EP2: Segunda Evaluación Parcial

Física 2: 510150

Jueves 26 de octubre de 2023

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre y Apellidos</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Carrera</td><td colspan="2"></td><td>Sección</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Puntaje</td><td colspan="3">Nota</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Instrucciones Generales

1. Para el desarrollo de la presente evaluación usted dispone de una hora y cincuenta minutos continuados: Desde las 19:10 hrs. hasta las 21:00 hrs.
2. Desarrolle cada uno de los problemas ordenada y detalladamente en las mismas hojas del certamen. Si le falta espacio siga en la parte posterior de la hoja.
3. Para el desarrollo de todos los problemas numéricos recuerde las reglas de manipulación de cifras significativas y redondeo de números aprendidas en clases.
4. Use las constantes y ecuaciones que aparecen indicadas en el enunciado de cada uno de los problemas, cuando corresponda.
5. En esta evaluación se usa el punto decimal (.) y no la coma (,) decimal.
6. La evaluación ha sido escrita de modo a evitar ambigüedad en lo que se les pide que respondan en cada una de las preguntas, por lo tanto no hay consultas.
7. El certamen tiene 8 preguntas de alternativas y 4 Problemas de desarrollo.
8. En todos los cálculos donde tenga que usar la magnitud de la aceleración de gravedad use $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$.

Preguntas con alternativas. 0.3 Pts./Pregunta

Para cada uno de los enunciados que se le presentan, encierre en un círculo la alternativa que considere correcta. En el siguiente recuadro transcriba las alternativas seleccionadas por usted para cada pregunta.

Casillero de Respuestas de las Alternativas

Pregunta	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
Alternativa	**a**	**b**	**a**	**c**	**c**	**b**	**c**	**a**

1) En una prueba de choque, un automóvil de 1.50×10^3 kg de masa chocó contra una pared. Las velocidades del automóvil antes y después del choque fueron, respectivamente, $\vec{v}_a = (15.0\,\text{m/s})\hat{\imath}$ y $\vec{v}_d = -(5.00\,\text{m/s})\hat{\imath}$. Durante el choque la pared ejerció una fuerza promedio de magnitud $F_{\text{prom}} = 1.50 \times 10^5\,\text{N}$ sobre el automóvil. El tiempo Δt que duró el choque fue:

   a) $\Delta t = 0.200\,\text{s}$ b) $\Delta t = 0.100\,\text{s}$ c) $\Delta t = 0.300\,\text{s}$

2) Un arquero de masa M sostiene un arco de masa despreciable y una flecha de masa m (con $m < M$). El arquero dispara la flecha con una rapidez v_0 hacia la derecha y en una dirección que forma un ángulo θ, con $0° < \theta < 90°$. Asuma un sistema de coordenadas rectangulares planas xy convencional. La expresión que describe la velocidad del arquero después de disparar la flecha, $\vec{v}_{d,\text{ar}}$, es:

   a) $\vec{v}_{d,\text{ar}} = \left(\frac{m}{M}\right) v_0(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$ b) $\vec{v}_{d,\text{ar}} = -\left(\frac{m}{M}\right) v_0(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$
   c) $\vec{v}_{d,\text{ar}} = -\left(\frac{m}{M}\right) v_0(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$

3) Un automóvil de masa m que estaba parado en un cruce fue chocado en su parte trasera por una camioneta de masa M que viajaba hacia la derecha. El automóvil y la camioneta quedaron unidos después del choque y se movían en la misma dirección que tenía la camioneta antes del choque. Si la velocidad del la camioneta antes del choque era $\vec{v}_{a\,\text{cam}}$, la velocidad con la que se movieron los vehículos después del choque fue:

   a) $\vec{v}_{d,\text{veh}} = \left(\dfrac{M}{m+M}\right)\vec{v}_{a,\text{cam}}$ b) $\vec{v}_{d,\text{veh}} = \left(\dfrac{m}{m+M}\right)\vec{v}_{a,\text{cam}}$ c) $\vec{v}_{d,\text{veh}} = \left(\dfrac{m+M}{M}\right)\vec{v}_{a,\text{cam}}$

