Lógica proposicional

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

14 de abril de 2020

Conceptos

Los valores de verdad VERDADERO (V) y FALSO (F) son los conceptos primitivos de la lógica.

Una proposición es una sentencia declarativa que **posee un único valor de verdad**, pudiendo ser **verdadera** (V) o **falsa** (F).
Usualmente se denotan por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Son proposiciones:

- Hoy es martes.
- Está lloviendo.
- Si el sistema solar está formado sólo por estrellas, entonces La Tierra es una estrella.

No son proposiciones:

- ¿Qué hora es?
- Recoge tus cosas.
- $5x > 3x$.

Ejercicio 1

Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son **proposiciones**. De cada proposición diga si es simple o compuesta y determine su valor de verdad justificando adecuadamente.

1. $\sqrt{25-9} = \sqrt{25} - \sqrt{9}$,
2. $(y+5)^2 = y^2 + 5^2$,
3. $\dfrac{2x+y}{x} = 2 + \dfrac{y}{x}$,
4. 3 es un número par,
5. ¿A qué hora sales de clases?,
6. si 3 es un número par, entonces 9 también lo es,
7. 2 es un número impar si y sólo si 4 también lo es.

Conectivos lógicos

Un conectivo lógico es un operador que nos permite obtener nuevas proposiciones a partir de otras dadas.

Denotemos por p a la proposición hoy es martes y por q, a la proposición los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de IMU.

Los conectivos básicos son cinco: negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional.

- **negación: no** en castellano, se representa por $\sim$.

  La proposición hoy no es martes es la negación de p y se representa mediante $\sim p$.

- **conjunción: y** en castellano, se representa por $\wedge$.

  La proposición hoy no es martes y los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de IMU es la conjunción de $\sim p$ y q y se representa mediante $\sim p \wedge q$.

- **disyunción: o** en castellano, se representa por $\vee$.

  La proposición hoy es martes o los estudiantes de la Facultad de Ingeniería no tienen clase de IMU es la disyunción de p y $\sim q$ y se representa mediante $p \vee \sim q$.

Hemos denotado por p a la proposición hoy es martes y por q, a la proposición los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de IMU.

- **condicional: si** ..., **entonces** ... en español, se representa por $\rightarrow$.

  La proposición si hoy es martes, entonces los estudiantes de la Facultad de Ingeniería tienen clase de IMU es el condicional entre p y q y se representa mediante $p \rightarrow q$.
  En $p \rightarrow q$ la proposición p se llama antecedente y q, consecuente. La proposición $p \rightarrow q$ también se lee p **es condición suficiente para** q, o bien, q **es condición necesaria para** p.

- **bicondicional: si y sólo si** en español, se representa por $\leftrightarrow$.

  La proposición hoy no es martes si y sólo si los estudiantes de la Facultad de Ingeniería no tienen clase de IMU es el bicondicional entre $\sim p$ y $\sim q$ y se representa mediante $\sim p \leftrightarrow \sim q$.
  La proposición $p \leftrightarrow q$ también se lee p **es condición necesaria y suficiente para** q.

Tipos de proposiciones. Tablas de verdad.

Las proposiciones se clasifican en simples y compuestas. Las proposiciones simples no incluyen conectivos lógicos y las compuestas, sí los incluyen.

El valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman.
En una tabla de verdad se muestran los posibles valores de verdad de una proposición compuesta teniendo en cuenta todas las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que la forman.

Tablas de verdad de las proposiciones compuestas $\sim p$, $p \vee q$ y $p \wedge q$.

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tablas de verdad de las proposiciones compuestas $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicio 2

Con la información entregada en cada caso determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

1. $p \wedge (p \rightarrow q)$, sabiendo que $p \rightarrow q$ tiene valor de verdad falso,
2. $\sim p \rightarrow (p \vee q)$, sabiendo que q tiene valor de verdad verdadero,
3. $[p \vee [(p \rightarrow r) \leftrightarrow \sim r]] \rightarrow (r \wedge p)$, sabiendo que r tiene valor de verdad falso,
4. $(p \rightarrow r) \wedge (\sim p \vee q)$, sabiendo que p tiene valor de verdad falso,
5. $(\sim p \wedge r) \rightarrow \sim (\sim q \vee p)$, sabiendo que $(p \wedge q) \rightarrow r$ tiene valor de verdad falso.

