad, las curvas en un dibujo de una subdivisión de G pueden ser usadas para obtener un dibujo de G y viceversa. Esto nos lleva al siguiente teorema que da una caracterización del conjunto de grafos planares.

Teorema 1.46 (Kuratowski (1930))**.** *Un grafo es planar si y sólo si no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni $K_{3,3}$.*

Teorema 1.47 (Teorema de los 5 colores: Heawood (1890))**.** *Todo grafo planar es* 5*-coloreable.*

Proof. Para esta demostración usaremos una inducción en n, el número de vértices del grafo.

Sea G un grafo planar con n vértices. Para el paso inductivo basta con notar que si $n \leq 5$ entonces G es 5-coloreable ya que tiene menos vértices que colores.

Supongamos ahora que todo grafo planar es 5-coloreable cuando tiene n o menos vértices. Sea G un grafo planar con $n+1$ vértices. En el listado se demuestra que todo grafo planar tiene un vértice con grado a lo más 5. Sea v tal vértice en G. El grafo $G - v$ es planar y tiene n ˇertices, por lo tanto, por hipótesis de inducción $G - v$ es 5-coloreable. Sea $f : V \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ una 5-coloración propia de $G - v$. Si $d_G(v) \leq 4$, los vecinos de v no usan todos los colores, por lo tanto podríamos color v con algún color libre y entonces G sería 5-coloreable.

Supongamos ahora que $d_G(v) = 5$, y sus 5 vecinos están coloreados con los 5 colores. Sean v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 los vecinos de v ordenados en el sentido del reloj, y nombramos los colores de forma tal que $f(v_i) = i$.

Sea $G_{i,j}$ el subgrafo de $G-v$ inducido por los vértices coloreados con colores i y j. Primero notemos que si intercambiamos los colores i y j en una componente conexa cualquiera de $G_{i,j}$ seguimos teniendo una 5 coloración propia de $G - v$. Luego, si v_i y v_j están en componentes conexas distintas en $G_{i,j}$, podemos intercambiar los colores i y j en una de ellas, la componente que contiene a v_i, con lo que obtendríamos una 5-coloración propia de $G - v$ en donde v_i estaría coloreado con el color j (y v_j seguiría coloreado con el color j). Por lo tanto ningún vecino de v estaría coloreado con el color i y 'por lo tanto podríamos colorear a v con i y así tendríamos una 5-coloración propia de G.

Luego sólo falta demostrar que para algún par i, j, v_i y v_j pertenecen a componentes conexas distintas de $G_{i,j}$. Supongamos que esto nunca ocurre, es decir, para todo i, j, v_i y v_j pertenecen a la misma componente conexa de $G_{i,j}$. En particular entonces, esto es cierto para v_1, v_3 y v_2, v_4. Luego, existe un camino que une v_1 y v_3 en $G_{1,3}$ y un camino que une v_2 con v_4 en $G_{2,4}$. Dichos caminos están coloreados sólo con 1 y 3 o sólo con 2 y 4, respectivamente. Si llamamos P_{13} al camino que une v_1 con v_3, y unimos v a P_{13} formamos un ciclo que llamaremos C. El vértice v_2 está dentro de C y el vértice v_4 está fuera de C. Luego, P_{24}, el camino que une a v_2 con v_4, cruza a C. Como el grafo es planar, lo puede cruzar sólo en un vértice. Pero los vértices de C están coloreados con 1 y 3. Luego hay un vértice de P_{24} que no está coloreado ni con 2 ni con 4, lo que genera una contradicción. □

Con este resultado ya sabemos que 5 colores son suficientes para colorear cualquier grafo planar. La pregunta ahora es si son necesarios realmente. La primera vez que sabemos se planteó esta pregunta (*El Problema de los Cuatro Colores*) fue en 1852, en una carta escrita por Augustus de Morgan a Sir William Hamilton. Luego Cayley presentó el problema en la Sociedad Matemática de Londres en 1878, y Kempe publicó una solución en 1879 que fue refutada por Heawood en 1890 (el mismo que demostró el Teorema de los 5 colores). Finalmente, Appel, Haken y Koch en 1977 demostraron el Teorema de los 4 colores que dice que todo grafo planar es 4-coloreable. Esta demostración ces conocida por ser la primera demostración *matemática* que usa computadores. La idea es reducir el problema a un número finito de configuraciones que hoy en día pueden ser chequeadas en un par de horas en un computador cualquiera.

Definición 1.48. Un *grafo dirigido* o *digrafo* es un grafo $D = (V, A)$ en donde sus aristas o *arcos* son pares ordenados de vértices. Si el par $(u, v) \in A$ diremos que u es la cola y v es la cabeza de (u, v), además ambos son los extremos de (u, v). En general diremos que un arco apunta de la cola hacia la cabeza.

Para los digrafos la mayoría de los conceptos ya vistos siguen aplicando, sin embargo hay algunos que hay que modificar un poco. Por ejemplo, en un digrafo dos arcos son paralelos si son exactamente el mismo arco, con la misma cola y cabeza. Los arcos (u, v) y (v, u) no se llaman paralelos.

Definición 1.49. El *grafo subyacente* de un digrafo D es el grafo G que se obtiene al tratar los arcos de D como pares no ordenados. El conjunto de vértices se mantiene igual. Los extremos de cada arista en G son los mismos que los extremos de cada arco en D.

Las definiciones de subgrafo e isomorfismo se extienden naturalmente de grafos a digrafos.

