Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 1 — jueves 3 de abril de 2025

Entrega: miércoles 16 de abril de 2025, 23.00 horas

- **NO** se aceptan entregas fuera de plazo
- Entrega: en formato .pdf, **un sólo archivo** preparado con LaTeX(o equivalente); subido a CANVAS
- Intentos de entrega que **no** cumplan con algún de estos requisitos (escaneados, enviados por correo, más de un archivo, etc.) no serán calificados
- **NO** habrá cambios de plazo — **no** se acepta **ningún** tipo de excusa a posteriori (excepción: licencias médicas certificadas por DISE)

Problema 1. Indicar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tales que $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero que

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$,
(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$,
(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$ dado,
(iv) la sucesión $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es acotada, pero no converge.

Problema 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_0 := a, \quad a_1 := b; \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{para } n = 2, 3, \dots.$$

Demostrar que la sucesión converge y determinar su límite.

Problema 3. Para un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $A \subset X$ un punto $x \in X$ se llama *punto adherente* de A si x pertenece a la *clausura* de A, denotada $\bar{A}$, es decir en cada vecindad de x existe por lo menos un elemento de A, es decir para todo $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$. Un conjunto A es cerrado si $A = \bar{A}$. Graficar los siguientes conjuntos (si posible) e identificar sus puntos interiores, de acumulación, de adherencia, de frontera y de puntos aislados. Además indicar si los conjuntos son abiertos, cerrados y compactos.

(i) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < 2|x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 \leq x^2 + 4y^2 < 64\}$.
(iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z < 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 4\}$.
(iv) $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
(v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0,\ (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cup \{(3, 3, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Problema 4.

a) Sea (M, d) un espacio métrico. Demostrar que

$$\forall x, y, z \in M: \quad d(x,y) \geq \big|d(x,z) - d(z,y)\big|;$$
$$\forall x, y, x', y' \in M: \quad \big|d(x,y) - d(x',y')\big| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

b) Se considera el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ con las métricas

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \quad d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|,$$
$$d_\infty(x,y) = \max\big\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\big\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Para cada una de las métricas, dibujar la bola unitaria

$$U_{i,1}(0) = \big\{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_i(0,y) \leq 1\big\}, \quad i = 1, 2, \infty.$$

Problema 5. ¿Cuales de las siguientes funciones $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$ definen una métrica sobre $\mathbb{R}^2$? Fundamente su respuesta o por una demostración, o por un contraejemplo.

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases} \quad g_2(x,y) = \big((x_1-y_1)^{1/2} + (x_2-y_2)^{1/2}\big)^2,$$

$$g_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad (\text{donde } d \text{ es alguna métrica sobre } \mathbb{R}^2),$$

$$g_4(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ d(x,z) + d(y,z) & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

donde en el caso de g_4, d es alguna métrica sobre $\mathbb{R}^2$ y $z \in \mathbb{R}^2$ arbitrario.

Problema 6. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos la distancia del punto x al conjunto A de la siguiente manera:

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\big\{d(x,y) \mid y \in A\big\}.$$

a) Demostrar que la función $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua sobre X.

b) Para otro subconjunto $K \subset X$ definimos

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\big\{d(x, A) \mid x \in K\big\} = \inf\big\{d(x,y) \mid x \in K, y \in A\big\}$$

Demostrar que si A es cerrado, K compacto y $A \cap K = \varnothing$, entonces $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

c) Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados de un espacio métrico X con $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. ¿Se cumple $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$ (demostración o contraejemplo)?

Problema 7. Demostrar el Teorema 1.13. Aviso: aquí conviene demostrar primero la equivalencia 1. $\Leftrightarrow$ 2., y luego ocupar argumentos similares para demostrar 1. $\Leftrightarrow$ 3.