COMENTARIOS PARA 525402 ANÁLISIS FUNCIONAL II

LEONARDO FIGUEROA C.

Resumen. En este documento hago dos cosas. Primero, cito algunos resultados que no pertenecen a este curso pero son usados en él y posiblemente no sean tan conocidos. Segundo, doy demostraciones detalladas de algunas cosas que en clase quedaron parcialmente pendientes o de tarea informal.

Índice

Lista de resultados

Fecha: 20 de abril de 2015.

1. Resultados previos

1.1. Análisis.

La siguiente definición fue adaptada de la glosa ‘Continuity, modulus of’ de la *Encyclopedia of Mathematics* en `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Continuity,_modulus_of&oldid=30705`.

Definición 1.1 (Módulo de continuidad uniforme)**.** Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Dada $f\colon X \to Y$ el módulo de continuidad uniforme de f, $\omega_f\colon R_{>0} \to R \cup \{\infty\}$, se define por

$$(\forall\, t > 0) \quad \omega_f(t) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d_X(x_1,x_2) \le t}} d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Proposición 1.2 (Propiedades de módulo de continuidad uniforme)**.** *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) y f como en la definición anterior.*

I. *Si f es uniformemente continua entonces $\omega_f(t)$ es finito para todo $t > 0$.*
II. $\lim_{t\to 0^+} \omega_f(t) = 0$ *si y solo si f es uniformemente continua.*
III. *Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos que tiende a 0, entonces* $\lim_{n\to\infty} \omega_f(r_n) = 0$.

Demostración. Tarea (2015-I). □

Teorema 1.3 (Teorema de aproximación polinomial de Weierstrass)**.** *Sea E un subconjunto acotado de R^N y sea $f\colon E \to R$ uniformemente continua. Entonces existe una sucesión de polinomios $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a f en E.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. IV.16.1]. □

1.2. Topología.

Teorema 1.4 (Teorema de extensión de Tietze)**.** *Sea X un espacio topológico normal, C un cerrado de X y $f\colon C \to R$ continua. Entonces f posee una extensión continua $f_*\colon X \to R$. Si existe una cota $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in C$ entonces la extensión f_* puede tomarse de modo que $|f_*(x)| \le M$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. I.3.1]. □

1.3. Análisis Funcional.

La siguiente definición aparece [Bre11, § 3.4].

Definición 1.5 (Topología débil-$\star$)**.** Sea E un espacio de Banach. La topología débil-$\star$ es la topología definida sobre E' más gruesa (esto es, con la menor cantidad de conjuntos abiertos) que hace continuos a los funcionales $(\mathcal{J}(x))_{x\in E}$ definidos por

$$(\forall\, x \in E)\ (\forall\, F \in E') \quad \mathcal{J}(x)(F) := F(x).$$

Proposición 1.6 (Topología debil-$\star$ es Hausdorff)**.** *Sea E un espacio de Banach. Entonces la topología débil-$\star$ de E' es Hausdorff.*

Demostración. Esto es [Bre11, Prop. 3.11]. □

Proposición 1.7 (Convergencia en topología débil-$\star$)**.** *Sea E un espacio de Banach y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con miembros en E'. Entonces*

I. $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en E'-débil-$\star$ si y solo si para todo $x \in E$,* $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$.

ii. *Si* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *fuerte (esto es, en la norma para funcionales* $E' \ni G \mapsto \|G\|_{E'} := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|G(x)|}{\|x\|_E} \in R$*) entonces* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en* E'*-débil (esto es, dado cualquier* $\mathcal{G} \in (E')'$, $\mathcal{G}(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{G}(F)$*) y si* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en* E'*-débil entonces* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en* E'*-débil-*$\star$.

iii. *Si* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en* E'*-débil-*$\star$ *entonces* $(\|F_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y* $\|F\|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{E'}$.

iv. *Si* $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ *en* E'*-débil-*$\star$ *y* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ *en* E *entonces* $F_n(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$.

Demostración. Esto es [Bre11, Prop. 3.13] □

1.4. Teoría de la Medida.

Teorema 1.8 (Teorema de Lusin)**.** *Sea* E *un conjunto medible y acotado en* R^N *y sea* $f\colon E \to R$ *medible. Entonces, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un cerrado* $E_\varepsilon \subset E$ *tal que* $|E \setminus E_\varepsilon| \leq \varepsilon$ *y* $f|_{E_\varepsilon}$ *es continua.*

Demostración. Esto es [DiB02, Th. III.5.2]. □

Particularizamos la definición de convergencia en medida de y un resultado de relación de esta noción con la de la convergencia puntual casi en todas partes dados en [Bog07] a los casos de nuestro interés. La siguiente definición fue particularizada desde [Bog07, Def. 2.2.2].

