

**Listado 01: Euclides, Bézout y los números primos**  
**Teoría de Números (527288)**

1. Escribir las divisiones euclidianas de  $-71$  dividido  $12$  y de  $100$  dividido  $-7$ .
2. Determinar los valores de  $\text{MCD}(314, 159)$ ,  $\text{MCD}(6188, 4709)$ ,  $\text{MCD}(234, 432)$ .
3. Resolver en  $\mathbb{Z}$  las ecuaciones siguientes.
  - (a)  $14x + 77y = 20$
  - (b)  $14x + 77y = 21$
  - (c)  $314x - 159y = 5$
  - (d)  $252x + 588y = -168$
4. Determinar un valor de  $k$  tal que  $277k$  sea el sucesor de un múltiplo de  $364$ .
5. Mostrar: si  $ab = cd$  y  $a \mid d$ , entonces  $c \mid b$ .
6. Suponer que  $a, b$  son coprimos y que  $c, d$  también son coprimos. Mostrar: si  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  es entero, entonces  $b = \pm d$ .
7. Mostrar: para  $n > 1$ , su segundo menor divisor positivo es primo.
8. Mostrar: un número natural  $n > 1$  es un cuadrado perfecto si y sólo si cada primo aparece un número par de veces en la factorización prima de  $n$ .
9. Consecuencia de lo anterior: si  $a, b$  son coprimos positivos y el producto  $ab$  es un cuadrado perfecto, entonces  $a$  y  $b$  son ambos cuadrados perfectos.
10. Consecuencia de lo anterior:  $\sqrt{2}$  no es un número racional. (*Sugerencia: si  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , eliminar denominadores y raíces.*)
11. ¿Es válido el resultado anterior si se reemplaza  $2$  por otro número primo?

**Mínimo común múltiplo**

Si  $a, b$  son positivos, su *mínimo común múltiplo* es el menor número positivo que es múltiplo de ambos. En los siguientes ejercicios se descubrirá una fórmula que conectará el mínimo común múltiplo con el máximo común divisor. Fijamos notaciones:  $a, b$  dos números positivos,  $D$  su máximo común divisor y  $M$  su mínimo común múltiplo.

12. Mostrar:  $M \mid ab$ . (*Sugerencia: suponer que no. ¿Qué ocurriría con el resto de la división?*)
13. Sea  $L = \frac{ab}{M}$ . Mostrar que  $L$  es divisor común de  $a$  y de  $b$ . (*Sugerencia: usar el problema 5.*)
14. Mostrar:  $\frac{ab}{D}$  es múltiplo común de  $a$  y de  $b$ .
15. Combinar los dos ejercicios anteriores para concluir que  $M = \frac{ab}{D}$ . (*Sugerencia: ¿qué ocurre con el valor de una fracción si el denominador crece?*)
16. Calcular el mínimo común múltiplo de  $234$  y  $432$  utilizando esta fórmula.