Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº1: Lógica y Conjuntos
Clase N°8 - 28/03/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Ejemplos

Considere los siguientes subconjuntos del universo de los números naturales menores o iguales que 10:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 2 \vee x^2 - 1 = 0\}$$
$$B = \{2k + 1 \in \mathbb{Z} : k \in \{-1, 0, 1, 2\}\}$$
$$C = \{y \in \mathbb{N}_{\leq 15} : y \text{ es un número par} \wedge y \text{ es potencia de } 2\}$$
$$D = \{b \in \mathbb{R} : (b^3 - 1)(b - 2) = 0\}$$
$$E = \{2z \in \mathbb{Z} : z^2 - 5z + 4 = 0\}$$

Determine los siguientes conjuntos:

(a) $A \cup B$ (b) $(C \cap E) \cup B$ (c) $E \cap A$

(d) $B - C$ (e) $C - (E \cup A)$ (f) $B \cap E$

Conjuntos

Definición

La **cardinalidad de un conjunto** A cualquiera, se define como la cantidad de elementos que posee y se puede denotar por $|A|$, $\text{card}(A)$ o $\#A$.

Ejemplos

Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : (x^2 + x + 1)(-x^2 - x + 2) = 0\}$

Ejemplos

Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : (x^2 + x + 1)(-x^2 - x + 2) = 0\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \vee |y + 2| = 6\}$

(c) $C = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \wedge |y + 2| = 6\}$

Ejemplos

Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : (x^2 + x + 1)(-x^2 - x + 2) = 0\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \vee |y + 2| = 6\}$

(c) $C = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \wedge |y + 2| = 6\}$

(d) $D = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : |X| \leq 1\}$

Ejemplos

Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : (x^2 + x + 1)(-x^2 - x + 2) = 0\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \vee |y + 2| = 6\}$

(c) $C = \{y \in \mathbb{Z} : |2y| \leq 4 \wedge |y + 2| = 6\}$

(d) $D = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : |X| \leq 1\}$

(e) $E = \{X \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : |X| \leq 1\}$

(f) $F = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : 2 \in X\}$

(g) $G = \{x_k \in \mathbb{N}_{<20} : k \in \mathbb{N}\}$, donde

$$x_k = \begin{cases} 2 & , k = 1 \\ 1 + (k-1)x_{k-1} & , k \in \mathbb{N}_{\geq 2} \end{cases}$$

Conjuntos y Técnicas de Conteo

Principio de conteo I: conjuntos disjuntos

Si A y B son dos conjuntos disjuntos, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Conjuntos y Técnicas de Conteo

Principio de conteo I: conjuntos disjuntos

Si A y B son dos conjuntos disjuntos, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Principio de conteo II: conjuntos no disjuntos

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ejemplos

En una encuesta que se realizó a 60 estudiantes de primer año de la Facultad de Cíencias Físicas y Matemáticas, se encontró que 25 de ellos leen revistas de política, 26 leen revistas científicas y 26 leen revistas de entretenimiento. Se determinó además, que 9 estudiantes leen revistas políticas y de entretenimiento, 11 leen revistas de políticas y científicas, 8 leen revistas científicas y de entretenimiento y 8 no leen ninguna de las tres revistas mencionadas.

(a) Determine el número de estudiantes que leen los tres tipos de revistas.

(b) Determine el número de estudiantes que leen solo un tipo de revistas.

Ejemplos

En un estudio de mercado se encuestaron a 800 familias chilenas y se obtuvo la siguiente información:

- 500 poseen televisor
- 430 poseen lavadora
- 280 poseen automóvil
- 130 poseen sólo televisor
- 100 posee lavadora y automóvil
- 80 poseen televisor y automóvil
- 50 poseen televisor, lavadora y automóvil.

Determine cuántas familias poseen:

(a) Sólo lavadora.

(b) No poseen ninguno de los bienes.

(c) Sólo televisor y lavadora.

Ejemplos

De un grupo de 80 personas se desea saber cuáles de los siguientes canales de televisión ven; Fox, HBO o Discovery Channel. Se sabe que 50 ven el canal Fox, 25 ven el canal HBO, 15 ven Discovery Channel y que 5 personas ven los tres canales. Si todas las personas ven por lo menos uno de los tres canales indicados. ¿Cuántas personas ven Fox y HBO?, ¿cuántas ven solamente Fox? y ¿cuántas ven solamente HBO?

