Resumen Análisis Funcional I

Raúl Astete Elguin

5 de mayo de 2022

Algunos resultados previos

- **(Espacios de Lebesgue)** $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$
- **(Norma en L^p)** $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$
- **(Desigualdad de Hölder)** Sean $p, q > 1$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sea $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{1}$$

- **(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** Para $f, g \in L^2(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\left| \int_\Omega fg \right| \leq \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{2}$$

- **(Desigualdad de Minkowski)** Sean $f, g \in L^p(\Omega)$, se tiene que

$$f + g \in L^p(\Omega) \quad \text{ y } \quad \|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{3}$$

- **(C-S para sucesiones)** Consideremos un Hilbert $(X, \langle \cdot \,;\, \cdot \rangle)$. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a $u \in X$ en la norma inducida por $\langle \cdot \,;\, \cdot \rangle$. Sea $z \in X$, se tiene que

$$|\langle u_k \,;\, z \rangle - \langle u \,;\, z \rangle| = |\langle u_k - u \,;\, z \rangle| \tag{4}$$

Aplicando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que

$$|\langle u_k \,;\, z \rangle - \langle u \,;\, z \rangle| \leq \sqrt{\langle u_k - u \,;\, u_k - u \rangle \langle z \,;\, z \rangle} = \|u_k - u\| \|z\| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \langle u_k \,;\, z \rangle = \langle u \,;\, z \rangle, \qquad \forall z \in X \tag{6}$$

En particular, si consideramos $X = L^2(\Omega)$, se tiene que para toda sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a $u \in L^2(\Omega)$ c.r a $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ es tal que

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k z = \int_\Omega uz, \qquad \forall z \in L^2(\Omega) \tag{7}$$

Capítulo I: Introducción

Definición 1. Dada $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ se define su **soporte** como

$$\mathrm{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega \,:\, \varphi(x) \neq 0\}} \tag{8}$$

Definición 2. Dados Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define el conjunto

$$C_0^k(\Omega) := \{\varphi \in C^k(\Omega) \,:\, \mathrm{sop}(\varphi) \text{ es un compacto totalmente contenido en } \Omega\} \tag{9}$$

Definición 3. $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega)$

Definición 4. Dada $w \in L^2(\Omega)$, se dice que $w' \in L^2(\Omega)$ es la derivada en el sentido distribucional de w si existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega w\varphi' = -\int_\Omega z\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty \tag{10}$$

Observación 1. Cuando w es derivable en el sentido clásico, su derivada distribucional es exactamente la derivada en el sentido clásico.

Definición 5. Se define el **Espacio de Sobolev** de orden 1 como

$$H^1(\Omega) := \{w \in L^2(\Omega) \,:\, w' \in L^2(\Omega)\} \tag{11}$$

Sobre este espacio, se define el producto escalar $\langle \cdot\,;\cdot \rangle_{1,\Omega} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\langle w\,; v \rangle_{1,\Omega} := \int_\Omega \left\{ w'v' + wv \right\}, \qquad \forall w, v \in H^1(\Omega) \tag{12}$$

Observación 2. Recordemos que el producto escalar de $L^2(\Omega)$ está dado por

$$\langle w\,; v \rangle_{0,\Omega} := \int_\Omega wv, \qquad \forall w, v \in L^2(\Omega) \tag{13}$$

De esta forma, se tiene que

$$\langle w\,; v \rangle_{1,\Omega} = \langle w'\,; v' \rangle_{0,\Omega} + \langle w\,; v \rangle_{0,\Omega} \tag{14}$$

Así, la norma inducida por $\langle \cdot\,;\cdot \rangle_{1,\Omega}$ es

$$\begin{aligned} \|v\|_{1,\Omega} &= \left\{ \int_\Omega ((v')^2 + v^2) \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \|v'\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Definición 6. La **seminorma** sobre $H^1(\Omega)$ se denota $|\cdot|_{1,\Omega}$ y se define por

$$|v|_{1,\Omega} := \left\| v' \right\|_{1,\Omega}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{15}$$

Lema 1. El Espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ equipado con el producto escalar $\langle \cdot\,;\cdot\rangle_{1,\Omega}$ es un espacio de Hilbert.

Definición 7. $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}} \subseteq H^1(\Omega)$

Observación 3. La definición anterior quiere decir que los elementos de $H_0^1(\Omega)$ son elementos $v \in H^1(\Omega)$ para los cuales existe una sucesión de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ que converge a v en la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Lema 2. $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$. Más aún,

$$|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\, |v|_{1,\Omega}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Observación 4. La desigualdad del lado derecho se conoce como la **desigualdad de Friedrich - Poincaré**

Teorema 1 (Teorema del punto fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ para la cual existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$\forall x, y \in X,\ d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y) \tag{16}$$

Entonces, existe un único $x \in X$ para el cual $T(x) = x$.

