Mecánica de Fluidos

Análisis Dimensional

Generalidades

- En mecánica de fluidos existen 4 cantidades básicas: masa, longitud, tiempo y temperatura. La idea detrás del AD es escribir las variables y ecuaciones que modelan un fenómeno en términos de números adimensionales Π.
- El adimensionamiento es una herramienta útil en la construcción de prototipos permitiendo disminuir la incertidumbre respecto del proceso real

Principio de Homogeneidad

- Si una ecuación expresa una relación verdadera en un proceso físico entonces esta es dimensionalmente homegénea, i.e., cada uno de sus términos tiene las mismas dimensiones:

$$\text{Ej: } x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

cada uno de los términos tiene dimensiones de largo

- Observación: La integración y la diferenciación de una ecuación cambia las dimensiones pero la homogeneidad de ésta

- El motivo detrás del AD es el hecho que cualquier ecuación dimensionalmente homogénea puede ser escrita de una forma adimensional más sencilla. Sin embargo esta <u>no es única</u>
- Existen ecuaciones en ingeniería las cuale son son dimensionalmente homogéneas, por ejemplo, la fórmula de Manning para flujo en canales:

$$V = \frac{1,49}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

donde V es la velocidad media, R es el radio hidráulico y S es la pendiente del canal y n un factor de fricción. Si las unidades de R y V cambian entonces cambia la cte 1,49

Ej: $x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2}$

5 términos, 2 variables, 3 parámetros.

Elijamos x_0 y V_0 para adimensionalizar, luego se define:

$$x^* = \frac{x}{x_0} ; t^* = \frac{V_0}{x_0} t$$

Reemplazando en ecuación base:

$$x_0 x^* = x_0 + V_0 \frac{x_0}{V_0} t^* + \frac{g}{2} \left(\frac{x_0}{V_0} \right)^2 [t^*]^2$$

$$\Rightarrow x^* = 1 + t^* + \frac{g}{2} \frac{x_0}{V_0^{\,2}} [t^*]^2$$

donde $g \frac{x_0}{V_0^{\,2}}$ es un número adimensional

Elijamos x_0 y g para adimensionalizar, luego se define:

$$x^* = \frac{x}{x_0}; t^* = \sqrt{\frac{g}{x_0}}t$$

Reemplazando en ecuación base:

$$x_0 x^* = x_0 + V_0\sqrt{\frac{x_0}{g}}t^* + \frac{g}{2}\left(\frac{x_0}{g}\right)[t^*]^2$$

$$\Rightarrow x^* = 1 + \frac{V_0}{\sqrt{gx_0}}t^* + \frac{1}{2}[t^*]^2$$

donde $\frac{V_0}{\sqrt{gx_0}}$ es un número adimensional

Teorema Pi

- Si un proceso es dimensionalmente homogéneo e involucra *n* variables dimensionales este puede ser reducido a una relación entre *k* variables adimensionales. La reducción *j:=n-k*, es siempre igual al número máximo de variables que no forman un adimensional entre ellas y es <u>menor o igual</u> al <u>número de dimensiones</u> del problema

$$\text{Ej: } x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

5 términos, 2 dimensiones, 3 adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{x_0}; t^* = \frac{V_0}{x_0} t; g\,\frac{x_0}{V_0{}^2}$$

- Una vez conocida la reducción *j*, seleccione *j* variables que no formen un adimensional entre ellas. Cada número adimensional será el producto de estas *j* variables elevadas a un exponente (por determinar) multiplicada por una de las *k* variables elevadas a 1

Ej: $x = x_0 + V_0 t + \frac{gt^2}{2}$

5 términos: x, x_0, V_0, t, g

j en este caso es igual al número de dimensiones 2 (L,t)

