UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

FPV/fpv 02.12.24 (19:15) **PAUTA E2(b) (L.M.)** **MAT 225212** **Tiempo 100 minutos**

P1 (8+8+8 pts.)

(a) La curva $\gamma \in \Big([0, 2\pi], \mathbb{R}\Big)$ es definida para dos números reales positivos a, b por $\gamma(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Evalué de dos maneras la integral de contorno $\oint_\gamma \frac{dz}{z}$ para inferir el resultado de

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

`Indicación.` El integrando trigonométrico es un función con simetría par y π periódica.

(b) Evaluar $\displaystyle\int_\gamma (z^2 - 2z + 2)dz$ donde γ es una trayectoria simple y regular

(b1) no es cerrada y conecta $z = i$ con $z = 1$,

(b2) es cerrada y $z = i$ y $z = 1$ son puntos de la curva.

(c) Evaluar $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(2z)}{z\mathrm{Ln}(1+z)}dz$ `Indicación:` $\frac{\sin(2z)}{2z} = 1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{3!} + \cdots \frac{(2z)^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$

Solución Propuesta

(a) Lo desarrollé en Clase o en Práctica.

(b1) La función integrando es Entera y en consecuencia existe una primitiva. Gracias al teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_\gamma (z^2 - 2z + 2)dz = \left[\frac{1}{3}z^3 - z^2 + 2z\right]_{z=i}^{z=1} = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}i$$

(b2) Aplicando el teorema de Cauchy -Goursat la integral es nula.

(c) Gracias a la indicación $h(z) = 2\frac{\sin(2z)}{2z}$ es una función entera . Enseguida si $g(z) = \mathrm{Ln}(1+z^2)$ entonces

$$g(0) = \mathrm{Ln}(1) = \ln(1) = 0 \;\wedge\; g'(z) = \frac{1}{1+z}\Big|_{z=0} = 1$$

Luego

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(2z)}{z\mathrm{Ln}(1+z)}dz &= (2\pi i)\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin(2z)}{\mathrm{Ln}(1+z)}\right) \\
&= (2\pi i)\lim_{z\to 0}\left(\frac{2\cos(2z)}{g'(z)}\right) \\
&= 4\pi i.
\end{aligned}$$

Ejercicio: La función *sinus cardinal* definida para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ por $\mathrm{sinc}(ax) = \frac{\sin(\mathbf{a}x)}{\mathbf{a}x}$ es analítica real, es decir su serie de Taylor converge para cualquier punto de la recta real y consecuencia $\mathrm{sinc}(az)$ definida para una constante compleja cualquiera es analítica compleja.

P2 (**8+4+4 pts.**)

(a) Sea f una función holomorfa en $D_*(z_0, r) := \{z \in C : \ 0 < |z - z_0| < r\}$ y que tiene un polo de orden $m \in \mathbb{N}$ precisamente en z_0. Establecer que el residuo de $h = \frac{f'}{f}$ en dicho polo es

$$\text{Res}_1(h, z_0) = -m$$

(b) Evaluar $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{\sin(\pi z) + \pi\cos(\pi z)(z-1)}{\sin(\pi z)(z-1)} dz$

(c) Ilustrar (a) para $f(z) = \frac{1}{\text{Ln}(z^2+1)}, \quad |z| < \frac{2}{3}$.

Solución Propuesta

(a) La Serie de Laurent sobre $D_*(z_0, r) := \{z \in C : \ 0 < |z - z_0| < r\}$ se puede escribir

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \in D_*(z_0, r)$$

donde g es holomorfa sobre $D(z_0, r)$ y $g(z_0) = a_m \neq 0$, pues, z_0 es un polo de orden m. Luego

$$f'(z) = \frac{g'(z)}{(z - z_0)^m} - m\frac{g(z)}{(z - z_0)^{m+1}} = \frac{g'(z)}{(z - z_0)^m} - m\frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Como g es continua y no nula en z_0, existe una vecindad de z_0 sobre la cual $f(z) \neq 0$:

$$(z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = (z - z_0)\frac{g'(z)}{g(z)} - m$$

y en consecuencia, pasando al límite, $\text{Res}_1(h, z_0) = -m$.

`Ejercicio`. Si la hipótesis es que en vez de polo de orden m, f tiene es un cero de orden n. Entonces

$$\text{Res}_1(h, z_0) = n.$$

(b) Se infiere directamente, si $s(z) = \sin(\pi z)$:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{\sin(\pi z) + \pi\cos(\pi z)(z-1)}{\sin(\pi z)(z-1)} dz &= \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{1}{z-1} dz + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{s'(z)}{s(z)} dz \\ &= (2\pi i) + (2\pi i)\left(\frac{s'(1)}{s'(1)}\right) = 4\pi i.\end{aligned}$$

Nota: Recordamos el residuo en un polo simple, como $s(1) = 0$ se tiene para $a(z)$ continua en $z = 1$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{a(z)}{s(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{a(z)}{\frac{s(z)-s(1)}{z-1}} = \frac{a(1)}{s'(1)}.$$

(c) Basta observar que f tiene un polo doble en $z = 0$ (m=2) y aplicar (a). En efecto, se prueba que $\text{L}(z) = \text{Ln}(1 + z^2)$ tiene un cero doble en $z = 0$:

$$L(0) = 0 \ \wedge \ L'(0) = 0 \ \wedge \ L''(0) = \left.\frac{2 - 2z^2}{(1 + z^2)^2}\right|_{z=0} = 2 \neq 0.$$

`Ejercicio`. Verificar que $\text{Dom}(L) = \left\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \neq 0 \quad \vee \quad |\text{Im}(z)| < 1\right\}$

P3 (**10+10 pts.**)

(a) Probar el siguiente Lema de Jordan:

`Si` f `tiene un` <u>`polo simple`</u> `en a` $\in \mathbb{C}$ `y sea` $\gamma_r \quad (r > 0)$

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \to C,\ t \longmapsto \gamma_r(t) = \mathbf{a} + re^{it}$$

Entonces

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)\mathrm{Res}_1(f, \mathbf{a})$$

Indicación: La Serie de Laurent de f en a es

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{z - a} + g(z), \quad |z - a| > 0$$

donde g es holomorfa en $\mathbf{a}$ y $b_{-1} = \mathrm{Res}_1(f, \mathbf{a})$.

(b) Evaluar

$$(VP) \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x(x^2 + 1)} dx$$

Solución Propuesta

(a) Sin comentarios.

(b) La integral impropia es de primera especie, pues, $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x(x^2 + 1)} = 0$. Además ella es continua y con simetría impar, luego $(VP)\, I = 0$ como se verifica aplicando el Método de Residuos de Cauchy-Jordan.

`Ejercicio.` $\boxed{\frac{1-\cos(x)}{x(x^2+1)} = \frac{4\sin(x/2)\mathrm{sinc}(x/2)}{1+x^2}}$ admite derivadas continuas de todos los ordenes en toda la recta real (casi pregunta de Cálculo I).