UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV 525412
Prof. C. Thraves Caro.
Ayudantes: V. Henríquez y C. Opazo.

Listado 1

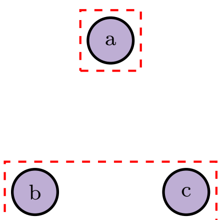
1. Describa todos los grafos que tiene al conjunto $\{a, b, c\}$ como conjunto de vértices. Ordene la lista en dos columnas de tal manera que cada grafo aparezca al lado de su complemento. Además determine cuales son bipartitos y cuales no.

   Solución. Sea el conjunto de vértices,

$$V = \{a, b, c\}$$

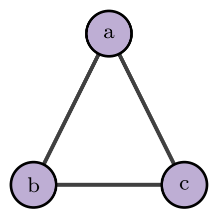
   los posibles grafos que se pueden realizar con el conjunto V son

$G_1 = (V, E_1)$,
donde $E_1 = \emptyset$, es decir:

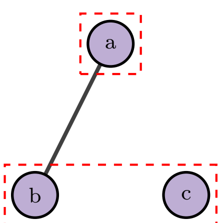


$\longrightarrow$

$G_2 = (V, E_2) = \overline{G_1}$,
donde $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, es decir,

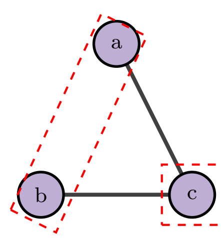


$G_3 = (V, E_3)$,
donde $E_3 = \{\{a, b\}\}$, es decir,

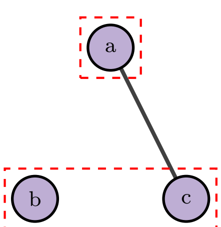


$\longrightarrow$

$G_4 = (V, E_4) = \overline{G_3}$,
donde $E_4 = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$, es decir,

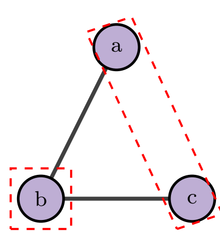


$G_5 = (V, E_5)$,
donde $E_5 = \{\{a, c\}\}$, es decir,

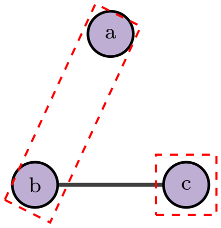


$\longrightarrow$

$G_6 = (V, E_6) = \overline{G_5}$,
donde $E_6 = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$, es decir,

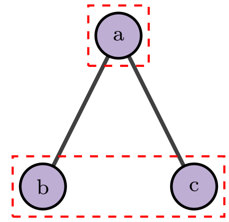


$G_7 = (V, E_7)$,
donde $E_7 = \{\{b, c\}\}$, es decir,



$\longrightarrow$

$G_8 = (V, E_8) = \overline{G_7}$,
donde $E_8 = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$, es decir,



Notemos que todos los grafos anteriores, a excepción del grafo G_2, son **bipartitos**, pues V es la unión de los dos conjuntos independientes marcados en rojo para cada caso.

3. Sea V el producto Cartesiano de los conjuntos $\{1, 2, \ldots, p\}$ y $\{1, 2, \ldots, q\}$, es decir, el conjunto de todos los pares (i, j) donde $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Sea $G = (V, E)$ donde E se define como sigue:

$$E := \{\{(i, j), (i', j')\} :< i = i' \wedge |j - j'| = 1 > \quad \vee \quad < j = j' \wedge |i - i'| = 1 >\}.$$

El grafo G se conoce como la *grilla* de tamaño $p \times q$. Determine el número de aristas de la grilla de tamaño $p \times q$. Determine si la grilla de 4×3 es bipartita. Haga lo mismo para la grilla de 5×3. ¿Puede generalizar el argumento para la grilla de $p \times q$, para todo p y q?.

