Problemas de Análisis (funcional)

Curso Análisis II: MPG3101

12 de noviembre de 2019

Problema 1. *Sea U un subespacio cerrado del espacio normado X. Muestra:*

1. *Si X es separable entonces X/U es separable.*
2. *Si X/U y U son separables entonces X es separable.*

Problema 2. *Sea U un subespacio del espacio vectorial X. Sea $\pi\colon X \to X/U$ la proyección canónica, es decir $\pi x = [x]$ para todo $x \in X$. Muestra que*

1. *π es lineal.*
2. *π es sobreyectiva y $\ker(\pi) = U$.*
3. *Si $V \subset X$ entonces la preimágen de $\pi(V)$ es $U + V$, es decir*

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = U + V = \{u + v \,:\, u \in U,\, v \in V\}.$$

Problema 3. *Sean*

$$c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},$$
$$c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}.$$

Muestra que

a) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *y* $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *son espacios de Banach.*

b) Determine $\dim(c/c_0)$.

Problema 4. *Una base de Schauder de un espacio normado X es una sucesón $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $x \in X$ existen coeficientes $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$* ***únicos*** *con*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j b_j \right\| = 0.$$

1. *Para $n \in \mathbb{N}$ define $e_n \in \ell^\infty$ como $(e_n)_j = 1$ si $j = n$ y $(e_n)_j = 0$ si $j \neq n$. Muestre que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para el espacio c_0 (definido en Problema 3).*

2. *Muestre que c_0 es separable.*

3. *Muestre que ℓ^∞/c_0 no es separable.*

Problema 5. *Sea X el espacio vectorial de las funciones $f\colon[0,1] \to \mathbb{R}$ que son Lipschitz continuas. La función $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ es dada por*

$$\|x\| = |x(0)| + \sup_{s,t\in[0,1],\, s\neq t} \left|\frac{x(s) - x(t)}{s-t}\right|$$

Muestra que

a) *$\|\cdot\|$ es norma y $\|x\|_\infty \leq \|x\|$ para $x \in X$.*

b) *$(X, \|\cdot\|)$ es espacio de Banach.*

Problema 6. *Sea $x \in \ell^1$. Muestre que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.*

Problema 7. *Analiza convergencia de $\sum_{i=1}^\infty (-t)^i/i$ en la norma $\|\cdot\|$ sobre $C[0,1]$.*

Problema 8. *Muestra que la identitad como operador*

$$\mathrm{Id}\colon (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_1), \quad x \mapsto x$$

es continuo e invertible pero su inversa no es continua.

Problema 9. *Sea $\alpha \in (0,1)$,*

$$k_\alpha(t,s) := \begin{cases} \frac{1}{|t-s|^\alpha} & t \neq s, \\ 0 & t = s \end{cases}.$$

Muestre que

$$(Tx)(t) := \int_0^t k_\alpha(t,s) x(s)\, ds$$

define un operador $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ que es acotado.

Problema 10. *Para $x \in C^1[0,1]$ considere*

$$\|\!|x|\!\|_1 := |x(0)| + \|x'\|_\infty\,,$$
$$\|\!|x|\!\|_2 := \max\left\{\left|\int_0^1 x(s)\, ds\right|, \|x'\|_\infty\right\}$$

1. *Muestre que $\|\!|\cdot|\!\|_1$ y $\|\!|\cdot|\!\|_2$ son normas sobre $C[0,1]$.*

2. *Analice si las normas $\|\!|\cdot|\!\|_1$ y $\|\!|\cdot|\!\|_2$ son equivalentes a la norma $\|\!|x|\!\| := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$.*

Problema 11. *Sea X un espacio normado y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Muestra que si (x_n) es Cauchy y además contiene una subsucesión convergente entonces $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe.*

Problema 12. *Sea X un espacio normado y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Muestra que si cada subsucesión tiene una subsucesión que converge al mismo límite $x \in X$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Problema 13. *Sea X un espacio normado y $T, S\colon X \to X$ dos operadores lineales que satisfacen*

$$[T, S] = \mathrm{Id},$$

donde $[T, S] := TS - ST$ se llama conmutador. Muestre que uno de los operadores debe ser no acotado (es decir discontinuo).
Ayuda: *Muestre primero que $TS^{n+1} - S^{n+1}T = (n+1)S^n$.*
Para ver un ejemplo considere el caso concreto $X = C^\infty$ sobre un intervalo y $(Tx)(t) = f'(t)$, $(Sx)(t) = tx(t)$.

