UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tarea 1

Análisis $\mathbb{R}$eal I

Katiusca Cordero
Brayan Sandoval

PRIMERA PREGUNTA
Dada una familia numerable $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios métricos, sea $X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} X_n := X_1 \times X_2 \times \cdots$.

a) Muestre que $\bar{d}_n(x_n, y_n) := \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\}$ define una métrica en X_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Para demostrar lo anterior verifiquemos que se cumplen las tres propiedades de una métrica

- $\forall x_n, y_n \in X_n : \ x_n \neq y_n, \ \bar{d}_n(x_n, y_n) > 0$ y $\forall x_n \in X_n, \ \bar{d}_n(x_n, x_n) = 0$.
  Sea $x_n, y_n \in X_n : x_n \neq y_n$, entonces

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} > 0$$

  Pues, $d_n(x_n, y_n) > 0$ (por hipótesis es una métrica) y $1 > 0$.
  Sea $x_n \in X_n$, entonces

$$\bar{d}_n(x_n, x_n) = \text{mín}\{1, d_n(x_n, x_n)\} = \text{mín}\{1, 0\} = 0.$$

  Por tanto $\bar{d}_n$ cumple la primera propiedad.

- $\forall x_n, y_n \in X_n : \ \bar{d}_n(x_n, y_n) = \bar{d}_n(y_n, x_n)$.
  Sea $x_n, y_n \in X_n$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{d}_n(x_n, y_n) &= \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} \\ &= \text{mín}\{1, d_n(y_n, x_n)\} \ (d_n \text{ es una métrica}) \\ &= \bar{d}_n(y_n, x_n)\end{aligned}$$

  Por tanto $\bar{d}_n$ cumple la segunda propiedad.

- $\forall x_n, y_n, z_n \in X_n : \ \bar{d}_n(x_n, y_n) \leq \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$.
  Se tienen dos casos

  1 $\bar{d}_n(x_n, y_n) = 1$.
  De aquí se desprenden 4 sub-casos

  1.1 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = \bar{d}_n(z_n, y_n) = 1$.
  Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = 1 \leq 1 + 1 = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

1.2 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = d_n(x_n, z_n)$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = d_n(z_n, y_n)$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = 1 \leq \underbrace{d_n(x_n, y_n) \leq d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)}_{d_n \text{es una métrica}} = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

1.3 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = 1$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = d_n(z_n, y_n)$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = 1 \leq 1 + \underbrace{d_n(z_n, y_n)}_{>0} = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

1.4 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = d_n(x_n, z_n)$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = 1$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = 1 \leq \underbrace{d_n(x_n, z_n)}_{>0} + 1 = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

2 $\bar{d}_n(x_n, y_n) = d_n(x_n, y_n)$ De aquí se desprenden 4 sub-casos

2.1 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = \bar{d}_n(z_n, y_n) = 1$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = d_n(x_n, y_n) \leq 1 \leq 1 + 1 = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

2.2 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = d_n(x_n, z_n)$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = d_n(z_n, y_n)$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = \underbrace{d_n(x_n, y_n) \leq d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)}_{d_n \text{es una métrica}} = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

2.3 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = 1$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = d_n(z_n, y_n)$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = d_n(x_n, y_n) \leq 1 + \underbrace{d_n(z_n, y_n)}_{>0} = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

2.4 $\bar{d}_n(x_n, z_n) = d_n(x_n, z_n)$ y $\bar{d}_n(z_n, y_n) = 1$.
Dado lo anterior se tiene

$$\bar{d}_n(x_n, y_n) = d_n(x_n, y_n) \leq \underbrace{d_n(x_n, z_n)}_{>0} + 1 = \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n)$$

Por tanto $\bar{d}_n$ cumple la tercera propiedad.

Como $\bar{d}_n$ cumple las tres propiedades de una métrica se deduce que $\bar{d}_n$ es una métrica. ■

b) Demuestre que si se define la función $\tilde{d}_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{d}_\infty(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \right\},$$

entonces $(X, \tilde{d}_\infty)$ es un espacio métrico.

