# Límites de funciones. Continuidad.

- Límites de funciones.
- Álgebra de límites de funciones.
- Continuidad en un punto.
- Funciones continuas.
- Funciones Lipschitz continuas.

# Límites de funciones.

A lo largo de toda la clase de hoy, $X$ e $Y$ son espacios métricos con distancias $d_X$ y $d_Y$, respectivamente, y $E \subset X$ .

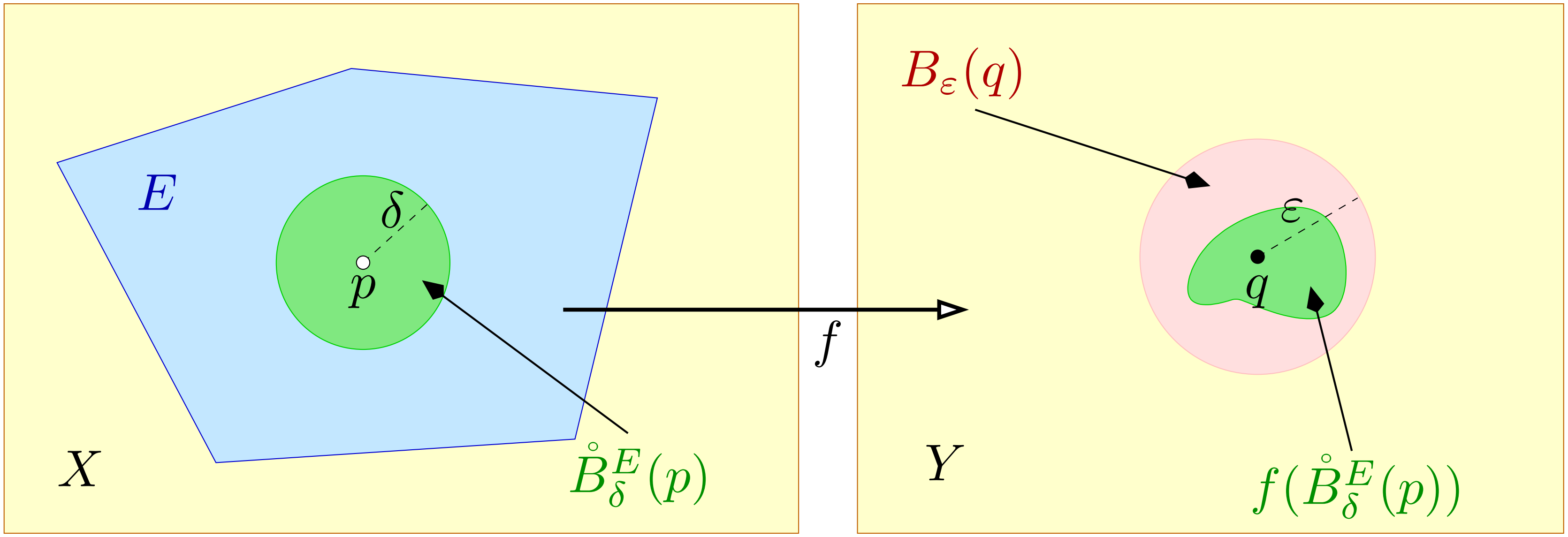
**Def.:** Sea $f: E \to Y$, $p$ un punto de acumulación de $E$ y $q \in Y$.
El límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $p$ es $q$ y lo denotamos

