UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

# Listado Nº4: Espacios Vectoriales con Producto Interior

Álgebra 2 - 525150

1. En el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{N}$, se definen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n,$$

con $x \in \mathbb{R}$, además de la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle p, q \rangle = (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

Decida si esta aplicación define un producto interior en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

2. En el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^2$, se define la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_* : V \times V \to \mathbb{R}$, tal que

$$\forall\, u = (u_1, u_2)^t, v = (v_1, v_2)^t \in V \;:\; \langle u, v \rangle_* := 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2.$$

   (a) Demuestre que la aplicación definida es un producto interior en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Sean $u = (2, -1)^t$ y $v = (1, 3)^t$. Verificar que estos vectores no son ortogonales con respecto al producto interior usual de $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es su respuesta cuando se considera el producto interior dado? Luego, determine la norma inducida por el nuevo producto interior.
   (c) Verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz, considerando el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, para $u = (4, 5)^t$ y $v = (3, -4)^t$.

3. Considere $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior y $u, v \in V$. Sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Demuestre que:

   (a) $\forall u, v \in V : 4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
   (b) $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.
   (c) $\forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.
   (d) $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u\| \leq \|u + \lambda v\|$.
   (e) $\forall u, v \in V : \|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v \rangle = 0$.

4. En $\mathbb{R}^4$, provisto con el producto interior usual, sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ ' \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Muestre que el conjunto $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base no ortogonal de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Aplique el proceso de ortogonalización de Gram-Schimidt, para transformar $B_1$ en una base ortogonal $B_2$.
   (c) Determine $[v]_{B_2}$, donde $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Utilice lo anterior para determinar $[(1, 2, 3, 4)^t]_{B_2}$ y $[(6, 8, 0 - 6)^t]_{B_2}$

5. Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y la aplicación

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R},\ \langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(B^tA)$$

   (a) En el espacio $V = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ se define el subespacio vectorial:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} : a - b + 3c = 0 \ \wedge \ b - 2d = f \right\}$$

   Determine el subespacio $U^\perp$.

   (b) En el espacio $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se definen los siguientes espacios vectoriales:

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad W = \{A \in V : A = A^t\}$$

   Determine los subespacios $S^\perp$ y $W^\perp$. Además, deduzca una base ortogonal para $S$ y $W$.

6. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suponga que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ denota el producto interior usual en $\mathbb{R}^2$. La aplicación que a un par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ hace corresponder el número real

$$\langle A,B\rangle = \left\langle A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} + \left\langle A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

   (a) Demuestre que la aplicación definida es un producto interior en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determine el complemento ortogonal del siguiente conjunto de vectores en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A + A^t = I\},$$

   con respecto al producto interior definido.

7. En $\mathbb{R}^4$, provisto con el producto interior usual, sea $W$ el siguiente subespacio vectorial:

$$W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + 2b + 3c + 4d = 0\}$$

   (a) Determine una base para $W^\perp$.

   (b) Determinar $u \in W$, la mejor aproximación de $z = (1,-1,0,1)^t \in \mathbb{R}^4$, por elementos de W. Luego, calcular el valor de la distancia de $z$ a $W$.

8. Considere el espacio vecotial real $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, provisto de la aplicación

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$$

   definida para cada $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

   (a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interior sobre $V$.

   (b) Considere $p, q \in V$ tales que $p(x) = 1$ y $q(x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$. Verifique que $B_1 = \{p, q\}$ es un conjunto ortogonal con este producto interior.

   (c) Complete $B_1$ a una base ortonormal $B$ de $V$.

   (d) Sea $s \in V$ tal que $s(x) = 2x^2 + 3x - 1$, con $x \in \mathbb{R}$. Determine $[s]_B$.

   (e) Considere $U = \{p \in V : p(1) = 0\}$. Determine una base ortogonal de $U$.

   (f) Sea $g \in V$ tal que $g(x) = x^2 - 1$, con $x \in \mathbb{R}$. Determine la proyección ortogonal de $g$ sobre $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y calcular el valor de la distancia de $g$ a $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.