# 5 EDOs no-homogéneas de Alto Orden

*Consideremos la EDO no-homogénea*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0 y = g(x), \tag{10}$$

*con $a_i(x)$ una función continua, para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

*De teoremas anteriores sabemos que:*

$$y(x) = \underbrace{y_c(x)}_{\texttt{solución homogénea}} + \underbrace{y_p(x)}_{\texttt{solución particular}},$$

*y que la solución homogénea la hallamos resolviendo la ED lineal homogénea siguiendo lo descrito en la sección anterior. Entonces, la siguiente pregunta es: cómo se halla la solución particular?*

*Para esto presentaremos dos métodos clásicos: variación de parámetros y aniquiladores.*

## 5.1 Variación de parámetros

*Este método no se reduce al caso de coeficientes constantes, y para aplicarlo se debe conocer la solución homogénea*

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

*de la EDO*

$$T[y](x) = 0, \tag{11}$$

*con*

$$T[y](x) := D^n y(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1}y(x) + \ldots + a_0(x)D^0 y(x).$$

*Suponemos entonces que tenemos una base para* $\texttt{Ker}(T)$*:*

$$\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

*El método de variación de parámetros consiste en buscar una solución a (10), i.e.*

$$T[y](x) = g(x),$$

*proponiendo la forma*

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x),$$

*donde ahora los coeficientes son funciones que debemos determinar.*

> *En el método de variación de parámetros consideramos la solución general homogénea e intercambiamos las constantes por funciones.*

*Para hallar estas funciones usamos la EDO, lo que significa que debemos calcular derivadas de producto de funciones. Las notaciones para derivadas de orden $n$ de un producto se vuelven menos amigables, por lo que a continuación describimos el método para orden 2:*

$$T := D^2 + a_1(x)D + a_0(x)D^0,$$

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

*Note que*

$$D(c_i \cdot y_i)(x) = c_i(x)Dy_i(x) + y_i(x)Dc_i(x)$$
$$D^2(c_i \cdot y_i)(x) = c_i(x)D^2y_i(x) + 2Dc_i(x)Dy_i(x) + y_i(x)D^2c_i(x).$$

*Luego, aplicando el operador $T$ a la función $y_p$ y agrupando obtenemos:*

$$\begin{aligned} T[y_p](x) &= \sum_{i=1}^{2} \underbrace{c_i(x)D^2y_i(x) + 2Dc_i(x)Dy_i(x) + y_i(x)D^2c_i(x)}_{D^2(c_iy_i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \left( a_1(x) \left( \underbrace{c_i(x)Dy_i(x) + y_i(x)Dc_i(x)}_{D(c_iy_i)} \right) + a_0(x)c_i(x)y_i(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} c_i(x) \left( \underbrace{D^2y_i(x) + a_1(x)Dy_i(x) + a_0(x)y_i(x)}_{T[y_i](x)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \big(2Dc_i(x)Dy_i(x) + y_i(x)D^2c_i(x) + a_1(x)y_i(x)Dc_i(x)\big) \end{aligned}$$

*Entonces, para que $y$ sea solución debe pasar que*

$$\sum_{i=1}^{2} \left(Dc_i(x)Dy_i(x) + D\left(y_i(x)Dc_i(x)\right) + a_1(x)y_i(x)Dc_i(x)\right) = g(x).$$

*Lo anterior sucede si por ejemplo suponemos que $c_1, c_2$ satisfacen:*

$$\begin{cases} Dc_1(x)Dy_1(x) + Dc_2(x)Dy_2(x) & = g(x) \\ y_1(x)Dc_1(x) + y_2(x)Dc_2(x) & = 0 \end{cases}$$

*Lo anterior es un sistema de ecuaciones con incógnitas $Dc_1$, $Dc_2$ que se puede escribir como*

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ Dy_1(x) & Dy_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dc_1(x) \\ Dc_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

*Observe que el determinante de la matriz asociada a este sistema coincide con el Wronskiano $W[y_1, y_2](x)$. Luego, como $y_1, y_2$ son soluciones de la EDO homogénea y son l.i., sabemos por el Wronskiano de soluciones que $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in I$. De donde, la solución al sistema de ecuaciones existe y es única.*

**Puede resolver el sistema, por ejemplo, utilizando la regla de Cramer.**

**Ejemplo 5.1.** *Consideremos la EDO:*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}. \tag{12}$$

*Dado que la ecuación homogénea asociada es lineal y de coeficientes constantes, sabemos que las soluciones tienen forma exponencial $y_1(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda$ raíz del polinomio característico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

*Luego, como $\lambda = 1$ tiene multiplicidad 2, la solución de la EDO homogénea se puede escribir como*