4) Un disco de masa m_1 y otro de masa m_2 yacen desconectados sobre una mesa de aire (sin rozamiento). Se ejerce una fuerza horizontal hacia la derecha de magnitud F_1 únicamente sobre el disco de masa m_1. La magnitud de la aceleración del centro de masas del sistema formado por los dos discos es:

   a) $a_{\text{cdm}} = \dfrac{F_1}{m_1}$ b) $a_{\text{cdm}} = \dfrac{(m_1 m_2)F_1}{m_1 + m_2}$ c) $a_{\text{cdm}} = \dfrac{F_1}{m_1 + m_2}$

5) Un disco rígido rota con movimiento circular uniformemente acelerado en torno a un eje fijo perpendicular a él y que pasa por su centro. Es correcto afirmar que:

a) La aceleración angular de cualquier punto del disco está cambiando uniformemente.

b) La posición angular de cualquier cualquier punto del disco está cambiado uniformemente.

c) La velocidad angular de cualquier punto del disco esta cambiando uniformemente.

---

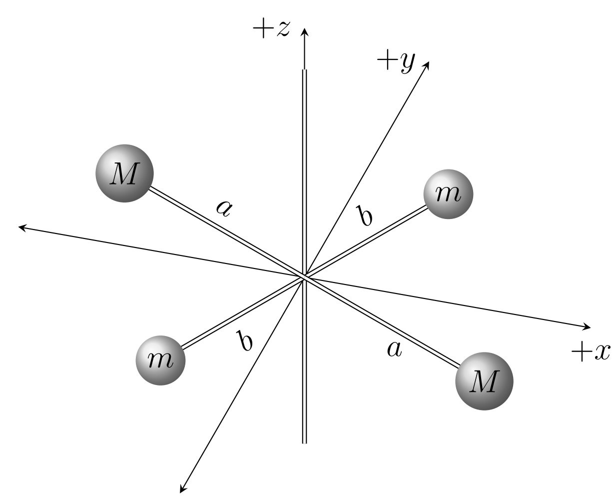
6) Un disco rígido gira con una aceleración angular constante de $4.00\,\mathrm{rev/s^2}$ en torno de un eje perpendicular a él y que pasa a través de su centro. Si a los $2.00\,\mathrm{s}$ de haber iniciado la medición del tiempo la velocidad angular del disco es de $6.00\,\mathrm{rev/s}$. La velocidad angular del disco cuando se inició la medición del tiempo, ω_0, era:

a) $\omega_0 = 2.00\,\mathrm{rad/s}$ b) $\omega_0 = -2.00\,\mathrm{rad/s}$ c) $\omega_0 = 8.00\,\mathrm{rad/s}$

---

7) Cuatro esferas se pegan a los extremos de dos barras rígidas de masas despreciables (vea figura a la derecha). Asuma que los radios de las esferas son muy pequeños comparados con el largo de las barras. Si el sistema gira en torno del eje z, y si $M \gg m$, la expresión para el momento de inercia del sistema de esferas en torno del eje z es:

a) $I_z \approx 2(m+M)a^2$ b) $I_z \approx 2(M-m)a^2$
c) $I_z \approx 2Ma^2$



---

8) La Fig.1 muestra una fuerza $\vec{P}$ vertical que se aplica al extremo de una palanca de longitud L.

