UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Examen de Recuperación
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218, 525221)

NOMBRE:

NUMERO MATRÍCULA:

CARRERA:

SECCIÓN:

TIEMPO: **105 minutos**

P1	Observaciones
P2	Observaciones
P3	Observaciones
P4	Observaciones
NOTA	Observaciones

- No se responderán preguntas que no sean del texto de la evaluación.
- Todos los dispositivos electrónicos como calculadoras, celulares, smartwatches, etc. deben estar apagados y guardados.
- No se puede conversar e intercambiar información con sus pares, o con personas que se encuentren en el exterior de la sala.

1. (15 puntos) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) - Y(t), & X(0) = 4, \\ Y'(t) = 5\,X(t) - Y(t), & Y(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: Escribimos el sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos los valores propios de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(-1-\lambda) - (-5) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda)(1+\lambda) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \lambda^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 2i$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$. **(3 puntos)**

Ahora calculamos los vectores propios. El primer vector propio $\vec{v}_1$, asociado al primer valor propio λ_1, se calcula como

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 \\ 5 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-2i)v_1^1 - v_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1^2 = (1-2i)v_1^1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Se sabe que el segundo vector propio (asociado al segundo valor propio λ_2) es el conjugado del primero, es decir

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

Usando el primer valor y vector propio, obtenemos la solución (compleja):

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{2t\,i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \big(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t\big) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

Las dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo se obtienen tomando las partes real e imaginaria a la solución anterior, es decir,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ Y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X_2(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Luego la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix},$$

para A, B constantes reales cualesquiera **(2 puntos)**

Para calcular los valores de las constantes usamos la condición inicial

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A \\ A - 2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = 4 \ \wedge \ A = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 2.$$

Luego $A = 4$ y $B = 2$. **(2 puntos)**

Por lo tanto, la solución del PVI es:

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t + \mathrm{sen}\, 2t \\ 5\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

2. (15 puntos) Encuentre la solución general de

$$\left(x^2-1\right) Y'(x) = -x\, Y(x) + \left(x^2-1\right)^{3/2} \qquad \forall x > 1.$$

Solución:

Dividiendo por $x^2 - 1$ obtenemos que

$$Y'(x) + \frac{x}{x^2-1}\, Y(x) = \left(x^2-1\right)^{1/2}. \tag{1}$$

(2 puntos)

Primeramente, buscamos $\phi(x)$ tal que

$$\phi'(x) = \frac{x}{x^2-1}\, \phi(x) \qquad \forall x > 1.$$

Luego

$$\phi(x) = \exp\left(\int \frac{x}{x^2-1} dx\right).$$

(3 puntos)

Haciendo $u = x^2 - 1$ obtenemos que $du = 2\, x\, dx$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(|u|) + C = \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

Tomando $C = 0$ sin perdida de generalidad, llegamos a $\phi(x) = \sqrt{x^2-1}$.

(3 puntos)

Multiplicando (1) por $\phi(x)$ obtenemos

$$\sqrt{x^2-1}\, Y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, Y(x) = x^2 - 1 \qquad \forall x > 1.$$

Lo que implica

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-1}\, Y(x)\right) = x^2 - 1 \qquad \forall x > 1.$$

(4 puntos)

Integrando se deduce que

$$\sqrt{x^2-1}\, Y(x) = \int \left(x^2-1\right) dx.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{x^2-1}\, Y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + K,$$

donde K es una constante. Entonces

$$Y(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 - x + K}{\sqrt{x^2-1}}$$

con $K \in \mathbb{R}$. **(3 puntos)**

3. (15 puntos) Una casa de montaña se abastece de agua potable desde un estanque de capacidad igual a 2000 [l]. Se sabe que el agua potable tiene una concentración de cloro igual a 2 [mg/l]. Para higienizar y mantener el estanque fue preciso llenarlo por completo y elevar su concentración de cloro a 20 [mg/l]. Si en esa última condición, se abre al mismo tiempo una llave de desagüe que escurre a 10 [l/min] y una llave que vierte agua fresca del estero (sin cloro) a razón de 5 [l/min], se pide determinar los minutos que transcurrirán hasta que el agua del estanque sea nuevamente de uso humano. Considere que el agua es de uso humano cuando la concentración de cloro es inferior o igual a 6 [mg/l].