Problema 14. *Sea $y \in \ell^\infty$ y define $T_y\colon \ell^p \to \ell^p$, $(T_y x)(n) = y(n)x(n)$. Calcule $\|T_y\|$.*

Problema 15. *Sean X, Y espacios normados, $U \subset X$ un subespacio denso, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Muestra que si la restricción $T|_U$ es isometria entonces T es isometria.*

Problema 16. *Sea $T\colon X \to Y$ isometria (X, Y espacios normados). Entonces $\|T\| = 1$.*

Problema 17. *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sea $\pi\colon X \to X/\ker(T)$ la proyección canónica.*

1. *Muestra que existe un operador lineal $T_/\colon X/\ker(T) \to Y$ tal que $T = T_/ \circ \pi$.*
2. *$T_/$ es inyectiva y $\|T\| = \|T_/\|$.*
3. *Si T es un operador con*

$$T\left(\left\{x \in X \,:\, \|x\|_X < 1\right\}\right) = \left\{y \in Y \,:\, \|y\|_Y < 1\right\},$$

entonces $T_/$ es isometria e isomorfismo.

Problema 18. *Sea X espacio normado y $T\colon X \to \mathbb{K}$ con $\|T\| = 1$. Muestra que T satisface*

$$T\left(\left\{x \in X \,:\, \|x\|_X < 1\right\}\right) = \left\{y \in \mathbb{K} \,:\, |y| < 1\right\}.$$

Además muestra la fórmula de Ascoli: *(utilizando Problem 17)*

$$|T(x)| = \inf\left\{\, \|x - k\| \,:\, k \in \ker(T)\right\} \quad \forall T \text{ con } \|T\| = 1.$$

Problema 19. *Muestre que $\ell^p \cong \ell^p/U$ donde $U = \left\{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, t_{2k-1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\right\}$.*

Problema 20. *Dada una sucesión* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definimos el operador de* shift S *como*

$$S(t_1, t_2, t_3, \dots) \coloneqq (t_2, t_3, \dots) = (t_n)_{n\geq 2}$$

Muestre que $S\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ *es operador continuo y calcule* $\|S\|$.

Problema 21. *Sea* X *un espacio normado. Muestra que el espacio dual* X' *separa los puntos de* X*, es decir, para todo* $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ *existe* $f \in X'$ *tal que* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Problema 22. *Sea* X *un espacio normado,* $U \subset X$ *un subespacio. Entonces,*

- U *es denso en* X *es equivalente a*
- *Si* $x' \in X'$ *y* $x'|_U = 0$ *entonces* $x' = 0$.

Problema 23. *Se denota con* S *el operador de shift (Problema 20).*
Una función lineal $f\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ *se llama* Límite de Banach *si*

- $f(Sx) = f(x)$ *para todo* $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
- *Si* $t_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f(x) \geq 0$.
- *Si* $t_n = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $f(x) = 1$.

Muestre que

1. $f \in (\ell^\infty)'$ *y* $\|f\| = 1$,
2. $\liminf_{n\in\mathbb{N}} t_n \leq f(x) \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} t_n$ *para* $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ *y*
3. *concluye que* $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} t_n$ *para* $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c = \left\{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} s_n \text{ existe.}\right\}$
4. *Existencia de un* Límite de Banach f.