Definición 1.9 (Convergencia en medida)**.** Sea E un conjunto medible y acotado de R^N y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre E y medibles. Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a una función medible f si, cualquiera sea $c > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \in E \,|\, |f(x) - f_n(x)| \geq c\}| = 0.$$

Teorema 1.10 (Convergencia en medida implica convergencia casi en todas partes de subsucesión)**.** *Sea* E *un conjunto medible y acotado de* R^N*. Si una sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones definidas sobre* E *y medibles converge en medida a una función medible* f*, entonces la sucesión posee una subsucesión* $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge a* f *puntualmente casi en todas partes.*

Demostración. Esto es una particularización de [Bog07, Th. 2.2.5]. □

El resultado siguiente podría citarse tal como los anteriores (aparece, por ejemplo, en [DiB02, Prob. V.7.1–2]), pero su demostración ilustra el nivel de familiaridad con las técnicas de teoría de la medida que es necesario para este curso.

Corolario 1.11 (Convergencia en $L^p(R^N)$ implica convergencia casi en todas partes de subsucesión)**.** *Sea* $p \in [1, \infty]$*. Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión con miembros en* $L^p(R^N)$ *y* $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ *en* $L^p(R^N)$ *entonces existe una subsucesión* $(f^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge a* f *puntualmente casi en todas partes.*

Demostración. $\boxed{\text{Caso } p = \infty}$ En este caso la sucesión original $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la tesis deseada; en efecto, de la definición de norma $L^\infty(R^N)$ y de la noción de supremo esencial,

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty &= \text{ess-supp}\,|f - f_n| \\ &= \inf\left\{a \in R \,\middle|\, \mu\left(\left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > a\right\}\right) = 0\right\}. \end{aligned}$$

donde hemos denotado a la medida de Lebesgue por μ para evitar el exceso de líneas verticales. Combinando la definición de la noción de límite con el hecho de que el ínfimo que aparece en la expresión anterior es menor o igual a su distancia al número 0 y el hecho de que si un número es mayor que el ínfimo de un conjunto entonces es una cota superior para el conjunto obtenemos

$$(\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N})\ n \geq N_\epsilon \implies \mu\left(\left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > \epsilon\right\}\right) = 0.$$

Definamos al conjunto

$$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N_{2^{-j}}} \left\{z \in R^N \mid |f(z) - f_n(z)| > 2^{-j}\right\}.$$

Al ser X unión numerable de conjuntos de medida nula, X es de medida nula. Ahora, si $z \notin X$, como el complemento de una unión es la intersección de los complementos

$$(\forall\, j \in \mathbb{N})\ n \geq N_{2^{-j}} \implies |f(z) - f_n(z)| \leq 2^{-j}.$$

Esto es, $f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} f(z)$ cuando z está fuera del conjunto de medida nula X.

$\boxed{\text{Caso } p \in [1, \infty)}$ Comenzaremos tratando el caso ligeramente distinto en el que f y cada uno de los f_n pertenece a $L^p(Q)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(Q)$, donde Q es un hipercubo de la forma $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N) \subset R^N$ donde los a_i y los b_i son tales que la medida de Q es 1. Como para cualquier $g \in L^p(Q)$ se tiene

$$\|g\|_{L^1(Q)} \leq \|1\|_{L^{p'}(Q)} \|g\|_{L^p(Q)} = \|g\|_{L^p(Q)}$$

(donde p' es el conjugado de p; esto es, $1/p + 1/p' = 1$), tenemos que f y los f_n pertenecen a $L^1(Q)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^1(Q)$. Sea ahora $c > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} c\,\mu\left(\{x \in Q \,|\, |f - f_n| \geq c\}\right) &= \int_{\{x \in Q \,|\, |f - f_n| \geq c\}} c\, dy \\ &\leq \int_{\{x \in Q \,|\, |f - f_n| \geq c\}} |f - f_n|\ dy \leq \int_Q |f - f_n|\ dy \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Como $c > 0$ esto implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a f en el conjunto acotado Q de acuerdo a la Definición 1.9. Por lo tanto, podemos apelar al Teorema 1.10 para concluir que existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f en casi todas partes de Q. Nos conviene expresar esto de la siguiente manera: Existe una función estrictamente creciente $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto $W \subset Q$ tal que $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q \setminus W$.

