UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Listado 10

(Existencia y Unicidad, Variables Separables, Cambios de Variable)

Problemas a resolver en práctica

1. Analice la existencia y unicidad de los siguientes problemas de valores iniciales (PVIs):

   (a) $y'(x) = \sqrt{x - y(x)}$ con $y(1) = 1$.

   (b) $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x) - 1}, \quad y(x_0) = y_0$. ¿Qué condiciones deben cumplir x_0, y_0 para que el PVI tenga una única solución?

Desarrollo:

   (a) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, la cual es continua en $\{(x, y) : x \geq y\}$. Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1/2)(x - y)^{-(1/2)}$ la cual es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. Como $(1, 1) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ no podemos garantizar la existencia de una única solución para el PVI bajo estudio.

   (b) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x, y) = 4x - (y - 1)^{(1/4)}$, la cual es continua en $\mathbb{R}^2 - A$, donde $A = \{(x, y) : y < 1\}$. Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1/4)(y - 1)^{-(3/4)}$ la cual es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$. Aplicando el teorema de existencia y unicidad, el PVI $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x) - 1}, \quad y(x_0) = y_0$ posee una única solución, definida alrededor de x_0, cuando $y_0 > 1$.

2. Determine la solución de

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{(x - 1)^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Desarrollo:

Alternativa 1: Notamos que $y(x) = 1$ es una solución de

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x - 1)^2} \tag{1}$$

que satisface la condición inicial $y(2) = 1$. Luego, el teorema de existencia y unicidad nos asegura que la solución del problema de valores iniciales (PVI) bajo consideración es $y(x) = 1$ para todo $x > 1$.

Alternativa 2: Primero, encontraremos las soluciones constantes de

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}. \tag{2}$$

Poniendo $y(x) = y$ en

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

obtenemos que

$$y^2 - 1 = 0,$$

luego $y = \pm 1$, o sea $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ satisfacen (2). Ya que $y(2) = 1$, el teorema de existencia y unicidad nos asegura que la solución del problema de valores iniciales (PVI) bajo consideración es $y(x) = 1$ para todo $x > 1$.

3. Resuelva $y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}$ con $y(-1) = 0$.

Desarrollo:

Observamos que la funciones $f(x, y) = \dfrac{y^2 - 1}{(x-1)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2y}{(x-1)^2}$ son continuas en todo punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ con la condición que $x \neq 1$. Por lo tanto, el problema de valores iniciales

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}, \qquad y(x_0) = y_0$$

tiene una única solución, definida alrededor de x_0 cuando $x_0 \neq 1$.

Soluciones estacionarias (o constantes): $z(x) = \pm 1$ (note que ninguna de las dos soluciones estacionarias satisface la condición inicial $y(-1) = 0$)

Separando variables e integrando se obtiene la igualdad

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Calculando las integrales se llega a

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{1-x} + c, \text{ o equivalentemente, } \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2}{1-x} + 2c,$$

donde c es una constante. Luego

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2c}\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}}.$$

Como las soluciones no estacionarias no pueden cortar la soluciones $z(x) = \pm 1$ e $y(-1) = 0 \in]-1, 1]$, $\dfrac{y(x)-1}{y(x)+1}$ es negativo en una vecindad de $x = -1$. Por lo tanto,

$$\mathrm{e}^{2c}\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}} = \frac{1-y}{y+1}.$$

Poniendo $K = \mathrm{e}^{2c}$ produce $1 - y = (y+1)K\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}}$, de donde

$$y(x) = \frac{1 - K\mathrm{e}^{\alpha(x)}}{1 + K\mathrm{e}^{\alpha(x)}} \text{ para } \alpha(x) = \frac{2}{1-x}.$$

Como $y(-1) = 0$, evaluando obtenemos $K = \mathrm{e}^{-1}$. Así que

$$y(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\beta(x)}}{1 + \mathrm{e}^{\beta(x)}}$$

con $\beta(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Note que para $x = -1$, se obtiene $y(-1) = 0$.

4. Considere el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Identifique las distintas componentes conexas en que se pueda asegurar existencia y unicidad de solución para el respectivo PVI (dependiendo de la región a la que pertenece el punto (x_0, y_0). ¿Cómo es la monotonía de la solución en la región conexa correspondiente?

Desarrollo:

Del Teorema de Existencia y Unicidad sigue que el PVI en cuestión admite dos componentes conexas, A_1 y A_2, donde podemos segurar existencia y unicidad de soluciones, donde

$$\begin{cases} A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \text{ y} \\ A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}. \end{cases}$$

Si $(x_0, y_0) \in A_1$ entonces la correspondiente solución es creciente. Por el contrario, si $(x_0, y_0) \in A_2$ entonces la correspondiente solución es decreciente.