Ayuda para la última parte: *Define* $p(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n$ *y muestre que* $0 \leq p|_U$ *donde* $U = \left\{Sx - x : x \in \ell^\infty\right\}$*. Después aplique el teorema de Hahn–Banach.*

Problema 24. *Sea* X *un espacio normado y sea* F *el* mapeo de dualidad *que se define para cada* $x \in X$ *como*

$$F(x) = \left\{f \in X' : \|f\|_{X'} = \|x\| \;\text{ y }\; \langle f, x\rangle = \|x\|^2\right\}$$

Muestre que

1. $$F(x) = \left\{f \in X' : \|f\|_{X'} \leq \|x\| \;\text{ y }\; \langle f, x\rangle = \|x\|^2\right\}$$

   y concluya $\varnothing \neq F(x)$ *es cerrado y convexo.*

2.

$$F(x) = \left\{ f \in X' : \tfrac{1}{2}\|y\|^2 - \tfrac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y - x\rangle \quad \forall y \in X \right\}.$$

Además concluye que

$$\langle f - g, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X, f \in F(x), g \in F(y).$$

(se puede demostrar que $\langle f - g, x - y\rangle \geq (\|x\| - \|y\|)^2$*.)*

3. *si* X' *is convexa estricta entonces* $F(x)$ *contiene exactamente un elemento. (en este caso se puede interpretar* F *como función* $X \to X'$*)*

4. *si* X' *es convexa estricta y sean* $x, y \in X$ *tal que*

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle = 0$$

entonces $F(x) = F(y)$*.*

Problema 25. *Sea* $X = \left\{ x \in C([0,1];\mathbb{R}) : x(0) = 0 \right\}$ *equipado con la norma* $\|\cdot\|_\infty$*. Considere*

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \int_0^1 u(t)\,dt.$$

1. *Muestre que* $f \in X'$ *y calcule* $\|f\|_{X'}$*.*

2. *Existe* $x \in X$ *tal que* $\|x\| = 1$ *y* $f(x) = \|f\|_{X'}$*?*

Problema 26. *Sea* X *un espacio normado. Si* $\dim(X) = \infty$ *muestre que siempre existe al menos una función lineal discontinua. Existen funciones lineales discontinuas si* $\dim(X) < \infty$*?*

Ayuda: *Usa una base algebráica del espacio* X *para construir una función lineal discontinua.*

Una base algebráica *es un conjunto* $B \subset X$ *(posiblemente no contable) de elementos linealmente independiente tal que cada* $x \in X$ *se puede escribir como combinación lineal finita(!) de elementos de este conjunto.*

Problema 27. *Sea* $\ell : c_0 = \left\{ (t_n) \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} t_n = 0 \right\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ell((t_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} t_n.$$

Muestre que $\ell \in c_0'$*. Además muestre que el* sup *en la definición de la norma dual* $\|\ell\|_{c_0'}$ *no se alcanza, es decir, no existe* $x \in c_0$ *con* $\|x\| = 1$ *tal que* $\ell(x) = \|\ell\|_{c_0'}$*.*

Problema 28. *Mismo ejercicio como en el Problema 27 con el espacio* $C[0,1]$ *y funcional*

$$\ell(x) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} x(t)\,dt.$$

Problema 29. *Sea X un espacio normado. Sea $J\colon X \to X''$ el mapeo canónico de X en el espacio bidual X''. Muestre que* $\operatorname{im}(J)$ *cerrado en X'' ssí X es un espacio de Banach.*

Problema 30. *Sean X, Y espacios normados, $T\colon X \to Y$ un isomorfismo (con* $\operatorname{im}(T) = Y$*). Muestre que X es Banach ssí Y es Banach. Además muestra que X es reflexivo ssí Y es reflexivo.*

Problema 31. *Sea X un espacio normado pero no completo. Muestre que X no puede ser reflexivo.*

Problema 32. *Determine el conjunto $c_0^{\perp} = \left\{x \in \ell^1 \,:\, \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in c_0\right\} \subset \ell^\infty$. (Nota: $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$, i.e. se puede identificar el espacio dual de ℓ^1 con ℓ^∞ mediante $\langle f, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n x_n$ para $f = (f_n) \in \ell^\infty$, $x = (x_n) \in \ell^1$.)*

Además determine el conjunto

$$(c_0^{\perp})^{\perp} = \left\{f \in \ell^\infty \,:\, \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in c_0^{\perp}\right\}$$

y verifique que $c_0 \neq (c_0^{\perp})^{\perp}$.

