UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION DE LA EVALUACION 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521.128)

Problema 1 (15 Ptos) Considere la EDO
Solucion

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -2x(t) + 5y(t), \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), \end{array}\right. .$$

La matriz asociada al sistema es: $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Dedet$(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, obtenemos:

$$\lambda_1 = 1 + i \ ; \ \lambda_2 = 1 - i.$$

Un autovalor perteneciente a

$$\mathrm{Ker}(A - (1+i)I)$$

es $v = (\frac{3-i}{2}, 1) = (3,2) + i(-1,0)$.

Así, un conjunto fundamental para el sistema homogéneo, es: $\{X_1(t), X_2(t)\}$, donde

$$X_1(t) = e^t cos(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - e^t sen(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$X_2(t) = e^t sen(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t cos(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^t cos(t) + e^t sen(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix} \text{ y } X_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^t sen(t) - e^t cos(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix},$$

Ahora, buscaremos una solución particular $X_p(t)$ de la forma $X_p(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t) X_i(t)$,

donde las derivadas de u_1 y u_2 satisfacen el sistema:

$$\begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$u_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t}\{-sen(t) - cos(t)\} + \frac{3}{2} cos(t) + \frac{1}{2} sen(t), \text{ y}$$

u$_2(t) = \frac{3}{2} sen(t) - \frac{1}{2} cos(t) - \frac{1}{2} e^{-t}\{sen(t) - cos(t)\}$.*Luego,*

$$X_p(t) = \{\frac{-1}{2}e^{-t}\{sen(t)+cos(t)\}+\frac{3}{2}cos(t)+\frac{1}{2}sen(t)\} \begin{pmatrix} 3e^t cos(t) + e^t sen(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix} +$$

$$+\{\frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\{sen(t) - cos(t)\} \begin{pmatrix} 3e^t sen(t) - e^t cos(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, es

$$X(t) = X_p(t) + c_1 \begin{pmatrix} 3e^t cos(t) + e^t sen(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^t sen(t) - e^t cos(t) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Problema 2 (20 Ptos) Resolver usando Transformada de Laplace.

$$\begin{cases} 3y'' + 5y' + 2y &= t\,e^{-t} + 5\,\delta(t-3), \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Solución:

Aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la EDO dada, y usando propiedad para la segunda derivada, obtenemos:

$$[3s^2 + 5s + 2]\mathcal{L}[y(t)](s) = 1 - \frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-t}] + 5e^{-3s}$$

de donde

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{(3s+2)(s+1)} + \frac{1}{(3s+2)(s+1)^3} + \frac{5e^{-3s}}{(3s+2)(s+1)}.$$

Aplicando transformada inversa, tendremos que $y(t)$ será igual a la suma de las transformadas inversas de cada sumando del lado derecho de la igualdad anterior.
De otra parte, usando fracciones parciales, resulta:

$$\frac{1}{(3s+2)(s+1)} = \frac{3}{(3s+2)} - \frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{(s+\frac{2}{3})} - \frac{1}{(s+1)}$$

de donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(3s+2)(s+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{2}{3})}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] = e^{\frac{-2}{3}t} - e^{-t}.$$

Además,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(3s+2)(s+1)^3}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{2}{3})}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right].$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(3s+2)(s+1)^3}\right](t) &= e^{\frac{-2}{3}t} * t^2e^{-t} \\
&= \int_0^t e^{-\frac{2}{3}(t-u)}u^2e^{-u}du \\
&= e^{-\frac{2}{3}t}\left[\int_0^t u^2e^{-\frac{u}{3}}du\right] \\
&= -3t^2e^{-t} + 6\left[-3ue^{-\frac{u}{3}}|_0^t - 3\int_0^t e^{-\frac{u}{3}du}\right] \\
&= -3t^2e^{-t} - 18te^{-\frac{t}{3}} + 9(e^{-\frac{t}{3}} - 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\frac{5e^{-3s}}{(3s+2)(s+1)} &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{(s+\frac{2}{3})}\right] - 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{(s+1)}\right] \\
&= 5u_3(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{2}{3})}\right]|_{t-3} - 5u_3(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]|_{t-3} \\
&= 5u_3(t)\cdot e^{-\frac{2}{3}(t-3)} - 5u_3(t)\cdot e^{-(t-3)}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t} - 3t^2e^{-t} - 18te^{-\frac{t}{3}} + \\
&+ 9(e^{-\frac{t}{3}} - 1) + 5u_3(t)\cdot e^{-\frac{2}{3}(t-3)} - 5u_3(t)\cdot e^{-(t-3)}.
\end{aligned}$$

Problema 3 (20 Ptos)

(a) Clasifique los puntos $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$ según corresponda como puntos ordinarios, singulares regulares o singulares irregulares. Justifique adecuadamente su respuesta.

$$\frac{x(x^2-1)}{x+3}\,y''(x) + \frac{(x-1)}{x^2-9}\,(\operatorname{sen} x)\,y'(x) + x\,(x+5)^3\,y(x) = 0.$$

(b) Encuentre una solución de la EDO:

$$x^2\,y''(x) + x(x-1)\,y'(x) + y(x) = 0.$$

Solución:

(a) Para $x = 0$ la EDO se puede escribir como

$$\frac{(x^2-1)}{x+3}\, y''(x) + \frac{(x-1)}{x^2-9}\,\frac{(\operatorname{sen} x)}{x}\, y'(x) + \ (x+5)^3\, y(x) = 0.$$

Puesto que $\frac{(\operatorname{sen} x)}{x}$ es analítico alrededor de 0, sigue que $x = 0$ es un punto regular para la EDO. Para $x = 1$ la EDO se puede escribir como

$$(x-1)^2\frac{x(x+1)}{x+3}\, y''(x)+(x-1)\frac{(x-1)}{x^2-9}\,(\operatorname{sen} x)\, y'(x)+(x-1)x\,(x+5)^3\, y(x) = 0.$$

de donde vemos que $x = 1$ es un punto singular irregular

Para $x = -3$ la EDO se puede escribir como

$$x(x^2-1)\, y''(x) + \frac{(x-1)}{(x-3)}\,(\operatorname{sen} x)\, y'(x) + x\,(x+5)^3\,(x+3)\, y(x) = 0.$$

de donde vemos que $x = -3$ es un punto regular.

(b) Se tiene que $x = 0$ es un punto singular regular para la EDO dada. Así proponemos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

de donde sigue que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \text{ y además } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r-1)(n+r)+1]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} = 0.$$

De otra parte,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+r)a_{n-1}x^{n+r};$$

y reeplazando en la igualdad anterior , obtenemos:

$$(r-1)^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r-1)(n+r)+1-(n+r)]a_n + [(n-1)+r]a_{n-1}\}x^{n+r} = 0.$$

De donde $r = 1$ y además

$[(n+r-1)(n+r)+1-(n+r)]a_n + [(n-1)+r]a_{n-1} = 0$ para todo n .

En la última igualdad, para $r = 1$ obtenemos la formula de recurrencia

$$a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1}.$$

Así, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -a_0 \\
a_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)a_0 \\
a_3 &= -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)a_0 \\
a_4 &= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)a_0 \\
\cdot &= \cdot \\
\cdot &= \cdot \\
\cdot &= \cdot \\
a_n &= \left(\frac{(-1)^n}{n!}\right)a_0
\end{aligned}
$$

Finalmente $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$ con a_0 arbitrario.