Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Análisis Numérico II

(Código 525441)

Certamen 1 — miércoles 6 de mayo de 2015

Problema 1 (14 puntos)**.**

a) Calcular una descomposición triangular $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LR}$, con búsqueda de pivote en la matriz restante, de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Indicar explícitamente las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$.

b) Resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{b} = (8, -2, 8)^{\mathrm{T}}$.

c) Sean $\boldsymbol{e} := (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E} := \alpha \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$, y $\boldsymbol{d} := \alpha \boldsymbol{e}$. Decidir si los siguientes vectores son una solución aproximada (en el sentido del criterio de Prager & Oettli) compatible con el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (i) para $\alpha = 0.1$, (ii) para $\alpha = 0.5$:

$$\boldsymbol{x}_1 := \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 := \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Solución sugerida.

a) Obtenemos la siguiente sucesión de esquemas, donde los elementos con $\boxed{\text{marco}}$ corresponden a multiplicadores:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 4 & 4 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 8 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & -4 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 8 \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 1 & 2 & 2 \\ 3 & \boxed{\frac{3}{4}} & -1 & 0 & 2 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{\frac{3}{4}} & \boxed{0} & -1 & 2 \end{array},$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

lo que implica que

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2 puntos

b) Aprovechando la transformacion de la columna $\boldsymbol{b}$ realizada en los esquemas obtenemos facilmente

$$\boldsymbol{x} = (2, -2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

3 puntos

c) De acuerdo al criterio de Prager & Oettli, calculamos

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}| = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.5 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_1| + \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 5.9 \\ 5.9 \\ 5.9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_2| + \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 6.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{b}| \leq \alpha\big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_i| + \boldsymbol{d}\big) \tag{2}$$

para $i = 1, 2$ para $\alpha = 0.5$, es decir para este valor de α tanto $\boldsymbol{x}_1$ como $\boldsymbol{x}_2$ son soluciones aproximadas compatibles (en el sentido del criterio de Prager & Oettli), pero que la desigualdad (2) no es válida para $\alpha = 0.1$ en ningún de los casos (se viola en la primera y tercera componente para $\boldsymbol{x}_1$ y en la segunda para $\boldsymbol{x}_2$), por lo tanto tanto $\boldsymbol{x}_1$ como $\boldsymbol{x}_2$ *no* son soluciones aproximadas compatibles para $\alpha = 0.1$.

4 puntos

Problema 2 (10 puntos)**.**

a) Se consideran las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{E}$ y los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d}$ dados por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 99 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Analizar si respecto al par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$, los siguientes vectores son una solución aproximada compatible con el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en el sentido del criterio de Prager & Oettli:

$$\boldsymbol{x}_1 := (1.2, 10.1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_2 := (1, 10.2)^{\mathrm{T}}.$$

b) Supongamos que un sistema $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ posee una solución única $\boldsymbol{y}^*$. Sean $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ vectores tales que

$$\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}^*\|_2 < \|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}^*\|_2, \tag{3}$$

es decir $\boldsymbol{y}_2$ está más lejos de $\boldsymbol{y}^*$ que $\boldsymbol{y}_1$. Supongamos, además, que $\boldsymbol{y}_2$ es una solución aproximada compatible con $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ para algun par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$. ¿Se puede concluir que en virtud de (3), igualmente $\boldsymbol{y}_1$ será una solución aproximada compatible con $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ para el mismo par $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{d})$? Fundamente su respuesta (demostración o contraejemplo).

Solución sugerida.

a) Se obtiene

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1| = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1.23 \\ 1.23 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_1| + \boldsymbol{d},$$
$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2| = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1.22 \\ 1.22 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}|\boldsymbol{x}_2| + \boldsymbol{d},$$

por lo tanto $\boldsymbol{x}_1$ es una solución aproximada compatible con el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en el sentido del criterio de Prager & Oettli (con respecto a la matriz $\boldsymbol{E}$ y el vector $\boldsymbol{d}$), pero $\boldsymbol{x}_2$ no lo es. **6 puntos**

b) La afirmación es falsa. Efectivamente, el contraejemplo está dado por (a). Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = (1, 10)^{\mathrm{T}}$. Para $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1$ calculamos

$$\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}^*\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\| = 0.2 < \|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}^*\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0.05} \approx 0.2236,$$

pero $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1$ es una solución aproximada compatible (respecto a la matriz $\boldsymbol{E}$ y el vector $\boldsymbol{d}$ dados en (a)) e $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_2$ no lo es. **4 puntos**

Problema 3 (10 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es invertible sin calcular $\det \boldsymbol{A}$.

