525140 – Álgebra 1 – Propuesta de solución a Evaluación 2

Problema 1. (10 puntos)

Considere las funciones

$$f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{-x}, \qquad g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x-2}, \qquad h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique 1.5 y 1.6**.

1.1 _______ $(f \cdot g)(1) = 1$.

1.2 _______ h es inyectiva.

1.3 _______ $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 0[$.

1.4 _______ g es sobreyectiva.

1.5 _______ $\sqrt{\pi} \in \mathrm{Rec}(h)$.

1.6 _______ $\mathrm{Dom}(f \circ h) = \mathbb{R}^+$.

Solución:

1.1 **F** $(f \cdot g)(1) = 1$. (**1 punto**)

1.3 **F** $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 0[$. (**1 punto**)

1.2 **V** h es inyectiva. (**1 punto**)

1.4 **F** g es sobreyectiva. (**1 punto**)

1.5 **V** $\sqrt{\pi} \in \mathrm{Rec}(h)$.

En efecto, el número $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \in \mathbb{R}^+$ es pre-imagen de $\sqrt{\pi}$ por h pues

$$h\left(\frac{1}{\pi^{1/4}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{(\pi^{1/4})^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\pi}.$$

(**3 puntos**)

1.6 **F** $\mathrm{Dom}(f \circ h) = \mathbb{R}^+$.

Debido a que para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) \in \mathbb{R}^+$, entonces $\mathrm{Rec}(h) \subseteq \mathbb{R}^+$. Por otro lado, $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 0]$. Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Rec}(h) = \emptyset$ y entonces $f \circ h$ no puede ser definida. O, explicado de otro modo, la función $f \circ h$ puede ser definida si el conjunto $\{x \in \mathrm{Dom}(h) \,:\, h(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$ es distinto del vacío, pero

$$\{x \in \mathrm{Dom}(h) \,:\, h(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \,:\, \frac{1}{x^2} \leq 0\right\} = \emptyset.$$

(**3 puntos**)

Problema 2. (20 puntos)

Considere la función

$$f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 + \sqrt{4 - x^2}.$$

2.1 Determine el dominio de f.

2.2 Muestre que f no es inyectiva.

2.3 Sea g la siguiente función

$$g : [-2, 0] \to [-1, 1] \quad \text{tal que} \quad g(x) = f(x).$$

Muestre que g es inyectiva.

2.4 Determine el recorrido de g y decida si g es o no sobreyectiva.

2.5 Decida, justificadamente, si g es invertible. En caso de serlo, defina g^{-1}.

Solución:

2.1 Por definición de dominio de una función, se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 + \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}\end{aligned}$$

dado lo anterior, podemos concluir que $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2]$. **(3 puntos)**

2.2 Notemos que f no es inyectiva, ya que $f(-2) = f(2)$, pero $2 \neq -2$.

(3 puntos)

2.3 Primero observemos que la función g queda definida por:

$$g : [-2, 0] \to [-1, 1], \quad g(x) = -1 + \sqrt{4 - x^2}$$

Ahora bien, para probar que g es inyectiva, consideremos $a, b \in \mathrm{Dom}(g)$, es decir, $a, b \in [-2, 0]$. Luego se tiene:

$$\begin{aligned}g(a) = g(b) &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{4 - a^2} = -1 + \sqrt{4 - b^2},\\ &\Leftrightarrow \sqrt{4 - a^2} = \sqrt{4 - b^2}\\ &\Leftrightarrow 4 - a^2 = 4 - b^2\\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2\\ &\Leftrightarrow |a| = |b|\\ &\Leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b\\ &\Leftrightarrow a = b, \quad \text{porque } a, b \in [-2, 0[.\end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que, si a y b son números cualesquiera en el dominio de g, $g(a) = g(b) \Leftrightarrow a = b$ y, con ello, g es inyectiva.

