525402 Análisis Funcional II
Capítulo T: Distribuciones y Espacios de Sobolev[1]

Leonardo E. Figueroa

CI^{2}MA y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Semestre 2024-1

[1]Contenidos tomados principalmente de las clases 2–[por determinar] de **Luc Tartar:** An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

Clase 2 del Tartar: Medida de Lebesgue y Convolución

La medida de Lebesgue en R^N es **invariante respecto a traslaciones, rotaciones y reflexiones**: Esto es, dado $a \in R^N$ y $M \in R^{N\times N}$ con $M^T M = I$, la imagen de un conjunto medible Lebesgue $A \subset R^N$ bajo la isometría $x \mapsto a + Mx$ es también un conjunto medible Lebesgue y posee la misma medida de A.

Una consecuencia es que, para todo conjunto medible A y $f\colon A \to R$ medible,

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a+MA} f\big(M^{-1}(x-a)\big)\,dx.$$

Salvo por reescalamientos positivos, la medida de Lebesgue es la única medida de Radon para R^N que es invariante bajo traslaciones. Fijando la medida del hipercubo unitario como 1, queda completamente determinada.

Más en general, para todo grupo conmutativo localmente compacto existe una única, salvo reescalamientos positivos, medida de Radon nonula que es invariante bajo traslación (*traslación* aquí entendida como la operación del grupo con un miembro fijo de éste); se le llama la *medida de Haar* del grupo.

- En el caso de R^N visto como grupo con la operación $+$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue.
- En el caso de los enteros Z con la operación $+$, la medida de Haar es la medida discreta.
- En el caso de $(0,\infty)$ con la operación multiplicación, la medida de Haar es la medida de Lebesgue multiplicada por la función $x \mapsto 1/x$. En este caso la invarianza de la medida de Haar respecto a la traslación se expresa como

$$(\forall\, A \subset (0,\infty),\ \text{medible})\ (\forall\, f\colon A \to R,\ \text{medible})\ (\forall\, a \in (0,\infty))$$
$$\int_A f(x)\,\frac{dx}{x} = \int_{aA} f\big(a^{-1}x\big)\,\frac{dx}{x}.$$

Dadas funciones medibles a valores reales f y g sobre R^N definimos su *producto de convolución* $f \star g$ mediante:

$$(\forall\, x \in R^N) \quad (f \star g)(x) := \int_{R^N} f(y)\, g(x-y)\, dy. \tag{2.1}$$

Es inmediato comprobar que $\int_{R^N} f(y)\, g(x-y)\, dy = \int_{R^N} f(x-y)\, g(y)\, dy$, por lo que el producto de convolución es conmutativo. Por

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) \neq 0 \iff \int_{R^N} f(y)\, g(x-y)\, dy \neq 0 \iff \int_{\mathrm{supp}(f)} f(y)\, g(x-y)\, dy \neq 0 \\ \implies (\exists\, y \in \mathrm{supp}(f))\; g(x-y) \neq 0 \implies (\exists\, y \in \mathrm{supp}(f))\; x-y \in \mathrm{supp}(g) \\ \implies x \in \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)\end{aligned}$$

se tiene la inclusión

$$\mathrm{supp}(f \star g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g). \tag{2.2}$$

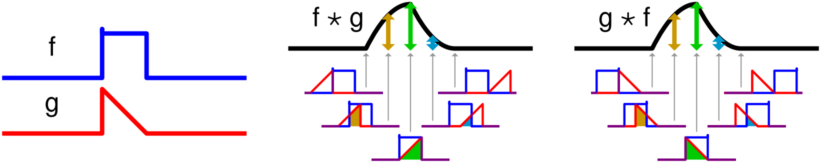

Figura: Ilustración de la convolución en R^1. Imagen adaptada de una del usuario Cmglee de Wikimedia Commons, compartida bajo la licencia *Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported*.

