Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº2: Funciones Reales
Clase N°22 - 28/05/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Ecuaciones Trigonométricas

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una igualdad, válida sólo para un subconjunto de números reales, en la que participan funciones trigonométricas y una incógnita en el argumento de tales funciones.

Ejemplos:

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(t) = \cos(t)$
3. $\sin(2\alpha) = 1$
4. $\cos^2(y) + \cos(\pi + 3y) + \sin^2(y) = 1$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

1. $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$
2. $2\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$
3. $\sin(x) + \cos(x) = 1$
4. $\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{3}\right) = 0$
5. $\sin^4(3x) + 2\cos^2(3x) = 1$
6. $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}^2(x)$

Ejercicio 6

Solución 6: Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}(t)\operatorname{Arcsin}(t) = \operatorname{Arccos}^2(t) &\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(t)\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}^2(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(t)\left(\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t)\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(t) = 0 \vee \operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t) = 0\end{aligned}$$

Así, se tiene:

$$\operatorname{Arccos}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

por otro lado,

$$\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t)\right) = \sin(0) = 0$$

para resolver esta última ecuación, consideremos

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{Arcsin}(t) \Leftrightarrow \sin(\alpha) = t,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\ \beta &= \operatorname{Arccos}(t) \Leftrightarrow \cos(\beta) = t,\ \beta \in [0, \pi]\end{aligned}$$

Ejercicio 6

luego,

$$\begin{aligned}\sin\left(\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t)\right) = 0 &\Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha) = 0\end{aligned}$$

en la expresión anterior, notemos que ya conocemos el valor de $\sin(\alpha)$ y $\cos(\beta)$, pero nos faltan las demás expresiones, para obtenerlas podemos utilizar la identidad fundamental con los ángulos α y β, como sigue:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1-t^2},\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1 \Leftrightarrow \sin(\beta) = \sqrt{1-t^2},\ \beta \in [0, \pi]$$

Ejercicio 6

dado esto, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\operatorname{Arcsin}(t) - \operatorname{Arccos}(t)\right) = 0 &\Leftrightarrow \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow t^2 - \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2} = 0,\ t \in [-1,1] \\
&\Leftrightarrow t^2 = \sqrt{(1-t^2)^2} \\
&\Leftrightarrow t^2 = |1-t^2| \\
&\Leftrightarrow t^2 = 1-t^2, \qquad \forall t \in \mathbb{R} : t^2 \neq -(1-t^2) \\
&\Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \vee \ t = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6

ahora bien, debemos corroborar si los valores de t encontrados son soluciones de la ecuación, como sigue:

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \neq 0$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

Finalmente, el conjunto solución está dado por:

$$S = \left\{t \in \mathbb{R} : \text{Arccos}(t)\text{Arcsin}(t) = \text{Arccos}^2(t)\right\} = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Aplicaciones

Teorema del Seno

En cualquier triángulo, la razón entre la longitud de un lado y el seno de la medida del ángulo opuesto a ese lado es constante y es igual al diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

Teorema del Coseno

En cualquier triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble del producto de las longitudes de esos dos lados por el coseno de la medida del ángulo comprendido entre ellos

Ejercicios

1. Desde un tren que viaja al Norte por una vía férrea recta, el maquinista observa una casa en dirección $N20°E$. Después de recorrer 500 metros observa la misma casa en dirección $S70°E$. Determine la distancia entre la casa y el primer punto de observación, entre la casa y el segundo punto de observación, y desde la casa a la vía férrea.

2. Una torre de 38 m se localiza en la ladera de una montaña que tiene una inclinación de 30^o respecto a la horizontal. Se fijará un alambre de sujección a la parte superior de la torre y se anclará en un punto 17 m colina abajo de la base de la torre. ¿Cuál es la longitud del alambre tenso?

Ejercicios

3. Dos aviones de búsqueda despegan de Concepción para encontrar un pesquero perdido en el océano. El avión A viaja hacia el Oeste a $400\sqrt{2}$ km/h y el avión B vuela en dirección $N45°E$ a 500 km/h. Al cabo de 2 horas el avión A divisa al pescador y envía un mensaje por radio al avión B para que acuda y participe en el rescate. ¿A qué distancia del avión A está el avión B cuando es enviado el mensaje?
4. Probar que si $\angle AOB$ es un ángulo central del círculo de centro O y radio r y $m(\angle AOB) = \theta$, entonces:

$$AB = r\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

Si $\angle AOB$ es recto. ¿Cuál es la medida de AB ?

Ejercicios

5. Una empresa debe tasar una propiedad delimitada por cuatro estacas. El personal de la empresa inicia las mediciones desde la estaca A. En dirección $N60°E$ se encuentra la estaca B, a una distancia de 5 kilómetros. Desde la estaca B a la C, ubicada en dirección $S45°E$, se establece que hay una distancia exacta de $2\sqrt{3}$ kilómetros. La estaca D se encuentra en línea recta 1 kilómetro al Sur de la estaca C. En ese momento se desata una tormenta y se debe huir del lugar, sin poder tomar mas mediciones. Determine los siguientes datos que requiere la empresa:
   (a) El perímetro del terreno.
   (b) El precio total del terreno, si cada kilómetro cuadrado está tasado en 400 mil pesos.