Clase 5: La integral definida.

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

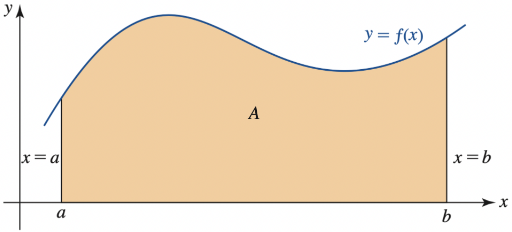
Problema

Área delimitada por una curva

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$.

Problema: Queremos calcular el área A de la región del plano R (ver imagen) definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Problema

Área delimitada por una curva

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ donde

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \ .$$

El conjunto $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ se llamará **partición de** $[a, b]$.

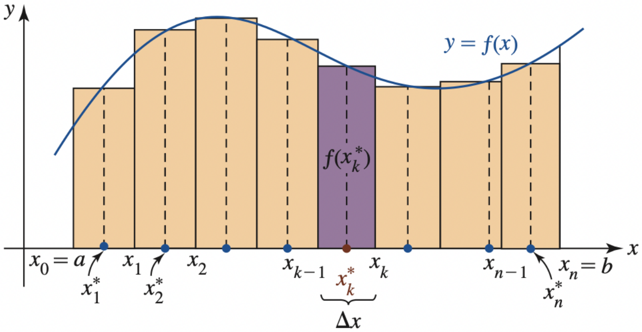
- Escojemos x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y formamos los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ (áreas de rectángulos), para cada $k = 1, 2, .., n$; donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud del k-ésimo subintervalo).
- Construimos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f({x_k}^*)\Delta x_k = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\Delta x_n \ .$$

Problema

Área delimitada por una curva

La suma dada anteriormente, se llama **Suma de Riemann** de f asociada a la partición P de $[a, b]$.



Suma inferior
Definición

Si para cada $k = 1, 2, .., n$, escogemos los puntos $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ de tal forma que los $m_k = f(x_k^*)$ sean los valores mínimos en dichos subintervalos (existen por el teorema de los valores extremos al ser f continua), es decir,

$$m_k = \min\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

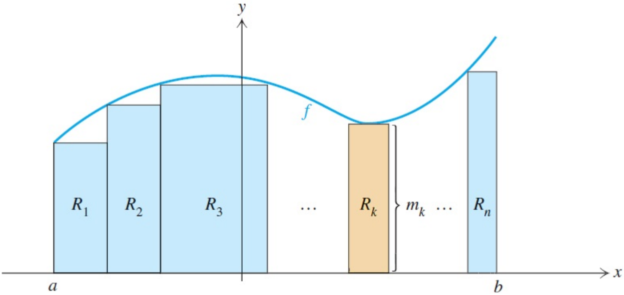
entonces la suma de Riemann se llama **suma inferior** de f asociada a P, y la denotamos por

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \ .$$

Suma inferior

Interpretación geométrica

Geométricamente, corresponde a la suma de rectángulos inscritos a la gráfica de f.



Suma superior

Definición

Si para cada $k = 1, 2, .., n$, escogemos los puntos $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ de tal forma que los $M_k = f(x_k^*)$ sean los valores máximos en dichos subintervalos (existen por el teorema de los valores extremos al ser f continua), es decir,

$$M_k = \max\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

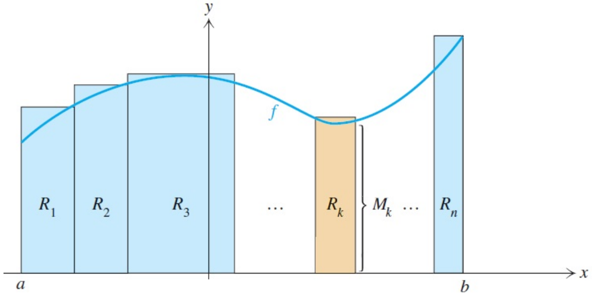
entonces la suma de Riemann se llama **suma superior** de f asociada a P, y la denotamos por

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \ .$$

Suma superior

Interpretación geométrica

Geométricamente, corresponde a la suma de rectángulos circunscritos a la gráfica de f.

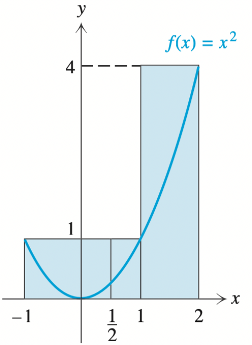


Ejemplo 1

Suma inferior y superior

Sea $f(x) = x^2$ con $x \in [-1, 2]$. Aproximar el área de la región R encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ a través de sumas inferiores y superiores, considerando las particiones indicadas:

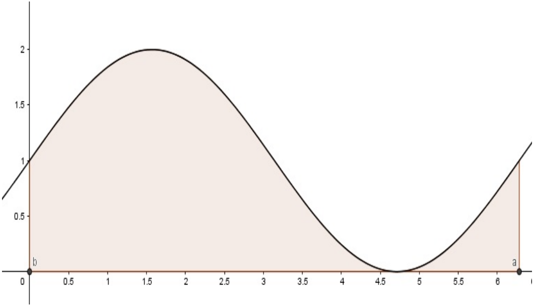
$$P = \{-1, \tfrac{1}{2}, 1, 2\} \text{ y } Q = \{-1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}.$$



Ejemplo 2

Suma inferior y superior

Sea $f(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$ definida sobre $[0, 2\pi]$ y $P = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ una partición de $[0, 2\pi]$. Bosquejar y calcular la suma superior e inferior de f asociada a la partición P.



