

# Preliminares

- Números naturales.
- Números enteros.
- Números racionales.
- Incompletitud de los racionales.

## Números naturales:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- **Factorización:** Todo número natural se factoriza de manera única en producto de potencias de números primos.
- **Demostraciones por inducción:** Si una propiedad se cumple para  $n = 1$  y, suponiendo que se cumple para un  $n \in \mathbb{N}$  particular, se puede demostrar que se cumple para  $n + 1$ , entonces se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Números enteros:

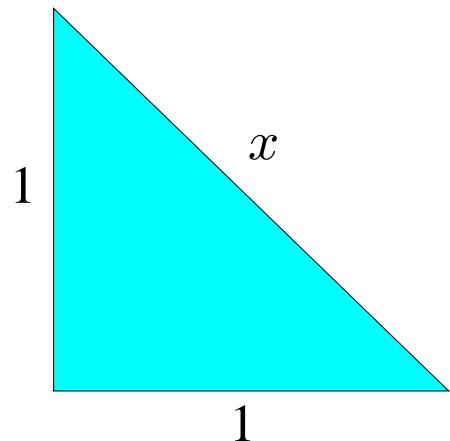
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

## Números racionales:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- $m$  y  $n$  pueden escogerse **primos entre si** (es decir, sin divisores comunes).

# Incompletitud de los racionales.



**Teorema de Pitágoras:**  $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

**Pregunta:** ¿ $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ ?

**Respuesta:** Demostraremos que ¡No!

Para ello, veamos antes algunas propiedades.

**Def:** Sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces,

- $m$  es **par** si  $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$ ;
- $m$  es **ímpar** si  $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k - 1$ .

**Prop.:** Sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces,

- $m$  es par si y sólo si  $m^2$  es par;
- $m$  es ímpar si y sólo si  $m^2$  es ímpar.

**Dem.:** Ej.

**Teor.:**  $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ .

**Dem.: Por el absurdo.** Supongamos que  $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ .

$x \in \mathbb{Q} \implies x = \frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$  primos entre si. Entonces,

$$\frac{m^2}{n^2} = x^2 = 2 \implies m^2 = 2n^2 \implies m^2 \text{ par} \implies m \text{ par.}$$

$$\implies m = 2k, k \in \mathbb{Z} \implies 2n^2 = m^2 = 4k^2 \implies n^2 = 2k^2 \implies n \text{ par.}$$

$\implies m$  y  $n$  tienen el factor 2 en común  $\implies$  no son primos entre si.  $\triangleright\triangleleft \quad \square$

Acabamos de demostrar que no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 2.

Refinaremos ese resultado del siguiente modo.

Sea  $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$  el conjunto de racionales positivos. Sean

$$A := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\} \quad \text{y} \quad B := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 > 2\}.$$

Demostraremos que  $A$  no tiene máximo y  $B$  no tiene mínimo.

**Prop.: Dados**  $A := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$  y  $B := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 > 2\}$ ,

i)  $\forall p \in A, \exists q \in A : q > p;$

ii)  $\forall p \in B, \exists q \in B : q < p.$

**Esquema de la demostración:** Demostraremos (i); (ii) quedará como ejercicio.

Dado  $p \in A$ , buscaremos  $r \in \mathbb{Q}^+$  tal que  $(p + r)^2 < 2$ . Entonces,

$$q := p + r \in \mathbb{Q}^+ \quad y \quad q^2 < 2 \implies q > p \quad y \quad q \in A.$$

Vale decir que debemos buscar

$$r \in \mathbb{Q}^+ : (p + r)^2 = p^2 + 2pr + r^2 < 2.$$

Como  $r$  tiene que ser menor que 2, entonces

$$p^2 + 2pr + r^2 < p^2 + 2pr + 2r.$$

Por lo tanto, basta encontrar  $r < 2$  tal que  $p^2 + 2pr + 2r = 2$ . Vale decir,

$$(2p + 2)r = 2 - p^2 \iff r = \frac{2 - p^2}{2p + 2}.$$

**Dem.:** (i) Sea  $r := \frac{2 - p^2}{2p + 2} \in \mathbb{Q}$ .

$$\left. \begin{array}{l} 0 < 2 - p^2 < 2 \\ 2p + 2 > 1 \end{array} \right\} \implies 0 < r < 2.$$

Sea  $q := p + r$ . Entonces  $q \in \mathbb{Q}^+$  y  $\boxed{q > p}$ .

Además, como  $r < 2$ ,

$$q^2 = (p + r)^2 = p^2 + 2pr + r^2 < p^2 + 2pr + 2r$$

y, por la definición de  $r$ ,

$$p^2 + 2pr + 2r = 2.$$

Entonces,

$$q^2 < 2 \implies \boxed{q \in A}.$$

De manera que encontramos  $\boxed{q \in A : q > p.}$   $\square$

(ii)  $\boxed{\text{Ej.}}$