

Guía N°11: Sistemas Lineales Parte II
 Cálculo Numérico 521230

1. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Determinar cuáles de ellas son definidas positivas.
- Determinar cuáles de ellas son diagonal dominante estricta.

2. Para $s \in \mathbb{R}$, considere la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & s & s \\ s & 1 & s \\ s & s & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinar sus valores propios.
- Determine el rango de valores de s para el cual la matriz es definida positiva.
- Determine el rango de valores de s para el cual la matriz es diagonal dominante estricta.

3. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & -1 & a \\ -1 & 3 & 0 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Determinar a y b de manera que la matriz sea simétrica y definida positiva.
- Determinar a y b de manera que la matriz sea diagonal dominante estricta.

4. De las matrices del Problema 4, determine a cuál de ellas se le puede realizar la factorización de Cholesky. Realizar dicha factorización cuando corresponda. **Indicación:** MATLAB entrega $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ a través del siguiente comando: `U = chol(A);`.

5. Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- ¿Es convergente el Método de Jacobi si se aplica a resolver este sistema?. Justifique.
- Realizar, “a mano” dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Bajar desde Canvas el programa *jacobi_ejemplo1.m* utilizado en el video y modifíquelo para resolver este sistema con una tolerancia de $\text{TOL} = 10^{-10}$. ¿Cuál es la aproximación de \mathbf{x} que entrega el método?.

6. Repita el ejercicio anterior, pero en lugar del Método de Jacobi considere el Método de Gauss-Seidel.

7. Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es \mathbf{A} es diagonal dominante estricta?. ¿Es \mathbf{A} simétrica y definida positiva?

b) ¿Cuál método iterativo recomendaría para resolver el sistema?.

c) Utilizar el método recomendado en b) con una tolerancia de $\text{TOL} = 10^{-8}$, comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bajar

desde Canvas el programa respectivo.

8. Se quiere resolver, mediante un esquema iterativo, el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Se descompone \mathbf{A} como: $\mathbf{A} = \mathbf{N} - \mathbf{P}$ con \mathbf{N} invertible y sabemos que el algoritmo del esquema general es:

```
Dado el vector inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,
for  $k = 1, 2, \dots$ 
|    $\mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ ,
end
```

Además, recordemos que la matriz de iteración se define como $\mathbf{M} := \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$.

a) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general partiendo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?. **Indicación:** Analizar la matriz de iteración y notar que

la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.