(5 puntos)

2.4 Primero determinamos el recorrido de g, como sigue:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rec}(g) &= \{y \in [-1, 1] : \exists x \in \mathrm{Dom}(g) \ : \ y = g(x)\}\\ &= \left\{y \in [-1, 1] : \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ y = -1 + \sqrt{4 - x^2}\right\}\\ &= \left\{y \in [-1, 1] : \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ y + 1 = \sqrt{4 - x^2}\right\}.\end{aligned}$$

Dado que $y \in [-1, 1]$, se cumple que $0 \leq y + 1$, la ecuación $y + 1 = \sqrt{4 - x^2}$ se cumple si y solo si $(y + 1)^2 = 4 - x^2$ y

$$\begin{aligned}\mathrm{Rec}(g) &= \left\{y \in [-1, 1] : \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ (y + 1)^2 = 4 - x^2\right\}\\ &= \left\{y \in [-1, 1] : \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ x^2 = 4 - (y + 1)^2\right\}.\end{aligned}$$

Dado que $y \in [-1, 1]$ se cumple que

$$0 \leq y + 1 \leq 2 \ \Rightarrow \ -4 \leq -(y + 1)^2 \leq 0 \ \Rightarrow \ 0 \leq 4 - (y + 1)^2 \leq 4.$$

Como para todo $y \in [-1, 1]$ el número $4 - (y + 1)^2 \geq 0$, se tiene que $x^2 = 4 - (y + 1)^2$ si y solo si $|x| = \sqrt{4 - (y + 1)^2}$ y

$$\begin{aligned}\mathrm{Rec}(g) &= \left\{y \in [-1, 1] : \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ |x| = \sqrt{4 - (y + 1)^2}\right\},\\ &= \left\{y \in [-1, 1] : \ \exists\, x \in [-2, 0] \ : \ x = \sqrt{4 - (y + 1)^2} \ \vee x = -\sqrt{4 - (y + 1)^2}\right\},\\ &= \left\{y \in [-1, 1] : \ \sqrt{4 - (y + 1)^2} \in [-2, 0] \ \vee -\sqrt{4 - (y + 1)^2} \in [-2, 0]\right\}.\end{aligned}$$

Dado que para todo $y \in [-1, 1]$ se cumple que $0 \leq 4 - (y + 1)^2 \leq 4$, las soluciones a la ecuación $g(x) = y$ satisfacen

$$0 \leq \sqrt{4 - (y + 1)^2} \leq 2 \quad \text{y} \quad -2 \leq \sqrt{4 - (y + 1)^2} \leq 0.$$

Dado que para cualquier $y \in [-1,1]$, una de las soluciones de la ecuación $g(x) = y$ (el número $-\sqrt{4-(y+1)^2}$) pertenece al dominio de g, podemos concluir que $\mathrm{Rec}(g) = [-1,1]$.

Como $\mathrm{Rec}(g) = \mathrm{Cod}(g)$, g sí es una función sobreyectiva.

(**6 puntos**)

2.5 Por lo concluido en los dos ítemes anteriores, podemos decir que g es una función biyectiva y, por ende, invertible.

Su inversa está dada por:

$$g^{-1} : [-1,1] \to [-2,0], \quad g^{-1}(y) = -\sqrt{4-(y+1)^2}.$$

(**3 puntos**)

Problema 3. (15 puntos)

Determine el conjunto solución $S \subseteq \mathbb{R}$ en cada caso.

a) $9^x - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$.

b) $\log_{2/5}(x+5) - \frac{1}{2}\log_{2/5}(x^2-9) \geq 0$.

