Pregunta 1

a) Considere los siguientes conjuntos.

$$\begin{aligned} A &= \left\{2+x \ : \ x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\} \\ B &= \left\{z \in \mathbb{R} \ : \ z+1 < 5{,}3 \ \wedge \ \frac{z}{2} \geq 1\right\} \end{aligned}$$

Encuentre un conjunto C, con 3 elementos tal que $C \subseteq B \setminus A$. Demuestre la verdad de su respuesta.

Solución.

Para poder encontrar el conjunto C que se nos pide, conviene calcular $B \setminus A$, pero para hacer esto conviene simplificar primero la definición de A.

En realidad no cuesta mucho darse cuenta que los elementos de A son números que se obtienen al sumar 2 a los números del intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, lo cual nos arroja el intervalo: $A = \left[-\frac{3}{2}+2, \frac{3}{2}+2\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

Un podría trabajar esto de manera más formal, aunque tal cosa no es en absoluto necesaria si uno ya entendió lo anterior. De todas formas lo hacemos en caso que alguien haya optado por este método.

$$\begin{aligned} A &= \left\{2+x \ : \ x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{y \ : \ \exists\, x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right], \ y = 2+x\right\} \\ &= \left\{y \ : \ \exists\, x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right], \ x = y-2\right\} \\ &= \left\{y \ : \ y-2 \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{y \ : \ -\frac{3}{2} \leq y-2 \leq \frac{3}{2}\right\} \\ &= \left\{y \ : \ -\frac{3}{2}+2 \leq y \leq \frac{3}{2}+2\right\} \\ &= \left\{y \ : \ \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{2}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular $B \setminus A$ fácilmente.

$$\begin{aligned} B \setminus A &= \{z \ : \ z \in B \wedge z \notin A\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{R} \ : \ z+1 < 5{,}3 \ \wedge \ \frac{z}{2} \geq 1 \wedge z \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \ : \ z < 4{,}3 \ \wedge \ z \geq 2 \wedge z \notin [0{,}5 \ ; 3{,}5]\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \ : \ z \in [2 \ ; 4{,}3) \wedge z \notin [0{,}5; 3{,}5]\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \ : \ z \in [2 \ ; 4{,}3) \wedge z \in (-\infty \ ; 0{,}5) \cup (3{,}5 \ ; \infty)\} \\ &= (3{,}5 \ ; 4{,}3) \end{aligned}$$

Debemos entonces escoger 3 elementos distintos en $(3{,}5 \ ; 4{,}3)$, como no se exige nada más de C, estos elementos pueden ser enteros, racionales o irracionales, todos sirven. Podemos tomar por ejemplo $C = \{3{,}81 \ ; 4 \ ; 4{,}123\}$.

b) Se tiene un ángulo $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ que cumple $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(-\pi/3)$, determine el valor de α en radianes.

Para resolver el problema, lo mejor es hacer un dibujo.

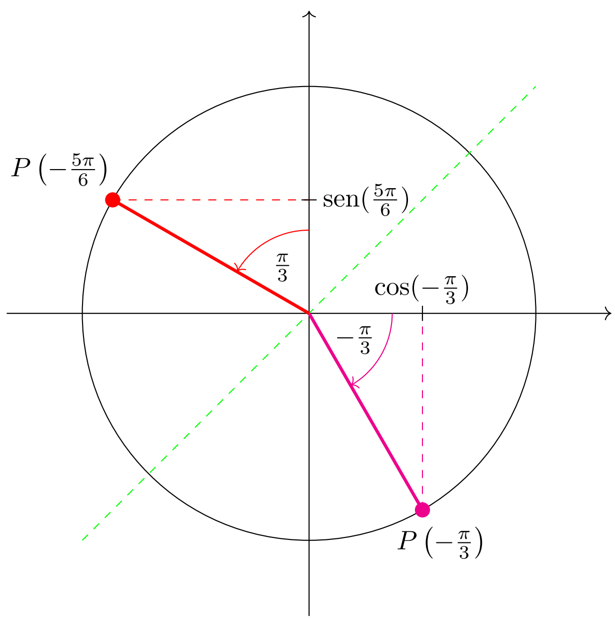
Aunque también podemos hacerlo razonando. Veamos, lo primero es tratar de encontrar un ángulo β tal que $\operatorname{sen}(\beta) = \cos(-\pi/3)$, sin pedir nada a β, para facilitar la tarea, y luego buscar lo pedido: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ que cumple $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)$.

Consideremos primero que nada el punto $P(-\pi/3)$, que se puede encontrar desplazándose desde el punto $(1, 0)$ a favor de los punteros del reloj, encima de la circunferencia, una longitud igual a $-\pi/3$. Tal punto tiene coordenadas $(\cos(-\pi/3), \operatorname{sen}(-\pi/3))$.