Se tiene la *desigualdad de Young* para convoluciones, que probaremos en dos pasos:

Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$,

$$\left(\forall\, f \in L^p(R^N)\right)\ \left(\forall\, g \in L^q(R^N)\right) \quad \|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,. \tag{2.3}$$

Proposición sin número

Sean $u, v \in L^1(R^N)$. Entonces, para casi todo $x \in R^N$, la función $y \mapsto u(x-y)\, v(y)$ también pertenece a $L^1(R^N)$.

Demostración: Para casi todo $y \in R^N$,

$$\int_{R^N} |u(x-y)\, v(y)| \; dx = |v(y)| \int_{R^N} |u(x-y)| \; dx = |v(y)| \; \|u\|_1 < \infty,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la invarianza de la medida de Lebesgue de R^N respecto a la traslación y para la desigualdad hemos usado que las funciones integrables son finitas casi en todas partes. Integrando la igualdad entre la primera y la tercera expresión de arriba con respecto a $y \in R^N$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{R^N \times R^N} |u(x-y)\, v(y)| \; d(x,y) &\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{R^N} \int_{R^N} |u(x-y)\, v(y)| \; dx\, dy \\ &= \|u\|_1 \; \|v\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x,y) \mapsto u(x-y)\, v(y)$ es integrable en $R^N \times R^N$. Podemos entonces apelar al teorema de Fubini que, entre otras cosas, garantiza que, para casi todo $x \in R^N$, la “lonja” $y \mapsto u(x-y)\, v(y)$ es integrable en R^N. $\square$

Demostración de la desigualdad de Young (2.3): Si $p = \infty$, obligatoriamente $q = 1$ y $r = \infty$ y el resultado deseado sale directamente de la desigualdad de Hölder; en efecto, para todo $x \in R^N$,

$$|(f \star g)(x)| = \left| \int_{R^N} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \leq \|y \mapsto f(x-y)\|_\infty \, \|g\|_1 = \|f\|_\infty \, \|g\|_1 \, ,$$

donde la última igualdad es consecuencia de la invarianza de la medida de Lebesgue respecto a reflexiones y traslaciones. Si $q = \infty$, obligatoriamente $p = 1$ y $r = \infty$ y el resultado deseado se obtiene en forma casi idéntica, esta vez usando que $\|f\|_1 = \|y \mapsto f(x-y)\|_1$, donde de nuevo participa la invarianza mencionada.

En los casos que restan $p \neq \infty$ y $q \neq \infty$. Sea $\alpha := p/q'$ y $\beta := q/p'$. Es fácil comprobar a partir de las hipótesis sobre p, q y r que

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1, \quad (1-\alpha)r = p \quad \text{y} \quad (1-\beta)r = q.$$

Dado $x \in R^N$ definimos $\varphi_1(y) := |f(x-y)|^\alpha$, $\varphi_2(y) := |g(y)|^\beta$ y $\varphi_3(y) := |f(x-y)|^{1-\alpha} \, |g(y)|^{1-\beta}$. Entonces, $\|\varphi_1\|_{q'} = \left(\int_{R^N} |\varphi_1(y)|^{q'} \, dy \right)^{1/q'} = \|f\|_p^{p/q'} = \|f\|_p^\alpha$ (otra vez usamos la invarianza mencionada) y $\|\varphi_2\|_{p'} = \|g\|_q^{q/p'} = \|g\|_q^\beta$. Por otro lado, aplicando la proposición sin número a $u := |f|^p$ y $v := |g|^q$, obtenemos que para casi todo $x \in R^N$,

$$\|\varphi_3\|_r^r = \int_{R^N} |f(x-y)|^p \, |g(y)|^q \, dy < \infty.$$

De esta forma, usando la desigualdad de Hölder triple, para casi todo $x \in R^N$,

$$\int_{R^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\;dy = \int_{R^N} \varphi_1(y)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(y)\,dy \leq \|\varphi_1\|_{q'}\,\|\varphi_2\|_{p'}\,\|\varphi_3\|_r$$
$$= \|f\|_p^{\alpha}\,\|g\|_q^{\beta}\left[\int_{R^N} |f(x-y)|^p\,|g(y)|^q\;dy\right]^{1/r}.$$