Solución:

3.1 Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $3^x + 1 > 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 9^x - 4\cdot 3^x - 5 = 0 &\Leftrightarrow (3^x-5)(3^x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = \log_3(5) \end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto solución de la ecuación exponencial está dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \colon 9^x - 4\cdot 3^x - 5 = 0\} = \{\log_3(5)\}.$$

(**6 puntos**)

3.2 Primero debemos definir la restricción de las expresiones logarítmicas, las cuales están dadas por:

$$x+5 > 0 \ \wedge \ x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x > -5 \ \wedge \ |x| > 3$$

así, el conjunto restricción queda dado por $R =]-5,-3[\cup]3,+\infty[$.

Como la función $y \mapsto \log_{2/5}(y)$ es decreciente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \log_{2/5}(x+5) - \frac{1}{2}\log_{2/5}(x^2-9) \geq 0 &\Leftrightarrow \log_{2/5}(x+5) - \log_{2/5}\left(\sqrt{x^2-9}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \log_{2/5}\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}}\right) \geq \log_{2/5}(1) \\ &\Leftrightarrow x+5 \leq \sqrt{x^2-9} \\ &\Leftrightarrow x^2+10x+25 \leq x^2-9 \\ &\Leftrightarrow 10x+34 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{17}{5}. \end{aligned}$$

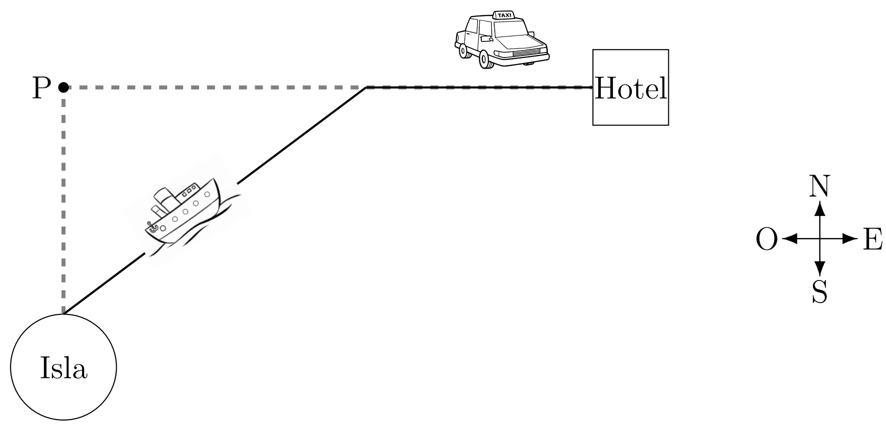
Dado lo anterior, el conjunto solución de la inecuación logarítmica está dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{2/5}(x+5) - \log_{4/25}(x^2-9) \geq 0\right\} = \left]-\infty, -\frac{17}{5}\right] \cap R = \left]-5, -\frac{17}{5}\right].$$

(**9 puntos**)

Problema 4. (15 puntos)

Una isla se encuentra a 3 kilómetros en línea recta al Sur de un punto P, ubicado en una playa de costanera recta (vea la figura).
Suponga que usted se hospeda en un hotel a la orilla del mar, el cual está a 7 kilómetros de distancia del punto P, en dirección Este.
Para visitar la isla desde el hotel, usted dispone de servicio de taxis terrestres y marinos.
El taxi terrestre tiene un costo de \$3 por kilómetro y puede ser utilizado para moverse a cualquier sitio entre el hotel y el punto P.
Por otro lado, el taxi marino tiene un costo de \$5 por kilómetro y puede ser solicitado en cualquier punto entre el hotel y el punto P para viajar a la isla.



4.1 Encuentre una función que modele el costo de un viaje desde el hotel a la isla, donde la variable independiente "$\boldsymbol{x}$" sea la distancia recorrida en taxi terrestre.

4.2 Calcule el costo del viaje del hotel a la isla si:

a) Viaja directamente en taxi marino.

b) Viaja hasta el punto P en taxi terrestre y luego a la isla en taxi marino.

c) Viaja 3 kilómetros en taxi terrestre.

