UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**Pauta Evaluación 2**
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218-525221)

**Problema 1. (20 puntos)**
Usando valores y vectores propios, determine la solución general del siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \\ x(0) = -1,\, y(0) = 1. \end{cases}$$

**Solución:**
Primero, calculamos los **Valores propios de** $A$ donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 + 1 = 0\,,$$

de donde obtenemos los valores propios

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i. \end{cases}$$

En este caso basta determinar el espacio propio asociado a $\lambda_1$. Así,

$$S_{\lambda_1} := \{v \in \mathbb{C}^{2\times 1} : (A - \lambda_1 I)v = 0\}\,.$$

Escalonando (por filas), resulta

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -3-i & 5 \\ -2 & 3-i \end{pmatrix} \overset{f_2-(3-i)f_1}{\sim} \begin{pmatrix} -10 & 5(3-i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -10 & 5(3-i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 10x = 5(3-i)y \quad \Rightarrow \quad x = (1/2)(3-i)y$$

De esta manera, se deduce que

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \textbf{[06 puntos]}$$

Ahora de la solución compleja

$$Y(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[04 puntos]} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t\,(3cos(t) + sen(t)) \\ 2e^t cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^t\,(3sen(t) - cos(t)) \\ 2e^t sen(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

obtenemos las soluciones para nuestro sistema homogéneo, a saber,

$$X_1(t) := \mathrm{Re}(Y(t)) = e^t \begin{pmatrix} 3cos(t) + sen(t) \\ 2cos(t) \end{pmatrix}, \forall\, t \in \mathbb{R}$$

y

$$X_2(t) := \mathrm{Im}(Y(t)) = e^t \begin{pmatrix} 3sen(t) - cos(t) \\ 2sen(t) \end{pmatrix}, \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Luego, la solución general del sistema EDO homogéneo dado es

$$X(t) \,=\, C_1\, e^t \begin{pmatrix} 3cos(t) \,+\, sen(t) \\ 2cos(t) \end{pmatrix} \,+\, C_2\, e^t \begin{pmatrix} 3sen(t) \,-\, cos(t) \\ 2sen(t) \end{pmatrix} \,, \forall\, t \in \mathbb{R}\,, \qquad [\textbf{06 puntos}]$$

siendo $C_1$, $C_2$ constantes reales arbitrarias.
Pero para $t = 0$, $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto de $X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se obtienen $C_1 = 1/2$ y $C_2 = 5/2$.
Así, la única solución del sistema dado es

$$X(t) \,=\, (1/2)\, e^t \begin{pmatrix} 3cos(t) \,+\, sen(t) \\ 2cos(t) \end{pmatrix} \,+\, (5/2)\, e^t \begin{pmatrix} 3sen(t) \,-\, cos(t) \\ 2sen(t) \end{pmatrix} \,, \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

la cual se reduce a

$$X(t) \,=\, \begin{pmatrix} 8\, sen(t) \,-\, cos(t) \\ cos(t) \,+\, 5\, sen(t) \end{pmatrix}. \qquad [\textbf{04 puntos}]$$

**Problema 2** Este problema consta de dos incisos que no están directamente relacionados entre sí.

(a) [**10 puntos**] Encuentre la transformada de Laplace de la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} 2\,X''(t) + 4\,X'(t) + 5X(t) = \delta_1(t) \\ X(0) = 0;\; X'(0) = 2 \end{cases}$$

Nota: Usamos la notación $\delta_a(t) = \delta(t-a)$.

**Solución:**
Aplicando la transformada de Laplace a la EDO llegamos a que

$$2\,\mathcal{L}(X''(t))(s) + 4\,\mathcal{L}(X'(t))(s) + 5\mathcal{L}(X(t))(s) = \mathcal{L}(\delta_1(t))(s)\,.$$

Por lo tanto,

$$2\,\mathcal{L}(X''(t))(s) + 4\,\mathcal{L}(X'(t))(s) + 5\mathcal{L}(X(t))(s) = e^{-s}.$$

**[2 puntos]**

Tenemos que

$$\mathcal{L}(X'(t))(s) = s\mathcal{L}(X(t))(s) - X(0) = s\mathcal{L}(X(t))(s)\,.$$

Como

$$\mathcal{L}(X''(t))(s) = s\mathcal{L}(X'(t))(s) - X'(0) = s\mathcal{L}(X'(t))(s) - 2,$$
$$\mathcal{L}(X''(t))(s) = s^2\mathcal{L}(X(t))(s) - 2.$$

Por lo tanto,

$$2\left(s^2\mathcal{L}(X(t))(s) - 2\right) + 4s\mathcal{L}(X(t))(s) + 5\mathcal{L}(X(t))(s) = e^{-s}.$$

**[7 puntos]**

Lo que implica

$$\left(2s^2 + 4s + 5\right)\mathcal{L}(X(t))(s) - 4 = e^{-s}.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}(X(t))(s) = \frac{e^{-s} + 4}{2s^2 + 4s + 5}.$$

