Límites superior e inferior.

- **Límites infinitos.**
- **Límites superior e inferior.**

Límites infinitos.

Def.: Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales.

Decimos que $\{x_n\}$ **tiende a** $+\infty$ y denotamos $x_n \xrightarrow{n} +\infty$ si

$$\boxed{\forall M > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \ \forall n \geq N, \ x_n > M.}$$

Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ **tiende a** $-\infty$ y denotamos $x_n \xrightarrow{n} -\infty$ si

$$\boxed{\forall M < 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \ \forall n \geq N, \ x_n < M.}$$

¡Ojo! Aunque usemos las mismas palabras, "tiende", "límite", y el mismo símbolo, $\xrightarrow{n}$, cuando $x_n \xrightarrow{n} +\infty$ o $x_n \xrightarrow{n} -\infty$, la sucesión $\{x_n\}$ **no converge.**

Ejemplo: $\{-n\}$ tiende a $-\infty$.

En efecto, dado $M < 0$, sea $N \in \mathbb{N} : \ N > -M$. Entonces,

$\forall n \geq N, \ n > -M \implies -n < M$. Por lo tanto (como es obvio) $-n \xrightarrow{n} -\infty$.

Ejemplo: $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$ tiende a $+\infty$.

En efecto, dado $M > 0$, sea $N \in \mathbb{N} : \ N \geq 2M$. Entonces,

$\forall n \geq N, \ n \geq 2M \implies \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2} \geq M$. Por lo tanto, $\frac{n+1}{2} \xrightarrow{n} +\infty$.

Prop.: Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$.

a) $\{x_n\}$ no es acotada superiormente $\Longleftrightarrow$ hay una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$.

b) $\{x_n\}$ no es acotada inferiormente $\Longleftrightarrow$ hay una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} -\infty$.

Dem.: (a) $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\{x_n\}$ no acotada superiormente.

- Como 1 no es cota superior, sea $n_1 \in \mathbb{N} : \ x_{n_1} > 1$.
- Como $\{x_n\}$ no es acotada superiormente, hay infinitos $x_n > 2$.
  Entonces, sea $n_2 \in \mathbb{N} : \ n_2 > n_1$ y $x_{n_2} > 2$.
- Procediendo recursivamente, obtenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ tales que $x_{n_k} > k \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ y $x_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ con una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$.
Entonces, $\forall M > 0, \ \exists K \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq K, \ x_{n_k} > M$
$\Longrightarrow$ M no es cota superior de $\{x_n\}$ $\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ no es acotada superiormente.

(b) $\boxed{\textbf{Ej.}}$. $\square$

Límites superior e inferior.

Recordemos que $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Def.: Dada $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, sea $E^* \subset \overline{\mathbb{R}}$ el conjunto de límites subsecuenciales (finitos o infinitos) de $\{x_n\}$. Sean

$$s^* := \sup E^* \qquad \text{y} \qquad s_* := \inf E^*.$$

s^* y s_* se denominan el **límite superior y el límite inferior de $\{x_n\}$**, respectivamente, y se denotan

$$\limsup x_n := s^* \qquad \text{y} \qquad \liminf x_n := s_*.$$

Los límites superior e inferior de una sucesión de números reales están siempre bien definidos, porque $E^* \neq \emptyset$. En efecto:

- si $\{x_n\}$ no es acotada superiormente, hay una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$;
- si $\{x_n\}$ no es acotada inferiormente, hay una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} -\infty$;
- si $\{x_n\}$ es acotada superior e inferiormente, ya vimos (en un corolario de la clase pasada) que tiene una subsucesión convergente. $\square$

En cualquier caso, $E^* \neq \emptyset$.

Teor.: Dada $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, sean E^*, s^* y s_* como antes. Entonces:

a) $s^* \in E^*$;

b) $\forall x > s^*$ hay sólo finitos $x_n \geq x$;

c) s^* es el único elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ que satisface (a) y (b).