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x.$$

*Mediante el método de variación de parámetros, proponemos la solución particular*

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)\,xe^x,$$

*donde $c_1$ y $c_2$ satisfacen el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{ll} e^x\, c_1'(x) + xe^x\, c_2'(x) & = 0 \\ (e^x)'\, c_1'(x) + (xe^x)'\, c_2'(x) & = \frac{e^x}{1+x^2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} c_1'(x) + x\, c_2'(x) & = 0 \\ c_1'(x) + (x+1)\, c_2'(x) & = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right.$$

*Resolviendo el sistema nos queda*

$$\left\{\begin{array}{ll} c_1'(x) & = -x\frac{1}{1+x^2} \\ c_2'(x) & = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right.$$

*Integrando y sustituyendo en $y_p$ obtenemos*

$$y_p(x) = -\frac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x\arctan(x).$$

*Finalmente, concluimos que la solución general de la EDO no homogénea se escribe como*

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{e^x}{2}\ln(1+x^2) + xe^x\arctan(x).$$

**Ejemplo 5.2.** *Consideremos la EDO no-hmogénea con coeficientes continuos*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{1}{x},$$

*que en forma normal es equivalente a*

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x^3}.$$

*Desde el Ejemplo 3.2 vimos que la EDO homogénea asociada*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

*tiene como solución*

$$y_h(x) = C_1x^2 + C_2x.$$

*Luego, para resolver la EDO no-homogénea en $I \subset \mathbb{R}_+$ o $I \subset \mathbb{R}_-$, consideramos el método de variación de parámetros, de donde proponemos como solución particular la función*

$$y_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)x,$$

*donde $c_1$ y $c_2$ satisfacen el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2\, c_1'(x) + x\, c_2'(x) & = 0 \\ 2x\, c_1'(x) + c_2'(x) & = \frac{1}{x^3} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} c_1'(x) & = 1/x^4 \\ c_2'(x) & = -1/x^3 \end{array}\right.$$

*De lo anterior concluimos que $c_1(x) = \frac{-1}{3x^3}$ y $c_2(x) = \frac{1}{2x^2}$, lo que nos da*

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x}$$

*la solución general de la EDO no-homogénea:*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{6x}.$$

**Observación.** *Note que esto se puede extender a EDOs de orden mayor a 2.*

## 5.2 Método de los Aniquiladores

**Definición**

*Un operador diferencial $L$* **con coeficientes constantes** *se dirá aniquilador (o anulador) de una función $g$ si $L(g) = 0$.*

**Ejemplo 5.3.** *Note que el operador $D^2$ aniquila a la función $g(x) = b + ax$, con $a, b \in \mathbb{R}$. De igual forma, el operador $(D - \alpha)$ aniquila a la función $f(x) = e^{\alpha x}$.*

*El operador diferencial $\mathbf{D^n}$ aniquila a la funciones $1, x, \ldots, x^{n-1}$ en particular, $D^n$ aniquila a la combinación lineal de estas:*

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

*El operador diferencial $(\mathbf{D} - \alpha)^{\mathbf{n}}$ aniquila a la funciones $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}$ en particular, $(\mathbf{D} - \alpha)^{\mathbf{n}}$ aniquila a la combinación lineal de estas:*

$$c_0 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x} + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} e^{\alpha x}$$

*El operador diferencial $\left[\mathbf{D^2} - \mathbf{2}\alpha\mathbf{D} + (\alpha^{\mathbf{2}} + \beta^{\mathbf{2}})\right]^{\mathbf{n}}$ aniquila a la funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y a las funciones $e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ en particular, $\left[\mathbf{D^2} - \mathbf{2}\alpha\mathbf{D} + (\alpha^{\mathbf{2}} + \beta^{\mathbf{2}})\right]^{\mathbf{n}}$ aniquila a la combinación lineal de estas:*

$$a_0 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + b_0 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + b_{n-1}x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

**Ejemplo 5.4.** *Determine la solución general de la siguiente EDO no homogénea:*

$$y'' - 4y' + 4y = (3 + x)e^{2x}.$$

*La EDO escrita en notación de diferenciales queda:*

$$(D^2 - 4D + 4)[y](x) = (3 + x)e^{2x} \quad \longrightarrow (D - 2)^2[y](x) = (3 + x)e^{2x}.$$

*Note que el polinomio característico de la EDO homogénea asociada es $(\lambda - 2)^4 = 0$. Identificamos entonces que la solución de la homogénea es $y_h(x) = (c_0 + c_1 x)e^{2x}$.*

