1.4 Otras propiedades de las Transformadas de Laplace

Es común que aparezcan EDs con funciones de la forma $e^{at}f(t)$, por ejemplo en el término forzante de una EDO no homogénea. El siguiente resultado nos dice que si se conoce la transformada de Laplace de la función $f(t)$, entonces es sencillo calcular la transformada de Laplace: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$.

Teorema 1.5

[Primer Teorema de Traslación]
Sea f una función continua a tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial c. Entonces, denotando $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, con $s > c$, y considerando $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = F(s-a),$$

siempre que $s - a > c$.

Notemos que este teorema representa una traslación en el eje s. Por lo general, es útil usar la notación $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{s\to(s-a)}$, donde $s \to (s-a)$ significa que en la transformada de Laplace $F(s)$ la variable s se reemplaza por $(s-a)$.

Ejemplo 1.9. *Determine la transformada de la función $f(t) = e^{4t}\cos(5t)$.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{4t}\cos(5t)\}(s)\\ &= \mathcal{L}(\cos(5t))(s)\big|_{s\to(s-4)}\\ &= \left.\frac{s}{s^2+25}\right|_{s\to(s-4)}\\ &= \frac{(s-4)}{(s-4)^2+25}.\end{aligned}$$

Forma Inversa del Primer Teorema de Traslación: Para determinar la transformada inversa de $F(s-a)$ primero debemos identificar la función $F(s)$ para encontrar $f(t)$ y luego multiplicarla por e^{at}:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)|_{s\to(s-a)}\right\}(t) = e^{at}f(t).$$

Ejemplo 1.10. *Determine la transformada inversa de Laplace de $\dfrac{2s+1}{s^2+4s+6}$.*

Primero completamos cuadrados en el denominador y reescribimos convenientemente:

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+6} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+2} - \frac{3}{(s+2)^2+2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+4s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+2} - \frac{3}{(s+2)^2+2}\right\}\\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}\\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+2}\right|_{s\to s+2}\right\} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right|_{s\to s+2}\right\}\\ &= 2\cos(\sqrt{2}t)e^{-2t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)e^{-2t}.\end{aligned}$$

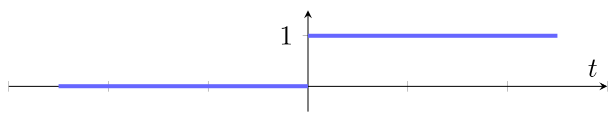
Definición

La función **escalón unitario** o **función de Heaviside** se define como:

$$\mathcal{U}_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

En particular,

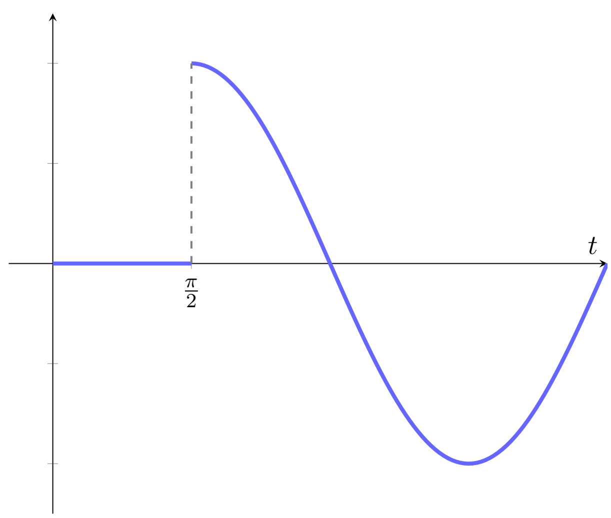
Función $H(t)$.



Función $H(t-a)$.

Si tenemos una función f definida en $t \geq 0$, al considerar el producto $f(t)H(t-a)$ se “apaga” o se hacen cero, las imágenes de la función sobre los t que anteceden al valor a. Por ejemplo, si $f(t) = 2\sin(t)$, entonces $f(t)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ hace cero la gráfica de la función para $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$:

Función $g(t) = 2\sin(t)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.



