Elementos Finitos

Tarea 2

Prof. Manuel Solano

4 de abril de de 2024

Fecha de entrega: 2 de mayo de 2024.

1. Considere la EDO (1) del ejercicio 3 en la Tarea N°1 y escriba un programa en Matlab que realice lo siguiente:

   a) Escriba la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ del sistema lineal $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ (usar parte 2d) del listado Listado N°2.

   b) Caulcule la solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$.

   c) Considere $f(x) = 2e^x(x^2 - x) - 2x - 1$, $\omega = 2$, $\kappa(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, 1]$, cuya solución exacta es $u(x) = x(x-1)e^x$.

   d) Para una partición con $d = 2$, resuelva "a mano" el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ asociado y esboce la gráfica de la solución u_h obtenida.

   e) Programe y resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$. Considere $d = 100$ y grafique tanto u_h como u.

   f) Calcule los errores $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$

   g) Complete la siguiente tabla de convergencia.

h	$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$	r	$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$	r
1/4		-		-
1/8				
1/16				
1/32				
1/64				

   Aquí r es llamado orden de convergencia experimental y se define como

$$r := \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)}$$

   donde e_{h_1} y e_{h_2} son los errores correspondientes a dos discretizaciones consecutivas utilizando subintervalos de longitud h_1 y h_2 ($h_2 < h_1$), respectivamente. ¿Qué observa respecto al comportamiento de r?

2. Considere la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -\triangle u + u &= f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0,1[^2 \\ u &= g \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

   Modifique el programa de FreeFem (adjunto) para resolver este problema en los siguientes casos. Para cada caso complete la siguiente tabla:

h	$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$	r	$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$	r
1/4		-		-
1/8				
1/16				
1/32				
1/64				

   a) Caso 1: $f(x, y) = (2\pi^2 + 1)\cos(\pi x)\cos(\pi y)$, $g(x, y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$. Se sabe que la solución exacta del problema es $u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$.

   b) Caso 2: $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x + y$. Se sabe que la solución exacta del problema es $u(x, y) = x + y$. ¿Qué observa en el comportamiento de los errores?