

# Espacios vectoriales con producto interior

Rommel Andrés Bustinza Pariona

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Concepción

July 13, 2021



## Espacios vectoriales con producto interior

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), (en este curso,  $\mathbb{K}$  puede ser  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Un producto interior en  $V$  es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  que verifica:

- ①  $\forall u, v, w \in V : \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
- ②  $\forall u, v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle,$
- ③  $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle},$
- ④  $\forall u \in V : \langle u, u \rangle \geq 0,$
- ⑤  $\forall u \in V : \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta.$

### Observaciones:

- a) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , entonces en general  $\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$ . En cambio, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , entonces  $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  (conmutatividad).
- b) De las condiciones 2 y 3 se deduce:  $\forall u, v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$
- c) De la condición 3, se desprende:  
 $\forall u \in V : \langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle} \Rightarrow \forall u \in V : \langle u, u \rangle \in \mathbb{R}.$



## Ejemplos:

- ① **Producto euclideo.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  y  $V := \mathbb{R}^{n \times 1}$ , entonces la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^{n \times 1} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := x^t y = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

- ② **Producto de Hermite.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  y  $V := \mathbb{C}^{n \times 1}$ , entonces la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : \mathbb{C}^{n \times 1} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \langle x, y \rangle_H := x^t \bar{y} = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

- ③ Considere  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Sea  $V := \mathcal{C}([a, b]) = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$  y  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ . La función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

define un producto interior en  $V$ .

- ④ Considere  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Sea  $V := \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\}$  y  $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ . La función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

define un producto interior en  $V$ .



**Proposición:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Luego,  
 $A$  es simétrica si y sólo si  $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$ .

**Demostración:** Primero, observamos que para  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , se tiene

$$\langle Bx, y \rangle = (Bx)^t y = x^t B^t y = x^t (B^t y) = \langle x, B^t y \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

de donde se concluye la propiedad:

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^t y \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

( $\Rightarrow$ ) HIPÓTESIS:  $A$  es simétrica. Luego, aplicando la propiedad anterior para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  
fijos pero arbitrarios:

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, A^t y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

y la conclusión se sigue.

( $\Leftarrow$ ) HIPÓTESIS:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$ .

Eligiendo en particular  $x := e_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $y := e_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo vector  
canónico de  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , respectivamente, con  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  fijos pero arbitrarios, tenemos

$$\langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle e_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (1)$$

En vista que  $\langle e_i, Ae_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = e_i^t Ae_j = (A)_{ij} = a_{ij}$ , y

$\langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = (Ae_i)^t e_j = e_i^t A^t e_j = (A^t)_{ij} = a_{ji}$ , (1) nos permite inferir que

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} = a_{ji}$ , lo cual significa que  $A = A^t$ , y se concluye el resultado.



**Definición:** Sea  $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Se define la **matriz adjunta de  $A$**  por  $A^* := \overline{A^t} := (\overline{a_{ji}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Además, se dice que  **$A$  es hermitiana** si  $A^* = A$ .

**Proposición:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Luego,  $A$  es hermitiana si y sólo si  $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$ .

**Demostración:** análoga al caso real (se deja al estudiante).

**Proposición:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  una matriz hermitiana (i.e.  $A^* = A$ ). Entonces  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Demostración:** Sea  $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{\theta\}$  un autopar de  $A$ , fijo pero arbitrario. Esto implica que  $Av = \lambda v$ . Luego, usando el hecho que  $A$  es hermitiana, resulta

$$\lambda \langle v, v \rangle_H = \langle \lambda v, v \rangle_H = \langle Av, v \rangle_H = \langle v, Av \rangle_H = \langle v, \lambda v \rangle_H = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle_H,$$

y como  $v \neq \theta$ , lo anterior implica que  $\lambda = \overline{\lambda}$ , i.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Siendo  $\lambda \in \sigma(A)$  fijo pero arbitrario, se concluye que  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Corolario:** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es simétrica, entonces  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Demostración:** Puesto que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es simétrica, entonces  $A$  también es hermitiana. El resultado se sigue de la proposición anterior.



# Normas y Espacios Normados

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Se dice que la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  define una norma en  $V$  si verifica

- ①  $\forall v \in V : \|v\| \geq 0,$
- ②  $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta,$
- ③  $\forall v \in V : \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$
- ④  $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (desigualdad triangular).

En tal caso, se dice que  $(V, \|\cdot\|)$  es un **espacio normado**.

**Observación:** Si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior, entonces la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tal que  $\forall v \in V : \|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$ , es una norma, llamada **norma inducida** por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposición:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior. Entonces la norma inducida  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  verifica la **LEY DEL PARALELOGRAMO**:

$$\forall u, v \in V : \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Esto nos dice que todo espacio vectorial con producto interior induce un espacio vectorial normado. El recíproco no siempre es cierto.

