Tarea 6: Análisis Funcional II

Campos, Fernando   Carrasco, Sergio   Manríquez, Jaime

30 de julio de 2019

Ejercicio 1. Repita la demostración de [RT04, Teorema 1.3-2] para mostrar que la traza de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$ está bien definida y es continua.

¿Por qué esta demostración falla con $p = \infty$?

Ejercicio 2. Demuestre que la traza de $W^{1,\infty}(\Omega)$ en $L^\infty(\Omega)$ está bien definida usando [Bre10, Theorem 9.12]

Ejercicio 3. Demuestre que la traza de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ no es sobreyectiva y diga cuál es su imagen.

Ejercicio 4. Demuestre que la traza de $W^{1,1}(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ sí es sobreyectiva.

Ejercicio 5. Compare el Teorema de Rellich [RT04, Ch. 1] con el Teorema 8.6 [LL01, Ch. 8].

Argumente si es válido que Ω acotado implica que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ de manera compacta para

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2n}{(n-2)} & \text{si } n \geq 3, \\ 1 \leq p < \infty & \text{si } n = 2, \\ 1 \leq p \leq \infty & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

¿Es este resultado contradictorio con la Observación 10 [Bre10, Ch. 8]?

Demostración. Agregar demostración de la primera parte.

Recordemos que la Observación 10 [Bre10, Ch. 8] estipula que la inyeccción $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ nunca es compacta para I *no acotado*, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (i.e. el caso $n = 1$, $\Omega = I$). Como en las hipótesis del comienzo asumimos Ω acotado, entonces no contradecimos la parte anterior. Más aún, en la misma observación se indica que la inyección $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(J)$ es compacta para todo $J \subset I$ acotado. En particular, $J = I$. ∎

Ejercicio 6 ([Bre10, Ex. 8.15])**.** Sea $I = (0, 1)$.

1. Sea $1 \leq q < \infty$ y $1 < r \leq \infty$. Demuestre que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^a \|u\|_{L^q(I)}^{1-a} \qquad \forall u \in W^{1,r}(I)$$

para alguna constante $C = C(q, r)$, donde $0 < a < 1$ es tal que

$$a \left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{q}.$$

2. Sea $1 \leq q < p < \infty$ y $1 \leq r \leq \infty$.

   Demuestre que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b} \qquad \forall u \in W^{1,r}(I)$$

   para alguna constante $C = C(p,q,r)$, donde $0 < b < 1$ es tal que

$$b\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

3. Bajo las mismas hipótesis de la pregunta 2, demuestre que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u'\|_{L^r(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b} \qquad \forall u \in W^{1,r} \text{ con } \int_I u = 0.$$

Demostración.

1. Sea $u \in W^{1,r}(I)$. Si $u \notin L^q(I)$, entonces $\|u\|_{L^q(I)} = \infty$ y la desigualdad se verifica trivialmente. Supongamos $u \in L^q(I)$.

   Supongamos que $u(0) = 0$. Luego, podemos escribir $G(u(x)) = \int_0^x G'(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$ con $G(t) = |t|^{\alpha-1} t$ y $\alpha = \frac{1}{a}$. Más precisamente, de lo anterior tenemos que

$$|u(x)|^\alpha = \left|\int_0^x \alpha |u(t)|^{\alpha-1} u'(t)\mathrm{d}t\right| \qquad \forall x \in I$$

   Aplicando la desigualdad de Hölder para r, un pequeño cálculo nos arroja que su conjugado se puede deducir a partir de

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{q} &\iff 1 + \frac{q}{r'} = \alpha \\ &\iff r' = \frac{q}{\alpha - 1}, \end{aligned}$$

   de modo que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(I)}^\alpha &\leq \alpha \left(\int_I |u|^q\right)^{1/r'} \|u'\|_{L^r(I)} \\ &\leq \alpha \|u\|_{L^q(I)}^{q/r'} \|u'\|_{L^r(I)} \\ &\leq \alpha \|u\|^{\alpha-1} \|u'\|_{L^r(I)} \end{aligned}$$

   Notando que $\|u'\|_{L^r} \leq \|u\|_{W^{1,r}}$ y $\frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - a$, al despejar $\|u\|_{L^\infty(I)}$ tenemos que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C(q,r) \|u\|_{W^{1,r}(I)}^a \|u\|_{L^q(I)}^{1-a}$$

   con $C(q,r) = 1 + \frac{q(r-1)}{r}$.