Problema 33. *Considere el espacio*

$$d = \left\{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \,:\, \exists N \in \mathbb{N} \ t.q.\ t_n = 0 \quad \forall n \geq N\right\}$$

y la norma $\|\cdot\|_\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$ defina $T_n\colon d \to \mathbb{K}$, $x \mapsto n t_n$ para $x = (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in d$. Muestre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n x| < \infty \quad \forall x \in d,$$

pero

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = \infty.$$

¿Porqué no contradice al teorema de Banach–Steinhaus*?*

Problema 34. *Sea X espacio normado, $U \subset X$ convexo. Muestra que $\overline{U}$ es convexo.*

Problema 35. *Sean X, Y espacios de Banach, $U \subset X$ un subsespacio y $T\colon D \to Y$ un operador cerrado y sobreyectivo. Muestre que T es operador abierto. Si además T is inyectivo entonces T^{-1} es continuo.*

Problema 36 (Brezis, Ejercicio 2.3).

Problema 37 (Brezis, Ejercicio 2.4).

Problema 38 (Brezis, Ejercicio 2.5).

Problema 39 (Brezis, Ejercicio 2.8).

Problema 40. *Sean X, Y espacios normados. Considere*

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} & si\ 1 \le p < \infty, \\ \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} & si\ p = \infty. \end{cases}$$

Muestre que

- $\|\cdot\|_p$ *define norma (espacio $X \times Y$).*
- *Todas las normas son equivalentes.*
- $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$, $\text{lím}_{n\to\infty} y_n = y$ *es equivalente a* $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$ *con respecto a* $\|\cdot\|_p$.
- *Si X, Y son Banach entonces $(X \times Y, \|\cdot\|_p$ es Banach.*

Problema 41. *Sean X, Y espacios de Banach. Sea $T\colon: X \supset \text{dom}(T) \to Y$ cerrado. Muestra que el* kernel

$$\{x \in \text{dom}(T) : Tx = 0\}$$

es un subespacio cerrado de X.

Problema 42. *Sean X, Y espacios normados, $D \subset X$ subespacio, $T\colon D \to Y$ definido por $Tx = 0$. ¿Es T cerrado?*

Problema 43. *Sea $T\colon \ell^2 \supset D \to \ell^2$ con $T\big((t_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (nt_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conisdere*

1. $D = \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : (nt_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ *o*
2. $D = d$.

Analice si T es cerrado (para los dos casos).

Problema 44. *Sean X, Y, Z espacios de Banach, $T\colon X \to Y$ un operadores lineal. Sea $S\colon Y \to Z$ un operador lineal, inyectivo y continuos. Además sea $ST\colon X \to Z$ continuo. Muestre que T es continuo.*

Problema 45. *Sea X espacio de Banach (sobre $\mathbb{R}$) y sea $T\colon X \to X'$ lineal con*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Muestre $T \in \mathcal{L}(X, X')$.
Sugerencia: *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \to 0$ y $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Para $y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ estudie*

$$\langle T(x_n + \lambda y), x_n + \lambda y\rangle$$

Problema 46. *Sea* $X = C([0,1])$ *con la norma infinito. Sea* $T: D \subset X \to X$ *donde* $D = C^1([0,1])$ *y*

$$Tx = \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Muestre que D *es denso en* X *y* T *es operador cerrado. ¿Que es* $\|T\|$*?*

Problema 47. *Sea* $X = \ell^1$ *(nota: entonces se puede identificar* $X' \cong \ell^\infty$*). Sea* $T: X \to X$ *definido por*

$$T(t_1, t_2, t_3, \dots) = \left(t_1, \frac{t_2}{2}, \frac{t_3}{3}, \dots\right).$$

Muestre que $T \in \mathcal{L}(X, X)$ *y determine* T'*,* $\ker(T)$*,* $\ker(T')$ *y* $\overline{\mathrm{im}(T')}$.