Demostración. Mediante inducción sobre el valor de p, fijando $q = n$ demostraremos que el número de aristas de la grilla de tamaño $p \times q$ es

$$|E| = p(q - 1) + q(p - 1)$$

El caso base es cuando $p = 1$. Para este caso podemos notar que el número de aristas es

$$|E_1| = n - 1 = p(q - 1) = p(q - 1) + q(p - 1).$$

Ahora, para la hipótesis de inducción suponemos que para $p = m$, con m un número entero, se tiene que

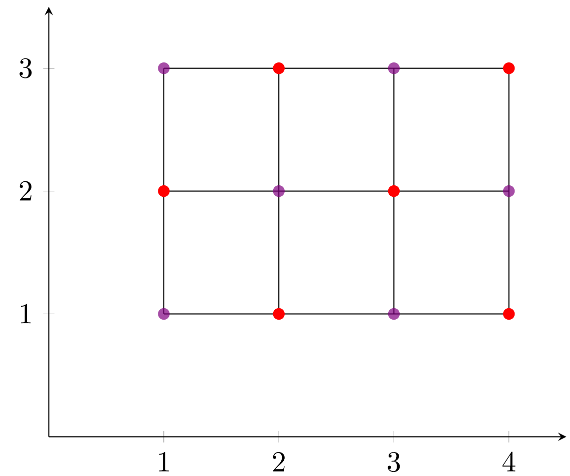
$$|E_m| = m\,(n - 1) + n\,(m - 1) = p\,(q - 1) + q\,(p - 1).$$

Luego, notemos que para $p = m + 1$, se tiene que

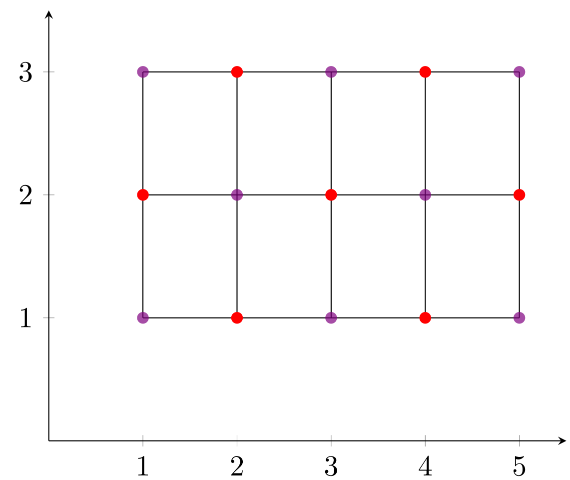
$$\begin{aligned} |E_{m+1}| = |E_m| + n + (n - 1) &= m(n - 1) + n(m - 1) + n + (n - 1) \\ &= (m + 1)(n - 1) + nm \\ &= p(q - 1) + q(p - 1) \end{aligned}$$

Se sigue, de manera análoga, para el caso caso cuando q varía y p lo dejamos fijo. $\square$

Sea la grilla de tamaño 4×3



Notemos que el número cromático de la grilla de 4×3 es igual a 2, entonces este grafo es bipartito. Ahora, para la grilla de 5×3, podemos ver en la siguiente representación que también es bipartito, pues es 2-coloreable



Generalizando lo anterior, para una grilla de $p \times q$, de la siguiente manera, si consideramos el caso en el que i es par, se tiene entonces dos casos. Cuando j es impar, podemos colorear estos vértices con el color c_1, rojo por ejemplo (como en los dibujos anteriores), luego si j es par podemos colorear los vértices con el color c_2 (morado).

Ahora, consideremos i impar, luego si j es impar podemos colorear los vértices con el color c_2, en caso contrario, con j par podemos colorear con c_1. Como todo vértice fue coloreado con un color distinto al de sus vecinos, usando sólo dos colores, entonces podemos concluir que la grilla de $p \times q$ es bipartita.

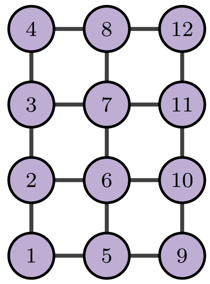
4. Dado dos números enteros p y q, sea $V := \{1, 2, 3, \ldots, pq-2, pq-1, pq\}$. Sea $G = (V, E)$ el grafo donde E se define como sigue. Dados dos elementos k y k' en V, tal que $k < k'$, se tiene que $\{k, k'\} \in E$ si $k' = k + q$ o si $k \mod q \neq 0 \wedge k' = k + 1$. Haga un dibujo del grafo antes definido para los parámetros $p = 3$ y $q = 4$. Haga un dibujo del grafo antes descrito para los parámetros $p = 4$ y $q = 3$. ¿Es el grafo descrito en este ejercicio isomorfo a la grilla descrita en el ejercicio anterior?. Si es así, de un isomorfismo.

