UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

PROCESOS ESTOCÁSTICOS - TAREA 2

Daniela Lefimil, Vicente Marchant, Vicente Márquez
Fecha de entrega: 12/07/2020

Problema 1: Un combate naval entre barcos A, B y C se desarrolla de la siguiente manera: En cada unidad de tiempo y simultaneamente cada barco hace un disparo. A, tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de alcanzar su blanco, B tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ y C probabilidad $\frac{1}{4}$ y cada barco elige como blanco al más preciso de sus adversarios presentes. Un solo impacto basta para hundir al barco alcanzado y el combate continúa mientras haya más de un barco en acción.
Plantee la cadena de Markov que describe la evolución de la batalla.

Solución:
Para describir la Cadena de Markov que describe la evolución de la batalla consideraremos como conjunto de estados a $E = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C, \phi\}$ donde, BC significa que sólo quedan en la batalla los barcos B y C. ϕ significa que no queda ningún barco a flote. Llegar a A, B ,C o ϕ significa se termina la batalla. Este estado lo llamaremos como X. Note que nunca se puede llegar al estado AB pues si están en combate A y B también estará C pues a C no le disparan mientras queden A y B. Así, nuestro nuevo conjunto de estados es el conjunto $E = \{ABC, AC, BC, X\}$ y además la distribución inicial $(p_i^{(0)})_{i\in E} = (1, 0, 0, 0)$.
Las probabilidades de transición son:

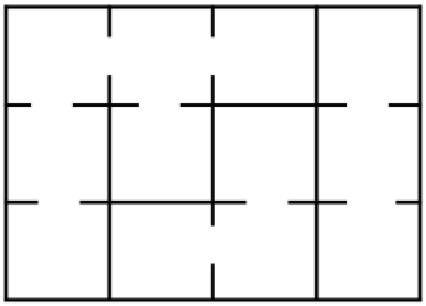
- $p_{ABC,ABC}$ =(Prob. falle A)×(Prob. falle B)×(Prob. falle C)= $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$
- $p_{ABC,AC}$ =(Prob. acierte A)×(Prob. falle B)×(Prob. falle C)= $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$
- $p_{ABC,BC}$ =(Prob. falle A)× (Prob. acierte B o C)=(Prob. falle A)×(1-Prob. fallen B y C)=$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$
- $p_{ABC,X}$ =(Prob. hunda A y B)=(Prob. acierte A)×(Prob. acierte B o C)=$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$
- $p_{AC,ABC} = 0$
- $p_{AC,AC}$ =(Prob. falle A)×(Prob. falle C)= $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$
- $p_{AC,BC} = 0$
- $p_{AC,X} = p_{AC,A} + p_{AC,C} + p_{AC,\phi}$ =(Prob. acierte A)×(Prob. falle C)+(Prob. falle A)×(Prob. acierte C)+(Prob. acierte A)×(Prob. acierte C)= $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$
- $p_{BC,ABC} = 0$
- $p_{BC,AC} = 0$
- $p_{BC,BC}$ =(Prob. falle B)×(Prob. falle C)= $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
- $p_{BC,X} = p_{BC,B} + p_{BC,C} + p_{BC,\phi}$ =(Prob. acierte B)×(Prob. falle C)+(Prob. falle B)×(Prob. acierte C)+(Prob. acierte B)×(Prob. acierte C)= $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $p_{X,ABC} = 0$
- $p_{X,AC} = 0$
- $p_{X,BC} = 0$

- $p_{X,X} = 1$

Así, la matriz de transición queda definida como:

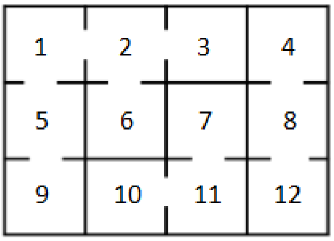
$$(p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2: Se induce un ratón en una celda elegida al azar del siguiente laberinto.



El ratón se va trasladando aleatoriamente desde cada celda a una de las contiguas. Plantee la cadena de Markov que describe la posición del ratón después de cada cambio.
Halle los subconjuntos cerrados e irreducibles e indicar a qué corresponden sobre el propio laberinto.

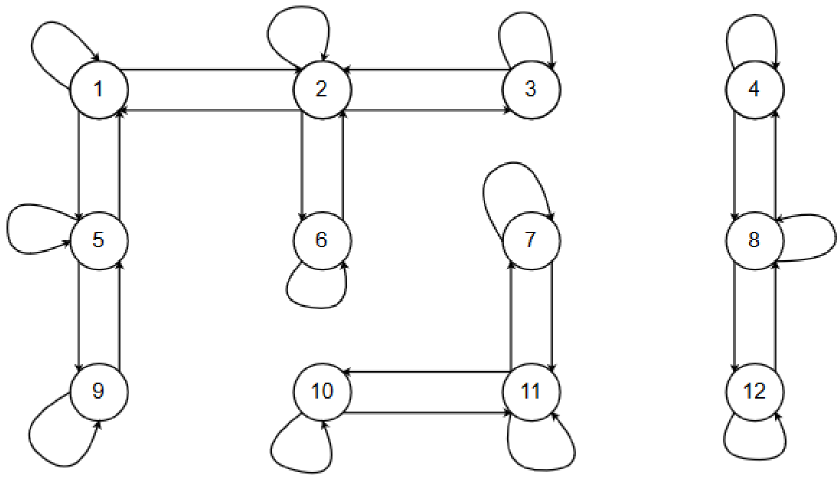
Solución: Consideramos 12 estados posibles donde puede estar el ratón, correspondiente a cada celda del laberinto:



Así, podemos formar la matríz de transición $P = (p_{i,j}) \in \mathbb{R}^{12\times 12}$, con $p_{i,j}$ la probabilidad de que el ratón se mueva de la celda i a la j.

$$P = \begin{pmatrix}
1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2
\end{pmatrix}$$

De lo anterior, notemos que la matriz de transición no es irreducible, puesto que $p^n_{14} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ahora, notemos que el ratón puede cambiar de celda o mantenerse en la celda en la que está, así, el grafo de la cadena de Markov descrita, está dado por:



A partir del grafo anterior, se identifican los siguientes conjuntos de estados cerrados (los que forman subcadenas),

$$S_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}, \quad S_2 = \{4, 8, 12\}, \quad S_3 = \{7, 10, 11\}$$

Además, los subconjuntos S_1, S_2 y S_3 son irreducibles, como se puede ver tanto en el grafo como en las matriz de transición. Esto, debido a que dentro de cada subconjunto los estados se comunican entre sí.