UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO 2024 – 2

Pauta Evaluación N°1

Álgebra 2 - 525150

Problema 1.

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

(a) **(5 puntos)** Si $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = xc(x-a)(x-d)(x-f).$$

Solución: Notemos que al aplicar las siguientes operaciones elementales, sucesivamente, $f_4 - f_3 \to f_4, f_3 - f_2 \to f_3$ y $f_2 - f_1 \to f_2$, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d & e \\ 0 & 0 & x-d & f \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f)$$

Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

(b) **(5 puntos)** La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ es periódica.

Solución: Notemos que $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = I$ y $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. es claro que $\mathbf{A}$ es periódica, puesto que existe $k \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}$. Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **verdadera**.

(c) **(5 puntos)** Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible, entonces $\mathrm{Adj}(\mathbf{A}^t) = (\mathrm{Adj}(\mathbf{A}))^t$.

Solución: Notemos que si $\mathbf{B}$ es invertible, se tiene que $\mathrm{Adj}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}|\mathbf{B}|$, ahora bien:

$$\mathrm{Adj}(\mathbf{A}^t) = (\mathbf{A}^t)^{-1}|\mathbf{A}^t| = (\mathbf{A}^{-1})^t|\mathbf{A}|^t = (\mathbf{A}^{-1}|\mathbf{A}|)^t = (\mathrm{Adj}(\mathbf{A}))^t$$

Dado lo anterior, podemos concluir que la afirmación es **verdadera**.

Problema 2.

Dado k un parámetro real. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(a) **(4 puntos)** Determinar, si es posible, los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$ tenga solución única, siendo $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Solución: Notemos que el determinante de la matriz $\mathbf{A}$, está dado por:

$$|\mathbf{A}| = k(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} = k(1-0) = k,$$

por lo que si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la matriz $\mathbf{A}$ es no singular. Luego, multiplicamos a derecha por $\mathbf{A}^{-1}$ la ecuación

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad / \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad / \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$$

es decir, si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la ecuación tiene única solución.

(b) **(7 puntos)** Considerando $k = 1$. Calcular $\mathbf{A}^{-1}$ y el determinante de $\mathbf{A}^{-120}$.

Solución: Para $k = 1$, la matriz es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, efectuando las operaciones elementales, sucesivamente, $f_2 \leftarrow f_2 - f_1$, $f_2 \leftarrow f_2 - 3f_3$, $f_1 \leftarrow f_1 + f_3$, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

por lo que $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Además, $\mathbf{A}^{-120} = (\mathbf{A}^{-1})^{120}$ y $|\mathbf{A}^{-1}| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Dado lo anterior, podemos concluir que $|\mathbf{A}^{-120}| = |\mathbf{A}^{-1}|^{120} = 1$.

(c) **(4 puntos)** Considerando $k = -1$. Determinar, si es posible, una matriz $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de modo que se cumpla la siguiente igualdad

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}\,\mathbf{D} = \mathbf{I}$$

donde $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ están dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: Para $k = -1$, la matriz es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ahora bien, supongamos que existe tal matriz $\mathbf{D}$, luego:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \mathbf{I},$$

la existencia de $\mathbf{D}$ equivale a la invertibilidad de la matriz $\mathbf{ABC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, que es singular, puesto que tiene una fila nula. Dado lo anterior, podemos concluir que el problema no tiene solución, es decir, no existe la matriz $\mathbf{D}$.

Problema 3. (15 puntos)

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \alpha\, y + 3z &= 2, \\ x + y - z &= 1, \\ 2x + 3\, y + \alpha\, z &= 3. \end{cases}$$

Determine los valores o condiciones para el parámetro α de modo que el sistema:

(a) Tiene infinitas soluciones.

(b) No tiene solución.

(c) Tiene solución única.

Solución: El sistema representado en forma matrical, queda dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ahora bien, escalonando por filas la matriz ampliada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ aplicando, sucesivamente, las operaciones elementales $f_1 \leftrightarrow f_2$, $f_2 \leftarrow f_2 - f_1$, $f_3 \leftarrow f_3 - 2f_1$, $f_2 \leftrightarrow f_3$, $f_3 \leftarrow f_3 + (1-\alpha)\, f_2$, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha + 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \alpha + 6 & 2 - \alpha \end{array}\right).$$

Notemos que el rango de la matriz $\mathbf{A}$, $r(\mathbf{A})$, dependerá de los valores de α. Ahora consideremos los siguientes casos:

- Si $\alpha^2+\alpha-6=0$ y $\alpha=2$, se obtiene la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  que conduce al sistema de ecuaciones lineales equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ y+4z & = & 1. \end{array}\right.$$

