UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra III. 525201

17 de junio de 2025
Prof.: Anahí Gajardo

Formas Bilineales

Definición 1 *Una* forma bilineal *es una función $B : V \times W \to \mathbb{K}$ que es lineal por componentes, es decir:*

- $(\forall v_1, v_2 \in V)(\forall w \in W)(\forall \alpha \in \mathbb{K})\ B(\alpha v_1 + v_2, w) = \alpha B(v_1, w) + B(v_2, w)$, *y*
- $(\forall v \in V)(\forall w_1, w_2 \in W)(\forall \alpha \in \mathbb{K})\ B(v, \alpha w_1 + w_2) = \alpha B(v, w_1) + B(v, w_2)$.

Definición 2 *Dada $\beta_V = \{v_1, .., v_n\}$, una base de V, y $\beta_W = \{w_1, .., w_m\}$, una base de W, se define la matriz representante de B respecto a estas bases como $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por:*

$$M_{ij} = B(v_i, w_j).$$

Observamos que M cumple: $B(v, w) = [v]^t_{\beta_V} M [w]_{\beta_W}$.

Definición 3 *Dada una forma bilineal $B : V \times W \to \mathbb{K}$, se define:*

- $Ker_I(B) = \{v \in V \mid (\forall w \in W)\ B(v, w) = 0\}$
- $Ker_D(B) = \{w \in W \mid (\forall v \in V)\ B(v, w) = 0\}$

Definición 4 *Una forma bilineal B se dice no degenerada si cumple las dos siguientes propiedades:*

- $Ker_I(B) = \{0_V\}$
- $Ker_D(B) = \{0_W\}$

Propiedad 1 *Si V y W son espacios de dimensión finita, B es no degenerada si y sólo si su matriz representante es invertible.*

Observamos que si V y W no tienen igual dimensión, entonces B es degenerada.

Definición 5 *Cuando $V = W$ y $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, son interesantes los siguientes conceptos.*

- *B se dice semi definida positiva si* $(\forall v \in V)\ B(v, v) \geq 0$
- *B se dice definida positiva si* $(\forall v \in V - \{0\})\ B(v, v) > 0$
- *B se dice simétrica si* $(\forall u, v \in V)\ B(u, v) = B(v, u)$

Análogamente se definen los conceptos de semi definida negativa *y* definida negativa.

Formas cuadráticas

En esta parte, consideramos sólo espacios vectoriales reales.
Dado un e.v. real V, una forma cuadrática es una función $Q : V \to \mathbb{R}$ para la cual existe una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que: $(\forall v \in V)\ Q(v) = B(v, v)$, tal forma bilineal se dice *representante de* Q.

Propiedad 2 *Si Q es una forma cuadrática entonces la función $\overline{B}$ definida como sigue es la única forma bilineal simétrica asociada a Q:*
$\overline{B}(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v))$.

Aunque $\overline{B}$ no es la única forma bilineal que puede representar a Q, se considera como la *representante canónica de* Q. La matriz representante de $\overline{B}$ será la matriz representante de Q. Si M es la matriz representante de B respecto a una base dada $\mathcal{B}$, entonces $\overline{M} = \frac{M+M^t}{2}$ es la matriz asociada a $\overline{B}$.

Propiedad 3 *Si α es el menor valor propio de la matriz simétrica que representa a Q respecto a un a base ortonormal de V respecto a un p.i. dado y ω es el mayor, entonces se cumple:*

$$(\forall v \in V)\ \alpha||v||^2 \leq Q(v) \leq \omega||v||^2.$$

Propiedad 4 *Si B es una forma bilineal y $\overline{B}$ es la forma bilineal simétrica asociada a $Q(u) = B(u, u)$, entonces*

1. *B es semi definida positiva si y sólo si la matriz representante de $\overline{B}$ tiene sólo valores propios mayores o iguales que 0.*

2. *B es definida positiva si y sólo si la matriz representante de $\overline{B}$ tiene sólo valores propios positivos.*

3. *Si $\overline{B}$ es definida positiva, entonces B es no degenerada.*

Interesante es el caso de las cónicas representadas por curvas de la forma $Q(v) + f(v) + c = 0$, donde Q es una forma cuadrática, $f \in V^*$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $V = \mathbb{R}^2$ tenemos la siguiente caracterización.

- Si $\overline{B}$ es definida positiva o definida negativa, entonces la curva es vacía o es una elipse.

- Si $\overline{B}$ es degenerada, entonces la curva es una parábola o un par de rectas.

- Si $\overline{B}$ no es semi definida negativa ni semi definida positiva, entonces la curva es una hipérbola.