   Supongamos ahora que $u(1) = 0$. De manera análoga al caso anterior podemos escribir $G(u(x)) = -\int_x^1 G'(u(t))u'(t)\mathrm{d}t$, de modo que

$$|u(x)|^\alpha = \left|\int_x^1 \alpha |u(t)|^{\alpha-1} u'(t)\mathrm{d}t\right| \qquad \forall x \in I,$$

y concluir que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C(q,r)\, \|u\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u\|^{1-a}_{L^q(I)}\,.$$

Por tanto, consideremos dos funciones *cut-off* $\xi, \eta \in C(\bar{I})$ tales que

$$\begin{cases} \xi(0) = 0,\ \xi(t) = 1, & \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \eta(t) = 1,\ \eta(1) = 0, & \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Definamos $u_1 = \xi u$ y $u_2 = \eta u$, las cuales verifican $u_1(0) = 0$ y $u_2(1) = 0$. Del resultado anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{L^\infty(I)} &\leq C(q,r)\, \|u_1\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u_1\|^{1-a}_{L^q(I)} \\ &\leq C(q,r)\, \|u\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u\|^{1-a}_{L^q(I)} \\ \|u_2\|_{L^\infty(I)} &\leq C(q,r)\, \|u_2\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u_2\|^{1-a}_{L^q(I)} \\ &\leq C(q,r)\, \|u\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u\|^{1-a}_{L^q(I)} \end{aligned}$$

Además, como $\|u_1\|_{L^\infty(I)} \geq \|u\|_{L^\infty(1/2,1)}$ y $\|u_2\|_{L^\infty(I)} \geq \|u\|_{L^\infty(0,1/2)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(I)} &\leq \|u\|_{L^\infty(0,1/2)} + \|u\|_{L^\infty(1/2,1)} \\ &\leq \|u_1\|_{L^\infty(I)} + \|u_2\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq 2C(q,r)\, \|u\|^a_{W^{1,r}(I)}\, \|u\|^{1-a}_{L^q(I)} \end{aligned}$$

probando lo pedido.

$\square$

2. Sea $u \in W^{1,r}(I)$. Como I es acotado, si $u \notin L^p(I)$, entonces $u \notin L^q(I)$ (pues $q < p$) y por tanto ambos lados de la desigualdad son infinito. Nuevamente supondremos que $u \in L^q(I)$ ya que el caso contrario es trivial.

   Si suponemos $u \in L^p(I)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{L^p(I)} &= \int_I |u|^q\, |u|^{p-q} \\ &\leq \|u^q\|_{L^1(I)}\, \left\|u^{p-q}\right\|_{L^\infty(I)} \\ &= \|u\|^q_{L^q(I)}\, \|u\|^{p-q}_{L^\infty(I)}\,, \end{aligned}$$

   y por tanto

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq \|u\|^{(p-q)/p}_{L^\infty(I)}\, \|u\|^{q/p}_{L^q(I)}\,.$$

   Para $r = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} b\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} &\iff 1 - b = \frac{q}{p} \\ &\iff b = \frac{p-q}{p} \end{aligned}$$

   de modo que $(p-q)/p = b$ y $q/p = 1 - b$. Así,

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq \|u\|^b_{L^\infty(I)}\, \|u\|^{1-b}_{L^q(I)}\,.$$

Además, como $W^{1,r}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ de manera continua, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b}.$$

Para $r > 1$ podemos aplicar el resultado anterior para obtener que

$$\|u\|_{L^\infty(I)}^{p-q} \leq \left(C(q,r) \|u\|_{W^{1,r}(I)}^a \|u\|_{L^q(I)}^{1-a} \right)^{p-q},$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(I)}^q \|u\|_{L^\infty(I)}^{p-q} &\leq C(p,q,r) \|u\|_{L^q(I)}^q \|u\|_{W^{1,r}(I)}^{a(p-q)} \|u\|_{L^q(I)}^{(1-a)(p-q)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^{a(p-q)} \|u\|_{L^q(I)}^{(1-a)(p-q)+q} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^{a(p-q)/p} \|u\|_{L^q(I)}^{(1-a)(p-q)/p+q/p}$$

