UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°5$ (Solución)(EDO de Orden Superior: Parte II).

Problemas a resolver en práctica

1. *a*) Para $x > 0$ considere la EDO:

$$3x^2\, y''(x) \,+\, 11x\, y'(x) - 6y(x) = \operatorname{sen}(x).$$

Determine la EDO en la variable independiente t resultante al realizar el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$.

Solución:
Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ y poniendo $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$, del trabajo hecho en clases sigue:

$$[3\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) + 11\mathcal{D} - 6]y(t) = sen(e^t) \tag{1}$$

Esto es,

$$3y''(t) + 8y'(t) + 11y'(t) - 6y(t) = sen(e^t).$$

b) Para $x > 0$ considere la EDO:

$$x^4\, y^{(4)}(x) \,-\, 6x^3\, y'''(x) \,-\, 2x^2\, y''(x) \,+\, 11x\, y'(x) \,-\, 6\, y(x) = x^4.$$

Determine la EDO en la variable independiente t resultante al realizar el cambio de variable $x = e^t$.

Solución Similar al ejercicio anterior, evaluando la EDO bajo consideración en $x = e^t$ obtenemos

$$[4\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)(\mathcal{D}-3) - 6\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2) - 2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) + 11\mathcal{D} - 6]y(t) = \mathrm{e}^{4t}$$

(note que en el lado izquierdo de la igualdad anterior, tenemos

$$(\mathcal{D}^4 - 6\mathcal{D}^3 + 6\mathcal{D}^2 + 5\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D}) - 6(\mathcal{D}^3 - 3\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}) - 2\mathcal{D}^2 + 11\mathcal{D} - 6)$$

lo cual proporciona la EDO en la variable t,

$$y^{(iv)}(t) - 12y^{(iii)}(t) + 27y''(t) - 5y'(t) - 6y(t) = e^{4t}.$$

c) Para $x > \frac{4}{3}$ considere la EDO:

$$(3x-4)^2\, y''(x) \;-\; (3x-4)\, y'(x) \;+\; 5y(x) = 2x-1.$$

Determine la EDO en la variable independiente t que resulta al realizar el cambio de variable $3x-4 = \mathrm{e}^t$.

Solución:
Recordemos, como se vió en clases, que si $3x-4=\mathrm{e}^t$, para $x>\frac{4}{3}$, entonces para $\mathcal{D}=\frac{d}{dt}$,

$$(3x-4)^2 y''(x) = 3^2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) \;\text{ y }\; (3x-4)y'(x) = 3\mathcal{D}.$$

Así, la EDO dada en la variable independiente x, se transforma en

$$[9\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) - 3\mathcal{D} + 5]y(t) = 2\frac{e^t+4}{3} - 1,$$

es decir,

$$9y''(t) - 12y'(t) + 5y(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{5}{3}.$$

2. Determine la solución general de:

a) $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$ para todo $x > 0$.

Solución: Haciendo $x = e^t$ como en los problemas anteriores obtenemos $[\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) - 2\mathcal{D} + 2]y(t) = 0$, esto es:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \tag{2}$$

En este caso, el polinomio auxiliar es $p(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. Así, la solución de la EDO en la variable t, es

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^t,$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias. En la variable original, la solución es:

$$y(x) = d_1x^2 + d_2x$$

para d_1 y d_2 constantes arbitrarias.

b) $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ para todo $x > 0$.

Solución: Nuevamente, haciendo $x = e^t$, obtenemos:

$$[\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) - \mathcal{D} + 1]y(t) = 0,$$

esto es,

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0,$$

cuya solución es

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2 t\mathrm{e}^t,$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias, de donde la solución en la variable x, es

$$y(x) = d_1 x + d_2 x\,\ln(x).$$

para d_1 y d_2 constantes arbitrarias.

c) $(2x+1)^2\, y''(x) + 3(2x+1)\, y'(x) - 2y(x) = 0$ para $x > -1/2$.

Solución: Como $x > -1/2$, como en los ejercicios anteriores, hacemos el cambio de variable independiente

$$2x+1 = e^t \Leftrightarrow x = \frac{e^t - 1}{2}$$

. Obtenemos:

$$[2^2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) + 3\cdot 2\mathcal{D} - 2]y(t) = [4\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} - 2]y(t) = 0$$

Aquí el polinomio auxiliar es $p(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0$, cuyas raíces son $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 1/2$. Así, la solución de la EDO en la variable t, es

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t},$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias.
Como $2x+1 = e^t$, $x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t - 1)$ y entonces $\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{2x+1}$ y $\dfrac{t}{2} = \ln(\sqrt{2x+1})$.
Por tanto la solución en la variable original, es:

$$y(x) = d_1\frac{1}{2x+1} + d_2\sqrt{2x+1},$$

para d_1 y d_2 constantes reales arbitrarias.

