Vibraciones mecánicas no amortiguadas

Sistemas masa/resorte

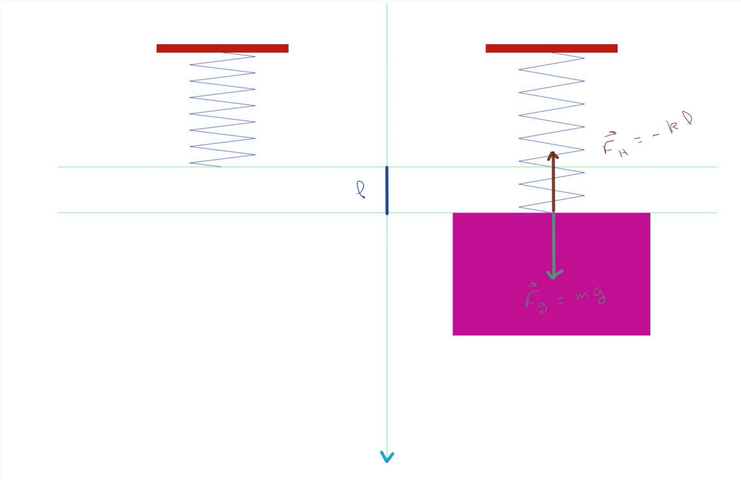
Carlos M. Mora

Ley de Hooke

Un resorte ejerce una fuerza opuesta a la dirección del alargamiento con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento.

x : valor del alargamiento
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez)

$$\overrightarrow{F}_H = -k\,x$$



$$\overrightarrow{F}_H + \overrightarrow{F}_g = 0$$

$$-k\,\ell + m\,g = 0 \Rightarrow \boxed{k\,\ell = m\,g}$$

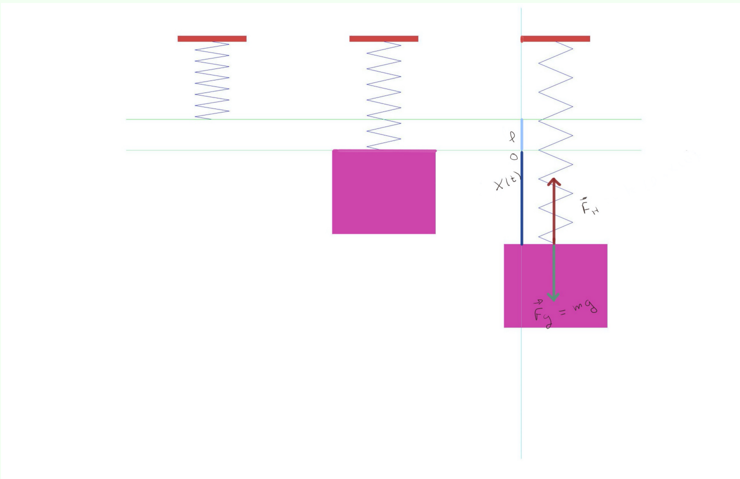
m : masa del cuerpo
ℓ : alargamiento del resorte hasta la posición de equilibrio

Segunda ley de Newton

La suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a su masa multiplicada por la aceleración del cuerpo.

$$\text{Fuerza}_{neta} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez) $\quad \ell$: alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio



