Existencia y unicidad de soluciones

Carlos M. Mora

Existencia y unicidad de soluciones de una EDO lineal

Suponga que

- $a_1, a_2, \ldots, a_n, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Entonces,
para cada $x_0 \in]\alpha, \beta[$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y^{(n)}(x) + a_1(x)\, Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, Y'(x) + a_n(x)\, Y(x) = g(x) & \forall x \in]\alpha, \beta[\\ Y(x_0) = y_0,\ Y'(x_0) = y_1, \ldots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} & \end{array} \right.$$

tiene una única solución definida en todo el intervalo $]\alpha, \beta[$.

Ejemplo

$$x^2\, Y''(x) - xY'(x) + Y(x) = 0$$

Forma normal:

$$Y''(x) - \frac{1}{x} Y'(x) + \frac{1}{x^2} Y(x) = 0$$

Como $x \mapsto -\frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ y $x \mapsto 0$ son funciones continuas en $]-\infty, 0[$ y en $]0, +\infty[$,

$$\begin{cases} x^2\, Y''(x) - xY'(x) + Y(x) = 0 \\ Y(x_0) = y_0 \\ Y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

- Si $x_0 \in]-\infty, 0[$, el PVI anterior tiene una única solución definida en todo $]-\infty, 0[$.
- Si $x_0 \in]0, +\infty[$, el PVI anterior tiene una única solución definida en todo $]0, +\infty[$.

Existencia y unicidad de soluciones de una EDO lineal

Suponga que $a_1, a_2, \ldots, a_n, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Entonces, para cada $x_0 \in]\alpha, \beta[$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y^{(n)}(x) + a_1(x)\, Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, Y'(x) + a_n(x)\, Y(x) = g(x) & \forall x \in]\alpha, \beta[\\ Y(x_0) = y_0,\ Y'(x_0) = y_1, \ldots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} & \end{cases}$$

tiene una única solución definida en todo el intervalo $]\alpha, \beta[$.

Ejemplo

Considere

$$\begin{cases} Y^{(n)}(x) + a_1 Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} Y'(x) + a_n Y(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ Y(x_0) = y_0,\ Y'(x_0) = y_1, \ldots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} & \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Entonces este problema de Cauchy tiene una única solución definida en todo el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

¿Cuándo son LD dos soluciones de una EDO lineal de orden 2?

Supongamos que $f_1, f_2 :]a, b[\to \mathbb{R}$ satisfacen

$$Y''(x) + p(x)\,Y'(x) + q(x)\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in]a, b[\,,$$

donde $p, q :]a, b[\to \mathbb{R}$ y $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ son funciones continuas. Si $W[f_1, f_2](x_0) = 0$ para algún $x_0 \in]a, b[$, entonces f_1, f_2 son linealmente dependientes.

Ya que $\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$, existe $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq 0$ tal que $\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Definamos $Z(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$. Entonces $Z(x_0) = Z'(x_0) = 0$. Luego $Z(x_0)$ satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y''(x) + p(x)\,Y'(x) + q(x)\,Y(x) = 0 & \forall x \in]a, b[\\ Y(x_0) = Y'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aplicando el teorema de existencia y unicidad obtenemos que la solución de (1) es única. Como $Y(x) = 0$ es solución de (1), $Z(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$. O sea

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \qquad \forall x \in]a, b[\,.$$

Solución general de una EDO lineal de orden n homogénea

Considere la EDO

$$Y^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y'(x) + a_n(x)\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]\alpha,\beta[\qquad (2)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, g :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Un conjunto de n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linealmente independientes de (2) es llamado sistema fundamental de soluciones de (2).

Asumamos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (2). Entonces, para toda solución de (2) existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$Y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x).$$

El conjunto de todas las soluciones de (2) forma un subespacio vectorial. La dimensión de este subespacio es n. En efecto, considere una solución cualquiera $Y(x)$ de (2). Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ las soluciones de los problemas de valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} Y_k^{(n)}(x) + a_1(x)\,Y_k^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,Y_k'(x) + a_n(x)\,Y_k(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]\alpha,\beta[\\ Y_k^{(k-1)}(x_0) = 1 \text{ y } Y_k^{(j)}(x_0) = 0 \text{ si } j \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{k-1\} \end{cases}$$

con $k = 0, \ldots, n-1$. Entonces $Y_1, \ldots, Y_n$ son LI y El teorema de EyU asegura que

$$Y(x) = Y(x_0)\,Y_1(x) + Y'(x_0)\,Y_2(x) + \cdots + Y^{(n-1)}(x_0)\,Y_{n-1}(x).$$