1.1. Nociones básicas de distribuciones

Observación 5 (Notación multi-índice). Dado $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $u \in C^{|\alpha|}$, con $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$, se denota

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{17}$$

Definición 8. El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ provisto de una topología especial (inducida por una familia de seminormas) se llama **Espacio de Funciones Test** y se denota $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 9. Se dice que una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a la función nula si existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que para todo α

$$\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{sop}(\varphi_k) \subset K, \text{ y } \lim_{k\to\infty} \left\{ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \right\} = 0 \tag{18}$$

Definición 10. Una aplicación $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ se dice una forma lineal si

$$u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha u(\varphi) + \beta u(\psi), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{19}$$

Definición 11. Una forma lineal $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ se dice una **distribución** si ella es continua. Equivalentemente, si dada una sucesión cualquiera $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ que converge a la función nula, se tiene que $\{u(\varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathbb{R}$. Al espacio de todas las distribuciones sobre Ω lo denotamos $\mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema 2 (Teorema de caracterización de $\mathcal{D}'(\Omega)$). Una forma lineal $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si y sólo si para todo compacto $K \subseteq \Omega$, existe $c > 0$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_k(\Omega) \tag{20}$$

donde $\mathcal{D}_k(\Omega) := \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) \;:\; \mathrm{sop}(\psi) \subseteq K\}$

Definición 12. Dado Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ se define el espacio de funciones **localmente integrables** como

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ es medible y } f \in L^1(K), \forall K \text{ compacto }, K \subseteq \Omega\} \tag{21}$$

Así, dada $f \in L^1_{loc}$ se define la forma lineal $u : \mathcal{D}(\Omega) \to R$

$$u(\varphi) := \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{22}$$

En clases se probó que u así definida es una distribución. El objetivo de esto es mostrar que toda función localmente integrable induce una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En esta parte se acepta el abuso de notación $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Lema 3. $L^P(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$, $\forall p > 1$

Demostración. Dadas $f \in L^p(\Omega)$ y K compacto contenido en Ω, se tiene

$$\int_K |f| = \int_K 1 \cdot f \leq \left(\int_K 1^q\right)^{1/q} \left(\int_K f^p\right)^{1/p} \tag{23}$$

con $q > 1$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Lo anterior equivale a

$$\int_K |f| \leq \mu(K) \|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{24}$$

Como K es compacto, es de medida finita. Además, como $f \in L^p(\Omega)$ el factor de la derecha es finito. Esto nos permite concluir que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observación 6. Como ya vimos que toda función en $L^1_{loc}(\Omega)$ induce una distribución, esto también será válido para toda función en $L^p(\Omega), p > 1$.

Definición 13. Una distribución u se dice **regular** si ella es inducida por una función en $L^1_{loc}(\Omega)$. En caso contrario se llamará **singular**.

Definición 14. Dados $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y un multi-índice α se define la **derivada distribucional** de u como $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\langle \partial^\alpha u \,; \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u \,; \partial^\alpha \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{25}$$

Lema 4. $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Demostración. Sea $K \subseteq \Omega$ un compacto. Como $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existe $c > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$|\langle u\,;\varphi\rangle| \leq c \sum_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\beta \varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \tag{26}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |\langle \partial^\alpha u\,;\varphi\rangle| &= |(-1)^{|\alpha|}\langle u\,;\partial^\alpha \varphi\rangle| \\ &= |\langle u\,;\partial^\alpha \varphi\rangle| \end{aligned} \tag{27}$$

A partir de (26) y (27) se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle \partial^\alpha u\,;\varphi\rangle| &\leq c \sum_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \\ &= c \sum_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \end{aligned} \tag{28}$$

Sea γ tal que $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq N + |\alpha|$. Definamos así $N' = |\alpha| + N$. Por lo tanto,

$$|\langle \partial^\alpha u\,;\varphi\rangle| \leq c \sum_{|\gamma|\leq N'} \sup_{x\in K} |\partial^\gamma \varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \tag{29}$$

En base al Teorema de Caracterización de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se concluye que $\partial^\alpha u$ es una distribución.

Capítulo II: Dualidad

En lo que sigue consideraremos un espacio vectorial normado X sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Definición 15. A toda aplicación $F : X \to \mathbb{R}$ se le llama funcional.

Definición 16. Un funcional $F : X \to \mathbb{R}$ se dice **lineal** si

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X \tag{30}$$

Definición 17. Un funcional $F : X \to \mathbb{R}$ se dice **acotado** si existe $M \geq 0$ tal que

$$|F(x)| \leq M\|x\|, \qquad \forall x \in X \tag{31}$$

Definición 18. El conjunto de todos los funcionales lineales y acotados sobre un espacio vectorial normado X se llama **dual de X** y se denota X'. Sobre X' se define la norma

$$\|F\|_{X'} = \inf\{M \geq 0 \,:\, |F(x)| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} \tag{32}$$

con la cual X' es un espacio vectorial normado.

