Clase 14: Introducción a la curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$ y Coordenadas polares.

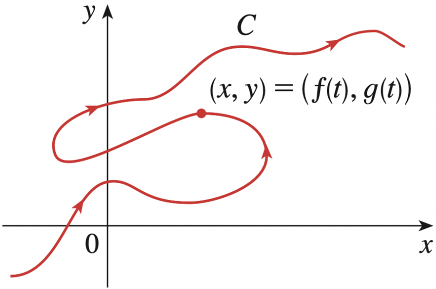
Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Estudiaremos nuevas formas de definir curvas en el plano.

Suponga que queremos estudiar la trayectoria trazada por una partícula que se mueve en el plano XY, describiendo una curva C.



Observe que C NO se puede describir mediante una función del tipo $y = f(x)$.

Curvas paramétricas

Idea física

Sin embargo, si en cada instante t, denotamos la posición de la partícula como $P(t)$ podemos construir una función

$$P : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto P(t)$$

que entrega la *posición* de la partícula en cada instante t. Como las coordenadas x e y de la partícula son funciones del tiempo t, podemos escribir

$$x = f(t) \text{ e } y = g(t).$$

Tales ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de C, t se llama **parámetro** y la aplicación

$$r : I \to \mathbb{R}^2\ ,\ t \mapsto r(t) = (f(t), g(t))$$

se denomina **curva paramétrica en** $\mathbb{R}^2$.

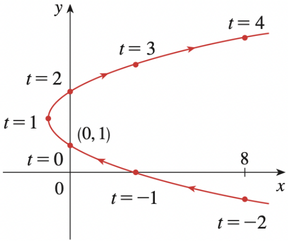
Ejemplo

Curva paramétrica

- Bosqueje e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x(t) = t^2 - 2t \;\; , \;\; y(t) = t + 1$, donde $-2 \leq t \leq 4$.

Solución:

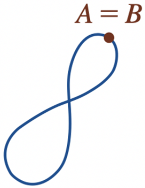
t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



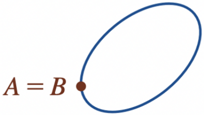
Despejando el parámetro t, la ecuación cartesiana de la curva es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$.

Definición 14.1

- Dada una curva paramétrica $x = f(t)$ e $y = f(t)$ con $t \in [a, b]$, los puntos $(f(a), g(a))$ e $(f(b), g(b))$ reciben el nombre de **punto inicial** y **final** de la curva.
- La curva se dice **cerrada** si el punto inicial coincide con el final.
- Una curva C se dice **simple** si no se corta a si misma.



Cerrada pero no simple



Curva simple cerrada

Ejemplo

Curva paramétrica

- Encontrar una parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Solución: De la trigonometría, todo punto de una circunferencia de radio r se expresa en la forma $(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, para algún $t \in [0, 2\pi]$. Luego, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son

$$x(t) = r\cos(t)$$

$$y(t) = r\,\mathrm{sen}(t)$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Observaciones:

- La parametrización de una curva no es única. Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas
$$x(t) = r\cos(2t),\ y(t) = r\,\mathrm{sen}(2t),\ 0 \leq t \leq \pi$$
también describen una circunferencia de radio $r > 0$.

- Toda función $y = f(x)$ se puede parametrizar trivialmente mediante las ecuaciones paramétricas
$$x(t) = t\ ,\ y(t) = f(t)\ .$$

Ejemplos

Curvas paramétricas a cartesianas

- Escriba la ecuación cartesiana de la curva paramétrica
$$x(t) = t^2,\ y(t) = t^3 \text{ con } t \in [-1, 2].$$
- Dada la curva paramétrica C
$$x(t) = \operatorname{sen}(t),\ y(t) = \cos(2t) \text{ con } 0 \leq t \leq \pi/2$$
obtenga una ecuación cartesiana para C.
- Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y C la curva de ecuaciones paramétricas
$$x(t) = a\cos(t) \text{ e } y(t) = b\operatorname{sen}(t) \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$
Determine la ecuación cartesiana de la curva C.

