

**Problema 1.** Considera el espacio  $V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}_1([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}$  y la familia de funciones techo  $B := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$  definidas en clase. Demuestra que  $B$  es una base de  $V_h$ .

*Demostración.* Sea ver que  $B$  es una base, es necesario probar

- $B$  es linealmente independiente. Sea  $\{\alpha_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i = \theta,$$

como  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$  se tiene que

$$0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Por tanto,  $B$  es linealmente independiente.

- $\langle B \rangle = V_h$ . Por doble inclusión

( $\subseteq$ ) Dado  $i \in \{1, \dots, d\}$  es inmediato notar que  $\varphi_i \in V_h$ . Luego, como  $V_h$  es un sub espacio vectorial, se tiene que  $\langle B \rangle \subseteq V_h$ .

( $\supseteq$ ) Dado  $v \in V_h$ , se define  $v_I$  como sigue

$$v_I = \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i$$

A continuación probaremos que  $v - v_I = \theta$  lo cual probaría la inclusión deseada. Dado  $j \in \{0, \dots, d\}$  se tiene

$$(v - v_I)(x_j) = v(x_j) - v_I(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i(x_j) = v(x_j) - \sum_{i=1}^d v(x_i) \delta_{ij} = v(x_j) - v(x_j) = 0$$

y como  $(v - v_I) \in \mathbb{P}[x_{j-1}, x_j]$  se deduce que necesariamente  $(v - v_I)(x) = 0$  para todo  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ . Como lo anterior es válido para todo  $j \in \{1, \dots, d+1\}$  se deduce que  $(v - v_I) = \theta$ , de esta forma

$$v = \sum_{i=1}^d v(x_i) \varphi_i$$

es decir,  $v \in \langle B \rangle$ . Lo cual prueba que  $\langle B \rangle \supseteq V_h$ .

Como ambas inclusiones se cumplen se deduce que  $\langle B \rangle = V_h$ .

Finalmente, se tiene que  $B$  es base de  $V_h$ . □

**Problema 2.** Considera la forma bilineal  $a(u_h, v_h) = \int_a^b u'_h v'_h dx$ , su matriz  $A$  asociada y el espacio  $V_h$  definido en el Problema 1.

- a) Sea  $u_h \in V_h$ . Sabemos que existen escalares  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  tales que  $v_h(x) = \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j(x)$ . Probar que  $\beta^t A \beta = \|v'_h\|_{L^2(a,b)}^2$ , donde  $\beta$  es el vector cuyos elementos son los coeficientes  $\beta_j$ .

- b) Demostrar que  $A$  es simétrica y definida positiva.

*Demostración.* a) Dados  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  tales que

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j(x), \quad \forall x \in (a, b). \tag{1}$$

De un calculo directo se tiene que

$$\|v'_h\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b v'_h v'_h dx = a(v_h, v_h)$$

usando (1) y que  $a$  es una forma bilineal se tiene

$$a(v_h, v_h) = a\left(\sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^d \beta_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^d \beta_j a\left(\sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \beta_j \beta_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^d \beta_j \sum_{i=1}^d \frac{a_{ij}}{h} \beta_i = \beta^t A \beta$$

b) Recordando que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es directo notar que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ . Por otro lado, dado  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)^t$  un vector no nulo de  $\mathbb{R}^d$  fijo pero arbitrario, se tiene que existe una función  $\omega_h \in V_h$  tal que

$$\omega_h = \sum_{i=1}^d \beta_i \varphi_i.$$

Luego, por a) se tiene que

$$\beta^t \mathbf{A} \beta = \|\omega_h'\|_{L^2(a,b)}^2 > 0.$$

Como lo anterior es válido para cualquier vector no nulo de  $\mathbb{R}^d$  se concluye que  $\mathbf{A}$  es definida positiva.  $\square$

**Problema 3.** Considera la ecuación

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + \omega u(x) = f(x), & x \in ]a, b[ \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0, \end{cases}$$

con  $f \in L^2(a, b)$ ,  $\omega$  y  $\kappa$  dados. Asuma que la función  $\kappa$  es continua y positiva en  $[a, b]$ , y  $\omega$  es un número positivo.

a) Deduzca una formulación variacional apropiada.

b) Demuestre que dicha formulación variacional posee solución única.

c) Escriba la formulación variacional discreta asociada considerando una partición uniforme  $\{x_i\}_{i=0}^{d+1}$  de tamaño  $h$ , del intervalo  $[0, 1]$  y el espacio

$$V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}.$$

d) Escriba el sistema lineal  $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$  asociado.

*Demostración.* a) Testeando la EDO con una función  $v \in H_0^1(a, b)$  se obtiene

$$-\int_a^b (\kappa(x)u'(x))' v(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx. \quad (\text{II})$$

Haciendo integración por partes al primer término del lado izquierdo de (II) y usando las condiciones de contorno se obtiene

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

De lo anterior se tiene la forma bilineal  $a : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y el funcional lineal  $F : H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por

$$a(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx$$

y

$$F(v) := \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

La linealidad de  $a$  y  $F$  es consecuencia directa de que la integral y la derivada son operadores lineales. Finalmente, el problema queda

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ a(u, v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

b) Para probar existencia unicidad se debe probar

i)  $a$  es una forma bilineal acotada.

