¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden 1?

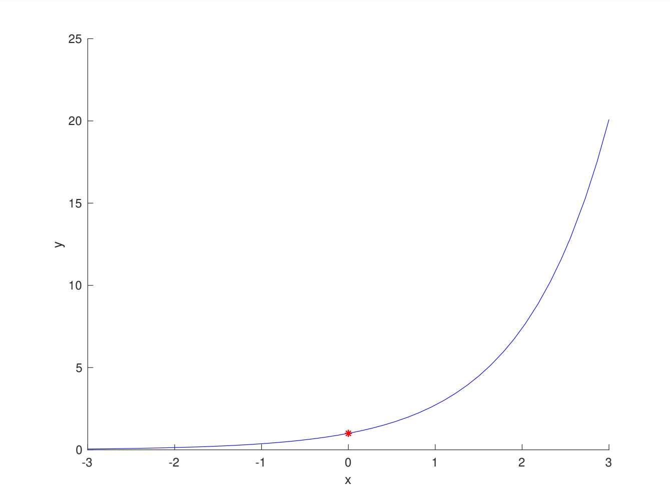
Carlos M. Mora

EDO no homogénea con coeficiente constante

Función exponencial

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto e^x = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leftrightsquigarrow \exp\left(x\right) = e^x,$$



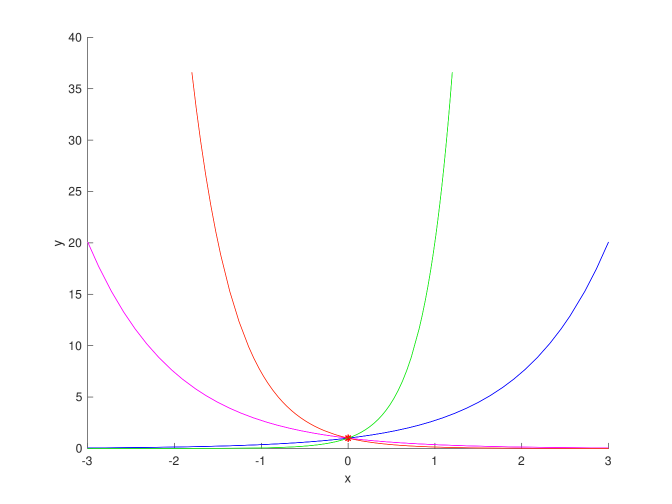
$$\frac{d}{dx}\exp\left(x\right) = \exp\left(x\right)$$

Función exponencial

Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} f\left(g\left(x\right)\right) = f'\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx} \exp\left(\lambda\, x\right) = \exp'\left(\lambda\, x\right) \frac{d}{dx}\left(\lambda\, x\right) = \lambda\, \exp\left(\lambda\, x\right)$$



$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right) = f'\left(x\right)g\left(x\right) + f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\ e^{\lambda\,x}\right) &= f'\left(x\right)\ e^{\lambda\,x} + \lambda\,f\left(x\right)\ e^{\lambda\,x} \\ &= e^{\lambda\,x}\left(f'\left(x\right) + \lambda\,f\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

EDO lineal general

Solución general

Sean $p \in \mathbb{R}$ y $g :]x_i, x_f[\to \mathbb{R}$ una función continua. Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) + p\, y(x) = g(x) \qquad \forall x \in]x_i, x_f[\,.$$

Primer paso

$$e^{p\,x}\left(y'(x) + p\, y(x)\right) = e^{p\,x} g(x)$$

$$e^{p\,x} y'(x) + \frac{d}{dx}\left(e^{p\,x}\right) y(x) = e^{p\,x} g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\exp(p\,x)\, y(x)\right) = \exp(p\,x)\, g(x)$$

EDO lineal general

Solución general

Sean $p \in \mathbb{R}$ y $g :]x_i, x_f[\to \mathbb{R}$ una función continua. Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) + p\,y(x) = g(x) \qquad \forall x \in]x_i, x_f[\,.$$

Segundo paso

Ya que $\frac{d}{dx}(\exp(p\,x)\,y(x)) = \exp(p\,x)\,g(x)$,
el teorema fundamental del cálculo nos asegura

$$\exp(p\,x)\,y(x) = K + \int \exp(p\,x)\,g(x)\,dx$$

Por lo tanto, todas las soluciones son:

$$y(x) = \exp(-p\,x)\,K + \exp(-p\,x)\int \exp(p\,x)\,g(x)\,dx,$$

con $K \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Solución general

Encuentre todas las soluciones (funciones derivables $y(x)$) de

$$y'(x) = 0{,}2\, y(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo se comportará $y(x)$ cuando x se acerca a $+\infty$?