donde $C := C(p,q,r)$ es una constante arbitraria (no necesariamente la misma) en cada paso.
Haciendo las cuentas, tenemos que

$$\begin{aligned} a\frac{p-q}{p} &= qa\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \\ &= qabS \\ &= S^{-1}bS \\ &= b \\ (1-a)\frac{p-q}{p} + \frac{q}{p} &= q(1-a)bS + \frac{q}{p} \\ &= \left(qbS + \frac{q}{p}\right) - qabS \\ &= 1-b \end{aligned}$$

donde $S = \left(\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right)$.
Así, de lo anterior concluimos que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,r}(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b}.$$

□

3. Sea $u \in W^{1,r}(I)$ tal que $\int_I u = 0$. Esto es, que $\|u\|_{L^1(I)} = 0$.
   De [Bre10, Remark 11; p. 214], tenemos que

   $$|||u||| = \|u'\|_{L^r(I)} + \|u\|_{L^1(I)}$$

   es una norma equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,r}}$. Como $\|u\|_{L^1(I)} = 0$ por hipótesis, entonces la norma de u' en $L^r(I)$ es equivalente a la norma de u en $W^{1,r}(I)$. Por tanto, existe una constante C tal que

   $$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^r(I)}.$$

   Tomando el resultado de la Pregunta 2 y considerando esta última desigualdad, es fácil concluir que

   $$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u'\|_{L^r(I)}^b \|u\|_{L^q(I)}^{1-b}$$

   donde C cumple el rol de una constante arbitraria no necesariamente igual en cada paso.

$\blacksquare$

Ejercicio 7 ([Bre10, Ex. 8.16])**.** Sea $E = L^p(0,1)$ con $1 \le p < \infty$. Considere un operador no acotado $A : D(A) \subset E \to E$ definido por

$$D(A) = \{u \in W^{1,p}(0,1), \quad u(0) = 0\} \text{ y } Au = u'.$$

1. Verifique que $D(A)$ es denso en E y que A es cerrado.
2. Determine $R(A)$ y $N(A)$.
3. Calcule A^*. Verifique que $D(A^*)$ es denso en $E' = L^{p'}(0,1)$ cuando $1 < p < \infty$, pero $D(A^*)$ no es denso en $E' = L^\infty(0,1)$ cuando $p = 1$.
4. Repita las mismas preguntas para $\tilde{A}$ definido por

$$D(\tilde{A}) = W_0^{1,p}(0,1) \text{ y } \tilde{A}u = u'.$$

Ejercicio 8 ([Bre10, Ex. 8.24])**.** Sea $I = (0,1)$.

1. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε tal que

$$|u(1)|^2 \le \varepsilon \|u'\|_{L^2(I)}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(I)}^2 \qquad \forall u \in H^1(I).$$

2. Demuestre que si la constante $k > 0$ es suficientemente grande, entonces para toda $f \in L^2(I)$ existe un único $u \in H^2(I)$ que satisfaga

$$\begin{cases} -u'' + ku = f & \text{en } (0,1), \\ u'(0) = 0, & u'(1) = u(1). \end{cases} \tag{1}$$

¿Cuál es la formulación débil de (1)? ¿Cuál es el problema de minimización asociado?

3. Asuma que k es suficientemente grande. Sea T el operador $T : f \mapsto u$, donde u es la solución de (1). Demuestre que T es un operador compacto auto-adjunto en $L^2(I)$.
4. Deduzca que existe una sucesión (λ_n) en $\mathbb{R}$ con $|\lambda_n| \to \infty$ y una sucesión (u_n) de funciones en $C^2(\bar{I})$ tal que $\|u_n\|_{L^2(I)} = 1$ y

$$\begin{cases} -u_n'' = \lambda_n u_n & \text{en } (0,1), \\ u_n'(0) = 0, & u_n'(1) = u_n(1). \end{cases}$$

Demuestre que $\lambda_n \to +\infty$.

5. Sea Λ el conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $u \not\equiv 0$ que satisface

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{en } (0,1), \\ u'(0) = 0, & u'(1) = u(1). \end{cases}$$

Determine los elementos positivos de Λ. Demuestre que existe un único valor negativo λ (denotado por λ_0) en Λ.