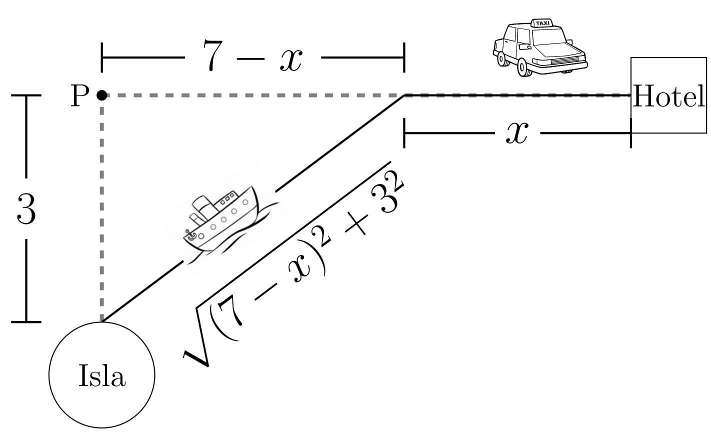
¿Cuál de estas tres opciones es menos costosa? **Pista:** $\sqrt{58} > 7$.

4.3 Suponga que la empresa de taxis terrestres cambia la tarifa de su servicio a la siguiente:

- En los primeros 3 kilómetros, el costo es de \$4 por kilómetro.
- Después de los 3 primeros kilómetros, el costo es de \$2 por kilómetro.

Encuentre una función que modele el costo de un viaje desde el hotel a la isla, donde la variable independiente "$\boldsymbol{x}$" sea la distancia recorrida en taxi terrestre.

Solución:



4.1

Sea $x \in [0,7]$ la distancia recorrida en taxi terrestre, de acuerdo a la figura, utilizando el Teorema de Pitágoras, se tiene que la distancia recorrida en taxi marino es $\sqrt{(7-x)^2+3^2}$.

De esta manera, la función que modela el costo del viaje es:

$$f\colon [0,7] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 5\sqrt{(7-x)^2+9}.$$

(**7 puntos**)

4.2 Los costos de los viajes mencionados son $f(0)$, $f(7)$ y $f(3)$, respectivamente:

a) $f(0) = 5\sqrt{7^2+9} = 5\sqrt{58}$.

b) $f(7) = 3 \cdot 7 + 5\sqrt{9} = 37$.

c) $f(3) = 3 \cdot 3 + 5\sqrt{4^2+9} = 34$.

Como $\sqrt{58} > 7$, concluimos que $f(0) = 5\sqrt{58} > 35 > 34 = f(3)$. Por lo tanto, de estas tres opciones, la que más conviene es viajar 3 kilómetros en taxi terrestre.

(4 puntos)

3.3 Considerando la nueva tarifa de la compañía de taxi terrestre, la función del costo del viaje del hotel a la isla queda definida por tramos:

- Si se viajan x kilómetros en taxi terrestre, $x \leq 3$, el costo del viaje es similar al caso anterior, considerando que ahora el costo de un kilómetro en taxi terrestre es 4 pesos, por tanto, si $0 \leq x \leq 3$, $f(x) = 4x + 5\sqrt{(7-x)^2+9}$.
- Por otro lado, si se viajan x kilómetros en taxi terrestre, $x > 3$, por los primeros tres kilómetros debemos pagar 12 pesos (4 pesos por kilómetro), pero por los restantes $x - 3$ kilómetros debemos pagar 2 pesos, el precio del taxi marino no cambia y, por tanto, si $x > 3$, el precio del viaje a la isla es $12 + 2(x-3) + 5\sqrt{(7-x)^2+9}$.

La función f, que modela el costo del viaje, nos queda de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
f\colon [0,7] &\to \mathbb{R} \\
x \mapsto f(x) &= \begin{cases} 4x + 5\sqrt{(7-x)^2+9}, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 12 + 2(x-3) + 5\sqrt{(7-x)^2+9}, & \text{si } 3 < x \leq 7. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(4 puntos)