Usando la desigualdad que resulta de elevar la igualdad anterior a r e integrarla con respecto a $x \in R^N$,

$$\|f \star g\|_r^r \leq \|f\|_p^{\alpha r}\;\|g\|_q^{\beta r} \int_{R^N}\int_{R^N} |f(x-y)|^p\,|g(y)|^q\;dy\,dx$$
$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \|f\|_p^{\alpha r}\;\|g\|_q^{\beta r} \int_{R^N}\int_{R^N} |f(x-y)|^p\,|g(y)|^q\;dx\,dy$$
$$= \|f\|_p^{\alpha r}\;\|g\|_q^{\beta r}\;\|f\|_p^p\;\|g\|_q^q = \|f\|_p^r\;\|g\|_q^r\,,$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado aquella invarianza otra vez más (Javier Almonacid (2015) me hizo notar que aquí es innecesario apelar a algún teorema de cambio de variable). $\square$

Introducimos las notaciones

$$C_c(R^N) := \Big\{h \in C(R^N) \mid \operatorname{supp}(h) \text{ es compacto}\Big\},$$

$$C_0(R^N) := \Big\{h \in C(R^N) \mid h(x) \to 0 \text{ con } |x| \to \infty\Big\},$$

$$BUC(R^N) := \Big\{h \in C(R^N) \mid h \text{ es acotada y uniformemente continua}\Big\}.$$

Notemos que $\boxed{\text{las funciones en } C_c(R^N) \text{ son uniformemente continuas}}$. En efecto, si $f \in C_c(R^N)$, $f|_{\operatorname{supp}(f)}$ es uniformemente continua por ser continua en un compacto. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que todo par $x_0, x_1 \in \operatorname{supp}(f)$ que satisfaga $|x_1 - x_0| < \delta$ también satisface $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sean ahora $x_0, x_1 \in R^N$ con $|x_1 - x_0| < \delta$.

- Si $x_0, x_1 \in \operatorname{supp}(f)$, ya sabemos que $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Si $x_0, x_1 \notin \operatorname{supp}(f)$, $|f(x_1) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $x_0 \notin \operatorname{supp}(f)$ y $x_1 \in \operatorname{supp}(f)$, entonces existe $\lambda \in (0, 1]$ tal que $x_\lambda := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0 \in \partial \operatorname{supp}(f)$. Luego, $|x_1 - x_\lambda| = |(1 - \lambda)(x_1 - x_0)| < \delta$ y $f(x_\lambda) = 0$. Así, $|f(x_1) - f(x_0)| \le |f(x_1) - f(x_\lambda)| + |f(x_\lambda) - f(x_0)| < \varepsilon + 0$.

Notemos que $\boxed{\text{si } f, g \in C_c(R^N) \text{, entonces } f \star g \in C_c(R^N)}$. En efecto, por (2.2), $f \star g$ tiene soporte compacto. Por otro lado, cada vez que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en R^N,

$$\begin{aligned}|(f \star g)(x) - (f \star g)(x_n)| &\le \int_{R^N} |f(y)|\,|g(x - y) - g(x_n - y)|\,dy \\ &\le \omega_g(|x - x_n|) \int_{R^N} |f(y)|\,dy \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Es fácil probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de R^N a R que son

$$\begin{cases} \text{continuas } (f_n \in C(R^N))/ \\ \text{uniformemente continuas}/ \\ \text{acotadas y uniformemente continuas } (f_n \in BUC(R^N))/ \\ \text{continuas y de soporte compacto } (f_n \in C_c(R^N)), \end{cases}$$

y si la sucesión es de Cauchy en la norma del supremo, entonces ella converge en la misma norma del supremo a una función $f\colon R^N \to R$ que es

$$\begin{cases} \text{continua } (f \in C(R^N))/ \\ \text{uniformemente continua}/ \\ \text{acotada y uniformemente continua } (f \in BUC(R^N))/ \\ \text{continua y } f(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0 \ (f \in C_0(R^N)), \end{cases}$$

(respectivamente).