**Ejemplo de norma no inducida por producto interno.** Sea  $V := \mathbb{R}^2$ , sobre la cual consideramos la norma  $\forall v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_1 := |v_1| + |v_2|$ . Para  $u := (1, 0)$ ,  $v := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ , resulta  $\|u + v\|_1^2 + \|u - v\|_1^2 = 8 \neq 4 = 2(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2)$ .



## Definiciones varias:

- 1 Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado. Si  $v \in V$  es tal que  $\|v\| = 1$ , se dice que  $v$  es un **vector unitario** (con respecto a  $\|\cdot\|$ ).
- 2 Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interno. Si  $u, v \in V$  son tales que  $\langle u, v \rangle = 0$ , se dice que  $u$  y  $v$  son **vectores ortogonales**. Además, un conjunto  $S \subseteq V$  se llamará **ortogonal** si  $\forall u, v \in S, u \neq v : \langle u, v \rangle = 0$ . Más aún,  $S$  se llamará **conjunto ortonormal** si  $S$  es ortogonal y  $\forall u \in S : \|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2} = 1$ .

**Teorema:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  una matriz hermitiana. Entonces, vectores propios de  $A$  asociados a valores propios distintos son ortogonales (respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ).

**Demostración:** Como  $A$  es hermitiana, se tiene que  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ . Sean  $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{\theta\}$  dos autopares de  $A$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Tenemos, aprovechando que  $A$  es hermitiana:

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle_H = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle_H = \langle A v_1, v_2 \rangle_H = \langle v_1, A v_2 \rangle_H = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle_H = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle_H,$$

de donde se infiere que  $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$ . En vista que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , se deduce que  $\langle v_1, v_2 \rangle_H = 0$ , y se concluye el resultado.

**Corolario:** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica, entonces vectores propios de  $A$  asociados a valores propios distintos, son ortogonales (respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ).



**TRANSFORMACIONES LINEALES SIMÉTRICAS:** Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ), con producto interior, y  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Se dice que  $T$  es **simétrica** si  $\forall u, v \in V : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ .

**Lema:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de DIMENSIÓN FINITA, con producto interior, y  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Además, sea  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  una BASE ORTONORMAL de  $V$ . Entonces

- ① Si  $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ ,  $T$  es simétrica si y sólo si  $[T]_B^B$  es hermitiana.
- ② Si  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ,  $T$  es simétrica si y sólo si  $[T]_B^B$  es simétrica.

**Demostración (caso  $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ ):** Recordamos que dados cualesquiera  $u, v \in V$ , éstos pueden expresarse como  $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ , y  $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ , para algunos escalares

$\{\alpha_j\}_{j=1}^n, \{\beta_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{C}$ . Se verifica que

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \overline{\beta_k} \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=: \delta_{jk}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\beta_j} = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H,$$

y en consecuencia se ha probado que  $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_H$ .

( $\Rightarrow$ ) **HIPÓTESIS:  $T$  ES SIMÉTRICA.** Esto significa que

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V : \langle T(u), v \rangle &= \langle u, T(v) \rangle \Leftrightarrow \langle [T(u)]_B, [v]_B \rangle_H = \langle [u]_B, [T(v)]_B \rangle_H \\ \Leftrightarrow \forall [u]_B, [v]_B \in \mathbb{C}^{n \times 1} : \left\langle [T]_B^B [u]_B, [v]_B \right\rangle_H &= \left\langle [u]_B, [T]_B^B [v]_B \right\rangle_H, \end{aligned}$$

y de aquí se deduce que  $[T]_B^B$  es hermitiana.





( $\Leftarrow$ ) **HIPÓTESIS:**  $[T]_B^B$  ES HERMITIANA. Aplicando el razonamiento anterior, se deduce el resultado. Queda para el estudiante hacer los detalles.

La demostración del caso  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$  es análoga. Primero hay que deducir que  $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$ .

**Corolario:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita, con producto interior, y  $T \in \mathcal{L}(V)$  simétrica. Entonces  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ . **¿Qué pasa si  $V$  es infinito dimensional?**

**Definición:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, con producto interior, y  $\emptyset \neq S \subseteq V$ . Se define el **complemento ortogonal de  $S$**  por  $S^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in S : \langle v, w \rangle = 0\}$ , el cual siempre es un **subespacio vectorial de  $V$** .

**Propiedades del Complemento Ortogonal:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, con producto interior, y  $\emptyset \neq S \subseteq V$ . Entonces

①  $S^\perp$  es subespacio vectorial de  $V$ .

②  $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$ .

③  $\{\theta\}^\perp = V \quad \wedge \quad V^\perp = \{\theta\}$ .

Si además  $V$  es finito dimensional:

④  $\langle S \rangle \oplus \langle S \rangle^\perp = V$ .

⑤  $(\langle S \rangle^\perp)^\perp = \langle S \rangle$ .