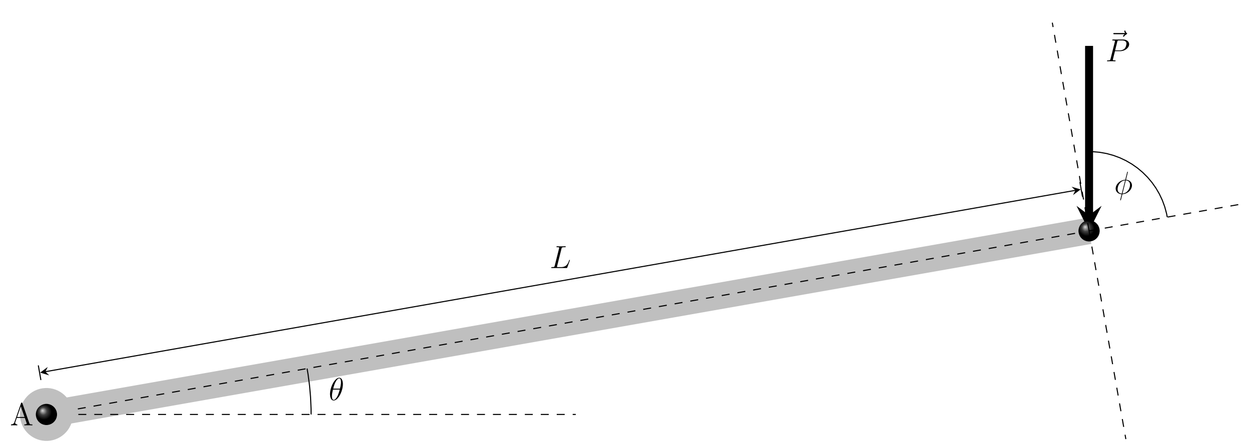


Figura 1: Fuerza de magnitud P actuando sobre el extremo libre de una palanca.

Si la palanca puede rotar en torno a un eje que pasa por el punto A y es perpendicular al plano de la página, la magnitud del torque ejercido por la fuerza $\vec{P}$ es:

a) $\tau = PL\cos\theta$ b) $\tau = PL\sin\theta$ c) $\tau = PL\tan\theta$

Problemas

Desarrolle cada uno de los problemas que se le presentan a seguir ordenada y cuidadosamente en la misma hoja del certamen. Una vez que tenga su resultado reescríbalo en el cuadrado correspondiente.

Problema 1 (0.9 Pts.)
Un péndulo balístico (vea esquema en la Fig.2) es un dispositivo que se usa para medir la rapidez de un proyectil, como una bala.

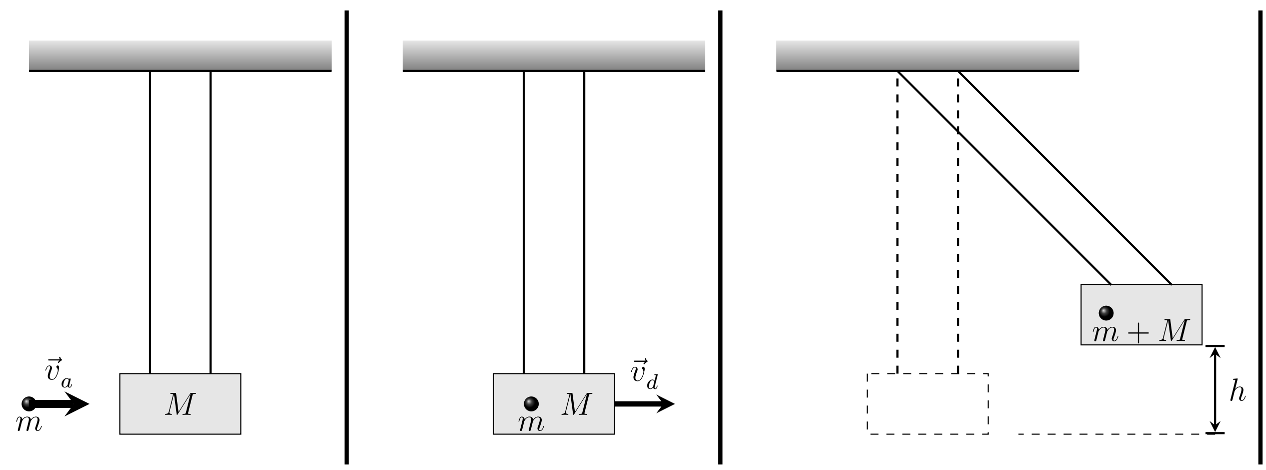


Figura 2: Esquema ilustrativo de un péndulo balístico. (Izquierda) Inmediatamente antes de la colisión. (Centro) Inmediatamente después de la colisión. (Derecha) Cuando $m + M$ alcanzan su máxima altura.

Una bala de masa m es disparada con una velocida $\vec{v}_a$ contra un gran bloque de madera de masa M (en reposo) suspendido de unos alambres ligeros (masa despreciable). El proyectil se incrusta en el interior del bloque, el conjunto $m + M$ adquiere velocidad v_d y todo el sistema se balancea hasta una altura máxima h. A partir de una medición de la altura h, la expresión algebraica que permite calcular la rapidez del proyectil al momento de impactar al bloque de madera es:

$$\boxed{v_a = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2hg}}$$ 0.9 Pts

---

Problema 2 (0.9 Pts.)
Las tres partículas de la Fig.3 están inicialmente en reposo. Cada una de ellas experimenta una fuerza *externa* debido a cuerpos fuera del sistema de tres partículas.