**[1 punto]**

(b) **[10 puntos]** Encuentre la transformada de Laplace inversa de la función

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 4\,s + 13}.$$

**Solución:**

Consideremos la función $f$ que satisface

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s^2 - 4\,s + 13}.$$

Luego,

$$\mathcal{L}(f(t-1)\,H(t-1))(s) = e^{-s}\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 - 4\,s + 13}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2 - 4\,s + 13}\right)(t) = f(t-1)\,H(t-1)\,.$$

**[5 puntos]**

A continuación determinaremos $f$. Como $s^2 - 4\,s + 13 = (s-2)^2 + 9$,

$$\frac{1}{s^2 - 4\,s + 13} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s-2)^2 + 9}.$$

Ya que $\mathcal{L}(sen\,(3t))(s) = 3/\left(s^2 + 9\right)$,

$$\frac{3}{(s-2)^2 + 9} = \mathcal{L}(sen\,(3t))(s-2) = \mathcal{L}\left(e^{2t}sen\,(3t)\right)(s)\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{s^2 - 4\,s + 13} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\left(e^{2t}sen\,(3t)\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}e^{2t}sen\,(3t)\right)(s)$$

Lo que implica

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4\,s + 13}\right)(t) = \frac{1}{3}e^{2t}sen\,(3t)\,.$$

**[4 puntos]**

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = f(t-1)\,H(t-1) = \frac{1}{3}e^{2t-2}sen\,(3t-3)\,H(t-1)\,.$$

**[1 punto]**

**Pregunta 3.(20 puntos)** Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = -\frac{t+x}{t+x+1}, \\ x(t_0) & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Responda las siguientes preguntas:

(a) (6 puntos) ¿Para qué valores de $t_0$ se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución del PVI (4)?

(b) (14 puntos) Haciendo el cambio de variables $u(t) = t + x(t)$, resuelva el PVI (4) para el caso $t_0 = 0$.

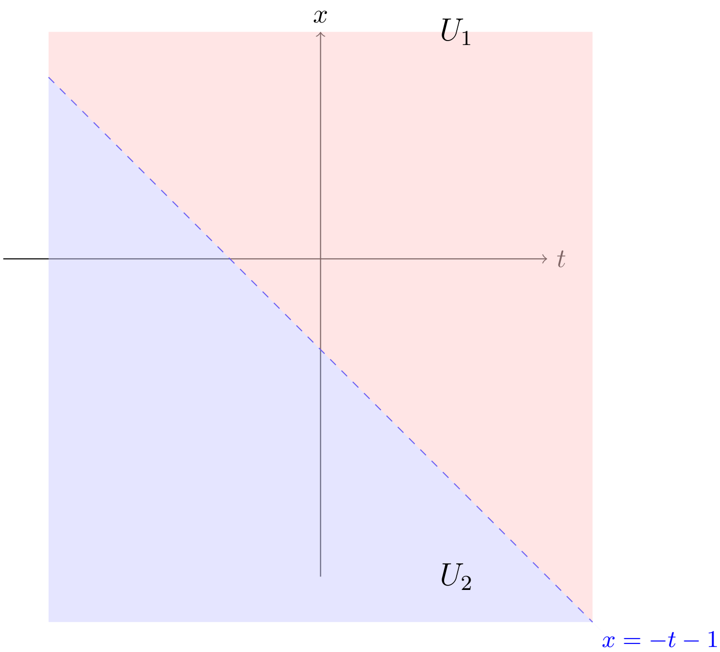
**Solución.**

(a) Definimos la función $f(t,x) = -\frac{t+x}{t+x+1}$, cuya derivada parcial respecto a la variable dependiente $x$ viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{1}{(t+x+1)^2}.$$

Tenemos entonces que tanto $f$ como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son funciones continuas en el conjunto $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : (t+x+1) \neq 0\}$. Es decir, tenemos dos componentes conexas en las que podemos aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad:

$$U_1 := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : -t-1 < x\},$$
$$U_2 := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : -t-1 > x\}.$$




Luego, para que la condición inicial se encuentre en $U_1 \cup U_2$ debe pasar que $t_0 \neq -1$. Concluimos así que el PVI (4), con $x(t_0) = 0$, tiene solución única siempre que $t_0 \neq -1$.

(b) Para resolver la EDO consideramos el cambio de variable $u(t) = t + x(t)$, donde $\dfrac{du}{dt} = 1 + \dfrac{dx}{dt}$. Sustituyendo en la EDO nos queda que

$$\frac{du}{dt} - 1 = -\frac{u}{u+1} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{u+1},$$

que es una EDO de variables separables. Para resolver esta última ecuación separamos variables e integramos:

$$(u+1)du = dt$$
$$\int (u+1)\,du = \int dt$$
$$\frac{(u+1)^2}{2} = t + C.$$

Devolviendo el cambio de variables

$$\frac{(x+t+1)^2}{2} = t + C.$$

Finalmente, usando la condición inicial $x(0) = 0$ tenemos $C = \frac{1}{2}$, y la solución -escrita de forma implícita- del PVI viene dada por

$$(x(t) + t + 1)^2 = 2t + 1.$$