UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra II. 525148

26 de noviembre de 2013
Prof.: Anahí Gajardo

Transformaciones Lineales

Definición 1. *Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo, decimos que la función $T : V \to W$ es una* Transformación Lineal *si cumple las siguientes propiedades.*

1. $(\forall u, v \in V)\ T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $(\forall v \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{K})\ T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Proposición 1. *Si $T : V \to W$ es lineal, entonces:*

- $T(\Theta_V) = \Theta_W$.
- $(\forall v \in V)\ T(-v) = -T(v)$.
- $(\forall \alpha_1, .., \alpha_k \in \mathbb{K})(\forall u_1, .., u_k \in V)\ T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(u_i)$.

Definición 2. *Dada $T : V \to W$ lineal, se definen los siguientes conjuntos.*

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{v \in V \mid T(v) = \Theta_W\} \\ \\ Im(T) &= \{T(v) \mid v \in V\} \\ &= \{w \in W \mid (\exists v \in V)\ T(v) = w\} \end{aligned}$$

$Ker(T)$ se llama nucleo de T *y $Im(T)$ se llama* imagen de T.

Proposición 2. *Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple que*

- *$Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V, e*
- *$Im(T)$ es un subespacio vectorial de W.*

Definición 3. *Dada $T : V \to W$ lineal, se define:*

- *$n(T) = dim(Ker(T))$, y se llama* nulidad *de T, y*
- *$r(T) = dim(Im(T))$, y se llama* rango *de T.*

Observación 1. *Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple la siguiente equivalencia.*

$$T \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow r(T) = dim(W)$$

Teorema 1. *Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple la siguiente equivalencia.*

$$T \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow n(T) = 0$$

Proposición 3. *Dada $T : V \to W$ lineal, y $B = (v_1, .., v_n)$ una base de V, se tiene que:*

$$Im(T) = \langle \{T(v_1), .., T(v_n)\} \rangle.$$

Proposición 4. *Si $T : V \to W$ es lineal e inyectiva, y $B = \{v_1, .., v_k\}$ in conjunto l.i., entonces se tiene que el conjunto $\{T(v_1), .., T(v_k)\}$ es también l.i.*

Teorema 2 (nucleo-imagen)**.** *Dada $T : V \to W$ lineal, con V un e.v. de dimensión finita, se cumple:*

$$n(T) + r(T) = dim(V)$$

Corolario 1. *Si $dim(V) = dim(W)$, y $T : V \to W$ es lineal, entonces se cumple la siguiente equivalencia.*

$$T \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow T \text{ es inyectiva}$$

Observación 2. *Dados dos espacios vectoriales V, W, se define el conjunto de las aplicaciones lineales de V en W por:*

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal } \}.$$

Con la suma y ponderación usuales de funciones resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 5.

- *Dada $T : V \to W$ lineal e invertible, resulta que $T^{-1} : W \to V$ es también lineal.*
- *Dadas $L : U \to V$ y $T : V \to W$ lineales, resulta que $T \circ L : U \to W$ es también lineal.*

Definición 4 (Matriz Representante)**.** *Dada $T : V \to W$ lineal, $B_V = (v_1, .., v_n)$ una base de V y $B_W = (w_1, .., w_m)$ una base de W, se define la matriz representante de T respecto a B_V y B_W como sigue:*

$$[T]_{B_V}^{B_W} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{B_W} & [T(v_2)]_{B_W} & \cdots & [T(v_n)]_{B_W} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Proposición 6. *La matriz representante de T cumple, para todo $v \in V$:*

$$[T(v)]_{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V}.$$

Proposición 7.

- *Dada B_V una base de V, se cumple:*
$$[id]_{B_V}^{B_V} = I_n.$$
- *Dada $T : V \to W$ lineal e invertible, dadas B_V base de V y B_W base de W, resulta que*
$$[T^{-1}]_{B_W}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_W}\right)^{-1}.$$
- *Dadas $L : U \to V$ y $T : V \to W$ lineales, y dadas B_U base de U, B_V base de V y B_W base de W, resulta que*
$$[T \circ L]_{B_U}^{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W}[L]_{B_U}^{B_V}.$$
- $dim(\mathcal{L}(V, W)) = dim(V)dim(W).$

Observación 3. *Si consideramos dos bases distintas de V, B_1 y B_2, entonces la matriz representante de la función identidad de V en V ya no será la matriz identidad, será una matriz interesante que llamamos* matriz de paso de la base B_1 a la base B_2, *y la denotamos por:*

$$P_{B_1}^{B_2} = [id]_{B_1}^{B_2}$$

Cumple la interesante propiedad que para todo $v \in V$:

$$P_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} = [v]_{B_2},$$

además

$$P_{B_1}^{B_2} = \left(P_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}.$$

Si tenemos dos bases de W, B_{1W} y B_{2W}, y dos bases de V, B_{1V} y B_{2V}, entonces:

$$[T]_{B_{1V}}^{B_{1W}} = P_{B_{2W}}^{B_{1W}}[T]_{B_{2V}}^{B_{2W}}P_{B_{1V}}^{B_{2V}}.$$

Definición 5. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define:*

- $n(A) = dim(\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\})$, *la nulidad de A.*
- $R(A) = dim(\{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\})$, *el rango de A.*

Proposición 8. *Dada $T : V \to W$ lineal, B_V base de V y B_W base de W, se cumple:*

- $n([T]_{B_V}^{B_W}) = n(T)$, *y*
- $R([T]_{B_V}^{B_W}) = r(T)$.

Lo cual implica que matrices que representan la misma transformación lineal tienen igual nulidad y rango.

Definición 6. *Dos matrices A, B cuadradas en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se dicen* semejantes *si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = M^{-1}BM$.*

Proposición 9.

- *Toda matriz cuadrada A es semejante a sí misma.*
- *Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.*
- *Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.*

Observación 4. *Si $V = W$, y B_1, B_2 son dos bases de V, vemos que*

$$[T]_{B_1}^{B_1} = \left(P_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}[T]_{B_2}^{B_2}P_{B_1}^{B_2}.$$

Es decir, $[T]_{B_1}^{B_1}$ y $[T]_{B_2}^{B_2}$ son semejantes.

Proposición 10. *A y B son semejantes si y solo si representan la misma transformación lineal.*

Demostración. Si A y B representan la misma aplicación lineal, ya sabemos, de la observación anterior, que son semejantes.
Supongamos ahora que A y B son semejantes, y sea M la matriz que cumple $A = M^{-1}BM$. Definimos $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ por $T(x) = Bx$, es claro que B es la matriz representante de T respecto a la base canónica C. Tomamos ahora la base B_2 consistente en los vectores columna de M.
Se tendrá que $P_{B_2}^{C} = M$, y que $P_{C}^{B_2} = M^{-1}$, por lo tanto

$$A = M^{-1}BM = \left(P_{B_2}^{C}\right)^{-1}[T]_{C}^{C}P_{B_2}^{C} = [T]_{B_2}^{B_2}$$

Es decir, A y B representan a T. □

Proposición 11. *Si A y B son semejantes, entonces:*

- $tr(A) = tr(B)$,
- $det(A) = det(B)$,
- $R(A) = R(B)$,
- $n(A) = n(B)$.