1.3 Fórmula de Abel

Para una EDO homogénea de segundo orden de la forma

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4}$$

con a_1 y a_0 funciones continuas en algún intervalo I, sabemos que existe al menos una solución.

Supongamos que conocemos y_1 una solución **no trivial** *de la EDO (4). Sabemos ya que $y_1 \in$ $\mathtt{Ker}(T)$ para*

$$T[y] = D^2[y] + a_1(x)D[y] + a_0(x)\,y.$$

Podemos encontrar otro elemento del kernel?

Sea $y(x) = u(x)y_1(x)$. Queremos ver si existe una función diferenciable $u(x)$ tal que $y(x)$ es también solución de la EDO (4) (y por tanto otro elemento del kernel).

Por un lado,

$$\begin{aligned} y' &= u'y_1 + y_1'u \\ y'' &= u''y_1 + 2y_1'u' + y_1''u. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la EDO (4), tenemos que se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \underbrace{u''(x)y_1(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1''(x)u(x)}_{y''(x)} + a_1(x)\underbrace{[u'(x)y_1(x) + y_1'(x)u(x)]}_{y'(x)} + a_0(x)\underbrace{u(x)y_1(x)}_{y(x)} &= 0 \\ u''y_1 + u'[2y_1' + a_1y_1] + u\underbrace{[y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1]}_{=0} &= 0 \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior es cero, ya que y_1 es solución de la EDO homogénea.

De lo anterior, se obtiene una EDO de segundo orden con variable dependiente u:

$$u''(x) + u'(x)\left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\right) = 0.$$

Esta EDO se puede reducir de orden haciendo el cambio de variables $w(x) = u'(x)$. De lo anterior se obtiene una EDO variables separables:

$$\frac{dw}{dx} = -w(x)\left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\right).$$

Separando variables e integrando nos queda que

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{w} &= -2\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx - \int a_1(x)dx \\ w(x) &= c_1\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}. \end{aligned}$$

Devolviendo el cambio $w(x) = u'(x)$ e integrando, tenemos:

$$u(x) = c_1\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + c_2.$$

Luego,

$$y(x) = c_1y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + c_2y_1(x).$$

es solución de la EDO (4).

Note que la solución y se escribe como la suma de dos soluciones: y_1 *e* $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$.

Será que y_1 e y_2 son linealmente independientes? Será que son una base para el kernel del operador diferencial $T[y] = D^2[y] + a_1(x)D[y] + a_0(x)\, y$? *De esta manera, podríamos establecer el siguiente resultado:*

Teorema 1.3

[Fórmula de Abel]
Sea y_1 *una solución no trivial de la ecuación*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

es una solución de la ecuación en cualquier subintervalo de I *en que* $y_1 \neq 0$. *Además,* y_2 *es linealmente independiente de* y_1 *y la solución general de la ecuación es:*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes arbitrarias.*

Ejemplo 1.7. *Consideremos la EDO de coeficientes constantes:*

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Es sencillo verificar que $y_1(x) = e^x$ *es solución (y es no trivial). Luego, por fórmula de Abel:*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x \int \frac{e^{-\int -2dx}}{(e^x)^2} dx \\ &= e^x \int dx \\ &= xe^x. \end{aligned}$$

VER EJEMPLO 1.3!