Volvemos ahora al caso en el que f y los f_n pertenecen a $L^p(R^N)$ y $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$. Como $\mathbb{Z}^N$ es numerable existe una biyección $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^N$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos entonces el hipercubo

$$Q_m := [\beta(m)_1, \beta(m)_1 + 1) \times \cdots \times [\beta(m)_N, \beta(m)_N + 1).$$

Entonces $R^N = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m$. Esta unión es numerable y disjunta. La función $f|_{Q_1}$ y los $f_n|_{Q_1}$ pertenecen a $L^p(Q_1)$ y heredan la propiedad $f_n|_{Q_1} \xrightarrow{n\to\infty} f|_{Q_1}$ en $L^p(Q_1)$. Por lo tanto, de la discusión anterior sabemos que existen una función creciente $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto de medida nula $W_1 \subset Q_1$ tales que $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q_1 \backslash W_1$ (pues la restricción a $Q_1 \backslash W_1$ de la restricción a Q_1 de f es sencillamente $f|_{Q_1 \backslash W_1}$ y similarmente para los $f_{\phi_1(n)}$). Ahora, $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, al ser subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, también converge en $L^p(R^N)$ a f. Por lo tanto, la función $f|_{Q_2}$ y los

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 12 & \cdots \\
3 & \mathbf{3} & 3 & 3 & 3 & 12 & 23 & \cdots \\
4 & 4 & \mathbf{4} & 8 & 9 & 23 & 27 & \cdots \\
6 & 6 & 8 & \mathbf{9} & 12 & 27 & 36 & \cdots \\
8 & 8 & 9 & 11 & \mathbf{23} & 35 & 42 & \cdots \\
9 & 9 & 11 & 12 & 27 & \mathbf{36} & 44 & \cdots \\
10 & 10 & 12 & 18 & 32 & 42 & \mathbf{49} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

FIGURA 1. Ilustración de subsucesión diagonal. La columna j (numerada a partir de 1) contiene los valores que asume $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_j$ donde cada $\phi_j \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es un ejemplo de función estrictamente creciente. Los valores en la columna $j+1$ fueron seleccionados desde la columna j y la sucesión diagonal, a partir de su m-ésima entrada, obtiene todos sus valores, en último término, desde la columna m.

$f_{\phi_1(n)}\big|_{Q_2}$ pertencen a $L^p(Q_2)$ y heredan la propiedad $f_{\phi_1(n)}\big|_{Q_2} \xrightarrow{n\to\infty} f\big|_{Q_2}$. De nuevo existen una sucesión creciente $\phi_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un conjunto de medida nula $W_2 \subset Q_2$ tales que $(f_{\phi_1(\phi_2(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $Q_2 \setminus W_2$. Importantemente, por ser $(f_{\phi_1(\phi_2(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(f_{\phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, la primera converge a f en $Q_1 \setminus W_1$ también. Continuando con este procedimiento tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existen funciones crecientes $\phi_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y conjuntos de medida nula $W_m \subset Q_m$ tales que $(f_{(\phi_1\circ\cdots\circ\phi_m)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\bigcup_{l\le m}(Q_l \setminus W_l)$.

Sea $\psi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función seleccionadora diagonal definida por

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad \psi(n) := (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)(n).$$

Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, la subsucesión diagonal $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, a partir de su m-ésima entrada, es subsucesión de $(f_{(\phi_1\circ\cdots\circ\phi_m)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. Figura 1) y por lo tanto hereda de ésta la propiedad de que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\bigcup_{l\le m}(Q_l \setminus W_l)$. Como esto sucede cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}} (Q_l \setminus W_l) = R^N \setminus \bigcup_{l\in\mathbb{N}} W_l.$$

Como $W := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} W_l$ es unión numerable de conjuntos de medida nula, W es de medida nula y hemos obtenido el resultado deseado. □

Teorema 1.12 (Cambio de variable lineal e invertible)**.** *Sea $L \colon R^N \to R^N$ lineal e invertible. Entonces, $g \in L^1(R^N)$ si y solo si $g \circ L \in L^1(R^N)$. Además,*

$$\int_{R^N} g(L(y))\, |\det(\nabla L(y))|\, dy = \int_{R^N} g(x)\, dx$$

Demostración. Esto sale de combinar [Bog07, Th. 3.6.1], [Bog07, Cor. 3.6.4] y de descomponer R^N en una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos. □

Observación 1.13 (Respecto a los cambios de variable). Para cambios de variable no lineales ver, por ejemplo, [Bog07, § 3.7] o [Rud66, Th. 8.26–28]. Un resultado muy general que ni siquiera exige invertibilidad de la transformación aparece en

[EG92, Th. 3.3.3/2], pero involucra otras medidas que no se suelen estudiar en los cursos anteriores.

