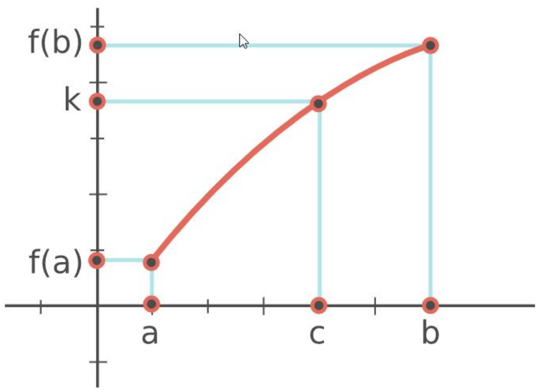
1. Teorema del Valor Intermedio

Intuitivamente, este teorema nos dice que dada una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, dicha función toma todos los valores intermedios comprendidos entre los extremos del intervalo.

Teorema 1.1. *(T.V.I.) Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y k es un número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

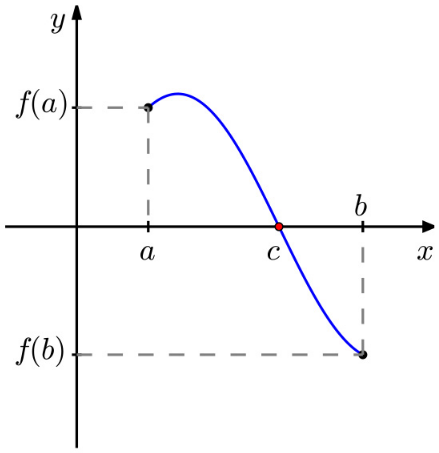


La idea de la demostración es que dada una función continua f su gráfico es una curva continua comprendida entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Luego, al menos un punto de esta curva debe cortar a la recta $y = k$, lo que implica la existencia de $c \in [a, b]$.

Observación 1.2. Este teorema es un **teorema de existencia**, es decir, nos garantiza la existencia de una preimagen $c \in [a, b]$ pero no cómo determinar c.

El teorema anterior resulta muy útil cuando los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, esto es si $f(a) \cdot f(b) < 0$, pues nos proporciona un resultado eficaz que nos permite localizar ceros de la función, es decir: puntos $c \in Dom(f)$ tales que $f(c) = 0$.

Corolario 1.3. *(Teorema de Bolzano) Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*



2. Aplicación

Ejemplo 2.1. Decidir si la ecuación $x^4+x=1$ posee o no soluciones dentro del intervalo $\left[-\frac{3}{2},1\right]$.

Solución. La función definida como $f(x)=x^4+x-1$ es polinómica, por tanto continua en $\mathbb{R}$. Como $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{73}{16}>0$ y $f(1)=1>0$, el Teorema de Bolzano no nos aporta información con estos valores. Sin embargo, $f(0)=-1$, luego por Teorema de Bolzano, existe solución en $\left]\frac{3}{2},0\right[$, y por ende en $\left[-\frac{3}{2},1\right]$.

2.1. Método de Bisección

El Teorema de Bolzano nos lleva a pensar en un método simple que nos permite encontrar de manera “aproximada” una solución de la ecuación $f(x)=0$, este método es llamado **método de bisección**.

A continuación, mostramos los pasos del algoritmo: dada una función f definida sobre un intervalo $[a,b]$

1. Verificar que f sea continua en $[a,b]$ y que $f(a)\cdot f(b)<0$. Luego, por Teorema de Bolzano, existe una solución para $f(x)=0$.

2. Definir $x_1=\frac{a+b}{2}$ y evaluar $f(x_1)$.

- Si $f(x_1) = 0$, se ha encontrado una solución, y termina el proceso.
- Si $f(x_1) \neq 0$, escogemos el intervalo $[a, x_1]$ o $[x_1, b]$ si $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ o $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, respectivamente.

3. Definir $x_2 = \dfrac{a + x_1}{2}$ o $x_2 = \dfrac{b + x_1}{2}$ dependiendo del intervalo considerado, y repetimos el análisis del paso anterior.

Este es un algoritmo que en cada iteración reduce a la mitad la longitud del intervalo donde se encuentra la solución. Luego, como el intervalo inicial tiene longitud $b-a$, en la primera iteración el intervalo a considerar tendrá longitud $\dfrac{b-a}{2}$, en la segunda iteración tendrá longitud $\dfrac{b-a}{2^2}$ y así sucesivamente, hasta que al cabo de n iteraciones el intervalo tendrá longitud $\dfrac{b-a}{2^n}$, la cual tiende a 0 si consideramos un n suficientemente grande. Lo anterior indica que nos podemos aproximar tanto como queramos a la solución siempre que realicemos un número suficiente de iteraciones.

Ejemplo 2.2. La ecuación $x^3 = 2x + 10$ tiene solución única en $[2, 3]$, esta solución ¿es más cercana a 2 o a 3? Justifique.

Solución. Primero, definimos $f(x) = x^3 - 2x - 10$. Notar que f es continua en $\mathbb{R}$ al ser una función polinómica. Segundo, como $f(2) = -6$ y $f(3) = 11$, por Teorema de Bolzano existe una solución en $[2, 3]$.

Definimos $x_1 = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$. Evaluamos $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{95}{8} < 0$. Como $f(3) > 0$, por Teorema de Bolzano existe una solución para $f(x) = 0$ en $\left]\dfrac{5}{2}, 3\right[$.

Por tanto, la solución es más cercana a 3 que 2.