Lema 2.1

1. Sea $p \in (1, \infty)$. Para todo $f \in L^p(R^N)$ y $g \in L^{p'}(R^N)$, $f \star g \in C_0(R^N)$.
2. Para todo $f \in L^1(R^N)$ y $g \in L^\infty(R^N)$, $f \star g \in BUC(R^N)$.

Demostración: $\boxed{\text{Parte 1}}$ Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $C_c(R^N)$ que convergen a f en $L^p(R^N)$ y a g en $L^{p'}(R^N)$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}\|f \star g - f_n \star g_n\|_\infty &= \|f \star (g - g_n) + (f - f_n) \star g_n\|_\infty \\ &\leq \|f \star (g - g_n)\|_\infty + \|(f - f_n) \star g_n\|_\infty \\ &\overset{\text{Young}}{\leq} \|f\|_p \|g - g_n\|_{p'} + \|f - f_n\|_p \|g_n\|_{p'} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Así, $f \star g$ es límite en $L^\infty(R^N)$ de las funciones $f_n \star g_n \in C_c(R^N)$. Como en $C_c(R^N)$ la norma $\|\cdot\|_\infty$ se particulariza a la norma del supremo, $f \star g \in C_0(R^N)$.

$\boxed{\text{Parte 2}}$ Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(R^N)$ que converge a f en $L^1(R^N)$. Entonces,

$$\|f \star g - f_n \star g\|_\infty \overset{\text{Young}}{\leq} \|f - f_n\|_1 \|g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Así, si conseguimos probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \star g \in BUC(R^N)$, esta parte queda lista.

Para ello, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $R_n > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f_n) \subset B(0, R_n)$. Entonces, para todo $x, x' \in R^N$,

$$\begin{aligned}\left|(f_n \star g)(x) - (f_n \star g)(x')\right| &= \left|\int_{R^N} \left[f_n(x-y) - f_n(x'-y)\right] g(y)\, dy\right| \\ &\leq \int_{B(x,R_n)\cup B(x',R_n)} \left|f_n(x-y) - f_n(x'-y)\right| |g(y)|\; dy \\ &\leq \omega_{f_n}(\left|x - x'\right|)\, 2\, |B(0, R_n)|\; \|g\|_\infty .\end{aligned}$$

Como $f_n \in C_c(R^N)$ es uniformemente continua, inferimos de la desigualdad anterior que $f_n \star g$ también lo es. La calidad de acotada de $f_n \star g$ se deduce de

$$\sup |f_n \star g| = \|f_n \star g\|_\infty \overset{\text{Young}}{\leq} \|f_n\|_1 \|g\|_\infty < \infty.$$

□

Definición 2.2

Dado un vector $a \in R^N$ y una función $f \in L^1_{\text{loc}}(R^N)$, denotamos por $\tau_a f$ a la función definida en casi todo $x \in R^N$ por $\tau_a f(x) := f(x - a)$.

Por supuesto,

$$(\forall\, a, b \in R^N) \ \left(\forall\, f \in L^1_{\text{loc}}(R^N)\right) \quad \tau_b(\tau_a f) = \tau_{a+b}(f). \tag{2.5}$$

Lema 2.3

1. Para todo $a \in R^N$ y $f, g\colon R^N \to R$ medibles,

$$\tau_a(f \star g) = (\tau_a f) \star g = f \star (\tau_a g). \tag{2.6}$$

2. Para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C_c^k(R^N)$ y $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^N)$, $f \star g \in C^k(R^N)$ y, para todo multi-índice α con $|\alpha| \le k$,