Tautologías, contradicciones y contingencias.

Una proposición compuesta se dice una:

- Tautología (o teorema lógico) si ella es siempre V cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- Contradicción si ella es siempre F cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- Contingencia si ella no es ni tautología ni contradicción.

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que p implica lógicamente q si la proposición $p \to q$ es una tautología.
En tal caso se escribe $p \Rightarrow q$.

Por ejemplo, en la tabla de verdad de $(p \wedge q) \to p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

se observa que $(p \wedge q) \to p$ es V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, por tanto, $(p \wedge q) \to p$ es tautología, es decir, la proposición $p \wedge q$ implica lógicamente a p.

Equivalencias lógicas.

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que ellas son lógicamente equivalentes si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología.
En tal caso se escribe $p \Leftrightarrow q$.

Por ejemplo, en la tabla de verdad de $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

se observa que $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, por tanto, $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es tautología, es decir, la proposición $(\sim p \vee q)$ es lógicamente equivalente a $p \rightarrow q$.

- $\sim(\sim p) \quad \Leftrightarrow \quad p \quad$ (doble negación),
- $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p \quad$ (conmutatividad de $\wedge$),
- $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p \quad$ (conmutatividad de $\vee$),
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \leftrightarrow p \quad$ (conmutatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r \quad$ (asociatividad de $\vee$),
- $p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r \quad$ (asociatividad de $\wedge$),
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \quad$ (asociatividad de $\leftrightarrow$),
- $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad$ (distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$),
- $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad$ (distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$),
- $\sim(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee \sim q \quad$ (Ley de De Morgan para $\wedge$),
- $\sim(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \wedge \sim q \quad$ (Ley de De Morgan para $\vee$),
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$,
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Condicionales derivadas

Dada una proposición $p \to q$ se obtienen las condicionales derivadas:

- recíproca de $p \to q$ es $q \to p$,
- contrarecíproca de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$,
- contraria de $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$.

Es fácil probar que

$$(p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim q \to \sim p).$$

Ejercicio 3

Averiguar quiénes están estudiando Álgebra III, si se sabe que:

- Si Luis está estudiado Álgebra III, Carolina también.
- Pueden estar estudiando Álgebra III, Felipe o Carolina.
- O Luis o Carolina estudian Álgebra III, pero no ambos.
- Carolina estudia Álgebra III si y sólo si estudia Felipe.

Se llama argumento lógico (o inferencia lógica) a toda condicional de la forma:

$$\Big(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k\Big) \quad \rightarrow \quad q \tag{1}$$

donde las proposiciones (compuestas) p_1, p_2, ... , p_k son llamadas **PREMISAS o HIPÓTESIS**, y originan como consecuencia otra proposición denotada por q llamada **CONCLUSIÓN**.
Un argumento lógico puede ser una tautología, una contingencia, o una contradicción. Si la condicional (1) es una tautología (i.e. implicación lógica), entonces se dice que estamos frente a un ARGUMENTO VÁLIDO o INFERENCIA VÁLIDA:

$$\Big(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k\Big) \quad \Rightarrow \quad q \tag{2}$$

En caso la condicional (1) no sea tautología, se dirá que es una FALACIA.

Teorema

Si el argumento (1) es válido y las premisas p_1, p_2, ... , p_k son verdaderas, entonces la CONCLUSIÓN q es verdadera.

Ejemplo 1

El argumento lógico

$$
\begin{array}{l}
p \wedge q \\
q \rightarrow \sim r \\
r \vee t \\
\hline
t
\end{array}
$$

es válido.

Ejemplo 2

El argumento lógico

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

no es válido.