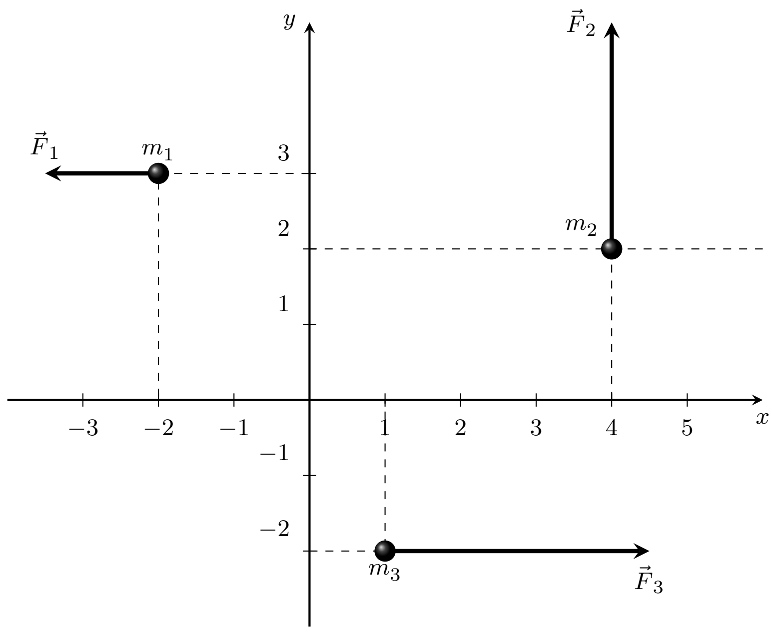


Figura 3: Sistema de tres partículas para el Problema 2

Las direcciones de las fuerzas están indicadas, y $F_1 = 3.0\,\mathrm{N}$, $F_2 = 6.0\,\mathrm{N}$ y $F_3 = 9.0\,\mathrm{N}$. Las masas de las partículas son $m_1 = 1.0\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2.0\,\mathrm{kg}$ y $m_3 = 3.0\,\mathrm{kg}$.

a) El vector posición del centro de masa del sistema es:

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{cdm}} = 1.5\hat{\imath} + 0.17\hat{\jmath}}$$ 0.3 Pts.

b) El vector aceleración del centro de masa del sistema es:

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{cdm}} = (1.0\hat{\imath} + 1.0\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s^2}}$$ 0.3 Pts.

c) La dirección en la que se mueve el centro de masa del sistema es:

$$\boxed{\theta_{\mathrm{cdm}} = 45^\circ}$$ 0.3 Pts.

Problema 3 (0.9 Ptos.)
Una barra de densidad de masa lineal uniforme- de longitud L y masa M- unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de girar en torno al pivote en el plano vertical, como se muestra en la Fig.4.

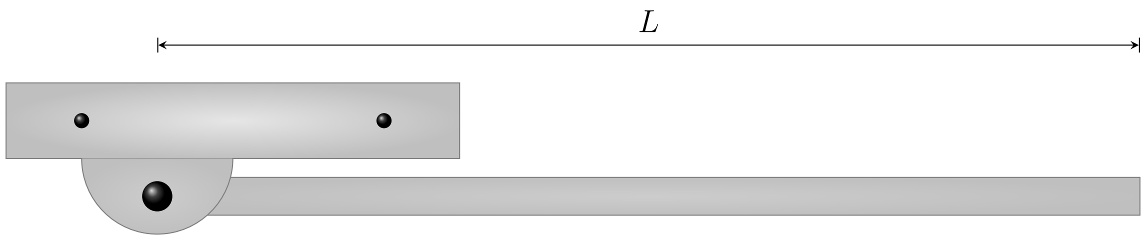


Figura 4: Esquema de la barra para el Problema 3.

La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. Derive, analíticamente, una expresión que permita calcular la magnitud de la aceleración angular inicial de la barra.

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{3g}{2L}} \quad \text{0.6 Pts.}$$

y la magnitud de la aceleración traslacional(tangencial) inicial de su extremo *libre*.

$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}g} \quad \text{0.3 Pts.}$$

Problema 4 (0.9 Ptos.)
Dos cilindros que tienen masas diferentes m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$) están conectados por una cuerda de masa despreciable que pasa alrededor de una polea, como mostrado en la Fig.5 (izquierda).