5. Considere el PVI

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 - 2y(x) - 8}, \ y(x_0) = y_0$$

Determine la monotonía de $y(x)$ en las distintas componentes conexas en que se puede asegurar existencia y unicidad cuando (x_0, y_0) y resuelva la EDO dada.

Desarrollo:

Si escribimos $f(x,y)=\dfrac{1}{y^2-2y-8}$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2-2y}{y^2-2y-8}.$$

Ambas funciones resultan continuas para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ de modo que

$$y\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,4[\,\cup\,]4,+\infty[.$$

Si agregamos la condición inicial $y(x_0)=y_0$ la EDO dada tiene única solución cada vez que y_0 esté en alguno de los tres intervalos señalados anteriormente.

Además, observe que sin determinar la solución de la EDO misma, podemos afirmar analizando el signo de la expresión $g(y)=y^2-2y-8$, que la derivada de la solución de la EDO dada, es:

- positiva si $y\in\,]-\infty,-2[$,
- negativa si $y\in\,]-2,4[$,
- positiva si $y\in\,]4,+\infty[$.

De lo anterior, relativo a los PVI que siguen, podemos decir lo siguiente:

(a) El PVI

$$\begin{cases} y'(x)= & \dfrac{1}{(y+2)(y-4)},\\ y(-3)=-4. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva creciente.

(b) El PVI

$$\begin{cases} y'(x)= & \dfrac{1}{(y+2)(y-4)},\\ y(-3)=1. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva decreciente.

(c) El PVI

$$\begin{cases} y'(x)= & \dfrac{1}{(y+2)(y-4)},\\ y(-3)=6. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva creciente.

Para determinar la solución, usamos separación de variables para obtener:

$$(y(x)^2-2y(x)-8)y'(x)=1.$$

Integrando se obtienen las soluciones implícitas

$$y(x)^3 - 3y(x)^2 - 24y(x) = 3x + c.$$

con c constante arbitraria, determinada univocamente en presencia de una condición inicial $y(x_0) = y_0$ (con y_0 en uno de los tres intervalos definidos anteriormente).

Cambios de Variable

6. **Ecuación tipo Bernoulli**
Considere la EDO $(1 + x^2)y'(x) = xy(x)(1 + xy(x))$.

(i) Determine las regiones (conexas) donde se puede asegurar la existencia de soluciones únicas para los PVI asociados con esta EDO.

(ii) Resuelva el correspondiente PVI con la condición inicial $y(0) = 1$.

Desarrollo:

(i) Normalizando se obtiene la EDO $y'(x) = \dfrac{xy(x) + x^2y^2(x)}{1 - x^2}$.

Observamos que la función f que define la EDO es $f(x, y) = \dfrac{xy + x^2y^2}{1 - x^2}$ con su correspondiente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x + 2x^2y}{1 - x^2}$. Ambas funciones son continuas en puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ de modo que $1 - x^2 \neq 0$. Por tanto, quedan definidas tres regiones conexas de $\mathbb{R}^2$, a saber,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\} \end{aligned}$$

y se puede asegurar existencia y unicidad para el PVI

$$(P) \left\{ \begin{aligned} y'(x) &= \frac{xy(x) + x^2y^2(x)}{1 - x^2} \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \right.$$

cuando la condición inicial esté contenida en A_1 , A_2 o en A_3.

(ii) Observamos que la C.I. de nuestro PVI está contenida en la región A_2.

La EDO a resolver $y'(x) - \dfrac{x}{1 - x^2}y(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}y^2(x)$ es una EDO tipo Bernoulli (ver Problema 7 de los Ejercicios Propuestos) para $n = 2$. Esto es,

$$y^{-2}(x)y'(x) - \frac{x}{1 - x^2}y^{-1} = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

para su resolución, se hace , en este caso, el cambio de variable $u(x) = y^{-1}(x)$ de donde $u'(x) = -y^{-2}(x)y'(x)$ de donde se obtiene la EDO lineal

$$u'(x) + \frac{x}{1-x^2}u(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

para su resolución buscamos su F.I. , este resulta ser

$$\mu(x) = exp\int \frac{x}{1-x^2}dx = \frac{1}{1-x^2}$$

puesto que en A_2 resulta $1 - x^2 > 0$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}u(x) &= -\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx + C \quad \text{para } x = sen(t) \\
&= \int \frac{sen^2(t)cos(t)}{cos^3(t)}\,dt + C \\
&= -\int tan^2(t)\,dt + C \\
&= -(tan(t) - t) + C \\
&= -\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - Arcsen(x)\right) + C.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,y(x)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + Arcsen(x) + C.$$

De la C.I. $y(0) = 1$ sigue $C = 1$. Por tanto, obtenemos la solución implícita

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,y(x)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + Arcsen(x) + 1.$$

7. Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(a\,x + b\,y(x) + c)$, primero haga el cambio de variables $z = ax + by$ para luego usar el método de separación de variables. Resuelva:

$$(P)\begin{cases} y'(x) &= \sqrt{x+2y} - 1 \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

Desarrollo:

Definiendo la variable auxiliar $z(x) = x + 2y(x)$ sigue $z'(x) = 1 + 2y'(x)$ y entonces el PVI original se transforma en el PVI

$$(P_a)\begin{cases} z'(x) &= 2\sqrt{z(x)} - 1 \\ z(0) &= 4. \end{cases}$$

Note que aquí $f(x,z) = 2\sqrt{z} - 1$ y el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza que el PVI auxiliar (P_a) admite única solución para $z > 0$.

