PROBLEMA 2. Considere un espacio muestral dado por $\Omega = \{2, 4, 6, 8\}$. Determina el σ álgebra generado por los siguientes conjuntos:

a) $C_1 = \{\{2\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$

- $\Omega \in \sigma(C_1)$
- $\{2\}, \{2,4\}, \{6\} \in \sigma(C_1)$
- Unimos conjuntos en $\sigma(C_1)$, y así
  $\{2, 6\} \in \sigma(C_1)$, $\{2,4,6\} \in \sigma(C_1)$
- Incluimos los complementos de los conjuntos que ya conocemos de $\sigma(C_1)$

  $\{2\}^c = \{4, 6, 8\} \in \sigma(C_1)$ $\qquad$ $\{2,6\}^c = \{4,8\} \in \sigma(C_1)$

  $\{2,4\}^c = \{6, 8\} \in \sigma(C_1)$ $\qquad$ $\{2,4,6\}^c = \{8\} \in \sigma(C_1)$.

  $\{6\}^c = \{2, 4, 8\} \in \sigma(C_1)$ $\qquad$ $\Omega^c = \emptyset \in \sigma(C_1)$

- $(\cdots)$

Al final del ejercicio, se debe llegar a

$$\sigma(C_1) = \mathcal{P}(\Omega)$$

PROBLEMA 1 (2A). i) Muestre que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n, b+1/n)$ y por lo tanto, que toda σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos abiertos también contiene a todos los intervalos cerrados.

i. [$\subseteq$] Idea: $\forall n \in \mathbb{N}: a - \frac{1}{n} < a \overset{x}{\leq} b < b + \frac{1}{n}$

Para el ejercicio supondremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

Sabemos que para cualquier n natural se tiene que

$$a - \frac{1}{n} < a < b < b + \frac{1}{n}$$

Sea $x \in [a,b]$, entonces para todo natural n se cumplirá que

$$a - \frac{1}{n} < a \leq x \leq b < b + \frac{1}{n} \Rightarrow a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x \in \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

para todo n natural.

Dada la validez del argumento anterior para todo n natural concluimos que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

[$\supseteq$] Idea: Prop. Arq., $\rightarrow \leftarrow$, contrarrecíproco.

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

$$\left[[a,b]^c \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right]^c \right]$$

Procederemos por contrarrecíproco.

Sea $x \in [a,b]^c$, entonces

(1) • Si $x < a$, por propiedad arquimediana existe un K natural tal que $x < a - \frac{1}{K} < a$. En consecuencia

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right]^c$$

(2) • Si $x > b$, por propiedad arquimediana existe un K_2 natural tal que $x > b + \frac{1}{K_2}$. En consecuencia

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x \in \left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right]^c.$$

De (1) y (2) podemos afirmar que $[a,b]^c \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right]^c$ lo que equivale a decir que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \subseteq [a,b].$$

De todo lo anterior, tenemos que

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)$$

Como toda σ-álgebra es cerrada bajo una cantidad numerable de intersecciones, tendremos que toda σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos (a,b) tambien contiene a todos los intervalos cerrados $[a,b]$.

ii) Similarmente, muestre que $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+1/n, b-1/n]$, y por lo tanto que toda σ-álgebra que contiene a todos los intervalos cerrados, también contiene a todos los intervalos abiertos.

Procederemos por doble inclusión.

Ideas:

$[\supseteq]$

Recordemos:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \iff \exists n \in \mathbb{N}: x \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N}: a+\frac{1}{n} \leq x \leq b-\frac{1}{n}$$

No era necesario.

Ideas: Prop. arqui. mediana.

Recordemos que queremos probar que $a < x < b$

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left[a+\frac{1}{n_1}, b-\frac{1}{n_1}\right]$. Esto es

$$a+\frac{1}{n_1} \leq x \leq b-\frac{1}{n_1}$$

Notemos que $a < a+\frac{1}{n_1}$ y $b > b-\frac{1}{n_1}$. Se sigue que

$$a < x < b \iff x \in (a,b)$$

y de este modo se obtiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \subseteq (a,b)$$

[$\subseteq$] Por otro lado, sea $x \in (a,b)$

¿Cómo puedo probar que

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] ?$$

$\boxed{R}$ Buscar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a < a+\frac{1}{n_2} \leq x \leq b-\frac{1}{n_2} < b$$