La función escalón unitario también se puede utilizar para escribir funciones definidas por tramos en una forma compacta, por ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si} \quad 0 \leq t < a, \\ h(t) & \text{si} \quad t \geq a, \end{cases}$$

se puede describir por:

$$f(t) = g(t)\left(1 - H(t-a)\right) + h(t)H(t-a).$$

Podemos también anular una función fuera de un intervalo $[a, b)$ al considerar

$$f(t)\left(H(t-a)-H(t-b)\right)=\begin{cases} f(t), & \text{si } t\in[a,b) \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Podemos también mezclar las dos aplicaciones:

Ejemplo 1.11. *Consideremos la función definida por tramos:*

$$f(t)=\begin{cases} 0 & si\ 0\leq t<1, \\ t-1 & si\ 1\leq t<3, \\ 2 & si\ 3\leq t<5, \\ 6-t & si\ 5\leq t<6, \\ 0 & si\ t\geq 6. \end{cases}$$

Usando la función de Heaviside podemos describir el segundo, tercer y cuarto tramo como:

$$\begin{aligned} 2^{do}\ \textit{tramo:} \quad & (t-1)\left(H(t-1)-H(t-3)\right), \\ 3^{er}\ \textit{tramo:} \quad & 2\left(H(t-3)-H(t-5)\right) \\ 4^{to}\ \textit{tramo:} \quad & (6-t)\left(H(t-5)-H(t-6)\right). \end{aligned}$$

Dado que los otros dos tramos son cero, nos queda que

$$f(t)=(t-1)\left(H(t-1)-H(t-3)\right)+2\left(H(t-3)-H(t-5)\right)+(6-t)\left(H(t-5)-H(t-6)\right).$$

Uniendo términos similares, lo anterior puede expresarse como

$$f(t)=(t-1)H(t-1)-(t-3)H(t-3)-(t-4)H(t-5)+(t-6)H(t-6).$$

Teorema 1.6

[Segundo Teorema de Traslación]

Sea f una función continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial c, con $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, y $a\in\mathbb{R}^+$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-as}F(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)H(t-a).$$

Idea de la demostración. Este resultado se puede demostrar directamente de la definición de transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}&=\int_0^a e^{-st}f(t-a)H(t-a)dt+\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)H(t-a)dt \\ &=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u=t-a$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}&=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du \\ &=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\},\end{aligned}$$

concluyendo el resultado deseado. □

Ejemplo 1.12. *Determine la transformada de Laplace:* $\mathcal{L}\{t^2H(t-3)\}$.

Reescribimos la función $f(t) = t^2$ *de la siguiente forma:*

$$f(t) = t^2 - 6t + 9 + 6t - 9 = (t-3)^2 + 6(t-3) + 9$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2H(t-3)\} &= \mathcal{L}\{[(t-3)^2 + 6(t-3) + 9]H(t-3)\} \\
&= \mathcal{L}\{(t-3)^2H(t-3)\} + 6\mathcal{L}\{(t-3)H(t-3)\} + 9\mathcal{L}\{H(t-3)\} \\
&= \frac{2e^{-3s}}{s^3} + \frac{6e^{-3s}}{s^2} + \frac{9e^{-3s}}{s}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. *Ya vimos que la función*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t < 1, \\ t-1 & si\ 1 \leq t < 3, \\ 2 & si\ 3 \leq t < 5, \\ 6-t & si\ 5 \leq t < 6, \\ 0 & si\ t \geq 6. \end{cases}$$

Puede reescribirse como

$$f(t) = (t-1)H(t-1) - (t-3)H(t-3) - (t-4)H(t-5) + (t-6)H(t-6).$$

Luego, usando linealidad de la TL y el segundo teorema de traslación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{(t-1)H(t-1)\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{(t-3)H(t-3)\right\}(s) \\
&\quad - \mathcal{L}\left\{(t-5+1)H(t-5)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{(t-6)H(t-6)\right\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{t\}(s) - e^{-3s}\mathcal{L}\{t\}(s) - e^{-5s}\mathcal{L}\{(t+1)\}(s) + e^{6s}\mathcal{L}\{t\}(s) \\
&= \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - e^{-3s} - e^{-5s} + e^{6s}\right) - e^{-5s}\frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.14. *Use el teorema anterior para determinar la transformada de Laplace inversa de la función:* $F(s) = \dfrac{2se^{-\pi s/2}}{s^2+4}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\} &= 2\cos\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(2t - \pi\right)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -2\cos\left(2t\right)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.15. *En un sistema masa-resorte, un objeto de masa 32 Kg estira un resorte de 1 metro. Si el objeto se libera desde el 2 metros hacia abajo del punto de equilibrio, determine la expresión para el movimiento del objeto* $u(t)$ *si se aplica una fuerza externa al sistema* $f(t) = 20t$ *durante 5 segundos* $(0 \leq t < 5)$ *y luego se retira. Considere el sistema libre de fuerzas de amortiguamiento.*