b) Determinar una cota superior para $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})$ en una norma $\|\cdot\|$ apropiada *sin* invertir $\boldsymbol{A}$ o calcular $\det \boldsymbol{A}$.

c) Además consideramos

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 11.8 \\ 4.7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 5.1 & -2.1 & 1.05 \\ 2.1 & 3.9 & 2.05 \\ 0.05 & 1 & 3.1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sean la solución de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, respectivamente. Determinar una cota superior (la mejor posible) para $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| / \|\boldsymbol{x}\|$ sin calcular $\boldsymbol{x}$ o $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Solución sugerida.

a) Como $|\alpha_{11}| = 5 > |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = 3$, $|\alpha_{22}| = 4 = |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}|$ y $|\alpha_{33}| = 3 > |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| = 1$ y además hay sólo una entrada nula (lo que evidencia que el grafo dirigido $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ es conexo), observamos que $\boldsymbol{A}$ es irreduciblemente diagonal dominante y por lo tanto invertible (Teorema 4.4). **2 puntos**

b) Podemos escribir $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}(\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})$, donde

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_\infty = 1, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 = \frac{11}{15} = 0.7\bar{3} < 1.$$

Notar que esto implica que $\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}$ es invertible (respuesta alternativa a la parte (a)) Como

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{A}\|_1 = 7, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 = \frac{1}{3}, \\ &\|\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1} = \frac{1}{1 - \frac{11}{15}} = \frac{15}{4} = 3.75, \end{aligned}$$

donde utilizamos el Teorema 3.7, obtenemos

$$\begin{aligned} &\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_1 \|\boldsymbol{D}^{-1}\|_1 \|\mathbf{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B}\|_1 \\ &\leq 7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{35}{4} = 8.75. \end{aligned}$$

4 puntos

c) Aquí obtenemos

$$\|\boldsymbol{b}\|_1 = 19, \quad \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1 = 0.6, \quad \|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \right\|_1 = 0.25$$

y por lo tanto de acuerdo al Teorema 3.8

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} &\leq \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) \left(\frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_1}{\|\boldsymbol{b}\|_1} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1} \right) \frac{1}{1 - \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{A}) \dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1}} \\ &\leq 8.75 \cdot \left(\frac{0.6}{19} + \frac{0.25}{7} \right) \frac{1}{1 - 8.75 \cdot \dfrac{0.25}{7}} = 0.8565. \end{aligned}$$

4 puntos

Problema 4 (14 puntos)**.** Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demostrar que el método de Jacobi converge a la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y vectores iniciales $\boldsymbol{x}_{i,0} \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios. Aviso: utilizar que si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{D}$ es la diagonal de $\boldsymbol{A}$, entonces este método está dado por la fórmula de iteración

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}).$$

Acotar $r_\sigma(\boldsymbol{B})$.

b) Utilizando el vector inicial $\boldsymbol{x}_{i,0} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, calcular una nueva aproximación de la solución de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{b} = (10,-3,7)^{\mathrm{T}}$, utilizando los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, y SOR con $\omega = 1.5$.

c) Determinar la matriz $\boldsymbol{L}$ triangular inferior de la descomposición de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$. Utilizando la descomposición de Cholesky determinar la solución exacta de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Indicar todos los pasos intermedios.

Solución sugerida.

a) Como $|\alpha_{11}| = 4 = |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}|$, $|\alpha_{22}| = 5 > |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}| = 3$ y $|\alpha_{33}| = 3 = |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}|$ y además ninguna entrada es nula (lo que evidencia que el grafo dirigido $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ es conexo), observamos que $\boldsymbol{A}$ es irreduciblemente diagonal dominante y por lo tanto invertible (Teorema 4.4). Para

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Desafortunadamente $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = 1$ e incluso $\|\boldsymbol{B}\|_1 = \frac{16}{15} > 1$, es decir no podemos estimar $r_\sigma(\boldsymbol{B})$ mediante normas fáciles de evaluar. Calculemos el polinomio característico de $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{15}\right) - \frac{2}{5}\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{10} - \frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{7}{15}\right), \end{aligned}$$

luego

$$r_\sigma(\boldsymbol{B}) = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0.6831.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

b) A partir de $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ el método de Jacobi produce los vectores (se informan algunos para ilustrar el método)

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.6 \\ 2.\bar{3} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.0\bar{3} \\ -0.0\bar{6} \\ 0.4\bar{6} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2.2\bar{3} \\ -0.28 \\ 1.6\bar{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 1.5489 \\ -0.0311 \\ 0.7511 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_5 \approx \begin{pmatrix} 2.1089 \\ -0.1307 \\ 1.2904 \end{pmatrix}.$$

Para el método de Gauss-Seidel,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

o en componentes (donde $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ y $\boldsymbol{x}_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{n,k})^{\mathrm{T}}$)