Premisa: "Si estudio por lo menos 4 horas por día, pasaré el curso."
Premisa: "Aprobé el curso."
Conclusión: "Estudié por los menos 4 horas por día."

Ejemplo 2

El argumento lógico

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow q \\
q \\
\hline
p
\end{array}
$$

no es válido.

Premisa: "Si estudio por lo menos 4 horas por día, pasaré el curso."
Premisa: "Aprobé el curso."
Conclusión: "Estudié por los menos 4 horas por día."

Ejercicio 4

La venta de autos se incrementa sólo si la situación económica es buena o el precio de la bencina no sube. La bencina aumentó de precio y no se incrementó la venta de autos. Por lo tanto, la situación económica no es buena.

Ejercicio 5

Si disponemos del auto y el pronóstico es bueno, el fin de semana iremos a la playa o a la montaña. No es cierto que si el pronóstico es bueno iremos a la playa el fin de semana. Por lo tanto, si no vamos a la montaña es porque no disponemos del auto.

Ejercicio 6 (aplicación de la lógica para hacer demostraciones)

Demostrar que: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$: Si m^2 es par, entonces m es par.

Ejercicio 7 (otra aplicación de la lógica para hacer demostraciones)

Demostrar que: Si $z = \frac{m}{n}$, con m y n enteros positivos primos entre sí (no tienen factores comunes, excepto 1), entonces $z^2 \neq 2$.

Función proposicional

Se llama función proposicional (o enunciado abierto) a una expresión que contiene una o más variables y que se convierte en una proposición lógica cuando se le asignan valores específicos a dichas variables.
Las funciones proposicionales las denotaremos con letras minúsculas seguidas de los nombres de las variables de las cuales dependen separados por comas y encerrados entre paréntesis.
Por ejemplo, $3x > 5x$ es una función proposicional que depende sólo de x y puede denotarse por $p(x)$.
$x^2 + y^2 = 1$ es una función proposicional que depende de x y de y y puede denotarse por $q(x, y)$.

El conjunto de validez de una función proposicional es el conjunto de valores (o n-uplas de valores) de las variables para los cuales dicha función se convierte en una proposición verdadera. El conjunto de validez de la función proposicional $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lo denotaremos $\mathcal{V}_p$.

Si $p(x)$ es la función proposicional $3x > 5x$, $\mathcal{V}_p =]-\infty, 0[$.

Para indicar que una función proposicional es **verdadera para cualquier elemento de un determinado conjunto** U se usa el símbolo $\forall$, el cual se llama cuantificador universal.

$\boldsymbol{\forall\, x \in U \;:\; p(x)}$ se lee **para todo elemento** x **de** U **se cumple** $p(x)$.

Por ejemplo, si $p(x)$ es la función proposicional $3x > 5x$ las proposiciones

$$\forall\, x \in]-1,\, 0[\,:\; p(x) \qquad \text{y} \qquad \forall\, x \in]-3,\, -2[\,:\; p(x)$$

son V.

Las proposiciones

$$\forall\, x \in]-1,\, 0] \;:\; p(x) \qquad \text{y} \qquad \forall\, x \in]1,\, 2[\,:\; p(x)$$

son F.

Para indicar que una función proposicional es **verdadera para algunos elementos de un determinado conjunto** U se usa el símbolo $\exists$, el cual se llama cuantificador existencial.

$\boldsymbol{\exists\, x \in U \ : \ p(x)}$ se lee **existe al menos un elemento** x **de** U **para el cual se cumple** $p(x)$.
Por ejemplo, si $p(x)$ es la función proposicional $3x > 5x$ las proposiciones

$$\exists\, x \in]-1,\, 0[\,:\ p(x) \qquad \text{y} \qquad \exists\, x \in]-1, 0] \ :\ p(x)$$

son verdaderas.

Las proposiciones

$$\exists\, x \in]0, 1] \ :\ p(x) \qquad \text{y} \qquad \exists\, x \in\ [0,\, +\infty[\,:\ p(x)$$

son falsas.