3. Resolver

a) $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3, \quad$ con $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$.

Solución:
Tenemos dos posibilidades: resolver todo en la variable x, o resolver todo en la variable auxiliar t. En el primer caso, como sabemos, si $z(x)$ es solución de la EDO del PVI dado, entonces

$$z(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

donde $y_h(x)$ es la solución general del problema homogéneo asociado a la EDO dada, e y_p es una solución particular de la EDO (no homogénea) dada.

Como la condición inicial está evaluada en 2, resolvemos la EDO en $]0,+\infty[$. Del problema (2-a), tenemos que la $y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2$. Para calcular $y_p(x)$ emplearemos el método de variación de parámetros, porque los coeficientes dependen de x. Primero debemos normalizar la EDO, obteniendo

$$y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) = x \qquad \forall x > 0.$$

Así, nuestra propuesta de solución particular, es:

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2$$

donde las incógnitas $c_1(x), c_2(x)$ deben satidfacer el sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 & = 0 \\ c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 & = x \end{cases}$$

Definimos $y_1(x) := x$, $y_2(x) := x^2$. El Wronskiano de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2\,x \end{vmatrix} = x^2.$$

Se obtiene:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ x & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x & 2\,x \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{-x^3}{x^2} = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(t) & x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Integrando,

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int -x\,dx = -x^2/2 + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int 1\,dx = x + K_2 \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$

Luego, la solución particular viene dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)\,y_1(t) + c_2(x)\,y_2(x) \\ &= -\frac{x^2}{2}x + x\;x^2 \\ &= \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^3}{2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vía alternativa:

Aquí tenemos la solución del tipo $u(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde la y_h es la solución de la EDO homogénea en la variable t, e y_p una correspondiente solución particular.

Haciendo el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$, del Problema (2-a) la EDO a resolver, es:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{3t}, \tag{3}$$

Siguiendo la parte (2-a), se tiene que

$$y_h(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{2t},$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Para determinar y_p podemos usar aniquiladores o variación de parámetros, usando esto último, buscamos salución del tipo

$$y_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)\mathrm{e}^{2t},$$

donde c_1 y c_2 se determinan del sistema:

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} & = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^t + 2c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} & = \mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$$

En el sistema anterior, a la segunda ecuación le restamos la primera previamente multiplicada por 2. Obtenemos:

$$c_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{3t} \Longrightarrow c_2'(t) = \mathrm{e}^t$$

Luego despejando en la primera sigue que

$$c_1'(t)\mathrm{e}^t = -\mathrm{e}^{3t} \Longrightarrow c_1'(t) = -\mathrm{e}^{2t}$$

de donde

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \text{ y } c_2(t) = \mathrm{e}^t.$$

Así, obtenemos la solución particular, como $y_p(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{2t}$, es decir

$$y_p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}.$$

Finalmente, toda solución en la variable t es del tipo

$$u(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}.$$

Evaluando el PVI

$$y(2) = 2c_1 + 4c_2 + 4 = 1$$
$$\Leftrightarrow 2c_1 + 4c_2 = -3. \tag{4}$$

Por otra parte, notemos que

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + \frac{3x^2}{2}.$$

Evaluando el problema de valor inicial

$$y'(2) = c_1 + 4c_2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = -6 - 4c_2,$$

Reemplazando en (4)

$$\begin{aligned} &2(-6 - 4c_2) + 4c_2 = -3 \\ \Leftrightarrow\ &-12 - 8c_2 + 4c_2 = -3 \\ \Leftrightarrow\ &4c_2 = -9 \\ \Leftrightarrow\ &c_2 = -\frac{9}{4}, \end{aligned}$$

por ende

$$c_1 = -6 - 4\left(-\frac{9}{4}\right) = -6 + 9 = 3.$$

Finalmente la solucion del PVI es

$$y(x) = 3x - \frac{9}{4}x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

Observación: También se puede resolver el PVI en la variable t. Sin embargo para ello debemos recalcular correspondientemente "los tiempos" iniciales, a saber

$$y(\ln(2)) = 1,\ y'(\ln(2)) = 0.$$

.

b) $x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x(x+1)$ para todo $x < 0$.