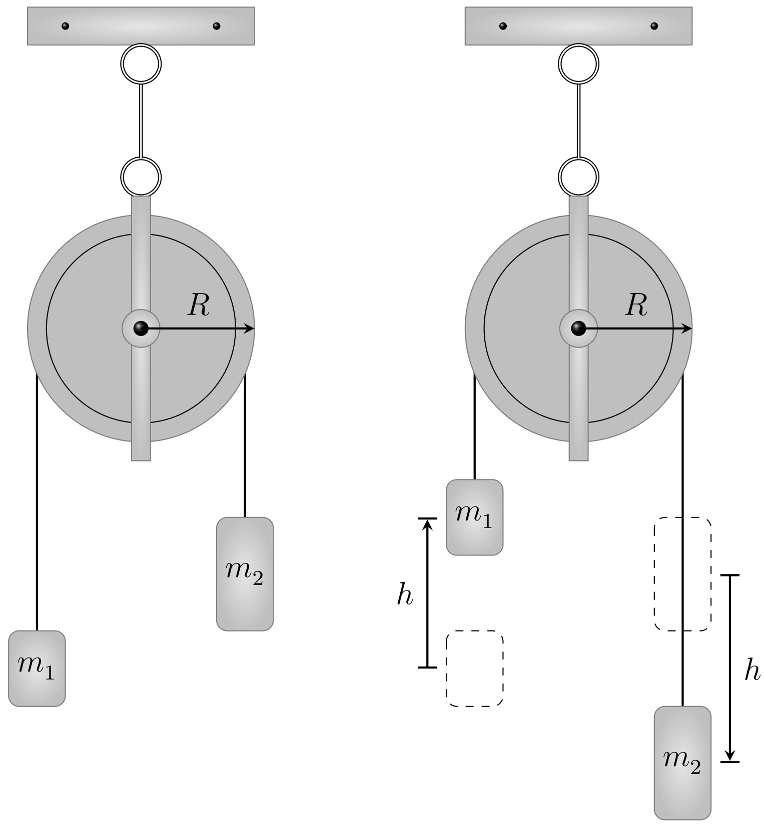


Figura 5: Máquina de Atwood con una polea de masa *no* despreciable. (Izquierda) Instante inicial. (Derecha) Cuando los cilindros se han desplazado verticalmente una distancia h.

La polea tiene un radio R y un momento de inercia I en torno al eje de rotación que pasa a través de su centro y es perpendicular al plano de la figura. La cuerda no desliza sobre la polea (la hace girar) y el sistema se libera desde el reposo.

a) Para el instante en el que los cilindros se han desplazado verticalmente una distancia h, Fig.5 (derecha), la expresión algebraica que permite calcular la rapidez traslacional de ellos es:

$$\boxed{v = R\sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{R^2(m_1 + m_2) + I}}} \quad 0.6 \text{ Pts.}$$

b) En ese instante la rapidez angular de la polea es:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{R^2(m_1 + m_2) + I}}} \quad 0.3 \text{ Pts.}$$

Nota: Los cilindros no se detienen cuando se han desplazado la distancia vertical h. Usted solo quiere evaluar la rapidez traslacional de ellos y la rapidez angular de la polea en *ese* intante.

Desarrollo

Preguntas con alternativas

1) Debemos calcular Δt. Sabemos que $\vec{I} = \Delta\vec{p}$ e $\vec{I} = \vec{F}_{\text{prom}}\Delta t$, de modo tal que $|\Delta\vec{p}| = F_{\text{prom}}\Delta t$

$$\Delta t = \frac{|\Delta\vec{p}|}{F_{\text{prom}}} = \frac{|\vec{p}_d - \vec{p}_a|}{F_{\text{prom}}} = \frac{(1.50\times 10^3\,\text{kg})[|(-5.00 - 15.0)\,\text{m/s}|]}{1.50\times 10^5\,\text{N}} = 0.200\,\text{s}$$