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \xrightarrow{x \to p} q,$$

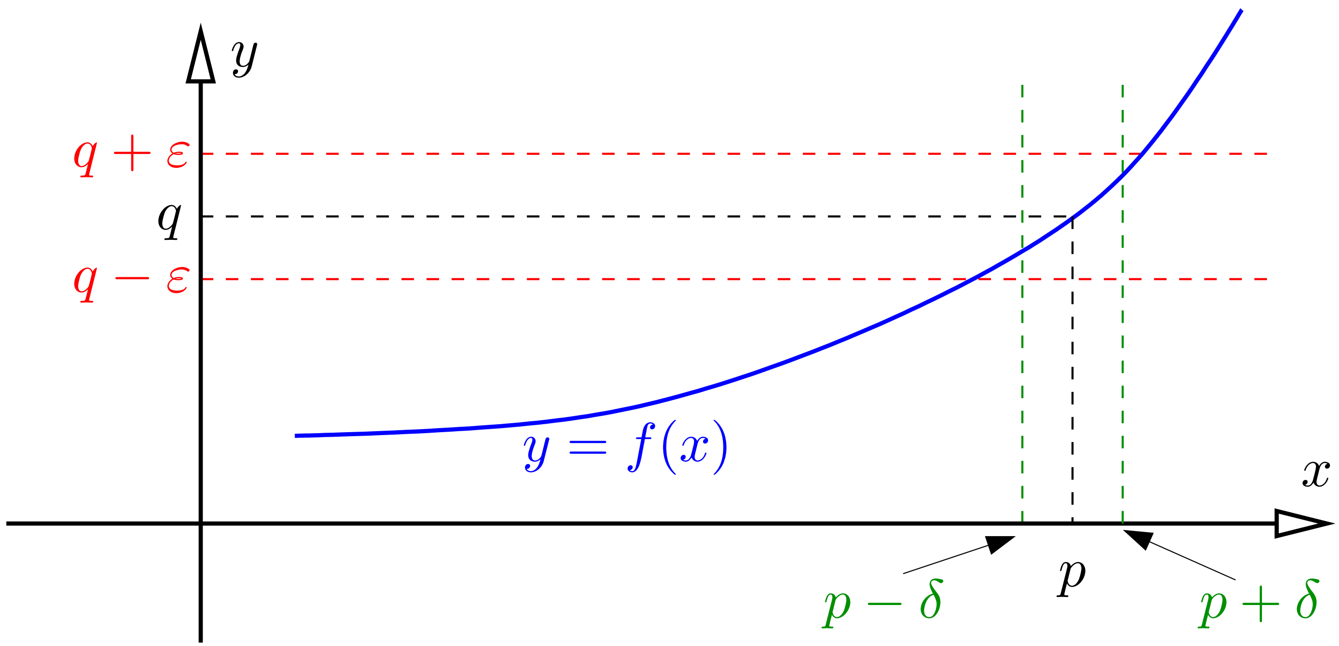
si $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E \setminus \{p\}\,,\ d_X(x,p) < \delta \implies d_Y(f(x), q) < \varepsilon.}$

- En esta definición no importa si $p \in E$ o no; lo que es necesario es que $p$ sea un punto de acumulación de $E$ ( $p \in E'$ ).
- Recordemos que $B_\delta^E(p) := B_\delta^X(p) \cap E$. Si denotamos $\mathring{B}_\delta^E(p) := B_\delta^E(p) \setminus \{p\}$, la propiedad que define el límite puede escribirse:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ f(\mathring{B}_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(q).}$$




Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces:



**Teor.:** Sea $f : E \to Y$, $p$ un punto de acumulación de $E$ y $q \in Y$.
$\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ si sólo si $\forall \{p_n\} \subset E \setminus \{p\}$, $p_n \xrightarrow{n} p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} q$.

**Dem.:** $\boxed{\implies}$ Supongamos que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$.

Sea $\{p_n\} \subset E \setminus \{p\} :\ p_n \xrightarrow{n} p$. Hay que demostrar que $f(p_n) \xrightarrow{n} q$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$, $\exists \delta > 0 :\ f(\mathring{B}^E_\delta(p)) \subset B^Y_\varepsilon(q)$.

Como $\{p_n\} \subset E \setminus \{p\}$ y $p_n \xrightarrow{n} p$, $\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ p_n \in \mathring{B}^E_\delta(p)$.
$\implies \forall n \geq N,\ f(p_n) \in B^Y_\varepsilon(q) \implies f(p_n) \xrightarrow{n} q$.

$\boxed{\impliedby}$ Por el absurdo. Supongamos que no se cumple que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$.

$\implies \exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathring{B}^E_\delta(p) :\ f(x) \notin B^Y_\varepsilon(q)$.
En particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists \underbrace{p_n \in \mathring{B}^E_{1/n}(p)}_{p_n \xrightarrow{n} p} :\ \underbrace{f(p_n) \notin B^Y_\varepsilon(q)}_{f(p_n) \not\xrightarrow{n} q}$.

$\triangleright\!=\!\triangleleft$ $\square$

**Corol.:** Si $f$ tiene límite cuando $x \to p$, entonces ese límite es único.

**Dem.:** $\boxed{\textbf{Ej.}}$ (Es consecuencia de la unicidad del límite de sucesiones.)

# Álgebra de límites de funciones.

**Teor.:** i) Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tales que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to p} g(x) = B$.

Entonces:

a) $\lim\limits_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B$;

b) $\lim\limits_{x \to p} [f(x) g(x)] = AB$;

c) Si $B \neq 0$, $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

ii) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : E \to \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim\limits_{x \to p} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{A}$ y $\lim\limits_{x \to p} \boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{B}$.

