UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Evaluación 2. 7–Jul.–2022; 13:00.

Nombre y apellidos	
Matrícula	

Elije y resuelve 4 de los siguientes ejercicios; cada uno vale 1.5 puntos.

Ejercicio	1	2	3	4	5	Nota
Puntaje						

En los ejercicios que siguen, X es un espacio métrico con métrica d.

1. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2}$.

2. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, continua en un punto $x_0 \in X$ en el que $f(x_0) > 1$.
   Demuestra que hay un abierto no vacío U tal que $f(x) > 1 \quad \forall x \in U$.

3. Sean X e Y espacios métricos y $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva.
   Demuestra que si D es denso en X, entonces $f(D)$ es denso en Y.

   Sugerencia: Recuerda que A es denso en $B \iff \forall x \in B,\ \exists \{x_n\} \subset A :\ x_n \to x$.

4. Sean $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas y acotadas.
   Demuestra que (fg) es uniformemente continua.

5. Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) := \dfrac{1}{(1+x^2)^n},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

   (a) Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$.

   (b) Estudia la convergencia uniforme de esa sucesión en $\mathbb{R}$.

   (c) Dado $a > 0$, estudia la convergencia uniforme de la sucesión en $[a, +\infty)$.