En el Ejemplo 1, usted habrá notado que la partición $P \subseteq Q$. En este caso, diremos que Q es un **refinamiento** de P.

Además, pudo apreciar que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \text{ y } \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

Esto último nos conduce a pensar que, a medida que se refina una partición P (aumentamos el número de rectángulos), la suma de Riemann se aproxima cada vez mas al valor del área que buscamos.

Definición 5.1

Llamaremos **norma** de un partición P, denotada por $||P||$, a la longitud del subintervalo mas largo, esto es,

$$||P|| = \text{máx}\{\triangle x_k : 1 \leq k \leq n\} \; .$$

- Note que la suma de Riemann asociada a una partición P de $[a, b]$ será cercana al valor del área que buscamos, siempre que $||P|| \to 0$. Esto nos conduce a la Definición 5.2.

Definición 5.2

Sea f una función acotada definida en $[a, b]$. Diremos que f es **Riemann integrable** en $[a, b]$ si

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f({x_k}^*) \Delta x_k$$

existe, cualquiera sea la partición P con $||P|| \to 0$ y cualquiera sea la elección de los ${x_k}^* \in [x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$. Dicho valor, se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

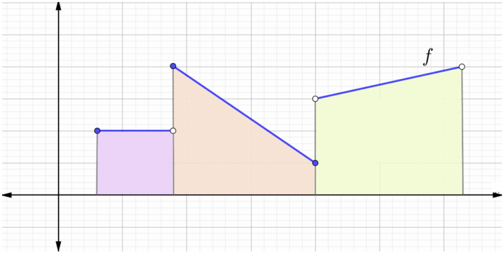
y se llama **integral definida** de f en $[a, b]$. Los valores a y b reciben el nombre de límites de integración.

¿Qué clase de funciones son Riemann integrables?

Teorema 5.3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en dicho intervalo.

Mas general, si f es acotada en $[a, b]$, y continua excepto en un número finito de puntos del intervalo, entonces es integrable en $[a, b]$.



Con todo lo hecho hasta ahora, podemos responder al problema inicial y afirmar que:

Si f es una función continua y no negativa en $[a, b]$, el **área** A de la región R, limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Función no Riemann integrable

Función de Dirichlet

¿Alguna función que no sea integrable?

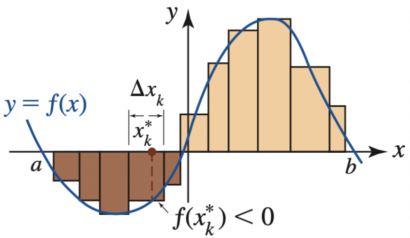
La **función de Dirichlet** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es Riemann Integrable ¿Por qué?.

Observación

Una suma de Riemann no requiere que f sea no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Por lo que no necesariamente representa una aproximación del área bajo una gráfica. Por ejemplo, si $f(x) < 0$ para algún $x \in [a, b]$, la suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k < 0$.



Si P es una **partición regular** de $[a, b]$, es decir, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, para cada $k = 1, 2, .., n$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f({x_k}^*)\ ,$$

donde n es el número de subintervalos de $[a, b]$ y ${x_k}^*$ es un punto arbitrario de $[x_{k-1}, x_k]$.

- Note que si P es regular, $||P|| \to 0 \iff n \to +\infty$. En caso contrario, solo se cumple que

$$||P|| \to 0 \Longrightarrow n \to +\infty.$$

Aplicación

Área delimitada por una curva

Considere la función $f(x) = x^2$ con $x \in [-1, 2]$ (como en el Ejemplo 1) y determine el valor del área bajo la curva.

Solución. Como f es continua en $[-1, 2]$ entonces es integrable. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición regular de $[-1, 2]$. Notar que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[-1, 2]$ tiene longitud $\Delta x_k = \frac{3}{n}$.

Si en cada subintervalo escogemos ${x_k}^* = x_k$, $x_k = -1 + \frac{3k}{n}$ y por consiguiente $f(x_k) = \frac{(3k-n)^2}{n^2}$.

Finalmente,

$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(3k-n)^2}{n^2} = 3 \, .$$

Ejercicios

1. Generalizar el ejemplo anterior, mostrando que si $a < b$ entonces

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

2. Verifique que $\displaystyle\int_a^b mx + c \, dx = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + c(b-a)$, $\forall c, m \in \mathbb{R}$.
Note que de este resultado se deduce trivialmente que:

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a) \text{ y } \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

3. Muestre que $\displaystyle\int_a^b x^3 \, dx = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$. Con todo lo hecho hasta ahora, deduzca la fórmula que permite calcular $\displaystyle\int_a^b x^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.