

CALCULO III

Listado (Espacios metricos, Teorema de B-W y sucesiones)

Ejercicios ayudantia

1. Probar que el conjunto $X = \mathbb{R}^n$ y la función $d_\infty(x, y)$ definida como:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

Es un espacio métrico

2. Sea A un subconjunto acotado de \mathbb{R} y x_n una sucesión de A

- (a) Demuestre que existe una subsucesion x_{n_k} que converge a un punto de \mathbb{R}
- (b) Puedes garantizar que el Lim de la subsucesion pertenece a A?

3. Sea $b_n = (\sin(\frac{n\pi}{3}), \cos(\frac{n\pi}{5}), \frac{(-1)^n}{n})$. Usando el teorema de B-W concluya que tiene una subsucesion convergente

4. Sea x_n una sucesión en \mathbb{R} tal que $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{2}$ con $x_1 = 0$

- (a) Demuestre que la sucesión es monótona y acotada
- (b) Pruebe que la sucesión es de Cauchy

Ejercicios para el estudiante

1. Compruebe si las siguientes sucesiones son de Cauchy y encuentre sus límites cuando $n \rightarrow \infty$

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$

2. Sea E, un espacio métrico dotado de una métrica $d(x,y)$, verifique que las siguientes funciones son métricas

- $\alpha(x, y) := \sqrt{d(x, y)}$
- $\beta(c, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$
- $\gamma(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$

3. Sea la sucesion x_n definida por:

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

- Usa el teorema de B-W para demostrar que existe una subsucesión convergente
- Encuentra una subsucesión convergente y su límite

4. Sea x_n una sucesión definida por números aleatorios en un intervalo $[0, 1]$.

- Justifica porque la sucesión está acotada
- Usa el teorema de B-W para justificar la existencia de una subsucesión convergente
- Explica por qué no necesariamente todas las sustituciones tienen el mismo límite