Problema 48. *Sean* X, Y *Banach y* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *biyectivo. Muestra que* T' *es biyectiov y la fórmula*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

Problema 49. *Sean* U, V *subespacios cerrados del espacio Banach* X*. Muestre que* U, V *no es necesariamente cerrado. Considere* $X = \ell^1 \oplus \ell^2$*,* $U = \ell^1 \oplus \{0\}$*,* $V = \mathrm{gr}(T)$ *donde* $T: \ell^1 \to \ell^2$ *definido por* $Tx = x$*.*

Problema 50. *Sea* $z \in \ell^\infty$ *y define* $T_z: \ell^p \to \ell^p$ *por* $(T_z x)(n) = z(n)x(n)$*.*

1. *Calcule* $\|T_z\|$
2. *Muestre que* T_z *es compacto ssí* $z \in c_0$*.*

Problema 51. *Sean* $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le 1$ *y* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$*. Considere* $\ell: C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\ell(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x(t_j).$$

Calcule $\|\ell\|$*.*

Problema 52. *Considere* $C^1([0,1])$ *con la norma* $\|x\| = \|x\|_\infty + \|f'\|_\infty$*. Muestra que el operador de la inyección*

$$\mathrm{Id}: (C^1([0,1]), \|\cdot\|_)) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$$

es compacto. Sugerencia: *Teorema de Arzelá–Ascoli.*

Problema 53. *Sea* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios de Banach. Sea* $1 \leq p < \infty$ *y defina*

$$\bigoplus_p E_n = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in E_n,\ \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\}.$$

Muestra que $(\bigoplus_p E_n, \|\cdot\|_p)$ *es espacio de Banach. Además muestre que*

$$(\bigoplus_p E_n)' \cong \bigoplus_q E_n'$$

donde q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Problema 54. *Muestra que la suma de un operador cerrado y un operador acotado es un operador cerrado.*

Problema 55. *Sea* X *un espacio con* $\dim(X) < \infty$. *Muestre que cada operador lineal* $T\colon X \to Y$ *es compacto.*

Problema 56. *Sean* X, Y *espacios normados y* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *tal que* $\dim(\mathrm{im}(T)) < \infty$. *Muestre que* T *es compacto.*

Problema 57 (Brezis, Ejercicio 4.2).

Problema 58 (Brezis, Ejercicio 4.3).

Problema 59 (Brezis, Ejercicio 4.6).

Problema 60 (Brezis, Ejercicio 4.7).

Problema 61. *Demuestre que la identitad* $\mathrm{Id}\colon \ell^p \to \ell^q$ *es operador continuo para* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Especificamente, demuestre que*

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p.$$

Problema 62. *Demuestre que* $\bigcup_{1\leq p<\infty} \ell^p \subsetneq c_0$.

Problema 63. *Dé un ejemplo de una sucesión acotada sin subsucesión convergente*

a) $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty))$

b) $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$

Problema 64. *Sea* $x_n(t) := t^n$, $n \geq 1$ *y define* $T := \overline{\mathrm{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *(completar con respecto a* $\|\cdot\|_p$ *en* $L^p([0,1])$*). Analice si* $1 \in T$.

Problema 65. *Considere el espacio* ℓ^∞/c_0. *Demuestre que* $\|[x]\| = \limsup_{n\to\infty} |t_n|$ *donde* $[x] \in \ell^\infty/c_0$ *y* $x = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

Problema 66. *En este ejercicio definimos los espacios de* Orlicz*: Sea* $\phi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ *función continua y convexa. Además,* $\phi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$*. Defina el espacio*

$$\mathcal{L}^{\phi}(\mathbb{R}) := \left\{ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ medible } : \text{existe } c>0 \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(t)|/c) < \infty \right\}$$

Muestre que $\mathcal{L}^{\phi}(\mathbb{R})$ *es espacio vectorial. Sea* $N := \{f : f=0 \text{ c.t.p}\}$ *y defina*

$$L^{\phi}(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^{\phi}(\mathbb{R})/N.$$

Este espacio se llama **espacio de Orlicz***.*

Muestre que

$$\|f\|_{\phi} := \inf\left\{ c>0 : \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(t)|/c) \le 1 \right\}$$

define una norma.