Luego eligiendo x_0, V_0:

$$\Pi_1 = x_0^{\ a} \cdot V_0^{\ b} \cdot x = \frac{x}{x_0}$$

$$\Pi_2 = x_0^{\ c} \cdot V_0^{\ d} \cdot t = \frac{V_0}{x_0} t$$

$$\Pi_3 = x_0^{\ a} \cdot V_0^{\ b} \cdot g = g \frac{x_0}{V_0^{\ 2}}$$

Metodología

- Enumere las *n* variables involucradas en el problema
- Haga una lista con las dimensiones de cada variable (*L,M,T, TEMP*)
- Encuentre *j*. Como primera aproximación suponga que *j* es igual al número de dimensiones del problema. Si no tiene éxito reduzca *j* en 1.
- Seleccione las *j* variables que usará como pivote para construir los adimensionales. Elija preferentemente los más simples que no formen un adimensional entre ellos
- Adicione la variable con exponente 1 y forme el producto con los *j* pivotes. Encuentre los exponentes de forma de que el producto sea adimensional. Haga lo mismo con los *k* restantes

- Ej.: Suponga que la fuerza de arrastre ejercida sobre una esfera que cae en un fluido en reposo depende de su diámetro, velocidad de caída, viscosidad del fluido, diferencia de densidad con el fluido. Encuentre los números adimensionales.

$1.-F=F(V,D,\Delta\rho,\mu)$ n=5

$$2.\text{-}\begin{bmatrix} F & V & D & \Delta\rho & \mu \\ MLT^{-2} & LT^{-1} & L & ML^{-3} & ML^{-1}T^{-1} \end{bmatrix}$$

3.– Supongamos que j=3. Notemos que $V,D,\Delta\rho$ no forman un adimensional entre ellos

4.- Elegimos $V,D,\Delta\rho$

$$5.-\Pi_1=V^a\cdot D^b\cdot\Delta\rho^c\cdot F$$

$$\Pi_2=V^{a'}\cdot D^{b'}\cdot\Delta\rho^{c'}\cdot\mu$$

Para hallar los exponentes se deben resolver sistemas lineales

$$\left(LT^{-1}\right)^a\cdot L^b\cdot\left(ML^{-3}\right)^c\cdot MLT^{-2}=M^0L^0T^0$$

$$L^aT^{-a}\cdot L^b\cdot M^cL^{-3c}\cdot MLT^{-2}=M^0L^0T^0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow a+b-3c+1=0;-a-2=0;c+1=0\\ \Rightarrow c=-1;a=-2;b=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \Pi_1=\frac{F}{\Delta\rho V^2 D^2}=C_D$$

Este adimensional se llama coeficiente de arrastre

Análogamente

$$\Pi_2=\frac{\mu}{\Delta\rho V D}=\frac{1}{\mathrm{Re}_P}$$ es el inverso del Reynolds de la partícula

Finalmente, $C_D = C_D(\mathrm{Re}_P)$. Para flujos muy lentos

$$C_D=\frac{24}{\mathrm{Re}_P}$$

Quantity	Symbol	Dimensions $MLT\Theta$	$FLT\Theta$
Length	L	L	L
Area	A	L^2	L^2
Volume	$\mathcal{V}$	L^3	L^3
Velocity	V	LT^{-1}	LT^{-1}
Acceleration	dV/dt	LT^{-2}	LT^{-2}
Speed of sound	a	LT^{-1}	LT^{-1}
Volume flow	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
Mass flow	$\dot{m}$	MT^{-1}	FTL^{-1}
Pressure, stress	p, σ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Strain rate	$\dot{\epsilon}$	T^{-1}	T^{-1}
Angle	θ	None	None
Angular velocity	ω	T^{-1}	T^{-1}
Viscosity	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
Kinematic viscosity	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Surface tension	Υ	MT^{-2}	FL^{-1}
Force	F	MLT^{-2}	F
Moment, torque	M	ML^2T^{-2}	FL
Power	P	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Work, energy	W, E	ML^2T^{-2}	FL
Density	ρ	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
Temperature	T	Θ	Θ
Specific heat	c_p, c_v	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Specific weight	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
Thermal conductivity	k	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$FT^{-1}\Theta^{-1}$
Expansion coefficient	β	Θ^{-1}	Θ^{-1}

