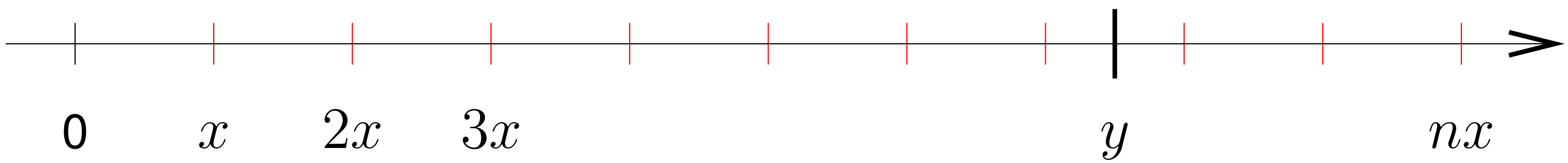
Propiedades de los números reales.

- Propiedad arquimediana.
- Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
- Existencia de raíces enésimas.
- Sistema extendido de números reales.

Propiedad arquimediana.

Teor.: $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}:\ nx > y.$



Dem.: Si $y \leq x$ es trivial (por ejemplo, $n = 2$). Veamos el caso $x < y$.

Por el absurdo, Supongamos que $\nexists n \in \mathbb{N}:\ nx > y$.

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ nx \leq y \ \Longrightarrow\ y \text{ es cota superior de } A := \{nx,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

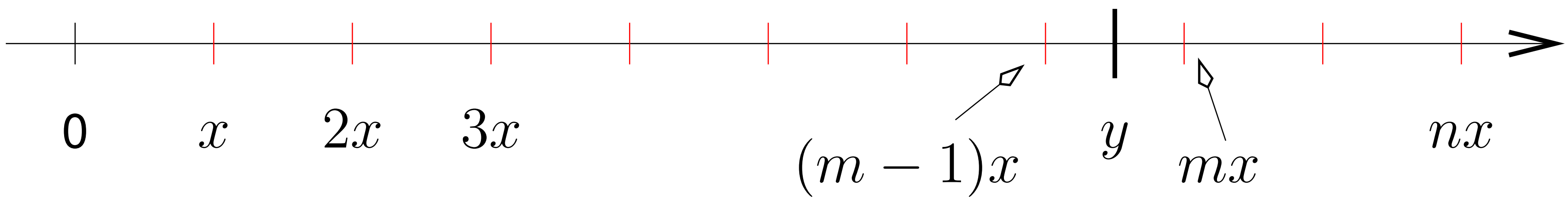
$$\Longrightarrow \quad A \text{ acotado superiormente } \Longrightarrow\ \exists \alpha := \sup A \in \mathbb{R}$$

Como $x > 0$, entonces $\alpha - x < \alpha \ \Longrightarrow\ \alpha - x$ no es cota superior de A

$$\Longrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N}:\ mx > \alpha - x \ \Longrightarrow\ (m+1)\,x > \alpha.$$

Pero $(m+1)\,x \in A$ y $\alpha := \sup A \ \Longrightarrow\ (m+1)\,x \leq \alpha.$ $\rhd\!=\!\lhd$ $\square$.

Corol.: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ 0 < x < y, \ \exists m \in \mathbb{N}: \ (m-1)x \leq y < mx.$



Para demostrar este corolario, vamos a utilizar la siguiente propiedad de los números naturales:

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo.

Dem.: Por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N}: \ nx > y$. Entonces, sea

$$B := \{n \in \mathbb{N}: \ nx > y\} \neq \emptyset.$$

Como B es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, tiene mínimo.

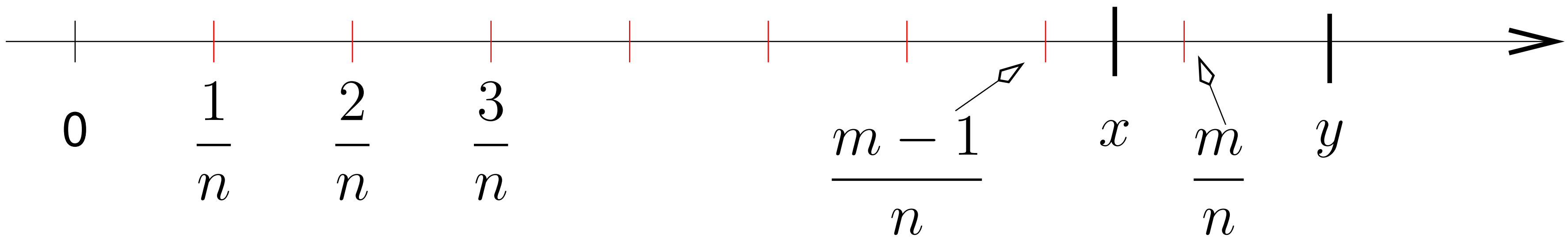
Sea $m := \min B$. Como $m \in B$, entonces $mx > y$.