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g \quad \text{casi en todas partes.} \tag{2.7}$$

Demostración: La primera igualdad en (2.6) sale de

$$\begin{aligned}((\tau_a f) \star g)(x) &= \int_{R^N} \tau_a(f)(y)\, g(x-y)\, dy = \int_{R^N} f(y-a)\, g(x-y)\, dy \\ &= \int_{R^N} f((y+a)-a)\, g(x-(y+a))\, dy = \int_{R^N} f(y)\, g((x-a)-y)\, dy \\ &= (f \star g)(x-a) = \tau_a(f \star g)(x).\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad trasladamos al integrando por $-a$ y explotamos la invarianza de la integral de Lebesgue respecto a traslaciones. La segunda igualdad en (2.6) se obtiene intercambiando los roles de f y g en la primera igualdad y explotando la conmutatividad de la convolución.

Para obtener (2.7) basta probar el caso en que $|\alpha| = 1$; los demás casos siguen por un argumento de inducción. Sea entonces $f \in C_c^1(R^N)$ y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

Por definición de derivada parcial la diferencia finita $\frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right)$ tiende puntualmente a la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ cuando ε tiende a cero. Afirmamos que esta convergencia es uniforme; en efecto, para todo $x \in R^N$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right)(x)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{1}{\varepsilon}\big(f(x) - f(x - \varepsilon e_j)\big)\right| \\
&= \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0} \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \varepsilon t e_j)\, dt\right| = \left|\int_{-1}^{0}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \varepsilon t e_j)\right] dt\right| \\
&\qquad \leq \int_{-1}^{0}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \varepsilon t e_j)\right| dt \leq \omega_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(|\varepsilon|) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0. \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el Teorema Fundamental del Cálculo $w(0) - w(-1) = \int_{-1}^{0} w'(t)\, dt$ a la función $w(t) = f(x + \varepsilon t e_j)$ y en la última desigualdad hemos usado que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \varepsilon t e_j)\right| \leq \omega_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(|\varepsilon t|) \leq \omega_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(|\varepsilon|)$ (los módulos de continuidad uniforme son nodecrecientes); el límite es por la continuidad uniforme de $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C_c(R^N)$.

Afirmamos ahora que $\frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right) \star g$ converge uniformemente en conjuntos compactos a $\frac{\partial f}{\partial x_j} \star g$. Para probar esto, sea K un compacto novacío arbitrario de R^N y sea $x \in K$ y fijémonos solamente en los ε con $0 < |\varepsilon| \leq 1$ (podemos, porque lo que nos interesa es el límite $\varepsilon \to 0$).

Claramente, fuera del compacto $K - \operatorname{supp}(f) \supset \{x\} - \operatorname{supp}(f)$ la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y)$ se anula. Agrandándolo por 1 en todas las direcciones, tenemos que tanto $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y)$ como $y \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right)(x-y)$ se anulan fuera del compacto $A_{f,K} := K - \operatorname{supp}(f) + \overline{B(0,1)}$ que no depende de x ni de ε. Así,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \star g\right)(x) - \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right) \star g\right)(x)\right| & \\
&\leq \int_{R^N} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y) - \frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right)(x-y)\right| |g(y)|\, dy \\
&= \int_{A_{f,K}} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y) - \frac{1}{\varepsilon}\left(f - \tau_{\varepsilon e_j} f\right)(x-y)\right| |g(y)|\, dy \\
&\overset{(\dagger)}{\leq} \omega_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(|\varepsilon|)\, \|g\|_{L^1(A_{f,K})} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,
\end{aligned}
$$

donde estamos usando que g es integrable sobre el compacto $A_{f,K}$.