Por propiedad arquimediana, tendremos que

i. existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq a+\frac{1}{n_3} > a$

ii. existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq b-\frac{1}{n_4} < b$

Si escogemos $\hat{n} := \max\{n_3, n_4\} \in \mathbb{N}$, tendremos que

$$a+\frac{1}{\hat{n}} \leq x \leq b-\frac{1}{\hat{n}} \iff x \in \left[a+\frac{1}{\hat{n}}, b-\frac{1}{\hat{n}}\right]$$

De donde se obtiene que

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

y de esta manera probamos que

$$(a,b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

La conclusión es análoga a 2A.i.
y escribirla "bonita" queda a cargo de ustedes :D

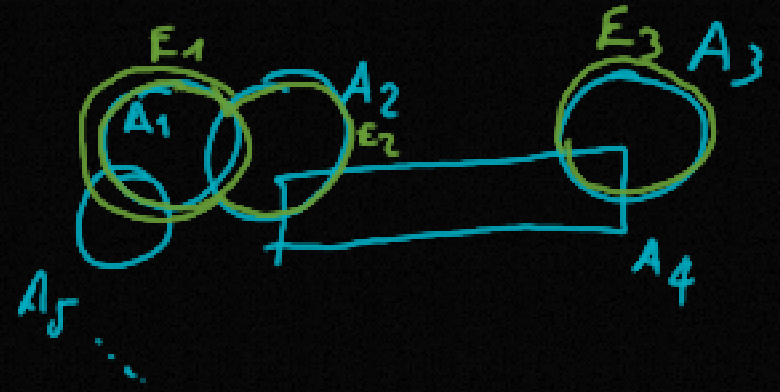
PROBLEMA 2 (2.C). Sea (A_n) una sucesión de conjuntos en X. Sea $E_0 = \emptyset$, y definimos para cada n natural:

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad F_n = A_n \setminus E_{n-1}.$$

$\to E_n \subseteq E_{n+1}$

Muestre que (E_n) es una sucesión monótona creciente de conjuntos y que (F_n) es una sucesión disjunta tal que

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leftarrow \text{"Ejercicio"}$$



Probemos que (E_n) es monótona creciente.

- Sea $n \in \mathbb{N}_0$, podemos notar que

$$E_n \subseteq E_n \cup A_{n+1} = E_{n+1}$$

← por definición de E_n

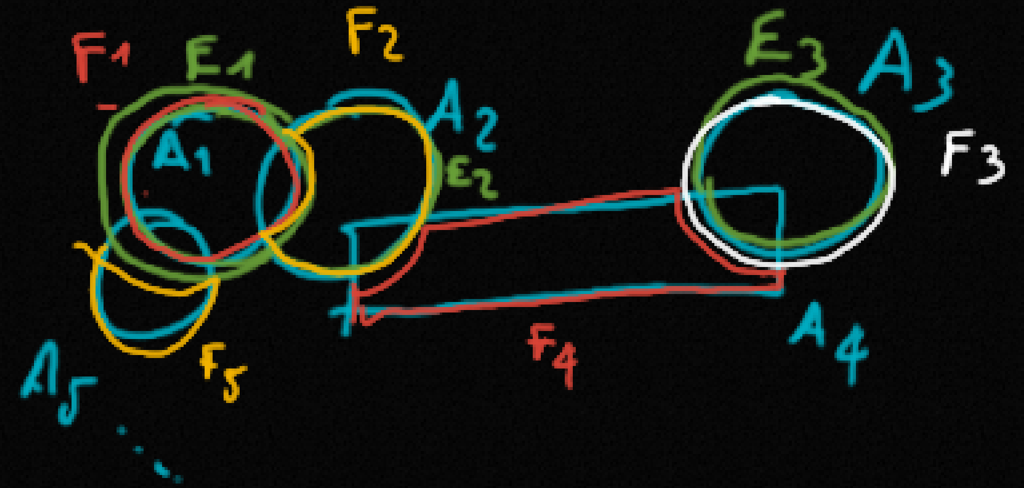
Así, (E_n) es creciente.

Probemos que (F_n) es una sucesión disjunta.

- Sean $m, n \in \mathbb{N}$ distintos. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $m < n$.

Sea $x \in F_n$, entonces $x \in A_n$ y $x \notin E_{n-1}$.