Por otra parte, como $(m-1) < m = \min B$, entonces, $(m-1) \notin B$

$\Longrightarrow \ (m-1)\, x \leq y. \quad \square.$

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Teor.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \ x < y, \ \exists p \in \mathbb{Q} : \ x < p < y$.



Dem.: Veremos el caso $0 < x < y$. Los otros casos, $x < 0 < y$ y $x < y < 0$, quedan como **Ej.**.

Como $(y - x) > 0$, por la propiedad arquimediana,

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ n\,(y - x) > 1 \iff \frac{1}{n} < (y - x) \iff x + \frac{1}{n} < y.$$

Por el Corol.,

$$\exists m \in \mathbb{N} : \ (m - 1)\,\frac{1}{n} \leq x < m\,\frac{1}{n} \implies x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

Entonces, para $p := \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \quad x < p < y. \quad \square$.

Existencia de raíces enésimas.

Teor.: $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists! y > 0 :\ y^n = x.$

Ese número y se denota $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n}$.

Dem.: Por sencillez, veremos sólo el caso $n = 2$ y $x = 2$ (vale decir, $\sqrt{2}$).

Existencia. Demostraremos que $\exists y > 0 :\ y^2 = 2$.

Sean $E := \left\{x > 0 :\ x^2 < 2\right\}$ y $F := \left\{x > 0 :\ x^2 > 2\right\}$.

Se demuestra como antes que:

- E no tiene máximo y F no tiene mínimo;
- los elementos de E son cotas inferiores de F;
- los elementos de F son cotas superiores de E.

Por lo tanto E es acotado superiormente y además es no vacío.

Entonces la propiedad del supremo $\Longrightarrow$ $\exists y = \sup E \in \mathbb{R}$.

Veamos que $y^2 = 2$.

Por el absurdo, supongamos que $y^2 \neq 2$. Entonces $y^2 > 2$ o $y^2 < 2$.

- **Caso 1**: Supongamos que $y^2 > 2$. Entonces $y \in F$.

  F no tiene mínimo $\implies \exists z \in F : z < y = \sup E$.

  $z \in F \implies z$ cota superior de E

  Entonces z es una cota superior de E menor que el $\sup E$. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$

  $\implies y^2 \not> 2$.

- **Caso 2**: Supongamos que $y^2 < 2$. Entonces $y \in E$.

  E no tiene máximo $\implies \exists z \in E : z > y = \sup E$. $\rhd\!\!=\!\!\lhd$

  $\implies y^2 \not< 2$

Entonces, como $y^2 \not> 2$ e $y^2 \not< 2$, necesariamente $y^2 = 2$.

Unicidad. Supongamos que $\exists y, z > 0 : y^2 = 2 = z^2$.

Supongamos que $y < z$. Entonces $y^2 < z^2$ $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\implies y \not< z$.

Supongamos que $y > z$. Entonces $y^2 > z^2$ $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ $\implies y \not> z$.

Como $y \not< z$ e $y \not> z$, entonces $y = z$. $\square$

Sistema extendido de números reales.

Def: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ es un conjunto ordenado con el orden usual en $\mathbb{R}$ y la relación $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Claramente, $\forall E \subset \overline{\mathbb{R}} : \begin{cases} +\infty \text{ es cota superior de } E, \\ -\infty \text{ es cota inferior de } E. \end{cases}$

Prop.: $\forall F \subset \mathbb{R},\ F \neq \emptyset : \begin{cases} F \text{ no acotado superiormente} \iff \sup F = +\infty, \\ F \text{ no acotado inferiormente} \iff \inf F = -\infty. \end{cases}$

Dem.: **Ej.**

Corol.: $\forall F \subset \mathbb{R},\ F \neq \emptyset : \exists \sup F \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\exists \inf F \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dem.: Sea $F \subset \mathbb{R},\ F \neq \emptyset$. Si F está acotado superiormente, la propiedad del supremo $\implies \exists \sup F \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Si F no está acotado superiormente, entonces $\sup F = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. Para el ínfimo, la demostración es idéntica. $\square$

$\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto ordenado, pero no un cuerpo. Pese a ello, las siguientes operaciones algebraicas que involucran $+\infty$ o $-\infty$ están bien definidas:

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + \infty = +\infty + x = +\infty$ y $x - \infty = -\infty + x = -\infty$;
- $\forall x > 0: \quad x\,(+\infty) = (+\infty)\,x = +\infty$ y $x\,(-\infty) = (-\infty)\,x = -\infty$:
- $\forall x < 0: \quad x\,(+\infty) = (+\infty)\,x = -\infty$ y $x\,(-\infty) = (-\infty)\,x = +\infty$:
- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$;
- $+\infty + \infty = +\infty$ y $-\infty - \infty = -\infty$;
- $(+\infty)\,(+\infty) = (-\infty)\,(-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty)\,(-\infty) = (-\infty)\,(+\infty) = -\infty$.

En cambio, no están bien definidas:

$$+\infty - \infty, \qquad -\infty + \infty, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad 0\,(\pm\infty) \qquad \text{y} \qquad (\pm\infty)\,0.$$