UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV 525412
Porf. C. Thraves Caro.
Ayudantes: V. Henríquez y C. Opazo.

Listado 5

1. Demuestre que existe un torneo con n vértices Euleriano si y solo si n es impar.
2. Demuestre que en cada digrafo existe una componente fuertemente conexa sin arcos entrantes y una componente fuertemente conexa sin arcos salientes.
3. Sea D un digrafo sin ciclos dirigidos. Demuestre que el conjunto de vértices de D puede ser ordenado como $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ de tal forma que si $(v_i, v_j) \in E(D)$ entonces $i < j$.
4. Demuestre la siguiente afirmación o encuentre un contraejemplo. Un digrafo conexo es fuertemente conexo si y solo si todo arco pertenece a un ciclo dirigido.
5. Demuestre la siguiente afirmación o encuentre un contraejemplo. En un campeonato de tenis donde todos juegan contra todos una vez, siempre es posible que todos los jugadores ganen una misma cantidad de partidos.
6. Demuestre la siguiente afirmación o encuentre un contraejemplo. Sea G un grafo y D una orientación de G. Si D es fuertemente conexa entonces G no tiene puentes (aristas de corte).
7. Demuestre la siguiente afirmación o encuentre un contraejemplo. Un
8. Sea T un torneo fuertemente conexo con $n \geq 3$ vértices. Demuestre que para todo $v \in V(T)$ existe un ciclo dirigido de largo 3 en T que contiene a v. Muestre que si $n \geq 4$, entonces existen u y v en $V(T)$, distintos, tal que $T - u$ y $T - v$ son también torneos fuertemente conexos.
9. De un ejemplo de un digrafo con matriz de incidencia simétrica. Muestre que toda fila de la matriz de incidencia de un digrafo es combinación lineal de las otras filas de la matriz.
10. Demuestre que si D es un digrafo y $G(D)$ es el grafo subyacente, entonces:

$$M(D)M(D)^T = J - A,$$

donde A es la matriz de adyacencia de $G(D)$ y J es la matriz diagonal que cuenta $d^+(v_i) + d^-(v_i)$ en la posición i, i.