UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 1. 05–Mayo–2022; 13:00.

Nombre y apellidos	
Matrícula	

Elige y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Nota
Puntaje						

En los ejercicios que siguen X es un espacio métrico y d la métrica correspondiente.

1. Dado un conjunto E cualquiera, sea $\mathcal{B}(E)$ el espacio vectorial de las funciones acotadas definidas en E y a valores en $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(E) := \Big\{ f: \ E \to \mathbb{R} : \ f(E) \text{ es un subconjunto acotado de } \mathbb{R} \Big\}.$$

En este espacio vectorial, se define la norma infinito como $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Demuestra que la norma infinito es efectivamente una norma, justificando cada paso.

2. Sea X un espacio métrico en el que las bolas tienen clausura compacta.

Demuestra que un subconjunto de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

3. Sea K un subconjunto compacto de X. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito de K,

$$F := \{p_1, \ldots, p_N\} \subset K,$$

tal que, para cada $x \in K$, hay al menos un $p_n \in F$ que dista de x menos que ε.

4. Sea $\{A, B\}$ una separación de X. Demuestra que A y B son abiertos y cerrados.

5. Sea X completo. Demuestra que los subconjuntos cerrados de X, también son completos.