   Unidades: l=litro, mg=milígramo, min=minuto.

   Solución: Sea $V = V(t)$ el volumen del estanque en el tiempo t, medido en [l]. Tenemos que el estanque se encuentra lleno inicialmente, luego $V(0) = 2000$ [l]. Sabemos que escurre agua por la llave de desagüe a 10 [l/min] y simultáneamente se vierte agua fresca a razón de 5 [l/min], luego el volumen del estanque en función del tiempo se obtiene como

$$V(t) = 2000 - 10\,t + 5\,t = 2000 - 5\,t = 5(400 - t),$$

   donde el tiempo debe estar medido en [min]. **(2 puntos)**
   Sea $M = M(t)$ la masa de cloro en el estanque en el tiempo t, medida en [mg]. La concentración de cloro $c = c(t)$ en el tiempo t se obtiene como $c(t) = M(t)/V(t)$, medida en [mg/l]. Inicialmente $c(0) = 20$ [mg/l], con lo que la masa de cloro inicial es

$$M(0) = c(0)V(0) = 20 \text{ [mg/l]} \cdot 2000 \text{ [l]} = 40000 \text{ [mg]}.$$

   Veamos ahora como varía la masa de cloro en función del tiempo. Asumimos que conocemos $M(t)$ y sea Δt un incremento de tiempo muy pequeño. Queremos encontrar una relación para $M(t + \Delta t)$. La masa de cloro en $t + \Delta t$ se calcula como la masa que había en el tiempo t, menos el caudal de salida de 10 [l/min] multiplicado por la concentración en el tiempo t (en [mg/l]) y por el incremento de tiempo Δt (en [min]), es decir,

$$M(t + \Delta t) = M(t) - 10\,c(t)\,\Delta t = M(t) - 10\,\frac{M(t)}{V(t)}\,\Delta t.$$

   Notar que esta relación no hace intervenir el caudal de entrada pues se trata de agua sin cloro, por lo que no aporta a $M(t)$. Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = -\frac{10M(t)}{V(t)},$$

   y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ se llega a la EDO siguiente

$$M'(t) = -10\,\frac{M(t)}{V(t)}.$$

   Reemplazando la expresión previamente calculada para $V(t)$, la EDO se reescribe como

$$M'(t) = -\frac{10M(t)}{5(400 - t)} = -\frac{2}{400 - t}\,M(t),$$

la que junto con la condición inicial antes obtenida da origen al siguiente PVI para $M(t)$:

$$\begin{cases} M'(t) = -\dfrac{2}{400-t}\, M(t) \qquad t > 0, \\ M(0) = 40000. \end{cases}$$

(5 puntos)

Ahora procedemos a resolver el PVI. Primero encontramos la solución de la EDO mediante integración

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = -\frac{2}{400-t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{M'(t)}{M(t)}\, dt = -2\int \frac{dt}{400-t} \quad \Rightarrow$$

$$\ln\big(M(t)\big) = 2\ln(400-t) + C = \ln\big(A(400-t)^2\big),$$

luego la solución general de la EDO es

$$M(t) = A(400-t)^2.$$

(3 puntos)

La constante A se determina a partir de la condición inicial:

$$M(0) = A(400)^2 = 40000 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{40000}{400^2} = \frac{1}{4},$$

con lo que la solución del PVI es

$$M(t) = \frac{1}{4}\,(400-t)^2.$$

(2 puntos)