Lema 5. Se tiene que para cada $F \in X'$

$$\|F\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \tag{33}$$

Demostración.

Teorema 3. Dado X un e.v.n. $(X', \|\cdot\|_{X'})$ es un espacio de Banach.

Observación 7. Si C es una constante positiva tal que $|F(x)| \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$, entonces necesariamente $\|F\| \leq C$

2.1. Teorema de la Mejor Aproximación

Teorema 4. Sea $U \neq \{\theta\}$ un subespacio **cerrado** de un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces, para cada $x \in H$ existe un único $z \in U$ tal que

$$\|x - z\| = \min_{u \in U} \|x - u\| \tag{34}$$

Más aún, este z está caracterizado por la **condición de ortogonalidad**:

$$\langle x - z\,; u \rangle = 0\, \forall u \in U, \ \text{ o equivalentemente } \ x - z \in U^{\perp} \tag{35}$$

Observación 8. z se llama la **mejor aproximacioón de x por elementos de** U.

Observación 9. La condición de que U *sea subespacio* se puede relajar. Más precisamente, si U es un conjunto convexo y cerrado, el Teorema de la Mejor Aproximación sigue siendo válido.

Definición 19. Dado S un subconjunto de un Hilbert H se define

$$S^{\perp} = \{x \in H \,:\, \langle x\,;s\rangle = 0\, \forall s \in S\} \tag{36}$$

Lema 6.

1. $S^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H
2. $(S^{\perp})^{\perp} = \overline{\langle S\rangle}$

2.2. Teorema de Descomposición Ortogonal

Teorema 5 (Teorema de Descomposición Ortogonal). Sean $(H, \langle\cdot\,;\cdot\rangle)$ un Hilbert sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y U un s.e.v. cerrado de H. Entonces,

$$H = U \oplus U^{\perp} \tag{37}$$

o equivalentemente, para todo $x \in H$ existe un único $u \in U$ y un único $v \in U^{\perp}$ tal que $x = u + v$

Definición 20. Dados $(H, \langle\cdot\,;\cdot\rangle)$ un Hilbert y U un s.e.v. cerrado de H se definen los proyectores

$$P_U : H \to U,\ x \longmapsto P_U(x) := z \tag{38}$$

$$P_{U^{\perp}} : H \to U^{\perp},\ x \longmapsto P_{U^{\perp}}(x) := x - z \tag{39}$$

Con esto, el Teorema de Descomposición Ortogonal se puede reformular como

$$P_U + P_{U^{\perp}} = I \tag{40}$$

donde I es la aplicación identidad.

Corolario 1. Si U es un subespacio cerrado propio de H, entonces existe $\tilde{x} \in H$, $\tilde{x} \neq \theta$ tal que $\tilde{x} \in U^{\perp}$.

2.3. Teorema de Representación de Riesz

Teorema 6 (Teorema de Representación de Riesz). Sea $(H, \langle\cdot\,;\cdot\rangle)$ un Hilbert sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces, para cada $F \in H'$ existe un único $z \in H$ tal que

$$F(x) = \langle x\,;z\rangle, \qquad \forall x \in H \tag{41}$$

Más aún, $\|F\|_{H'} = \|z\|$.

Definición 21. A la aplicación $R : H' \to H$, $F \longmapsto R(F) = z$ se le llama **operador de Riesz**.

2.4. Teorema de Extensión de Hahn Banach

Definición 22. Un funcional $p : X \to \mathbb{R}$ se dice **sub-lineal** si

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X$
2. $p(\alpha x) \leq \alpha p(x), \qquad \forall x \in X, \forall \alpha > 0$

Teorema 7 (Teorema de Hahn Banach, versión analítica). Sea X un espacio vectorial real y sea $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sub-lineal. A su vez, sean U un subespacio cualquiera de X y $f : U \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in U$. Entonces, existe un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$F\Big|_U = f \quad \text{ y } \quad F(x) \leq p(x) \;\; \forall x \in X \tag{42}$$

Teorema 8 (Teorema de Hahn Banach, versión e.v. normado). Sea X un espacio vectorial normado y sean U un subespacio de X y $f \in U'$. Entonces, existe $F \in X'$ tal que

$$F\Big|_U = f \quad \text{ y } \quad \|F\|_{X'} = \|f\|_{U'} \tag{43}$$

Teorema 9 (Teorema de Hahn Banach, versión Hilbert). Sea $(H, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sean U un subespacio de H y $f \in U'$. Entonces, existe $F : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \langle x\,; z \rangle$ tal que

$$F\Big|_U = f \quad \text{ y } \quad \|F\|_{H'} = \|f\|_{U'} = \|z\| \tag{44}$$

Observación 10. En el caso Hilbert hay dos subcasos:

- Si U es **cerrado**, tal $z \in U$ es el representante de Riesz de f, i.e. $z \in U$ es el único elemento tal que

$$f(x) = \langle x\,; z \rangle, \qquad \forall x \in U \tag{45}$$

- Si U no es necesariamente cerrado, se puede construir un funcional $\overline{f} \in \overline{U}'$ (lineal y acotado) que extiende a f. Es decir, tal funcional cumple que

$$\overline{f}\Big|_U = f \quad \text{ y } \quad \|f\|_{\overline{U}'} = \|f\|_{U'} \tag{46}$$

  En tal caso, z es el representante de Riesz de $\overline{f}$.