Demostración:

Para demostrar lo anterior verifiquemos que se cumplen las tres propiedades de una métrica

- $\forall x, y \in X: \ x \neq y, \ \tilde{d}_\infty(x,y) > 0$ y $\forall x \in X, \ \tilde{d}_\infty(x,x) = 0$.
  Sea $x, y \in X : x \neq y$, entonces

  $$\bar{d}_n(x_n, y_n) > 0 \Longrightarrow \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} > 0 \Longrightarrow \tilde{d}_\infty(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \right\} \geq \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} > 0$$

  Sea $x \in X$, entonces

  $$\tilde{d}_\infty(x,x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, x_n)}{2^n} \right\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{0}{2^n} \right\} = 0$$

  Por tanto $\tilde{d}_\infty$ cumple la primera propiedad.
- $\forall x, y \in X: \ \tilde{d}_\infty(x,y) = \tilde{d}_\infty(y,x)$.
  Sea $x, y \in X$, entonces

  $$\tilde{d}_\infty(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \right\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(y_n, x_n)}{2^n} \right\} = \tilde{d}_\infty(y,x)$$

  Por tanto $\tilde{d}_\infty$ cumple la segunda propiedad.
- $\forall x, y, z \in X: \ \tilde{d}_\infty(x,y) \leq \tilde{d}_\infty(x,z) + \tilde{d}_\infty(z,y)$.
  Sea $x, y, z \in X$, entonces

  $$\bar{d}_n(x_n, y_n) \leq \bar{d}_n(x_n, z_n) + \bar{d}_n(z_n, y_n) \Longrightarrow \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} + \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

  Además se tiene que

  $$\begin{aligned} \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} \right\}, \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} \right\}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  Lo anterior implica que

  $$\begin{aligned} \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} + \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} \right\} + \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} \right\} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} \right\} \end{aligned}$$

  Luego $\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} \right\} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} \right\} \right)$ es una cota superior de $\left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, y_n)}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, lo que implica

  $$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(y_n, x_n)}{2^n} \right\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(x_n, z_n)}{2^n} \right\} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}_n(z_n, y_n)}{2^n} \right\}$$

  o equivalentemente

  $$\tilde{d}_\infty(x,y) \leq \tilde{d}_\infty(x,z) + \tilde{d}_\infty(z,y)$$

  Por tanto $\tilde{d}_\infty$ cumple la tercera propiedad de una métrica.

Finalmente se deduce que $\tilde{d}_\infty$ es una métrica de X y por tanto $(X, \tilde{d}_\infty)$ es un espacio métrico. ■

SEGUNDA PREGUNTA

Se dice que un espacio métrico es ***separable*** si contiene un subconjunto denso numerable.

a) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es separable, con $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Considere el conjunto de los puntos que tienen coordenadas racionales.

Demostración:

Considerando la sugerencia demostraremos que $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$.

$\boxed{\subset}$ Sea $p \in \mathbb{R}^n$, entonces $p \in \mathbb{Q}^n$ o $p \notin \mathbb{Q}^n$.

Si $p \in \mathbb{Q}^n \Longrightarrow p \in \mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{Q}^n)' = \overline{\mathbb{Q}^n} \Longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \overline{\mathbb{Q}^n}$.
Si $p \notin \mathbb{Q}^n$, sea $B_r(p)$, con $r > 0$, además sea $B_\delta(p_i)$ con $\delta := \frac{r}{\sqrt{n}} > 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe un racional $q_i \in B_\delta(p_i) \cap \mathbb{Q}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Además si definimos, $q := \{q_1, ..., q_n\} \in \mathbb{Q}^n$, se tiene

$$d(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta^2} = \sqrt{n\delta^2} = \sqrt{n}\delta = \sqrt{n}\frac{r}{\sqrt{n}} = r$$

Es decir

$$q \in B_r(p) \Longrightarrow p \in (\mathbb{Q}^n)' \Longrightarrow p \in \overline{\mathbb{Q}^n} \Longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \overline{\mathbb{Q}^n}$$

$\boxed{\supset}$ Sea $q \in \overline{\mathbb{Q}^n}$, entonces $q \in \mathbb{Q}^n$ o $q \in (\mathbb{Q}^n)'$.

Si $q \in \mathbb{Q}^n \Longrightarrow q_i \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, ..., n\} \Longrightarrow q \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbb{R}^n \supset \overline{\mathbb{Q}^n}$.
Si $q \in (\mathbb{Q}^n)' \Longrightarrow \forall r > 0, \exists p \neq q : p \in B_r(q) \cap \mathbb{Q}^n \subset B_r(q) \cap \mathbb{R}^n \Longrightarrow q \in (\mathbb{R}^n)' \Longrightarrow q \in \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbb{R}^n \supset \overline{\mathbb{Q}^n}$.
Como ambas inclusiones se cumplen, se tiene que $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$, es decir, $\mathbb{R}^n$ es separable. ■

b) Sean (Λ, d) un espacio métrico y $\{\Omega_\beta\}_{\beta \in B}$ una familia de subconjuntos abiertos de Λ. Se dice que esa familia es una ***base de abiertos*** de Λ si, para todo $\lambda \in \Lambda$, todo subconjunto abierto $\Gamma \subset \Lambda$ que contenga a λ, cumple que $\exists \beta \in B$ tal que $\lambda \in \Omega_\beta \subset \Gamma$.

