UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION RECUPERACION
Ecuaciones Diferenciales ordinarias (521218-525221)

Problema 1 (Este Problema consta de dos preguntas independientes entre si) ([15 puntos])

(i) Considere el problema con valor inicial, PVI,

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(y(x)-2)(y(x)+4)}{x-8}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

¿Qué condiciones se debe imponer sobre el PVI anterior, para tener existencia y unicidad de solución?

(ii) Determine, si es que existe, la solución del PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y^2 - 64, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Desarrollo:

(i) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ donde $f(x,y) = \dfrac{(y-2)(y+4)}{x-8}$. Además

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y+2}{x-8}.$$

Observe que las funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son ambas continuas en las regiones conexas

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 8\} \text{ y} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 8\} \end{aligned}$$

Por tanto, del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, el PVI dado tiene única solución para $(x_0, y_0) \in A_1$ o para $(x_0, y_0) \in A_2$. ([**5 puntos**])

(ii) Del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, sigue que el PVI a resolver, tiene única solución. Para determinar su solución, usando Separación de Variables, resolvemos

$$\frac{dy}{(y+8)(y-8)} = dx.$$

Puesto que $\dfrac{1}{(y+8)(y-8)} = \dfrac{-(1/16)}{y+8} + \dfrac{(1/16}{y-8}$, sigue que

$$ln\left|\frac{y-8}{y+8}\right| = 16x + k \quad \text{donde } k \text{ es constante.}$$

Sigue que $e^{16x+k} = \left|\dfrac{y-8}{y+8}\right|$. **[5 puntos]**

Como $y(0) = 1$, resulta

$$\frac{y(0)-8}{y(0)+8} = -\frac{7}{9}.$$

Así, para todo x suficientemente cercano a $x = 0$, resulta que

$$\left|\frac{y(x)-8}{y(x)+8}\right| = \frac{8-y(x)}{y(x)+8}.$$

Por tanto, para todo x suficientemente cercano a $x = 0$, se obtiene

$$e^{16x+k} = Ce^{16x} = \frac{8-y(x)}{y(x)+8}.$$

esto es,

$$8 - y = Ce^{16x}(8+y).$$

Evaluando en $x = 0$, sigue $C = 7/9$ y finalmente,

$$y(x) = \frac{8\Big(1-(7/9)e^{16x}\Big)}{1+(7/9)e^{16x}}. \qquad \text{([}\textbf{5 puntos}\text{])}$$

Problema 2 ([15 puntos])

(*i*) ([**6 puntos**]) Un cuerpo de masa 2 [kg] se une a un resorte que está colgando de un techo, estirando el resorte 0.4 [m]. El cuerpo es desplazado 1.5 [m] hacia abajo de la posición de equilibrio y se suelta desde el reposo, en aquel instante se aplica una fuerza externa $F(t) = \cos(2t)$ sobre el sistema. Considere que el medio que rodea el sistema ofrece una resistencia $\mu = 1$ $[N \cdot s/m]$ Determine, sin resolver, el PVI que describe el problema dado. Considere que $g = 10[m/s^2]$

(*ii*) ([**9 puntos**]) Un sistema masa-resorte es modelado por el siguiente PVI

$$\begin{cases} 3y''(t) + 12y(t) = 3\cos(2t) \\ y(0) = 1/2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Usando el método de variación de parámetros, determine la solución del PVI dado.

Desarrollo:

(*i*) Considerando que la masa del cuerpo es $m = 2$, la resistencia del medio es $\mu = 1$, el estiramiento del resorte es $l = 0.4$, se tiene que

(a) $\lambda = \dfrac{\mu}{2m} = \dfrac{1}{4}$

(b) $kl - mg = 0 \Rightarrow \dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{l} = \dfrac{10}{0.4} = 25$

Por otra parte $x(0) = 1.5$ y $x'(0) = 0$, por lo que el PVI que describe el problema dado es

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{1}{2}y'(t) + 25y(t) = (1/2)\cos(2t) \\ y(0) = 1.5 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

([**6 puntos**])