Finalmente, demuestre que $(L^{\phi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\phi})$ *es espacio de Banach.*

Problema 67. *Con las notaciones del Problema 66. Analice las normas* $\|\cdot\|_{\phi}$ *para* $\phi(t)=t^p$ *y* $1<p<\infty$ *(verifique si* $\|\cdot\|_{\phi}=\|\cdot\|_p$*).*

Problema 68. *Con las notaciones del Problema 66. Defina el espacio*

$$H^{\phi}(\mathbb{R}) := \left\{ f\in L^{\phi}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \phi(|f(t)|/c) > \infty \quad \forall c>0 \right\}$$

y demuestra que es un subespacio cerrado de $L^{\phi}(\mathbb{R})$*. Analice si* $H^{\phi}(\mathbb{R}) = L^{\phi}(\mathbb{R})$ *para* $\phi(t)=t^p$*,* $1\le p<\infty$ *y* $\phi(t)=e^{t^2}-1$*.*

Problema 69. *Sea* $1<p<\infty$*. Muestre que* $L^p(\mu)$ *es* estrictamente convexa*: Sean* $f_j\in L^p(\mu)$ *con* $\|f_j\|_p=1$ *(*$j=1,2$*). Entonces,*

$$\left\| \frac{f_1+f_2}{2} \right\|_p = 1 \quad\Longrightarrow\quad f_1=f_2.$$

Nota: Revise las demostraciones de las desigualdades de Hölder/Minkowski o eche una vista en el libro de Brezis.

Problema 70. *Demuestre que los espacios* ℓ^1*,* ℓ^∞*,* L^1*,* L^∞ *no son estrictamente convexos. ¿Y los espacios* c_0*,* $C([0,1])$*?*

Problema 71. *Visualice las bolas unitarias en* $\mathbb{R}^2$ *con respecto a las normas* $\|(x,y)\|_p = (|x|^p+|y|^p)^{1/p}$ *para algunos valores de* $p\in[1,\infty)$*. También considere* $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$*.*

En general: ¿Que significa convexidad estricta para la forma geométrica de la bola unitaria en ℓ^p*?*

Problema 72. *Demuestre que los espacios* L^p *para* $2\le p<\infty$ *son* uniformemente convexos *mediante la desigualdad de Clarkson. (Demostración de Teorema 4.10 en el libro de Brezis).*

Nota: Es posible demostrar que los espacios son uniformemente convexos para $1<p<\infty$*.*

Problema 73 (Brezis, Ejercicio 4.4). *(La desigualdad en 4.4–2 se llama* desigualdad de Lyapunov*)*

Problema 74. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ *con* $f_n(t) := t^n - t^{n+1}$. *Analice si la sucesión es acotada y convergente en*

- $C([0,1])$ *y*
- $L^p([0,1])$.

Problema 75. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ *con* $f_n(t) := n^{3/2}(t^n - t^{n+1})$. *Analice si la sucesión es acotada y convergente en*

- $C([0,1])$ *y*
- $L^p([0,1])$.

Ayuda: *Considere los casos* $p = 1$ *y* $p = 2$. *Después aplica la desigualdad de Lyapunov (Problema 73).*

Problema 76. *Demuestra que la norma infinito y la norma infinito esencial son iguales para funciones en* $C([0,1])$, *es decir* $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty}$ *para todas* $f \in C([0,1])$.

Problema 77. *Demuestre que* $L^\infty([0,1]) \subsetneq \bigcap_{1\le p<\infty} L^p([0,1])$.

Problema 78. *Demuestre que* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *no es separable.*

Problema 79. *Modifique el teorema de convergencia dominada para* L^p *con* $1 < p < \infty$ *(y dé la demostración).*

Problema 80. *Sea* $I = (0,1)$ *y* $1 < p < \infty$. *Considere la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I)$ *definida por*

$$f_n(t) := n^{1/p} e^{-nt}.$$

Demuestre que

- $f_n \to 0$ *c.t.p.*
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $L^p(I)$,
- *pero* f_n *no converge a* 0 *en* $L^p(I)$. *(¿Porqué no contradice al teorema de convergencia dominada?)*
- f_n *converge débilmente a* 0.