2. Resultados relevantes para el capítulo 2 de [Tar07]

Este resultado aparece mencionado la página 11 de [Tar07] pero en su momento no lo pude encontrar entre los libros que suelo usar para encontrar resultados de análisis real o teoría de la medida.

Teorema 2.1 (Densidad débil-$\star$-secuencial de $C_c(R^N)$ en $L^\infty(R^N)$)**.** *$C_c(R^N)$ es secuencialmente denso en la topología débil-$\star$ de $L^\infty(R^N)$.*

Demostración. Esta demostración la construí a partir de una para un resultado ligeramente distinto que hallé en `http://math.stackexchange.com/questions/23387/on-the-density-of-c0-1-in-the-space-l-infty0-1`.

Sea $f \in L^\infty(R^N)$ y asumimos sin pérdida de generalidad que $|f| \leq \|f\|_\infty$ en todo R^N. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos f_n mediante la fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| < n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $|f_n| \leq \|f\|_\infty$. Por el teorema de Lusin (teorema 1.8, usando $E = B(0,n)$ y $f = f_n$) sabemos que, dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un cerrado $E_{n,m} \subset B(0,n)$ tal que $f_n|_{E_{n,m}}$ es continua y $|B(0,n) \setminus E_{n,m}| \leq 1/m$.

Definimos los conjuntos $A_{n,m} = \{x \in R^N \mid n + \zeta(m) \leq |x| \leq n+1\}$ y $A'_{n,m} = \{x \in R^N \mid n \leq |x| < n + \zeta(m)\}$ donde $\zeta(m) \in (0,1)$ se elige de tal manera que $\left|A'_{n,m}\right| \leq 1/m$ y notamos que $A_{n,m}$ es cerrado. Entonces $f_{n,m} := f_n|_{E_{n,m} \cup A_{n,m}}$ también es continua (pues lo es en $E_{n,m}$ y en $A_{n,m}$ (donde es nula) y esos conjuntos son disjuntos entre sí) y definida sobre un dominio cerrado. Por su condición de restricción de f_n, $|f_{n,m}| \leq \|f\|_\infty$. Por el teorema de extensión de Tietze (teorema 1.4) se puede extender cada $f_{n,m}$ a una función continua $\hat{f}_{n,m} \colon \overline{B(0,n+1)} \to R$ que también es acotada por $\|f\|_\infty$. Como $A_{n,m}$ está contenido en el dominio de la función que fue extendida, $\hat{f}_{n,m}$ se anula ahí también. Por lo tanto, la extensión por cero de $\hat{f}_{n,m}$ a todo R^N, que denotamos por $\tilde{f}_{n,m}$, pertenece a $C_c(R^N)$. Notamos que $\tilde{f}_{n,m}$ difiere de f_n solamente en un subconjunto de $(B(0,n) \setminus E_{n,m}) \cup A'_{n,m}$, el cual tiene medida menor o igual que $2/m$ y que hereda $\|\tilde{f}_{n,m}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Sea ahora $g \in L^1(R^N)$. Entonces

$$\int_{R^N} (f - \tilde{f}_{n,n})\, g = \int_{R^N} (f - f_n)\, g + \int_{R^N} (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g.$$

El primer término del lado derecho tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por el teorema de convergencia dominada pues los $f_n\, g$ tienen puntualmente a $f\, g$ y cada $f_n\, g$ es dominada por la función $|fg| \in L^1(R^N)$. Para el segundo se tiene

$$\left| \int_{R^N} (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g \right| \leq \int\limits_{(B(0,n) \setminus E_{n,n}) \cup A'_{n,n}} \left| (f_n - \tilde{f}_{n,n})\, g \right| \leq 2\|f\|_\infty \int\limits_{(B(0,n) \setminus E_{n,n}) \cup A'_{n,n}} |g|$$

y la última expresión tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue. $\square$