Dados  $u, v \in V := H_0^1(\Omega)$ , luego

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b u(x)v(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b u'(x)v'(x)\kappa(x) dx \right| + \omega \left| \int_a^b u(x)v(x) dx \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\kappa\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq M \|u'\|_{L^2(a,b)} \|v'\|_{L^2(a,b)} + \omega \|u\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq M \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} + \omega \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)} \\ &\leq \max\{M, \omega\} \|u\|_{H^1(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Donde  $M$  resulta de usar el hecho que  $\kappa$  es continua en un compacto. Así,  $a$  es una forma bilineal acotada.

ii)  $a$  es coerciva.

Dado  $v \in V$ , luego

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_a^b v'(x)v'(x)\kappa(x) dx + \omega \int_a^b v(x)v(x) dx \\ &\geq m \int_a^b v'(x)v'(x) dx + \omega \int_a^b v(x)v(x) dx \\ &\geq \min\{m, \omega\} \|v\|_{H^1(a,b)}^2. \end{aligned}$$

Donde  $m$  resulta de usar el hecho que  $\kappa$  es continua en un compacto. Así  $a$  es coerciva.

iii)  $F$  es un funcional lineal y acotado.

Dado  $v \in V$ , luego

$$\left| \int_a^b f(x)v(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|v\|_{H^1(a,b)}$$

Así,  $F$  es un funcional lineal y acotado.

iv)  $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert.

Directo del hecho de que  $H_0^1(\Omega)$  es un subespacio cerrado de  $H^1(a, b)$ .

Finalmente como se cumplen las hipótesis del Lema de Lax-Milgram se deduce que

$$\begin{cases} \text{Existe un único } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que} \\ a(u, v) = F(v) \\ \text{para todo } v \in H_0^1(a, b). \end{cases}$$

y ademas,

$$\|u\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{1}{\min\{m, \omega\}} \|F\| \leq \frac{1}{\min\{m, \omega\}} \|f\|_{H^1(a,b)}.$$

c) Considerando la partición uniforme del enunciado y el espacio

$$V_h := \{v \in C(a, b) : v \in \mathbb{P}([x_{i-1}, x_i]), \text{ para } i = 1, \dots, d+1, v(a) = v(b) = 0\}.$$

Se tiene el problema discreto

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h) \\ \text{para todo } v_h \in V_h. \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, \varphi_j) = F(\varphi_j) \\ \text{para todo } j \in \{1, \dots, d\}. \end{cases} \quad (\text{III})$$

d) Usando que  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$  es una base de  $V_h$  se tiene que existe  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^t \in \mathbb{R}^d$  tal que

$$u_h = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi_i$$

insertando esto en (III) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j)$$

donde la incógnita es  $\alpha$  de esta forma la matriz  $A$  cumple que  $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  cuando  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ . Notando que  $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_{i+2}) = \emptyset$  se deduce que  $a_{i,i+l} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  con  $l > 1$ , de la misma forma se concluye que  $a_{i,i-l} = 0$ . Por otro lado, para el calculo de los demás coeficientes se procede como sigue

- Cálculo de  $a_{i,i}$  con  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) \\ &= \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) \kappa(x) dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) \kappa(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) \kappa(x) dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_i)^2}{h^2} dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} \kappa(x) dx + \frac{h}{3}\omega - \frac{h}{3}\omega \\ &\approx \frac{1}{h} \left[ \kappa \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \kappa \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

- Cálculo de  $a_{i,i+1}$  con  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ .

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ &= \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) \kappa(x) dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h^2} \kappa(x) dx + \omega \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_{i+1})}{h^2} dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x) dx - \frac{\omega}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x) dx - \frac{h\omega}{3} \\ &\approx \frac{-1}{h} \kappa \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \frac{h\omega}{3} \end{aligned}$$

- Cálculo de  $a_{i,i-1}$  con  $i \in \{2, \dots, d+1\}$ .

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) \kappa(x) dx + \omega \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h^2} \kappa(x) dx + \omega \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_i)(x_i - x)}{h^2} dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x) dx - \frac{\omega}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^2 dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa(x) dx - \frac{h\omega}{3} \\ &\approx \frac{-1}{h} \kappa \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) - \frac{h\omega}{3} \end{aligned}$$

Las aproximaciones al final se deben al hecho de que se uso la regla del punto medio elemental para aproximar las integrales de la función  $\kappa$ . Para determinar el vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  se procede de forma similar, dado  $j \in \{1, \dots, d\}$  luego

$$\begin{aligned} b_j &= F(\varphi_j) \\ &= \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\frac{x - x_j}{h}dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\frac{x_{j+1} - x}{h}dx \\ &\approx \frac{h}{2} \left[ f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

□