6. ¿Qué sucede en la pregunta 2 cuando $k = |\lambda_0|$?

Demostración.

1. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|u^2(1)\right| &= \left|u^2(x) + 2\int_x^1 u(t)u'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |u(x)|^2 + \left|\int_x^1 2u(t)u'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |u(x)|^2 + \int_0^1 2\,|u(t)u'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq |u(x)|^2 + \int_0^1 \left(\frac{|u(t)|^2}{\varepsilon} + \varepsilon\,|u'(t)|^2\right)\mathrm{d}t \\
&= |u(x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u\|^2_{L^2(I)} + \varepsilon\,\|u'\|^2_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

   donde la última desigualdad se desprende de la ε-desigualdad de Young.

   Finalmente, integrando sobre $(0,1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|u^2(1)\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\,\|u\|^2_{L^2(I)} + \varepsilon\,\|u'\|^2_{L^2(I)}\right)\mathrm{d}x \\
\iff\ &\left|u^2(1)\right|\,|I| \leq \|u\|^2_{L^2(I)} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\,\|u\|^2_{L^2(I)} + \varepsilon\,\|u'\|^2_{L^2(I)}\right)|I| \\
\iff\ &\left|u^2(1)\right| \leq \varepsilon\,\|u'\|^2_{L^2(I)} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)}_{C_\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

   Del último paso también notamos que si reemplazamos I por otro intervalo acotado J, entonces C_ε también depende de $|J|$.

2. Multiplicando por una función test $v \in H^1(I)$ e integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_I -u''v + \int_I kuv = \int_I fv \iff\ &\int_I u'v' - (u'(1)v(1) - u'(0)v(0)) + k\int_I uv = \int_I fv \\
\iff\ &\left(\int_I u'v' + kuv\right) - u(1)v(1) = \int_I fv
\end{aligned}$$

   de donde obtenemos la formulación variacional:

   Hallar $u \in H^1(I)$ tal que

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H^1(I)$$

   con $a(u,v) = \left(\int_I u'v' + kuv\right) - u(1)v(1)$ y $F(v) = \int_I fv$.

Es claro que F es continuo. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left| \int_I u'v' + kuv \right| + |u(1)v(1)| \\
&\leq \max\{1,k\} \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)} + |u(1)v(1)| \\
&\leq \max\{1,k\} \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)} + \|u\|_{L^\infty(I)} \|v\|_{L^\infty(I)} \\
&\leq (C + \max\{1,k\}) \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la inyección continua $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$.

Para demostrar coercividad, notamos que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \left(\int_I (u')^2 + ku^2 \right) - |u(1)|^2 \\
&= \|u'\|_{L^2(I)}^2 + k \|u\|_{L^2(I)}^2 - |u(1)|^2 \\
&\geq \|u'\|_{L^2(I)}^2 + k \|u\|_{L^2(I)}^2 - \varepsilon \|u'\|_{L^2(I)}^2 - C_\varepsilon \|u\|_{L^2(I)}^2 \\
&= (1-\varepsilon) \|u'\|_{L^2(I)}^2 + (k - C_\varepsilon) \|u\|_{L^2(I)}^2 \\
&\geq \min\{1-\varepsilon, k - C_\varepsilon\} \|u\|_{H^1(I)}^2
\end{aligned}$$

Por tanto, como podemos escoger $\varepsilon < 1$, basta considerar $k > 0$ lo suficientemente grande de modo que $k - C_\varepsilon > 0$.

Tomando la cota explícita de la Pregunta 1, tenemos que $C_\varepsilon = 1 + 1/\varepsilon$, por lo que tenemos $C_\varepsilon > 2$. Por tanto, tomar k *suficientemente grande* es considerar $k > 2$.

Finalmente, para obtener la regularidad H^2 notamos que

$$u'' = \underbrace{f - ku}_{\in L^2(I)},$$

y $u \in H^1(I)$. Por tanto, u tiene todas sus derivadas (en el sentido de las distribuciones) hasta orden 2 en $L^2(I)$. Es decir, $u \in H^2(I)$.

