**Universidad de Concepción**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

## Listado 02: aplicaciones de la integración
## Cálculo II (527150)

1. Determinar el área de cada una de las siguientes regiones del plano.

   (a) La región bajo la parábola de ecuación $y = 3 - x^2$ y sobre la recta $y = -1$.

   (b) La región encerrada entre las gráficas de $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \pi$.

   (c) El triángulo de vértices $(1, 1)$, $(5, 2)$ y $(4, 8)$.

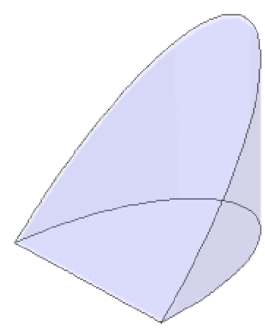
   (d) La región encerrada entre las gráficas de $x - y + 1 = 0$ e $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

   (e) La región sobre el eje $x$ y encerrada por la gráfica de la parábola $x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 6y + 10 = 0$.

2. Determinar el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales verticales perpendiculares a la base y paralelas a un diámetro fijo son triángulos equiláteros.

3. Determinar el volumen del objeto indicado en la figura adjunta, que tiene como base un semicírculo de radio 4 y una altura de 2.

4. *(Desafío.)* Escribir las integrales necesarias para calcular el área superficial total de este objeto.



5. Sea $R$ la región del plano encerrada por las gráficas de $x = y^2$, $x = 4$, $y = 0$. Determinar los volúmenes de los sólidos generados al rotar $R$ alrededor de cada uno de los siguientes ejes:

   (a) $y = 2$ (b) $x = -1$ (c) $y = 7$ (d) $x = 5$

6. Sea $R$ la región limitada por la gráfica de $y = 4x - x^2$ y por el eje $x$. Determinar el volumen del sólido obtenido al rotar $R$ alrededor del eje $y = 6$.

7. Sea $R$ la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x^2$, $2y = x^2 + 4$. Determinar los volúmenes de los sólidos generados al rotar $R$ alrededor de cada uno de los siguientes ejes:

   (a) $y = 4$ (b) $x = -1$ (c) $y = 0$ (d) $x = 2$

8. Un cuenco perfectamente semiesférico de 15 centímetros de radio contiene agua (hasta una altura de $h$ centímetros) y, una esfera sólida de 10 centímetros de radio (que no flota). Determinar el volumen de agua en el cuenco.

9. El disco de centro $(5,0)$ y radio 2, al rotar alrededor del eje $y$, genera un sólido (denominado un *toro*). Determinar el volumen de este sólido.

10. Si $0 < r < R$, se repite la construcción del problema anterior con un disco de centro $(R,0)$ y radio $r$. Determinar el volumen del sólido obtenido.

11. *(Desafío.)* Sea $R$ la región encerrada entre las gráficas de $y = x^2 + 1$, $2x + y = 1$. Escribir la integral necesaria para calcular el volumen del sólido generado al rotar $R$ alrededor del eje $2x + y = 1$.

12. Determinar el área de la superficie generada al rotar la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ alrededor del eje $x$.

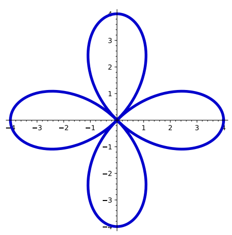
13. Determinar el área de la superficie generada al rotar la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ alrededor del eje $y = -1$.

14. Determinar la longitud del arco de la gráfica de $y = \sqrt{2 - x^2}$ entre los valores $x = 0$ y $x = 1$. Verificar el resultado usando geometría clásica.

15. Determinar la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

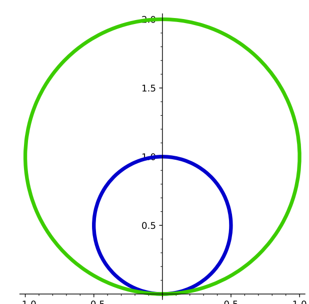
16. Determinar la longitud del arco de la gráfica de $y^2 = x^3$ entre los puntos $(1,-1)$ y $(4,-8)$.

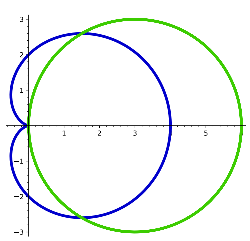
17. Determinar la longitud del arco de la gráfica de $y = \int_0^x \sqrt{\cos(t)}\,dt$ entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.



18. La figura adjunta muestra la gráfica polar de la expresión $r = 2\cos(2\theta)$.
Determinar el área de uno de los "pétalos" de la figura.