(ii) Normalizando la EDO dada, sigue

$$y''(t) + 4y(t) = \cos(2t)$$

Determinamos la solución homogénea asociada a la EDO: La ecuación característica de la EDO dada es $r^2 + 4 = 0$, por lo que $r = \pm 2i$ son las raices (de multiplicidad 1) del polinomio característico, por lo tanto la solución homogénea es

$$y_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t), \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora determinamos la solución particular: Utilizando el método de variación de parámetros, proponemos la siguiente solución particular

$$y_p(t) = C_1(t) \cos(2t) + C_2(t) \sin(2t)$$

donde $C_1(t), C_2(t)$ son funciones por determinar que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos(2t)C_1'(t) + \sin(2t)C_2'(t) = 0 \\ (\cos(2t))'C_1'(t) + (\sin(2t))'C_2'(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

En efecto,

$$\begin{cases} \cos(2t)C_1'(t) + \sin(2t)C_2'(t) = 0 \\ -2\sin(2t)C_1'(t) + 2\cos(2t)C_2'(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema dado mediante la regla de Cramer se obtiene que las soluciones están dadas de la siguiente forma

$$C_1'(t) = \frac{W_1}{W[\cos(2t), \sin(2t)]}$$

$$C_2'(t) = \frac{W_2}{W[\cos(2t), \sin(2t)]}$$

donde $W[\cos(2t), \sin(2t)]$ es el Wronskiano del conjunto $\{\cos(2t), \sin(2t)\}$ y W_i es el Wronskiano del conjunto $\{\cos(2t), \sin(2t)\}$ reemplazando la columna i por la columna $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

Luego $W[\cos(2t),\sin(2t)] = \begin{vmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = 2$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(2t) \\ \cos(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = -\cos(2t)\sin(2t) = -\dfrac{1}{2}\sin(4t)$

$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(2t) & 0 \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{vmatrix} = \cos^2(2t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(4t)$

En efecto, considerando la constante de integración igual a 0,

$C_1'(t) = -\dfrac{1}{4}\sin(4t) \Rightarrow C_1(t) = \dfrac{1}{16}\cos(4t)$

$C_2'(t) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\cos(4t) \Rightarrow C_2(t) = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{16}\sin(4t)$

Reemplazando los resultados recién obtenidos, se deduce la solución particular,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{16}\cos(4t)\cos(2t) + \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}\sin(4t)\right)\sin(2t) \\ &= \frac{1}{16}\cos(4t)\cos(2t) + \frac{1}{16}\sin(4t)\sin(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t) \end{aligned}$$

$\cos(4t)\cos(2t) + \sin(4t)\sin(2t) = \cos(4t-2t) = \cos(2t)$, en efecto,

$$y_p(t) = \frac{1}{16}\cos(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t)$$

Considerando que el primer término de y_p es un múltiplo de $\cos(2t)$, la solución general es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t)$$

En efecto, $y'(t) = -2C_1\sin(2t) + 2C_2\cos(2t) + \frac{1}{4}(\sin(2t) + 2t\cos(2t))$

Reemplazando las condiciones iniciales del PVI,

$$y(0) = C_1 = 1/2$$

$$y'(0) = 2C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = 2$$

Por lo tanto $y(t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t) + 2\sin(2t) + \dfrac{1}{4}t\sin(2t)$ ([**9 puntos**])

Problema 3. ([**15 puntos**])

Usando valores y vectores propios determine la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} x'(t) = -16\,x(t) + 24\,y(t) + 50\,e^{5\,t} \\ y'(t) = -9\,x(t) + 26\,y(t) + 50\,e^{10\,t} \end{cases}$$

Dato:

$$\begin{pmatrix} -16 & 24 \\ -9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -16 & 24 \\ -9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Elegimos $\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}(t) = A\,\vec{Z}(t) + \vec{F}(t) \tag{1}$$

con $A = \begin{pmatrix} -16 & 24 \\ -9 & 26 \end{pmatrix}$ y $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 50\,e^{5\,t} \\ 50\,e^{10\,t} \end{pmatrix}$.

Del dato dado tenemos que los valores propios de A son 20 y -10, los cuales son simples y tienen asociados los vectores propios $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por lo tanto, la solución general de

$$\frac{d}{dt}\vec{Z}_h(t) = A\,\vec{Z}_h(t)$$

es

$$\vec{Z}_h(t) = c\,e^{20\,t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d\,e^{-10\,t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $c, d \in \mathbb{R}$.

