Ecuaciones Diferenciales Ordinarias III

- EDO de orden superior.
- Familia de métodos Runge-Kutta

E.D.O. de orden superior

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

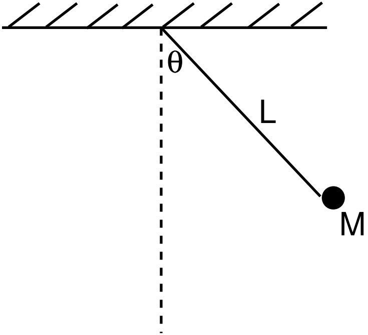
En efecto,

$$\boldsymbol{z}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} =: \boldsymbol{f}(x, z)$$

y luego, $\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{f}(x, z)$ es un sistema de E.D.O. de primer orden al que se pueden aplicar los métodos numéricos vistos.

Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, también puede expresarse mediante un sistema de E.D.O. de primer orden.

Ejemplo: Resolver el P.V.I. para la ecuación del péndulo



Solución

Considere la dinámica del péndulo que muestra la figura:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \\ \theta(0) = \dfrac{\pi}{4}, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

donde $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ denotan derivadas respecto del tiempo.

Para resolver esta ecuación no lineal (que no tiene solución analítica) debemos hacer el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta, \\ \theta_2 &= \dot{\theta}_1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -\dfrac{g}{L}\operatorname{sen}(\theta_1), \\ \theta_1(0) = \dfrac{\pi}{4}, \quad \theta_2(0) = 0. \end{cases}$$

Notemos que θ_1 corresponde al ángulo θ y θ_2 a la velocidad angular $\dot{\theta}$.

Aplicamos el método de RK_{44} al sistema anterior:

Algoritmo (RK4)

Para $i = 0, \ldots, N-1$

$$
\begin{aligned}
x_i &= a + ih \\
\boldsymbol{k}_1 &= h\boldsymbol{f}(x_i, \boldsymbol{y}_i) \\
\boldsymbol{k}_2 &= h\boldsymbol{f}(x_i + \tfrac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_1) \\
\boldsymbol{k}_3 &= h\boldsymbol{f}(x_i + \tfrac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_2) \\
\boldsymbol{k}_4 &= h\boldsymbol{f}(x_i + h, \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{k}_3) \\
\boldsymbol{y}_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{6}[\boldsymbol{k}_1 + 2(\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) + \boldsymbol{k}_4]
\end{aligned}
$$

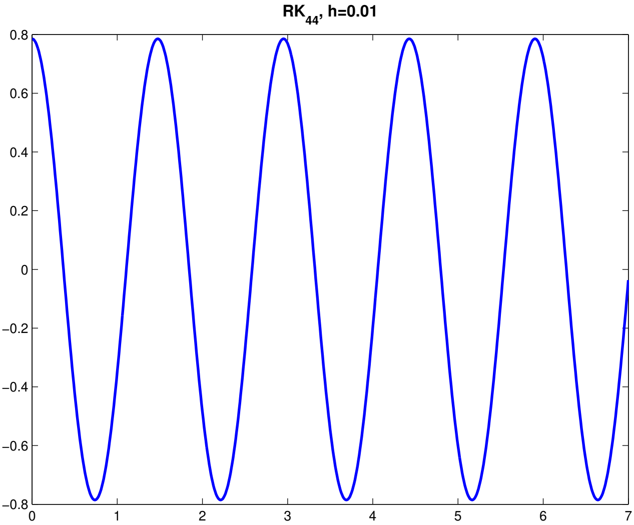
fin i.

donde

$$x = t, \quad y = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\dfrac{g}{L}\,\mathrm{sen}(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_4$ también son vectores de dimensión 2.

Resolviendo para $g = 9.8\,\mathrm{m/s}$ y $L = 0.5\,\mathrm{m}$, obtenemos



En los nodos auxiliares se definen los valores:

$$\begin{aligned} y_{i0} &:= y_i, \\ y_{ij} &:= y_i + h \sum_{l=0}^{j-1} A_{jl} f(x_{il}, y_{il}), \quad j = 1, \ldots, q, \end{aligned}$$

siendo $y_{i+1} := y_{iq}$ el valor aproximado por el método para $y(x_{i+1})$ y los coeficientes A_{jl} son contantes a determinar apropiadamente.

Definición. Se define el **error global** como

$$E := \max_{0 \leq i \leq N-1} |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|,$$

donde $y(x_{i+1})$ es el valor de la solución exacta del P.V.I. en el nodo x_{i+1} e y_{i+1} es el valor obtenido por el método numérico.