$$mX''(t) = \vec{F}_H + \vec{F}_g$$

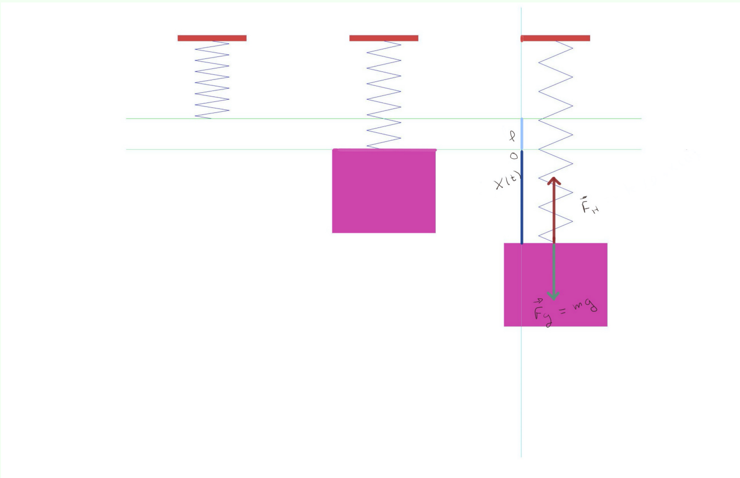
$$\begin{aligned} mX''(t) &= -k(\ell + X(t)) + mg \\ &= -k\ell - kX(t) + mg \end{aligned}$$

$$mX''(t) + kX(t) = 0$$

Vibraciones no amortiguadas

Una masa de m Kg se sujeta a un resorte suspendido de un techo. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, es desplazado en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo cierta velocidad. Describa el movimiento del cuerpo.

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
Ecuación del movimiento: $m\,X''(t) + k\,X(t) = 0$



$$m\lambda^2 + k$$
$$= m\left(\lambda - i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\lambda + i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$X(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

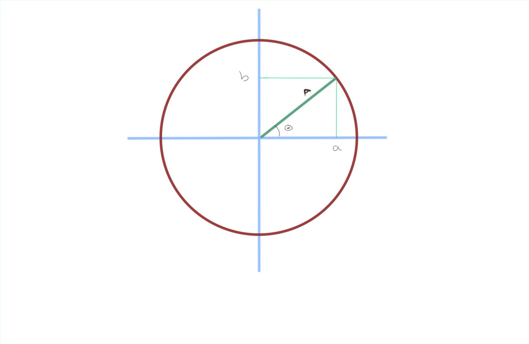
$$X\left(t\right)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$X\left(0\right)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right)=C_1$$

$$X'\left(t\right)=-C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$X'\left(0\right)=-C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right)+C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right)=C_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$X\left(t\right)=X\left(0\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\sqrt{\frac{m}{k}}X'\left(0\right)\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$



$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} a\cos(\gamma) + b\operatorname{sen}(\gamma) &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta)\cos(\gamma) + \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\gamma) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\gamma-\theta) \end{aligned}$$

$$X(t) = X(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}X'(0)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$X(t) = \sqrt{X(0)^2 + \frac{m}{k}X'(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta\right) \quad \text{con } \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,\mathit{signo}(X'(0)) & \text{si } X(0) = \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{X'(0)}{X(0)}\right) & \text{si } X(0) > \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{X'(0)}{X(0)}\right) + \pi & \text{si } X(0) < \end{cases}$$

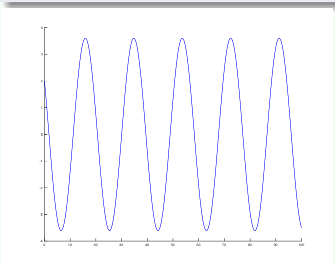
$$X(t) = \sqrt{X(0)^2 + \frac{m}{k} X'(0)^2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta\right) \quad \text{con } \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\, signo\left(X'(0)\right) & \text{si } X(0) = 0 \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{X'(0)}{X(0)}\right) & \text{si } X(0) > 0 \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{X'(0)}{X(0)}\right) + \pi & \text{si } X(0) < 0 \end{cases}$$

T = período de la vibración: tiempo transcurrido hasta completar un ciclo

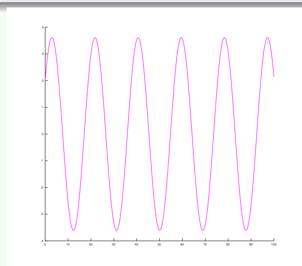
$$-\theta + 2\pi = \sqrt{\frac{k}{m}} T - \theta \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

f = frecuencia de la vibración: número de ciclos por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$X'(0) = -1$

