

OPTIMIZACIÓN III (525551)

Pauta Tarea 4

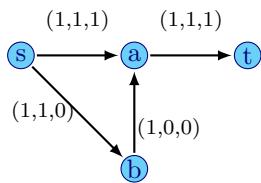
P1) (20 Ptos) Sea (G, s, t, c, w, f_0) una instancia dada del PFCM. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

- Si f^* es un flujo óptimo que es solución del PFCM con la instancia dada y G^0 el subgrafo obtenido de la red residual G_{f^*} por considerar sólo los arcos con costo residual igual a cero, entonces hay otra solución óptima al problema dado si y sólo si G^0 tiene un ciclo.
- Si f^* es un flujo óptimo que es solución del PFCM con la instancia dada, entonces f^* es también solución óptima del PFCM, considerando ahora que las capacidades superiores de cada arco es igual al valor de $2f^*$.
- El Problema del Camino Más Corto (PCC) con pesos no negativos puede ser modelado matemáticamente como un Problema de Flujo de Costo Mínimo (PFM).
- Las soluciones óptimas del PFPM con la instancia dada no cambian si al costo de cada arco se le suma un mismo valor positivo.

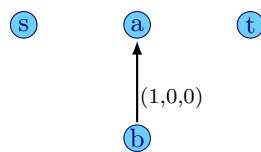
Soln:

- (Falso) En la siguiente red se muestra un flujo óptimo f que es solución del PFPM con la instancia dada por la red de abajo, con $f_0 = 1$ y $w(f) = 2$, y tal que G^0 no tiene un ciclo. Sin embargo, el flujo f' dado por: $f'(s, a) = 0$, $f'(s, b) = f'(b, a) = f'(a, t) = 1$ es también óptimo y diferente de f .

$(G, c, w, f) :$



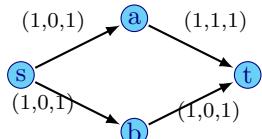
$G^0 :$



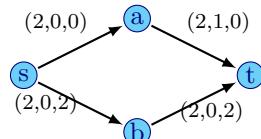
- (Falso) En la siguiente red se muestra un flujo óptimo f^* que es solución del PFPM con la instancia dada por la red de abajo, con $f_0 = 2$ y $w(f) = 1$. Sin embargo si ahora las capacidades de cada arco son $c'(u, v) = 2f^*(u, v) = 2$, entonces f^* no es óptimo, pues en este caso el flujo f' definido por: $f'(s, b) = f'(b, t) = 2$ y $f'(s, a) = f'(a, t) = 0$

verifica que $Val(f') = Val(f^*) = f_0 = 2$ y $w(f') = 0 < w(f^*) = 1$.

$(G, c, w, f) :$



$(G, c', w, f') :$



c) (Verdadero)

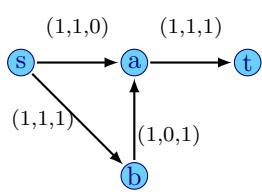
El PCC definido en clase, consiste en determinar un camino de peso mínimo (cuando existe) desde s a cualquier otro vértice de G . Como por hipótesis los pesos son no negativos, entonces si existe un camino de s a v en G , existirá también un camino de peso mínimo de s a v en G .

Para mostrar que PCC puede ser modelado como un PFCM, veremos primero que el problema de dada una red $G = (V, A)$, una función de costo o peso $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ y $s, v \in V$ fijos, encontrar un camino de peso mínimo de s a v puede ser modelado como un PFCM con instancia $(G' = (V \cup \{t\}, A \cup \{(v, t)\}), s, t, c = 1, w, f_0 = 1)$, donde el arco nuevo (v, t) tiene peso igual a cero. Así, los arcos con flujo entero igual a uno define el camino de s a t y por lo tanto un camino de s a v .

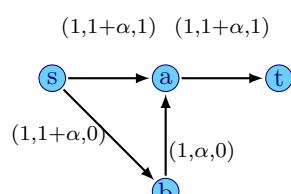
En el caso general, es decir de encontrar los caminos mínimos de s a v para todo $v \in V, v \neq s$ es suficiente definir tantas copias la red anterior como vértices tenga G distintos de s y agregar un nuevo vértice s' que estará conectado a cada vértice s de las copias de las redes realizadas mediante arcos de capacidad uno y peso cero. Además, cada vértice t debe estar unido, mediante un arco de capacidad uno y peso cero, a un nuevo vértice sumidero t' . El valor del flujo f_0 en este caso es igual a $|V| - 1$. No es difícil ver que una solución óptima al PFCM con esta instancia dará una solución óptima al PCC y viceversa (ejercicio).

d) (Falso) En la siguiente red, descrita también en a), se muestra un flujo óptimo f que es solución del PFCM con la instancia dada con $Val(f) = f_0 = 1$ y $w(f) = 2$. Sin embargo, si definimos $w' := w + \alpha$, $\alpha > 0$, entonces el flujo f deja de ser óptimo, pues en este caso el flujo dado por: $f'(s, a) = 0$, $f'(s, b) = f'(b, a) = f'(a, t) = 1$ verifica que $Val(f') = Val(f) = 1$ y $w'(f') = 2 + 2\alpha < w'(f) = 2 + 3\alpha$.