Solución:

Aquí para eliminar los coeficientes variables, $x < 0$, hacemos el cambio $x = -\mathrm{e}^t$

$$(\text{note que } \frac{dx}{dt} = -\mathrm{e}^t = x).$$

Repitiendo el trabajo hecho en clases, se puede ver que las variaciones son las mismas, esto es:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = x\frac{dy}{dx}$$

y además (de manera similar)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(x\,\frac{dy}{dx}) = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} \Longrightarrow x^2y''(x) = y''(t) - y'(y)$$

por tanto, si ponemos $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$, y reemplazamos en la EDO dada, sigue:

$$[\mathcal{D}(\mathcal{D}-1) - \mathcal{D} + 1]y(t) = -e^t(1 - \mathrm{e}^t)$$

de donde obtenemos

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t.$$

De la parte (2-b) sabemos que

$$y_h(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t,$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias.
Ahora usando variación de parámetros, buscamos y_p del tipo

$$y_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)t\mathrm{e}^t.$$

Para el cálculo de $c_1(t)$ y $c_2(t)$, usamos la Regla de Cramer: Primero obtenemos el Wronskiano de las soluciones:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

Luego,

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^t \\ e^{2t} - e^t & e^t + te^t \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{-te^{3t} + te^{2t}}{e^{2t}} = t - t\,e^t$$

y

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & e^{2t} - e^t \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{e^t(e^{2t} - e^t)}{e^{2t}} = e^t - 1.$$

Integrando,

$$c_1(t) = \int c_1'(t) = \int (t - t\,e^t)dt = \frac{t^2}{2} - e^t(t-1) + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

y
$$c_2(t) = \int c_2'(t)dt = \int (e^t - 1)dt = e^t - t + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$
Luego, la solución particular viene dada por
$$\begin{aligned} y_p(t) &= c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)t\mathrm{e}^t \\ &= \frac{t^2e^t}{2} - e^{2t}(t-1) + te^{2t} - t^2e^t \\ &= -\frac{t^2e^t}{2} + e^{2t}. \end{aligned}$$
Por lo tanto, la solución en la variable t, es
$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1e^t + c_2te^t - \frac{t^2e^t}{2} + e^{2t}. \end{aligned}$$
Teniendo presente que $x = -\mathrm{e}^t$ (de donde $\mathrm{e}^t = -x$ y $t = \ln(-x)$), volvemos a la variable original, esto es,
$$y(x) = c_1(-x) + c_2(-x)\,\ln(-x) + \frac{1}{2}x\,[\ln(-x)]^2 + x^2,$$
es decir
$$y(x) = d_1\,x + d_2\,x\,\ln(-x) + \frac{1}{2}x\,[\ln(-x)]^2 + x^2.$$
donde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

c) $x^3y''(x) - 3x^2y'(x) + 5xy(x) = x^2 + x\sqrt{|\ln(x)|}$

Solución

Como la función $\ln(x)$ está definida en $]0, +\infty[$ [, resolveremos nuestra EDO para todo $x > 0$. Primeramente, escribiremos la EDO bajo estudio en la forma de las ecuaciones de Euler-Cauchy.
$$\begin{aligned} x^3y''(x) - 3x^2y'(x) + 5x\,y(x) &= x^2 + x\sqrt{|ln(x)|} \\ x^2\,y''(x) - 3\,xy'(x) + 5\,y(x) &= x + \sqrt{|ln(x)|} \end{aligned}$$
Haciendo el cambio de variable usual $x = \mathrm{e}^t$ se obtiene la EDO:
$$v''(t) - 4v'(t) + 5v(t) = e^t + \sqrt{|t|}.$$
El polinomio auxiliar es $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$, cuyas raíces son
$$\lambda = 2 \pm i$$

Por lo que solución general de la EDO homogenea asociada es:

$$v_h(t) = C_1 e^{2t} \operatorname{sen}(t) + C_2 e^{2t} \cos(t).$$

Para determinar una solución particular, usamos superposición de soluciones resolviendo separadamete la busqueda de las soluciones particulares; esto es: Primero buscamos una solución particular de

$$v''_{p_1}(t) - 4v'_{p_1}(t) + 5v_{p_1}(t) = e^t$$

por el método de aniquiladores. Como $(D-1)\, e^t = 0$,

$$(D-1)\,(D-(2+i))\,(D-(2-i))\, v_{p_1}(t) = 0.$$

Luego buscamos $v_{p_1}(t)$ con la forma $v_{p_1}(t) = A\, e^t$. Sustituyendo se llega a que

$$A - 4A + 5A = 1 \Longleftrightarrow A = 1/2.$$

Por ende, $v_{p_1}(t) = e^t/2$.
Para calcular una solución particular de

$$v''_2(t) - 4v'_2(t) + 5v_2(t) = \sqrt{|t|}$$

usaremos el método de variación de parámetros. Definiendo $v_1(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(t)$ y $v_2(t) = e^{2t}\cos(t)$, calculamos el Wronskiano de $v_1(t)$ y $v_2(t)$