Entonces: $\lim\limits_{x \to p} [\boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{g}(x)] = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

**Dem.:** **Ej.** Es consecuencia del teorema anterior y de las propiedades análogas para límites de sucesiones.

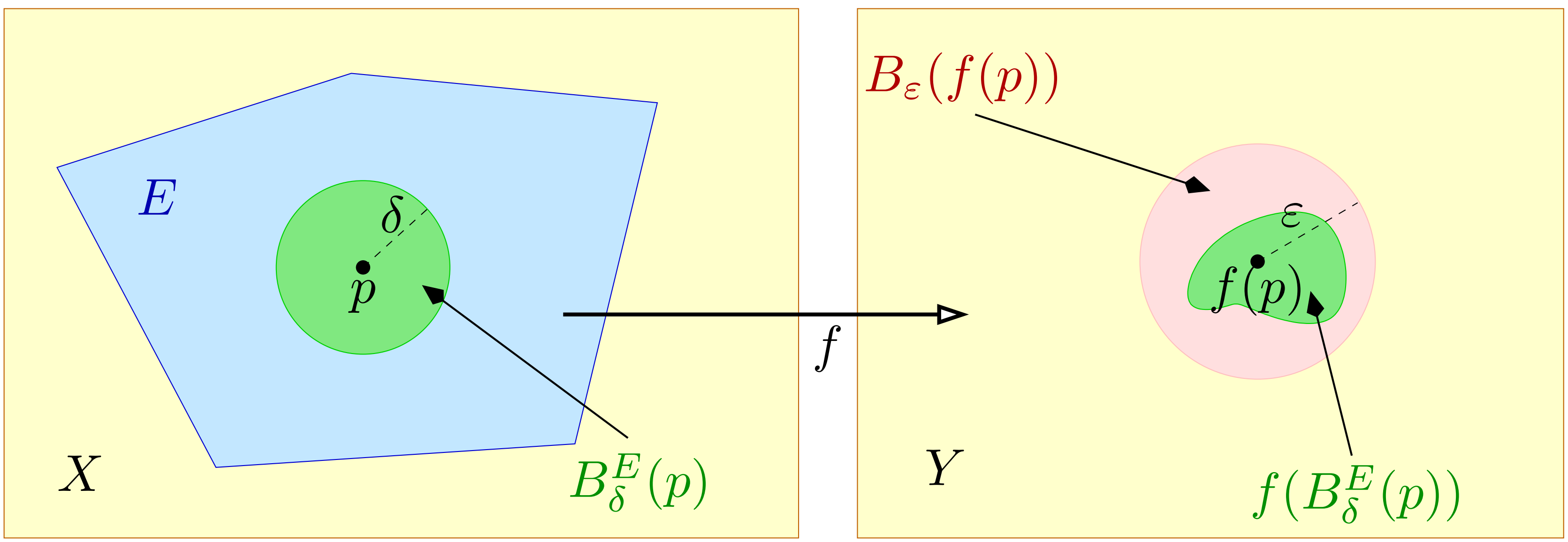
# Continuidad en un punto.

**Def.:** Dado $p \in E$, $f$ es continua en $p$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in E,\ d_X(x,p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.}$$

- En esta definición $p \in E$, pero no es necesariamente un punto de acumulación de $E$.
- La propiedad que define la continuidad en un punto puede escribirse:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ f(B_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)).}$$



**Teor.:** Sea $f : E \to Y$ y $p \in E$. Entonces:

a) Si $p$ es un punto aislado de $E$, $f$ es continua en $p$.

b) Si $p$ es un punto de acumulación de $E$, $f$ es continua en $p$ si y sólo si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

**Dem.:** a) Sea $p$ un punto aislado de $E \implies \exists \delta > 0 : B_\delta(p) \cap E = \{p\}$

$\implies B_\delta^E(p) = \{p\} \implies f(B_\delta^E) = \{f(p)\}$

$\implies \forall \varepsilon > 0,\ f(B_\delta^E) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \implies f$ es continua en $p$.

b) Sea $p$ un punto de acumulación de $E$. Entonces:

$f$ continua en $p \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :\ f(B_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p))$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :\ f(\mathring{B}_\delta^E(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p))$

$\iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p). \quad \square$

**Teor.:** Sea $f : E \to Y$ y $p \in E$. $f$ es continua en $p$ si y sólo si $\forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$.

