

Procesos Estocásticos : Listado 3

Nora Serdyukova

Universidad de Concepción

Outline

1 Listado 3

Outline

1 Listado 3

Problema

- ▶ Supongamos que el precio de un activo que transan en Bolsa de Santiago se mantiene constante mientras no ocurra algún evento que causa el cambio del precio (una rotura de stock).
- ▶ Podemos modelar el cambio en el precio como la multiplicación por un factor aleatorio. Es obvio que dicho factor toma valores no negativos, un valor entre cero y uno significarÃa una disminuci3n del precio, mientras los factores mayores de uno implican el aumento del precio.

Modelaremos este factor aleatorio como variables i.i.d.

exponencialmente con parÃmetro μ . AdemÃas, supongamos que el nÃmero de los eventos que causan el cambio en el precio sigue el modelo de proceso de Poisson con parÃmetro λ , independiente de las variables exponenciales que determinan el factor multiplicativo anteriormente mencionado.

- ▶ CÃlculen el precio esperado de dicho activo al instante t .

Solución

Sea S_t : precio del activo ;

N_t : núm. de eventos hasta el momento t .

Sea X_i : el i -ésimo factor multiplicativo.

$X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ y $\{N_t, t \geq 0\}$ es el proceso de Poisson de tasa λ .

Además,

$$\forall i \quad X_i \perp\!\!\!\perp \{N_t, t \geq 0\}.$$

Fijemos el precio inicial, de tal manera que al instante 0, $S_0 = s$, donde s es una constante. Cuando ocurre el primer evento que causa el cambio del precio, el nuevo precio

$$S_1 = X_1 S_0 = sX_1.$$

Solución. Cont.

Por lo tanto, al instante t , tenemos :

$$S_t = S_{t-1} X_{N_t} = S_0 \prod_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Obtuvimos, que $\forall t$ el precio

$$S_t = s \prod_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Nos piden calcular

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E} \left[s \prod_{i=1}^{N_t} X_i \right].$$

Solución. Cont.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t] &= s\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_t} X_i\right] \\&= s\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N_t} X_i \middle| N_t\right]\right] \\&= s\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X_1])^{N_t}\right] \\&= s\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)^{N_t}\right].\end{aligned}$$

Solución. Cont.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\mu} \right)^{N_t} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu} \right)^k P(N_t = k) \\&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu} \right)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\&= e^{\lambda t/\mu - \lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda t}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} e^{-\lambda t/\mu} \\&= e^{\lambda t(1/\mu - 1)}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}[S_t] = se^{\lambda t(1/\mu - 1)}.$$