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{2t}\operatorname{sen}(t) & e^{2t}\cos(t) \\ 2e^{2t}\operatorname{sen}(2t) + e^{2t}\cos(t) & 2e^{2t}\cos(t) - e^{2t}\operatorname{sen}(t) \end{vmatrix} \\ &= 2e^{4t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) - e^{4t}\operatorname{sen}^2(t) - 2e^{4t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) - e^{4t}\cos^2(t) \\ &= -e^{4t} \end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento de variación de parámetros:

$$c'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t}\cos(t) \\ \sqrt{|t|} & 2e^{2t}\cos(t) - 2e^{2t}\operatorname{sen}(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{-\sqrt{|t|}e^{2t}\cos(t)}{-e^{4t}} = \sqrt{|t|}e^{-2t}\cos(t)$$

y

$$c'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t}\operatorname{sen}(t) & 0 \\ 2e^{2t}\operatorname{sen}(t) + e^{2t}\cos(t) & \sqrt{|t|} \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{\sqrt{|t|}e^{2t}\operatorname{sen}(t)}{-e^{4t}} = -\sqrt{|t|}e^{-2t}\operatorname{sen}(t).$$

Luego, $c_1(t) = \int \sqrt{|t|}e^{-2t}\cos(t)\,dt$ y $c_2(t) = -\int \sqrt{|t|}e^{-2t}\operatorname{sen}(t)\,dt$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_h(t) + vp_1 + c_1(t)v_1(t) + c_2(t)v_2(t)\\
&= C_1 e^{2t}\operatorname{sen}(t) + C_2 e^{2t}\cos(t) + \frac{1}{2}e^t\\
&\quad + e^{2t}\operatorname{sen}(t)\int \sqrt{|t|}e^{-2t}\cos(t)\,dt - e^{2t}\cos(t)\int \sqrt{|t|}e^{-2t}\operatorname{sen}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Regresando a la variable original ($t = \ln(x)$) y

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 x^2\operatorname{sen}(\ln(x)) + C_2 x^2\cos(\ln(x)) + \frac{1}{2}x\\
&\quad + x^2\operatorname{sen}(\ln(x))\int \sqrt{|\ln(x)|}\,x^{-3}\ \cos(ln(x))dx\\
&\quad - x^2\cos(\ln(x))\int \sqrt{|\ln(x)|})x^{-3}\operatorname{sen}(\ln(x))dx.
\end{aligned}$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Determine la solución general de (note que L es a coeficientes variables):
$$(7-2x)y''(x)-4(x-4)y'(x)+4y(x)=6\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,(2\,x-7)^3,$$
sabiendo que el Ker del operador asociado a la EDO tiene base dada por
$B:=\{y_1(x):=x-4,\ y_2(x):=\mathrm{e}^{-2\,x}\}$.

2. Determine una EDO lineal a coeficientes constantes reales:
   a) que tenga a $y_1(x)=x^3\mathrm{e}^{-2x}$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple este requisito?
   b) de orden 5 que tenga entre sus soluciones a $y_1(x)=\mathrm{e}^{4x}$ e $y_2(x)=x^2\,\mathrm{sen}(3x)$.

3. Resolver:
   a) $x^2y''-3xy'+2y=0$
   b) $x^2y''+xy'-y=0$;
   c) $(x-2)^2y''+3(x-2)y'-8y=0$, para $x>2$.
   d) $x^2y''-5xy'+9y=x^3$;
   e) $x^2y''(x)-2xy'(x)+2y=\dfrac{x}{1+x}$ (este problema tiene su equivalente a coeficientes constantes en el Listado 4).

4. Resuelva $(x^2+2)\,y''(x)+(x-1)y'(x)-(x^2+x+1)y(x)=2x$. Sabiendo que $y(x)=\mathrm{e}^x$ pertenece al Kernel del operador diferencial que define la EDO.

5. Resolver las ecuaciones de Euler que siguen, para $x>0$ o según se indique.
   a) $x^2y''-5xy'+9y=x^3$;
   b) $x^2y''+xy'+y=x\,(6-\ln(x))$, $x>0$.
   c) $x^2y''+xy'-y=\sqrt{x}$, $\quad y(1)=0$, $y'(1)=0$.
   d) $x^4y^{(iv)}-6x^3y'''+11x\,y'-6y=x^3+x^3\,\ln(x)$.

6. **Reducción de Orden:** Sea L un operador diferencial lineal de orden mayor o igual a dos con coeficientes variables.
Suponga que y_1 es una solución de $Ly=0$. Para buscar una segunda solución y_2 de $Ly=0$, haga $y_2(x)=y_1(x)\cdot z(x)$ y luego $u(x)=z'(x)$.
Determine la solución general de: $x\,y''-(1+x)y'+y=3x\,\mathrm{e}^{-x}$, sabiendo que $y(x)=\mathrm{e}^x$ es una solución del problema homogéneo asociado.

MDT/JMS/CMG/DS//jms/jg/cmg
17/06/2020