Recordamos desde [Tar07, Eq. (2.3)] que si f y g son miembros de $C_c(R^N)$ y p, q y r son miembros de $[1,\infty]$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, entonces $f \star g$ definido por $(f \star g)(x) := \int_{R^N} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{R^N} f(y)g(x-y)\,dy$ también pertenece a $C_c(R^N)$ y

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.1}$$

Esta desigualdad permite extender la noción de convolución a espacios $L^p(R^N)$ de exponentes compatibles de la manera que sigue:

Definición 2.2 (Convolución en $L^p(R^N) \times L^q(R^N)$ mediante límite)**.**

1. Sean $p, q \in [1,\infty)$ tales que r definido por $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ pertenece a $[1,\infty]$, $f \in L^p(R^N)$ y $g \in L^q(R^N)$. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones con miembros en $C_c(R^N)$ tales que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$ y $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ en $L^q(R^N)$. Definimos a $f \star g$ como el límite en $L^r(R^N)$ de $(f_n \star g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sea $f \in L^\infty(R^N)$ y $g \in L^1(R^N)$. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones con miembros en $C_c(R^N)$ tales que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ y $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ en $L^1(R^N)$. Definimos a $f \star g$ como el límite en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ de $(f_n \star g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 2.3 (Convolución en $L^p(R^N) \times L^q(R^N)$ mediante integral)**.** *Sean p, q y r miembros de $[1,\infty]$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $f \in L^p(R^N)$ y $g \in L^q(R^N)$. Entonces las definiciones de $f \star g \in L^r(R^N)$ dadas en Definición 2.2*

I. *son consistentes (definen un elemento de $L^r(R^N)$ que no depende de qué sucesiones en particular se usen para aproximar a f y g),*
II. *satisfacen la desigualdad*

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_q,$$

III. *coinciden en casi todo $x \in R^N$ con la función $x \mapsto \int_{R^N} f(x-y)g(y)\,dy$.*

Demostración. $\boxed{\text{Caso } p, q \in [1,\infty)}$ La sucesión $(f_n \star g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^r(R^N)$; en efecto,

$$\begin{aligned}
\|f_n \star g_n - f_m \star g_m\|_r &\leq \|f_n \star (g_n - g_m)\|_r + \|(f_n - f_m) \star g_m\|_r \\
&\overset{(2.1)}{\leq} \|f_n\|_p \|g_n - g_m\|_q + \|f_n - f_m\|_p \|g_m\|_q \xrightarrow{m,n\to\infty} \|f\|_p 0 + 0 \|g\|_q = 0.
\end{aligned}$$

Como $L^r(R^N)$ es un espacio de Banach existe z tal que $f_n \star g_n \to z$ en $L^r(R^N)$. Además, por propiedad de espacios normados

$$\|z\|_r = \lim_{n\to\infty} \|f_n \star g_n\|_r \overset{(2.1)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \Big(\|f_n\|_p \|g_n\|_q \Big) = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.2}$$

Tomemos ahora un segundo par de sucesiones $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con miembros en $C_c^\infty(R^N)$ que convergen a f en $L^p(R^N)$ y a g en $L^q(R^N)$, respectivamente. Por las mismas razones ya expuestas la sucesión $(\tilde{f}_n \star \tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^r(R^N)$ a algún $\tilde{z}$. Como $(f_n - \tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n - \tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones con miembros de $C_c^\infty(R^N)$ que tienden a la función nula en $L^p(R^N)$ y $L^q(R^N)$, respectivamente, $(f_n \star (g_n - \tilde{g}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $((f_n - \tilde{f}_n) \star \tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también poseen límites en $L^r(R^N)$ que por la desigualdad (2.2) tiene que ser la función nula. Así,

$$\begin{aligned} z-\tilde{z} &= \lim_{n\to\infty}\left(f_n\star g_n-\tilde{f}_n\star\tilde{g}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f_n\star(g_n-\tilde{g}_n)+(f_n-\tilde{f}_n)\star\tilde{g}_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(f_n\star(g_n-\tilde{g}_n)\right)+\lim_{n\to\infty}\left((f_n-\tilde{f}_n)\star\tilde{g}_n\right)=0+0, \end{aligned}$$

donde los límites que aparecen son en el sentido de $L^r(R^N)$. Tenemos entonces que el límite no depende de la sucesiones aproximantes elegidas y que satisface la desigualdad deseada.