   Solución.

Para los parámetros $p = 3$ y $q = 4$, se tiene que

$$V_1 = \{1, 2, 3, \cdots, 10, 11, 12\},$$
$$E_1 = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,7\},\{4,8\},\{5,6\},\{5,9\},\{6,7\},\{6,10\},$$
$$\{7,8\},\{7,11\},\{8,12\},\{9,10\},\{10,11\},\{11,12\}\}$$

Luego, el dibujo del grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ es



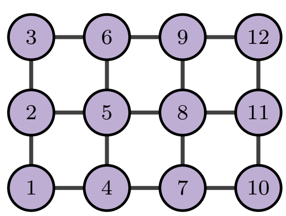
Un isomorfismo entre la grilla del ejercicio anterior y este grafo sería

$$f((1,1)) = 1,\ f((1,2)) = 2,\ f((1,3)) = 3,\ f((1,4)) = 4,$$
$$f((2,1)) = 5,\ f((2,2)) = 6,\ f((2,3)) = 7\ f((2,4)) = 8,$$
$$f((3,1)) = 9,\ f((3,2)) = 10,\ f((3,3)) = 11,\ f((3,4)) = 12.$$

Ahora, para los parámetros $p = 4$ y $q = 3$, se tiene que

$$V_2 = \{1, 2, 3, \cdots, 10, 11, 12\},$$
$$E_2 = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,8\},\{6,9\},\{7,8\},$$
$$\{7,10\},\{8,9\},\{8,11\},\{9,12\},\{10,11\},\{11,12\}\}$$

y el dibujo del grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es



Un isomorfismo entre la grilla y el grafo G_2

$$f((1,1)) = 1,\ f((1,2)) = 2,\ f((1,3)) = 3,$$
$$f((2,1)) = 4,\ f((2,2)) = 5,\ f((2,3)) = 6,$$
$$f((3,1)) = 7,\ f((3,2)) = 8,\ f((3,3)) = 9,$$
$$f((4,1)) = 10,\ f((4,2)) = 11,\ f((4,3)) = 12.$$

Así, el grafo de este ejercicio es isomorfo a la grilla. De manera general, un isomorfismo de esto es, $f : (i,j) \to \{1, 2, 3, \cdots, pq-2, pq-1, pq\}$, donde $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ y $j \in \{1, 2, \cdots, q\}$, tal que

f	1	2	$\cdots$	q
1	1	2	$\cdots$	q
2	q+1	q+2	$\cdots$	2q
3	2q+1	2q+2	$\cdots$	3q
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	(p-1)q + 1	(p-1)q + 2	$\cdots$	pq

10. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Definimos el *grafo de línea* de G, denotado $L(G)$, como sigue: $V(L(G)) := E$; $E(L(G)) := \{\{e, f\} : |e \cap f| = 1\}$ (notar que e y f son subconjuntos de tamaño dos del conjunto V, por lo tanto tiene sentido hacer una intersección entre esos dos conjuntos). Dibuje $L(K_4)$. Sea P el grafo de Petersen. Dibuje $L(P)$. Determine las matrices de adyacencia e incidencia de $L(P)$.

Solución. Para el grafo completo K_4

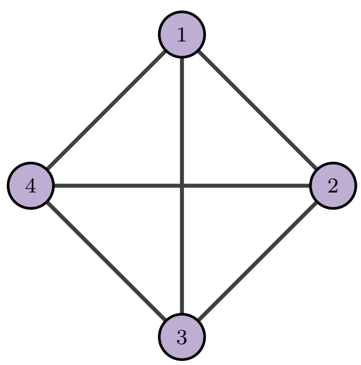


Figura 1: Grafo K_4.

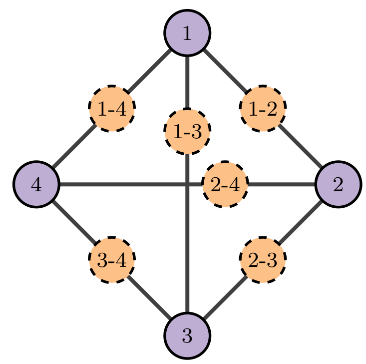


Figura 2: Vértices de $L(K_4)$ construidas desde las aristas de K_4.