El problema de minimización asociado es

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - F(v) \right\},$$

el cual en este caso se escribe

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_I v^2 + kv^2 \right) - \frac{1}{2} v(1)^2 - \int_I fv \right\},$$

$\square$

3. Con $k > 0$ suficientemente grande, tenemos que (1) tiene solución única u en $H^1(I)$ para todo $f \in L^2(I)$. Luego, el operador $\tilde{T} : L^2(I) \to H^1(I)$ (que coincide algebraicamente con T, pero no topológicamente) está bien definido.

   Del Lema de Lax-Milgram tenemos la dependencia continua del dato, esto es

   $$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \|f\|_{L^2(I)},$$

de modo que $T \in \mathcal{L}(L^2, H^1)$. Como $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ de manera compacta, el operador inclusión $i : H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ es compacto. Luego, $T = i \circ \tilde{T}$ es compacto pues es la composición de un operador compacto con uno continuo.

Más aún, T es auto-adjunto. En efecto, sean $f, g \in L^2(I)$ con $u = T(f)$ y $v = T(g)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle_{L^2(I)} &= \int_I ug \\
&= \int_I u(-v'' + kv) \\
&= -\int_I uv'' + \int_I kuv \\
&= -\left(-\int_I u'v' + u(1)v(1)\right) + \int_I kuv \\
&= -\left(\int_I u''v - u(1)v(1) + u(1)v(1)\right) + \int_I kuv \\
&= \int_I (-u'' + ku)v \\
&= \int_I fv \\
&= \langle f, Tg\rangle_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

□

4. Como T es compacto y auto-adjunto y $L^2(I)$ es un Hilbert separable, por [Bre10, Theorem 6.11] existe una base de Hilbert de $L^2(I)$ compuesta de vectores propios de T. Más aún, esta base se puede ortonormalizar y obtenemos una sucesión $(u_n) \subset L^2(I)$ de vectores propios de T tales que

$$Tu_n = \mu_n u_n. \tag{2}$$

Notamos que T es inyectivo, pues $Tf = \theta_{L^2(I)}$ implica que $f = -\theta''_{L^2(I)} + k\theta_{L^2(I)} = 0$, de modo que $\mu_n \neq 0$, $\forall n$. Luego, en virtud de [Bre10, Theorem 6.8], tenemos que el espectro puntual (i.e. aquellos que verifican (2)) converge a 0.

Además, tenemos que si $\mu_n u_n$ es solución del problema (1) con dato u_n, entonces se tiene la ecuación

$$\begin{aligned}
-(\mu_n u_n)'' + k(\mu_n u_n) = u_n \iff& -u_n'' + ku_n = \frac{1}{\mu_n} u_n \\
\iff& -u_n'' = \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_n} - k\right)}_{\lambda_n} u_n
\end{aligned}$$

con condiciones de contorno $u_n'(0) = 0$, $u_n'(1) = u_n(1)$.

Más aún, como $u_n \in H^1(I)$, por la inyección de $H^1(I)$ en las funciones continuas obtenemos $u_n'' \in C^0(\bar{I})$ de modo que $u_n \in C^2(\bar{I})$, $\forall n$.

Finalmente, como $\mu_n \to 0$ y k es fijo, se concluye que $\lambda_n \to \infty$. □

5. En este caso tenemos un problema de Sturm-Liouville sencillo con condiciones de Robin. Es conocido que Λ tiene infinitos valores propios λ positivos dados por las soluciones de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \tan(\sqrt{\lambda}) = 0$$

y un único valor propio negativo λ_0 dado por la solución de

$$\exp\left(2\sqrt{-\lambda_0}\right) = \frac{\sqrt{-\lambda_0}+1}{\sqrt{-\lambda_0}-1}.$$

$\square$

6. Resultados numéricos arrojan que $|\lambda_0| \approx \texttt{1.4392} < 2$, de modo que no se puede asegurar elipticidad con los argumentos anteriores.

$\blacksquare$

Ejercicio 9 ([Bre10, Ex. 8.35])**.** Sean dos funciones fijas $a, b \in C([0,1])$ y considere el problema

$$\begin{cases} -u'' + au' + bu = f & \text{en } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

con $f \in L^2(0,1)$.

