UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EB/JB/GD/CF/NH/RM/CM/MN/LP/JQ/MV

LISTADO 1 - NÚMEROS REALES

Cálculo I - 527140

1. Utilizando únicamente los axiomas de cuerpo en $\mathbb{R}$, demuestre que:

   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad -(a+b) = (-a)+(-b)$

   (c) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad (ab)+(a(-b)) = 0$

   (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (1-x)y + yx = y$

   (e) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$

   (f) $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

   Indicación: Si utiliza alguna propiedad diferente a los axiomas de cuerpo debe demostrarla previamente.

2. Justificar por qué los siguientes enunciados son falsos:

   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ (x+y)^3 = x^3 + y^3$

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ xy = 1 \to (x = 1 \vee y = 1)$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

3. Sean a, b, c y d números reales con $c \neq 0$. Mostrar que el inverso multiplicativo de $(a + c^{-1}d)$ es $c(ac+d)^{-1}$.

4. Verificar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que:

   (a) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 = xy$

   (b) $1 + x^4 = \left(1 + \sqrt{2}x + x^2\right)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right).$

5. Comprobar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1 = \left(1 + 3x + x^2\right)^2.$$

   Utilizando lo demostrado, calcular el valor de $\sqrt{2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 + 1}$.

6. Sean $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $a = \dfrac{x^n + x^{-n}}{2}$ y $b = \dfrac{x^n - x^{-n}}{2}$, determinar $a^2 - b^2$.

7. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones dadas en la variable $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $(x+1)^2 = (2x-3)^2$

   (b) $x^4 + 7x^2 = -12$

   (c) $x^2 = 8(x-2)$

   (d) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{6x-4}{x^2-5x+6} = 0$

   (e) $\dfrac{5x+8}{3x+4} = \dfrac{5x+2}{3x-4}$

   (f) $\dfrac{3}{x-4} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{8}{x^2-7x+12}$

   (g) $\dfrac{(3x-1)^2}{x-1} = \dfrac{18x-1}{2}$

   (h) $(x^2+x+1)(x-2)(x^2+3x-4) = 0$

   (i) $\dfrac{a+b-x}{x^2} = \dfrac{a^2-b^2}{x^3} - \dfrac{1}{x}$

(j) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-b)x-ab}\cdot\dfrac{x+b}{x-b}=4$

8. Si $x=5$ en la expresión siguiente, encontrar el valor de $a\in\mathbb{R}$:

$$\frac{3x-a}{x-a}+\frac{x-a}{3x-a}=\frac{10}{3}.$$

9. Sean m,n,k números reales. Encontrar la solución de la ecuación en la variable $x\in\mathbb{R}$, dada por $(x-m)(x-n)=k^2$ y mostrar que está en los números reales.

10. En la ecuación $km^2+10m=8$ una solución es $m=4$. Encontrar el valor de k y la otra solución, si existe.

11. Resolver:

    (a) Hallar un número entero sabiendo que la suma con su inverso multiplicativo es $\dfrac{26}{5}$

    (b) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Hallar la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

    (c) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años ¿Qué edad tiene Pedro ahora?

    (d) El producto de dos números es -27 y la suma de estos es 6. Hallar dichos números.

12. Determine (si es posible) el o los valores de $m\in\mathbb{R}$, de modo que la ecuación de variable $x\in\mathbb{R}$

$$x^2-2(m-5)x+m^2-1=0\ ,$$

tenga dos soluciones reales y distintas.

13. Dada la ecuación (en la variable x) $5x^2-3x+c=0$, determinar las condiciones que debe cumplir $c\in\mathbb{R}$ para cada uno de los siguientes casos: que haya dos soluciones reales distintas, dos reales e iguales, y que no haya solución real.

14. Para cada uno de los siguientes casos, encontrar (si es posible) el valor de $m\in\mathbb{R}$ tal que:

    (a) en la ecuación $2x^2+x-18=mx$ la suma de las soluciones sea cero.

    (b) en la ecuación $2x^2-mx+m=0$ las soluciones sean reales e iguales.