De la EDO, podemos obtener la forma diferencial

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = dx \text{ o equivalentemente } \int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = x + C. \tag{3}$$

Para integrar $\int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1}$ hacemos $u = 2\sqrt{z} - 1$. Sigue $du = \frac{dz}{\sqrt{z}}$. Así

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} &= \int \frac{\sqrt{z}}{u} du \\ &= (1/2) \int (1 + \frac{1}{u}) du \\ &= (1/2)(u + \ln|u|) + c \end{aligned}$$

Regresando a (3) se obtiene

$$u + \ln|u| = 2x + C,$$

Como $u(0) = 3$ sigue $u + \ln(u) = 2x + C$, esto es,

$$2\sqrt{z} - 1 \ + \ \ln(2\sqrt{z} - 1) = x + C$$

Finalmente, como $z(0) = 4$, sigue $C = 3 + \ln(3)$ y entonces

$$2\sqrt{x + 2y} - 1 \ + \ \ln(2\sqrt{x + 2y} - 1) = 2x + 3 + \ln(3)$$

que es una solución implícita para el PVI original.

Problemas para el Estudiante

1. Encuentre la solución general de:

   (a) $y'(x) = \dfrac{x}{y(x)}$.

   (b) $y'(x) = (y(x) - 1)(x + 1)$.

   (c) $y'(x) = \dfrac{y(x) - x}{x}$.

   (d) $y'(x) = \dfrac{x}{y(x) - 1}$.

   (e) $y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{x^2 - 1}$

2. **Para resolver por el estudiante:** Considere el PVI definido por

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x - y} \\ y(-3) = 2 \end{cases}$$

   justificando su respuesta, determine el valor de verdad de:

   (a) El PVI anterior admite única solución.

(b) Si $y_1 = y_1(x)$ es una (o la) solución del PVI anterior, entonces

$$\lim_{x\to -\infty} y_1(x) = +\infty.$$

3. Analice la existencia y unicidad de los siguientes PVIs:

   (a) $y'(x) = \dfrac{1}{2x - y(x)^2}$, $y(x_0) = y_0$.

   (b) $y'(t) = \dfrac{2}{y(t)^2 + 2y(t) - 15}$, $y(t_0) = z_0$. (**Obs:** la EDO es autónoma)

4. Considere la EDO $y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)}$,
   a) Muestre que $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{1}{9}x^6$ son soluciones de la EDO dada.
   b) Considere los PVI (P_1) y (P_2) respectivamente definidos por

$$\begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

   Verifique que el PVI (P_1) tiene al menos dos soluciones y que (P_2) tiene solución única ¿Cómo puede explicar esta situación?

5. Considere los PVI, definidos por

$$(P_1)\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{1}{x-y} \\ y(-3) &= 2\,. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (P_2)\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x-y} \\ y(4) = -1 \end{cases}$$

   (a) Deduzca, que los PVI (P_1) y (P_2) admiten única solución.

   (b) Sin resolver las EDO correspondiente, deduzca como son las curvas solución de (P_1) y (P_2).

6. **Ecuación de Bernoulli** Son EDO no lineales del tipo $y'(t) + p(t)y(t) = h(t)y^n$ con $n \in \mathbb{R}$. Para su solución haga el cambio de variable $v = y^{1-n}$.

   (a) $y'(x) = y + e^{2x}y^3$. ;   (b) $y'(x) + \frac{1}{x}\,y = y^4$

7. Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(a\,x + b\,y(x) + c)$, primero haga el cambio de variables $z = ax + by + c$ para luego usar el método de separación de variables. Resuelva:

   (a) $y'(x) = (x + y(x))^2$

   (b) $y'(x) = (4x + y(x) + 1)^2$

   (c) $y'(x) = cos(x + y(x))$

8. Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(y(x)/x)$, primero haga el cambio de variables $z = y/x$ para luego usar el método de separación de variables. Resuelva:

(a) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + cos(\frac{y(x)}{x})$

(b) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)}$

(c) $y'(x) = \frac{x-y(x)}{x+y(x)}$

(d) $x\,y'(x) = y(x)\,ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ con $y(1) = 1$.

Junio, 17 de 2025.
KMR/JMS/CMG//jms/cmg