UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
11 de agosto de 2010
Duración: 1h 40min
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación de Recuperación

1. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $U \subseteq V$ un s.e.v. de V, considere la siguiente relación en V.

$$u \; R \; v \;\Leftrightarrow u - v \in U$$

   a) **(5 puntos)** Demuestre que R es una relación de equivalencia.

   b) **(15 puntos)** Considere dos operaciones en V/R, definidas como sigue; para cualquier $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$[u] + [v] = [u + v] \quad \text{y} \quad \alpha \cdot [u] = [\alpha \cdot u]$$

   Demuestre que están bien definidas y que $(V/R, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

2. Vamos a estudiar la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) **(7 puntos)** Calcule su polinomio minimal.

   b) **(7 puntos)** Determine su descomposición cíclica.

   c) **(6 puntos)** Encuentre su forma canónica racional.

3. Sea T un operador normal respecto a un p.i. $< \cdot ; \cdot >$, que cumple además que $T^9 = T^8$.

   a) **(10 puntos)** Demuestre que el espectro de T es $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

   b) **(10 puntos)** Demuestre que T es un proyector.

Recuerdo

- $[u]$ es la clase de equivalencia de u, y V/R es el espacio cuociente de V para la relación R.
- El espectro de un operador es el conjunto de sus valores propios.
- T es un proyector si $T^2 = T$.
- Cada parte puede hacerse independientemente de las otras, para hacer una parte puede asumir como hechas las partes anteriores. En 1.b) puede demostrar que se tiene un e.v. sin necesidad de demostrar que las operaciones están bien definidas.

---

13 de agosto de 2010.
AGS/ags.