La existencia de un único elemento x en un conjunto U que satisface una cierta función proposicional $p(x)$ puede expresarse con ayuda de los cuantificadores universal y existencial de la siguiente manera:

- existe al menos un elemento x en U que satisface $p(x)$ $(\exists\, x \in U \;:\; p(x))$ y
- para cualquier par de elementos x, y en U se cumple que si $p(x)$ y $p(y)$ son V, entonces y es igual a x $(\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \to y = x)$,

lo que puede escribirse simbólicamente como

$$(\exists\, x \in U \;:\; p(x)) \quad \wedge \quad (\forall\, x \in U \;:\; \forall\, y \in U \;:\; p(x) \wedge p(y) \to y = x)$$

Introduciendo el cuantificador $\exists\,!$ la proposición anterior se escribe, de manera equivalente, como

$$\exists\,!\, x \in U \;:\; p(x).$$

Es decir, $\boldsymbol{\exists\,!\, x \in U \;:\; p(x)}$ se lee **existe un único elemento** x **de** U **para el cual se cumple** $p(x)$.

Negación de proposiciones con cuantificador universal

La negación de

para todo x **en** U **se cumple** $p(x)$

es

existe al menos un elemento x **de** U **para el cual no se cumple** $p(x)$.

Es decir,

$$\sim (\forall\, x \in U \ : \ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in U \ : \sim p(x).$$

Negación de proposiciones con cuantificador existencial

La negación de

$$\textbf{existe } x \textbf{ en } U \textbf{ para el cual se cumple } p(x)$$

es

$$\textbf{para todo } x \textbf{ de } U \textbf{ no se cumple } p(x).$$

Es decir,

$$\sim (\exists\, x \in U \;:\; p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U \;: \sim p(x).$$

Teniendo en cuenta que $\exists\,!\, x \in U \ : \ p(x)$ es equivalente a

$$\mathbf{s}: \quad (\exists\, x \in U \ : \ p(x)) \quad \wedge \quad (\forall\, x \in U \ : \ \forall\, y \in U \ : \ p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)\,,$$

se cumple que

$$\sim (\exists\,!\, x \in U \ : \ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \sim (\mathbf{s})\,.$$

$\mathbf{s}$ es una conjunción y, según la ley de Morgan para $\wedge$,

$$\sim \mathbf{s} \ \Leftrightarrow [\sim (\exists\, x \in U \ : \ p(x))] \ \vee \ [\sim (\forall\, x \in U \ : \ \forall\, y \in U \ : \ p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)]\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sim \mathbf{s} \ &\Leftrightarrow [\forall\, x \in U \ : \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \ : \sim (\forall\, y \in U \ : \ p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)]\,, \\ &\Leftrightarrow [\forall\, x \in U \ : \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \ : \ \exists\, y \in U \ : \sim (p(x) \wedge p(y) \rightarrow y = x)]\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$,

$$\sim \mathbf{s} \ \Leftrightarrow [\forall\, x \in U \ : \sim p(x)] \vee [\exists\, x \in U \ : \ \exists\, y \in U \ : \ (p(x) \wedge p(y) \wedge y \neq x)]\,.$$

Ejercicio 8

Considere las siguientes proposiciones lógicas:

p_1 : Existe un único número entero x que satisface $x^2 = 1$.

p_2 : Todo número natural x satisface que él es divisible por 8 si y sólo si es divisible por 12.

p_3 : Existe un número real $x \in [-1, 1]$ tal que para todo $y \in [-1, 1]$ se cumple que $x^2 + y^2 \leq 1$.

1. Escríbalas simbólicamente y determine su valor de verdad, justificando su respuesta en cada caso.
2. Niegue las proposiciones, escribiendo las negaciones tanto en forma simbólica como en lenguaje usual.

1. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición. En caso sea falsa, exhiba un contraejemplo.

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\,(\exists\, m \in \mathbb{N})\,(x + 3 \ > \ m)$$

Luego, negar la proposición anterior.