CONTRAEJEMPLO DE ASOCIATIVIDAD

LEONARDO FIGUEROA C.

Recordamos que la función $\varrho\colon R^N \to R$ definida por

$$(\forall\, x \in R^N) \quad \varrho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_c^\infty(R^N)$.

Proposición (Ejemplo de falla de asociatividad de convolución)**.** *Sobre R sea $f_1 \equiv 1$ (función constante), $f_2 = \varrho'$ y f_3 la función de Heaviside (esto es, $f_3(x) = 0$ si $x < 0$ y $f_3(x) = 1$ si $x \geq 0$). Entonces $(f_1 \star f_2) \star f_3 \neq f_1 \star (f_2 \star f_3)$.*

Demostración. Observamos que f_2 posee las siguientes propiedades:

$$f_2 \in C_c^\infty(R), \quad \operatorname{supp}(f_2) = [-1, 1], \quad \int_R f_2(x)\, dx = 0, \quad \int_R (1-y) f_2(y)\, dy \neq 0$$

(las últimas dos se pueden demostrar observando que las integrales no cambian si se restringen a $(-1, 1)$ y efectuando integración por partes). Observamos que, cualquiera sea $x \in R$, $(f_1 \star f_2)(x) = \int_R f_1(x-y) f_2(y)\, dy = \int_R f_2(y)\, dy = 0$, por lo que $f_1 \star f_2 \equiv 0$. Por otro lado, sea $f_4 := f_2 \star f_3$. Como $f_2 \in L^1(R)$ y $f_3 \in L^\infty(R)$, [Tar07, Lem. 2.1] nos dice que $f_4 \in BUC(R)$; en particular, f_4 es continua. Además, para todo $x \in R$,

$$f_4(x) = \int_R f_2(y) f_3(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^x f_2(y)\, dy,$$

de lo que se desprende que f_4 se anula si $x > 1$ o $x < -1$. Luego, $\operatorname{supp}(f_4)$ está contenido en $[-1, 1]$ y así $f_4 \in C_c(R)$. Como $f_1 \in L^\infty(R)$ y $f_4 \in L^1(R)$ su convolución $f_1 \star f_4$ está bien definida y pertenece a $BUC(R)$. Además, para todo $z \in R$,

$$\begin{aligned} (f_1 \star f_4)(z) &= \int_R f_1(z-x) f_4(x)\, dx = \int_R f_4(x)\, dx = \int_{-1}^1 f_4(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^x f_2(y)\, dy\, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^x f_2(y)\, dy\, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi_{(-1,x)}(y) f_2(y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^1 f_2(y) \int_{-1}^1 \chi_{(-1,x)}(y)\, dx\, dy = \int_{-1}^1 f_2(y) \int_{-1}^1 \chi_{(y,1)}(x)\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^1 f_2(y) \int_y^1 1\, dx\, dy = \int_{-1}^1 f_2(y)(1-y)\, dy, \end{aligned}$$

donde se usó el teorema de Fubini para $(-1, 1) \times (-1, 1)$ y el hecho de que si $-1 < x, y < 1$ entonces $\chi_{(-1,x)}(y) = \chi_{(y,1)}(x)$. De esta manera, $(f_1 \star f_2) \star f_3 = 0 \star f_3 \equiv 0$, pero $f_1 \star (f_2 \star f_3) = f_1 \star f_4 \equiv \int_{-1}^1 f_2(y)\, dy \neq 0$. $\square$

Observación. *En el ejemplo anterior $f_1 \in L^a(R)$ con $a = \infty$ solamente, $f_2 \in L^b(R)$ cualquiera sea $b \in [1, \infty]$ y $f_3 \in L^c(R)$ con $c = \infty$ solamente. De cualquier manera que se elija a b se viola al menos una de las condiciones*

$$a, b, c \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1; \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2,$$

que son las que garantizan (cf. [Tar07, p. 11]*) en general la asociatividad de la convolución de funciones en* $L^a(R^N)$, $L^b(R^N)$ *y* $L^c(R^N)$.

Referencias

[Tar07] Luc Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 3, Springer, Berlin, 2007. MR 2328004 (2008g:46055)