Lema 7. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n, $x_0 \in X$, $x_0 \neq \theta$. Entonces, existe un funcional $F \in X'$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(x_0) = \|x_0\|$

Definición 23. Un e.v.n $(X, \|\cdot\|)$ se dice **estrictamente convexo** si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, se tiene que

$$\forall t \in (0,1), \;\; \|tx + (1-t)y\| < 1 \tag{47}$$

Observación 11. Si H es Hilbert, entonces es estrictamente convexo.

Observación 12. En el caso en que el dual de X es estrictamente convexo, el F del lema 7 es único.

Observación 13. Si H es Hilbert, H' también lo es.

Lema 8. Dado $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n. se tiene que

$$\|x\| = \sup_{\substack{F \in X' \\ F \neq \theta}} \frac{|F(x)|}{\|F\|}, \qquad \forall x \in X \tag{48}$$

Demostración. Dado $F \in X'$ no nulo,

$$\frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \frac{\|F\|\|x\|}{\|F\|} \leq \|x\| \implies \sup_{\substack{F \in X' \\ F \neq \theta}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \|x\| \tag{49}$$

Ahora, dado $x \in X$ no nulo, por lema 7 existe un funcional $\tilde{F} \in X'$ tal que $\|\tilde{F}\| = 1$ y $\tilde{F}(x) = \|x\|$. Se sigue entonces que

$$\sup_{\substack{F \in X' \\ F \neq \theta}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \geq \frac{\left|\tilde{F}(x)\right|}{\left\|\tilde{F}\right\|} = \|x\| \tag{50}$$

Lema 9. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y sea $x \in X$ tal que $F(x) = 0$ para todo $F \in X'$. Entonces, $x = \theta$

Teorema 10 (Consecuencia del Teorema de Hahn Banach). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y sea U un subespacio de X. Además, sea $x_0 \in X$ tal que

$$d := \operatorname{dist}(x_0, U) = \inf_{u \in U} \|x_0 - u\| > 0 \tag{51}$$

Entonces, existe un funcional $F \in X'$ tal que $\|F\| = 1$, $F(x_0) = d$ y $F(u) = 0$ para cada $u \in U$.

Capítulo III: Operadores Lineales

En lo que sigue X e Y son e.v.n. sobre el mismo cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

Definición 24. Una aplicación $A : D(A) \subseteq X \to Y$ se dice lineal si

1. $D(A)$ es subespacio de X
2. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Definición 25. Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to Y$ se dice acotado si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \qquad \forall x \in D(A) \tag{52}$$

Definición 26. El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$

Definición 27. Un operador $A : X \to Y$ se dice **continuo** en x_0 si para cada sucesión $\{x_n\}_n \in \mathbb{N} \subseteq X$ tal que $\|x_n - x_0\|_X \to 0$, se tiene

$$\|A(x_n) - A(x)\|_Y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{53}$$

Observación 14. En el caso que A es lineal y acotado, es continuo para todo $x \in X$.

Teorema 11. Sean X e Y e.v.n sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $A : X \to Y$ un operador lineal tal que A es continuo en $x_0 \in X$. Entonces, A es acotado y continuo en todo X.

2.1. Caracterización del espacio $\mathcal{L}(X, Y)$

Lema 10. Sean $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tal que $x_0 \neq \theta$. Entonces existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A(x_0) = y_0$ y

$$\|A\| = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|} \tag{54}$$

Teorema 12. Dados X, Y e.v.n. sobre $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{L}(X, Y)$ es Banach si y sólo si Y es Banach.

Lema 11. Sean X, Y e.v.n sobre $\mathbb{C}$. Entonces, para cada $x \in X$ se tiene que

$$\|x\| = \sup_{\substack{A \in \mathcal{L}(X,Y) \\ A \neq \theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|A\|}, \qquad \forall x \in X \tag{55}$$

Nota: resultado análogo al Lema 8, pero para operadores.

2.2. Operador Adjunto en Espacios Normados

Definición 28. Sean X, Y e.v.n. sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el **operador adjunto** de A por

$$A' : Y' \to X', \ G \longmapsto A'(G) = G \circ A \tag{56}$$

Lema 12. Dados X, Y e.v.n. y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene que $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ y $\|A'\| = \|A\|$.