Demostrar que todo espacio métrico (Λ, d) separable tiene una base numerable.

Sugerencia. Usar todas las bolas de radio racional con centro en algún subconjunto denso numerable de Λ.

Demostración:

Dado que (Λ, d) es separable se tiene que existe un subconjunto A de Λ numerable, tal que $\overline{A} = \Lambda$.
Sea $\lambda \in \Gamma \subset \Lambda$, como Γ es abierto, $\exists r > 0 : B_r(\lambda) \subset \Gamma$, además por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe un racional q tal que, $0 < q < r$, entonces

$$B_{q/2}(\lambda) \subset B_q(\lambda) \subset B_r(\lambda) \subset \Gamma$$

Considerando que A es denso en Λ se tiene que

$$\exists a \in A : a \in B_{\frac{q}{2}}(\lambda) \iff d(a, \lambda) < \frac{q}{2} \iff d(\lambda, a) < \frac{q}{2} \iff \lambda \in B_{\frac{q}{2}}(a)$$

Ahora veamos que $B_{\frac{q}{2}}(a) \subset B_q(\lambda)$. Sea $x \in B_{\frac{q}{2}}(a)$, por desigualdad triangular

$$d(x, \lambda) \leq d(x, a) + d(a, \lambda) < \frac{q}{2} + \frac{q}{2} = q$$

Es decir, $x \in B_q(\lambda)$, entonces $B_{\frac{q}{2}}(a) \subset B_q(\lambda) \subset B_r(\lambda) \subset \Gamma$. Así, para cada $\lambda \in \Gamma \subset \Lambda$ existe un $a \in A$ tal que $\lambda \in \Omega_a = \{B_{\frac{q}{2}}(a)\}_{q \in \mathbb{Q}} \subset \Gamma$. Por tanto (Λ, d) tiene una base de abiertos numerable $\{\Omega_a\}_{a \in A}$. La base es numerable ya que A y $\mathbb{Q}$ son numerables. ■

TERCERA PREGUNTA

Sea el espacio métrico $(\mathbb{Q}, \xi)$, donde

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto \xi(a, b) = |a - b| \end{aligned}$$

Sea $\Psi = \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \cup \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\}$.

a) Sea $\Psi^+ := \Psi \cap \mathbb{Q}^+$, demuestre que si $\psi_1, \psi_2 \in \Psi^+$, con $\psi_1 < \psi_2$, entonces $[\psi_1, \psi_2] \cap \mathbb{Q} \subset \Psi^+$.

Demostración:

Sea $q \in [\psi_1, \psi_2] \cap \mathbb{Q}$ o de forma equivalente

$$q \in \mathbb{Q} \ \wedge \ \psi_1 \leq q \leq \psi_2$$

Dado que $\psi_1 \in \mathbb{Q}^+$, entonces $q \in \mathbb{Q}^+$. Además

$$\begin{aligned} \psi_1 \leq q \leq \psi_2 &\Longrightarrow \psi_2 - q \geq 0 \ \wedge \ q - \psi_1 \geq 0 \\ &\Longrightarrow (\psi_2 - q)(\psi_2 + q) \geq 0 \ \wedge \ (q - \psi_1)(q + \psi_1) \geq 0 \\ &\Longrightarrow \psi_2^2 - q^2 \geq 0 \ \wedge \ q^2 - \psi_1^2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow \psi_2^2 \geq q^2 \ \wedge \ q^2 \geq \psi_1^2 \\ &\Longrightarrow \psi_1^2 \leq q^2 \leq \psi_2^2 \end{aligned}$$