Observaciones.

- Los puntos x_{ij} y las constantes A_{jl} se determinan de manera tal que el error global cumpla
$$E \leq Ch^p,$$
donde C es una constante positiva.
- El correspondiente método se dice de **orden** p y **rango** q, y se abrevia por RK_{pq}.

Método de Euler o de la tangente (RK_{11})

Corresponde al caso en que $q = p = 1$; es decir, el método Runge-Kutta de orden uno y rango uno: RK_{11}. Por lo tanto $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$ y, en consecuencia,

$$x_{i0} = x_i \qquad \text{y} \qquad x_{i1} = x_{i+1}.$$

Los valores de y_{i0} e y_{i1} se obtienen mediante

$$\begin{aligned} y_{i0} &= y_i, \\ y_{i1} &= y_i + hA_{10} f(x_{i0}, y_{i0}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $y_{i+1} := y_{i1}$, se tiene que

$$y_{i+1} = y_i + hA_{10} f(x_i, y_i).$$

Se se escoge $A_{10} = 1$, se obtiene que el error global satisface $E \leq Ch$, con C una constante positiva. Es decir, el método de Euler es de orden $p = 1$.

Ejemplo.

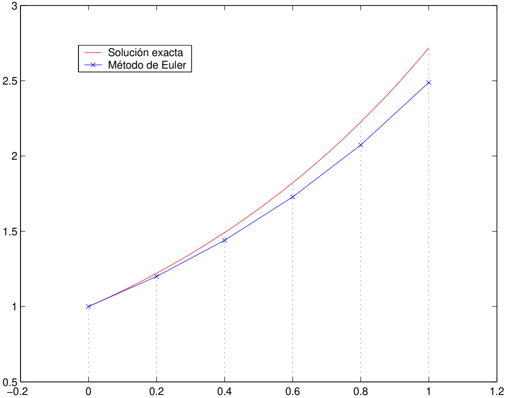
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución exacta:

$$y(x) = \mathrm{e}^x.$$

Método de Euler.

$$[a,b] = [0,1]$$
$$N = 5$$
$$h = \frac{b-a}{N} = 0.2$$



Métodos RK_{22}

Como $p = q = 2$, estos métodos resultan ser de orden dos $(p = 2)$ y rango dos $(q = 2)$. Por lo tanto el error global es de orden h^2. Los nodos se obtienen con $j = 0, 1, 2$ y son

$$x_{i0} = x_i, \qquad x_{i1} = x_i + \theta_1 h \qquad \text{y} \qquad x_{i2} = x_{i+1}.$$

donde el parámetro θ_1 debe escogerse de manera tal que $0 < \theta_1 \leq 1$.

Escogiendo los coeficientes $A_{10} = \theta_1$, $A_{20} = 1 - \dfrac{1}{2\theta_1}$ y $A_{21} = \dfrac{1}{2\theta_1}$, se obtiene la siguiente familia de algoritmos RK_{22}:

$$\begin{aligned}
x_{i1} &:= x_i + \theta_1 h, \\
y_{i1} &:= y_i + h\theta_1 f(x_i, y_i), \\
y_{i+1} &:= y_{i2} := y_i + h\left(1 - \frac{1}{2\theta_1}\right) f(x_i, y_i) + h\left(\frac{1}{2\theta_1}\right) f(x_{i1}, y_{i1}).
\end{aligned}$$

Casos particulares de métodos RK_{22}

1.- Método de Euler mejorado (tangente mejorada)

Corresponde a la elección de $\theta_1 = \frac{1}{2}$, con lo cual x_{i1} resulta ser el punto medio del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. De las ecuaciones anteriores se obtiene $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1})$ y el algoritmo queda así:

Algoritmo (Euler mejorado)

for $i = 0, \ldots, N-1$

$\quad x_i = a + ih$

$\quad x_{i1} = x_i + \frac{h}{2}$

$\quad y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$

$\quad y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1})$

end.

2.- Método de Euler-Cauchy

Corresponde al caso en que $\theta_1 = 1$, con lo cual $x_{i1} = x_{i+1}$ y el algoritmo queda así:

Algoritmo (Euler-Cauchy)

for $i = 0, \ldots, N-1$

$\quad x_i = a + ih$

$\quad x_{i1} = x_i + h$

$\quad y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

$\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})]$

end.