---

2) Usamos conservación del momentum lineal. Antes de disparar la flecha el momentum lineal total del sistema arquero-flecha $\vec{p}_a = \vec{p}_{a,\text{ar}} + \vec{p}_{a,\text{fl}} = 0$, que debe ser el mismo después de disparada la flecha. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{p}_{d,\text{ar}} + \vec{p}_{d,\text{fl}} &= 0\\ M\vec{v}_{d,\text{ar}} &= -mv_0(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})\end{aligned}$$

de modo que la velocidad del aquero después de disparada la flecha es dada por

$$\vec{v}_{\text{dar}} = -\left(\frac{m}{M}\right)v_0(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

---

3) Tenemos una colisión totalmente inelástica. O sea

$$\begin{aligned}(m+M)\vec{v}_{d,\text{veh}} &= m\vec{v}_{a,\text{auto}} + M\vec{v}_{a,\,\text{cam}}\\ \vec{v}_{d,\text{veh}} &= \left(\frac{M}{m+M}\right)\vec{v}_{a\,\text{cam}}\end{aligned}$$

---

4) Para un sistema de partículas la fuerza neta externa $\sum\vec{F}_{\text{ext}}$ es igual al producto de la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas. De esto se deduce que $\sum F_{\text{ext}} = ma_{\text{cdm}}$. Dado que $\sum F_{\text{ext}} = F_1$ y $M = m_1 + m_2$, se tiene

$$a_{\text{cdm}} = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{F_1}{m_1 + m_2}$$

---

5) En un movimiento circular uniformemente acelerado la aceleración angular es constante. La aceleración angular es el cambio de la velocidad angular por intervalo de tiempo, entonces, en un movimiento de este tipo la velocidad angular cambia uniformemente.

---

6) Se tiene $\alpha = 4.00\,\text{s}^{-2}$, $\omega(2.00\,\text{s}) = 6.00\,\text{s}^{-1}$ y $t = 2.00\,\text{s}$. Luego

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad\rightarrow\quad \omega_0 = \omega(t) - \alpha t = 6.00\,\text{s}^{-1} - (4.00\,\text{s}^{-2})(2.00\,\text{s}) = -2.00\,\text{s}^{-1}$$

---

7) El momento de inercia en torno del eje z es

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = 2(mb^2 + Ma^2)$$

Dado que $M \gg m$, $m/M \to 0$ y

$$I_z = 2M\left[\left(\frac{m}{M}\right)b^2 + a^2\right] \approx 2Ma^2$$

---

8) Asuma que el eje x del plano xy apunta a lo largo de la longitud de la barra, de modo que $\vec{r} = L\hat{\imath}$. Para ese sistema de coordenadas, la fuerza $\vec{P}$ forma el mismo ángulo θ con ej eje y. O sea, $\vec{P} = -P\sin\theta\hat{\imath} - P\cos\theta\hat{\jmath}$. Usando la definición de torque, encontramos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P} = (L\hat{\imath}) \times (-P\sin\theta\hat{\imath} - P\cos\theta\hat{\jmath}) = -PL(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) = -PL\cos\theta\hat{k}$$
$$\rightarrow \quad \tau = PL\cos\theta.$$

Problemas

1. Usemos a (antes) y d (después) de la colisión. La colisión es perfectamente inelástica: Conservación de la cantidad de movimiento lineal se escribe

$$mv_a = (m+M)v_d \quad \therefore \quad v_a = \left(\frac{m+M}{m}\right) v_d$$

La energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión es

$$K_d = \frac{1}{2}(m+M)v_d^2$$

La conservación de la energía mecánica del sistema nos dice que

$$U_{gd} + K_d = U_{gh} + K_h$$

$$\cancelto{0}{U_{gd}} + \frac{1}{2}(m+M)v_d^2 = (m+M)gh + \cancelto{0}{\frac{1}{2}(m+M)v_h^2} \qquad \therefore \quad v_d = \sqrt{2hg}$$

Sustituyendo la expresión para v_d en la expresión para v_a se llega a:

$$v_a = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh}.$$

---

2. Como las partículas están ubicadas en el plano xy la coordenada $z_{\text{cdm}} = 0$. El centro de masa del sistema se moverá como si toda la masa estubiera allí y la fuerza neta externa actuara allí.