Ejemplos

En una ciudad se quiere ofrecer tres tipos de talleres abiertos a toda la comunidad, un taller de deportes, otro de manualidades y otro de música. Se realiza una encuesta para determinar las preferencias de los habitantes, aplicando esta encuesta a 30.000 personas y se obtiene que: a 6500 les interesa el taller de deportes, a 5880 les interesa el taller de manualidades y a 4800 les interesa el taller de música. Además, a los que les interesa sólo el taller de deportes y manualidades son 680; a los que les interesa sólo el de deportes y música son 1.200; y los interesados sólo en el de manualidades y música son 880. Si a 16.720 no les interesa ninguno de los talleres, ¿cuántos están interesados en los tres talleres?

Ejemplos:

La Facultad de Ingeniería realiza una encuesta a 400 alumnos de primer año sobre el electivo que les gustaría cursar entre Matemática Computacional, Lógica Matemática y Resolución de Problemas. 40 prefieren aprender Lógica Matemática, pero no Resolución de Problemas. 26 prefieren aprender Lógica Matemática y Resolución de Problemas, pero no Matemática Computacional. A 136 estudiantes les interesaría aprender Lógica Matemática, 276 Resolución de Problemas y 320 Matemática Computacional. A 240 de ellos les interesaría aprender Matemática Computacional y Resolución de Problemas. Y a 30 estudiantes les gustaría aprender Lógica Matemática y Matemática Computacional, pero no Resolución de Problemas. ¿Cuántos estudiantes solo quieren cursar dos de los electivos?

Solución

Primero debemos definir los conjuntos que están involucrados en el problema, como sigue:

$$\begin{aligned} U &= \{x : x \text{ alumno de primer año de Fac. Ing.}\} \\ M &= \{x \in U : x \text{ les gustaría cursar Mat. Com.}\} \\ L &= \{x \in U : x \text{ les gustaría cursar Log. Mat.}\} \\ R &= \{x \in U : x \text{ les gustaría cursar Res. Prob.}\} \end{aligned}$$

luego, de acuerdo con la información, se tiene:

$$|U| = 400,\ |L - R| = 40,\ |(L \cap R) - M| = 26,\ |L| = 136$$
$$|R| = 276,\ |M| = 320,\ |M \cap R| = 240 \text{ y } |(L \cap M) - R| = 30$$

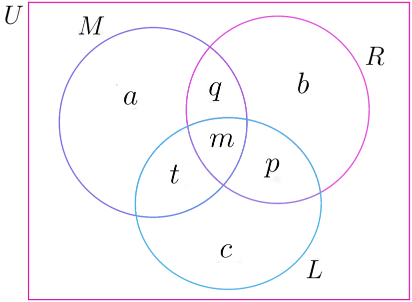
dado lo anterior, **NO** podemos asegurar que:

$$|U| = |L \cup R \cup M| = 400$$

Solución

realizando el diagrama, podemos estipular que:

$$|L - R| = t + c = 40, \ \ |(L \cap R) - M| = p = 26,$$
$$|M \cap R| = q + m = 240, \ \ |(L \cap M) - R| = t = 30$$



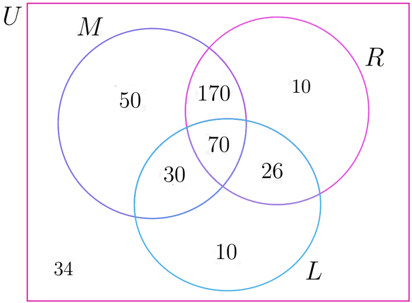
Solución

Así, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&t = 30, \;\; c = 10, \;\; p = 26, \\
&|L| = 136 = c + t + p + m \Leftrightarrow m = 136 - 30 - 10 - 26 = 70 \\
&|M \cap R| = 240 = m + q \Leftrightarrow q = 240 - 70 = 170 \\
&|M| = 320 = a + q + t + m \Leftrightarrow a = 320 - q - t - m = 50 \\
&|R| = 276 = q + p + m + b \Leftrightarrow b = 276 - q - p - m = 10 \\
&|(L \cup R \cup M)^c| = 34
\end{aligned}
$$

Solución

Dado lo anterior, se tiene:



Por lo tanto, las personas que solo prefieren cursar dos electivos, está dado por:

$$q + p + t = 170 + 26 + 30 = 226$$