UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201
9 de mayo de 2011
Duración: 1h 40min
Prof.: Anahí Gajardo

Evaluación 1

1. Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y un operador lineal $T : V \to V$, se define la siguiente relación en $\mathbb{K}[x]$:

$$p(x)\ R\ q(x) \Leftrightarrow p(T) = q(T)$$

   a) **(6 puntos)** Demuestre que R es una relación de equivalencia.

   b) **(14 puntos)** Sea $m(x)$ el polinomio minimal de T y $n = gr(m(x))$; considere la siguiente función:

$$\phi : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}[x]/R; \quad \phi(r(x)) = [r(x)].$$

   Demuestre que ϕ es biyectiva.

2. **(10 puntos)** Sea U un espacio vectorial de dimensión finita, sean T y L dos operadores lineales de U en U.

   Demuestre la siguiente equivalencia:

$$0 \text{ es valor propio de } T \circ L \Leftrightarrow 0 \text{ es valor propio de } L \circ T$$

3. **(10 puntos)** Sea U un espacio vectorial y T un operador lineal de espectro $\sigma(T)$. Determine una condición sobre el escalar α, en términos de $\sigma(T)$, para que el operador $I - \alpha T$ sea invertible.

4. **(20 puntos)** Considere el siguiente operador lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2y, 5x + 5y + z)$$

   a) Calcule los valores propios de T.

   b) Para cada valor propio λ de T y cada $k \in \mathbb{N}$, determine $E_k(\lambda)$.

   c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por elementos de los núcleos iterados de T y calcule la matriz representante de T respecto a esta base.

   d) Determine el polinomio minimal de T.

---

9 de mayo de 2011.
AGS/ags.