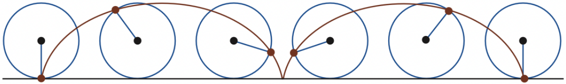
Soluciones:

- Corresponde a $x = y^{2/3}$ con $y \in [-1, 8]$.
- Corresponde a $y = 1 - 2x^2$ con $x \in [0, 1]$.
- Corresponde a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

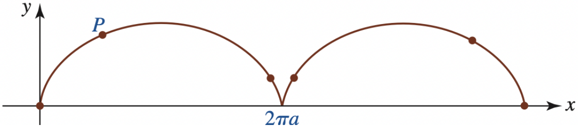
Aplicación

Cicloide

La curva trazada por un punto P sobre una circunferencia de radio a que rueda a lo largo de una recta se llama cicloide (ver `https://www.geogebra.org/m/fSySNsRS`).



a) Círculo que rueda sobre el eje x



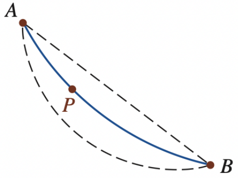
Se puede demostrar que la curva paramétrica que modela la cicloide es

$$x(t) = a(\theta - \operatorname{sen}(\theta)),\ y(t) = a(1 - \cos(\theta)) \text{ con } \theta \in \mathbb{R}.$$

Cicloide

No siempre el camino mas corto es el más rápido

Problema de la braquistócrona: Encontrar la curva de descenso más rápida que conecta dos puntos dados.



El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, demostró que la curva de descenso más rápida para conectar dos puntos dados es aquella formada por la parte de un arco invertido de una cicloide. (Ver `https://www.geogebra.org/m/dk4yepdy`).

Longitud de arco

Curvas paramétricas

Para una curva C dada en forma paramétrica por

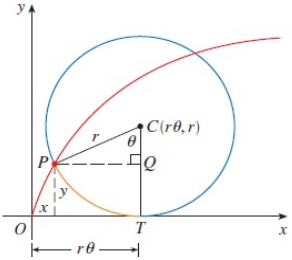
$$x = x(t) \ \ , \ \ y = y(t)$$

con $t \in [a, b]$, donde x, y son continuas con derivada continua, su longitud está dada por:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Ejercicio: Demostrar que el perímetro de una circunferencia de radio R es $2\pi R$.

Ejercicio: Demostrar que la longitud de un arco de la cicloide de ecuación paramétrica $x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}(\theta))$, $y(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es $8r$.



Para una curva de la forma $y = f(x)$, sabemos que $f'(x)$ entrega la pendiente de la recta a f en un determinado punto (x, y).

Sin embargo, si la curva está definida por ecuaciones paramétricas

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

se puede probar que la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (x, y) es

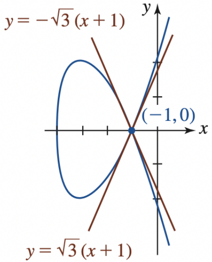
$$\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

siempre que $f'(t) \neq 0$.

Ejemplo

Rectas tangentes a una curva paramétrica

- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva paramétrica C dada por $x(t) = t^2 - 4$, $y(t) = t^3 - 3t$ en los puntos correspondientes a $t = \sqrt{3}$ y a $t = -\sqrt{3}$.

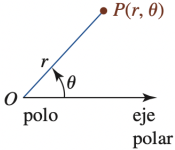


Este ejemplo muestra que una curva paramétrica puede tener mas de una recta tangente en un punto.

Plano polar

Construcción

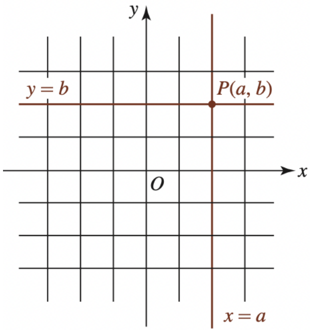
Para construir el **sistema de coordenadas polares** del plano, elegimos un punto O que llamaremos polo y un rayo horizontal con origen en el polo denominado eje polar.

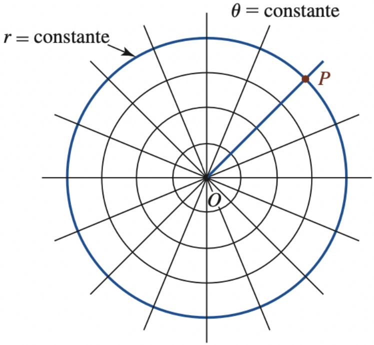


Si P es un punto del plano polar, su posición queda determinada por el par (r, θ), donde:

- r es la distancia del punto P al polo O.
- θ es la medida del ángulo, en sentido antihorario, formado por el eje polar y el segmento OP (por lo general en radianes).

El par (r, θ) recibe el nombre coordenada polar del punto P.