Método RK_{44} clásico (o RK4)

La métodos RK_{44} son una familia de métodos de orden $p = 4$ y rango $q = 4$, en donde $\theta_0 = 0$, $\theta_3 = 1$, y θ_1 y θ_2 son parámetros a escoger. Si se elige

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2},$$

el método se conoce como RK_{44} clásico, o simplemente RK4. Es sumamente utilizado debido a su alta precisión.

El algoritmo RK4 puede escribirse convenientemente del siguiente modo:

Algoritmo (RK4)

Para $i = 0, \ldots, N-1$

$x_i = a + ih$

$k_1 = hf(x_i, y_i)$

$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$

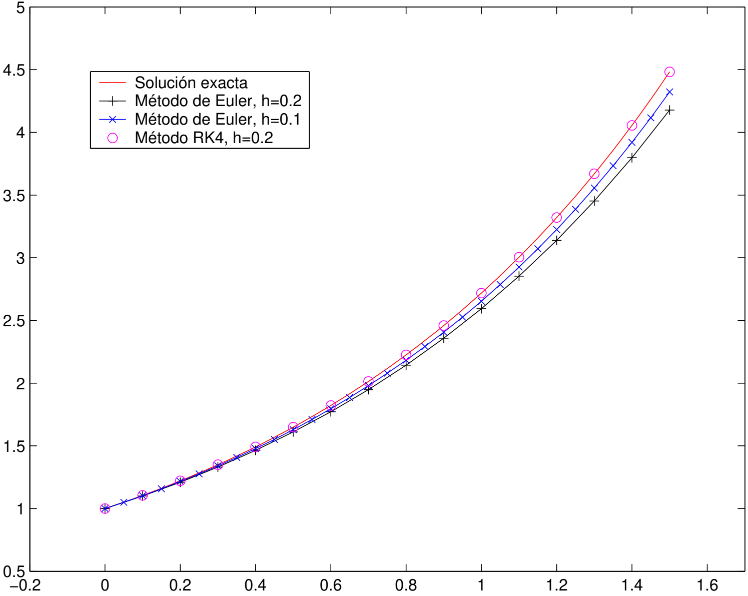
$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$

fin i.

Ejemplo. $\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Solución exacta: $y(x) = \mathrm{e}^x$.

		Euler: $h = 0.1$		Euler: $h = 0.025$		RK_{44}: $h = 0.1$	
x	Sol. Ex.	Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error
0.0	1.000000	1.000000	0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0
0.1	1.105170	1.100000	5.1×10^{-3}	1.103812	1.3×10^{-3}	1.105170	8.4×10^{-8}
0.2	1.221402	1.210000	1.1×10^{-2}	1.218402	2.9×10^{-3}	1.221402	1.8×10^{-7}
0.3	1.349858	1.331000	1.8×10^{-2}	1.344888	4.9×10^{-3}	1.349858	3.1×10^{-7}
0.4	1.491824	1.464100	2.7×10^{-2}	1.484505	7.3×10^{-3}	1.491824	4.5×10^{-7}
0.5	1.648721	1.610510	3.8×10^{-2}	1.638616	1.0×10^{-2}	1.648720	6.3×10^{-7}
0.6	1.822118	1.771561	5.0×10^{-2}	1.808725	1.3×10^{-2}	1.822117	8.3×10^{-7}
0.7	2.013752	1.948717	6.5×10^{-2}	1.996495	1.7×10^{-2}	2.013751	1.0×10^{-6}
0.8	2.225540	2.143588	8.1×10^{-2}	2.203756	2.1×10^{-2}	2.225539	1.3×10^{-6}
0.9	2.459603	2.357947	0.1	2.432535	2.7×10^{-2}	2.459601	1.6×10^{-6}
1.0	2.718281	2.593742	0.12	2.685063	3.3×10^{-2}	2.718279	2.0×10^{-6}
1.1	3.004166	2.853116	0.15	2.963808	4.0×10^{-2}	3.004163	2.5×10^{-6}
1.2	3.320116	3.138428	0.18	3.271489	4.8×10^{-2}	3.320113	3.0×10^{-6}
1.3	3.669296	3.452271	0.21	3.611112	5.8×10^{-2}	3.669293	3.6×10^{-6}
1.4	4.055199	3.797498	0.25	3.985992	6.9×10^{-2}	4.055195	4.3×10^{-6}
1.5	4.481689	4.177248	0.30	4.399789	8.1×10^{-2}	4.481683	5.1×10^{-6}


Solución exacta
Método de Euler, h=0.2
Método de Euler, h=0.1
Método RK4, h=0.2
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6