**Dem.:** Si $p$ es un punto aislado de $E$, por un lado, $f$ es continua en $p$.
Por el otro, $\forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ p_n = p$
$\implies \forall n \geq N,\ f(p_n) = f(p) \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$.

Si $p$ es un punto de acumulación de $E$, se tiene que $f$ es continua en $p$

$$\iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

$$\iff \forall \{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p). \quad \square$$

**Teor.:** Sea $Z$ un espacio métrico. Sean $f : E \to Y$ continua en $p \in E$ y $g : Y \to Z$ continua en $f(p)$. Entonces $g \circ f : E \to Z$ es continua en $p$.

**Dem.:** Si $p$ es un punto aislado de $E$, $g \circ f$ es continua en $p$.

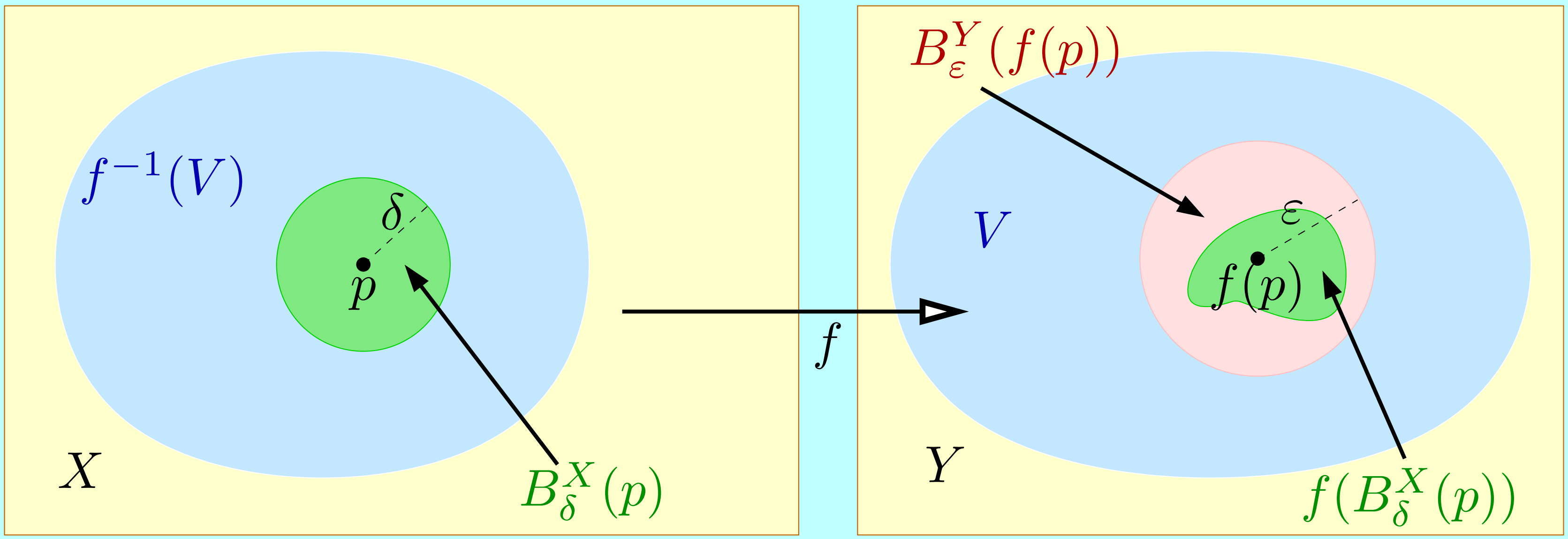
Si $p$ es un punto de acumulación de $E$, sea $\{p_n\} \subset E : p_n \xrightarrow{n} p$. Entonces:
$f$ continua en $p \implies f(p_n) \xrightarrow{n} f(p)$
$g$ continua en $f(p) \implies g(f(p_n)) \xrightarrow{n} g(f(p))$
$\implies g \circ f$ es continua en $p$. $\square$

# Funciones continuas.

**Def.:** Sea $f : X \to Y$. $f$ es continua si es continua en $p \quad \forall p \in X$.

**Teor.:** $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $\forall V \subset Y$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto.

**Dem.:** $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $V \subset Y$ abierto. Hay que demostrar que $f^{-1}(V)$ es abierto.



