

LISTADO : OPTIMIZACIÓN 1 ANTES DEL TEST 1

Ejercicio I Una nutricionista asesora a un paciente que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B, le indica que debe ingerir:

- Al menos 2400 mg de hierro
- 2100 mg de vitamina B-1
- 1500 mg de vitamina B-2

Existen dos píldoras de vitaminas disponibles, llamadas píldora A y píldora B. Cada píldora A contiene 40 mg de hierro, 10 mg de vitamina B-1, 5 mg de vitamina B-2 y cuesta 60 pesos, y cada píldora B contiene 10 mg de hierro, 15 mg de vitamina B-1 y de vitamina B-2, y cuesta 80 pesos (ver tabla adjunta):

	Hierro	B-1	B-2	Precio
Píldora A	40 mg	10 mg	5 mg	60
Píldora B	10 mg	15 mg	15 mg	80
Requerimiento	2400 mg	2100 mg	1500 mg	

¿Cuáles combinaciones de píldoras debe comprar el paciente para cubrir sus requerimientos de hierro y vitamina al menor costo?

Solución De la tabla adjunta:

- De la primera fila (píldora A)

$40 + 10 + 5 = 55$ mg de la píldora A y cuesta 60 pesos cada una, y contiene

- 40 mg de H

- 10 mg de B1

- 5 mg de B2

- De la segunda fila (píldora B)

$10 + 15 + 15 = 40$ mg de la píldora A y cuesta 80 pesos cada una, y contiene

- 10 mg de H

- 15 mg de B1

- 15 MG DE b2

Definimos las variables de decisión:

x_1 : cantidad de píldoras A

x_2 : cantidad de píldoras B

Este ejercicio es parecido al "problema de dieta"(libro profesor Flores página 30)

LA FUNCIÓN COSTO:

$$60X_1 + 80X_2$$

Por recomendación del nutricionista el paciente debe consumir 2400 mg de H, 2100 mg de B1 y 1500 mg de B2

ESTAS RESTRICCIONES SE ESCRIBE COMO: (1)

$$40x_1 + 10x_2 \geq 2400$$

$$10x_1 + 15x_2 \geq 2100$$

$$5x_1 + 15x_2 \geq 1500$$

y obviamente, tenemos las restricciones (2):

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

el problema se debe minimizar (porque queremos abaratar costos), sujeto a las restricciones (1) y (2)

$$\min 60x_1 + 80x_2$$

$$40x_1 + 10x_2 \geq 2400$$

$$10x_1 + 15x_2 \geq 2100$$

$$5x_1 + 15x_2 \geq 1500$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Resolvemos por el método gráfico:
geogebra

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

en nuestro caso $c_1 = 60$ y $c_2 = 80$

Ejercicio II Jorge dispone de 1.000.000 de pesos para invertir en un cierto banco. El agente bancario le propone 2 tipos de depósitos A y B.

Los del tipo A tienen más riesgo, por lo que otorga un interés anual del 10 por ciento mientras que los del tipo B, sólo dan un interés anual del 7 por ciento.

Jorge decide invertir a lo más 600,000 pesos en el depósito tipo A y al menos 200,000 en los del tipo B, de manera que la cantidad invertida en el depósito tipo A no sea menor que la invertida en los del tipo B. Su objetivo es obtener la mayor rentabilidad posible bajo las restricciones impuestas. Formule el problema como uno de optimización lineal y resuélvalo gráficamente.

Solución Problema de inversión (libro profesor Flores pág 27)

Jorge tiene 1.000.000 para invertir en el depósito A (10 por ciento de interés) y en el depósito B (que tiene un 7 por ciento de interés)

Definimos las variables de decisión:

a: la cantidad en miles de pesos destinado al depósito A

b: la cantidad en miles de pesos destinado al depósito B

LA FUNCIÓN COSTO:

$$0,1a + 0,07b$$

Se desea maximizar la ganancia

Restricciones:

$$\text{capital disponible : } a + b \leq 1,000$$

$$a \leq 600$$

$$b \geq 200$$

$$a \geq b \rightarrow a - b \geq 0$$

$$\text{no negatividad } a \geq 0, b \geq 0$$

PROBLEMA OPTIMIZACIÓN LINEAL:

$$\max 0,1a + 0,07b$$

$$a + b \leq 1,000$$

$$a \leq 600$$

$$b \geq 200$$

$$a \geq b \rightarrow a - b \geq 0$$

$$a \geq 0, b \geq 0$$

considerando $f = c_1x_1 + c_2x_2$ y $c_1 = 0,1$ y $c_2 = 0,07$

matlab

solucion es (600,400) entonces Jorge debe invertir 600.000 pesos en el deposito A y 400.000 en el deposito B

Ejercicio III Una fábrica posee 3 máquinas que se utilizan en la producción de 4 artículos diferentes A, B, C y D. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los productos está dada por la tabla siguiente:

Prod. \ Máq	A	B	C	D
1	5	4	2	3
2	3	6	1	7
3	9	3	5	12

Si por cada unidad producida hay una bonificación de 100, 200, 50 y 120 pesos, respectivamente. Se quiere encontrar el número de unidades semanales (5 días) que se debe producir de cada uno de los artículos, de modo de obtener la mayor bonificación posible, si cada máquina se usa 8 horas diarias y cada cual produce el mismo número de artículos de cada clase por semana. Con este propósito formular el problema matemáticamente.