- Grafique los puntos cuyas coordenadas polares son:

(a) $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

Observación. Cada punto del plano polar tiene asociada infinitas representaciones.

Por ejemplo, el punto $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ tiene también por coordenadas

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2\pi\right) \ , \ \left(2, \frac{\pi}{6} - 2\pi\right) \ , \ \left(2, \frac{\pi}{6} + 4\pi\right)$$

En general,

$$(r, \theta) = (r, \theta \pm 2k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Plano polar

Convenio

Observación. Es conveniente permitir que r (la distancia del polo a un punto P) asuma valores negativos. Así, se establece el siguiente convenio:

Sea $r > 0$, se establece que $(-r, \theta)$ es otra forma de representar el punto de coordenadas $(r, \theta + \pi)$.

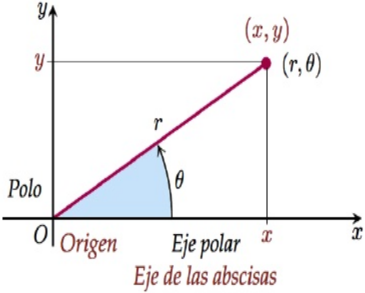
Ejemplo. Graficar los puntos cuyas coordenadas polares son:

(a) $\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Construcción

Podemos relacionar las coordenadas polares de la siguiente forma. Hacemos coincidir el polo con el origen del plano cartesiano, y el eje polar con el semi-eje positivo de las abscisas (Eje X).



Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Ejemplos

1. De cartesianas a polares : $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \;,\; \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\;,\; x \neq 0 \end{cases}$

2. De polares a cartesianas: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$

Ejemplo 1: Transformar los puntos

$$P(1,\sqrt{3}),\ Q(3,3),\ R(1,-1) \text{ y } S(-1,\sqrt{3})$$

a coordenadas polares.

Ejemplo 2: Transformar los puntos $J(3, \frac{\pi}{6})$ y $K(-2, \frac{\pi}{4})$ de coordenadas polares a cartesianas.

Curvas en el plano polar
$r = f(\theta)$

Una curva en coordenadas polares es una expresión del tipo $r = f(\theta)$. Por ejemplo, $r = 1 - \cos(\theta)$.

Para obtener una aproximación de la gráfica de $r = f(\theta)$ se procede como de costumbre, es decir, se construye una tabla de valores suficientemene *completa*, se dibujan los puntos y se unen mediante una *curva continua*.

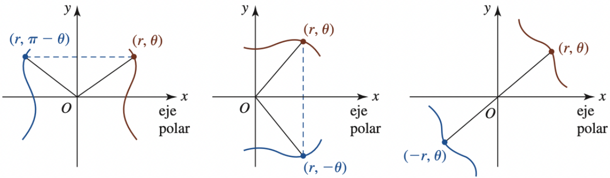
Sin embargo, al momento de graficar será necesario considerar las siguientes **reglas de simetría**.

Reglas de simetría

R1 Si al sustituir $(r, -\theta)$, en lugar de (r, θ) se obtiene la misma ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje X (esto quiere decir que si (r, θ) pertenece a la gráfica, entonces $(r, -\theta)$ también).

R2 Si al sustituir $(r, \pi - \theta)$ en lugar de (r, θ) se obtiene la misma ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

R3 Si al sustituir $(-r, \theta)$ o bien, $(r, \pi + \theta)$ en lugar de (r, θ) se obtiene la misma ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al polo.



a) Simetría con respecto al eje *y*   *b*) Simetría con respecto al eje *x*   *c*) Simetría con respecto al origen

Ejemplo

Ejemplo. Representar gráficamente la curva de ecuación

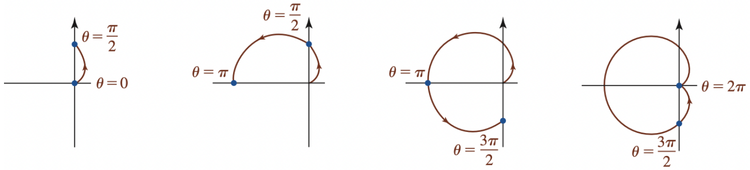
$$r = 1 - \cos(\theta)$$

Solución: Notar que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar ya que al sustituir $(r, -\theta)$, en lugar de (r, θ) se obtiene la misma ecuación (esto se debe a que *coseno* es una función par).