Lema 13. Sean X, Y, Z e.v.n. sobre $\mathbb{R}$. Entonces,

1. $(A + B)' = A' + B', \ \forall A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$
2. $(\alpha A)' = \alpha A', \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$
3. $(A \circ B)' = (AB)' = B' \circ A', \ \forall A \in \mathcal{L}(X, Y), \ B \in \mathcal{L}(Z, X)$

2.3. Operador Adjunto de Hilbert

Definición 29. Sean $(X, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$, $(Y, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define el **operador adjunto** de A como el único operador $A^* : Y \to X$, que verifica

$$\langle A(x)\, ; y \rangle_Y = \langle x\, ; A^*(y) \rangle_X, \qquad \forall x \in X \tag{57}$$

Lema 14. Dados $(X, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$, $(Y, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ y $\|A^*\| = \|A\|$.

2.4. Conexión entre los operadores adjuntos de Hilbert y Banach

Lema 15. Sean $(X, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$, $(Y, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

1. $A^* = R_X \circ A' \circ R_Y^{-1}$
2. $A' = R_X^{-1} \circ A^* \circ R_Y$

Donde R_X, R_Y son los representantes de Riesz.

Definición 30. Dado $(X, \langle \cdot\, ; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice que A es **autoadjunto** si $A = A^*$

Observación 15. En general, dados X, Y Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se tiene que $(A^*)^* = A$

Aquí empieza la materia para el certamen 2

2.5. La ecuación fundamental

Definición 31. Dados $S \subseteq X$ y $T \subseteq X'$ se definen los anuladores

$$S^\circ := \{F \in X' \,:\, F(x) = 0,\, \forall x \in S\} \tag{58}$$
$$^\circ T := \{x \in X \,:\, F(x) = 0,\, \forall F \in T\} \tag{59}$$

Lema 16. Dados $S \subseteq X$ y $T \subseteq X'$, S° y $^\circ T$ son subespacios cerrados de X' y X respectivamente.

2.6. Conexión con los ortogonales en un espacio de Hilbert

Sea $(H, \langle \cdot\,;\cdot \rangle)$ un Hilbert y sean $S \subseteq H$ y $T \subseteq H'$. A su vez, sea $R : H' \to H$ el operador de Riesz

Lema 17. Se tiene que

1. $S^\perp = R(S^\circ)$
2. $^\circ T = R(T)^\perp$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff \forall s \in S,\ \langle x\,;s \rangle = 0 \\ &\iff \forall s \in S,\ \langle s\,;x \rangle = 0 \\ &\iff R^{-1}(x)(s) = 0,\ \forall s \in S \\ &\iff R^{-1}(x) \in S^\circ \\ &\iff x \in R(S^\circ) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x \in^\circ T &\iff F(x) = 0, \quad \forall F \in T \\ &\iff \langle x\,;R(F) \rangle = 0, \quad \forall F \in T \\ &\iff \langle x\,;z \rangle = 0, \quad \forall z \in R(T) \\ &\iff x \in R(T)^\perp \end{aligned}$$

Lema 18. Sean X un espacio vectorial normado y M un subespacio cerrado de X. Entonces,

$$^\circ(M^\circ) = M \tag{60}$$

Observación 16. 1. Si M no es cerrado pero si un subespacio el lema anterior se reduce a

$$^\circ(M^\circ) = \overline{M} \tag{61}$$

2. En el caso Hilbert, $M = (M^\perp)^\perp$, cuando M es un subespacio cerrado. En efecto, usando lo anterior

$$\begin{aligned} M &=^\circ (M^\circ) =^\circ (R^{-1}(M^\perp)) \\ &= R(R^{-1}(M^\perp))^\perp \\ &= (M^\perp)^\perp \end{aligned}$$

Lema 19. Sean X un espacio vectorial normado y $M \subseteq X$. Entonces,

1. $M^\circ = \langle M \rangle^\circ = \overline{\langle M \rangle}^\circ$
2. ${}^\circ(M^\circ) = \overline{\langle M \rangle}$

Lema 20 (Caso Hilbert). Sean $(H, \langle \cdot\,; \cdot \rangle)$ un Hilbert y $M \subseteq X$. Entonces,

1. $M^\perp = \langle M \rangle^\perp = \overline{\langle M \rangle}^\perp$
2. $(M^\perp)^\perp = \overline{\langle M \rangle}$

Lema 21. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

1. $R(A)^\circ = N(A')$
2. $\overline{R(A)} =^\circ N(A')$
3. $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) =^\circ N(A')$.

Lema 22 (Caso Hilbert). Sean X e Y espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

1. $R(A)^\perp = N(A^*)$
2. $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$
3. $R(A)$ es cerrado si y solo si $R(A) = N(A^*)^\perp$.