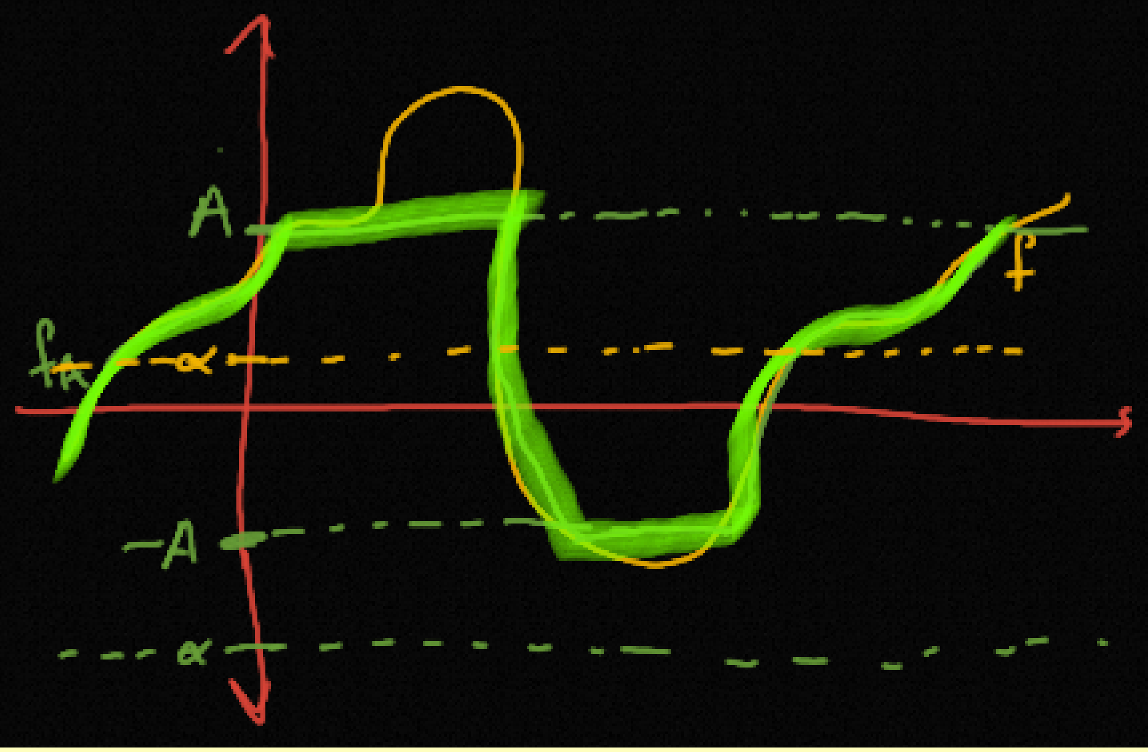
Como $x \notin E_{n-1}$ y (E_n) es una familia monótona creciente de conjuntos entonces $x \notin A_m$, pues $m \leq n-1$. De este modo $x \notin F_m$. En síntesis, dados m, n naturales distintos, entonces tendremos que $F_n \cap F_m = \emptyset$, y así, (F_n) es una sucesión disjunta.



2K. Muestre que dado $f: X \to \mathbb{R}$ medible, y $A \geq 0$ entonces la función trucación de f (f_A) definida por

$$f_A(x) = \begin{cases} A, & si \quad f(x) > A \\ f(x), & si \quad -A \leq f(x) \leq A \\ -A, & si \quad f(x) < -A. \end{cases}$$

es medible.



Def.: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una **función medible** (o $\mathscr{X}$**-medible**) si

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; f^{-1}((\alpha, +\infty]) := \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{X}.$$

Dem:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, distinguimos 3 casos

Si $\alpha > A$, entonces

$$f_A^{-1}((\alpha, +\infty]) = \emptyset \in \mathscr{X}$$

Si $\alpha \in [-A, A]$

$$f_A^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in X : f_A(x) > \alpha\}$$
$$= \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$
$$= f^{-1}((\alpha, +\infty])$$

Como f es medible (por hipótesis), entonces

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathscr{X}$$

y así, $f_A^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathscr{X}$.

Si $\alpha < -A$, entonces

$$f_A^{-1}((\alpha, +\infty]) = X \in \mathscr{X}$$

De todo lo anterior, se tiene que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f_A^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathscr{X}$

Probando así que f_A es medible.