Como $\psi_1, \psi_2 \in \Psi^+$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_1 \in \Psi^+ &\Longrightarrow (\psi_1 - 3)(\psi_1 + 3) \in (-2, 4) \ \vee \ (\psi_1 - 2)(\psi_1 + 2) \in (9, 14) \\ &\Longrightarrow -2 < \psi_1^2 - 9 < 4 \ \vee \ 9 < \psi_1^2 - 4 < 14 \\ &\Longrightarrow 7 < \psi_1^2 < 13 \ \vee \ 13 < \psi_1^2 < 18 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \psi_2 \in \Psi^+ &\Longrightarrow (\psi_2 - 3)(\psi_2 + 3) \in (-2, 4) \ \vee \ (\psi_2 - 2)(\psi_2 + 2) \in (9, 14) \\ &\Longrightarrow -2 < \psi_2^2 - 9 < 4 \ \vee \ 9 < \psi_2^2 - 4 < 14 \\ &\Longrightarrow 7 < \psi_2^2 < 13 \ \vee \ 13 < \psi_2^2 < 18 \end{aligned}$$

De lo anterior se desprenden tres casos

- $\psi_1, \psi_2 \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\}$, es decir

  $$7 < \psi_2^2 < 13 \ \wedge \ 7 < \psi_1^2 < 13 \iff 7 < \psi_1^2 < \psi_2^2 < 13 \Longrightarrow 7 < \psi_1^2 < q^2 < \psi_2^2 < 13 \Longrightarrow q \in \Psi$$

  Por tanto $q \in \Psi^+ := \Psi \cap \mathbb{Q}^+$.
- $\psi_1, \psi_2 \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\}$, es decir

  $$13 < \psi_2^2 < 18 \ \wedge \ 13 < \psi_1^2 < 18 \iff 13 < \psi_1^2 < \psi_2^2 < 18 \Longrightarrow 13 < \psi_1^2 < q^2 < \psi_2^2 < 18 \Longrightarrow q \in \Psi$$

  Por tanto $q \in \Psi^+ := \Psi \cap \mathbb{Q}^+$.
- $\psi_1 \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \ \wedge \ \psi_2 \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\}$, es decir

  $$7 < \psi_1^2 < 13 \ \wedge \ 13 < \psi_2^2 < 18 \Longrightarrow 7 < \psi_1^2 < 13 < \psi_2^2 < 18$$

  De aquí se tiene que $q^2 < 13$ o $q^2 > 13$, ya que si $q^2 = 13$, entonces $\sqrt{13}$ seria racional (pues $q \in Q^+$), pero esto no es así (Por demostrar). Así, $q \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \vee q \in \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\}$, lo que es equivalente a decir

  $$q \in \Psi = \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \cup \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\} \Longrightarrow$$

  Por tanto $q \in \Psi^+ = \Psi \cap \mathbb{Q}^+$, es decir

  $$[\psi_1, \psi_2] \cap \mathbb{Q} \subset \Psi^+$$

  Para completar la demostración probaremos que $\sqrt{13}$ es irracional. Procederemos por reducción al absurdo, suponga $\sqrt{13}$ es racional, entonces

  $$\exists n, m \in \mathbb{N} : \sqrt{13} = \frac{n}{m}, \text{ donde } n \text{ y } m \text{ son primos entre si.}$$

  Luego

  $$13 = \frac{n^2}{m^2} \Longrightarrow 13m^2 = n^2 \Longrightarrow n^2 \text{ es múltiplo de 13.}$$

  Por teorema fundamental de la aritmética

  $$n = \prod_{i=1}^{k} p_i, \text{ donde } p_i \text{ son números primos y } k \in \mathbb{N}$$

  Entonces

  $$n^2 = n \cdot n = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i p_i$$

  Además, se sabe que 13 es un numero primo y como es múltiplo de n^2, se tiene que

  $$\exists i \in \{1, ..., k\} : p_i = 13$$

  Sin perdida de la generalidad, suponga $p_k = 13$, entonces

  $$n = \underbrace{\prod_{i=1}^{k-1} p_i}_{p \in \mathbb{Z}} \cdot 13 = p \cdot 13 \Longrightarrow n = p \cdot 13 \Longrightarrow n \text{ es múltiplo de 13.}$$

De lo anterior se desprende

$$13m^2 = n^2 \Longrightarrow 13m^2 = (p \cdot 13)^2 \Longrightarrow m^2 = 13p^2 \Longrightarrow m^2 \text{ es múltiplo de 13.}$$

Luego, por teorema fundamental de la aritmética

$$m = \prod_{i=1}^{l} p_i, \text{ donde } p_i \text{ son números primos y } l \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$m^2 = m \cdot m = \left(\prod_{i=1}^{l} p_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) = \prod_{i=1}^{l} p_i p_i$$