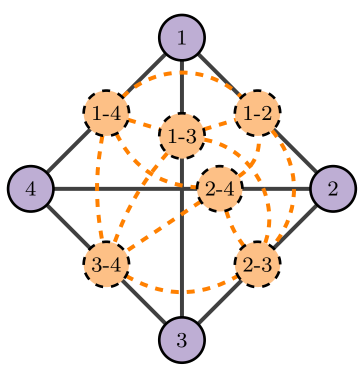


Figura 3: Aristas añadidas en $L(K_4)$.

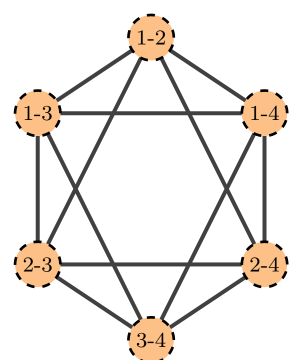


Figura 4: El grafo de línea $L(K_4)$.

Análogamente, para el grafo de Petersen P

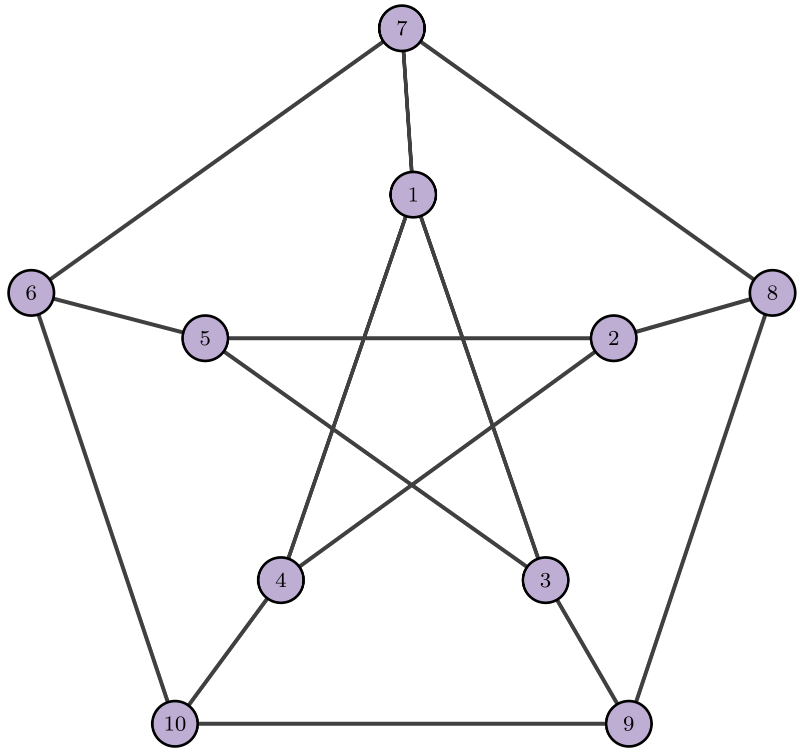


Figura 5: Grafo de Petersen P

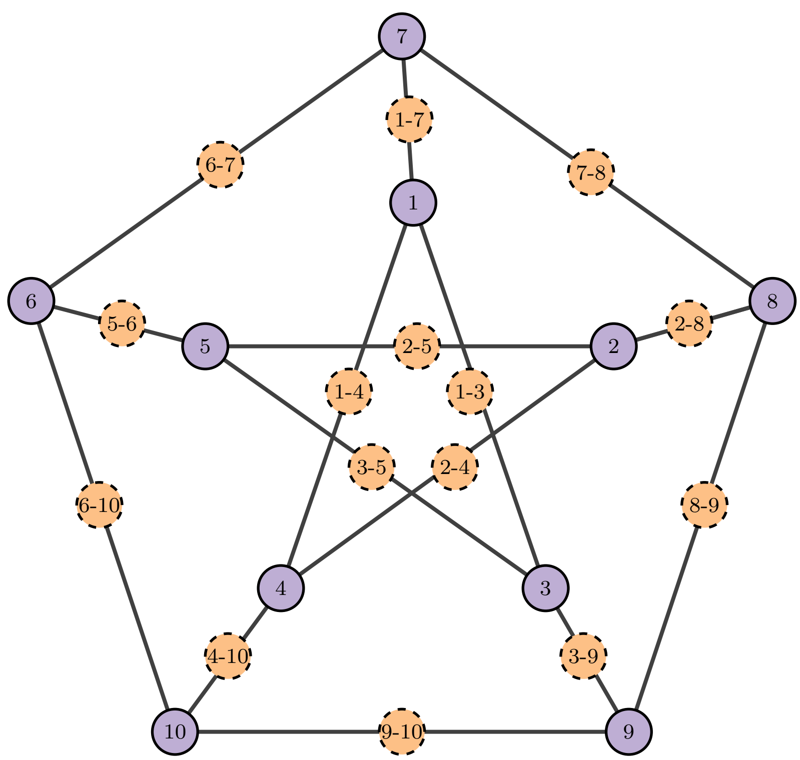


Figura 6: Vértices en $L(P)$ construidas desde aristas de P

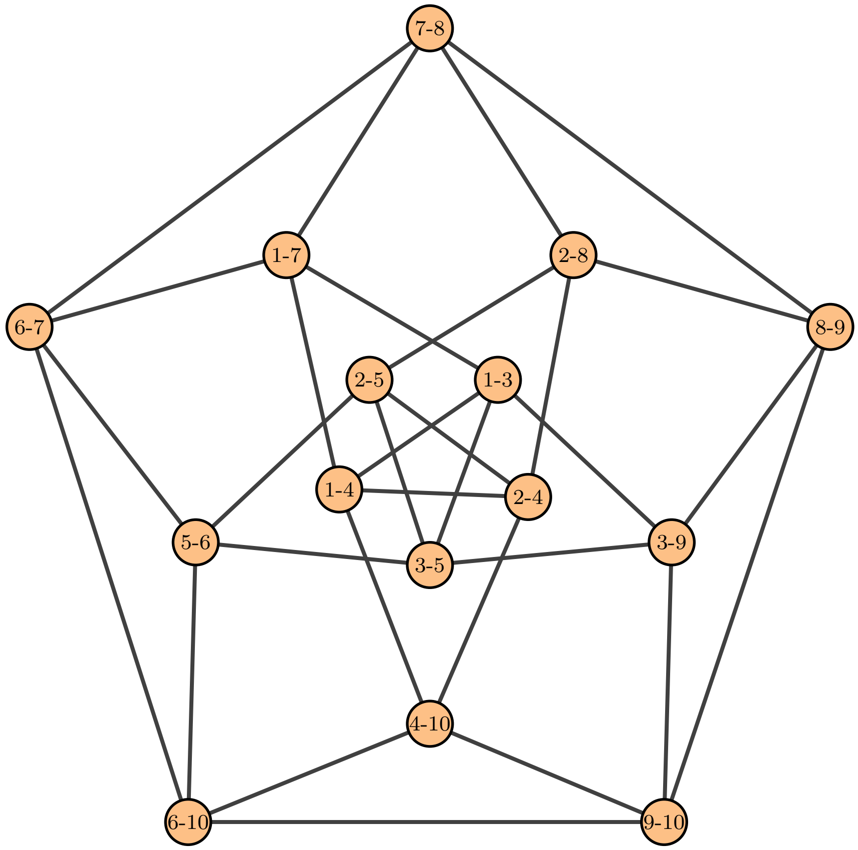


Figura 7: Grafo de línea $L(P)$.

La matriz de adyacencia del grafo de línea $L(P)$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1,3 & 2,4 & 3,5 & 1,4 & 2,5 & 2,8 & 3,9 & 4,10 & 5,6 & 1,7 & 7,8 & 8,9 & 9,10 & 6,10 & 6,7
\end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
1,3 \\ 2,4 \\ 3,5 \\ 1,4 \\ 2,5 \\ 2,8 \\ 3,9 \\ 4,10 \\ 5,6 \\ 1,7 \\ 7,8 \\ 8,9 \\ 9,10 \\ 6,10 \\ 6,7
\end{array}
\end{array}
$$

La matriz de incidencia de $L(P)$ queda para el lector.