Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 04: Ideales, cuocientes y homomorfismos
Álgebra con Software (527282)

Todos los anillos considerados son conmutativos y unitarios.

1. Considerar el anillo $\mathbb{C}[x,y]$. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ números complejos. Mostrar que el conjunto $\{p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] : p(z_1,z_2) = 0\}$ es un ideal.

2. Utilizando el problema anterior, mostrar: si $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, entonces el ideal $(p(x,y))$ no es maximal.

3. Mostrar: la composición de dos homomorfismos de anillos es un homomorfismo de anillos.

4. Mostrar: si un homomorfismo de anillos es una función invertible, entonces su función inversa también es un homomorfismo de anillos.

5. Considerar el anillo $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ (ver Listado 03). Mostrar que la función $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ definida por $f(a + bi) = a + 3b$ es un homomorfismo de anillos. ¿Es inyectiva? ¿Sobreyectiva?

6. Mostrar: la imagen de un homomorfismo de anillos es un subanillo del codominio.

7. Recordar: si $f : X \to Y$ es una función y $C \subseteq Y$ un subconjunto, la *imagen inversa de* C es $f^{-1}(C) = \{x \in X \ : \ f(x) \in C\}$. Mostrar: si f es un homomorfismo de anillos, la imagen inversa de un ideal es un ideal.

8. Mostrar: si f es un homomorfismo de anillos, la imagen inversa de un ideal primo es un ideal primo.

9. ¿Es verdadero el ejercicio anterior si se reemplazan las menciones a “ideal primo” por “ideal maximal”?

10. Sea $M_2(\mathbb{Z})$ el anillo de matrices de 2×2 con coeficientes enteros. Es unitario, pero no conmutativo. Considerar el siguiente subconjunto de matrices:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

   a) Verificar que A es un subanillo conmutativo unitario de $M_2(\mathbb{Z})$.

   b) Sea $f : A \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ definida por $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \overline{a - 2b}$. Mostrar que f es un homomorfismo de anillos.

   c) ¿Es f inyectiva? ¿Sobreyectiva?

   d) Construir un ejemplo concreto para mostrar que $\ker f$ no es un ideal primo de A. *(Sugerencia: utilizar la función inducida $\tilde{f} : A/\ker f \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.)*

Mini proyecto: anillos booleanos

Definición. Un anillo A es *booleano* si todo $x \in A$ satisface $x \cdot x = x$.

11. Verificar que los anillos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ son booleanos.

12. Verificar que los anillos $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ no son booleanos.

13. Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. Definimos las siguientes operaciones en $\mathcal{P}(X)$:

    a) $A + B = A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (diferencia simétrica)

    b) $A \cdot B = A \cap B$ (intersección)

    Mostrar que $\mathcal{P}(X)$, con estas operaciones, forma un anillo conmutativo unitario booleano. ¿Cuáles son los neutros aditivo y multiplicativo? Para cada subconjunto $A \subseteq X$, ¿cuál es su inverso aditivo?

14. Mostrar: si A es un anillo booleano con más de dos elementos, entonces no es un dominio entero. *(Sugerencia: si $a \in A$, ¿cuánto es $a \cdot (a-1)$?)*

15. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Mostrar:

    a) Si A es booleano y f es sobreyectiva, entonces B es booleano.

    b) Si B es booleano y f es inyectiva, entonces A es booleano.

16. Sea A un anillo booleano y sea I un ideal propio de A. Mostrar: el cuociente A/I es también un anillo booleano. *(Sugerencia: utilizar el ejercicio anterior.)*

17. Sean A un anillo booleano y $x \in A$. Mostrar que $x + x = 0$. *(Sugerencia: calcular $(x+x)^2$ de dos formas distintas: con cuadrado de binomio y con la definición de anillo booleano.)*

18. Sean A un anillo booleano e I un ideal de A. Mostrar: si I es primo, entonces es maximal. *(Sugerencia: estudiar el cuociente A/I utilizando las propiedades vistas en clases y desarrolladas en estos ejercicios.)*