Ej: Una forma usual de escalar el comportamiento de una bomba centrífuga es adimensionar el problema. Las variables involucradas son: la potencia P, la velocidad de giro N, el diámetro del impulsor D, la altura de elevación H, el caudal Q, la densidad y viscosidad del líquido así como la aceleración de gravedad. Encuentre los adimensionales

$$1.-(P, N, D, H, Q, \rho, \mu, g) \Rightarrow n = 8$$

$$2.- \begin{array}{cccccccc} P & N & D & H & Q & \rho & \mu & g \\ ML^2T^{-3} & T^{-1} & L & L & L^3T^{-1} & ML^{-3} & ML^{-1}T^{-1} & LT^{-2} \end{array}$$

$$3.- \ j = 3 \text{ (por inspección)}$$

4.- Elegimos ρ,N,D para construir los adimensionales

$$5.-\ \Pi_1 = \rho^a N^b D^c H \Rightarrow M^a L^{-3a} T^{-b} L^c L^1 = M^0 L^0 T^0$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \frac{H}{D}$$

$$\Pi_2 = \rho^a N^b D^c \mu \Rightarrow M^a L^{-3a} T^{-b} L^c M^1 L^{-1} T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$a+1=0; 3+c+1=0; -b-1=0 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho N D^2}$$

$$\Pi_3 = \rho^a N^b D^c g \Rightarrow M^a L^{-3a} T^{-b} L^c L^1 T^{-2} = M^0 L^0 T^0$$

$$a=0; -b-2=0; c+1=0 \Rightarrow \Pi_3 = \frac{g}{DN^2}$$

$$\Pi_4 = \rho^a N^b D^c P \Rightarrow M^a L^{-3a} T^{-b} L^c M^1 L^2 T^{-3} = M^0 L^0 T^0$$

$$a+1=0; 3+c+2=0; -b-3=0 \Rightarrow \Pi_4 = \frac{P}{\rho D^5 N^3}$$

$$\Pi_5 = \rho^a N^b D^c Q \Rightarrow M^a L^{-3a} T^{-b} L^c L^3 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$a = 0; -b - 1 = 0; c + 3 = 0 \Rightarrow \Pi_5 = \frac{Q}{D^3 N}$$

Ej.: La caída de presión debida a la fricción en el flujo en un tubo largo de paredes lisas es función de la velocidad media del fluido, la densidad, la viscosidad y la longitud y el diámetro del tubo: $\Delta p = f(V, \rho, \mu, L, D)$. Se desea conocer cómo varía Δp con V.

(a) Utilice el teorema Pi para rescribir esta función en forma adimensional.

(b) Represente gráficamente esta función, usando los siguientes datos correspondientes a tres tubos y tres fluidos distintos:

(c) Suponga además Δp es proporcional a L (lo que es una buena aproximación para tubos largos con entradas redondeadas) Utilice esta información para simplificar y mejorar el resultado del teorema Pi. Represente los datos adimensionales de esta forma y comente los resultados.

D[cm]	L[m]	Q[m3/hr]	Δp[Pa]	ρ[kg/m3]	μ[kg/(ms)]	V[m/s]
1,0	5,0	0,3	4680	680	0,000292	1,06
1,0	7,0	0,6	22300	680	0,000292	2,12
1,0	9,0	1,0	70800	680	0,000292	3,54
2,0	4,0	1,0	2080	998	0,001000	0,88
2,0	6,0	2,0	10500	998	0,001000	1,77
2,0	8,0	3,1	30400	998	0,001000	2,74
3,0	3,0	0,5	540	13550	0,001560	0,2
3,0	4,0	1,0	2480	13550	0,001560	0,39
3,0	5,0	1,7	9600	13550	0,001560	0,67

$$1.-\Delta p = \Delta p(V, D, L, \rho, \mu) \quad \text{n=6}$$

$$2.\text{-}\begin{bmatrix} \Delta p & V & D & \rho & \mu & L \\ ML^{-1}T^{-2} & LT^{-1} & L & ML^{-3} & ML^{-1}T^{-1} & L \end{bmatrix}$$

$3.-$ Supongamos que j=3. Notemos que μ, D, ρ

no forman un adimensional entre ellos

4.- Elegimos μ, D, ρ

$$5.-\Pi_1 = \mu^a \cdot D^b \cdot \rho^c \cdot L = \frac{L}{D}$$

$$\Pi_2 = \mu^{a'} \cdot D^{b'} \cdot \rho^{c'} \cdot \Delta p = \frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2}$$