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+1} = & \xi_{i,k} + \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\xi_{j,k+1} - \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\xi_{j,k} + \beta_i \right), \\ & i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

obtenemos los vectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.4 \\ 0.5\bar{3} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 \begin{pmatrix} 2.4\bar{3} \\ 0.2\bar{6} \\ 0.6\bar{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 2.3222 \\ 0.2044 \\ 0.7170 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 2.2437 \\ 0.1541 \\ 0.7862 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_5 \approx \begin{pmatrix} 2.1840 \\ 0.1163 \\ 0.8386 \end{pmatrix}.$$

Para el método SOR, descrito por

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\big((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}\big)\boldsymbol{x}_k + \omega(\boldsymbol{D} - \omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

o en componentes

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+1} = & \xi_{i,k} + \frac{\omega}{\alpha_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\xi_{j,k+1} - \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\xi_{j,k} + \beta_i \right), \\ & i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

obtenemos los vectores

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.35 \\ -0.925 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 3.5812 \\ 0.8513 \\ -0.0444 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 2.6311 \\ 0.2663 \\ 0.7579 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 2.0658 \\ -0.0211 \\ 1.0658 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_5 \approx \begin{pmatrix} 1.9019 \\ -0.0680 \\ 1.0992 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{6 puntos}}$

c) Suponiendo que $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, obtenemos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},$$

lo que nos permite calcular sucesivamente

$$\begin{aligned} & l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2; \\ & l_{11}l_{21} = -2 \Rightarrow l_{21} = \frac{-2}{l_{11}} = -1; \\ & l_{11}l_{31} = 2 \Rightarrow l_{31} = \frac{2}{l_{11}} = 1; \\ & l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{5 - l_{21}^2} = 2; \\ & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = \frac{1 - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = 1; \\ & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{3 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 1, \end{aligned}$$

es decir

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para resolver $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se resuelve primero el sistema $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, lo cual entrega $\boldsymbol{y} = (5,1,1)^{\mathrm{T}}$; luego resolvemos $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ obteniendo $\boldsymbol{x} = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Problema 5 (12 puntos)**.** Resolver el problema de aproximación

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0^*\varphi_0(t_i) + \alpha_1^*\varphi_1(t_i) + \alpha_2^*\varphi_2 t_i)\bigr)^2 = \min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - (\alpha_0\varphi_0(t_i) + \alpha_1\varphi_1(t_i) + \alpha_2\varphi_2 t_i)\bigr)^2$$

para los datos

i	1	2	3	4
t_i	-1	0	1	2
y_i	2	-1	1	3

para $\varphi_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$, transformando la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ a forma triangular superior mediante la transformación de Householder.

Solución sugerida. Se esta buscando la solución $\boldsymbol{x}^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*)^{\mathrm{T}}$ del problema

$$\|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2^2,$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Aquí calculamos sucesivamente

(1)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\alpha_{11}^{(1)}\right| = 1, \quad \left\|\boldsymbol{a}_2^{(1)}\right\|_2 = 2, \quad \beta = \frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2^{(2)} = \boldsymbol{a}_2^{(1)} - \frac{1}{6}\bigl(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2^{(1)}\bigr)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 0 \cdot \hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\bigl(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3^{(1)}\bigr)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{b}^{(1)} - \frac{1}{6}\bigl(\hat{\boldsymbol{w}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^{(1)}\bigr)\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

(2)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \left\|\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{(2)}\right\| = \sqrt{5}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}(0+\sqrt{5})} = \frac{1}{5},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_3^{(3)} = \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)} - \frac{1}{5}\bigl(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(2)}\bigr)\hat{\boldsymbol{w}}_2$$

$$= \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}+5\right)\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5}-\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{8}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(3)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)} - \frac{1}{5}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(2)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

3 puntos

(3)

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15}\sqrt{5}-\frac{1}{3} \\ \frac{8}{15}\sqrt{5}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{(3)}\|_2 = 2, \quad \beta = \frac{1}{\frac{20}{3}-\frac{8}{15}\sqrt{5}},$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}+\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{3}+\frac{8}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)} - \frac{1}{\frac{20}{3}-\frac{8}{15}\sqrt{5}}\big(\hat{\boldsymbol{w}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}^{(3)}\big)\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

3 puntos

De acuerdo a la información generada, el vector $\boldsymbol{x}^*$ es la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

con la solución

$$\alpha_2^* = \frac{5}{4}, \quad \alpha_1^* = \frac{1}{2} - \alpha_2^* = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_0^* = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \alpha_1^* - 3\alpha_2^*\right) = -\frac{1}{4}.$$

1 punto