UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Desarrollo Propuesto Test 3 Taller de Razonamiento Matemático I 525041-1

1. (a) Sean $A, C \subseteq \mathcal{U}$ y $B, D \subseteq \mathcal{V}$, todos no vacíos, tales que $\Big(A \subseteq C \quad \wedge \quad B \subseteq D\Big)$.
Demostrar que $A \times B \subseteq C \times D$. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$
Desarrollo:
($\Rightarrow$): HIPÓTESIS: $\Big(A \subseteq C \quad \wedge \quad B \subseteq D\Big)$.
Sea $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ fijo, pero arbitrario, tal que $(x, y) \in A \times B$. Esto implica que $x \in A \quad \wedge \quad y \in B$. Como, por HIPÓTESIS, $A \subseteq C$, resulta que $x \in C$. También, en vista que $B \subseteq D$, lo cual conduce a decir que $y \in D$. De esta manera, $(x, y) \in C \times D$. Finalmente, como $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ es fijo pero arbitrario, queda establecido que
$\forall\, (x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \,:\, (x, y) \in A \times B \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in C \times D$, es decir $A \times B \subseteq C \times D$. $\square$

(b) Sean B_1 el conjunto de todos los números enteros positivos, y B_2 el conjunto de todos los números enteros negativos. ¿Es $\{B_1, B_2\}$ una partición de $\mathbb{Z}$? Fundamente su respuesta. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$
Desarrollo: Notamos que $B_1 = \mathbb{Z}^+$, $B_2 = \mathbb{Z}^-$, los cuales son no vacíos y disjuntos. Sin embargo, $B_1 \cup B_2 \neq \mathbb{Z}$, pues $0 \in \mathbb{Z}$, pero $0 \notin B_1 \cup B_2$. En consecuencia, $\{B_1, B_2\}$ no puede ser partición de $\mathbb{Z}$. $\square$

2. Considere la familia de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, donde $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, A_j := (-j, j+1]$.

(a) Demostrar por MÉTODO DIRECTO (NO APLICAR PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA): $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, (-1, 2] \subseteq A_j$. $\boxed{\textbf{10 puntos}}$
Desarrollo: Sea $j \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario. Demostraremos que $(-1, 2] \subseteq A_j$ (por elemento). Consideremos $x \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario, tal que $x \in (-1, 2]$. Es decir $-1 < x \leq 2$. Por otro lado, como $j \in \mathbb{N}$, resulta $j \geq 1$. Esto nos permite establecer que $-j \leq -1$ y $j + 1 \geq 2$. De esta manera,

$$-j \leq -1 < x \leq 2 \leq j+1 \quad \Rightarrow \quad -j < x \leq j+1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-j, j+1] =: A_j\,.$$

Luego, como $x \in \mathbb{R}$ es fijo pero arbitrario, se tiene $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \in (-1, 2] \quad \Rightarrow \quad x \in A_j$, es decir $(-1, 2] \subseteq A_j$.
Finalmente, como $j \in \mathbb{N}$ es fijo pero arbitrario, se concluye $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, (-1, 2] \subseteq A_j$. $\square$

(b) Proponer conjuntos S y T, tales que $\displaystyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = S$ y $\displaystyle\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = T$. Luego, demuestre que en efecto la intersección de los A_j es el conjunto T propuesto. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$
Desarrollo: Notamos que los primeros conjuntos de la familia dada son:

$$A_1 = (-1, 2]\,, \quad A_2 = (-2, 3]\,, \quad A_3 = (-3, 4]\,, \quad A_4 = (-4, 5]\,, \quad \cdots$$

De esto, se sospecha que los candidatos para S y T son $S := \mathbb{R}$, y $T := (-1, 2]$.

Ahora, procederemos a establecer que en efecto $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = T$, por doble inclusión.

($\subseteq$): Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario, tal que $x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Es decir, $\forall\, j \in \mathbb{Z} \,:\, x \in A_j$. En particular, se cumple para $j = 1 \in \mathbb{N}$. Así, $x \in A_1 = (-1, 2] = T$. En vista que $x \in \mathbb{R}$ es fijo pero arbitrario, se ha establecido que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \quad \Rightarrow \quad x \in T\,, \qquad \text{es decir } \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq T\,.$$

($\supseteq$): Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo, pero arbitrario, tal que $x \in T$. Invocando la parte (2a), se tiene que $\forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, x \in A_j$. Es decir $x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Siendo $x \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario, se ha probado que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \in T \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\,, \qquad \text{es decir } T \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\,.$$

Finalmente, por Doble Inclusión, se concluye que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = T = (-1, 2]$. $\square$

3. Demostrar aplicando el Principio de Inducción Matemática: $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, 3^m > 1 + 2^m$. Para ello, debe definir primero el Conjunto de Validez asociado. **15 puntos**

Desarrollo: Primero, definimos el Conjunto de validez asociado. Para esto, primero introducimos $\mathbb{A} := \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

$$S := \{m \in \mathbb{A} \,:\, q(m)\}\,, \quad \text{siendo} \quad q(m) \,:\, 3^m > 1 + 2^m\,.$$

Validemos las condiciones del Principio de Inducción Matemática (3ra forma).
$2 \in S$: en efecto, tenemos que $2 \in \mathbb{A}$. Luego, resta mostrar que $q(2)$ es cierta.
Tenemos $q(2) \,:\, 3^2 = 9 > 5 = 1 + 2^2$, por lo cual $q(2)$ es V, y en consecuencia $2 \in S$.

Hipótesis de Inducción: $m \in S$, es decir $m \in \mathbb{A} \quad \wedge \quad q(m)$ es V.

Tesis de Inducción: $m + 1 \in S$, es decir $m + 1 \in \mathbb{A} \quad \wedge \quad q(m + 1)$ es V.
Por un lado, como $m \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, resulta que $m + 1 \in \mathbb{A}$. Queda por probar que $q(m + 1)$ es verdadera. En efecto,

$$\begin{aligned} q(m+1) \,:\, 3^{m+1} = 3 \cdot 3^m &\overset{\text{(H.I.)}}{>} 3(1 + 2^m) = 3 + 3 \cdot 2^m \\ &= \Big(1 + 2 \cdot 2^m\Big) + \Big(\underbrace{2 + 2^m}_{>0}\Big) \\ &> 1 + 2^{m+1} \\ \Rightarrow\; 3^{m+1} &> 1 + 2^{m+1}\,. \end{aligned}$$

De esta manera, se establece que $q(m + 1)$ es V. Así, $m + 1 \in \mathbb{A}$.

Finalmente, invocando el Principio de Inducción Matemática - 3ra forma, se concluye que $S = \mathbb{A}$, es decir $\forall\, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \,:\, 3^m > 1 + 2^m$. $\square$