**Demostración:** Es dejada como ejercicio al lector. Las **propiedades 4 y 5** en **dimensión infinita son también válidas, pero requieren de hipótesis adicionales.**



## Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita  $n$ , y sea  $B := \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Entonces, se puede construir una base ortogonal de  $V$ , que denotaremos por  $\tilde{B} := \{w_1, \dots, w_n\}$ , tales que  $\forall k \in \{1, \dots, n\} : \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle = \langle \{w_1, \dots, w_k\} \rangle$ . Esta base se puede construir de modo tal que  $w_1 := v_1$ , y para  $k \in \{2, \dots, n\}$ :

$$w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j w_j, \quad \text{donde } \forall j \in \{1, \dots, k-1\} : \alpha_j := \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2}.$$

Si se normalizan los elementos de  $\tilde{B}$ , se obtendrá una base ortonormal de  $V$ .

**Demostración:** La demostración suele hacerse por Inducción Matemática. Es dejada como ejercicio al lector.

**APLICACIÓN DIRECTA:** Determine una base ortonormal de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , provisto del producto interior definido por  $\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ .

Considerando la base canónica  $\{p_j\}_{j=1}^3$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , donde  $\forall j \in \{1, 2, 3\} : \forall t \in \mathbb{R} : p_j(t) := t^{j-1}$ , y luego de aplicar el PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT descrito, se deduce la base ortonormal de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ :  $\{q_j\}_{j=1}^3$ , donde  $\forall t \in \mathbb{R} : q_1(t) := \frac{\sqrt{2}}{2}, q_2(t) := \frac{\sqrt{6}}{2}t, q_3(t) := \frac{3\sqrt{10}}{4}(t^2 - \frac{1}{3})$



**Observación:** Sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  simétrica, tal que  $\lambda \in \sigma(T)$ , y  $B_1 := \{v_1, \dots, v_p\}$  es una base del espacio propio  $S_\lambda$ , asociado a  $\lambda$ . Entonces, el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt induce una base ortonormal de  $S_\lambda$ , cuyos elementos siguen siendo vectores propios de  $T$  asociados a  $\lambda$ .

**Proposición:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial real con producto interior, de dimensión finita  $n$ , y sea  $T \in \mathcal{L}(V)$  simétrica. Sea también  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica. Entonces

- 1 Si  $\lambda, \mu \in \sigma(T)$  (o  $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ ) distintos, entonces los subespacios propios  $S_\lambda$  y  $S_\mu$  asociados a  $\lambda$  y  $\mu$ , respectivamente, son ortogonales.
- 2 Tanto  $T$  como  $A$  tienen  $n$  valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas).

**Demostración:**

1) (Para  $T$ ) Sean  $\lambda, \mu \in \sigma(T) \subseteq \mathbb{R} := \mathbb{R}$  distintas. Consideremos  $v \in S_\lambda$  y  $w \in S_\mu$ . Esto significa que  $T(v) = \lambda v$  y  $T(w) = \mu w$ . Luego, gracias al hecho que  $T$  es simétrica, se deduce:

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle,$$

lo que implica que  $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$ , y en vista que  $\lambda \neq \mu$ , se deduce que  $\langle v, w \rangle = 0$ . De aquí se concluye el resultado.

Queda al lector hacer la demostración para el caso  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica.

**Observación:** La propiedad 1 anterior también es cierta si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita y  $T \in \mathcal{L}(V)$  simétrica. Para el caso matricial, se requiere que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sea hermitiana.



2) (Para A) Se hará por **reducción al absurdo**. Supongamos que la TESIS es falsa. Esto significa que  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C} : p_A(\lambda_0) = 0$ , con parte imaginaria  $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ . En vista que  $p_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\overline{\lambda_0}$  es también otra raíz de  $p_A$ . Sea  $v \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{0\}$  un vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ . Como tal,  $v$  se puede expresar como  $v := v_1 + i v_2$ , siendo  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Tenemos

$$A v = \lambda_0 v \Rightarrow \overline{A} \overline{v} = \overline{\lambda_0} \overline{v} \Rightarrow A \overline{v} = \overline{\lambda_0} \overline{v},$$

de donde se deduce que  $(\overline{\lambda_0}, \overline{v})$  es otro autopar de  $A$ . Como  $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ , **por la parte 1)**, se tiene que  $v$  y  $\overline{v}$  son ortogonales (respecto al producto interior de  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ). De esta manera resulta

$$0 = \langle v, \overline{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = (v_1 + i v_2)^t (v_1 - i v_2) = v_1^t v_1 + \underbrace{i(v_2^t v_1 - v_1^t v_2)}_{=0} + v_2^t v_2$$

$$\Rightarrow \|v_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|v_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \theta_{\mathbb{R}^{n \times 1}} \Rightarrow v = \theta_{\mathbb{C}^{n \times 1}} (\rightarrow \leftarrow).$$

Luego,  $p_A$  es factorizable en  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  por polinomios irreducibles de grado 1 (salvo repeticiones). En consecuencia la TESIS es verdadera, y concluye la demostración. Queda al lector hacer la demostración para el caso  $T \in \mathcal{L}(V)$  simétrica.



