UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218) 2024-2

Problema 1. **[10 Pts.]**

Asuma que los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ son

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1\ \ y\ \ \lambda_3 = -2.$$

Tambien se sabe que:
El espacio propio S_{λ_1} asociado a λ_1 es $S_{\lambda_1} = gen\{(1,0,-1)\}$
y el espacio propio S_{λ_2} asociado a λ_2 es $S_{\lambda_2} = gen\{(0,1,-1)\}$.

Determine la solución general del sistema $X'(t) = A\,X(t)$ donde $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Desarrollo:
Observemos que de la información dada en la pregunta podemos formar dos soluciones linealmente independiente para el sistema de EDO considerado, a saber:

$$\mathbf{Y_1}(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{Y_2}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que conocemos el valor propio $\lambda_3 = -2$, debemos determinar un vector propio asociado a λ_3. Tenemos que

$$A - (-2)I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde sigue que

$$\begin{cases} y + z = & 0 \\ -x - z = & 0 \\ x - y = & 0. \end{cases}$$

Así se obtiene que $x = y = -z$ y entonces $S_{\lambda_3} = gen\{(1,1,-1)^t\}$. Así, obtenemos

$$\mathbf{Y_3}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo dado es

$$Y(t) = c_1\,e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\,e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias.

Problema 2. **[20 Pts.]**

Considere el sistema de EDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = \ 3x(t) + 3y(t) + 7\,e^{-3t} \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) + \ e^{4t}. \end{cases}$$

Usando valores y vectores propios

(i) Determine la solución del sistema homogéneo asociado al sistema dado.

(ii) Usando variación de parámetros, indique y determine la solución particular del sistema dado.

(iii) Escriba la solución general del sistema no homogéneo dado.

Desarrollo:

Primero observamos que el sistema dado se puede escribir como

$$X'(t) = A\,X(t) + F(t)$$

donde $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $F(t) = \begin{pmatrix} 7\,\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$.

(i) Para determinar la solución $\boldsymbol{X}_H(t)$ del sistema homogéneo asociado, primero determinamos los valores propios de la matriz A. Para ello

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{I}| \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 4)(\lambda + 3) \,=\, 0$$

de donde $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -3$ son los valores propios de $\boldsymbol{A}$.
Al determinar los espacios propios correspondientes se encuentra que

$$S_{\lambda_1} \,=\, \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \;\text{ y }\; S_{\lambda_2} \,=\, \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

De este modo, de acuerdo a la teoría, encontramos dos soluciones linealmente independientes para el sistema homogéneo asociado, a saber

$$\boldsymbol{X}_1(t) \,:=\, \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; \boldsymbol{X}_2(t) \,:=\, \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general para el sistema homogéneo, es

$$\boldsymbol{X}_H(t) \,=\, C_1\,\boldsymbol{X}_1(t) \,+\, C_2\,\boldsymbol{X}_2(t) \,=\, C_1\mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donde C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

(ii) Para determinar $\boldsymbol{X}_P(t)$ usamos el método de variación de parámetros, esto es, buscamos una solución $\boldsymbol{X}_P(t)$ del tipo

$$\boldsymbol{X}_P(t) \,=\, \beta_1(t)\,\boldsymbol{X}_1(t) \,+\, \beta_2(t)\,\boldsymbol{X}_2(t)\,,$$

donde β_1 y β_2 satisfacen:

$$\beta_1'(t)\,\boldsymbol{X}_1(t) \,+\, \beta_2'(t)\,\boldsymbol{X}_2(t) = \boldsymbol{F}(t) \;\text{ donde }\; \boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 7\,\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$$

El sistema anterior se puede escribir como

$$\left\{\begin{array}{l} 3e^{4t}{\beta_1}'(t) + e^{-3t}{\beta_2}'(t) = 7e^{-3t} \\ \\ e^{4t}{\beta_1}'(t) - 2e^{-3t}{\beta_2}'(t) = e^{4t} \end{array}\right.$$

$$\beta_1'(t) = \frac{1}{7} + 2e^{-7t} \quad \text{y} \quad \beta_2'(t) = 1 - \frac{3}{7}e^{7t}.$$

Integrando obtenemos

$$\beta_1(t) = \frac{1}{7}\,t - \frac{2}{7}e^{-7t} \quad \text{y} \quad \beta_2(t) = t - \frac{3}{49}e^{7t}.$$

Así , obtenemos la solución particular

$$\boldsymbol{X}_P(t) \;=\; \left(\frac{1}{7}\,t - \frac{2}{7}e^{-7t}\right)\, \boldsymbol{X}_1(t) \;+\; \left(t - \frac{3}{49}e^{7t}\right)\, \boldsymbol{X}_2(t),$$

es decir,

$$\boldsymbol{X}_P(t) \;=\; \left(\frac{1}{7}\,t - \frac{2}{7}e^{-7t}\right)\, \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; \left(t - \frac{3}{49}e^{7t}\right)\, \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

(iii) Sabemos que la solución general del sistema no homogéneo dado es del tipo

$$\boldsymbol{X}(t) \;=\; \boldsymbol{X}_H(t) \;+\; \boldsymbol{X}_P(t)$$

donde $\boldsymbol{X}_H(t)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado al sistema dado y $\boldsymbol{X}_P(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado. Por tanto,

$$\boldsymbol{X}(t) \;=\; \left(C_1 + \frac{1}{7}\,t - \frac{2}{7}e^{-7t}\right)\, \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; \left(C_2 + t - \frac{3}{49}e^{7t}\right)\, \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

