

### Audiencia 3.

$$\star \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [-2, 1]$$

$$N.9 \rightarrow 0 < 3 \text{ es } \star$$

$$\frac{1}{n} < 3 : \forall n \in \mathbb{N}$$

En efecto, por doble inclusión.

$$\begin{aligned} c) \text{ Sea } x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in [-1 - \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}] \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 - \frac{1}{i} \wedge x \leq 1 - \frac{1}{i} ; i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\text{Como } i \in \mathbb{N}, i \geq 1, \text{ entonces } -1 - \frac{1}{i} > -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{i} < -2 \quad \text{y} \quad 1 - \frac{1}{i} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{i} < 2$$

$$\text{Así, como } x \leq 1 - \frac{1}{i} < 1. \text{ Así como } x \leq 1 - \frac{1}{i} < 1 \Rightarrow x < 1 \quad (\star)$$

$$\text{Por } (\star) \text{ y } (\star\star), x \in [-2, 1] \text{ y De este modo } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq [-2, 1] \quad \square$$

$$2) \text{ Recíprocamente, Sea } x \in [-2, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x = -2, x \in A_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i &\Rightarrow -1 - \frac{1}{i} < x < 1 - \frac{1}{i} \\ &\Rightarrow -1 - \frac{1}{i} < -2 < 1 - \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Si  $x \in (-2, 1)$ , se puede escribir el intervalo  $(-2, 1)$  como la unión de intervalos  $[-1, 1]$  con un "desplazamiento" "pequeño" hacia la izquierda

Observamos que existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que  $x \in (-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$

$$[-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \supseteq (-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \ni x \text{ para } x \in A \ni (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \text{ para } \varepsilon < 1$$

• Como  $\epsilon > 0$ , por P.H.

$$[1, 5] = A \cup$$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \epsilon > \frac{1}{n_1}$

•  $\exists n_2 \in \mathbb{N} : \epsilon < \frac{1}{n_2}$  (Pues  $\epsilon < 1$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} -\epsilon < -\frac{1}{n_1}, \\ -\epsilon > -\frac{1}{n_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\epsilon < 1-\frac{1}{n_1} : (*) \\ 1-\epsilon > 1-\frac{1}{n_2} : (***) \end{cases} \Rightarrow$$

Queremos probar que  $\exists n \in \mathbb{N}$  que satisface  $(*)$  y  $(***)$ , pues en tal caso,  $x \in [-1-\frac{1}{n_1}, 1-\frac{1}{n_2}] = A_n \Rightarrow x \in$

$$(*) \rightarrow x < 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x < 1 \rightarrow \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \rightarrow x < 1$$

$$(**) \rightarrow 1-\epsilon > x > 1-\frac{1}{n_2} \rightarrow 1-\frac{1}{n_2} > x > 1-\epsilon$$

$$1-\epsilon > 1-\frac{1}{n_2} \geq 1-\frac{1}{n_1}$$

$$1-\epsilon < 1-\frac{1}{n_1} \leq 1-\frac{1}{n_2} \quad \forall n \in [n_1, n_2] \quad \text{y} \quad n_1 < n_2$$

Basta considerar  $n \in [n_1, n_2]$ , pues obviamente  $n_2 \Rightarrow 1-\frac{1}{n_2} \leq 1-\frac{1}{n_1}$  y sin  $n_1 \Rightarrow 1-\frac{1}{n_1} \geq 1-\frac{1}{n_2}$  "más grande" que no  $[1, 5]$  contiene

sea tal caso,  $[-1-\frac{1}{n_1}, 1-\frac{1}{n_2}] \ni$  si  $x \in [-1-\frac{1}{n_1}, 1-\frac{1}{n_2}]$

• e su vez, como  $[-1-\epsilon, 1-\epsilon] \subseteq [-1-\frac{1}{n_1}, 1-\frac{1}{n_2}]$

se concluye  $(-1-\epsilon, 1-\epsilon) \subseteq A_n$  y cono  $x \in (-1-\epsilon, 1-\epsilon)$

$$\Rightarrow x \in A \quad \text{y} \quad \therefore x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

c)  $A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ ,  $i \in \mathbb{N}$   $\Leftrightarrow$   $x \in A_i \Leftrightarrow -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = (-1, 1)$   $\Leftrightarrow$   $\forall x \in (-1, 1) \exists i \in \mathbb{N} : -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}$

e) Sea  $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i$ . Luego  $\exists i \in \mathbb{N} : -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}$

• Como  $i \geq 1$ ,  $-\frac{1}{i} < 1$  y  $\frac{1}{i} > -1$ .

Luego,  $(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \subseteq (-1, 1)$  y por lo tanto,  $x \in (-1, 1)$

2) Sea  $x \in (-1, 1)$ , queremos probar que  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

En efecto,  $n=1$ , Así  $(-1, 1) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  y como  $x \in (-1, 1)$  probamos la inclusión contraria,  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq (-1, 1)$ .

•  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$

2) Es claro que  $\forall n \in \mathbb{N} -\frac{1}{n} < 0$  y  $0 < \frac{1}{n}$ .

Por lo tanto,  $\{0\} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y es:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq \{0\}$ .

e) Sea  $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |x| < \frac{1}{n}$ .

Supongamos  $|x| > 0$ , entonces por Propiedad de Aproximación  
 $\exists n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $|x| > \frac{1}{n} (\rightarrow \leftarrow)$   
 lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $|x|=0 \Rightarrow x=0$

Así probamos la inclusión restante, se concluye  $x=0$ .

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$

(P2)  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  creciente ( $A_i \subseteq A_{i+1}$ )  $A_i \neq \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$ , todos distintos.  
 Se define  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  por  $B_j = A_k - A_{k-1}, \forall k \geq 2$ .

$$B_1 = A_1, B_k = A_k - A_{k-1}, \forall k \geq 2.$$

Probar que  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una partición de  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

Tenemos que probar:

$$1) \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$2) \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}. B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$$3) B_n \neq \emptyset \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = A_k$$

En efecto,

•  $B_1 = A_1 \neq \emptyset$  pues la familia  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  no tiene elementos ~~vacíos~~.

•  $\forall k \geq 2$ ,  $B_k \neq \emptyset$ , pues si  $B_k = \emptyset$ ,  $A_k \setminus A_{k-1} = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_k = A_{k-1} \\ A_k \subset A_{k-1} \end{cases}$$

Como  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es creciente y todos sus elementos son distintos, lo anterior ~~no~~ puede ocurrir y por lo tanto  $B_k \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Veamos que son disjuntas a pares.

Sea  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $1 < i < j$  (sin pérdida de generalidad)

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j &= (A_i \setminus A_{i-1}) \cap (A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap A_j \cap A_{j-1}^c \\ &= (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap A_{j-1}^c \cap A_j \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } i > 1 \quad B_1 \cap B_i &= A_1 \cap (A_i - A_{i-1}) \\ &= A_1 \cap A_i \cap A_{i-1}^c \\ &= (A_1 - A_{i-1}) \cap A_1. \end{aligned}$$