El operador inverso y Teoremas fundamentales sobre operadores

Definición 32. Dados X e Y espacios vectoriales normados y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(A) = \{\theta\}$ y $R(A) = Y$, se define el operador inverso

$$A^{-1} : Y \to X$$

que a cada $y \in Y$ le asigna el único $x \in X$ tal que $A(x) = y$, de modo que se escribe $A^{-1}(y) = x$.

Observación 17. Notar que si A es lineal y $N(A) = \{\theta\}$, A es inyectivo (es una equivalencia).

Definición 33. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal. Se dice que A es **cerrado** si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$ y $A(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in Y$, entonces $x \in D(A)$ y $A(x) = y$

En lo que sigue, X e Y son espacios vectoriales normados y $A : D(A) \subseteq X \to Y$ es un operador lineal. Por otro lado, se define el espacio producto

$$X \times Y := \{(x,y) \, : x \in X, \; y \in Y\} \tag{62}$$

el cual es un espacio vectorial normado con la norma

$$\|(x,y)\| = \begin{cases} \|x\| + \|y\| \\ \text{máx} \, \|x\|, \|y\| \\ (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & p > 1 \end{cases} \tag{63}$$

Observación 18. $X \times Y$ es Banach $\iff$ X, Y son Banach

Definición 34. Se define el gráfico (o grafo) de A como

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, A(x)) \, : \, x \in D(A)\} \tag{64}$$

el cual es un subespacio de $X \times Y$.

Definición 35 (Equivalencia operador lineal cerrado). Sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal. Se dice que A es cerrado si $\mathcal{G}(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

Teorema 13 (Teorema de la inversa acotada). Sean X e Y espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(A) = \{\theta\}$ y $R(A) = Y$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$

Teorema 14 (Teorema del grafo cerrado primera versión). Sean X e Y espacios de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado tal que $D(A) = X$. Entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Teorema 15 (Teorema del grafo cerrado segunda versión). Sean X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado tal que $D(A)$ es Banach. Entonces $A \in \mathcal{L}(D(A), Y)$.

Teorema 16 (Teorema de la inversa acotada mejorado, TIAM). Sean X, Y espacios de Banach y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado tal que $N(A) = \{\theta\}$ y $R(A) = Y$. Entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Teorema 17 (Teorema de la aplicación abierta). Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A) = Y$. Entonces, existe $M > 0$ tal que $B_y(\theta, M) \subseteq A(B_X(\theta, 1))$

Teorema 18 (Teorema del acotamiento uniforme (Banach-Steinhaus)). Sean X e Y espacios vectoriales normados tales que X es Banach y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de operadores en $\mathcal{L}(X, Y)$. Suponga que

$$\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty, \quad \forall x \in X \tag{65}$$

Entonces $\{A_i\}_{i\in I}$ es **uniformemente acotada** i.e. existe $M > 0$ tal que

$$\|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq N, \quad \forall i \in I \tag{66}$$

Otra caracterización de operadores con rango cerrado

Teorema 19. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal, cerrado e inyectivo ($N(A) = \{\theta\}$). Entonces,

$$R(A) \text{ es cerrado en } Y \text{ si y solo si existe } c > 0 \text{ tal que } \|A(x)\| \geq c\|x\|, \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 20. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal y cerrado. Entonces,

$$R(A) \text{ es cerrado en } Y \text{ si y solo si existe } c > 0 \text{ tal que } \|A(x)\| \geq c \cdot \operatorname{dist}(x, N(A)), \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 21. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineal y acotado (i.e. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $R(A)$ es cerrado en Y
2. Existe $\alpha > 0$ tal que para cada $y \in R(A)$ existe $x \in X$, $y = A(x)$ y

$$\|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|$$

Teorema 22. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado. Entonces

$$R(A') = N(A)^\circ \tag{67}$$

y por lo tanto, $R(A')$ es cerrado.

Observación 19. El recíproco del teorema anterior también es cierto. El siguiente teorema muestra el contexto general.

Teorema 23. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ tal que $D(A)$ es denso en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $R(A)$ es cerrado
2. $R(A')$ es cerrado
3. $R(A) =^\circ N(A')$
4. $R(A') = N(A)^\circ$

(Notar que aquí utilizamos la generalización del adjunto para operadores no acotados, pero de dominio denso)

Teorema 24 (Contexto Hilbert). Sean X, Y espacios de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado. Entonces $R(A^*) = N(A)^\perp$ y por lo tanto $R(A^*)$ también es cerrado.

Operador adjunto para operadores no acotados

Consideremos X e Y espacios de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal tal que $D(A)$ es denso en X. Dado $G \in D(A')$, con $D(A') = \{G \in Y' : G \circ A \in D(A)'\}$ es posible construir un único $F \in X'$ tal que $F\big|_{D(A)} = G \circ A$ y $\|F\|_{X'} = \|G \circ A\|_{D(A)'}$. En consecuencia se define el operador adjunto de A como

$$A' : D(A') \subset Y' \to X', \quad G \mapsto A'(G) = F$$

donde

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} (G \circ A)(x_n)$$

y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión en $D(A)$ que converge a x.