Para probar la parte III asumimos primero que $r\in[1,\infty)$ y definimos las funciones $a_n\colon R^N\to R\cup\{\infty\}$ y $b_n\colon R^N\to R\cup\{\infty\}$ por

$$a_n(x):=\left[\int_{R^N}|f(x-y)|^p\,|(g-g_n)(y)|^q\;dy\right]^{1/r}$$

y

$$b_n(x):=\left[\int_{R^N}|(f-f_n)(x-y)|^p\,|g_n(y)|^q\;dy\right]^{1/r}.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{R^N}|a_n(x)|^r\;dx &= \int_{R^N}\int_{R^N}|f(x-y)|^p\,|(g-g_n)(y)|^q\;dy\,dx\\ &\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_{R^N\times R^N}|f(x-y)|^p\,|(g-g_n)(y)|^q\;d(x,y)\\ &\overset{(u,v)\leftarrow(x-y,y)}{=}\int_{R^N\times R^N}|f(u)|^p\,|(g-g_n)(v)|^q\;d(u,v)=\|f\|_p^p\,\|g-g_n\|_q^q, \end{aligned}$$

concluimos que $a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ en $L^r(R^N)$. Similarmente se prueba que $b_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ en $L^r(R^N)$. Ya sabemos que $(f_n\star g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^r(R^N)$ a un límite al que llamamos z. Por el Corolario 1.11 sabemos entonces que existe $\phi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente y $W\subset R^N$ de medida nula tal que para casi todo $x\in R^N\setminus W$, $a_{\phi(n)}(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, $b_{\phi(n)}(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ y $(f_{\phi(n)}\star g_{\phi(n)})(x)\xrightarrow{n\to\infty}z(x)$. Para todo $x\in R^N\setminus W$,

$$\begin{aligned} &\left|\int_{R^N}f(x-y)g(y)\,dy-\left[f_{\phi(n)}\star g_{\phi(n)}\right](x)\right|\\ &\quad=\left|\int_{R^N}f(x-y)g(y)\,dy-\int_{R^N}f_{\phi(n)}(x-y)g_{\phi(n)}(y)\,dy\right|\\ &\quad\le\int_{R^N}|f(x-y)|\left|(g-g_{\phi(n)})(y)\right|\;dy+\int_{R^N}\left|(f-f_{\phi(n)})(x-y)\right|\left|g_{\phi(n)}(y)\right|\;dy. \end{aligned}\tag{2.3}$$

De nuevo para todo $x\in R^N\setminus W$,

$$\begin{aligned} &\int_{R^N}\left(|f(x-y)|^p\left|(g-g_{\phi(n)})(y)\right|^q\right)^{1/r}|f(x-y)|^{1-p/r}\left|(g-g_{\phi(n)})(y)\right|^{1-q/r}\;dy\\ &\quad\le a_{\phi(n)}(x)\left[\int_{R^N}|f(x-y)|^p\;dy\right]^{\frac{1-p/r}{p}}\left[\int_{R^N}\left|(g-g_{\phi(n)})(y)\right|^q\right]^{\frac{1-q/r}{q}}\\ &\quad=a_{\phi(n)}(x)\,\|f\|_p^{1-p/r}\left\|g-g_{\phi(n)}\right\|_q^{1-q/r}\xrightarrow{n\to\infty}0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\int_{R^N}\left(\left|(f-f_{\phi(n)})(x-y)\right|^p\left|g_{\phi(n)}(y)\right|^q\right)^{1/r}\left|(f-f_{\phi(n)})(x-y)\right|^{1-p/r}\left|g_{\phi(n)}(y)\right|^{1-q/r}\;dy\\ &\quad\le b_{\phi(n)}(x)\left[\int_{R^N}\left|(f-f_{\phi(n)})(x-y)\right|^p\;dy\right]^{\frac{1-p/r}{p}}\left[\int_{R^N}\left|g_{\phi(n)}(y)\right|^q\right]^{\frac{1-q/r}{q}}\\ &\quad=b_{\phi(n)}(x)\left\|f-f_{\phi(n)}\right\|_p^{1-p/r}\left\|g_{\phi(n)}\right\|_q^{1-q/r}\xrightarrow{n\to\infty}0, \end{aligned}$$

donde en ambos casos hemos usado la desigualdad de Hölder para producto triple con exponentes r, $\frac{p}{1-p/r}$ y $\frac{q}{1-q/r}$. Usando estos límites en (2.3) tenemos

$$(\forall\, x \in R^N \setminus W) \quad z(x) = \lim_{n\to\infty}(f_{\phi(n)} \star g_{\phi(n)})(x) = \int_{R^N} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Luego la convolución definida por medio de límite en $L^r(R^N)$, z, coincide casi en todas partes con (y por lo tanto pertenece a la misma clase $L^r(R^N)$ que) $x \mapsto \int_{R^N} f(x-y)g(y)\,dy$. Si $r=\infty$ el argumento se simplifica porque en (2.3) basta usar la desigualdad de Hölder y no es necesario definir las funciones a y b.