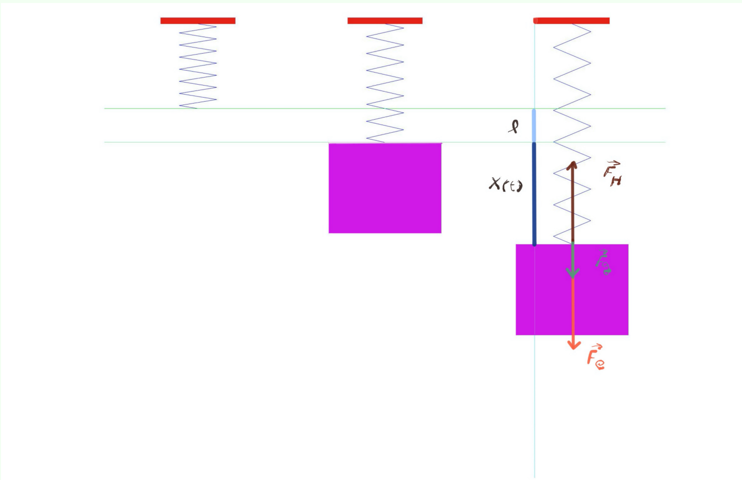


$X'(0) = 1$

Vibraciones no amortiguadas

Una masa de m Kg se sujeta a un resorte suspendido de un techo. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio, es desplazado en la dirección dada por la fuerza de gravedad y se suelta imprimiéndole al cuerpo cierta velocidad. Describa el movimiento del cuerpo si sobre él actúa la fuerza externa $\overrightarrow{F}_e(t) = F_0 \cos(\omega t)$, donde $F_0, \omega \in \mathbb{R}$ y el tiempo t está dado en segundos.

$X(t)$: posición del extremo del resorte en el tiempo t
$k > 0$: constante del resorte (o rigidez) $\quad \ell$: alargamiento del resorte hasta el punto de equilibrio



$$m X''(t) = \overrightarrow{F}_H + \overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_e(t)$$

$$\begin{aligned} m X''(t) &= -k(\ell + X(t)) + m g + \overrightarrow{F}_e(t) \\ &= -k\ell - k X(t) + m g + \overrightarrow{F}_e(t) \end{aligned}$$

$$m X''(t) + k X(t) = \overrightarrow{F}_e(t)$$

Ecuación del movimiento

$$m\,X''\left(t\right)+k\,X\left(t\right)=F_0\,\cos\left(\omega\,t\right)$$

$$X\left(t\right)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+X_p\left(t\right),$$

donde

$$\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\left(t\right)=\frac{F_0}{m}\cos\left(\omega\,t\right)$$

Aniquilador

$$\hat{L}\,\frac{F_0}{m}\cos\left(\omega\,t\right)=0\Leftrightarrow\hat{L}\,\cos\left(\omega\,t\right)=0$$

$$\left(D-i\omega\right)\left(D+i\omega\right)\cos\left(\omega\,t\right)=0$$

Solución particular

$$\left(D-i\omega\right)\left(D+i\omega\right)\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\left(t\right)=0$$

Solución particular

$$\left(D-i\omega\right)\left(D+i\omega\right)\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\left(t\right)=0$$

Caso $\omega=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2X_p\left(t\right)=0$$

$$X_p\left(t\right)=K_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+K_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+K_4\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)$$

Ya que

$$\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\left(t\right)=\frac{F_0}{m}\cos\left(\omega\,t\right),$$

$$\left(D-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+K_4\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\right)=\frac{F_0}{m}\cos\left(\omega\,t\right)$$

$$F_0\,\cos(\omega\,t) = m\,\frac{d^2}{dt^2}\left(t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\right)$$
$$+\,k\left(t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\right)$$
$$= K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + t\left(-K_3\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(t\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)\right)$$
$$= -2\,K_3\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + 2\,K_4\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{k}{m}\,t\,\Bigg(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\Bigg(\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$F_0\,\cos(\omega\,t) = -2\,m\,K_3\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + 2\,m\,K_4\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$K_3 = 0, \qquad K_4 = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}F_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k\,m}}F_0$