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

Ejemplo
Cardioide

Luego, tenemos el siguiente gráfico



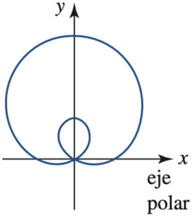
cuya curva recibe el nombre de **cardioide**.

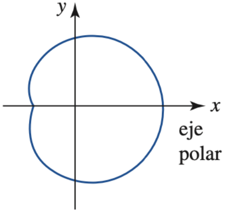
Las cardioides son casos especiales de curvas polares conocidas como **caracoles**.

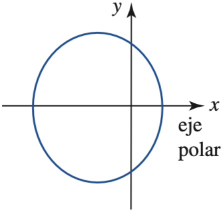
$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}(\theta) \text{ y } r = a \pm b\cos(\theta)$$

- Si $\left|\dfrac{a}{b}\right| = 1$, entonces la curva se llama **cardioide**.
- Si $0 < \left|\dfrac{a}{b}\right| < 1$, entonces la curva se llama **caracol con lazo interior**.
- Si $1 < \left|\dfrac{a}{b}\right| < 2$, entonces la curva se llama **caracol con orificio**.
- Si $\left|\dfrac{a}{b}\right| \geq 2$, entonces la curva se llama **caracol convexo**.

La siguiente imagen muestra de izquierda a derecha un (1) caracol con lazo interior, (2) caracol con orificio y un (3) caracol convexo.

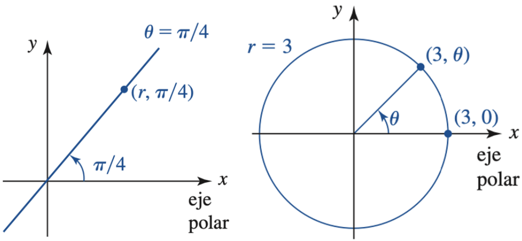






Rectas radiales y circunferencias

- Si $a > 0$, entonces la gráfica de $r = a$ es una circunferencia centrada en el origen con radio a.
- Si $\alpha \neq 0$, entonces la gráfica de $\theta = \alpha$ es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar. (Esta curva contiene todos los puntos (r, θ) tal que el ángulo θ es $\pi/4$ rad).

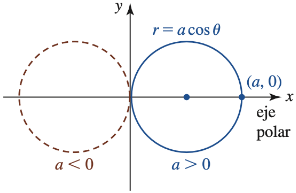


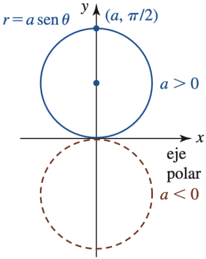
Rectas radiales y circunferencias

Las curvas

$$r = a\cos(\theta) \text{ y } r = a\,\mathrm{sen}(\theta)$$

representan círcunferencias que pasan por el origen con centros $(a/2, 0)$ sobre el eje X ($r = a\cos(\theta)$), o con centro $(0, a/2)$, sobre el eje y ($r = a\,\mathrm{sen}(\theta)$). La siguiente imagen ilustra las gráficas en los casos en que $a > 0$ y $a < 0$.





Rosas

Si $n \geq 2$, entonces las gráficas de

$$(1)\ r = a\,\mathrm{sen}(n\theta) \text{ y } (2)\ r = a\cos(n\theta)$$

se denominan rosas. Ayudas para graficar una rosa:

1) Número de pétalos.
    - El número de pétalos o lazos de la curva es n cuando n es impar, y $2n$ cuando n es par.
2) Ubicación del primer pétalo
    - Si la rosa es de la forma (1), entonces el primer pétalo está sobre la recta radial $\theta = \dfrac{\pi}{2n}$.
    - Si la rosa es de la forma (2), entonces el primer pétalo está sobre el eje X.
3) El ángulo entre los pétalos es $\dfrac{2\pi}{n^\circ \text{ de pétalos}}$.

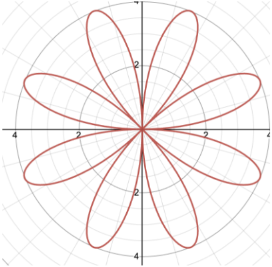
Ejemplo

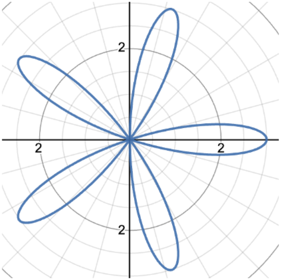
Rosas

- Graficar las rosas de ecuación

$$r = 4\,\mathrm{sen}(4\theta) \text{ y } r = 3\cos(5\theta)$$

Solución.