*Por otro lado, por la forma de la función $g(x) = (3 + x)e^{2x}$, sabemos que su aniquilador $(D - 2)^2$. Aplicamos entonces el aniquilador a la EDO no homogénea obteniendo:*

$$(D - 2)^4[y](x) = 0.$$

*Entonces, el polinomio característico de esta EDO es $(\lambda - 2)^4 = 0$. Por lo tanto, la solución debe tener la forma:*

$$y(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)e^{2x}.$$

*Sin embargo, considerando que la solución homogénea corresponde a una parte de $y$, y que queremos funciones linealmente independientes, tenemos que la solución particular queda como*

$$y_p(x) = (c_2 x^2 + c_3 x^3)e^{2x}.$$

*Debemos determinar los valores de las constantes $c_2$ y $c_3$ de la solución particular, para ello derivamos la función $y_p$ y sustituimos en la EDO original:*

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \left[2c_2x + (3c_3 + 2c_2)x^2 + 2c_3x^3\right] e^{2x} \\ y_p''(x) &= \left[2c_2 + (12c_3 + 4c_2)x^2 + (6c_3 + 8c_2)x + 4c_3x^3\right] e^{2x} \end{aligned}$$

*Sustituyendo en la EDO e igualando los coeficientes, tenemos que*

$$(3 + x)e^{2x} = y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (2c_2 + 6c_3x)e^{2x}$$

*Así,*

$$y_p(x) = (\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^{2x},$$

*y la solución general es:*

$$y(x) = c_0e^{2x} + c_1xe^{2x} + x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}x\right) e^{2x}.$$

**Observación.** *Si dos operadores diferenciales $L_1$ y $L_2$ aniquilan a las funciones $g_1$ y $g_2$, respectivamente. Entonces, el operador diferencial $L_1L_2$ aniquila a $c_1g_1 + c_2g_2$.*

*Esto se puede demostrar usando la linealidad de los operadores diferenciales y el hecho que $L_1L_2 = L_2L_1$:*

$$\begin{aligned} L_1L_2(c_1g_1 + c_2g_2) &= c_1L_1L_2(g_1) + c_2L_1L_2(g_2) \\ &= c_1L_2 \underbrace{L_1(g_1)}_{=0} + c_2L_1 \underbrace{L_2(g_2)}_{=0} \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.5.** *Determine la solución general de la siguiente EDO no homogénea:*

$$2y'' + y' - y = 3 + 2x + \sin(3x).$$

*La EDO escrita en notación de diferenciales queda:*

$$(2D^2 + D - 1)[y](x) = 3 + 2x + \sin(3x) \quad \longrightarrow (2D - 1)(D + 1)[y](x) = 3 + 2x + \sin(3x).$$

*La solución de la ED homogénea asociada es:*

$$y_h(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x}$$

*Luego, por la forma de la función*

$$g(x) = \underbrace{3 + 2x}_{g_1(x)} + \underbrace{\sin(3x)}_{g_2(x)},$$

*sabemos que el aniquilador de $g_1(x)$ es $D^2$, mientras que el aniquilador de $g_2(x)$ es $(D^2 + 9)$. Luego, por la observación anterior, tenemos que el aniquilador de $g(x)$ es: $D^2(D^2 + 9)$. Aplicamos entonces el aniquilador a la EDO no homogénea obteniendo:*

$$D^2(D^2 + 9)(2D - 1)(D + 1)[y](x) = 0.$$

*Entonces, el polinomio característico de esta EDO es $\lambda^2(\lambda^2 + 9)(2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Por lo tanto, la solución debe tener la forma:*

$$y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x} + c_3 + c_4x + c_5 \cos(3x) + c_6 \sin(3x).$$

*Sin embargo, considerando que la solución homogénea corresponde a la primera parte de* $y$*, y que queremos funciones linealmente independientes, tenemos que la solución particular queda como*

$$y_p(x) = c_3 + c_4 x + c_5 \cos(3x) + c_6 \sin(3x).$$

*Debemos determinar los valores de las constantes* $c_3, c_4, c_5$ *y* $c_6$ *de la solución particular, para ello derivamos la función* $y_p$ *y sustituimos en la EDO original:*

$$y_p'(x) = c_4 - 3c_5 \sin(3x) + 3c_6 \cos(3x)$$
$$y_p''(x) = -9c_5 \cos(3x) - 9c_6 \sin(3x)$$

*Sustituyendo en la EDO nos queda*

$$3 + 2x + \sin(3x) = (c_4 - c_3) - c_4 x - (19c_6 + 3c_5)\sin(3x) + (3c_6 - 19c_5)\cos(3x)$$

*Es decir,* $c_3 = -5, c_4 = -2, c_5 = -\frac{3}{9+19^2}$ *y* $c_6 = \frac{19}{9+19^2}$.