Ecuación del movimiento

$$m\,X''(t) + k\,X(t) = F_0\cos(\omega\,t)$$

$$X(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + X_p(t)\,,$$

donde

$$X_p(t) = K_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + t\,\left(K_3\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_4\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)$$

con $K_3 = 0$ y $K_4 = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}F_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k\,m}}F_0$

$$X(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\,t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Evolución del sistema masa/resorte, caso $\omega = \pm\sqrt{k/m}$

$$X(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\, t \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$X(0) = C_1$$

$$X'(t) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\, t\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$X'(0) = C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow C_2 = X'(0)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

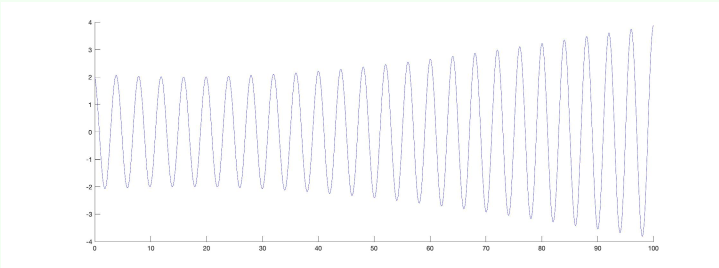
$$X(t) = X(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}X'(0)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\, t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

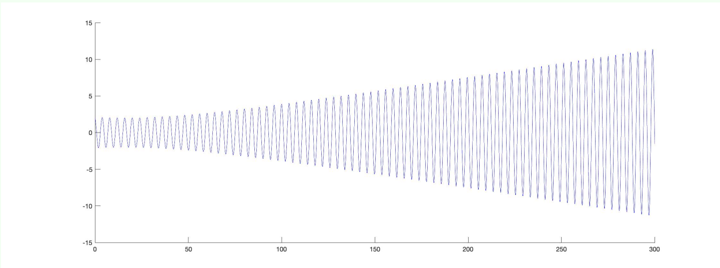
$$X(t) = \sqrt{X(0)^2 + \frac{m}{k}X'(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\, t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\text{con } \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\, signo\,(X'(0)) & \text{si } X(0) = 0 \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{X'(0)}{X(0)}\right) & \text{si } X(0) > 0 \end{cases}$$

Evolución del sistema masa/resorte, caso $\omega = \pm\sqrt{k/m}$

$$X(t) = \sqrt{X(0)^2 + \frac{m}{k}X'(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{k\,m}}\,t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$





Resonancia pura

El sistema

$$m\,X''\,(t)+k\,X\,(t)=\overrightarrow{F}_e\,(t)$$

presenta resonancia cuando tiene soluciones definidas en $[t_0,+\infty[$ que son no acotadas.

Evolución del sistema masa/resorte, caso $\omega=\pm\sqrt{k/m}$

$$m\,X''\,(t)+k\,X\,(t)=F_0\,\cos\,(\omega\,t)$$

$$X\,(t)=\sqrt{X\,(0)^2+\frac{m}{k}X'\,(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\theta\right)+\frac{F_0}{2\,\sqrt{k\,m}}\,t\,\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Frecuencia interna (de la solución de $m\,X_h''\,(t)+k\,X_h\,(t)=0$): $f_i=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Frecuencia externa (de $F_0\,\cos\,(\omega\,t)$): $f_e=\frac{|\omega|}{2\pi}$

$$f_i=f_e\Leftrightarrow\omega=\pm\sqrt{k/m}$$

Ecuación del movimiento

$$m\,X''\,(t) + k\,X\,(t) = F_0\,\cos\,(\omega\,t)$$

Solución particular

$$(D - i\omega)\,(D + i\omega)\left(D - i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D + i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\,(t) = 0$$

Caso $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega \neq -\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$X_p\,(t) = K_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + K_3 \cos\,(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}\,(\omega t)$$