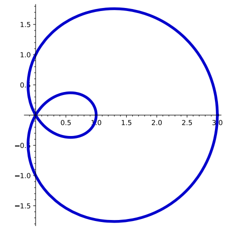
19. La figura adjunta muestra las gráficas polares de las expresiones $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$.
Utilizando integración en coordenadas polares, determinar el área comprendida entre ambas gráficas.
Verificar el resultado utilizando geometría clásica.

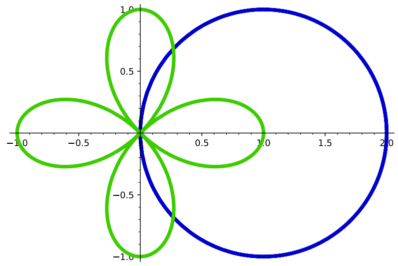




20. La figura adjunta muestra las gráficas polares de las expresiones $r = 2 + 2\cos\theta$ y $r = 6\cos\theta$.
Determinar el área interior a la primera de dichas gráficas y exterior a la segunda.

21. La figura adjunta muestra la gráfica polar de la expresión $r = 1 + 2\cos\theta$.
    Determinar el área interior al lazo menor de esta gráfica.




22. La figura adjunta muestra las gráficas polares de las expresiones $r = 2\cos\theta$ y $r = \cos(2\theta)$.
    Escribir integrales que permitan calcular el área interior a la circunferencia y exterior a la otra gráfica.

Recordar lo siguiente: si en un volumen $V$ de agua hay sal disuelta con una concentración constante de , entonces la masa total de sal en la solución es de $V$.

23. Un vaso cilíndrico de altura 5 y radio 2 se encuentra lleno de agua con sal. Desde la superficie hasta una profundidad de 2 la concentración de sal es constante igual a 3; desde la profundidad 2 hasta el fondo del vaso la concentración de sal es constante igual a 7. Determinar la masa total de sal en el vaso.

24. Un vaso con forma de cono invertido de altura 6 y radio 4 se encuentra lleno de agua con sal. Desde la superficie hasta una profundidad de 2 la concentración de sal es constante igual a 3; desde la profundidad 2 hasta la profundidad 5 la concentración es constante igual a 4; desde la profundidad 5 hasta el fondo del vaso la concentración de sal es constante igual a 7. Determinar la masa total de sal en el vaso.

25. Un vaso con forma de cono invertido de altura 6 y radio 4 se encuentra lleno de agua con sal. La concentración de sal varía con la profundidad: en la profundidad $p$ la concentración es $0{,}1 + 2p$. Determinar la masa total de sal en el vaso.

Recordar lo siguiente: si a un cuerpo que se mueve rectilíneamente se le aplica una fuerza constante de magnitud $F$ a lo largo de un desplazamiento de longitud $d$, el *trabajo* realizado por dicha fuerza tiene magnitud $F \cdot d$, y su signo está determinado según las direcciones relativas de la fuerza y el desplazamiento. Si ambos tienen la misma dirección, el trabajo es positivo; si tienen direcciones opuestas, negativo.

26. Un cuerpo se desplaza en línea recta a lo largo del eje $x$, desde $x = 0$ hasta $x = 10$. Al inicio de su desplazamiento es empujado por un viento con fuerza constante de magnitud 5; en cuanto llega al punto $x = 7$, el viento cambia: de ese punto en adelante, se opone al desplazamiento con fuerza constante de magnitud 3.

    Determinar el trabajo total realizado por el viento sobre el objeto, descomponiendo el movimiento en dos intervalos y sumando los trabajos correspondientes.

27. Un cuerpo se desplaza sobre el eje $x$, amarrado por un resorte al origen. Este resorte aplica una fuerza $F(x) = -2x$ sobre el cuerpo que depende de la posición $x$ del

mismo (notar que el signo de la fuerza asegura que la fuerza siempre va *hacia* el origen!).

Si el cuerpo se desplaza del punto $x = 2$ al punto $x = 3$, determinar el trabajo total realizado por el resorte sobre él.

28. *(Desafío.)* Un cuerpo de masa constante $m$ se desplaza en línea recta a lo largo del eje $x$. En el instante $t = 0$ se encuentra inmóvil en el origen. Se le aplica una fuerza $F(t)$ que varía en el tiempo. Determinar:

    (a) una expresión para la aceleración $a(T)$ del cuerpo en un instante $t = T$;

    (b) una expresión para la velocidad $v(T)$ del cuerpo en un instante $t = T$;

    (c) una expresión para la posición $x(T)$ del cuerpo en un instante $t = T$;

    (d) *(desafío)* una expresión para el trabajo total realizado sobre el cuerpo por la fuerza $F$ desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = T$. Escribir esta expresión en términos de la masa y la velocidad y explicar el significado físico de la expresión encontrada.