Método de Galerkin Discontinuo: Teoría y Aplicaciones
Manuel Solano
Tarea 4 (12 de junio de 2023.)

Fecha de entrega: 26 de junio de 2023.

1. Considere la formulación variacional mixta: Dado $f \in L^2(\Omega)$, hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{H} \times Q$ tal que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_\Omega - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, u)_\Omega &= 0, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, v)_\Omega &= (f, v)_\Omega,\end{aligned}$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{H} \times Q$, donde $\boldsymbol{H} := H(\mathrm{div}, \Omega)$ y $Q := L^2(\Omega)$. esta ecuación se discretiza utilizando el esquema de Galerkin discontinuo (DG): Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{H}_h \times Q_h := [\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)]^d \times \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$ tal que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_{\mathcal{T}_h} + (\nabla_h u_h, \boldsymbol{\tau}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle [\![\boldsymbol{\tau}_h]\!], \{\!\{\widehat{u}_h - u_h\}\!\}\rangle_{\mathcal{E}_h^i} + \langle \{\!\{\boldsymbol{\tau}_h\}\!\}, [\![\widehat{u}_h - u_h]\!]\rangle_{\mathcal{E}_h^i} + \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{n}, \widehat{u}_h - u_h\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial} &= 0 \\ -(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \nabla_h, v_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \{\!\{\widehat{\vec{\sigma}}_h\}\!\}, [\![v_h]\!]\rangle_{\mathcal{E}_h^i} + \langle [\![\widehat{\vec{\sigma}}_h]\!], \{\!\{v_h\}\!\}\rangle_{\mathcal{E}_h^i} + \langle \widehat{\vec{\sigma}}_h \cdot \boldsymbol{n}, v_h\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial} &= (f, v_h)_{\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

$\forall (\boldsymbol{\tau}_h, v_h) \in \boldsymbol{H} \times Q_h$, donde las trazas numéricas se definen de la siguiente manera:

$$\widehat{u}_h := \begin{cases} \{\!\{u_h\}\!\} + C_{12} [\![u_h \boldsymbol{n}]\!] + C_{22} [\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!] & \text{en } \mathcal{E}_h^i, \\ 0 & \text{en } \mathcal{E}_h^\partial \end{cases}$$

y

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h := \begin{cases} \{\!\{\boldsymbol{\sigma}_h\}\!\} + C_{21} [\![\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{n}]\!] + C_{11} [\![u_h]\!] & \text{en } \mathcal{E}_h^i, \\ \boldsymbol{\sigma}_h + C_{11} \boldsymbol{n} & \text{en } \mathcal{E}_h^\partial. \end{cases}$$

   (a) Probar que esquema es consistente. **Indicación:** Se debe asumir cierta regularidad de la solución del problema continuo $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ para que las trazas estén bien definidas

   (b) Determinar condiciones sobre C_{11}, C_{12}, C_{21} y C_{22} que garanticen que este esquema DG tiene solución única.

2. **[Caracterización de** $H(\mathrm{div}; \Omega)$**].** Probar que

$$H(\mathrm{div}; \Omega) = \left\{ \vec{\sigma} \in H(\mathrm{div}; \mathcal{T}_h) : \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \vec{\sigma} \cdot \vec{n}, \xi \rangle_{\partial T} = 0 \ \forall \xi \in M(\partial \mathcal{T}_h) \right\},$$

donde, para $T \in \mathcal{T}_h$, $\langle \cdot, \cdot, \rangle_{\partial T}$ es la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial T)$ y

$$M(\partial \mathcal{T}_h) := \left\{ \xi \in \Pi_{T \in \mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial T) : \exists v \in H_0^1(\Omega), v|_{\partial T} = \xi|_{\partial T} \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

3. Considere el problema: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega u \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0, \\ \int_\Omega w \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \int_\Omega f w, \end{aligned} \right. \qquad \forall (\boldsymbol{v}, w) \in H(\mathrm{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \tag{1}$$

y la fomrulación híbrida: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u, \lambda) \in H(\mathrm{div}; \mathcal{T}_h) \times L^2(\Omega) \times M(\partial \mathcal{T}_h)$ tal que

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} - \int_\Omega u \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, \lambda \rangle_{\partial T} = 0 &= 0, \\ \int_\Omega w \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \int_\Omega f w, \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \xi \rangle_{\partial T} &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \forall (\boldsymbol{v}, w, \xi) \in H(\mathrm{div}; \mathcal{T}_h) \times L^2(\Omega) \times M(\partial \mathcal{T}_h) \tag{2}$$

Demostrar que $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ es solución de (1) y $\lambda|_{\partial T} = u|_{\partial T} \ \forall T \in \mathcal{T}_h$ sí y sólo sí $(\boldsymbol{\sigma}, u, \lambda)$ es solución de (2).