Problema 3 (10 puntos) Una masa de 10 $[Kg]$ se sujeta a un resorte suspendido de un techo con constante de rigidez (Hooke) igual a 3 $[N/m]$. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, el cuerpo es desplazado 0,5 $[m]$ en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo una velocidad de 1,5 $[m/s]$ dirigida hacia el techo. Asumimos que la viscosidad del medio donde se encuentra el cuerpo es igual a 2 $[Ns/m]$. En cada instante de tiempo t $[s]$, desde que el cuerpo fue soltado, sobre el cuerpo actúa la fuerza externa $5\,|\cos(8\,t)|$ $[N]$ dirigida hacia el techo. Encuentre el problema de valores iniciales, o sea la ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales, que describe el alargamiento del resorte en todo instante de tiempo t $[s]$. **No hay que resolver la EDO.**

Solución

Tomamos como sistema de referencia la dirección y el sentido del campo gravitatorio. Sea $X(t)$ la posición del extremo del resorte, dada en metros, en el tiempo t $[s]$.
La ecuación del movimiento es:

$$10\,X''(t) + 2\,X'(t) + 3\,X(t) = -5\,|\cos(8\,t)|$$

[**7 puntos**]

Las condiciones iniciales son: $X(0) = 0{,}5$ y $X'(0) = -1{,}5$. [**3 puntos**]

Problema 4. **(10 puntos)**
Determine la transformada de Laplace de la solución del siguiente problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2\,y(t) = e^t H(t-1) & \text{para todo } t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Es decir, encuentre $\mathcal{L}(y(t))(s)$.
Nota: Denotamos

$$H(t-a) = \mathcal{U}_a(t) = H_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < a. \end{cases}$$

Solución

Como $\mathcal{L}(y''(t) + y'(t) - 2\,y(t))(s) = \mathcal{L}\left(e^t H(t-1)\right)(s)$,

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right)(s) + \mathcal{L}\left(y'(t)\right)(s) - 2\,\mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}\left(e^t H(t-1)\right)(s).$$

Tenemos que

$$\mathcal{L}\left(y'\right)(s) = s\,\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = s\,\mathcal{L}(y)(s)$$

y

$$\mathcal{L}\left(y''\right)(s) = s\,\mathcal{L}\left(y'\right)(s) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y)(s).$$

Por lo tanto,

$$\left(s^2 + s - 2\right)\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}\left(e^t H(t-1)\right)(s).$$

[**5 puntos**]

Ya que

$$\mathcal{L}\left(e^{t}H\left(t-1\right)\right)\left(s\right)=e^{-s}\mathcal{L}\left(e^{t+1}\right)\left(s\right)=e^{-s+1}\mathcal{L}\left(e^{t}\right)\left(s\right)=e^{-s+1}\frac{1}{s-1}.$$

$$\mathcal{L}\left(y\right)\left(s\right)=e^{-s+1}\frac{1}{\left(s^{2}+s-2\right)\left(s-1\right)}=e^{-s+1}\frac{1}{\left(s+2\right)\left(s-1\right)^{2}}.$$

[5 **puntos**]

Problema 5. **(10 puntos)**

Usando el producto de convolución determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-2\right)^{2}}\right)\left(t\right).$$

Sugerencia: Primero, encuentre $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^{2}}\right)(t)$. Después, utilice el producto de convolución para obtener la transformada inversa de Laplace que ha sido solicitada en la pregunta.

Solución

Como $\mathcal{L}\left(t\right)\left(s\right)=1/s^{2}$,

$$\mathcal{L}\left(e^{2\,t}t\right)\left(s\right)=\mathcal{L}\left(t\right)\left(s-2\right)=\frac{1}{\left(s-2\right)^{2}}.$$

[3 **puntos**]

Además, $\mathcal{L}\left(e^{t}\right)\left(s\right)=1/\left(s-1\right)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left(e^{t}*\left(e^{2t}t\right)\right)\left(s\right)=\mathcal{L}\left(e^{t}\right)\left(s\right)\mathcal{L}\left(e^{2\,t}t\right)\left(s\right)=\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-2\right)^{2}}.$$

De donde tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-2\right)^{2}}\right)\left(t\right)=e^{t}*\left(e^{2\,t}t\right).$$

[4 **puntos**]

Ahora,

$$e^{t}*\left(e^{2\,t}t\right)=\int_{0}^{t}e^{t-s}\,e^{2\,s}s\,ds=e^{t}\int_{0}^{t}e^{s}\,s\,ds.$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_{0}^{t}e^{s}\,s\,ds=te^{t}-e^{t}+1.$$

Entonces,

$$e^{t}*\left(e^{2\,t}t\right)=e^{t}\left(te^{t}-e^{t}+1\right)=te^{2\,t}-e^{2\,t}+e^{t}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s-2\right)^{2}}\right)\left(t\right)=te^{2\,t}-e^{2\,t}+e^{t}.$$

[3 **puntos**]

Noviembre 29, 2024.
JMS/CMG//cmg/jms