**Teorema Espectral:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita  $n$ . Si  $T \in \mathcal{L}(V)$  es simétrica, entonces existe una base ortonormal de  $V$  formada por vectores propios de  $T$  (i.e.  $T$  es diagonalizable).

**Demostración:**

**Primero**, por la proposición anterior, sabemos que  $T$  posee  $n$  valores propios (contando sus multiplicidades algebraicas). Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  los valores propios reales distintos de  $T$ , cada uno con multiplicidad algebraica  $m_j$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Se tiene que  $\sum_{j=1}^p m_j = n$  y los espacios propios  $S_{\lambda_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$  son ortogonales dos a dos.

Notar que  $T$  tiene al menos un valor propio (de multiplicidad algebraica  $n$ ), y como máximo tiene  $n$  valores propios distintos (en cuyo caso, todos ellos son simples). Para cada  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $d_j := \dim(S_{\lambda_j})$  (multiplicidad geométrica de  $\lambda_j$ ).

**Segundo**, consideramos una base ortonormal de cada uno de los  $p$  espacios propios  $S_{\lambda_j}$  de  $T$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Esto puede obtenerse con la ayuda del conocido **Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt**. En vista que éstos son ortogonales entre sí, la unión de todas estas bases resulta ser un conjunto ortonormal de  $\sum_{j=1}^p d_j := d$  **vectores propios de  $T$** , el cual será una base ortonormal de la suma directa:  $U := \bigoplus_{j=1}^p S_{\lambda_j}$ . Notar que  $d = \dim(U)$ , y que todo vector propio de  $T$ , al pertenecer a algún espacio propio, pertenecerá al subespacio  $U$ .

...por demostrar que  $d = n$ , o equivalentemente  $U = V$ ...next page...



**Tercero**, Probaremos que  $d = n$ , o equivalentemente,  $U = V$ . **Procederemos por reducción al absurdo**. Suponemos entonces que  $d < n$ . Consideramos así, el complemento ortogonal de  $U$ ,  $U^\perp$ , que es de dimensión  $d' := n - d > 0$  (y tales que  $U \oplus U^\perp = V$ ).

**Afirmación 1:**  $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$ . Sea  $w \in T(U^\perp)$ , entonces  $\exists v \in U^\perp : T(v) = w$ . Ahora, consideramos  $u \in U$ , fijo pero arbitrario. Tenemos, tomando en cuenta que  $T(u) \in U$  (*¿Por qué?*),

$$\langle w, u \rangle = \langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U : \langle w, u \rangle = 0 \Rightarrow w \in U^\perp,$$

De esta manera, se valida la afirmación.

**Afirmación 2:** la aplicación  $\tilde{T} : U^\perp \rightarrow U^\perp$  definido  $\forall w \in U^\perp : \tilde{T}(w) := T(w)$  es lineal y simétrica. Es consecuencia del hecho que  $T \in \mathcal{L}(V)$  es simétrica.

Aplicando la **proposición anterior**,  $\tilde{T}$  tiene  $d' = n - d > 0$  valores propios reales (contando sus multiplicidades algebraicas). Esto garantiza la existencia de al menos un autovector  $(\mu, w) \in \mathbb{R} \times U^\perp \setminus \{\theta\}$ . Esto implica que  $\tilde{T}(w) = \mu w$ , es decir  $T(w) = \mu w$ , de donde  $(\mu, w)$  es un autovector de  $T$ . Ello conduce a afirmar que  $w \in U$  ( $\rightarrow \leftarrow$ ). Luego, la TESIS es verdadera, y concluye la demostración.



## Corolario: Diagonalización ortogonal de un endomorfismo simétrico

- ① Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial real con producto interior y de dimensión finita. Todo endomorfismo simétrico  $T \in \mathcal{L}(V)$  es diagonalizable, y lo es ortogonalmente. Es decir, existe  $B \subseteq V$ , una base ortonormal de  $V$ , tal que  $[T]_B^B$  es una matriz diagonal.

Esta base, por ejemplo, puede obtenerse reuniendo bases ortonormales de los espacios propios de  $T$ . La matriz diagonal está formada por los valores propios de  $T$  (considerando sus multiplicidades algebraicas).

- ② Toda matriz real simétrica  $A$  de orden  $n$ , es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existe una matriz  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ortogonal (i.e.  $P^t = P^{-1}$ ), tal que  $P^t A P$  es una matriz diagonal.

Las columnas de  $P$  son vectores propios de  $A$  que forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , mientras que la matriz diagonal está formada por los correspondientes valores propios de  $A$  (considerando sus multiplicidades algebraicas y el orden de sus vectores propios como columnas de  $P$ ).

Se recuerda:

- ①  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  se dice **matriz unitaria** si  $A^{-1} = A^*$ .  
②  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se dice **matriz ortogonal** si  $A^{-1} = A^t$ .

