Clase 7: Teorema del cambio de variable

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Teorema Fundamental del Cálculo

Observación general

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y F es una antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F|_a^b = F(b) - F(a)$$

Luego, TODOS los métodos de integración aprendidos para integrales indefinidas son aplicables en las integrales definidas.

Ejemplo

Integral definida

Calcular

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Hacemos $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$.

Luego,

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Y por tanto,

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \left(\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

En ocasiones, puede resultar conveniente resolver integrales definidas haciendo uso del siguiente resultado:

Teorema 7.1

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con g' continua. Si f es continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Teorema del cambio de variable

Demostración: Si F una antiderivada de f entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Pero, $F(u)\big|_{g(a)}^{g(b)} = \displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ y hemos terminado. $\square$

Teorema cambio de variable

Ejemplo 1

Calculemos la integral integral del ejemplo previo, haciendo uso del Teorema 7.1.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Solución: Hacemos $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$.

Luego,

- Cuando $x = -1$, se tiene que $u = (-1)^3 + 1 = 0$
- Cuando $x = 1$, se tiene que $u = 1^3 + 1 = 2$

Así, nos queda

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_{0}^{2} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\,|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Teorema cambio de variable

Ejemplo 2

Sea $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sabiendo que

$$\int_2^4 f(x)\,dx = 12,$$

determine el valor de la integral definida

$$\int_1^5 \frac{f(\sqrt{3t+1})}{\sqrt{3t+1}}\,dt$$

Invarianza bajo traslación

Aplicación

Las integrales definidas son invariante bajo traslaciones horizontales.

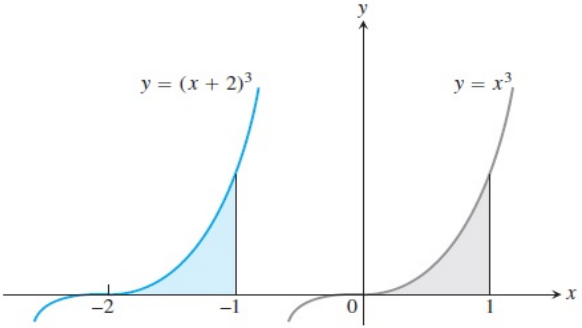
Teorema 7.2

Si f es una función continua en $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrario, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Idea geométrica (Ejemplo):

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3 \, dx = \int_0^1 x^3 \, dx$$

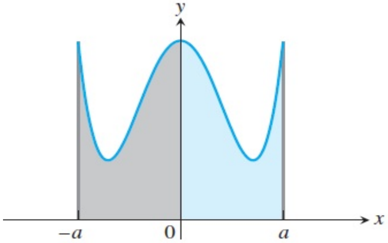


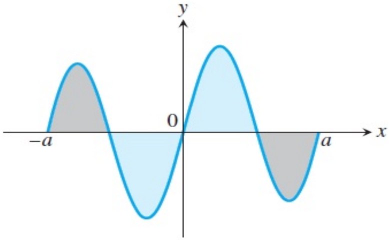
Teorema 7.3

Sea f continua en el intervalo $[-a, a]$, luego las siguientes son ciertas:

i. Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

ii. Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$





Ejercicios

Sea $a > 0$ y f continua en $[0, a]$.

1. Utilice una sustitución adecuada para mostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\, dx = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u) + f(a-u)}\, du$$

2. Ocupe 1. para mostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\, dx = \frac{a}{2}$$

(lo sorprendente es que esto sucede cualquiera sea la función f).

3. Usando 2. calcule

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^4}\, dx$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+6}}$
4. $\displaystyle\int_2^5 \arctan(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2e^{2x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x+1}{x^2-4}\,dx$