  Como $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})=2<3$, esto implica que el sistema lineal de ecuaciones tiene infinitas soluciones, y podemos fijar una variable, fijemos z, es decir hacemos $z=a,\;\; a\in\mathbb{R}$. Como $y+4z=1$, tenemos que $y=1-4a$. De $x+y-z=1$, se obtiene $x=5a$. De esta forma, el conjunto solución del sistema es:

$$S=\left\{(5a,1-4a,a)^t:\; a\in\mathbb{R}\right\}$$

- Si $\alpha^2+\alpha-6=0$ y $\alpha=-3$, se obtiene la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

  Claramente $r(\mathbf{A})=2<r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})=3$, por lo que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

- Si $-\alpha^2-\alpha+6\neq 0$, se sigue que $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})=3$, por lo que el sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución. En este caso, la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\alpha+6 & 2-\alpha \end{array}\right),$$

  que equivale al sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ y+(\alpha+2)\,z & = & 1 \\ (-\alpha^2-\alpha+6)\,z & = & 2-\alpha \end{array}\right.$$

  se sigue que $z=\frac{2-\alpha}{-\alpha^2-\alpha+6}=\frac{1}{\alpha+3}$. Además, como $y+(\alpha+2)\,z=1$, se obtiene $y=\frac{1}{\alpha+3}$, por consiguiente $x=1$, por lo que el conjunto solución está dado por:

$$S=\left\{\left(1,\tfrac{1}{\alpha+3},\tfrac{1}{\alpha+3}\right)^t:\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}\right\}$$

Problema 4.

(*a*) **(5 puntos)** Dadas $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Muestre que si $\mathbf{A}$ es involutiva, entonces $\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ es idempotente.

Solución: Sea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz involutiva, arbitraria. Luego, sea $\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ y notemos lo siguiente:

$$\mathbf{B}^2=(\tfrac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A}))^2=\tfrac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})\cdot\tfrac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\tfrac{1}{4}(\mathbf{I}+2\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)$$

luego, como $\mathbf{A}$ es involutiva, se cumple que $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, por ende:

$$\tfrac{1}{4}(\mathbf{I}+2\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)=\tfrac{1}{4}(\mathbf{I}+2\mathbf{A}+\mathbf{I})=\tfrac{1}{4}(2\mathbf{I}+2\mathbf{A})=\tfrac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\mathbf{B}$$

Finalmente, como $\mathbf{A}$ una matriz involutiva, arbitraria, y $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$ podemos concluir que $\mathbf{B}$ es idempotente.

(*b*) **(5 puntos)** En un hospital, se aplica un tratamiento a un grupo de cuatro pacientes que sufren un resfriado. Para dicho resfriado se recomienda consumir paracetamol (P), ibuprofeno (I) y antihistamínico (A). Si las cantidades diarias que necesita cada paciente de cada uno de los compuestos varían según la superficie total corporal, del siguiente modo: Paciente uno: 1000 mg de P, 400 mg de I y 50 mg de A. Paciente dos: 500 mg de P, 300 mg de I y 75 mg de A. Paciente tres: 750 mg de P, 200 mg de I y 100 mg de A. Paciente cuatro: 800 mg de P, 300 mg de I y 60 mg de A. Teniendo en cuenta que el tratamiento se va a aplicar durante 7 días a los pacientes 1 y 4, 5 días al paciente 2 y 6 días al paciente 3, determine la representación matricial de las necesidades diarias de cada paciente. Defina claramente la/las matrices que modelan el problema.

Solución: De acuerdo con la información entregada en el problema, se puede construir la siguiente tabla con las necesidades diarias de los pacientes:

	Paciente 1	Paciente 2	Paciente 3	Paciente 4
Paracetamol	1000	500	750	800
Ibuprofeno	400	300	200	300
Antihistamínico	50	75	100	60

Luego, la matriz de necesidades diarias es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 500 & 750 & 800 \\ 400 & 300 & 200 & 300 \\ 50 & 75 & 100 & 60 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por **D** el vector columna que expresa el número de días que cada paciente debe seguir el tratamiento, se tiene

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(*c*) **(5 puntos)** Sean $\vec{a} = (0, 3, 4)^t$, $\vec{b} = (0, \alpha, 0)^t$ dos vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Muestre que no existe un valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ formen un triángulo equilátero.

Solución: Para que los vectores formen un triángulo equilátero deben tener igual norma. Dado lo anterior, consideremos lo siguiente:

$$\|\vec{a}\| = 5, \quad \|\vec{b}\| = |\alpha| \quad \text{y} \quad \|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 16}$$

es claro que si $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$, entonces $\alpha = \pm 5$, pero si $\|\vec{a}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$, entonces $\alpha = 0 \vee \alpha = 6$. Con lo anterior, podemos notar que no existe un valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que se cumpla:

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$$