

Evaluación 3

- (20 puntos) Sea V un e.v. complejo de dimensión n y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal cuyos valores propios son todos nulos.
 - (10 puntos) Demuestre que T es nilpotente.
 - (10 puntos) Si $V = \mathbb{R}^5$ y T está definida por $T(a, b, c, d, e) = (7b, 0, 0, 0, 2b + 4c)$; encuentre la base B de \mathbb{R}^5 que hace que $[T]_B$ esté en su forma canónica racional.
- (20 puntos) Sea $F : V \rightarrow V$ un operador lineal en un espacio V de dimensión finita n , y sea

$$m(x) = \prod_{i=1}^k (p_i(x))^{r_i}$$

su polinomio minimal descrito como producto de factores irreducibles.

Demuestre que si v es un vector propio de F , entonces existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $v \in \ker((p_i(T))^{r_i})$.

- (20 puntos) Considere el e.v. $V = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y considere el siguiente operador lineal:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \\ A &\longrightarrow L(A) = A - \operatorname{tr}(A)I_n, \end{aligned}$$

donde $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ es la traza de A , e I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

- (7 puntos) Demuestre que el polinomio minimal de L es $m(x) = x^2 - (n+2)x + n+1$.
- (3 puntos) Demuestre que L es diagonalizable.
- (5 puntos) Si $n = 3$, encuentre la base de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ que diagonaliza a L .
- (5 puntos) Si se considera el p.i. usual de matrices:

$$\langle A ; B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A).$$

Calcule el operador adjunto de L .