UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 1. 14–Mayo–2018; 13:15.

Nombre y apellidos	
Matrícula	

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Nota
Puntaje						

En los ejercicios que siguen (X, d) es un espacio métrico.

1. Sea $E := \left\{ \dfrac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Determina rigurosamente $\inf E$ y $\sup E$.

2. Sean $E_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in A$. Demuestra que
$$\overline{\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha.} = \overline{\bigcup_{\alpha \in A} \overline{E_\alpha}}$$

3. Demuestra que en un espacio métrico discreto, un conjunto es compacto si y sólo si es finito.

4. Da un ejemplo de un conjunto conexo en $\mathbb{R}^2$ cuyo interior no es conexo. ¿Hay conjuntos semejantes en $\mathbb{R}$? Justifica tus afirmaciones.

   Sugerencia: Puedes usar, sin demostrarlo, que las bolas en $\mathbb{R}^2$ (abiertas o cerradas) son conexas y sus fronteras son las circunferencias $S_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^2 :\ \|y - x\|_2 = r\}$.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico compacto X. Sea V un subconjunto abierto de X que contiene todos los límites subsecuenciales de $\{x_n\}$. Demuestra que sólo puede haber finitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \notin V$.

   Sugerencia: Por el absurdo, supón que hay infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \notin V$ y construye una subsucesión de $\{x_n\}$ que converja a $x \notin V$.