a) La coordenada x_{cdm} es

$$\begin{aligned} x_{\text{cdm}} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} \\ &= \frac{(1.0\,\text{kg})(-2.0\,\text{m}) + (2.0\,\text{kg})(4.0\,\text{m}) + (3.0\,\text{kg})(1.0\,\text{m})}{6.0\,\text{kg}} \\ &= \frac{(-2.0+8.0+3.0)\,\text{kg}\,\text{m}}{6.0\,\text{kg}} \qquad \to \qquad x_{\text{cdm}} = 1.5\,\text{m} \end{aligned}$$

La coordenada y_{cm} es

$$\begin{aligned} y_{\text{cdm}} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} \\ &= \frac{(1.0\,\text{kg})(3.0\,\text{m}) + (2.0\,\text{kg})(2.0\,\text{m}) + (3.0\,\text{kg})(-2.0\,\text{m})}{6.0\,\text{kg}} \\ &= \frac{(3.0+4.0-6.0)\,\text{kg}\,\text{m}}{6.0\,\text{kg}} \qquad \to \qquad y_{\text{cdm}} = 0.17\,\text{m} \end{aligned}$$

Así el vector posición del centro de masa es

$$\vec{r}_{\text{cdm}} = (1.5\,\text{m})\hat{\imath} + (0.17\,\text{m})\hat{\jmath}$$

b) El vector aceleración del centro de masa es

$$\vec{a}_{\text{cdm}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M}$$

La coordenada $a_{x,\text{cdm}}$ es

$$a_{x,\text{cdm}} = \frac{-F_1 + F_3}{M} = \frac{(-3.0 + 9.0)\,\text{N}}{6.0\,\text{kg}} \quad \rightarrow \quad a_{x,\text{cm}} = 1.0\,\text{m/s}^2$$

La coordenada $a_{y,\text{cdm}}$ es

$$a_{y,\text{cdm}} = \frac{F_2}{M} = \frac{6.0\,\text{N}}{6.0\,\text{kg}} \quad \rightarrow \quad a_{y,\text{cdm}} = 1.0\,\text{m/s}^2$$

Luego, la aceleración del centro de masa es

$$\vec{a}_{\text{cdm}} = (1.0\,\text{m/s}^2)\hat{\imath} + (1.0\,\text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

c) La dirección de la aceleración del centro de masa (el ángulo θ_{cdm}) es

$$\theta_{\text{cdm}} = \arctan\left(\frac{a_{y,\text{cdm}}}{a_{x,\text{cdm}}}\right) = \arctan\left(\frac{1.0}{1.0}\right) \quad \rightarrow \quad \theta_{\text{cdm}} = 45^\circ$$

---

3. La única fuerza que actúa sobre la barra es la gravitacional y actúa sobre el centro de masa de la barra. La magnitud del torque producido por la fuerza gravitacional sobre la barra es

$$\sum \tau = \sum F_t r = \frac{L}{2} F_g = Mg\frac{L}{2}$$

Por otro lado, sabemos que, $\sum \tau = I\alpha_0$, y que el momento de inercia de la barra en torno de un eje que pasa por uno de sus extremos es $I = \frac{1}{3}ML^2$, de modo tal que

$$I\alpha_0 = Mg\frac{L}{2}, \quad \alpha_0 = \frac{MLg}{2I} = \frac{3MLg}{2ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Ahora, la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración agular a través de $a_t = r\alpha$, de modo que para el el extremo libre de la barra

$$a_0 = L\alpha_0 = L\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{2}g$$

---

4. *a*) Considerando el nivel de medida de h para cada cilindro en la posición inicial de ellos, la energía mecánica inicial del sistema (que denotaremos con el sub-índice 0) es:

$$E_{0,\text{mec}} = K_{01} + U_{g01} + K_{02} + U_{g02} + K_R = 0$$

En el istante en el que los cilindros se han desplazado verticalemte la distancia h, la energía mecánica del sistema es,

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + gh(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

La rapidez traslacional de ambos cilindros es la misma $v_1 = v_2 = v$. Usando conservación de la energía, llegamos a:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = hg(m_2 - m_1)$$

La rapidez tangencial de la polea en el punto de contacto con la cuerda es igual a la rapidez tangencial de los cilindros: Usando $\omega = v/R$, se tiene,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = hg(m_2 - m_1),$$

De la expresión anterior se obtiene

$$v^2 = \frac{2hg(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}} \qquad \rightarrow \qquad v = R\sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)R^2 + I}}$$

b) La rapidez angular de la polea es

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)R^2 + I}}$$