Vale un resultado análogo para s_*. (**Ej.** Enúncialo y demuéstralo.)

Dem.: (a) Veremos tres casos por separado:

i) $s^* = +\infty$. En tal caso, E^* no está acotado superiormente

$\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ no es acotada superiormente

$\Longrightarrow$ hay una subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty \implies s^* = +\infty \in E^*$.

ii) $s^* = -\infty$. En tal caso, como $E^* \neq \emptyset$, entonces $E^* = \{-\infty\}$

$\Longrightarrow$ $s^* = -\infty \in E^*$.

iii) $s^* \in \mathbb{R}$. En tal caso, $+\infty \notin E^*$ y $E^* \neq \{-\infty\}$.

Sea $E := E^* \setminus \{-\infty\}$. Entonces, $E \neq \emptyset$ y $E \subset \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ $s^* := \sup E^* = \sup E \in \overline{E} = E$ (pues ya vimos que E es cerrado)

$\Longrightarrow$ $s^* \in E \subset E^*$.

(b) Por el absurdo. **Supongamos que $\exists x > s^*$ tal que hay infinitos $x_n \geq x$.**

Esos infinitos términos conforman una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset [x, +\infty]$.

Esa subsucesión tiene al menos un límite subsecuencial $y \in [x, +\infty]$

$\implies y \in E^*$ e $y \geq x > s^* := \sup E^*$. $\triangleright\!=\!\triangleleft$.

(c) Por el absurdo. **Supongamos que hay otro $s \neq s^*$ que satisface (a) y (b).**

Supongamos que $s > s^*$ (idem si $s^* > s$). Sea $x \in \mathbb{R}$: $s < x < s^*$.

Como $x > s$ y s satisface (b), sólo hay finitos $x_n > x$

Como $s^* > x$, no hay ninguna subsucesión de $\{x_n\}$ que converja a s^*

$\implies s^* \notin E^*$. $\triangleright\!=\!\triangleleft$ $\square$

Ejemplo: Sea $\{q_n\}$ una numeración de $\mathbb{Q}$. Entonces, $E^* = \overline{\mathbb{R}} \implies$

$$\liminf x_n = -\infty \qquad y \qquad \limsup x_n = +\infty.$$

Dem.: Ya vimos que todo $x \in \mathbb{R}$ es un límite subsecuencial $\implies \mathbb{R} \subset E^*$.

Además, como $\{q_n\}$ no es acotada ni superior ni inferiormente, hay subsucesiones que convergen a $+\infty$ y $-\infty$

$\implies +\infty, -\infty \in E^* \implies E^* = \overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Prop.: Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. $x_n \xrightarrow{n} x$ si y sólo si $\liminf x_n = x = \limsup x_n$.

Dem.: $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $x_n \xrightarrow{n} x \iff \forall$ subsución $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$
$\iff E^* = \{x\} \iff \liminf x_n = x = \limsup x_n$. $\square$

Prop.: Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$. Si $\exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N, \; x_n \leq y_n$, entonces:

a) $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ y b) $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Dem.: (a) Sean $x^* := \limsup x_n$ e $y^* := \limsup y_n$.

Por el absurdo. **Supongamos que $x^* > y^*$.**

Sea $z \in \mathbb{R}: \; y^* < z < x^*$.

Como $y^* < z$, **sólo hay finitos $y_n > z$.** (Teor. anterior (b).)

Por otra parte, x^* es un límite subsecuencial de $\{x_n\}$. (Teor. anterior (a).)

Por lo tanto, hay una subsución $x_{n_k} \xrightarrow{k} x^*$.

Enronces, como $z < x^*$, hay infinitos $x_n > z$.

Como $\forall n \geq N, \; y_n \geq x_n$, **hay infinitos $y_n > z$.** $\rhd\!=\!\lhd$

(b) $\boxed{\textbf{Ej.}}$ $\square$