$\boxed{\text{Caso } p=\infty \text{ o } q=\infty}$ Aquí hay solamente un caso relevante: $p=\infty$ implica que $q=1$ y $r=\infty$ (el caso $(p,q,r)=(1,\infty,\infty)$ es esencialmente el mismo). Veamos primero que el límite al que alude la Definición 2.2 efectivamente existe. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones aludidas en la parte relevante de esta definición. Ya sabemos de la discusión en [Tar07] que $f_n \star g_n \in L^\infty(R^N)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Usaremos la notación $\breve{g}_n$ y $\breve{g}$ para denotar a $x\mapsto g_n(-x)$ y $x\mapsto g(-x)$, respectivamente; notemos que se hereda que $\breve{g}_n \in C_c^\infty(R^N)$ y que $\breve{g}_n \xrightarrow{n\to\infty} \breve{g}$ en $L^1(R^N)$. Así, dada una función $h\in L^1(R^N)$ arbitraria, sabemos por la parte anterior con $p=1$ y $q=1$ que $h\star\breve{g}_n \xrightarrow{n\to\infty} h\star\breve{g}$ en $L^1(R^N)$ y que las convoluciones involucradas, en principio definidas mediante la primera parte de la Definición 2.2 se pueden representar mediante la fórmula integral casi en todas partes. Ahora,

$$\begin{aligned}\int_{R^N}(f_n\star g_n)h &= \int_{R^N}\int_{R^N} f_n(y)g_n(x-y)\,dy\,h(x)\,dx\\ &= \int_{R^N}\int_{R^N} h(x)\breve{g}_n(y-x)\,dx\,f_n(y)\,dy = \int_{R^N}(h\star\breve{g}_n)f_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_{R^N}(h\star\breve{g})f.\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Fubini —al cual podemos apelar porque $(x,y)\mapsto f_n(y)g_n(x-y)$ pertenece a $C_c^\infty(R^N\times R^N)$ lo que a su vez asegura que $(x,y)\mapsto f_n(y)g_n(x-y)h(x)$ pertenece a $L^1(R^N\times R^N)$— y la parte IV de la Proposición 1.7. Notemos que el límite, como función de $h\in L^1(R^N)$, pertenece al dual de $L^1(R^N)$; en efecto,

$$\left|\int_{R^N}(h\star\breve{g})f\right| \le \|f\|_\infty\|h\star\breve{g}\|_1 \le \|f\|_\infty\|\breve{g}\|_1\|h\|_1$$

(recordemos que II en el caso $p=q=1$ ya fue demostrado en la parte anterior). Luego, $h\mapsto\int_{R^N}(f_n\star g_n)h$ converge en $[L^1(R^N)]'$-débil-$\star$ a $h\mapsto\int_{R^N}(h\star\breve{g})f$. Notemos también que, cualquiera sea $x\in R^N$, la función $y\mapsto g(x-y)$ pertenece a $L^1(R^N)$ con la misma norma que g, debido a la invarianza de la medida de Lebesgue respecto a reflexiones y traslaciones. Luego, directamente de la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\left\|x\mapsto\int_{R^N} f(y)g(x-y)\,dy\right\|_\infty \le \|f\|_\infty\|g\|_1.$$

Como por el teorema de Tonelli y la fórmula de cambio de variable lineal dada en el Teorema 1.12, $(x,y)\mapsto h(x)g(x-y)$ pertenece a $L^1(R^N\times R^N)$, inferimos que $(x,y)\mapsto h(x)g(x-y)f(y)$ pertenece a $L^1(R^N\times R^N)$. De esta manera podemos apelar al teorema de Fubini para afirmar que

$$\int_{R^N}(h\star\breve{g})f = \int_{R^N}\int_{R^N} f(y)g(x-y)\,dy\,h(x)\,dx.$$

Así, mediante la identificación tradicional que se hace entre $[L^1(R^N)]'$ y $L^\infty(R^N)$ concluimos que $f_n\star g_n$ converge en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ a $x\mapsto\int_{R^N} f(y)g(x-y)\,dy$. $\square$

Recordamos que la función $\varrho\colon R^N \to R$ definida por

$$(\forall\, x \in R^N) \quad \varrho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_c^\infty(R^N)$.