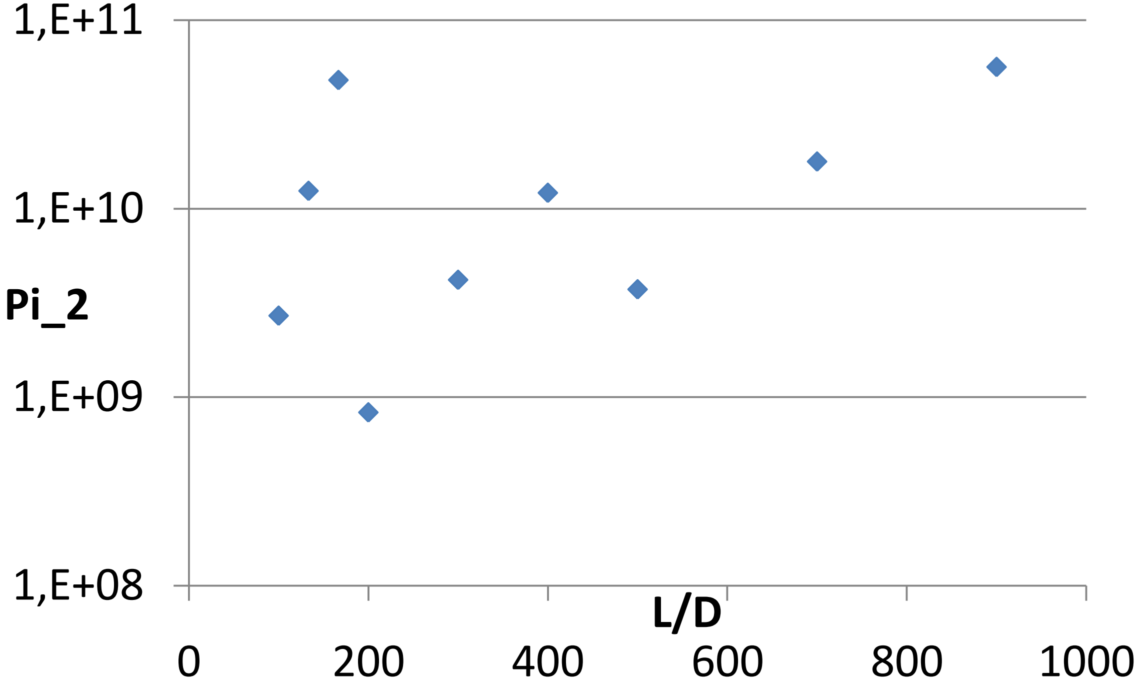
$$\Pi_3 = \mu^{\tilde{a}} \cdot D^{\tilde{b}} \cdot \rho^{\tilde{c}} \cdot V = \frac{VD\rho}{\mu}$$

Del teorema Pi se sabe que: $\Pi_2 = \text{función}\left(\Pi_1, \Pi_3\right)$, i.e.,

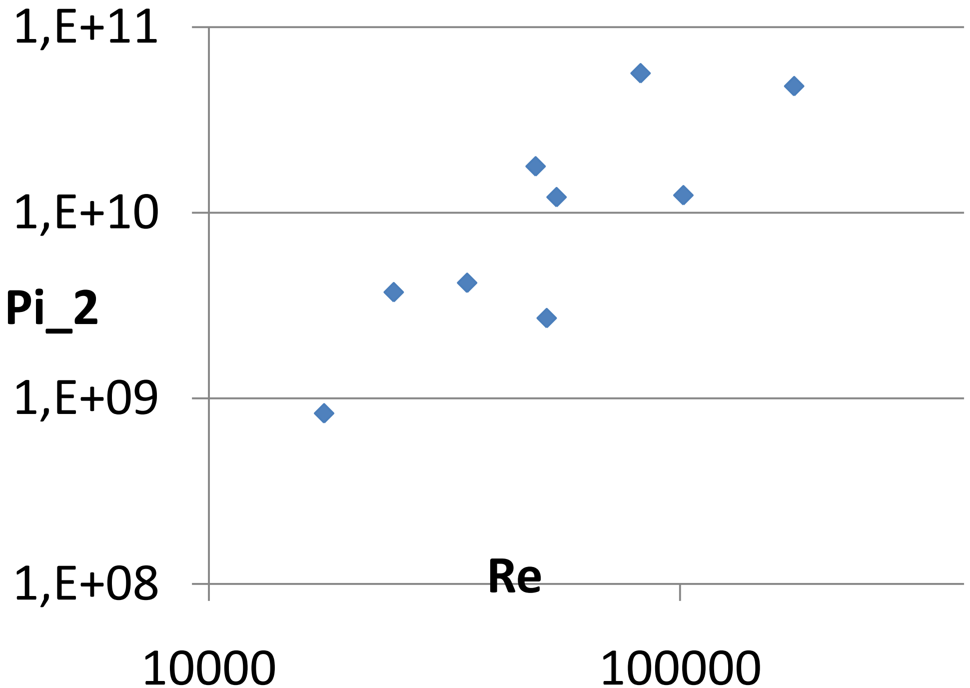
$$\frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{VD\rho}{\mu}\right)$$