**Ejemplo:** Diagonalizar, si es posible,  $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . ¿Admite diagonalización

ortogonal? Implementarla de ser el caso.



# Transformaciones especiales

Sean  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial,  $T \in \mathcal{L}(V)$ .

- 1 Se dice que  $T$  es una **proyección o idempotencia** si  $T^2 = T$ .
- 2 Se dice que  $T$  es una **reflexión o involución** si  $T^2 = \tilde{I}$ .
- 3 Se dice que  $T$  es una **aplicación nilpotente** si  $\exists m \in \mathbb{N} : T^m = \Theta$ . El menor entero positivo con esta propiedad, es llamado **índice de nilpotencia de  $T$** .

**Ejemplo 1:** Consideremos el espacio vectorial real  $V = \mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$ , donde  $U_1 := \langle \{(1, 2)\} \rangle$ , y  $U_2 := \langle \{(0, 1)\} \rangle$ . Se observa que  $U_1 \not\perp U_2$ . Definimos ahora  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $T(u) := u_1$ , para cualquier  $u = u_1 + u_2$ , con  $u_1 \in U_1$  y  $u_2 \in U_2$  (descomposición única de  $u$ ). Se verifica que  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  y también que  $\forall u \in V : T^2(u) = T(u)$ , por lo que  $T^2 = T$ , i.e.  $T$  es una proyección.

**Ejemplo 2:** Consideremos el espacio vectorial real  $V = \mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ , donde  $U_2 := \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ , y  $U_1$  es el plano  $z = 0$ . Sea  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $S(u) := u_1 - u_2$ , para cualquier  $u = u_1 + u_2 \in \mathbb{R}^3$ , donde  $u_1 \in U_1$  y  $u_2 \in U_2$  (descomposición única de  $u$ ). Se puede establecer que  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  y además que  $\forall u \in \mathbb{R}^3 : S^2(u) = u$ . Esto implica que  $S^2 = \tilde{I}$ , i.e.  $S$  es una reflexión.

**Ejemplo 3:** Consideremos el espacio vectorial real  $V = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ , con  $m \in \mathbb{N}$  y la aplicación  $D : V \rightarrow V$  tal que  $\forall f \in V : D(f) := f'$ . Se puede probar que  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$  es nilpotente, con índice de nilpotencia  $m + 1$ .





## Proyecciones Ortogonales

Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita (para poder aplicar las propiedades discutidas de COMPLEMENTO ORTOGONAL). Dado  $W \subseteq V$  un subespacio vectorial, se sabe que  $W \oplus W^\perp = V$ . Esto permite expresar, de manera única, cualquier elemento  $v \in V$  como  $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp$ . Luego, se define la **Proyección ortogonal sobre  $W$**  como la función  $\text{Proj}_W : V \rightarrow V$  tal que  $\forall v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V : \text{Proj}_W(v) := v_W$ . El hecho que esta descomposición es única, garantiza que  $\text{Proj}_W$  esté bien definida.

**Propiedades:**

- 1  $\text{Proj}_W \in \mathcal{L}(V)$ ,
- 2  $\text{Proj}_W^2 = \text{Proj}_W$ ,
- 3  $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W \quad \wedge \quad \text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$ ,
- 4  $\text{Proj}_W$  es simétrica,
- 5  $\sigma(\text{Proj}_W) \subseteq \{0, 1\}$ .

Si  $W$  es subespacio no trivial de  $V$ ,  $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0, 1\}$ .

**Demostración:**

1) Sean  $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ ,  $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ , fijos pero arbitrarios. Tenemos

$$\begin{aligned}\text{Proj}_W(\lambda u + v) &= \text{Proj}_W((\lambda u_W + v_W) + (\lambda u_{W^\perp} + v_{W^\perp})) \\ &= \lambda u_W + v_W = \lambda \text{Proj}_W(u) + \text{Proj}_W(v),\end{aligned}$$

y se concluye el resultado.



2) Sea  $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ , fijo pero arbitrario. Luego,  $\text{Proj}_W(u) = u_W \in W \subseteq V$ . En consecuencia,  $\text{Proj}_W^2(u) = \text{Proj}_W(\text{Proj}_W(u)) = \text{Proj}_W(u_W) = u_W = \text{Proj}_W(u)$ . De aquí se infiere que  $\text{Proj}_W^2 = \text{Proj}_W$ .

3) Para  $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W$ . Se hará por doble inclusión.

$(\text{Im}(\text{Proj}_W)) \subseteq W$ : Sea  $z \in \text{Im}(\text{Proj}_W)$ , fijo pero arbitrario. Esto significa que  $\exists u \in V : z = \text{Proj}_W(u) = u_W \in W$ , de donde se deduce la inclusión deseada.

$(W \subseteq \text{Im}(\text{Proj}_W))$ : Sea  $u \in W \subseteq V$ , fijo pero arbitrario. Luego  $u = \text{Proj}_W(u)$ , de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que  $\text{Im}(\text{Proj}_W) = W$ .