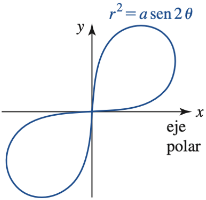


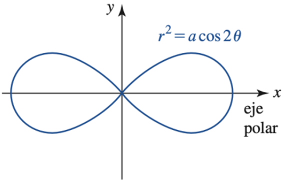
Lemniscatas

Si n es un entero positivo y $a > 0$, las gráficas de

$$r^2 = a\cos(2\theta) \text{ y } r^2 = a\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

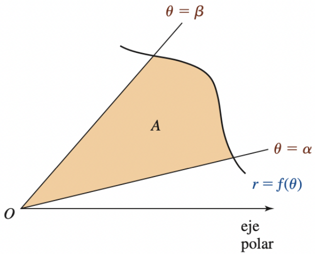
se llaman **lemniscatas**.





Área de una región polar

Estamos interesados en obtener el área de la región R limitada por la gráfica de la función $r = f(\theta)$ y las *rectas radiales* $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ como en la imagen.



Para dar respuesta a esto, necesitaremos del siguiente Teorema.

Teorema 14.2

El área A de la región R limitada por las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$ está dada por:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 \, d\theta$$

Ejemplo 1: Calcular el área de la región acotada por la rosa

$$r = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$$

Ejemplo 2: Calcule el área de la región R del primer cuadrante encerrada por la cardioide $r = 1 + \cos(\theta)$

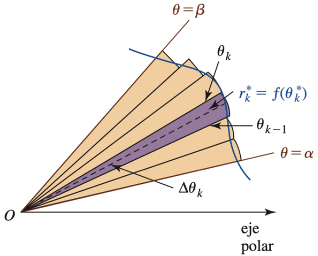
Área de una región polar

Teorema

Comenzamos recordando que el área de un sector circular S de radio r y ángulo θ, medido en radianes, es

$$A(S) = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Sea $P = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\}$ una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ y sea $\theta_k^* \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$, para $k = 1, ..., n$. Supongamos que en cada subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ la función f asigna un valor constante a $f(\theta_k^*)$. Luego, el área de la región R_k correspondiente al sector circular de radio $f(\theta_k^*)$ y ángulo $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es $A(R_k) = \frac{1}{2}(f(\theta_k^*))^2 \cdot \Delta\theta_k$.



Área de una región polar

Teorema

Al sumar las áreas de los R_k, con $k = 1, ..., n$, se obtiene la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k^*))^2 \cdot \Delta\theta_k$$

para la función $h(\theta) = \frac{1}{2}(f(\theta_k^*))^2$. Luego,

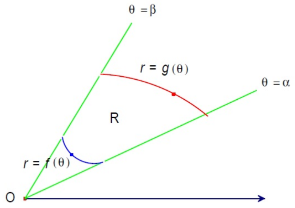
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2\, d\theta = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(f(\theta_k^*))^2 \cdot \Delta\theta_k.$$

Área entre dos curvas polares

Observación. Se puede considerar una situación mas general en que R está definida por

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$f(\theta) \leq r \leq g(\theta)$$

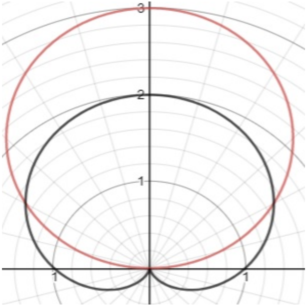


donde el área estará dada por:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [(g(\theta))^2 - (f(\theta))^2] \, d\theta$$

Ejemplo

1. Calcule el área de la región encerrada dentro de la curva $r = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \mathrm{sen}(\theta)$



Resolver

Ejercicios:

a) Encuente el área de la región común entre las curvas $r = 3 + 2\cos(\theta)$ y $r = 2$.

b) Calcule el área de la región exterior a la curva $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia $r = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)$.

c) Calcule el área de la región interior a $r^2 = 2\cos(2\theta)$ y exterior a $r = 1$.

d) Considere la ecuación polar $r = 4\,\mathrm{sen}(3\theta)$. Calcule el área de solo un pétalo.

e) Considere $r = 2 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, $r = 4 - 2\,\mathrm{sen}(\theta)$ y las regiones R_1, R_2 encerradas por ella. Calcular el área de $R_1 \cap R_2$.