$(G, c, w, f) :$



$(G, c, w', f') :$



P2) Modele cada uno de los siguientes problemas como un problema de flujo de los vistos en clases, y sugiera una forma de resolverlos en tiempo polinomial.

a) (20 Ptos) Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con $|A| \geq 2$, fuertemente conexo, y $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función de costo. Un circuito $C : u_1, u_2, \dots, u_r, u_1$ en G es un camino cerrado en G con posibles repeticiones de nodos. El Problema del Circuito

Euleriano (PCE) consiste en determinar un circuito en G que contenga todos sus arcos y con el menor costo posible.

- b) (20 Ptos) Un comerciante tiene el siguiente problema. En cada uno de los siguientes cuatro años, puede comprar, vender o guardar para una posterior venta una cierta mercancía, sujeto a las siguientes restricciones: en cada periodo i puede comprar a lo más α_i unidades del producto o puede conservar a lo más β_i unidades para el siguiente periodo y debe vender al menos γ_i unidades. Asumiendo que p_i, w_i y s_i denotan el costo por unidad de comprar, guardar y vender el producto, respectivamente. ¿Qué política debe adoptar el comerciante para maximizar la utilidad en los siguientes cuatro años?

Soln:

- a) Notar primero que como G es fuertemente conexo, entonces siempre existe un circuito que contiene todos los arcos posibles. En efecto si denotamos $A = \{a_1 = (u_1, v_1), \dots, a_m = (u_m, v_m)\}$, entonces para todo $j = 1, \dots, m$ existe un camino P_j de v_j a u_{j+1} con $u_{m+1} \equiv u_1$. Luego, $C : u_1, P_1, u_2, \dots, u_m, P_m$ es un circuito en G que contiene todos sus arcos, con posibles repeticiones de éstos o de vértices. Luego, como todos los pesos son no negativos, entonces siempre habrá solución al problema planteado.

Para encontrar un óptimo de PCE con la instancia dada, podemos modelarlo como un Problema de Circulación de Costo Mínimo (PCCM) con instancia (G, l, c, w) , donde $G = (V, A)$ es el digrafo dado, $l(u, v) = 1, \forall (u, v) \in A$ y $c(u, v) = \infty, \forall (u, v) \in A$.

De esta forma, si C es un circuito que contiene todos los arcos de G , entonces definiendo $\forall (u, v) \in A, f(u, v)$ igual al número de veces que aparece (u, v) en C , es fácil ver que f es una circulación en G . Si además C es de costo mínimo, entonces f será una circulación de costo mínimo. Por otro lado, si f es una circulación de costo mínimo, entonces podemos generar un circuito en G de costo mínimo. Para ello se usa el resultado de la P1 de la Tarea 3 que dice que los arcos por donde pasa flujo (en este caso todos) se pueden particionar en ciclos y como el digrafo es fuertemente conexo, entonces es posible recorrer todos los ciclos como un circuito (ejercicio)

Por último, como las capacidades pueden considerarse enteras, entonces podemos usar algunos de los algoritmos vistos en clases para resolver el problema de PCCM y de esta forma encontrar una solución óptima al problema PCE en tiempo polinomial.

- b) Para resolver este problema en tiempo polinomial lo modelaremos como un PCCM. Para ello, supongamos que el comerciante antes del año 1 y después del año 4 no tiene mercancía. Definamos entonces la instancia (G, l, c, w) por: $G = (V, A)$ con $V = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$,
 $A = \{(s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, t), (2, t), (3, t), (4, t), (t, s)\}$.
 Por otro lado, se define la función capacidad inferior $l : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u, v) \in A, \quad l(u, v) = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } (u, v) = (i, t) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, se define la función capacidad superior $c : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ por:

$$\forall (u, v) \in A, \quad c(u, v) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } (u, v) = (s, i) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ \beta_i & \text{si } (u, v) = (i, i+1) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función costo $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ se define por :

$$\forall (u, v) \in A, \quad w(u, v) = \begin{cases} p_i & \text{si } (u, v) = (s, i) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ s_i & \text{si } (u, v) = (i, t) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ w_i & \text{si } (u, v) = (i, i+1) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta forma, si g es una circulación de la red especificada, podemos interpretar la cantidad de mercancía a comprar, guardar y vender en cada periodo i por el valor $g(s, i)$, $g(i, i+1)$ y $g(i, t)$ respectivamente, que por construcción verifica las condiciones dadas (ejercicio). Además, se tiene que:

$$w(g) = \sum_{(u,v) \in A} g(u, v) w(u, v) = \sum_{i=1}^4 g(s, i)p_i + \sum_{i=1}^3 g(i, i+1)w_i + \sum_{i=1}^4 g(i, t)s_i.$$

Por otro lado, si x_i, y_i, z_i representa la cantidad de compra, guardados y vendidos en el periodo i , de una política cualquiera del comerciante, entonces, si definimos la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por:

$$\forall (u, v) \in A, \quad g(u, v) = \begin{cases} x_i & \text{si } (u, v) = (s, i) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ y_i & \text{si } (u, v) = (i, i+1) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3\}, \\ z_i & \text{si } (u, v) = (i, t) \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \text{si } (u, v) = (t, s). \end{cases}$$

entonces g es una circulación de la red definida previamente (ejercicio) y además el costo asociado a esta política del comerciante es igual a:

$$\sum_{i=1}^4 x_i p_i + \sum_{i=1}^3 y_i w_i + \sum_{i=1}^4 z_i s_i,$$

que coincide con el costo $w(g)$ definida previamente.

Por lo tanto, encontrar una solución óptima al problema planteado es equivalente a encontrar una solución óptima al PCCM con la instancia dada, lo que puede ser resuelto en tiempo polinomial, por tener capacidades enteras, usando alguno de los algoritmos vistos en clases.