15. Demuestre las siguientes consecuencias de los axiomas de orden.

    (a) $\forall a,b\in\mathbb{R}^+ : a>b \Longrightarrow a^2>b^2$

    (b) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+ : 3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$

    (c) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+ : \dfrac{1}{9x^2+y^2}\leq\dfrac{1}{6xy}$

    (d) $\forall\, a\in\mathbb{R}^+ \ : \ a+\dfrac{1}{a}\leq a^3+\dfrac{1}{a^3}$

    (e) $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$: $a<b\Longrightarrow a<\dfrac{a+b}{2}<b$

(f) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

(g) $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$: $x^2+y^2 > 2xy$

(h) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+$: $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

(i) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+$: $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b) \geq 4$

16. Para $x \in \mathbb{R}$, determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) $\dfrac{2}{x} < 1$

(b) $x^2+4x-5>0$

(c) $-x+3 \leq 2x-1 \leq x$

(d) $\dfrac{x}{2-4x} \leq \dfrac{5}{6}$

(e) $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x}{3x-1}$

(f) $\dfrac{2x}{1-x} > \dfrac{x}{x+7}$

(g) $\dfrac{x^3+1}{x+1} < 0$

(h) $\dfrac{x^2+4}{-x} < 0$

(i) $\dfrac{4-x^2}{x} < 0$

(j) $\dfrac{3x+1}{1-x} > x$

(k) $-1 < \dfrac{1}{x+5} < 3$

(l) $x \leq x^2$

(m) $\dfrac{x+1}{x-3} \leq \dfrac{x}{x+2}+1$

(n) $\dfrac{x^3-2}{x^2+1} < \dfrac{x^3-4}{x^2+2}$

(o) $1 \leq \dfrac{x^2}{x-1} \leq 6$

(p) $\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+2x+1} < 3$

(q) $-\dfrac{2}{x+1} > x$

(r) $\dfrac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$

17. Resolver para $x \in \mathbb{R}$:

(a) $|8x-4| = |x|$

(b) $|4x| = x-1$

(c) $|x^2+6x+1| = 6$

(d) $|2x+3|+4=5x$

(e) $|x+1|+|x-2|=3$

(f) $x^2-2|x|-3=0$

(g) $|x+3| = |5-7x|$

18. Resolver para $x \in \mathbb{R}$ cada una de las siguientes inecuaciones. Además, determinar el ínfimo, supremo, máximo y mínimo (si existen) de los respectivos conjuntos solución:

(a) $|x-4| < \dfrac{1}{2}$

(b) $|x-5| > -4$

(c) $|x|+|x+1| \leq 2$

(d) $\left|\dfrac{x}{|x+2|-1}\right| \geq 1$

(e) $\left|\dfrac{2x-3}{x+2}\right| < \dfrac{1}{4}$

(f) $||x-5|-|x+2|| < |x|$

(g) $\left|\dfrac{2-3x}{x+4}\right| \geq \dfrac{1}{5}$

(h) $|x-1| > |x+1|$

(i) $|3x-2|-2|x-3| < 5$

(j) $|x-|x-1|| > 4$

(k) $1 < |x-3| < 5$

(l) $\dfrac{x^2+x+1}{-2|x+3|} \leq 0$

(m) $|x-4|-|x+5| \leq |x-1|$

(n) $\dfrac{3}{|x-5|-x} < x$

(o) $||x-5|-|x+4|| \leq |x-3|$

19. Resolver para $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{x} = 2 - x$

(b) $\sqrt{x^2 - 1} = x - 2$

(c) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$

(d) $\sqrt{x - 12} < \sqrt{x^2 - 6x}$

(e) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 1} \geq \sqrt{3x}$

(f) $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + 6} \geq \sqrt{x}$

(g) $\sqrt{x^2 - 1} < x + 2$

(h) $\sqrt{(x + 3)(x + 2)} < x + 4$

(i) $\sqrt{4 - x} - 1 > \sqrt{1 - x}$

(j) $\sqrt{x + 2} \geq 2 - x$

(k) $\sqrt{-1 - 2x} < x + 2$

(l) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} < 5$

(m) $\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}} < 1$

(n) $\dfrac{(x^2 + 1)\sqrt{x - 1}}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$

(o) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \leq 0$

(p) $\sqrt{1 - x} < x$