Elementos Finitos – 521537
Cápsula 01 - Espacios de Sobolev

Diego Paredes

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

1er. Semestre 2021

Conceptos básicos (Revisar *Real and Complex Analysis*, W. Rudin (1987))

- Denotaremos por d**x** a la *medida de Lebesgue* y por

$$\int_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

a la *integral de Lebesgue* de f sobre el conjunto $A \subseteq \Omega$, donde $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$

- Sea $1 \leq p < \infty$, definiremos las normas

$$\|f\|_{0,\,p,\,A} = \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|f\|_{0,\,\infty,\,A} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in A\}$$

- Definimos los *espacios de Lebesgue* como

$$L^p(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \;/\; \|f\|_{0,\,p,\,A} < \infty\}$$
$$L^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \;/\; \|f\|_{0,\,\infty,\,A} < \infty\}$$

- En adelante usaremos la notación $f = g$ para decir que $f = g$ *casi en todas partes* respecto a d**x**
- Ejercicio: Demostrar que las normas enunciadas están bien definidas y que los espacios son *espacios vectoriales normados.*

Desigualdades

- Minkowski:

$$\|f+g\|_{0,p,A} \leq \|f\|_{0,p,A} + \|g\|_{0,p,A}$$
$$\|f+g\|_{0,\infty,A} \leq \|f\|_{0,\infty,A} + \|g\|_{0,\infty,A}$$

- Hölder: si $f \in L^p(A)$ y $g \in L^{\frac{p}{p-1}}(A)$, (si $f \in L^\infty(A)$ y $g \in L^1(A)$) entonces $f\,g \in L^1(A)$ y

$$\|f\,g\|_{0,1,A} \leq \|f\|_{0,p,A}\,\|g\|_{0,\frac{p}{p-1},A}$$
$$\|f\,g\|_{0,1,A} \leq \|f\|_{0,\infty,A}\,\|g\|_{0,1,A}$$

- Schwarz: Ver Hölder con $p = 2$

L^p es Banach

Definición (espacio completo)

Un espacio métrico M se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy contenida en M alcanza su límite dentro del espacio

Definición (espacio completo)

Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|_V)$ se dice *espacio de Banach* si es completo respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_V$

Teorema

Los espacios $L^p(A)$ y $L^\infty(A)$ son espacios de Banach

Demostración: Ejercicio.

Definición (Espacio de funciones test)

$\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : f$ tiene soporte compacto en $\Omega\}$

Definición (funciones localmente integrables)

$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; f \in L^1(K), \forall K \subset \overset{\circ}{\Omega}$ compacto$\}$

Lema (variacional)

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0\,, \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

entonces $f = 0$ (casi en todas partes).

Demostración: Fuera de los intereses del curso

Notación (multi-índices)

La $d-$tupla $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ se conoce como *multi-índice* de orden $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ y denota

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \forall f \in \mathcal{C}^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$$

Definición (Derivada débil)

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ diremos que f tiene *derivada débil* si existe una función $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega g(\mathbf{x})\, \phi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega f(\mathbf{x})\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En tal caso denotamos por $\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f = g$ a la derivada débil de f.

Derivada débil - Ejemplo

Sea $\Omega = [-1, 1]$ y $f(x) = 1 - |x|$
Proponemos que la derivada débil de f existe y está dada por

$$\partial_w^1 f\,(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

En efecto, sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ luego

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{0} f(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} f'(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x + f(x)\,\phi(x)\big|_{-1}^{0} \\
&\quad - \int_{0}^{1} f'(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x + f(x)\,\phi(x)\big|_{0}^{1} \\
&= -\int_{-1}^{1} \partial_w^1 f\,(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Derivada débil - Observaciones

1. La función del ejemplo anterior no admite derivadas débiles de orden superior
2. Se puede demostrar que si $f \in \mathcal{C}^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ entonces $\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f = \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f$, (Ejercicio)
3. En vista del punto anterior en adelante si usamos la notación $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f$ para $f \notin \mathcal{C}^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ se entenderá tácitamente que nos referimos a $\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f$

Consideremos $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T(\psi_n) = T(\psi)$ para toda sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convergente a ψ respecto a la norma de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Bajo estas condiciones diremos que T es una *distribución*, y denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ al espacio de todas las distribuciones definidas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dicho de otra forma una distribución es un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$, el *dual topológico* de $\mathcal{D}(\Omega)$, esto induce el uso de la notación

$$\langle T\,,\psi\rangle = \langle T\,,\psi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = T(\psi)\,,$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejercicio: Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $\delta_{\mathbf{x}_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida a través de la acción

$$\langle \delta_{\mathbf{x}_0}\,,\psi\rangle = \psi(\mathbf{x}_0)\,,\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Mostrar que $\delta_{\mathbf{x}_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Esta distribución es conocida como *delta de Dirac en* $\mathbf{x}_0$.

Ejercicio: Sea $T : \Omega \to \mathbb{R}$, asuma que existe $f_T \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que T se puede definir a través de la acción

$$\langle T\,,\psi\rangle = \int_\Omega f_T(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,,\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Mostrar que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En este caso decimos que la distribución T es **regular**.

Definición (derivada distribucional)

Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$, la derivada $\boldsymbol{\alpha}$-distribucional de T se define como el funcional $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} T : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \partial^{\boldsymbol{\alpha}} T, \psi \rangle := (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \langle T, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi \rangle , \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

<u>Ejercicio</u>: Mostrar que $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Observación</u>: Si T y $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} T$ son regulares entonces existen $f_T, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_T \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_T(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega f_T(\mathbf{x})\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, y $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_T(\mathbf{x})$ coincide con la *derivada débil de f_T (o de T)*.

Definiciones

Norma de Sobolev

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Supongamos que la derivada débil $\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f$ existe para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$ tal que $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$. Definimos las normas de Sobolev

$$\|f\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \|\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|f\|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \|\partial_w^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{0,\infty,\Omega}$$

Espacios de Sobolev

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \|f\|_{k,p,\Omega} < \infty\} \quad \text{y} \quad W_\infty^k(\Omega) := \{f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \|f\|_{k,\infty,\Omega} < \infty\}$$

Resultados Principales

Teorema

Los espacios de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ y $W_\infty^k(\Omega)$ son espacios de Banach

Demo: Ejercicio

Teorema

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$ es denso en $W_p^k(\Omega)$

Demo: *Fuera de los intereses del curso*

Proposición

Si $k \leq m$ entonces $W_p^m(\Omega) \subseteq W_p^k(\Omega)$ y $W_\infty^m(\Omega) \subseteq W_\infty^k(\Omega)$

Demo: Ejercicio

Proposición

Si $p \leq q$ entonces $W_\infty^k(\Omega) \subset W_q^k(\Omega) \subseteq W_p^k(\Omega)$

Demo: Ejercicio