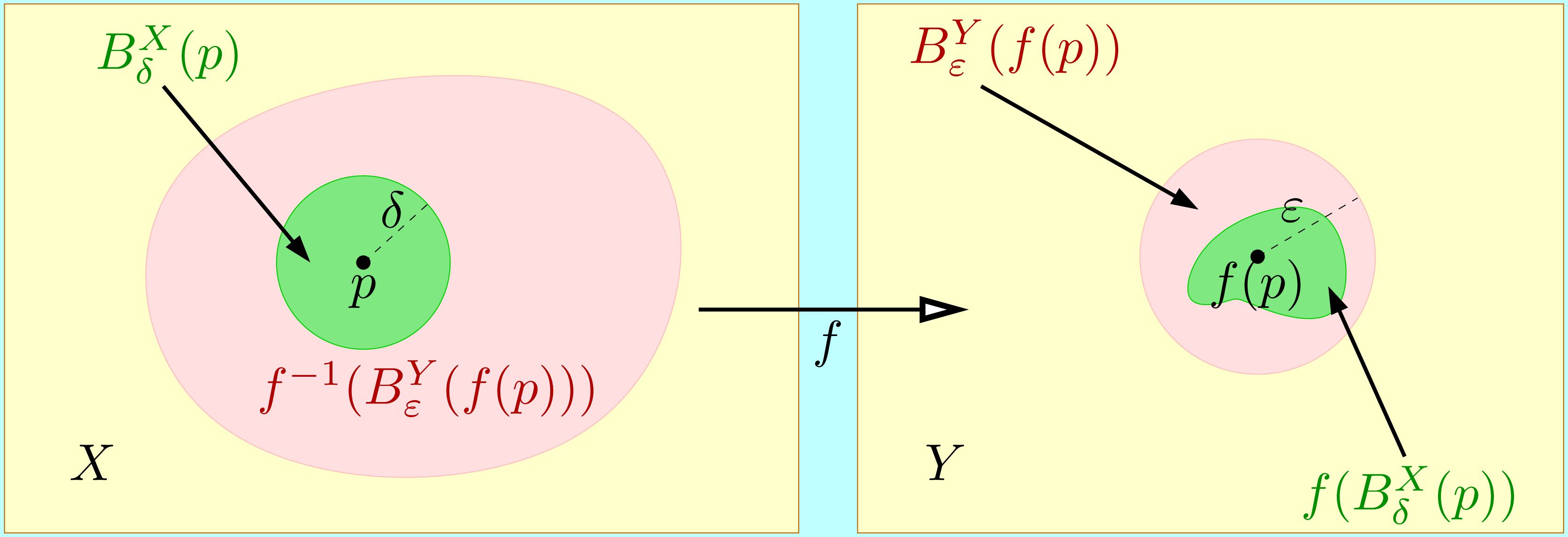

Sea $p \in f^{-1}(V)$. Entonces, $f(p) \in V$ (ab.) $\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^Y(f(p)) \subset V$.

$f$ continua $\Longrightarrow \exists \delta > 0 : f(B_\delta^X(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \subset V$

$\Longrightarrow B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(V) \Longrightarrow p$ interior a $f^{-1}(V) \Longrightarrow f^{-1}(V)$ abierto.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $f : X \to Y : \ \forall V \subset Y$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto.

Sea $p \in X$. Hay que demostrar que $f$ es continua en $p$.




Sea $\varepsilon > 0$. $B_\varepsilon^Y(f(p)) \subset Y$ abierto $\Longrightarrow f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p))) \subset X$ abierto.

$p \in f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p))) \Longrightarrow \exists \delta > 0 : \ B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p)))$

$\Longrightarrow f(B_\delta^X(p)) \subset B_\varepsilon^Y(f(p)) \Longrightarrow f$ es continua en $p$. $\square$

**Corol.:** $f : X \to Y$ es continua $\Longleftrightarrow \forall G \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(G)$ es cerrado.

**Dem.:** $\boxed{\textbf{Ej.}}$ Es consecuencia del hecho de que $G$ es cerrado $\Longleftrightarrow G^c$ es abierto.

# Funciones Lipschitz continuas.

**Def.:** $f : X \to Y$ es Lipschitz continua si
$\exists L > 0 : \; \forall p, q \in X, \; d_Y(f(p), f(q)) \leq L\, d_X(p, q)$.

**Prop.:** Las funciones Lipschitz continuas, son continuas.

**Dem.:** Sean $f : X \to Y$ y $p \in X$. Demostraremos que $f$ es continua en $p$.

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta := \dfrac{\varepsilon}{L} > 0 : \quad \forall q \in X : \; d_X(p, q) < \delta,$

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L\, d_X(p, q) < L\delta = \varepsilon.$$

Entoces, $f$ es continua en $p$. $\square$