UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III (525551)

Pauta Tarea 2

P1) (30 ptos.) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

a) Si P=NP, entonces existe Q ∈ coNP-completo que también está en P.

b) Todo problema Q ∈ P verifica que Q $\leq_p \overline{CLIQUE}$.

c) Si existe un camino de peso mínimo de s a u (con $u \neq s$) en $G = (V, A)$ con función de peso $w : A \to \mathbb{R}$, entonces existe un camino de peso mínimo de s a u en G, con respecto a w, sin repetición de vértices.

d) Si p es un camino de peso mínimo de s a v en un digrafo $G = (V, A)$ con respecto a funciones de peso w y w', entonces p es camino de peso mínimo con respecto a $w + w'$.

e) El algoritmo Dijkstra resuelve el PCC desde un vértice s con pesos en los arcos todos positivos excepto en uno de peso negativo que sale desde s.

Soln:

a) **(6 Ptos.)** (Verdadero) Sea P=NP y $Q = \overline{SAT}$. Luego, como SAT es NP-completo, entonces $\overline{Q} = SAT$ es NP-completo, i.e. Q es co-NP-completo. Por otro lado, dado que $\overline{Q}$ es NP y por hipótesis $P = NP$, entonces $\overline{Q}$ es P.

Además, por resultado visto en clase, sabemos que Q está en P si y sólo si $\overline{Q}$ está en P. De aquí, Q está en P. Así la afirmación es verdadera.

b) **(6 Ptos.)** (Verdadero) Sea Q en P. Luego, $\overline{Q}$ está también en P. Además, como P⊆ NP y CLIQUE es NP-completo, entonces $\overline{Q} \leq_p CLIQUE$. Finalmente, , por resultado visto en clase sabemos que $R \leq_p S \iff \overline{R} \leq_p \overline{S}$. Así, $Q \leq_p \overline{CLIQUE}$.

c) **(6 Ptos.)** (Verdadero) Sea $p_{su} : v_1 = s, v_2, \ldots, v_k = u$ un camino de peso mínimo de s a u en G con respecto a w. Supongamos que es uno de los caminos de peso mínimo con el menor número de vértices. Mostremos por contradicción que p_{su} no repite vértices. Sea $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i < j$ tal que $v_i = v_j$. Entonces, la secuencia $C : v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j = v_i$ es un ciclo contenido en p_{su}. Como p_{su} es camino de peso mínimo entonces $w(C) = 0$, pues los caminos de peso mínimo no contienen ciclos de peso negativo y si $w(C) > 0$, entonces al sacarlo de p_{su} se conseguiría un camino de peso menor, lo que no es posible.

Así, la secuencia $p'_{su} : v_1 = s, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k$ es también un camino de s a u con $w(p'_{su}) = w(p_{su})$, i.e. es un también un camino de peso mínimo pero que tiene menos vértices que p_{su}, lo que es una contradicción.

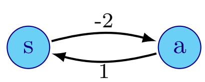
d) **(6 Ptos.)** (Verdadero) Sea p un camino de peso mínimo de s a v en G con respecto a w y w'. Luego, por resultado visto en clase, p no contiene un ciclo de peso negativo con respecto a ambas funciones de peso w y w'. Además, se tiene que $\forall q$ camino de s a v en G:

$$w(p) \leq w(q) \wedge w'(p) \leq w'(q) \Longrightarrow w(p)+w'(p) = (w+w')(p) \leq w(q)+w'(q) = (w+w')(q).$$

Por otro lado, p no contiene un ciclo de peso negativo con respecto a $w + w'$ pues de existir un ciclo C contenido en p entonces $w(C) \geq 0$ y $w'(C) \geq 0$. De aquí, $(w + w')(C) \geq 0$.

En resumen, p es también un camino de peso mínimo con respeto a $w + w'$.

e) **(6 Ptos.)** (Falso). Sea G y w dado por:
(G, w) :



Luego, $\delta(s, a) = -\infty$. Sin embargo, al aplicar Dijkstra a este digrafo se tiene que al final del algoritmo $d[a] = -2 \neq \delta(s, a)$. Por lo tanto, Dijkstra no funciona con este digrafo y pesos.

P2) (30 ptos.) Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido, $s \in V$, $w : A \to \mathbb{R}^+$ una función de peso y $k \in \mathbb{N}$. Se definen los siguientes problemas:

- *SCYCLE*: Dado (G, s, w, k) ¿Existe un ciclo en G que contenga a s y que sea de peso menor o igual a k?
- *LCYCLE*: Dado (G, s, w, k) ¿Existe un ciclo en G que contenga a s y que sea de peso mayor o igual a k?

Considere que un ciclo no tiene vértices repetidos.

a) Muestre que *SCYCLE* está en P.

b) Pruebe que *LCYCLE* es NP-completo.

Solución:

a) **(10 Ptos.)** Una forma de resolver SCYCLE con instancia (G, s, w, k) es resolver PCC con la instancia (G', s, w', k), donde $G' = (V \cup \{s'\}, A \cup \{(u, s') : (u, s) \in A\})$ y

$$\forall (u, v) \in A, w'(u, v) = w(u, v) \quad \wedge \quad \forall (u, s) \in A,\ w'(u, s') = w(u, s).$$

De esta forma, $C : s = v_1, \ldots, v_m = s$ es un ciclo en G que contiene a s con $w(C) \leq k$ si y sólo si $P : s = v_1, \ldots, v_m, s'$ es un camino en G' que comienza con s y termina en s' y de peso $w'(P) = w(C) \leq k$. Como la función peso w toma sólo valores positivos, entonces w' también. Por lo tanto, podemos usar Dijkstra con entrada (G', s, w') para encontrar un camino P de peso mínimo de s a s' en G', el cual sería un ciclo C de peso mínimo que contiene a s en G. Si $w'(P) = W(C) \leq k$, entonces (G, s, w, k) es una instancia afirmativa de SCYCLE y negativa en caso contrario. Por último, como la transformación de (G, s, w, k) en (G', s, w', k) es lineal y Dijkstra es un algoritmo polinomial, entonces SCYCLE puede ser resuelto por un algoritmo polinomial.

b) **(10 Ptos.)** Mostremos que HAMILTONIAN (en digrafos) $\leq_p$ LCYCLE.

Sea $f : I_{HAMILTONIAN} \rightarrow I_{LCYCLE}$ definido por: para todo digrafo $G = (V, A)$ y $s \in V$, $f(G) = (G, s, w = 1, k = |V|)$ donde $w = 1$ significa la función constante igual a 1. Luego si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces G tiene un ciclo C que contiene a todos los vértices sin repetición. Luego, C es un ciclo que contiene a s y con $w(C) = |V| \geq k = |V|$. Recordar que como $w = 1$ entonces $w(C)$ corresponde al largo de C. En el sentido contrario, si G tiene un ciclo C que contiene a s, sin repetición de vértices y con $w(p) \geq k = |V|$, entonces C es un camino Hamiltoniano en G. Como f puede ser obviamente calculada por un algoritmo polinomial, entonces HAMILTONIAN $\leq_p$ LCYCLE. Así, LCYCLE es NP-hard. Por otro lado, es fácil ver que un certificado para LCYCLE es un ciclo de peso al menos k que contiene a s y que puede ser verificado por un algoritmo polinomial. Luego, LCYCLE es NP-completo.
