UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 9
Análisis Real II (525302)
Generación de la Medida de Lebesgue y Medidas Exteriores

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de medida con medida exterior inducida μ^* y $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ es el espacio de medida de Lebesgue, donde λ es la función largo y $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ es la $\sigma-$Álgebra de los conjuntos λ^*-medibles.

Problema 1 Sea X un conjunto no vacío, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un Álgebra y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida completa. Sea μ^* la medida exterior inducida por μ y $\overline{\mu}$ la extensión de Carathéodory restringida a $\mathcal{A}^*$. Demuestre que $\overline{\mu}$ es completa.

Problema 2 Sea X un conjunto no vacío y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por

$$(\forall A \subseteq X)\ \mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

a) Demuestre que μ^* es una medida exterior.

b) Caracterice $\mathcal{A}^*$, la $\sigma-$Álgebra de los conjuntos μ^*-medibles.

Problema 3 Sea X no numerable y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por

$$(\forall A \subseteq X)\ \mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ es no numebrable} \\ 0 & \text{si } A \text{ es a lo sumo numerable} \end{cases}$$

a) Demuestre que μ^* es una medida exterior.

b) Caracterice $\mathcal{A}^*$, la $\sigma-$Álgebra de los conjuntos μ^*-medibles.

Definición 1 Se definen los conjuntos

$$\mathcal{I} = \{(a, b); (-\infty, b); (a, +\infty); \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$\tilde{\mathcal{I}} = \{(a, b]; (-\infty, b]; (a, +\infty); \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Problema 4 Sean $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definidos por

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge \{A_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{I} \right\}$$
$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge \{A_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \tilde{\mathcal{I}} \right\}$$

a) Demuestre que $\tilde{\mathcal{F}}$ es un álgebra, pero que no es una $\sigma-$Álgebra.

b) Demuestre que $\mathcal{F}$ no es una Álgebra.

c) Demuestre que $\sigma\left(\mathcal{F}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{F}}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.

Problema 5 Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que, si $(a, +\infty) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, a_{n+1}]$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left((a_n, a_{n+1}]\right) = +\infty$.

Problema 6 Sea $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ y $\varepsilon > 0$.

a) Demuestre que existe un abierto U_ε tal que $A \subseteq U_\varepsilon$ y que $m\left(U_\varepsilon \setminus A\right) < \varepsilon$. Concluya que $m\left(A\right) \leq m\left(U_\varepsilon\right) \leq m\left(A\right) + \varepsilon$.

b) Demuestre que existe un cerrado C_ε tal que $C_\varepsilon \subseteq A$ y que $m\left(A \setminus C_\varepsilon\right) < \varepsilon$.

c) Demuestre que, si A es acotado, existe un compacto K_ε tal que $K_\varepsilon \subseteq A$ y que $m\left(A \setminus K_\varepsilon\right) < \varepsilon$.

d) Demuestre que, si A es abierto y no vacío, entonces $m\left(A\right) > 0$.

e) Demuestre que $m\left(A\right) = \inf\left\{m\left(U\right) \mid A \subseteq U \wedge U \text{ es abierto}\right\} = \sup\left\{m\left(K\right) \mid K \subseteq A \wedge K \text{ es compacto}\right\}$.

Problema 7 Sea $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right), \mu\right)$ un espacio de medida finita.

a) Demuestre que la función $g\left(x\right) = \mu\left((-\infty, x]\right)$ es una función monótona creciente y continua por la derecha

b) Demuestre que $\left(\forall a, b \in \mathbb{R}\right) a < b \Rightarrow \mu\left((a, b)\right) = g\left(b\right) - g\left(a\right)$.

c) Demuestre que $\mu\left(\mathbb{R}\right) = \lim_{x\to\infty} g\left(x\right)$.

Problema 8 Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $m\left(\{a\}\right) = 0$ y concluya que, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es a lo sumo numerable, entonces $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ y $m\left(A\right) = 0$.

---

3 de Noviembre de 2014