Lema 23. Sean X e Y espacios de Banach y $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal tal que $D(A)$ es denso en X. Entonces $A' : D(A') \subseteq Y' \to X'$ es un operador lineal cerrado.

Capítulo IV: Problemas Variacionales

Definición 36. $B : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice bilineal si es lineal en cada componente

Definición 37. Una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|, \qquad \forall x, y \in H \tag{68}$$

Definición 38. Una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice coerciva o H- elíptica si existe $\alpha > 0$ tal que

$$B(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in H \tag{69}$$

Definición 39. Dada una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$, se considera

$$\mathcal{B} : H \to H', \quad \mathcal{B}(u)(v) := B(u, v), \qquad \forall v \in H \tag{70}$$

Además, se considera

$$\boldsymbol{B} := R_H \circ \mathcal{B} \tag{71}$$

el cual es un operador en $\mathcal{L}(H, H)$ que, cuando B es una f.b.a. con constante de acotamiento M, verifica $\|\boldsymbol{B}\| \leq M$. En tal caso,

$$B(u, v) = \mathcal{B}(u)(v) = \langle R_H \mathcal{B}(u)\,;v\rangle_H = \langle \boldsymbol{B}(u)\,;v\rangle_H \tag{72}$$

Recíprocamente, si tenemos $\boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(H, H)$, entonces éste induce una forma bilineal

$$B(u, v) = \langle \boldsymbol{B}(u)\,;v\rangle_H, \qquad \forall u, v \in H \tag{73}$$

Teorema 25 (Teorema de Lax Milgram, versión clásica). Sean $(H, \langle\cdot\,;\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada conc constante M y H-elíptica con constante $\alpha > 0$. Entonces, para cada $F \in H$, existe un **único** $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = F(v), \qquad \forall v \in H \tag{74}$$

Además,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\| \tag{75}$$

Teorema 26. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $B : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y $\boldsymbol{B}$ el operador inducido por B (i.e. es aquel que fue caracterizado por (73), es fácil ver que $\boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$). Entonces,

a) $\boldsymbol{B}$ es sobreyectivo si y solo si $\boldsymbol{B}^*$ es inyectivo y de rango cerrado (i.e. existe $\alpha > 0$ tal que $\|\boldsymbol{B}^*(v)\|_{H_1} \geq \alpha\|v\|$, $\forall v \in H_2$)

b) $\boldsymbol{B}$ es inyectivo si y solo si $\sup_{v \in H_2} B(u,v) > 0,\ \forall u \in H_1,\ u \neq \theta$.

c) $\boldsymbol{B}^*$ es sobreyectivo si y solo si $\boldsymbol{B}$ es inyectivo y de rango cerrado (i.e. existe $\alpha > 0$ tal que $\|\boldsymbol{B}(w)\|_{H_2} \geq \alpha\|w\|$, $\forall w \in H_1$)

d) $\boldsymbol{B}^*$ es inyectivo si y solo si $\sup_{w \in H_1} B(u,v) > 0,\ \forall v \in H_2,\ v \neq \theta$.

e) $\boldsymbol{B}$ es biyectivo si y solo si $\boldsymbol{B}^*$ es biyectivo.

Observación 20. Por Teorema de Representación de Riesz, sobre un Hilbert H, para todo $x \in H$ se tiene

$$\|x\| = \sup_{\substack{y \in H \\ y \neq \theta}} \frac{\langle x\,;y\rangle}{\|y\|} \tag{76}$$

Esto se deduce teniendo en cuenta que $\|R_H(x)\| = \|x\|$.

Observación 21. Notemos que la condición (a) del teorema anterior es equivalente a

$$\exists \alpha > 0 \ :\ \sup_{\substack{w \in H_1 \\ w \neq \theta}} \frac{\langle \boldsymbol{B}^*(v)\,;w\rangle_1}{\|w\|_1} \geq \alpha\|v\|, \quad \forall v \in H_2 \tag{77}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists \alpha > 0 \ :\ \sup_{\substack{w \in H_1 \\ w \neq \theta}} \frac{\langle v\,;\boldsymbol{B}(w)\rangle_2}{\|w\|_1} \geq \alpha\|v\|, \quad \forall v \in H_2 \tag{78}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists \alpha > 0 \ :\ \sup_{\substack{w \in H_1 \\ w \neq \theta}} \frac{B(v,w)}{\|w\|_1} \geq \alpha\|v\|, \quad \forall v \in H_2 \tag{79}$$

Al considerar el ínfimo sobre los $v \in H_2$ distintos del nulo, se obtiene que la condición (a) es equivalente a

$$\exists \alpha > 0 \ :\ \inf_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq \theta}} \sup_{\substack{w \in H_1 \\ w \neq \theta}} \frac{B(v,w)}{\|w\|_1\|v\|_2} \geq \alpha \tag{80}$$

por este motivo, esta condición se conoce con el nombre de **condición inf-sup**.