Por lo tanto,

$$
\frac{\partial(f \star g)}{\partial x_j} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f \star g - \tau_{\varepsilon e_j}(f \star g)}{\varepsilon} \overset{(2.6)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{f - \tau_{\varepsilon e_j} f}{\varepsilon} \star g\right] = \frac{\partial f}{\partial x_j} \star g,
$$

que es la particularización de (2.7) al caso $k = 1$ y para terminar con este caso solamente resta comprobar que $\frac{\partial(f \star g)}{\partial x_j}$ es continua. Ya sabemos que esta función es, en cada compacto $K \subset R^N$, el límite uniforme de $\frac{f - \tau_{\varepsilon e_j} f}{\varepsilon} \star g$.

Por lo tanto, basta comprobar que, para todo ε con $0 < |\varepsilon| < 1$ la convolución $(\Delta_{j,\varepsilon} f) \star g$ es continua en K, donde estamos abreviando $\Delta_{j,\varepsilon} f := \frac{f - \tau_{\varepsilon e_j} f}{\varepsilon}$. Para ello, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K que converge a algún $x \in K$. Como la diferencia finita $\Delta_{j,\varepsilon} f$ es continua y de soporte compacto, ella es uniformemente continua. Además, tanto $y \mapsto \Delta_{j,\varepsilon} f(x-y)$ como cada una de las $y \mapsto \Delta_{j,\varepsilon} f(x_n - y)$, $n \in \mathbb{N}$, se anulan fuera del compacto $A_{f,K} = K - \operatorname{supp}(f) + \overline{B(0,1)}$. Así,

$$
\begin{aligned}
&|((\Delta_{j,\varepsilon} f) \star g)(x) - ((\Delta_{j,\varepsilon} f) \star g)(x_n)| \\
&\qquad\qquad \leq \int_{R^N} |\Delta_{j,\varepsilon} f(x-y) - \Delta_{j,\varepsilon} f(x_n - y)|\, |g(y)|\, dy \\
&\qquad\qquad = \int_{A_{f,K}} |\Delta_{j,\varepsilon} f(x-y) - \Delta_{j,\varepsilon} f(x_n - y)|\, |g(y)|\, dy \\
&\qquad\qquad \leq \omega_{\Delta_{j,\varepsilon} f}(|x - x_n|)\, \|g\|_{L^1(A_{f,K})} \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}
$$

lo que prueba la continuidad de $(\Delta_{j,\varepsilon} f) \star g$ en K, lo que a su vez nos permite concluir que $\frac{\partial(f\star g)}{\partial x_j} \in C(K)$, lo que su vez, por la arbitrariedad del compacto K, nos dice que $\frac{\partial(f\star g)}{\partial x_j} \in C(R^N)$. Un argumento muy parecido pero algo más simple nos indica que $f \star g$ es continua también, por lo que concluimos que $f \star g \in C^1(R^N)$, como se deseaba probar. $\square$

Como $C_c^\infty(R^N) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_c^k(R^N)$, de la parte 2 del Lema 2.3 es inmediato concluir que, para todo $f \in C_c^\infty(R^N)$ y $g \in L^1_{\text{loc}}(R^N)$, se tiene $f \star g \in C^\infty(R^N)$.

Necesitamos construir explícitamente solamente un miembro nonulo de $C_c^\infty(R^N)$.

Lema 2.4

La función ρ definida sobre R^N mediante

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

pertenece a $C_c^\infty(R^N)$.

Demostración: Sea $\eta\colon R \to R$ definida por

$$\eta(t) = \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Entonces, ρ es la composición de η con el polinomio $x \mapsto 1 - |x|^2$. Luego, basta comprobar que $\eta \in C^\infty(R)$. Claramente η es infinitamente diferenciable en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, por lo que solamente resta comprobar que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{d^k}{dt^k} \exp(-1/t) = 0.$$

Aquello es cierto porque, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $\frac{d^k}{dt^k} \exp(-1/t)$ es el producto de una función racional (razón entre polinomios) de t y $\exp(-1/t)$ y este factor exponencial tiende a 0 tan rápido que el factor racional no puede afectar el límite. $\square$