Una solución particular de (1) es

$$\vec{Z}_p(t) = c(t)\;e^{20\,t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d(t)\;e^{-10\,t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con

$$c'(t)\;e^{20\,t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d'(t)\;e^{-10\,t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,e^{5\,t} \\ 50\,e^{10\,t} \end{pmatrix}.$$

[8 puntos]

Ya que

$$\begin{pmatrix} e^{20\,t} & 2\,e^{-10\,t} \\ 3\,e^{20\,t} & e^{-10\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\,e^{5\,t} \\ 50\,e^{10\,t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{20\,t} & 2\,e^{-10\,t} \\ 0 & 5\,e^{-10\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\,e^{5\,t} \\ 75\,e^{5\,t} - 50\,e^{10\,t} \end{pmatrix}.$$

De donde obtenemos, $d'(t) = 15\,e^{15\,t} - 10\,e^{20\,t}$. Luego,

$$e^{20\,t}c'(t) + 30\,e^{5\,t} - 20\,e^{10\,t} = 25\,e^{5\,t},$$

así que $c'(t) = 20\,e^{-10\,t} - 5\,e^{-15\,t}$.

Integrando se llega a que $c(t) = -2\,e^{-10\,t} + \frac{1}{3}\,e^{-15\,t}$ y $d(t) = e^{15\,t} - \frac{1}{2}\,e^{20\,t}$, donde hemos tomado las constantes de integración iguales a 0. Entonces,

$$\vec{Z}_p(t) = \left(\frac{1}{3}\,e^{5\,t} - 2\,e^{10\,t}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(e^{5\,t} - \frac{1}{2}\,e^{10\,t}\right)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\vec{Z}\,(t) = \vec{Z}_h\,(t) + \vec{Z}_p\,(t)$,

$$x\,(t) = 2\,c\,e^{20\,t} + 4\,d\,e^{-10\,t} + \frac{14}{3}\,e^{5\,t} - 6\,e^{10\,t}$$

y

$$y\,(t) = 3\,c\,e^{20\,t} + d\,e^{-10\,t} + 2\,e^{5\,t} - \frac{13}{2}\,e^{10\,t},$$

donde c y d son constantes reales.

[7 puntos]

Problema 4.

Considere la función F definida por $F(s) = \dfrac{3s^2 - 5s + 16}{(s^2 - 8s + 25)(s+3)}$.

(a) ([**5 puntos**]) Determine las constantes A, B y C tales que:

$$\frac{3s^2 - 5s + 16}{(s^2 - 8s + 25)(s+3)} = \frac{As + B}{s^2 - 8s + 25} + \frac{C}{s+3}.$$

(b) ([**10 puntos**]) Determine $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.+

Solución:

(a) Tenemos

$$\frac{3s^2 - 5s + 16}{(s^2 - 8s + 25)(s+3)} = \frac{As + B}{s^2 - 8s + 25} + \frac{C}{s+3}$$

$$\Leftrightarrow 3s^2 - 5s + 16 = (As + B)(s+3) + C(s^2 - 8s + 25)$$

$$\Leftrightarrow 3s^2 - 5s + 16 = (A + C)s^2 + (B + 3A - 8C)s + 3B + 25C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 3 \\ B + 3A - 8C = -5 \\ 3B + 25C = 16 \end{cases}$$

Este sistema tiene la solución: $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$.

(5pts)

(b) Entonces,

$$\frac{3s^2 - 5s + 16}{(s^2 - 8s + 25)(s+3)} = \frac{2s - 3}{s^2 - 8s + 25} + \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2s - 3}{s^2 - 8s + 25}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+3}\Big].$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2s - 3}{(s-4)^2 + 3^2}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+3}\Big]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\Big[2\frac{s-4}{(s-4)^2 + 3^2} + \frac{5}{3}\frac{3}{(s-4)^2 + 3^2}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+3}\Big]$$

$$= 2e^{4t}\cos(3t) + \frac{5}{3}e^{4t}\operatorname{sen}(3t) + e^{-3t}.$$

(10pts)

LBV/HN/JMS/CMG//jms
Julio, 17 de 2023.