3) Para  $\text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$ . Se hará también por doble inclusión.

$(\text{Ker}(\text{Proj}_W)) \subseteq W^\perp$ : Sea  $z \in \text{Ker}(\text{Proj}_W)$ , fijo pero arbitrario. Como  $z \in V$ , entonces  $\exists! z_W \in W \wedge \exists! z_{W^\perp} \in W^\perp$  tales que  $z = z_W + z_{W^\perp} \in V$ . Esto significa que  $\theta = \text{Proj}_W(z) = z_W$ , con lo que  $z = z_{W^\perp} \in W^\perp$ , y se deduce la inclusión deseada.

$(W^\perp \subseteq \text{Ker}(\text{Proj}_W))$ : Sea  $u \in W^\perp \subseteq V$ , fijo pero arbitrario. Luego  $\text{Proj}_W(u) = \theta$ , de donde se tiene la otra inclusión. Finalmente, se concluye que  $\text{Ker}(\text{Proj}_W) = W^\perp$ .



#### 4) Se recuerda la caracterización

$$\text{Proj}_W \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \forall u, v \in V : \langle \text{Proj}_W(u), v \rangle = \langle u, \text{Proj}_W(v) \rangle.$$

Sean  $u = u_W + u_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$  y  $v = v_W + v_{W^\perp} \in W \oplus W^\perp = V$ , fijos pero arbitrarios. Se tiene así

$$\langle \text{Proj}_W(u), v \rangle = \langle u_W, v \rangle = \overline{\langle v_W + v_{W^\perp}, u_W \rangle} = \langle u_W, v_W \rangle + \underbrace{\langle u_W, v_{W^\perp} \rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W \rangle,$$

$$\langle u, \text{Proj}_W(v) \rangle = \langle u, v_W \rangle = \langle u_W + u_{W^\perp}, v_W \rangle = \langle u_W, v_W \rangle + \underbrace{\langle u_{W^\perp}, v_W \rangle}_{=0} = \langle u_W, v_W \rangle.$$

Luego, se infiere que  $\text{Proj}_W$  es simétrica.

5) Sea  $(\lambda, z) \in \mathbb{K} \times V \setminus \{\theta\}$  un autopar de  $\text{Proj}_W$ , fijo pero arbitrario. Tenemos  $\text{Proj}_W(z) = \lambda z$ . Luego,

$$\text{Proj}_W^2(z) = \text{Proj}_W(\lambda z) = \lambda \text{Proj}_W(z) = \lambda^2 z.$$

$$\text{También: } \text{Proj}_W^2(z) = \text{Proj}_W(z) = \lambda z$$

$$\Rightarrow \lambda z = \lambda^2 z \Rightarrow (\lambda - \lambda^2) z = \theta \Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1.$$

Además, se deduce también que  $S_0 = W^\perp$  y  $S_1 = W$ . Así, cuando  $W$  es subespacio no trivial de  $V$ , i.e.  $W \neq \{\theta\}$  y  $W \neq V$ , se concluye que en efecto  $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0, 1\}$ , y termina la demostración.

**Observación:** Si  $W = \{\theta\} \Rightarrow S_0 = V$  y  $S_1 = \{\theta\}$ . Así,  $\sigma(\text{Proj}_W) = \{0\}$ .

Análogamente, si  $W = V$ , se deduce que  $\text{Proj}_V := \tilde{I}$ , y por tanto  $\sigma(\text{Proj}_V) = \{1\}$ .



# Proyección ortogonal de una familia finita de subespacios vectoriales de $V$

Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior, de dimensión finita, y  $\{W_j\}_{j=1}^m$  una familia finita de subespacios vectoriales de  $V$ , tales que  $V = \sum_{j=1}^m W_j$ , y son ortogonales dos a dos, i.e.

$$\begin{aligned} &\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : W_j \perp W_k \\ \Leftrightarrow &\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : \forall u \in W_j : \forall v \in W_k : \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que  $V = \bigoplus_{j=1}^m W_j$ , lo cual garantiza que cualquier vector de  $V$  puede expresarse de manera única como una suma de vectores de  $W_j$ , con  $j \in \{1, \dots, m\}$ , i.e.  $\forall v \in V : \exists! z_j \in W_j, j \in \{1, \dots, m\}$  tales que  $v = \sum_{j=1}^m z_j$ .

Se define, para  $j \in \{1, \dots, m\}$ , la **Proyección ortogonal sobre  $W_j$** , tal que  $\forall v = \sum_{j=1}^m z_j \in V : \text{Proj}_{W_j}(v) := z_j$ .

**Propiedades:**

- ①  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Proj}_{W_j} \in \mathcal{L}(V)$ .
- ②  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Proj}_{W_j}^2 = \text{Proj}_{W_j}$ .
- ③  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \text{Im}(\text{Proj}_{W_j}) = W_j$ .
- ④  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \sigma(\text{Proj}_{W_j}) \subseteq \{0, 1\}$ .
- ⑤  $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : \text{Proj}_{W_j} \circ \text{Proj}_{W_k} = \Theta$  (aplicación nula).
- ⑥  $\sum_{j=1}^m \text{Proj}_{W_j} = \tilde{I}$  (aplicación identidad).