Ya que

$$\left(D - i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D + i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)X_p\,(t) = \frac{F_0}{m}\cos\,(\omega\,t)\,,$$

$$\left(D - i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(D + i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)(K_3 \cos\,(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}\,(\omega t)) = \frac{F_0}{m}\cos\,(\omega\,t)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(K_3 \cos(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}(\omega t)\right) + k \left(K_3 \cos(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}(\omega t)\right) = F_0 \cos(\omega\, t)$$

$$-m\omega^2 \left(K_3 \cos(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}(\omega t)\right) + k \left(K_3 \cos(\omega t) + K_4 \operatorname{sen}(\omega t)\right) = F_0 \cos(\omega\, t)$$

$$\left(k - m\omega^2\right) K_3 \cos(\omega t) + \left(k - m\omega^2\right) K_4 \operatorname{sen}(\omega t) = F_0 \cos(\omega\, t)$$

$K_4 = 0$ y $\left(k - m\omega^2\right) K_3 = F_0$

$$X_p(t) = K_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + K_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos(\omega t)$$

$$X(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos(\omega t)$$

$$X(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$X(0) = C_1 + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \Rightarrow C_1 = X(0) - \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

$$X'(t) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{F_0\,\omega}{k - m\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$X'(0) = C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow C_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}X'(0)$$

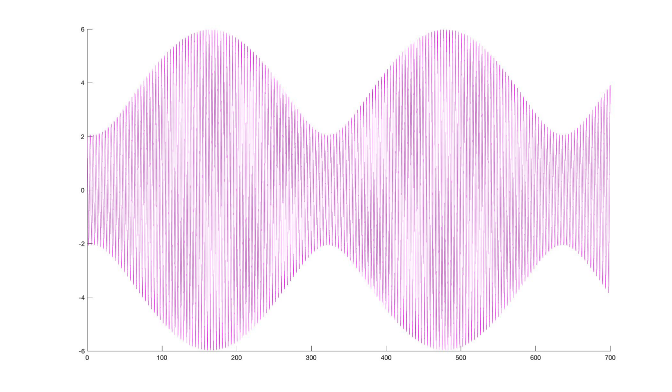
$$X(t) = \left(X(0) - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}X'(0)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$X(t) = \sqrt{\left(X(0) - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)^2 + \frac{m}{k}X'(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta\right) + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

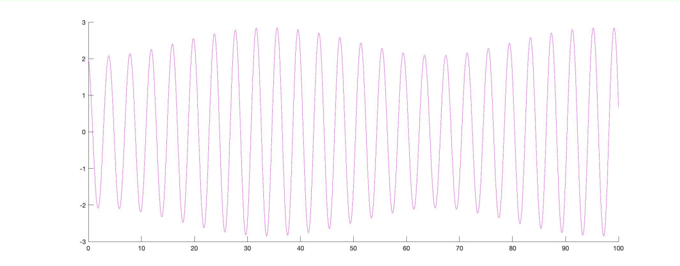
$$X(t)=\sqrt{\left(X(0)-\frac{F_0}{k-m\omega^2}\right)^2+\frac{m}{k}X'(0)^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\theta\right)+\frac{F_0}{k-m\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\,signo\,(X'(0)) & \text{si } X(0)-\frac{F_0}{k-m\omega^2}=0,\\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{X'(0)\left(k-m\omega^2\right)}{(k-m\omega^2)X(0)-F_0}\right) & \text{si } X(0)-\frac{F_0}{k-m\omega^2}>0,\\ \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{X'(0)\left(k-m\omega^2\right)}{(k-m\omega^2)X(0)-F_0}\right)+\pi & \text{si } X(0)-\frac{F_0}{k-m\omega^2}<0.\end{cases}$$

Como $X(t)$ es acotado, no hay resonancia pura.
Pero, la amplitud de las oscilaciones tiende a $+\infty$ cuando ω se aproxima a $\sqrt{k/m}$ o a $-\sqrt{k/m}$.



$$\omega = \sqrt{k/m} + 0{,}02$$



$$\omega = \sqrt{k/m} + 0{,}1$$