Problema 81. *Dé un ejemplo de una sucesión acotada en* $L^1((0,1))$ *que no permite ninguna subsucesión que converge débilmente.*

Problema 82. *Sea* $1 \le p < \infty$ *y considere el espacio*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^\infty(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{supp}(v) \text{ compacto} \right\}$$

Define las funciones

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0, \\ 0 & t \le 0, \end{cases}$$
$$\varphi(t) := C\psi(1-t^2),$$

donde $C > 0$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 1$. *Se puede verificar que* $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *con* $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = 1$ *y* $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Para $f \in L^p(\mathbb{R})$ *definimos la* convolución

$$(T_\varepsilon f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\varphi_\varepsilon(t-s)\,ds = \int_R f(t-s)\varphi_\varepsilon(s)\,ds.$$

(Se puede verificar que $T_\varepsilon f$ *es bien definida y una función medible.)*

- *Demuestre que*

  $$\|T_\varepsilon f\|_p \le \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R})$$

  Ayuda: Desigualdad de Hölder y $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{1/p}\varphi_\varepsilon^{1/q}$ para $1/p + 1/q = 1$

- *Demuestre que* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_\varepsilon f - f\|_\infty = 0$ *para* $f \in C_c(\mathbb{R})$ *y* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_\varepsilon f - f\|_p = 0$ *para* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *(*Ayuda: *Recuerdese que* $C_c(\mathbb{R})$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R})$.*)*

- *Demuestre: Si* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *entonces* $T_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Además, si* $f \in C_c(\mathbb{R})$ *entonces* $T_\varepsilon f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- *Demuestre que* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R})$.

Problema 83. *Sea* H *espacio hilbertiano y* $(x_n) \subset H$. *Demuestre que* $x_n \to x$ *ssí* $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ *y* $\|x_n\| \to \|x\|$.

Problema 84. *Dé un ejemplo de un espacio pre-hilbertiano* H *y un subespacio* $U \subset H$ *tal que* $\overline{U} \ne (U^\perp)^\perp$. *Dé un ejemplo tal que* $\overline{U} \oplus U^\perp \ne H$.

Problema 85. *Sea* H *un espacio hilbertiano,* $K \subset H$ *cerrado y convexo. Sea* $P\colon H \to K$ *el operador de la* aproximación optimal*, es decir, para* $x \in H$ *el elemento* $P(x)$ *se defina por*

$$\|x - P(x)\| = \inf_{y\in K} \|x - y\|.$$

Demuestre que

$$\|P(x) - P(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Ayuda: *Recuerdese que el infimo se caracteriza también por* $\mathrm{Re}\,(x - P(x), y - P(x)) \le 0$ *para todo* $y \in K$.

Problema 86. *Sea H espacio hilbertiano, U, V subespacios cerrados. Se denota con P_U, P_V las proyecciones ortogonales asociadas a estos subespacios. Demuestre que*

$$U \subset V \iff P_U = P_V P_U = P_U P_V.$$

Problema 87. *Sea H espacio hilbertiano. Dado $T \in \mathcal{L}(H)$ demuestre que*

- *T normal es equivalente a*
- $\|Tx\| = \|T^* x\|$.

Problema 88 (Brezis, Ejercicio 5.4).

Problema 89 (Brezis, Ejercicio 5.5).

Problema 90 (Brezis, Ejercicio 5.6).

Problema 91 (Brezis, Ejercicio 5.8).

Problema 92 (Brezis, Ejercicio 5.2).

Problema 93 (Brezis, Ejercicio 5.3).

Problema 94 (Brezis, Ejercicio 5.16).

Problema 95 (Brezis, Ejercicio 5.26).

Problema 96. *Dé un ejemplo de una serie que converge incondicionalmente pero no converge absolutamente (considere los espacios ℓ^p para $1 < p \leq \infty$).*

Problema 97. *Sean $r_n(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^n \pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal pero no es base ortonormal en $L^2([0,1])$.*

Nota: *Las funciones r_n se llaman* funciones de Rademacher*.*

Problema 98. *Con las notaciones del Problema 97 demuestre que*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = 0$$

para casi todas $t \in [0,1]$ donde

$$s_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r_k(t).$$

Ayuda: *Considere $\int_0^1 s_n(t)^4 \, dt$ y el teorema de convergencia monótona (Beppo–Levi).*

Problema 99. *Sea X un espacio normado. Demuestre que*

- *$\sum_{i \in I} x_i$ converge incondicionalmente a x ssí*

- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $F \subset I$ con $|F| < \infty$ tal que para cada $F \subset G \subset I$ con $|G| < \infty$ tenemos que*

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i - x \right\| \leq \varepsilon.$$