Además, se sabe que 13 es un numero primo y como es múltiplo de m^2, se tiene que

$$\exists i \in \{1, ..., l\} : p_i = 13$$

Sin perdida de la generalidad, suponga $p_l = 13$, entonces

$$m = \underbrace{\prod_{i=1}^{l-1} p_i}_{p \in \mathbb{Z}} \cdot 13 = p \cdot 13 \Longrightarrow m = p \cdot 13 \Longrightarrow m \text{ es múltiplo de 13.}$$

Lo anterior implica que m y n tienen un divisor en común, entonces n y m no son primos entre si, lo cual es una contradicción, la cual proviene de suponer que $\sqrt{13}$ era racional, por tanto $\sqrt{13}$ es irracional. ■

b) Decida si Ψ es abierto, cerrado, *clopen* o ninguno. (Demuéstrelo).

Demostración:

- Ψ es abierto en $\mathbb{Q}$, pues Ψ esta compuesto por la unión finita de abiertos. Para demostrar esto, notemos lo que sigue

$$\begin{aligned}
\Psi &= \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 3)(\psi + 3) \in (-2, 4)\} \cup \{\psi \in \mathbb{Q} : (\psi - 2)(\psi + 2) \in (9, 14)\} \\
&= \left\{\psi \in \mathbb{Q} : \left(-2 < \psi^2 - 9 < 4\right) \ \vee \ \left(9 < \psi^2 - 4 < 14\right)\right\} \\
&= \left\{\psi \in \mathbb{Q} : \left(7 < \psi^2 < 13\right) \vee \left(13 < \psi^2 < 18\right)\right\} \\
&= \left\{\psi \in \mathbb{Q} : \left(\sqrt{7} < |\psi| < 13\right) \vee \left(\sqrt{13} < |\psi| < \sqrt{18}\right)\right\} \\
&= \left\{\psi \in \mathbb{Q} : \left(-\sqrt{13} < \psi < -\sqrt{7}\right) \vee \left(\sqrt{7} < \psi < \sqrt{13}\right) \vee \left(-\sqrt{18} < \psi < -\sqrt{13}\right) \vee \left(\sqrt{13} < \psi < \sqrt{18}\right)\right\} \\
&= \underbrace{\left((-\sqrt{18}, \sqrt{-13}) \cup (-\sqrt{13}, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \sqrt{13}) \cup (\sqrt{13}, \sqrt{18})\right)}_{\Phi} \cap \mathbb{Q} \\
&= \Phi \cap \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

De aquí se puede ver que Φ es abierto en $\mathbb{R}$ pues esta compuesto por la unión finita de intervalos abiertos, además es claro notar que $\Psi \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, luego por teorema visto en clases acerca abiertos relativos, se tiene que Ψ es abierto en $\mathbb{Q}$.

- Ψ es cerrado en $\mathbb{Q}$, para demostrar esto veamos que Ψ^c es abierto, primero veamos que es Ψ^c

$$\begin{aligned}
\Psi^c &= (\Phi \cap \mathbb{Q})^c \\
&= \Phi^c \cup \mathbb{Q}^c \\
&= \Phi^c \cup \emptyset \quad \text{Notar que estamos en el espacio métrico } (\mathbb{Q}, \xi) \\
&= \Phi^c \\
&= \underbrace{\left(\left(-\infty, -\sqrt{18}\right) \cup \left(-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{18}, +\infty\right)\right)}_{\Pi} \cap \mathbb{Q} \\
&= \Pi \cap \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

  De aquí se puede apreciar que Π es abierto en $\mathbb{R}$ ya que esta compuesto por la unión finita de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, además es claro notar que $\Psi^c \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Así, por teorema visto en clases acerca abiertos relativos, se tiene que Ψ^c es abierto en $\mathbb{Q}$ y por tanto Ψ es cerrado en $\mathbb{Q}$.
- Ψ es clopen en $\mathbb{Q}$, pues Ψ es abierto y cerrado en $\mathbb{Q}$. ■

c) ¿Es Ψ un compacto en $\mathbb{Q}$? Fundamente.