Teorema 27 (Teorema de Lax Milgram, caso Hilbert Generalizado). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y sea $B : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Supongamos que

i-1) $\exists \alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{w \in H_1 \\ w \neq \theta}} \frac{B(w,v)}{\|w\|} \geq \alpha \|v\|$, $\forall v \in H_2$

i-2) $\forall u \in H_1$, $u \neq \theta, \sup_{v \in H_2} B(u,v) > 0$

o bien

ii-1) $\exists \alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{v \in H_2 \\ v \neq \theta}} \frac{B(w,v)}{\|v\|} \geq \alpha \|w\|$, $\forall w \in H_1$

ii-2) $\forall v \in H_2$, $v \neq \theta, \sup_{w \in H_1} B(u,v) > 0$

(Las condiciones i-1), i-2) caracterizan la sobreyectividad e inyectividad de $\boldsymbol{B}$, respectivamente. Del mismo modo, las condiciones ii-1) e ii-2) carcterizan la sobreyectividad e inyectividad de $\boldsymbol{B}^*$)

Entonces, para todo $F \in H_2'$, existe un único $u \in H_1$ tal que $B(u,v) = F(v)$, $\forall v \in H_2$ y

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H_2'} \tag{81}$$

2.7. Teorema de Lax Milgram en espacios de Banach

Consideremos en primer lugar el siguiente teorema previo

Teorema 28. Sean X e Y espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $R(A)$ es cerrado

b) $R(A') = N(A)^\circ$

c) $R(A')$ es cerrado

d) $R(A) =^\circ N(A')$

Teorema 29. Sean X e Y espacios de Banach y $B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces,

a) B es sobreyectivo si y solo si $B' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es inyectivo y de rango cerrado (i.e. existe $\alpha > 0$ tal que $\|B'(G)\| \geq \alpha \|G\|$, $\forall G \in Y'$).

b) B es inyectivo si y solo si $\sup_{G \in Y'} G(B(x)) > 0$, $\forall x \in X$, $x \neq \theta$.

c) B' es sobreyectivo si y solo si B es inyectivo y de rango cerrado (i.e. existe $\alpha > 0$ tal que $\|B(x)\| \geq \alpha \|x\|$, $\forall x \in X$).

d) B' es inyectivo si y solo si $\sup_{x \in X} G(B(x)) > 0$ $\forall G \in Y'$, $G \neq \theta$.

Definición 40 (Reflexividad). Dado X un espacio de Banach, se considera el dual del dual X', el cual se denota X''. Se define el operador

$$J_X : X \to X'', \ x \longmapsto J_X(x)$$

donde

$$J_X(x) : X' \to \mathbb{R},\ F \longmapsto J_X(x)(F) = F(x)$$

Es fácil ver que J_X es un operador lineal, acotado, inyectivo e isométrico. En el caso de que J_X sea además sobreyectivo, se dice que X es **reflexivo**.

Teorema 30 (Teorema de Lax Milgram generalizado, caso Banach - primera versión).

Sean H, Q espacios de Banach tales que Q es reflexivo y sea $A : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Suponga que

i) $\exists \alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{v\in Q\\ v\neq\theta}} \frac{A(w,v)}{\|v\|_Q} \geq \alpha \|w\|_H$, $\forall w \in H$

ii) $\sup_{w\in H} A(w, v) > 0$, $\forall v \in Q$, $v \neq \theta$

Entonces, para cada $G \in Q'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u, v) = G(v), \quad \forall v \in Q \tag{82}$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|'_Q \tag{83}$$

Observación 22. Las condiciones i) y ii) además de ser suficientes son necesarias.

Teorema 31 (Teorema de Lax Milgram generalizado, caso Banach - segunda versión).

Sean H, Q espacios de Banach tales que Q es reflexivo y sea $A : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Suponga que

i)' $\exists \alpha > 0$ tal que $\sup_{\substack{w\in H\\ w\neq\theta}} \frac{A(w,v)}{\|w\|_H} \geq \alpha \|v\|_Q$, $\forall v \in Q$

ii)' $\sup_{v\in Q} A(w, v) > 0$, $\forall w \in H$, $w \neq \theta$

Entonces, para cada $G \in Q'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u, v) = G(v), \quad \forall v \in Q \tag{84}$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|'_Q \tag{85}$$

Observación 23. Las condiciones i)' y ii)' además de ser suficientes son necesarias.

$\mathbb{A}\mathbb{V}\mathbb{A}$