Grafiquemos

D[m]	L[m]	Q[m3/hr]	Δp[Pa]	ρ[kg/m3]	μ[kg/(ms)]	V[m/s]	Re	Pi_2	L/D
0,01	5,0	0,3	4680	680	0,000292	1,06	24685	3,73E+09	500
0,01	7,0	0,6	22300	680	0,000292	2,12	49370	1,78E+10	700
0,01	9,0	1,0	70800	680	0,000292	3,54	82438	5,65E+10	900
0,02	4,0	1,0	2080	998	0,001000	0,88	17565	8,30E+08	200
0,02	6,0	2,0	10500	998	0,001000	1,77	35329	4,19E+09	300
0,02	8,0	3,1	30400	998	0,001000	2,74	54690	1,21E+10	400
0,03	3,0	0,5	540	13550	0,001560	0,2	52115	2,71E+09	100
0,03	4,0	1,0	2480	13550	0,001560	0,39	101625	1,24E+10	133
0,03	5,0	1,7	9600	13550	0,001560	0,67	174587	4,81E+10	167



1,E+11
1,E+10
1,E+09
1,E+08
Pi_2
L/D
0
200
400
600
800
1000

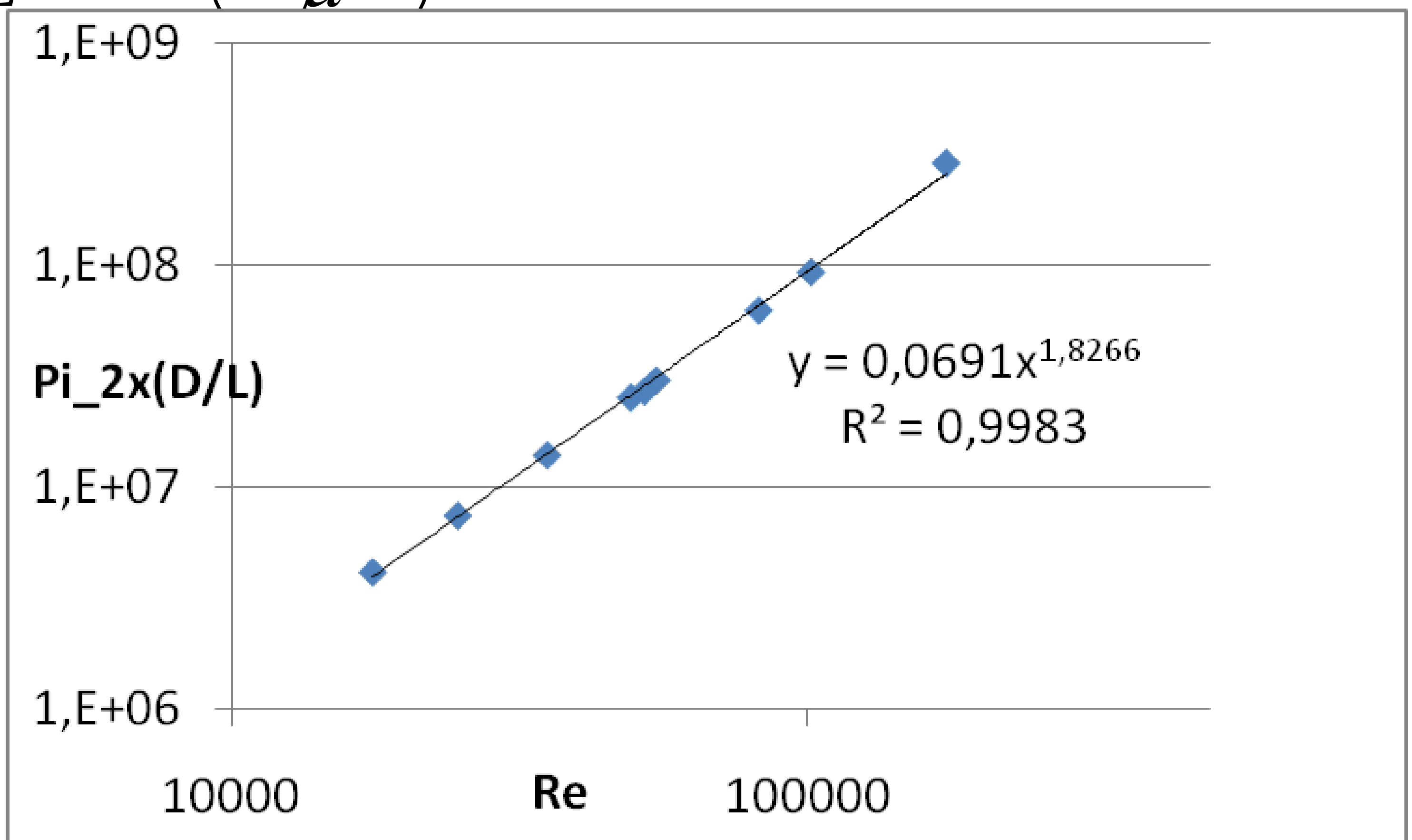


1,E+11
1,E+10
1,E+09
1,E+08
Pi_2
Re
10000
100000

c) Como $\Delta p \propto L$ entonces

$$\frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2} = KL = f\left(\frac{L}{D}, \frac{VD\rho}{\mu}\right) = \frac{L}{D}\tilde{f}\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{\rho D^3 \Delta p}{\mu^2 L} = \tilde{f}\left(\dfrac{VD\rho}{\mu}\right)$, Luego grafiquemos Π_3 v/s $\Pi_2 \dfrac{D}{L}$



Finalmente

$$\frac{\rho D^3 \Delta p}{\mu^2 L} = 0,0691\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)^{1,8266}$$

$$\Pi_4 = 0,0691\,\mathrm{Re}^{1,8266}$$

Adimensionamiento de ecs. N-S

- Se aplicará la técnica de adimensionamiento a las ecs de Navier-Stokes.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\vec{g}\cdot\hat{i}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho\vec{g}\cdot\hat{j}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w\right]=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\vec{g}\cdot\hat{k}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Variables: $p, \vec{V}, x, y, z, t, g, \mu, \rho$