Hay varias maneras de lograr lo planteado, al hacer un dibujo surgen muchas ideas, una de ellas explota la idea de intercambiar las coordenadas del punto, lo cual equivale a hacer una reflexión respecto a la recta $x = y$, y que en términos de ángulos consiste en tomar $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi+2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ en vez de $(-\pi/3)$. Por lo tanto se tiene:

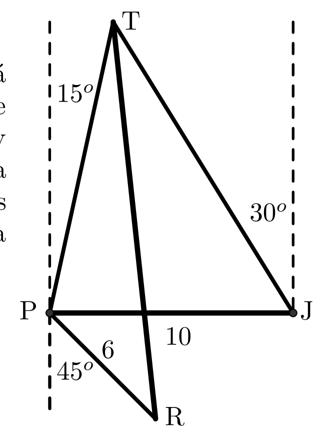
$$(\operatorname{sen}(-\pi/3), \cos(-\pi/3)) = (\cos(5\pi/6), \operatorname{sen}(5\pi/6)).$$

Así podemos afirmar que $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \cos(-\pi/3)$, por lo tanto $\beta = 5\pi/6$ cumple lo que nos habíamos propuesto. Estudiemos ahora dónde está β para saber si es o no el α buscado. Vemos entonces que en efecto $\frac{\pi}{2} = 0{,}5\pi \leq \frac{5\pi}{6} = 0{,}8\overline{3}\pi \leq \pi$, es decir $\frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ por lo tanto es el ángulo que pide el problema.



Pregunta 2

Pedro (P) y Juan (J) viven en la misma ciudad a 10 km de distancia, en una calle que está orientada sobre el eje Este-Oeste, y trabajan en la misma empresa, la cual se encuentra al Norte de la ciudad. Ambos tienen dos alternativas para llegar al trabajo. Desde la casa de Pedro hay un camino lento en dirección $N15^oE$ que lo lleva directo al trabajo, mientras que desde la casa de Juan hay un camino directo en dirección $N30^oO$. La segunda alternativa para ambos es viajar unos kilómetros al Sur y tomar una pista rápida que pasa por allí. Para Pedro, la entrada a la pista rápida se encuentra en dirección $S45^oE$, a 6 km de su casa.



a) Determine la distancia desde el inicio de la pista rápida al trabajo.

b) Determine la distancia de la casa de Juan al inicio de la pista rápida.

a) Si denotamos por α el ángulo TPJ, β al ángulo PJT , γ al ángulo JTP y δ al ángulo JPR, se tiene

$\alpha = 90^o - 15^o = 75^o$

$\beta = 90^o - 30^o = 60^o$

$\alpha = 180^o - 60^o - 75^o = 45^o$

$\delta = 90^o - 45^o = 45^o$

Aplicando el teorema del seno al triángulo PJT, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(45^o)}{10} = \frac{\text{sen}(60^o)}{\overline{PT}} \quad & \Rightarrow \overline{PT} = \frac{10\,\text{sen}(60^o)}{\text{sen}(45^o)} \\ & \Rightarrow \overline{PT} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ & \Rightarrow \overline{PT} = \frac{10\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Luego, la distancia de la casa de Pedro al trabajo es $\overline{PT} = 5\sqrt{6}$ $[km]$.

Ahora, para determinar la distancia del inicio de la pista rápida al trabajo $\overline{RT}$ utilizamos el teorema del coseno, y el hecho que el ángulo RPT mide $45° + 75° = 120°$.

$$\begin{aligned} \overline{RT}^2 &= 6^2 + \left(5\sqrt{6}\right)^2 - 2\cdot 6\cdot \left(5\sqrt{6}\right)\cos(120^o) \\ &= 36 + 150 + 2\cdot 6\cdot \left(5\sqrt{6}\right)\cdot \frac{1}{2} \\ &= 186 + 30\sqrt{6} \end{aligned}$$

Así, $\overline{RT} = \sqrt{186 + 30\sqrt{6}}$ $[km]$.

b) Para determinar la distancia de la casa de Juan al inicio de la pista rápida $\overline{JR}$ usamos el teorema del coseno en el triángulo RPJ.

$$\begin{aligned} \overline{JR} &= \sqrt{6^2 + 10^2 - 2\cdot 6\cdot 10\cos(45^o)}\ [km] \\ &= \sqrt{36 + 100 - 6\cdot 10\sqrt{2}}\ [km] \\ &= \sqrt{136 - 60\sqrt{2}}\ [km] \end{aligned}$$

Pregunta 3

Sea la función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 4\sqrt{5x - x^2 - 6}$$

a) Calcule los valores de $f(\frac{5}{2})$ y $f(1)$.