Proposición 2.4 (Ejemplo de falla de asociatividad de convolución)**.** *Sobre R sea $f_1 \equiv 1$ (función constante), $f_2 = \varrho'$ y f_3 la función de Heaviside (esto es, $f_3(x) = 0$ si $x < 0$ y $f_3(x) = 1$ si $x \geq 0$). Entonces $(f_1 \star f_2) \star f_3 \neq f_1 \star (f_2 \star f_3)$.*

Demostración. Observamos que f_2 posee las siguientes propiedades:

$$f_2 \in C_c^\infty(R), \quad \operatorname{supp}(f_2) = [-1,1], \quad \int_R f_2(x)\,dx = 0, \quad \int_R (1-y) f_2(y)\,dy \neq 0$$

(las últimas dos se pueden demostrar observando que las integrales no cambian si se restringen a $(-1,1)$ y efectuando integración por partes). Observamos que, cualquiera sea $x \in R$, $(f_1 \star f_2)(x) = \int_R f_1(x-y) f_2(y)\,dy = \int_R f_2(y)\,dy = 0$, por lo que $f_1 \star f_2 \equiv 0$. Por otro lado, sea $f_4 := f_2 \star f_3$. Como $f_2 \in L^1(R)$ y $f_3 \in L^\infty(R)$, [Tar07, Lem. 2.1] nos dice que $f_4 \in BUC(R)$; en particular, f_4 es continua. Además, para todo $x \in R$,

$$f_4(x) = \int_R f_2(y) f_3(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^x f_2(y)\,dy,$$

de lo que se desprende que f_4 se anula si $x > 1$ o $x < -1$. Luego, $\operatorname{supp}(f_4)$ está contenido en $[-1,1]$ y así $f_4 \in C_c(R)$. Como $f_1 \in L^\infty(R)$ y $f_4 \in L^1(R)$ su convolución $f_1 \star f_4$ está bien definida y pertenece a $BUC(R)$. Además, para todo $z \in R$,

$$\begin{aligned}
(f_1 \star f_4)(z) &= \int_R f_1(z-x) f_4(x)\,dx = \int_R f_4(x)\,dx = \int_{-1}^1 f_4(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^x f_2(y)\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^x f_2(y)\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi_{(-1,x)}(y) f_2(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^1 f_2(y) \int_{-1}^1 \chi_{(-1,x)}(y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 f_2(y) \int_{-1}^1 \chi_{(y,1)}(x)\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^1 f_2(y) \int_y^1 1\,dx\,dy = \int_{-1}^1 f_2(y)(1-y)\,dy,
\end{aligned}$$

donde se usó el teorema de Fubini para $(-1,1) \times (-1,1)$ y el hecho de que si $-1 < x, y < 1$ entonces $\chi_{(-1,x)}(y) = \chi_{(y,1)}(x)$. De esta manera, $(f_1 \star f_2) \star f_3 = 0 \star f_3 \equiv 0$, pero $f_1 \star (f_2 \star f_3) = f_1 \star f_4 \equiv \int_{-1}^1 f_2(y)\,dy \neq 0$. □

Observación 2.5 (Contraejemplo viola restricciones sobre parámetros)*.* En el ejemplo anterior $f_1 \in L^a(R)$ con $a = \infty$ solamente, $f_2 \in L^b(R)$ cualquiera sea $b \in [1,\infty]$ y $f_3 \in L^c(R)$ con $c = \infty$ solamente. De cualquier manera que se elija a b se viola al menos una de las condiciones

$$a, b, c \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1; \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2,$$

que son las que garantizan (cf. [Tar07, p. 11]) en general la asociatividad de la convolución de funciones en $L^a(R^N)$, $L^b(R^N)$ y $L^c(R^N)$.

Referencias

[Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Volumes I and II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007. MR 2267655 (2008g:28002)

[Bre11] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)

[DiB02] Emmanuele DiBenedetto, *Real analysis*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002. MR 1897317 (2003d:00001)

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001)

[Rud66] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966. MR 0210528 (35 #1420)

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)