Universidad de Concepción

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre 1 - 2024

Tema Nº2: Funciones Reales
Clase N°20 - 09/05/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Identidades Trigonométricas

Definición

Una identidad trigonométrica es una igualdad que relaciona dos funciones trigonométricas y que es válida para un dominio en común.

Ejemplos: Algunas de las identidades ya las hemos visto:

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \equiv 1$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha) \equiv \cos(-\alpha)$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin(-\alpha) \equiv -\sin(\alpha)$

Identidades Trigonométricas

Existen otro tipo de identidades trigonométricas que relacionan la suma o diferencia de ángulos, como las siguientes:

1. $\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\cos(2\alpha) \equiv \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
4. $\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
5. $\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
6. $\sin(2\alpha) \equiv 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Ejercicios

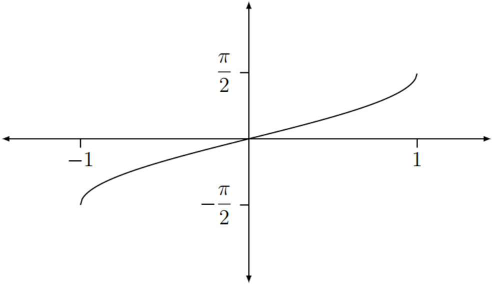
1. Determinar el valor de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ si:
   (a) $\cos(\alpha) = -\frac{7}{9}$, sabiendo que $P(\alpha) \notin$ III cuadrante.
   (b) $\tan(\alpha) = -\frac{1}{2} \wedge \sin(\alpha) > 0$.
2. Si $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$ y $P(\alpha) \notin$ I cuadrante, además $\sec(\beta) = -\frac{5}{4}$ y $P(\beta) \in$ III cuadrante. Calcular el valor exacto de:
   (a) $\sin(2\alpha)$ (b) $\tan(\alpha + \beta)$
3. Demuestre las siguientes identidades:
   (a) $2\cot(2\alpha) \equiv \dfrac{\sin(3\alpha)}{\cos(\alpha)} + \dfrac{\cos(3\alpha)}{\sin(\alpha)}$
   (b) $\sec^4(\alpha) - \sec^2(\alpha) \equiv \tan^2(\alpha) + \tan^2(\alpha)$
   (c) $\dfrac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \equiv 1 - 2\sin^2(\alpha)$

Funciones Trigonométricas Inversas

Al restringir la función seno se puede definir la inversa de la función seno, la cual se denomina función arcoseno y está definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcsin} : [-1, 1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto y = \mathrm{Arcsin}(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico está dado por:

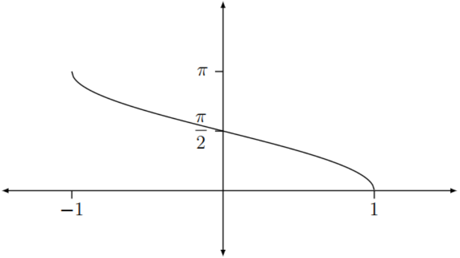


Funciones Trigonométricas Inversas

Al restringir la función coseno se puede definir la inversa de la función coseno, la cual se denomina función arcocoseno y está definida por:

$$\begin{aligned} \text{Arccos} : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto y = \text{Arccos}(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico está dado por:

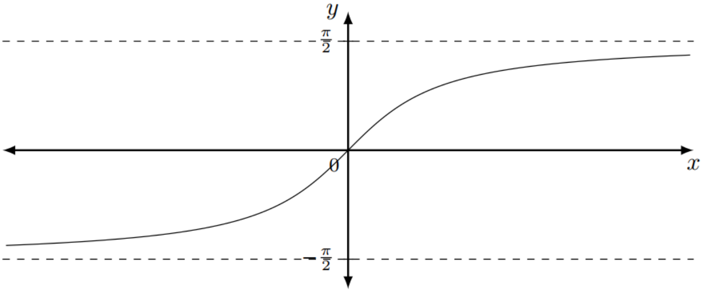


Funciones Trigonométricas Inversas

Al restringir la función tangente se puede definir la inversa de la función tangente, la cual se denomina función arcotangente y está definida por:

$$\begin{aligned} \text{Arctan} : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto y = \text{Arctan}(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico está dado por:



Ejercicios

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\text{Arcsin}(1) = -\dfrac{\pi}{2}$
2. $\text{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \text{Arccos}(1) = -\dfrac{\pi}{6}$
3. $\text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
4. $\text{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) + \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}$

Ecuaciones Trigonométricas

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una igualdad, válida sólo para un subconjunto de números reales, en la que participan funciones trigonométricas y una incógnita en el argumento de tales funciones.

Ejemplos:

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(t) = \cos(t)$
3. $\sin(2\alpha) = 1$
4. $\cos^2(y) + \cos(\pi + 3y) + \sin^2(y) = 1$