Dado $g \in L^2(0,1)$, sea $v \in H^2(0,1)$ la solución única de

$$\begin{cases} -v'' = g & \text{en } (0,1), \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Sea $Sg = v$ tal que $S : L^2(0,1) \to H^2(0,1)$.

1. Demuestre que el problema (3) es equivalente a

$$\begin{cases} u \in H^1(0,1), \\ u = S(f - au' - bu). \end{cases} \tag{5}$$

Considere el operador $T : H^1(0,1) \to H^1(0,1)$ definido por

$$Tu = -S(au' + bu), \qquad u \in H^1(0,1).$$

2. Demuestre que T es un operador compacto.

3. Demuestre que el problema (3) tiene solución única para todo $f \in L^2(0,1)$ si y sólo si la solución u de (3) con $f = 0$ es $u = 0$.

4. Suponga que $b \geq 0$ en $(0,1)$. Demuestre que la única solución de (3) con $f = 0$ es $u = 0$.
   Concluya que para todo $f \in L^2(0,1)$ el problema (3) admite una única solución $u \in H^2(0,1)$.

5. Verifique que en general (sin ninguna suposición sobre a o b), el espacio de soluciones del problema (3) con $f = 0$ tiene dimensión 0 o 1. Si la dimensión es 1, demuestre que el problema (3) tiene solución si y sólo si $\int_0^1 f\varphi_0 = 0$ para alguna función $\varphi_0 \not\equiv 0$ a determinar.

Demostración.

1. Primero notamos que si $a, b \in C([0,1])$ y $f \in L^2(0,1)$, entonces $f - au' - bu \in L^2(0,1)$.

   Sea u solución de (3). Tenemos que

$$-u'' + au' + bu = f \iff -u'' = f - au' - bu,$$

   por lo que aplicando S a ambos lados tenemos que

$$u = S(f - au' - bu)$$

   con condiciones de contorno $u(0) = u(1) = 0$ y $u \in H^2(0,1)$.

   Sea u solución de (5). Es decir, u es una solución de un problema del tipo (4), esto es,

$$u = S(f - au' - bu) \iff -u'' = f - au' - bu$$

   reordenando obtenemos

$$-u'' + au' + bu = f$$

   con $u(0) = u(1) = 0$. □

2. Consideremos la secuencia de operadores

$$\begin{cases} A : H^1(0,1) \to L^2(0,1), & u \mapsto au' + bu \\ S : L^2(0,1) \to H^2(0,1), & g \mapsto v \\ \mathcal{I} : H^2(0,1) \to H^1(0,1), & u \mapsto u \end{cases},$$

   de la cual es claro ver que $T = \mathcal{I} \circ (-S) \circ A$. Como $\mathcal{I}$ es compacto (véase [AF03, Theorem 6.2]) y A, S son continuos, entonces T es compacto.

3. Consideremos la ecuación del problema (3) y apliquemos S a ambos lados. Así, usando la linealidad de S,

$$\begin{aligned} S(-u'' + au' + bu) &= S(-u'') - (-S(au' + bu)) \\ &= u - T(u) \\ &= A(u) \end{aligned}$$

   con $A = I - T$. Es decir, A es una perturbación compacta de la identidad. Con esto en mente, notamos que podemos reescribir (5) como

$$\begin{cases} u \in H^1(0,1), \\ A(u) = S(f). \end{cases} \tag{6}$$

   Además, como (5) es equivalente a (3), entonces este último también es equivalente a (6).

Aplicando alternativa de Fredholm [Bre10, Theorem 6.6], tenemos que

$$(6) \text{ tiene solución para todo } S(f) \in L^2(\Omega) \iff \text{la solución de (6) para } S(f) = 0 \text{ es } u = 0.$$

Como S es inyectivo, entonces $S(f) = 0 \implies f = 0$, de modo que la equivalencia anterior puede entenderse como

$$(3) \text{ tiene solución para todo } f \in L^2(\Omega) \iff \text{la solución de (3) para } f = 0 \text{ es } u = 0.$$

□

4. Supongamos $b \geq 0$ y sea u la solución de (3) con $f = 0$.

   Definamos $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{kx}$ con $k^2 - ka - b > 0$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} -u_\varepsilon'' + au_\varepsilon' + bu_\varepsilon &= -(u + \varepsilon e^{kx})'' + a(u + \varepsilon e^{kx})' + b(u + \varepsilon e^{kx}) \\ &= -u'' + au' + bu + (-k^2 + ak + b)\varepsilon e^{kx} \\ &= \underbrace{(-k^2 + ak + b)\varepsilon e^{kx}}_{f_\varepsilon(x)} \end{aligned}$$

