Clase 9: Integrales impropias

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

Hasta ahora, en el estudio de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

hemos necesitado que:

(1) El intervalo de integración sea cerrado, y por consiguiente acotado.
(2) f sea continua en $[a, b]$ o, en caso de ser discontinua, que fuese acotada sobre dicho intervalo.

Cuando se omite una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una Integral impropia.

Llamaremos integrales impropias de 1^{era} especie, a aquellas integrales de funciones continuas definidas sobre intervalos no acotados.

Por lo tanto, al menos uno de los límites de integración es $+\infty$ o $-\infty$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ , \ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \ , \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Integrales impropias de 1^{era} especie

Definición

Definición 9.1

Sea f continua sobre el intervalo $[a, +\infty[$. Se define

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad (1)$$

Similarmente, si f es continua en $]-\infty, b]$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad (2)$$

Cuando los límites (1) y (2) existen, se dice que la integrales **convergen**. De lo contrario, se dice que las integrales **divergen**.

Integrales impropias de 1$^{\text{era}}$ especie
Ejemplo 1

- Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Solución.

La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ converge a 1, mientras que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ converge a $\ln(2)$.

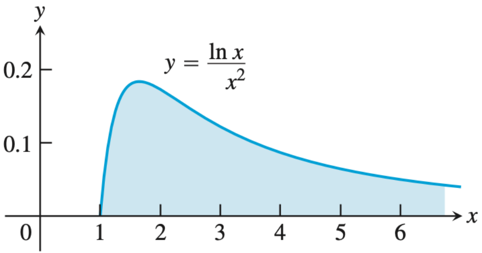
Interpretación geométrica

Ejemplo 1

La integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

se interpreta como el área bajo la curva $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ desde $x = 1$ a $+\infty$.



- Analice la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

para cada $p \in \mathbb{R}$.

Solución.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si} \quad p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si} \quad p > 1 \end{cases}$$

Teorema

Criterio p-integral

Mas general, dado $a > 0$ se puede mostrar que:

Teorema 9.2 (Criterio p-integral)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si} \quad p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(a^{p-1})} & \text{si} \quad p > 1 \end{cases}$$

(Ejercicio).

Ejemplo 9.3

$$\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx \text{ diverge y } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\, dx \text{ converge a } \frac{1}{4}.$$

Definición 9.4

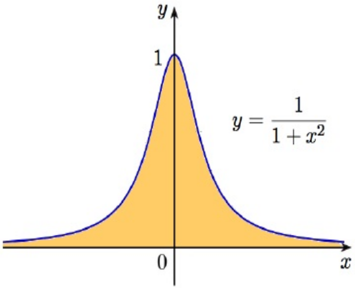
Sea f continua en todo $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Se define

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\ dx \quad (*)$$

La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge siempre y cuando $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx$ y $\int_{c}^{+\infty} f(x)\ dx$ sean convergentes.

- Analice la convergencia de las siguientes integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$$



Integrales impropias de 2^{da} especie

Idea

En este caso, nos encontramos con funciones no acotadas (f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración), definidas sobre intervalos acotados.

Por ejemplo, ¿Cómo calcular

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

si la función no está definida en $x = 2$? (tiene asíntota vertical en $x = 2$)

Definición 9.5

- Sea f continua en $[a, b[$, discontinua en $x = b$ y $t \in [a, b[$. Se define,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

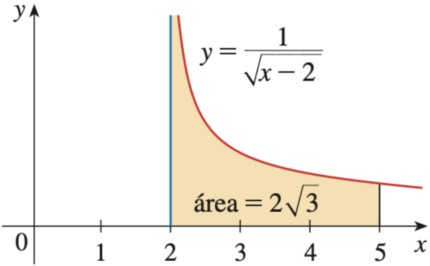
- Sea f continua en $]a, b]$ y discontinua en $x = a$. Se define,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

Integrales impropias de 2da especie

Ejemplos

- Analice la convergencia de $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$.



Definición 9.6

Si f tiene una discontinuidad en c, con $c \in (a, b)$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge siempre y cuando $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ sean convergente.

- Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx$.

En ocasiones, resulta complejo hallar el valor exacto de una integral impropia. Sin embargo, es importante saber si esta converge o no.

Estableceremos 2 criterios de convergencia para integrales impropias de funciones no negativas.

Teorema 9.7

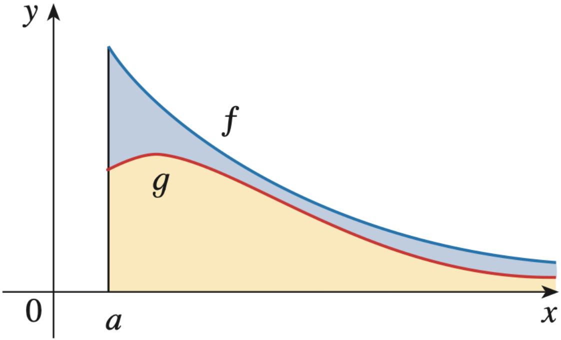
Sean f y g continuas en $[a, +\infty[$ tales que para cada $x \geq a$, se tiene que $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Luego,

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge.
2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

Criterio de comparación

Idea geométrica

La siguiente imagen hace que el Teorema anterior parezca evidente.



Criterio de comparación

Idea de la demostración

1. Ya que para cada $x \geq a$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, se tiene que:

$$0 \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx = L \in \mathbb{R}$$

Luego,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)dx = \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx : b > a \right\} \text{ existe}$$

y por lo tanto, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.

2. Es simplemente el contrarrecíproco de 1.

Criterio de comparación

Ejemplos

Decida si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^6}\, dx$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\, dx$

Observación.

El criterio también es válido si se consideran integrales impropias de segunda especie.

Por ejemplo, analice la convergencia de las siguiente integrales:

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\, dx \text{ y } \int_3^6 \frac{\ln(x)}{(x-3)^4}\, dx$$

Teorema 9.8

Sean $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continuas, no negativas, tales que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

Se tiene:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \ \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \ \text{ converge}$$

Observación. Si $L = 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx \ \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \ \text{ converge}$$

Comparación en el límite

Idea de la demostración

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, se tiene que, para cada $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$\forall x : x > M \Longrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon$$

De lo anterior,

$$(L-\epsilon)g(x) < f(x) < (L+\epsilon)g(x)$$

Así, considerando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de tal forma que $L - \epsilon > 0$, se concluye haciendo uso del Criterio de comparación.

Ejercicios

Analice la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 - \frac{1}{2}}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\, dx$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\, dx$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^3+4}}\, dx$

Observación. El criterio también es válido si se consideran integrales impropias de segunda especie.

Por ejemplo, muestre que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x\sqrt{x}} dx$ es convergente comparando con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y observando que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e^x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$.