4.A. If the simple function φ in $M^+(X, X)$ has the (not necessarily standard) representation

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

where $b_k \in \mathbf{R}$ and $F_k \in X$, show that

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \, \mu(F_k).$$

4.A. $\varphi \in M^+(X, \mathcal{X})$ función simple, donde

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$$

donde $b_k \in \mathbb{R}$, $F_k \in \mathcal{X}$. Muestre que

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \, \mu(F_k)$$

Ideas: **Corol.:** Sea $\varphi \in M^+(X, \mathscr{X})$ una función simple y $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ una representación cualquiera de φ con $a_j \geq 0$ y $E_j \in \mathscr{X}$, $j = 1, \ldots, n$. Entonces, $\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$.

Hacer un arreglo a los coeficientes b_k.

Dem: Supondremos que existe al menos un coeficiente b_k tal que $b_k < 0$.

Definimos:

$$B^+ := \{ b_k : b_k \geq 0 \}, \quad B^- := \{ b_k : b_k < 0 \}$$

Notemos que $B^+ \cup B^- = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$

De esta manera, podemos escribir:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} = \sum_{i=1}^{|B^+|} b_{k_i} \chi_{F_{k_i}} + \sum_{j=1}^{|B^-|} b_{k_j} \chi_{F_{k_j}}$$

Notemos que para todo j, $b_{k_j} < 0$. Luego $-b_{k_j} > 0$. De esta manera:

$$\sum_{j=1}^{|B^-|} b_{k_j} \chi_{F_{k_j}} = -\sum_{j=1}^{|B^-|} (-b_{k_j}) \chi_{F_{k_j}}.$$

Definimos

$$\varphi_1 := \sum_{i=1}^{|B^+|} b_{k_i} \chi_{F_{k_i}}, \quad \varphi_2 := \sum_{j=1}^{|B^-|} (-b_{k_j}) \chi_{F_{k_j}}.$$

y de este modo podemos escribir.

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Observemos que $\varphi_1, \varphi_2 \in M^+(X, \mathcal{X})$ simples.

IDEA: integrar a ambos lados

Problema: ¿$\varphi_1 - \varphi_2 \in M^+(X, \mathcal{X})$?

Reescribimos la ecuación anterior como

$$\varphi + \varphi_2 = \varphi_1,$$

de donde $\varphi + \varphi_2 \in M^+(X, \mathcal{X})$. Integramos a ambos lados:

$$\int (\varphi + \varphi_2) \, d\mu = \int \varphi_1 \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int \varphi \, d\mu + \int \varphi_2 \, d\mu = \int \varphi_1 \, d\mu.$$

Por corolario, como $b_{k_i}, (-b_{k_j}) \geq 0$:

$$\int \varphi_1 \, d\mu = \sum_{i=1}^{|B^+|} b_{k_i} \mu(F_{k_i})$$

$$\int \varphi_2 \, d\mu = \sum_{j=1}^{|B^-|} (-b_{k_j}) \mu(F_{k_j})$$

Así, reescribimos la ecuación anterior como:

$$\int \varphi \, d\mu + \sum_{j=1}^{|B^-|} (-b_{k_j}) \mu(F_{k_j}) = \sum_{i=1}^{|B^+|} b_{k_i} \mu(F_{k_i})$$

$$\Rightarrow \quad \int \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{|B^+|} b_{k_i} \mu(F_{k_i}) + \sum_{j=1}^{|B^-|} b_{k_j} \mu(F_{k_j})$$

$$= b_1 \mu(F_1) + b_2 \mu(F_2) + \cdots + b_m (F_m)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k).$$

■

4.G. Let $X = N$, let $\mathbf{X}$ be all subsets of N, and let μ be the counting measure on X. If f is a nonnegative function on N, then $f \in M^+(X, \mathbf{X})$ and

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Aplicar TCM.

Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, con μ la medida de contar. Si f es no negativa en $\mathbb{N}$, entonces $f \in M^+(X,\mathcal{X})$ y

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Definimos los conjuntos

$$E_k := \{1,\dots,k\}$$

y definimos la sucesión $f_k = f\chi_{E_k}$

Notemos que f_k se puede escribir como

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} f(i)\chi_{\{i\}}$$

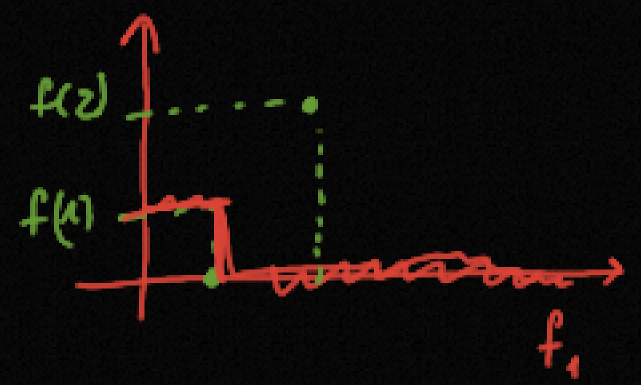
y de esta manera podemos afirmar que f_k es una función simple. y en consecuencia $f_k \in M^+(X,\mathcal{X})$.

Por su parte, vemos que $f_k \nearrow_k f$

Luego

$$\int f_k\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} f(i)\cancelto{1}{\mu(\{i\})}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f(i)$$



Como $f_k \le f_{k+1}$, para todo k, podemos aplicar TCM, y así

$$\lim_{k\to\infty}\int f_k\,d\mu = \int f\,d\mu$$

$$\Rightarrow \int f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} f(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

■

a) $f_k \in M^+(X,\mathcal{X})$ y $f_k \nearrow_k f$, luego $f \in M^+(X,\mathcal{X})$

¡¡Sí funciona!!

4.T. Suppose that $(f_n) \subset M^+(X, \mathbf{X})$, that (f_n) converges to f, and that

$$\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu < +\infty.$$

Prove that

$$\int_E f\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu$$

for each $E \in \mathbf{X}$.

Por Reducción al absurdo: Supongamos que existe $E \in X$ tal que la igualdad no se cumple. Así

$$\int_E f\,d\mu \neq \lim \int_E f_n\,d\mu.$$

Notemos que

$$\lim \int_E f_n\,d\mu = \liminf \int_E f_n\,d\mu$$

Recordemos el Lema de Fatou:

Sea $f_n \in M^+(X,X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf \int f_n\,d\mu$$

Borrador: Notemos que $f_n \to f$. Luego

$$\int f\,d\mu = \int \lim f_n\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu.$$ [Por hipótesis]

De este modo, tendremos que

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \liminf f_n\,d\mu < \liminf \int_E f_n\,d\mu$$

Luego.

$$\int f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_{X\setminus E} f\,d\mu$$

$$\boxed{<} \liminf \int_E f_n\,d\mu + \liminf \int_{X\setminus E} f_n\,d\mu$$

$$\leq \liminf \left(\int_E f_n\,d\mu + \int_{X\setminus E} f_n\,d\mu \right)$$

$$= \liminf \int f_n\,d\mu$$

$$= \int f\,d\mu$$

Llegamos a que

$$\int f\,d\mu < \int f\,d\mu$$

lo que es una contradicción.

Luego, podemos afirmar que $\forall E \in X$:

$$\int_E f\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu$$

$\blacksquare$