   Por tanto, u_ε verifica un problema de la forma

$$\begin{cases} -u_\varepsilon'' + au_\varepsilon' + bu_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{en } (0,1), \\ u_\varepsilon(0) = \varepsilon, \ u_\varepsilon(1) = \varepsilon e^k, \end{cases} \tag{7}$$

   Aplicando el acercamiento clásico al principio del máximo (Observación 26 [Bre10]), consideremos $x_0 \in [0,1]$ tal que u_ε alcance su valor máximo en x_0[1].

   Sea $x_0 \in (0,1)$ un máximo local. Luego, $u_\varepsilon'(x_0) = 0$ y $u_\varepsilon''(x_0) \leq 0$, de modo que

$$\begin{aligned} bu_\varepsilon(x_0) &= u_\varepsilon''(x_0) - au_\varepsilon'(x_0) + f_\varepsilon(x_0) \\ &\leq u_\varepsilon''(x_0) + f_\varepsilon(x_0) \\ &= f_\varepsilon(x_0) = (-k^2 + ak + b)\varepsilon e^{kx_0} \\ &\leq 0 \\ \implies u_\varepsilon(x_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

   Luego, $u_\varepsilon(x) \leq 0$ en $(0,1)$. Por tanto, u_ε alcanza su valor máximo en la frontera. En este caso, el valor máximo es $u_\varepsilon(1) = \varepsilon e^k$.

   Volviendo a u, tenemos que

$$\begin{aligned} u(x) &= u_\varepsilon(x) - \varepsilon e^{kx} \\ &\leq u_\varepsilon(x) \\ \implies u(x) &\leq \varepsilon e^k \qquad \forall x \in [0,1], \qquad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

   de lo cual concluimos que $u \leq 0$ al hacer tender $\varepsilon \to 0$.

   Haciendo un desarrollo análogo para $\tilde{u}_\varepsilon = -u + \varepsilon e^{kx}$ concluimos que $-u \leq 0$ y por tanto $u = 0$ a.e. en $[0,1]$.

   En vista del resultado anterior y la pregunta 3, concluimos que para todo $f \in L^2(0,1)$ el problema ([Bre10]) admite una única solución $u \in H^2(0,1)$.

[1] La existencia de x_0 se justifica considerando que $f_\varepsilon \in C^\infty([0,1])$ nos asegura regularidad de u_ε, para la cual nos basta $u_\varepsilon \in C([0,1])$ junto con el Teorema de Weierstrass para asegurar que u_ε alcanza su máximo en el compacto $[0,1]$.

5. Consideremos el resultado de [Bre10, Exercise 8.33] que establece que para el operador de Sturm-Liouville
$$Au = -(pu')' + qu \qquad \text{en } I = (0,1)$$
y el espacio
$$N = \{u \in H^2(0,1) : a(u,v) = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)\},$$
se tiene que el espacio $N_{00} = \{u \in N : u(0) = u(1) = 0\}$ tiene dimensión 0 o 1, y que este último caso se tiene si y sólo si 0 es un valor propio de A para el problema con condiciones Dirichlet nulas.

Si obtenemos p y q mediante las ecuaciones
$$\begin{cases} p' - ap = 0 \\ q = bp, \end{cases}$$
entonces tenemos $Au = -u'' + au' + bu$ y N_{00} sería el espacio de soluciones de (3) con $f = 0$.

Finalmente, si $\dim N_{00} = 1$, entonces de la alternativa de Fredholm tenemos que $f \in N_{00}^{\perp}$ y por tanto verifica la condición de ortogonalidad
$$\int_0^1 f\varphi_0 = 0$$
con φ_0 el generador de N_{00}.

■

Referencias

[AF03] Robert A. and John J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2 ed., Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 2003.

[Bre10] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer New York, 2010.

[LL01] E.H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Crm Proceedings & Lecture Notes, American Mathematical Society, 2001.

[RT04] P.A. Raviart and J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Dunod, 2004.