Clase 3 del Tartar: Suavización mediante convolución

Definición 3.1

1. Una *sucesión suavizante* es una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_c^\infty(R^N)$ tal que
   - para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset \overline{B(0, r_n)}$ y $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (eso quiere decir el libro con $\operatorname{supp}(\rho_n) \xrightarrow{n\to\infty} \{0\}$),
   - $\|\rho_n\|_1 = \int_{R^N} |\rho_n(x)|\, dx$ es acotado independientemente de n y
   - $\int_{R^N} \rho_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
2. Una *sucesión suavizante especial* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida mediante

$$\rho_n(x) = n^N \rho_1(n\, x), \tag{3.1}$$

donde $\rho_1 \in C_c^\infty(R^N)$ es nonegativa, tiene integral 1 y $\operatorname{supp}(\rho_1) \subset \overline{B(0, 1)}$.

Si ρ es la función definida en (2.8), entonces $\|\rho\|_1^{-1} \rho$ es un ρ_1 admisible para la parte 2 de la Definición 3.1.

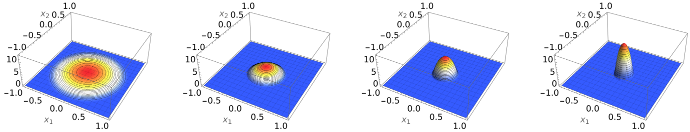

Figura: Ilustración de los cuatro primeros miembros de la sucesión suavizante especial construida a partir de ρ de (2.8).

Lema 3.2

Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante.

1. Si $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(R^N)$, entonces $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^p(R^N)$.
2. Si $f \in L^\infty(R^N)$, entonces $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ y también en $L^q_{\mathrm{loc}}(R^N)$ para $1 \le q < \infty$ (esto es, para todo compacto $K \subset R^N$, $f \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ en $L^q(K)$).

Demostración: $\boxed{\text{Parte 1}}$ Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(R^N)$ que converge a f en $L^p(R^N)$ y sea $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\rho_n\|_1 < \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_m\|_p < \varepsilon$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|f - f \star \rho_n\|_p &\le \|f - f_m\|_p + \|f_m - f_m \star \rho_n\|_p + \|f_m \star \rho_n - f \star \rho_n\|_p \\
&\overset{\text{Young}}{\le} \|f - f_m\|_p + \|f_m - f_m \star \rho_n\|_p + \|f_m - f\|_p \|\rho_n\|_1 \\
&< (1 + C)\varepsilon + \|f_m - f_m \star \rho_n\|_p .
\end{aligned}$$

Resta comprobar que, con m ya fijo, $\|f_m - f_m \star \rho_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Denotemos $\kappa_n := \int_{R^N} \rho_n(x)\, dx$. Entonces, $f_m - f_m \star \rho_n = (1 - \kappa_n) f_m + (\kappa_n f_m - f_m \star \rho_n)$. Como $\kappa_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$, el primer término tiende a la función nula en $L^p(R^N)$. Respecto al segundo término, para todo $x \in R^N$,

$$\begin{aligned}
|\kappa_n f_m(x) - (f_m \star \rho_n)(x)| &= \left| \int_{R^N} [f_m(x)\rho_n(y) - f_m(x-y)\rho_n(y)]\, dy \right| \\
&\leq \int_{R^N} |f_m(x) - f_m(x-y)|\, |\rho_n(y)|\ dy \\
&= \int_{\overline{B(0,r_n)}} |f_m(x) - f_m(x-y)|\, |\rho_n(y)|\ dy \\
&\leq \omega_{f_m}(r_n)\, C \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\kappa_n f_m - f_m \star \rho_n$ tiende a la función nula uniformemente. Como su soporte está contenido en el compacto $\operatorname{supp}(f_m) + \overline{B(0, \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n)}$, que es independiente de n, también tiende a la función nula en $L^p(R^N)$.