**Definición:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interior. Decimos que una familia de aplicaciones  $\{T_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{L}(V)$  es una **DESCOMPOSICIÓN DE LA (APLICACIÓN) IDENTIDAD** si verifica

①  $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : T_j T_k := T_j \circ T_k = \Theta.$

②  $\sum_{j=1}^m T_j = \tilde{I}.$

**Ejemplo:** La familia de proyecciones ortogonales  $\{\text{Proj}_{W_j}\}_{j=1}^m$  definida antes, es una descomposición de la identidad.

**Definición:** Una familia de matrices  $\{A_j\} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es una **DESCOMPOSICIÓN DE LA (MATRIZ) IDENTIDAD**, si se verifica

①  $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : A_j \cdot A_k = \Theta$  (matriz nula).

②  $\sum_{j=1}^m A_j = I_n.$



**Teorema:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz simétrica, con  $\sigma(A) := \{\lambda_j\}_{j=1}^m$  (conjunto de valores propios distintos). Entonces  $\exists \{P_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , una descomposición de la identidad, tal que  $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j$ .

**Demostración:**

**Primero**, como  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable. Luego,  $\mathbb{R}^{n \times 1} = \bigoplus_{j=1}^m S_{\lambda_j}$ . Además,  $\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k : S_{\lambda_j} \perp S_{\lambda_k}$ . Esto nos dice que  $\{S_{\lambda_j}\}_{j=1}^m$  es una familia (finita) de subespacios vectoriales de  $V$  ortogonales dos a dos.

**Segundo**, definimos ahora, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , las proyecciones ortogonales sobre  $S_{\lambda_j}$  como la aplicación lineal  $\text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n \times 1})$ . Por lo discutido previamente, tenemos que  $\{\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}\}_{j=1}^m$  es una descomposición de la identidad, i.e.  $\sum_{j=1}^m \text{Proj}_{S_{\lambda_j}} = \tilde{I}$ .

**Tercero**, Sea  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \bigoplus_{j=1}^m S_{\lambda_j}$ . Entonces,  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : \exists! x_{S_{\lambda_j}} \in S_{\lambda_j}$ , tales que  $x = \sum_{j=1}^m x_{S_{\lambda_j}}$ . Así

$$Ax = A \sum_{j=1}^m x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m A x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_{S_{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x). \quad (2)$$

Consideremos ahora  $B$ , la base canónica de  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ . Se verifica  $\forall z \in \mathbb{R}^{n \times 1} : [z]_B = z$ . Entonces, de (2), resulta

$$Ax = \sum_{j=1}^m \lambda_j [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}(x)]_B = \sum_{j=1}^m \lambda_j [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B [x]_B = \sum_{j=1}^m \lambda_j [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B x.$$



De esta forma, se deduce  $\forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} : Ax = \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B \right) x$ , lo cual implica

que  $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B$  (esto sugiere fuertemente cómo definir  $\{P_j\}_{j=1}^m$ ).

**Cuarto**, resta probar que  $\left\{ P_j := [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B \right\}_{j=1}^m$  es la descomposición de la identidad

buscada, pues ya verifica  $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j$ .

**Condición 1:** sean  $j, k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \neq k$ . Tenemos

$$P_j P_k = [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B [\text{Proj}_{S_{\lambda_k}}]_B^B = [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \circ \text{Proj}_{S_{\lambda_k}}]_B^B = [\Theta]_B^B = \Theta.$$

**Condición 2:**

$$\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m [\text{Proj}_{S_{\lambda_j}}]_B^B = \left[ \sum_{j=1}^m \text{Proj}_{S_{\lambda_j}} \right]_B^B = [\tilde{I}]_B^B = I_n.$$

De esta forma, se concluye la demostración.



## MOTIVACIONES:

- 1 Consideremos  $T \in (\mathbb{C}^3)'$ , con  $\mathbb{C}^3$  provisto del producto interno usual, definido para cada  $z := (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$  por  $T(z) := 2iz_1 - 5z_2 + z_3$ . Definiendo  $u := (-2i, -5, 1) \in \mathbb{C}^3$ ,  $T$  se puede definir como  $\forall z \in \mathbb{C}^3 : T(z) = \langle z, u \rangle_H$ .
- 2 Sea ahora el espacio vectorial real  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , cuyo producto interno se define como

$$\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Sea  $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación definida por

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto S(p) := \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt.$$

Puede probarse (EJERCICIO) que  $S \in (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))'$ . ¿Existirá  $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $\forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : S(p) = \langle p, q \rangle$ ?

Lo anterior conduce a plantear el siguiente

**PROBLEMA:** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interno. Dado  $T \in V'$ , ¿existirá  $u \in V$  tal que  $\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle$ ?





## TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ (EN DIMENSIÓN FINITA)

Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interno, y  $T \in V'$ . Entonces  $\exists! u \in V : \forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle$ .

**PROOF:**

**EXISTENCIA:** Consideremos  $B := \{v_j\}_{j=1}^n$  una BASE ORTONORMAL de  $V$ , y sea  $z \in V$  fijo pero arbitrario. Teniendo en cuenta que

$$z = \sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle v_j \Rightarrow T(z) = T\left(\sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle v_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle T(v_j) = \left\langle z, \sum_{j=1}^n \overline{T(v_j)} v_j \right\rangle.$$

Esto motiva definir  $u := \sum_{j=1}^n \overline{T(v_j)} v_j \in V$ , con el cual se verifica

$$\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle.$$

**UNICIDAD:** Supongamos que  $u, w \in V$  son tales que

$$\forall z \in V : T(z) = \langle z, u \rangle = \langle z, w \rangle.$$

Esto implica que  $\forall z \in V : \langle z, u - w \rangle = 0$ , i.e.  $u - w \in V^\perp = \{\theta_V\}$ . De esta forma, concluimos que  $u = w$ .

**OBSERVACIÓN:** la UNICIDAD nos garantiza que para caracterizar  $u$ , puede considerarse una base cualquiera de  $V$ .



**EJEMPLO DE APLICACIÓN:** Sea ahora el espacio vectorial real  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , cuyo producto interno se define como  $\forall f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ . Sea  $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación definida por

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ni p \mapsto S(p) := \int_{-1}^1 p(t) \cos(\pi t) dt.$$

Habiéndose probado que  $S \in (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))'$  (EJERCICIO), y el espacio vectorial con producto interno es  $V := \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  es finito dimensional, se puede APLICAR EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ. Así, se garantiza la existencia de un único vector  $u \in V$  tal que  $\forall p \in V : S(p) = \langle p, u \rangle$ .

**DETERMINANDO  $u \in V$ :** Para esto, hay que revisar la DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA ALUDIDO, del cual se rescata la estrategia para determinar esta función  $u \in V$ .

Consideramos la BASE ORTONORMAL de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ :  $\{q_j\}_{j=1}^3$ , donde  $\forall t \in \mathbb{R} : q_1(t) := \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $q_2(t) := \frac{\sqrt{6}}{2}t$ ,  $q_3(t) := \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ , la cual es obtenida aplicando PROCEDIMIENTO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT a la base canónica de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . De esta forma

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) := \sum_{j=1}^3 \overline{S(q_j)} q_j(t) = \dots = -\frac{45}{2\pi^2} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right), \text{ luego de reducir.}$$

Finalmente, se puede precisar que  $u = -\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} q_3$ .



**OTRA FORMA:** Considerando la BASE CANÓNICA de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , esto es  $B_c := \{p_j\}_{j=1}^3$ , donde para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $p_1(t) := 1$ ,  $p_2(t) := t$ ,  $p_3(t) := t^2$ . De esta manera, siendo  $u \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , buscamos  $\{\alpha_j\}_{j=1}^3 \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $u = \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j$ . Sabemos que  $u$  debe ser tal que

$$\forall p \in V : S(p) = \langle p, u \rangle = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \langle p, p_j \rangle .$$

En particular, para  $p := p_k$ , con  $k \in \{1, 2, 3\}$ , resulta

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j \langle p_k, p_j \rangle = S(p_k), \quad k \in \{1, 2, 3\} .$$

Esto da lugar a un sistema de ecuaciones cuadrado, que en su forma matricial, se expresa como

$$\begin{pmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle & \langle p_1, p_3 \rangle \\ \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle & \langle p_2, p_3 \rangle \\ \langle p_3, p_1 \rangle & \langle p_3, p_2 \rangle & \langle p_3, p_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(p_1) \\ S(p_2) \\ S(p_3) \end{pmatrix}$$

Haciendo los cálculos (DEJADOS AL ESTUDIANTE), tenemos:

$$\langle p_1, p_1 \rangle = 2, \langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_2, p_1 \rangle = 0, \langle p_1, p_3 \rangle = \langle p_3, p_1 \rangle = 2/3$$

$$\langle p_2, p_2 \rangle = 2/3, \langle p_2, p_3 \rangle = \langle p_3, p_2 \rangle = 0, \langle p_3, p_3 \rangle = 2/5$$

$$S(p_1) = S(p_2) = 0, S(p_3) = -4/\pi^2 .$$



Reemplazando y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos  $u =$

$$\alpha_1 = \frac{15}{2\pi^2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\frac{45}{2\pi^2}.$$

De esta manera se obtiene

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) := \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j(t) = \frac{15}{2\pi^2} - \frac{45}{2\pi^2} t^2 = -\frac{45}{2\pi^2} \left( t^2 - \frac{1}{3} \right).$$

