UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PRÁCTICA 4: EXTREMOS RELATIVOS Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE
CÁLCULO III (525221)

Problema 1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ siguientes:

1. $f(x, y) = 2 + 2x + 6y - x^2 - y^2$,

2. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$,

3. $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2$,

4. $f(x, y, z) = x^2 + y + z^2$,

5. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$,

6. $f(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.

Problema 2. Determinar (en caso de que existan) los extremos absolutos para las siguientes funciones en la región cerrada y acotada R que se indica.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$, R con lados eje x, eje y y la recta $x + y = 5$,

2. $f(x, y) = 3x^2 + xy$, R limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$,

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16$, R triangular con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 8)$.

Problema 3. Considere la región elíptica $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 \leq 1\}$. Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre R.

Problema 4. La intersección entre los elipsoides de ecuación:

$$\Gamma_1 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

$$\Gamma_2 : 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$$

es una curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ formada por la unión de dos curvas cerradas y conexas cada una de ellas: Γ_1 contenida en el semiespacio $\{z > 0\}$, y Γ_2 contenida en el semiespacio $\{z < 0\}$. Una partícula recorre la curva Γ_1. Hallar la máxima y mínima distancia de la partícula al origen de coordenadas.

Problema 5 (CERTAMEN 2 2019). Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ que satisface

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Demuestre que si (x_0, y_0) es un máximo local estricto de f, entonces todas las derivadas segundas de f se anulan en (x_0, y_0)

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 6. La función $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ se conoce como "la silla del mono"debido a su gráfica. Estudie la naturaleza de sus puntos críticos.

Problema 7. Se considera el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Se inscribe en el elipsoide una pirámide de base rectangular perpendicular al eje z. Hallar, mediante el Método de los Multiplicadores de Lagrange, el volumen máximo de una tal pirámide.

Indicación: *Considere que los cuatro vértices A, B, C, D de la base rectangular de una pirámide son los puntos del elipsoide de coordenadas (x,y,z), $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(-x,-y,z)$ respectivamente, con $(x,y,z) \in [0,a] \times [0,b] \times [-c,c]$ y que el quinto vértice es el punto de coordenadas $(0,0,c)$.*

Problema 8. Considere que la siguiente función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ defina por

$$f(x,y,z) = x^2z + y^2z + \frac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + \frac{2}{3}$$

modela la temperatura en el espacio.

1. Determine los puntos críticos de temperatura.

2. Clasifique dichos puntos críticos como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla, según corresponda.

3. Determine, si existen, los puntos de mayor o menor temperatura sobre el disco

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

justifique adecuadamente su existencia.

Indicación: *Puede ser útil considerar la función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = f(x,y,2)$, junto con los resultados de la parte **(8.1)** y **(8.2)** .*

Problema 9. Una compañia fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. Se ha estimado que la función que determina las perdidas al fabricar esos productos es:

$$f(x,y,z) = x^3 + 2yz.$$

Los compromisos que la compañía debe cumplir por contratos con otras firmas son:

$$x + y = \alpha$$

$$y + z = \beta$$

donde $\beta > 2\alpha > 0$ son dos parámetros reales positivos.

1. Calcule las producciones optimas x_0, y_0, z_0 que minimizan las perdidas, y los Multiplicadores de Lagrange λ_1, λ_2 asociados al problema.

2. Sea la función perdidas mínimas en términos de α y β: $\varphi(\alpha,\beta) = f(x_0,y_0,z_0)$. Pruebe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \lambda_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \lambda_2.$$

Problema 10 (Decisiones sobre inversiones en mano de obra y capital). Considere la siguiente definición.

Definición 1 (Función de Cobb-Douglas). En economía, la función de Cobb-Douglas es una función de producción usada para representar las relaciones entre un producto y las variaciones de los insumos trabajo y capital, de la forma:

$$u(x, y) = Ax^{\alpha} y^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0$$

- u: es la producción total.
- x: es el insumo de trabajo.
- y: es el insumo de capital.
- A: es el factor de productividad.
- α, β: son las constantes de elasticidades producto del trabajo y el capital respectivamente.

Una empresa desea elaborar una cantidad u unidades de producto, empleando x unidades de mano de obra e y unidades de capital, con 150 como factor de productividad y constantes de elasticidad de mano de obra y capital igual a 2/3 y 1/3 respectivamente. Los costos de mano de obra y capital por unidad son de \$30 y \$90 respectivamente y la empresa dispone de \$270000 para propósitos de producción.

1. Determine la función objetivo y la restricción.

2. Utilizando el Método de los Multiplicadores de Lagrange, determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar con objetivo de maximizar su producción.

3. Encuentre la cantidad máxima de unidades de producto.

Problema 11. Sea el problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \min & \langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{s. a} & \|\mathbf{x}\| = 1 \end{array}$$

Donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior usual de $\mathbb{R}^n$, y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana.

1. Demuestre que $\mathbf{x}^*$ es solución del diferencial de la función de Lagrange igual a cero, asociada al problema de minimización anterior, si y solo si, $\mathbf{x}^*$ es vector propio de $\mathbf{A}$.
Indicación: $\|\mathbf{x}\| = 1$ *es equivalente a* $g(\mathbf{x}) = 0$*, con* $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$, $g \in \mathbb{C}^1$.

2. Establezca una relacion entre los multiplicadores de Lagrange asociados al problema de minimización con restricciones y los valores propios de $\mathbf{A}$.

3. Determine los extremos relativos, y el mínimo global del problema de minimización.