Dimensiones:M,L,T

Usaremos para dimensionalizar ciertos parámetros:

U: velocidad característica (Q/A por ejemplo)

L: largo característico (D por ejemplo)

g, μ, ρ

Se definen:

$$x' = \frac{x}{L}; y' = \frac{y}{L}; z' = \frac{z}{L}; u' = \frac{u}{U}; v' = \frac{v}{U}; w' = \frac{w}{U}$$

$$t' = \frac{tU}{L}$$

El problema surge cuando se desea adimensionalizar

la presión y la gravedad.

Notemos que

$$\lim\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\lim\frac{Uu'(x+h)-Uu(x)}{h'L}=\frac{U}{L}l\,\mathrm{im}\frac{u'(x+h)-u'(x)}{h'}$$

p'$=\dfrac{p+\rho gz}{\rho U^2}$ es adimensional

Por otro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u'U}{\partial x'L}=\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'}\quad \text{y}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x'L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x'L}\left(\frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)=\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u'U}{\partial\left(t'L/U\right)}=\frac{U^2}{L}\frac{\partial u'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial(x/L)}\left(\frac{p+\rho gz}{\rho U^2}\right)=\frac{L}{\rho U^2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial(z/L)}\left(\frac{p+\rho gz}{\rho U^2}\right)=\frac{L}{\rho U^2}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{L}{\rho U^2}\rho g$$

$$\Rightarrow\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p'}{\partial z'}=\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g$$