Solución:

Ψ no es cerrado en $\mathbb{R}$, esto ya que no contiene a todos sus puntos de acumulación, en efecto consideremos $\sqrt{12}$ el cual es un punto de acumulación de Ψ ya que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in B_\varepsilon(\sqrt{12}) \cap \Psi$$

Lo anterior se deduce por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, y por el hecho de que $\sqrt{7} < \sqrt{12} < \sqrt{13}$. Como $\sqrt{12}$ es irracional, se tiene que $\sqrt{12} \notin \Psi$, por lo que existe al menos un punto de acumulación de Ψ tal que no esta contenido en el. Como Ψ no es cerrado, por teorema visto en clases Ψ no es compacto en $\mathbb{R}$ y dado el carácter intrínseco de la compacidad, se tiene que Ψ no puede ser compacto en $\mathbb{Q}$, es decir, Ψ no es compacto. ■

d) Calcule el diámetro de Ψ.

Solución:

Sea $x \in \Psi$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
x \in \Phi \cap \mathbb{Q} \iff x &\in \left((-\sqrt{18}, \sqrt{-13}) \cup (-\sqrt{13}, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \sqrt{13}) \cup (\sqrt{13}, \sqrt{18})\right) \wedge\ x \in \mathbb{Q} \\
&\implies x \in \left(-\sqrt{18}, \sqrt{18}\right) \wedge\ x \in \mathbb{Q} \\
&\implies x \in B_{\sqrt{18}}(0) \\
&\implies \Psi \subset B_{\sqrt{18}}(0)
\end{aligned}$$

Luego, por resultado visto en el trabajo practico 3, se tiene

$$\operatorname{diam}(\Psi) \leq \operatorname{diam}\left(B_{\sqrt{18}}(0)\right)$$

Por otro resultado visto en el trabajo practico 3, se tiene si un conjunto esta contenido en un espacio vectorial normado no trivial, entonces el diámetro de las bolas de radio r será igual a $2r$, dado que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial normado y $B_{\sqrt{18}}(0) \subset \mathbb{R}$, se tiene que

$$\operatorname{diam}\left(B_{\sqrt{18}}(0)\right) = 2\sqrt{18}$$

Así

$$\operatorname{diam}(\Psi) \leq 2\sqrt{18}$$

Considerando la definición de diámetro de un conjunto

$$\operatorname{diam}(\Psi) = \sup_{x,y\ \in \Psi} \xi(x,y) \leq 2\sqrt{18}$$

Es decir $2\sqrt{18}$ es una cota superior del conjunto

$$\Xi = \{\xi(x,y), x, y \in \Psi\}$$

Demostremos que es la mínima cota superior, para esto procederemos por reducción al absurdo. Suponga $2\sqrt{18}$ no es la mínima cota superior de Ξ, entonces

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall a \in \Xi,\ 0 < a \leq \alpha < 2\sqrt{18}$$

Por otra parte, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos dice que

$$\exists q \in \mathbb{Q}^+ : \alpha < q < 2\sqrt{18}$$

De lo anterior se deduce

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{q}{2} < \sqrt{18}$$

Como α es la mínima cota superior de Ξ, entonces $\operatorname{diam}(\Psi) = \sup \Xi = \alpha$, por lo que

$$\Psi \subset B_{\frac{\alpha}{2}}(0)$$

Notemos que

$$\frac{q}{2} > \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \left|\frac{q}{2} - 0\right| > \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \xi\left(\frac{q}{2}, 0\right) > \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \frac{q}{2} \notin B_{\frac{\alpha}{2}}(0)$$

Entonces

$$\forall \psi \in \Psi,\ \psi < \frac{q}{2}$$

Dado que los elementos mas grandes de Ψ son mayores que $\sqrt{13}$, se tiene por transitividad

$$\sqrt{13} < \frac{q}{2} < \sqrt{18} \Longrightarrow -\sqrt{18} < -\frac{q}{2} < -\sqrt{13}$$

Lo anterior nos dice que $-\frac{q}{2}, \frac{q}{2} \in \Psi$, además notemos que

$$\xi\left(\frac{q}{2}, -\frac{q}{2}\right) = \left|\frac{q}{2} - -\frac{q}{2}\right| = q \Longrightarrow q \in \Xi$$

Luego existe un elemento de Ξ mayor que α, lo cual es una contradicción pues α era la mínima cota superior. La contradicción viene de suponer que α es la mínima cota superior, por lo que la mínima cota superior de Ξ debe ser $2\sqrt{18}$, es decir

$$\sup \Xi = 2\sqrt{18} \iff \operatorname{diam}(\Psi) = 2\sqrt{18}$$

■

Notar que $\xi(a,b)$ es la métrica inducida por la distancia estándar en $\mathbb{R}$.