Derivación Implícita

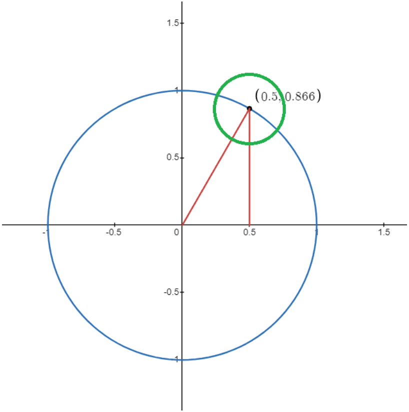
Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Función implícita

Ejemplo 1

Problema: Dada una curva suave de ecuación $R(x, y) = 0$. ¿Cómo determinar la recta tangente en un punto (x, y) de la curva?



Ejemplo 1. Consideremos la circunferencia unitaria

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Notar que no es la gráfica de una función.

Derivación implícita

Ejemplo 1

En el dibujo anterior, el círculo verde define una vecindad en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. En esta vecindad, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define *implícitamente* a la variable y como función de la variable x.

Ahora, si suponemos que f es derivable, la curva se puede escribir **localmente** como

$$x^2 + [f(x)]^2 = 1$$

Luego, si derivamos esta ecuación con respecto a x, obtenemos:

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (*)$$

De esta manera, la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 1$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ¿Cuál es la ecuación de dicha recta?

Derivación implícita

El método para calcular la derivada de la función (desconocida) $y = f(x)$ se llama **derivación implícita**.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\implies 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{con } y \neq 0. \end{aligned}$$

Observación. Notar que la función f del ejemplo en una vecindad de $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Luego, derivando (explícitamente)

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

y esta expresión coincide con la ecuación $(*)$.

Derivación implícita

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Solución. Primero, verificamos que $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ pertenece a la curva. Segundo, derivamos implícitamente la ecuación con respecto a x:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 6y - 6x\frac{dy}{dx} = 0$$

Luego, despejamos $\dfrac{dy}{dx}$

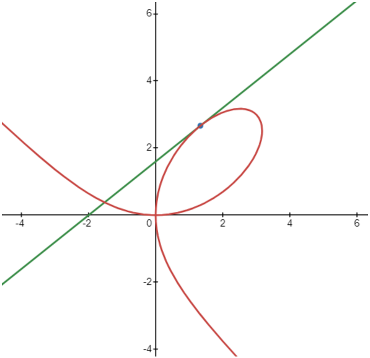
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$$

Evaluando en $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, obtenemos $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)} = \dfrac{4}{5}$.

Derivación implícita

Ejemplo 2.

Así, la recta tangente en dicho punto es $y - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{5}\left(x - \dfrac{4}{3}\right)$.



Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ en el punto $(3,1)$.

Asumiendo que las funciones trigonométricas inversas son derivables, podemos determinar la fórmula de sus derivadas usando derivación implícita.

La función seno restringida a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \sin(x)$$

tiene como función inversa a arcoseno

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad x \mapsto \arcsin(x)$$

Así, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall y \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$.

Aplicación

Derivada de $\arcsin$

Si derivamos implícitamente $x = \sin(y)$ respecto a x, obtenemos

$$1 = \cos(y)\frac{dy}{dx}.$$

Luego, como $\cos(y) > 0 \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y despejando $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación anterior

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dx}[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in]-1, 1[.$$

Aplicación

Derivada de funciones trigonométricas inversas

De manera similar, se obtiene que

$$\frac{d}{dx}[\arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \forall x \in]-1,1[.$$

Ejemplo 4. Mostrar que $\dfrac{d}{dx}[\arctan(x)] = \dfrac{1}{x^2+1} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5. Calcular $\dfrac{d}{dx}[\arctan(x^2+1)]$.