Ahora calculamos lo pedido. Debemos encontrar un instante de tiempo t^* a partir del cual la concentración es menor o igual a 6 [mg/l], es decir

$$c(t^*) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M(t^*)}{V(t^*)} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{(400-t^*)^2}{5(400-t^*)} = 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{400-t^*}{20} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 400 - t^* = 120 \quad \Leftrightarrow \quad t^* = 400 - 120 = 280$$

Luego, a partir de $t^* = 280$ [min], el agua del estanque pasa a tener una concentración de cloro menor a 6 [mg/l], con lo que vuelve a ser apta para el consumo humano. **(3 puntos)**

4. (15 puntos) Un cuerpo de masa $m = 1$ [kg] se sujeta a un resorte suspendido de un techo. La constante de rigidez del resorte es igual a $k = 3$ [kg/s^2]. El sistema masa-resorte se encuentra imbuido en un fluido con constante de roce (o rozamiento) igual a $c = 4$ [kg/s]. Estando el sistema masa-resorte en la posición de equilibrio, se suelta la masa. A partir del momento en que la masa es liberada, se ejerce sobre el cuerpo una fuerza de $2\exp(-t)$ [N] dirigida hacia el suelo, donde t es el tiempo (medido en segundos) que ha transcurrido desde que la masa fue soltada. Encuentre el desplazamiento que en todo momento tiene el cuerpo con respecto al punto de equilibrio del sistema masa-resorte.

Solución: Llamaremos $X(t)$ al desplazamiento del cuerpo, medido en metros, con respecto al punto de equilibrio en el tiempo t (dado en segundos). Usando la segunda ley de Newton se llega a:

$$m\,X''(t) + c\,X'(t) + k\,X(t) = 2\exp(-t) \qquad \forall t \geq 0,$$

así que

$$X''(t) + 4\,X'(t) + 3\,X(t) = 2\exp(-t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

(4 puntos)

Inicialmente, la masa se suelta desde el punto de equilibrio. Por ende, $X(0) = 0$. Además, inicialmente la masa es soltada sin imprimirle a velocidad. Luego $X'(0) = 0$.

(2 puntos)

La solución general de (2) es

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t),$$

donde $X_p(t)$ es una solución particular de (2) y $X_h(t)$ es la solución general de

$$X_h''(t) + 4\,X_h'(t) + 3\,X_h(t) = 0. \tag{3}$$

(1 punto)

El polinomio característico de (3) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = (\lambda + 3)\,(\lambda + 1)\,,$$

que tiene dos reaíces simples $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces

$$X_h(t) = a\,e^{-3t} + b\,e^{-t},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

(3 puntos)

Ya que $D + 1$ aniquila a $2\exp(-t)$,

$$(D+1)^2\,(D+3)\,X_p(t) = 0,$$

donde $D = d/dt$.

De donde se obtiene que

$$X_p(t) = K\,t\,e^{-t}$$

para cierto valor de $K \in \mathbb{R}$. Ahora,

$$X_p'(t) = K\,e^{-t} - K\,t\,e^{-t}$$

y

$$X_p''(t) = -2K\,e^{-t} + K\,t\,e^{-t}.$$

Sustituyendo $X_p(t)$, $X_p'(t)$ y $X_p''(t)$ en (2) llegamos a

$$2K\,e^{-t} = 2\,e^{-t}.$$

Luego $K = 1$. **(3 puntos)**

Hemos obtenido que

$$X(t) = a\,e^{-3t} + b\,e^{-t} + t\,e^{-t}.$$

Ya que $X(0) = 0$,

$$0 = X(0) = a + b.$$

Como $X'(0) = 0$,

$$0 = X'(0) = -3\,a - b + 1.$$

Entonces,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3\,a + b = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto $a = 1/2$ y $b = -a = -1/2$. Finalmente,

$$X(t) = \frac{1}{2}\,e^{-3t} - \frac{1}{2}\,e^{-t} + t\,e^{-t}.$$

(2 puntos)