Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Valores propios complejos. Caso de estudio.

Carlos M. Mora

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X'(t) = 6\,X(t) - Y(t) \\ Y'(t) = 5\,X(t) + 2\,Y(t) \end{cases}$$

con $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}$

Escritura matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

Elegimos $\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Luego

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$$

Problema

Considere $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las soluciones de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$$

con la forma

$$\overrightarrow{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v},$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{C}^2$ es no nulo.

Como

$$\frac{d}{dt}\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v},$$

$$\lambda\,\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v} = A\,\overrightarrow{Z}(t) = A\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v} = \exp(\lambda\, t)\;A\,\overrightarrow{v}$$

$$\exp(\lambda\, t)\;A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \boxed{A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}}$$

Entonces λ es un valor propio de A y $\overrightarrow{v}$ es un vector propio asociado a λ.

En general, $\overrightarrow{Z}(t) = \exp(\lambda\, t)\,\overrightarrow{v}$ es solución de $\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = A\,\overrightarrow{Z}(t)$ si y solo si $A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}$.

Cálculo de autovalores

$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0$$

Como $(A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0$ con $\overrightarrow{v} \neq 0$,

$$|A - \lambda\, I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\, I \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(6-\lambda)\,(2-\lambda) + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\,\lambda + 17 = 0$

$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-17}$

$\boxed{\lambda = 4 - i}$ ó $\boxed{\lambda = 4 + i}$.

Cálculo de autovectores

$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\vec{v} = 0$

Cuando $\lambda = 4 + i$, buscamos $\vec{v} \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda\, I)\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - (4+i)\; I\right)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2-i)\,v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = (2-i)\,v_1 \Leftrightarrow \vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Tomado $v_1 = 1$ llegamos a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$, que genera la solución

$$\vec{Z}\,(t) = e^{(4+i)\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = e^{4\,t}\,(\cos(t) + i\,sen\,(t))\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}\,(t) = e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + sen\,(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + i\,e^{4\,t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + sen\,(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Cálculo de autovectores

$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\, I)\,\overrightarrow{v} = 0$

Observación

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = (4+i) \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \Rightarrow A \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}} = \overline{(4+i)}\,\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}} \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = (4-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos la solución

$$\overrightarrow{V}\,(t) = e^{(4-i)\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = e^{4\,t}\,(\cos(t) - i\,sen\,(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix},$$

que es la conjugada de $\overrightarrow{Z}\,(t)$.

Observación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+i & 0 \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+i & 0 \\ 0 & 4-i \end{pmatrix} \frac{1}{2\,i} \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ -2+i & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que

$$\overrightarrow{Z}(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + i\, e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

es solución de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix}6 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}\overrightarrow{Z}(t)\,. \tag{1}$$

Por lo tanto, las partes reales e imaginarias de $\overrightarrow{Z}(t)$ satisfacen (1). Lo que nos lleva a las soluciones:

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overrightarrow{Z}_2(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

Independencia lineal

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overrightarrow{Z}_2(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$c_1\overrightarrow{Z}_1(t) + c_2\overrightarrow{Z}_2(t) = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$\overrightarrow{Z}_1(t)$, $\overrightarrow{Z}_2(t)$ son linealmente independientes.

La funciones

$$\overrightarrow{Z}_1(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overrightarrow{Z}_2(t) = e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

son soluciones, linealmente independientes, de

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix}6 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}\overrightarrow{Z}(t).$$

Solución general

$$\overrightarrow{Z}(t) = c\,e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + k\,e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

con $c, k \in \mathbb{R}$.

Suponga que las funciones $a_{i,j}(t)$, con $i, j = 1, \ldots, d$, son continuas en un intervalo $]a, b[$. Consideremos $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{R}$.
Supongamos que $\overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t)$ son funciones linealmente independientes que satisfacen

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,d}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & a_{d,2}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix} \overrightarrow{Z}(t). \tag{2}$$

Entonces, cualquier solución de (2) se puede escribir como

$$\overrightarrow{Z}(t) = c_1 \overrightarrow{Z}_1(t) + c_2 \overrightarrow{Z}_2(t) \cdots + c_d \overrightarrow{Z}_d(t),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$.

$\left\{ \overrightarrow{Z}_1(t), \overrightarrow{Z}_2(t), \ldots, \overrightarrow{Z}_d(t) \right\}$ es llamado conjunto fundamental de soluciones de (2).

Problema de valores iniciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X(\pi/4) \\ Y(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = c\, e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + k\, e^{4t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\pi/4) \\ Y(\pi/4) \end{pmatrix} = c\, e^{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k\, e^{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} = \sqrt{2}e^{-\pi}\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10}e^{-\pi}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En general, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Luego $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\, e^{4t-\pi}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{10}\, e^{4t-\pi}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Retrato de fase

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$