Notemos que debemos calcular la imagen de $x = 5/2$ y $x = 1$, dado esto, se tiene:

- $f\left(\frac{5}{2}\right) = 4\sqrt{5\cdot\frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = 4\sqrt{\frac{25}{2} - \frac{25}{4} - \frac{6}{1}} = 4\sqrt{\frac{50}{4} - \frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = 4\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$
- $f(1) = 4\sqrt{5\cdot 1 - 1^2 - 6} = 4\sqrt{5 - 1 - 6} = 4\sqrt{-2}$

Así, podemos notar que $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2$ y como $4\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$, entonces $f(1)$ no existe.

b) Hallar el conjunto $f^{-1}(0)$.

Debemos determinar la preimagen de $y = 0$, para esto consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 4\sqrt{5x - x^2 - 6} = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - x^2 - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Dado lo anterior, se concluye que $f^{-1}(0) = \{2, 3\}$.

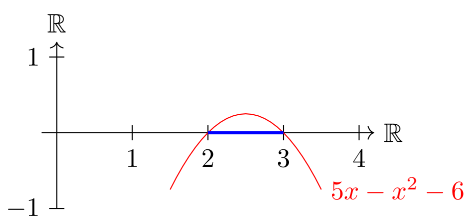
c) Encuentre el dominio de f.

Determinaremos el dominio de f de manera analítica, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 4\sqrt{5x - x^2 - 6} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 5x - x^2 - 6 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)(x-3) \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x - 2 \geq 0 \wedge x - 3 \leq 0) \ \vee \ (x - 2 \leq 0 \wedge x - 3 \geq 0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 2 \wedge x \leq 3) \ \vee \ (x \leq 2 \wedge x \geq 3)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\} \\ &= [2, 3] \end{aligned}$$

Dado lo anterior, concluimos que el $\mathrm{Dom}(f) = [2, 3]$.

Graficando la parábola $5x - x^2 - 6$, que aparece dentro de la raíz, podemos confirmar que toma valores mayores o iguales a 0 en el intervalo $[2, 3]$.



d) Encuentre el recorrido de f.

Determinaremos el recorrido de f de manera analítica. Hay varias maneras de hacerlo, por ejemplo como sigue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ y = 4\sqrt{5x - x^2 - 6}\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ \frac{y^2}{16} = 5x - x^2 - 6 \wedge y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ -\frac{y^2}{16} = x^2 - 5x + 6 \wedge y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ -\frac{y^2}{16} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \wedge y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y^2}{16}} = \left|x - \frac{5}{2}\right| \wedge y \geq 0 \wedge \frac{1}{4} - \frac{y^2}{16} \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Notemos que el dominio de f puede ser expresado por medio de la siguiente condición:

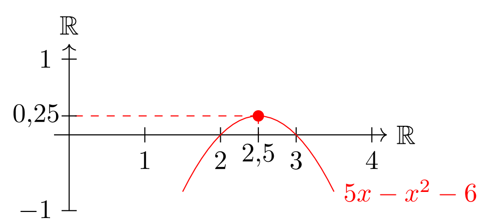
$$\begin{aligned}
x \in [2,3] &\Leftrightarrow 4\sqrt{5x - x^2 - 6} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 5x - x^2 - 6 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rec}(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [2,3],\ \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y^2}{16}} = \left|x - \frac{5}{2}\right| \wedge y \geq 0 \wedge \frac{1}{4} - \frac{y^2}{16} \geq 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ \left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y^2}{16}} = \left|x - \frac{5}{2}\right| \wedge y \geq 0 \wedge \frac{1}{4} - \frac{y^2}{16} \geq 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y^2}{16}} \leq \frac{1}{2} \wedge y \geq 0 \wedge y^2 \leq 4\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} - \frac{y^2}{16} \leq \frac{1}{4} \wedge y \geq 0 \wedge |y| \leq 2\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : -\frac{y^2}{16} \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge -2 \leq y \leq 2\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : y^2 \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge -2 \leq y \leq 2\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 2\} \\
&= [0,2]
\end{aligned}$$

Dado lo anterior, concluimos que el $\operatorname{Rec}(f) = [0,2]$.

También podemos llegar a lo mismo, observando por un lado que $f(x)$ debe ser mayor igual que 0, y por otra parte, dado que la raíz cuadrada crece con su argumento, el valor más alto que puede alcanzar $f(x)$ ha de ser igual a 4 veces la raíz cuadrada del valor más alto de la parábola $5x - x^2 - 6$, el cual se encuentra en el vértice de la misma, el punto $(2{,}5; 5(2{,}5) - 2{,}5^2 - 6) = (2{,}5; 12{,}5 - 6{,}25 - 6) = (2{,}5; 0{,}25)$, así, $0 \leq 0 \leq 4\sqrt{0{,}25} = 4 \times 0{,}5 = 2$.



e) Estudie la inyectividad de f.

Podemos notar que f no es inyectiva, ya que $f(2) = f(3) = 0 \wedge 2 \neq 3$.

f) Analice la sobreyectividad de f.

Podemos notar que f no es sobreyectiva, ya que $\operatorname{Rec}(f)$ no es igual al conjunto de llegada que es $\mathbb{R}$.