Definición 1.50. La *matriz de adyacencia* de un digrafo $D = (V, A)$ es la matriz $A(D)$, de tamaño $|V| \times |V|$, que en la entrada i, j cuenta el número de arcos que tienen como cola al vértice v_i y como cabeza al vértice v_j. De esta forma, la matriz de adyacencia de un digrafo ya no es necesariamente simétrica. Por otro lado, la *matriz de incidencia* de D es la matriz $M(D)$, de tamaño $|V| \times |A|$, que en la entrada i, j tiene un $+1$ si el vértice v_i es la cabeza del arco e_j, -1 si el vértice v_i es la cola del arco e_j y 0 en otro caso.

Un *camino* en un digrafo D es un conjunto de vértices y arcos de D que forman un camino en el grafo subyacente. Un *camino dirigido* en un digrafo D es un secuencia $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ de arcos tal que $e_i = (v_i, v_{i+1})$. En este caso diremos que el camino *une* o *conecta* a v_1 con v_k.

Definición 1.51. Diremos que un digrafo es *conexo* o *conexo debil* si su grafo subyacente es conexo. Por otro lado, diremos que un digrafo es *fuertemente conexo* si para todo par ordenado de vértices u, v existe un camino dirigido que los une. Las *componentes fuertes* o *componentes fuertemente conexas* de un digrafo son sus sub-digrafos maximales fuertemente conexos.

Definición 1.52. Sea v un vértice de un digrafo $D = (V, A)$. El *grado de salida* de v, que denotamos $d^+(v)$, es el número de arcos con cola igual a v. El *grado de entrada* de v, denotado $d^-(v)$, es el número de arcos con cabeza igual a v. Además el *vecindario de salida* de v, denotado $N^+(v)$, es el conjunto de vértices $\{x \in V : (v, x) \in A\}$. De la misma manera, el *vecindario de entrada* de v, denotado $N^-(v)$, es el conjunto $\{x \in V : (x, v) \in A\}$.

Los grados mínimos y m'aximos de entrada y salida de un digrafo D se denotan $\delta^-(D), \Delta^-(D), \delta^+(D)$ y $\Delta^+(D)$, respectivamente. Las definiciones siguen la misma línea de las definiciones de grado mínimos y máximos para grafos.

Usando la definición de grado de entrada y salida, es fácil ver que pra todo digrafo $D = (V, A)$ se cumple: $\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v)$, ya que cada arco tiene una sola cola y una sola cabeza.

Definición 1.53. Una *orientación* de un grafo G es un digrafo D cuyo grafo subyacente es G. Un *torneo* es una orientación de un grafo completo.

Definición 1.54. Un *ciclo dirigido* en un digrafo $D = (V, A)$ es un ciclo en el grafo subyacente formado por un conjunto de vértices que podemos renombrar como $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ y por los arcos (v_i, v_{i+1}) para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ y el arco (v_k, v_1).

Un digrafo que no tiene ciclos dirigidos se conoce como DAG, (por sus siglas en ingles). Los DAG's son muy útiles en el modelamiento matemático. Además son útiles en matemáticas ya que existe una equivalencia entre DAG's y *órdenes parciales.*

Definición 1.55. Un *orden parcial* es una relación de equivalencia $\leq$ sobre un conjunto V que es: reflexiva, antisimetrica y transitiva. Cuando se cumple $a \leq b$, diremos que a es *menor o igual* a b.

- $a \leq a \quad \forall a \in V$. Reflexiva.
- Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$. Antisimétrica.
- Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$. Transitiva.

Un *orden total* es un orden parcial que además cumple la condición de que todo par de elementos en el conjunto se relacionan, es decir, para todo $a, b \in V$ se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$.

Lema 1.56. *Sea $D = (V, A)$ un digrafo. Si $\delta^+(D) \geq 1$ (es decir, todo vértice tiene al menos un arco saliente), entonces D contiene un ciclo dirigido. De forma equivalente, si $\delta^-(D) \geq 1$ (es decir, todo vértice tiene al menos un arco entrante), entonces D contiene un ciclo dirigido.*

Proof. Sea P el camino dirigido de largo máximo en D, y sea u su último vértice. Como P es de largo máximo no puede ser extendido. Además, como suponemos $\delta^+(D) \geq 1$, todo vértice tiene grado de salida al menos 1. En particular, existe un arco de la forma (u, v). Finalmente, v tiene que estar en P ya que P es de largo máximo. Lo que forma un ciclo dirigido en D. □

El lema anterior nos permite concluir que todo digrafo sin ciclos dirigidos tiene al menos un vértice con grado de entrada igual a 0 y un vértice con grado de salida igual a 0.

Lema 1.57. *Todo DAG induce un orden parcial en su conjunto de vértices.*

Proof. Para demostrar esta afirmacón construiremos el orden parcial. Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido sin ciclos. Particionamos el conjunto V de la siguiente manera: sea V_1 el conjunto que contiene a todos los vértices en D con grado de entrada igual a 0. Como vimos en el lema anterior, este conjunto es no vacío. Sea D_1 el digrafo inducido por $V \setminus V_1$. El digrafo D_1 es un DAG. Definimos V_2 como el conjunto de vértices de D_1 que tienen grado de entrada igual a 0. Repetimos el proceso hasta que $V_1, V_2, \ldots, V_k$ sea una partición de V. Finalmente definimos la relación $a \leq b$ si $a \in V_i$ y $b \in V_j$ con $i < j$. Esta relación define un orden parcial. □

Este orden parcial es único. A partir de este orden parcial podemos definir muchos órdenes totales, nos basta con definir un orden total para cada conjunto V_i. Todo orden total definido de esta manera se conoce como un *orden topológico* de un digrafo sin ciclos dirigidos.

Definición 1.58. Un *orden topológico* de un DAG $D = (V, A)$ es un orden total del conjunto de vértices V tal que para todo arco (a, b) en A se cumple que $a \leq b$.