Ahora reemplazamos en las ecs-. N-S

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{U}{L}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)=0$$

$$\nabla'\cdot\vec{V}'=0$$

$$\rho\left[\frac{U^2}{L}\frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{U}{L}\frac{\partial w'}{\partial x'}u'U+\frac{U}{L}\frac{\partial w'}{\partial y'}v'U+\frac{U}{L}\frac{\partial w'}{\partial z'}w'U\right]=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g+\mu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{\partial w'}{\partial x'}u'+\frac{\partial w'}{\partial y'}v'+\frac{\partial w'}{\partial z'}w'\right]=$$

$$-\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p'}{\partial z'}+\mu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{\partial w'}{\partial x'}u'+\frac{\partial w'}{\partial y'}v'+\frac{\partial w'}{\partial z'}w'=-\frac{\partial p'}{\partial z'}+\frac{\mu}{UL\rho}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right)$$

Expresiones análogas se encuentran en los ejes X e Y.

El número adimensional nuevo que aparece es:

$\boxed{\mathrm{Re}=\frac{UL\rho}{\mu} \text{ denominado número de Reynolds}}$

Otros Πs

Reynolds number	$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U L}{\mu}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$
Mach number	$\mathrm{Ma} = \dfrac{U}{a}$	$\dfrac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$
Froude number	$\mathrm{Fr} = \dfrac{U^2}{gL}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$
Weber number	$\mathrm{We} = \dfrac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$	$\dfrac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$
Cavitation number (Euler number)	$\mathrm{Ca} = \dfrac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\dfrac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$
Prandtl number	$\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu c_p}{k}$	$\dfrac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$
Eckert number	$\mathrm{Ec} = \dfrac{U^2}{c_p T_0}$	$\dfrac{\text{Kinetic energy}}{\text{Enthalpy}}$
Specific-heat ratio	$k = \dfrac{c_p}{c_v}$	$\dfrac{\text{Enthalpy}}{\text{Internal energy}}$
Strouhal number	$\mathrm{St} = \dfrac{\omega L}{U}$	$\dfrac{\text{Oscillation}}{\text{Mean speed}}$
Roughness ratio	$\dfrac{\epsilon}{L}$	$\dfrac{\text{Wall roughness}}{\text{Body length}}$
Grashof number	$\mathrm{Gr} = \dfrac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\dfrac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$
Temperature ratio	$\dfrac{T_w}{T_0}$	$\dfrac{\text{Wall temperature}}{\text{Stream temperature}}$
Pressure coefficient	$C_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\dfrac{\text{Static pressure}}{\text{Dynamic pressure}}$
Lift coefficient	$C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\dfrac{\text{Lift force}}{\text{Dynamic force}}$
Drag coefficient	$C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\dfrac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$

Ej.: La ecuación diferencial para pequeñas vibraciones

en una viga bidimensional está dada por:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

donde E es el módulo de Young e I es el momento de inercia.

Encuentre la forma adimensional

Primero encontremos las unidades de E:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ tiene unidades de } ML^{-3}L^2LT^{-2} = MT^{-2}$$

$$\text{por otro lado } EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \text{ tiene unidades } EL^4L^{-3} = EL = MT^{-2}$$

$$\Rightarrow \left[E\right] = MT^{-2}L^{-1}$$

La ecuación se puede escribir:

$$\frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

Un largo para adimensionalizar es $\sqrt{A}$, luego:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{A}}; y' = \frac{y}{\sqrt{A}}$$

Lo complicado es hallar un tiempo

Jugando con las variables se nota que:

$\frac{\rho A}{E}$ tiene unidades de tiempo cuadrado

luego $t' = t\sqrt{\frac{E}{\rho A}}$ reemplazamos en la ecuación

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} + \frac{I}{A^2}\frac{\partial^4 y'}{\partial x'^4} = 0$$

donde es $\frac{I}{A^2}$ otro adimensional. Notemos que

$n = 7(x, y, t, \rho, A, I, E)$ el problema tiene 3 dimensiones y

x, t, ρ no forman un adimensional entre ellos luego se

esperaban 4 adimensionales que fue lo obtenido.