Solución De la tabala adjunta:

De la maquina 1:

- en producir el producto A se demora 5 hora
- en producir el producto B se demora 4 horas
- en producir el producto C se demora 2 horas
- en producir el producto D se demora 3 horas

De la maquina 2:

- en producir el producto A se demora 3 hora
- en producir el producto B se demora 6 horas
- en producir el producto C se demora 1 horas
- en producir el producto D se demora 7 horas

De la maquina 3:

- en producir el producto A se demora 9 hora
- en producir el producto B se demora 3 horas
- en producir el producto C se demora 5 horas
- en producir el producto D se demora 12 horas

Primero definimos nuestras variables de decisión:

$x_1 = \text{cantidad de articulos A que se van a producir}$

$x_2 = \text{cantidad de articulos B que se van a producir}$

$x_3 = \text{cantidad de articulos C que se van a producir}$

$x_4 = \text{cantidad de articulos D que se van a producir}$

LA FUNCIÓN COSTO:

$$100x_1 + 200x_2 + 50x_3 + 120x_4$$

Restricciones:

$$5x_1 + 3x_1 + 9x_1 = 17x_1 \leq 8 \cdot 5 = 40$$

$$4x_2 + 6x_2 + 3x_2 \leq 40$$

$$2x_3 + x_3 + 5x_3 \leq 40$$

$$3x_4 + 7x_4 + 12x_4 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

PROBLEMA MATEMATICO:

$$\max 100x_1 + 200x_2 + 50x_3 + 120x_4$$

$$0 \leq 17x_1 \leq 40$$

$$0 \leq 13x_2 \leq 40$$

$$0 \leq 8x_3 \leq 40$$

$$0 \leq 22x_4 \leq 40$$

Ejercicio IV Una fábrica de televisores debe decidir la cantidad a producir de televisores a color: estándar y pantalla-plana. Un estudio de mercado indica que a lo más 4200 y 1300 televisores estándar y con pantalla-plana, respectivamente, pueden venderse por mes. El número máximo de hombres/hora disponible es 50000 por mes. Para un televisor con pantalla-plana se requieren 20 hombres/hora, mientras que para un televisor estándar se necesita 15 hombres/hora. Las ganancias por cada televisor estándar y pantalla-plana son \$40 y \$70 (miles de pesos), respectivamente. Formular el problema que determine el número de televisores de cada tipo que la fábrica debe producir con

el objeto de maximizar su ganancia

Solución Definir las variables de decisión:

$e =$ la cantidad de televisores estándar a producir

$p =$ la cantidad de televisores pantalla – plana a producir

LA FUNCIÓN COSTO:

$$40e + 70p$$

Restricciones:

$$0 \leq e \leq 4200$$

$$0 \leq p \leq 1300$$

$$20p + 15e \leq 50000$$

PROBLEMA MATEMATICAMENTE

$$\max 40e + 70p$$

$$0 \leq e \leq 4200$$

$$0 \leq p \leq 1300$$

$$20p + 15e \leq 50000$$

Ejercicio V Considera el problema:

$$\text{maximizar } x_1 - x_2$$

$$\text{s.a. } -x_1 + 3x_2 \leq 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Responda:

a) Dibuje la región factible en el espacio (x_1, x_2)

b) Identifique las regiones en el espacio (x_1, x_2) donde las variables de holgura x_3 y x_4 , sean iguales a cero.

c) Resuelve el problema geoméricamente.

d) Dibujar el espacio de requisitos e interpretar la factibilidad.

Solución a) geogebra

b)

$$\min x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.a. } -x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 = -3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ejercicio VI Dibuje la región factible del conjunto $x: Ax \leq b$ donde A y b son como dada a continuación. En cada caso, indique si la región factible está vacía o no y si está acotado o no.

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio VII Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_2 \geq 4$$

a) Dibuja la región factible.

b) Verificar que el problema tenga un valor de solución óptimo ilimitado

Ejercicio VIII Considere el siguiente problema:

$$\text{maximizar } 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Dibuja la región factible

b) Encuentre dos puntos extremos (de esquina) óptimos alternativos.

c) Encuentre una clase infinita de soluciones óptimas.

Ejercicio IX Considere el siguiente problema:

$$\text{maximizar } -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\text{s.a. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) Introduzca variables de holgura y dibuje el espacio de requisitos.

b) Interprete la viabilidad en el espacio de requisitos.

c) Se le dice que se puede obtener una solución óptima teniendo en la mayoría de las dos variables positivas, mientras que todas las demás variables se establecen en cero. Utilice esta declaración y el espacio de requisitos para encontrar una solución.

Solución a) Introducimos las variables holgura x_5 y x_6 :

$$\max -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\text{s.a. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 0x_6 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 0x_5 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

Ejercicio X Considere el siguiente problema:

$$\text{maximizar } 3x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.a. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) Identifique gráficamente el conjunto de todas las soluciones óptimas alternativas a este problema.

b) Suponga que una función objetivo de prioridad secundaria busca maximizar $-3x_1 + x_2$ sobre el conjunto de soluciones óptimas alternativas identificado en la Parte (a). ¿Cuál es la solución resultante obtenida?

c) ¿Cuál es la solución obtenida si las prioridades de los dos anteriores funciones objetivas se invierte?