Problema 100. *Discute el* mapeo de dualidad *(Problema 24) en espacios hilbertianos.*

Problema 101. *Sea (x_n) una sucesión en el espacio hilbertiano H con $(x_n, x_m) = 0$ si $n \neq m$. Demuestre que los tres ítemes son equivalentes:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es convergente.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ *es convergente.*

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge débilmente. Esto significa*

$$\sum_{n=1}^{N} x_n \xrightarrow{\sigma} x \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Problema 102. *Considere el espacio $L^2([0,1])$. Sean $p_j(t) = t^j$ y $U := \operatorname{lin}\{p_0, p_1, p_2\}$. Sea $f(t) = t^3 - t$. Determine $u \in U$ tal que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in U} \|f - v\|.$$

Nota: *Utilice el algoritmo de Gram–Schmidt para ortonormalizar el conjunto $\{p_0, p_1, p_2\}$.*

Problema 103. *Calcule la serie de Fourier de la función $u(x) = \pi x - x^2 \in L^2([0,\pi])$. Demuestre la fórmula*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Ayuda: *Identitad de Parseval.*

Problema 104. *La serie de Fourier no converge necesariamente en cada punto. ¿Pero es posible integrarla? Analice si*

$$(u, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c_n, 1) + b_n (s_n, 1)$$

dónde $c_n = \cos(n\cdot)$, $s_n = \sin(n\cdot) \in L^2([-\pi,\pi])$.

Problema 105. *Considere la serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi/2) \\ 0 & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Determine algunas series parciales y observe el fenoméno de Gibbs.

Problema 106. *Demuestra que* $\mathcal{L}(H,H)$ *es un espacio hilbertiano ssí* $\dim(H) = 1$.

Problema 107. *Sean* X, Y *dos espacios hilbertianos separables con* $\dim(X) = \infty$, $\dim(Y) = \infty$. *Sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal de* X *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *base ortonormal de* Y. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *con* $Tx_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{mn} y_m$.

- *Demuestre que*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^2 \le \|T\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |t_{mn}|^2 \le \|T\|^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- *Dé un ejemplo de* $(t_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^2 \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |t_{mn}|^2 \le 1 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

pero no existe ningún operador $T \in \mathcal{T}(X,Y)$ *tal que* $(Tx_n, y_m) = t_{mn}$.

Problema 108. *Sea* H *un espacio hilbertiano. Muestra que* $T \in \mathcal{L}(H)$ *se puede descomponer como*

$$T = S + iR$$

dónde $S, R \in \mathcal{L}(H)$ *son autoadjuntos.*

Además demuestra que

$$T = U - V$$

dónde U *es autoadjunto y* V *es anti-simétrico* ($V^* = -V$).

Problema 109 (Brezis, Ejercicio 8.1).

Problema 110 (Brezis, Ejercicio 8.4).

Problema 111 (Brezis, Ejercicio 8.7).

Problema 112 (Brezis, Ejercicio 8.10).

Problema 113 (Brezis, Ejercicio 8.13).

Problema 114 (Brezis, Ejercicio 8.14).

Problema 115. *Sea* $I = (0,1)$. *Para un punto* $x \in I$ *fijo, demuestre que* $\ell\colon H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ *con* $\ell(u) = u(x)$ *es bien definido y que* $\ell \in (H_0^1(I))'$. *Además, demuestre que problema*

$$\text{hallar } u \in H_0^1(0,1) \text{ t.q. } \int_0^1 u'v' = v(x) \quad \text{para toda } v \in H_0^1(0,1)$$

tiene solución única. Derive la ecuación diferencial asociada y, si posible, calcule u explicitamente.

Problema 116. *Sea* $I = (0,1)$. *Demuestre que* $\ell\colon H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ *con* $\ell(u) = u(0)$ *es bien definido y que* $\ell \in (H^1(I))'$. *Además, demuestre que problema*

$$\text{hallar } u \in H^1(0,1) \text{ t.q. } \int_0^1 u'v' = v(0) \quad \text{para toda } v \in H^1(0,1)$$

tiene solución única. Derive la ecuación diferencial asociada (que son las condiciones de borde?) y, si posible, calcule u explicitamente.