$$y'(x) - 0{,}2\, y(x) = 0 \Rightarrow e^{-0{,}2\,x}\left(y'(x) - 0{,}2\, y(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-0{,}2\,x} y'(x) - 0{,}2\, e^{-0{,}2\,x} y(x) = 0 \Rightarrow e^{-0{,}2\,x} \frac{d}{dx} y(x) + \frac{d}{dx}\left(e^{-0{,}2\,x}\right) y(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-0{,}2\,x} y(x)\right) = 0$$

$$e^{-0{,}2\,x} y(x) = K \iff y(x) = K \exp(0{,}2\,x) \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}$$

$$lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } K > 0 \\ 0, & \text{si } K = 0 \\ -\infty, & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Solución general

Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) = -2\,y(x) + sen(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo se comportará $y(x)$ cuando x se acerca a $+\infty$?

Primer paso

$$y'(x) + 2\,y(x) = sen(x)$$

$$e^{2x}\left(y'(x) + 2\,y(x)\right) = e^{2x}\,sen(x) \Rightarrow e^{2x}y'(x) + 2e^{2x}y(x) = e^{2x}\,sen(x)$$

$$\Rightarrow e^{2x}y'(x) + \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)y(x) = e^{2x}\,sen(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{2x}y(x)\right) = e^{2x}\,sen(x)$$

Ejemplo

Solución general

Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) = -2\,y(x) + sen(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Segundo paso

Como

$$\frac{d}{dx}\left(\exp(2\,x)\,y(x)\right) = \exp(2\,x)\,sen(x)\,,$$

$$\exp(2\,x)\,y(x) = K + \int \exp(2\,x)\,sen(x)\,dx.$$

De donde

$$y(x) = \exp(-2\,x)\,K + \exp(-2\,x)\int \exp(2\,x)\,sen(x)\,dx,$$

donde K es un número real arbitrario.

Ejemplo

Cálculo de $\int \exp(2x)\, sen(x)\, dx$.

Integrando por partes llegamos a

$$\int \exp(2x)\, sen(x)\, dx = \frac{1}{2}\exp(2x)\, sen(x) - \int \frac{1}{2}\exp(2x)\cos(x)\, dx.$$

Integrando nuevamente por partes obtenemos

$$\int \exp(2x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\exp(2x)\cos(x) + \int \frac{1}{2}\exp(2x)\, sen(x)\, dx.$$

Combinando deducimos que

$$\begin{aligned}\int \exp(2x)\, sen(x)\, dx = {} & \frac{1}{2}\exp(2x)\, sen(x) - \frac{1}{4}\exp(2x)\cos(x) \\ & - \frac{1}{4}\int \exp(2x)\, sen(x)\, dx\end{aligned}$$

$$\int \exp(2x)\, sen(x)\, dx = \frac{1}{5}\exp(2x)\,(2\, sen(x) - \cos(x))$$

Ejemplo

Solución general

Encuentre todas las soluciones de

$$y'(x) = -2\,y(x) + sen(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(-2\,x)\,K + \exp(-2\,x)\int \exp(2\,x)\,sen(x)\,dx \\ &= \exp(-2\,x)\,K + (2\,sen(x) - cos(x))/5, \end{aligned}$$

donde K es un número real arbitrario.

Ejemplo

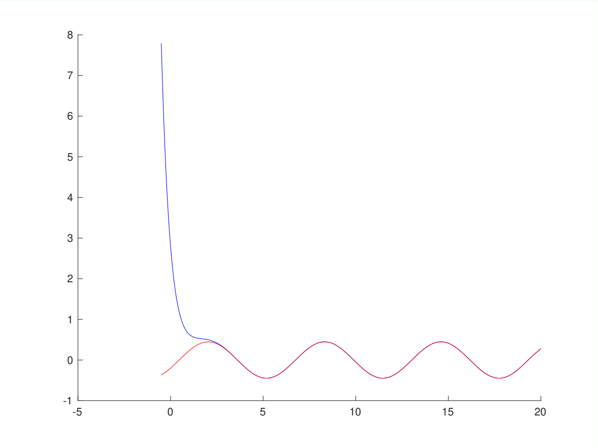
$$y'(x) = -2\, y(x) + sen(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo se comportará $y(x)$ cuando x se acerca a $+\infty$?

Puesto que $y(x) = \exp(-2\,x)\,K + (2\,sen(x) - cos(x))/5$,

$$y(x) - (2\,sen(x) - cos(x))/5 = \exp(-2\,x)\,K$$

Ya que $\exp(-2\,x)\,K$ decrece muy rápidamente a 0,
$y(x) - (2\,sen(x) - cos(x))/5$ decrece muy rápidamente a 0



$y(x)$ en azul; $(2\,sen(x) - cos(x))/5$ en rojo