UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN CONCEPCIÓN
FACULTAD CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento Ingeniería Matemática.

PL 4 - CÁLCULO IV (MAT 225212)

Tema: $\mathbb{C}$-***Derivadas y Primera Caracterización de funciones Holomorfas.***

1 Probar que el par de funciones

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \wedge \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann sobre $\Omega = \mathbb{C}/\{0\}$
Ind: No es necesario diferenciar esas funciones, basta encontrar la función, f, que tiene esas funciones componentes y recordar que las funciones racionales son holomorfas salvo en los ceros del denominador y aplicar el teorema respectivo.

(P) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

(a) Verificar que las condiciones de Cauchy.Riemann para f son satisfecha en $z = 0$;
(b) Probar que $f'(0)$ no existe.

(P) Probar que la función

$$f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$$

no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$ y que las condiciones de Cauchy-Riemann para f se verifican en los afijos (x,x).
Ind. $L = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Im(z)\}$ es un conjunto cerrado de interior vacío. [1]

(P) Sea $f = u + iv$ una función compleja univaluada y holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$, tal que su par de funciones componente verifican $u = v^2$. Probar que f es constante.

(P) Aplicar la regla de la cadena, que es válida para funciones complejas univaluadas, para encontrar la derivada de

$$f(z) = \cos^2(2z + 3i)$$

y las respectivas funciones componentes de $f'(z)$ ¿Existe $f''(z)$?

6. Establecer, que sobre todo $\mathbb{C}$:

$$\frac{d}{dz}(cos(z)) = -\sin(z) \qquad \frac{d}{dz}(sin(z)) = \cos(z)$$

7. Para las siguientes funciones verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann y para cada una de ellas encontrar su dominio maximal sobre el cual ella es holomorfa y exhibir la ecuación de su $\mathbb{C}$-derivada.

(a) $f(z) = \frac{z+i}{z^2+2iz+3}$ (b) $g(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$ (c) $h(z) = e^{iz^2}$

[1] Recordar: Si las primeras derivadas de las funciones componentes de una función compleja univaluada son continuas sobre un conjunto abierto sobre el cual se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann entonces f es holomorfa en dicho conjunto abierto.

8. Sea f una función holomorfa sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Se define f^* sobre $\Omega^* := \{z \in C : \bar{z} \in \Omega\}$ por

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})},\ z \in \Omega^*.$$

Probar que f^* es holomorfa sobre Ω^*.

9. Encontrar lasa constantes reales a, b, c tales que

$$w(x,y) = f(z) = (ay^3 + ix^3) + xy(bx + icy)$$

sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Expresar, $\frac{dw}{dz} = f'(z)$ en términos de la variable z.

10. Aplicando la regla de la cadena, determine el conjunto maximal donde las siguientes funciones es holomorfa y determine la $\mathbb{C}$-derivada , respectiva:

(a) $f(z) = \frac{z-1}{2z+1} = \frac{z-1}{2(z-1)+3}, \quad 2z \neq -1$

(b) $g(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^4} = \left(\frac{1}{z} + z\right)^4, \quad z \neq 0$

11. Estudiar si la función $f(z) = x^2 + y + i(2y - x)$ es continua, sobre que conjuntos se verifican las condiciones de Cauchy- Riemann y finalmente dilucidar si es holomorfa o bien sobre que conjuntos de puntos, no abiertos, existe f'

12. Dilucidar si

(a) $f(z) = x - iy^2$ es C-derivable en la recta $y = -\frac{1}{2}$ y en tal caso $f'(z) = 1$

(b) $f(z) = x^2 + iy^2$ es C-derivable en la recta $x = y$ y en tal caso $f'(z) = 2x$

(c) $f(z) = xy + iy^2$ es C-derivable en el punto $x = y = 0$ y en tal caso $f'(z) = 0'$

13. Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son $\mathbb{C}$-derivables:

(a) $f(z) = |z|^2$

(b) $f(z) = zRe(z)$

(c) $f(z) = \overline{z}$

(d) $f(z) = x^2 + iy^2$

14. Aplicar la regla de l'Höpital para evaluar los siguientes límites:

$$a = \lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1} \qquad b = \lim_{z \to 0} \frac{1-\cos(z)}{z}$$

15. Determinar las condiciones que deben verificar $m, n \in \mathbb{N}$ para que $c \in \mathbb{C}$, si :

$$c = \lim_{z \to i} \frac{z^m + i}{z^n + i}$$

16. Determinar las condiciones sobre las constantes reales a, b, c y d que permitan que

$$h8z) = ax + by + i(cx + dy)$$

sea holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$. Debe fundamentar completamente su razonamiento, citando el o los teoremas respectivos.

Septiembre 2024
FPV/fpv