$\boxed{\text{Parte 2}}$ Sea $g \in L^1(R^N)$ (nuestro predual elegido de $L^\infty(R^N)$). Debemos probar que $\int_{R^N} (f \star \rho_n)(x)\, g(x)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{R^N} f(x)\, g(x)\, dx$. Definamos, para todo $n \in \mathbb{N}$, a $\check{\rho}_n := x \mapsto \rho_n(-x)$. Claramente, $(\check{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión suavizante. Por el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{R^N} (f \star \rho_n)(x)\, g(x)\, dx &= \int_{R^N} \int_{R^N} f(y)\, \rho_n(x-y)\, g(x)\, dy\, dx \\
&= \int_{R^N} \int_{R^N} f(y)\, \rho_n(x-y)\, g(x)\, dx\, dy = \int_{R^N} f(y)\, (\check{\rho}_n \star g)(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Por la parte 1, $\check{\rho}_n \star g \xrightarrow{n\to\infty} g$ en $L^1(R^N)$ y, por lo tanto la última integral (y, consiguientemente, la primera) tiende a $\int_{R^N} f(x) g(x)\, dx$ cuando n tiende a ∞.

Sea ahora $q \in [1, \infty)$ y sea K un subconjunto compacto novacío de R^N. Entonces $\tilde{K} := K + \overline{B(0, \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n)}$ también es un conjunto compacto. Definiendo a $\tilde{f} := \chi_{\tilde{K}} f$ (esto es, $\tilde{f}$ coincide con f en $\tilde{K}$ y es nula en $R^N \setminus \tilde{K}$) observamos que $\tilde{f} \in L^q(R^N)$ y que en K las funciones $f - f \star \rho_n$ y $\tilde{f} - \tilde{f} \star \rho_n$ coinciden. Así,

$$\int_K |f(x) - (f \star \rho_n)(x)|^q \, dx = \int_K \left|\tilde{f}(x) - (\tilde{f} \star \rho_n)(x)\right|^q \, dx \leq \left\|\tilde{f} - \tilde{f} \star \rho_n\right\|_{L^q(R^N)}^q$$

y por la parte 1 esta última cantidad tiende a 0 cuando n tiende a ∞. □

Ahora queremos aproximaciones que, además de estar en $C^\infty(R^N)$, también tengan soporte compacto.

Lema 3.3

1. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $C_c^\infty(R^N)$ es denso en $L^p(R^N)$.
2. $C_c^\infty(R^N)$ es secuencialmente denso en $L^\infty(R^N)$ en la topología débil-$\star$.

Demostración: Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante y sea $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\rho_n\|_1 < \infty$.

$\boxed{\text{Parte 1}}$ Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(R^N)$ que converge a f en $L^p(R^N)$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $m(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|f - f_{m(k)}\right\|_p < \frac{1}{2k}$. Por la parte 1 del Lema 3.2, $(f_{m(k)} \star \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f_{m(k)}$ en $L^p(R^N)$. Entonces existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|f_{m(k)} - f_{m(k)} \star \rho_{n(k)}\right\|_p < \frac{1}{2k}$. Por la desigualdad triangular, $\left\|f - f_{m(k)} \star \rho_{n(k)}\right\|_p \leq \frac{1}{k}$. Luego, $(f_{m(k)} \star \rho_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_c^\infty(R^N)$ que converge a f en $L^p(R^N)$.

$\boxed{\text{Parte 2}}$ Dado $m \in \mathbb{N}$ sea f_m la función definida para casi todo $x \in R^N$ por $f_m(x) = f(x)$ si $|x| \le m$ y $f_m(x) = 0$ si $|x| > m$ (esto es, $f_m = \chi_{\overline{B(0,m)}} f$). Por supuesto, $\|f_m\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Afirmamos que $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$. En efecto, dado $g \in L^1(R^N)$, $f_m g \xrightarrow{m\to\infty} fg$ puntualmente casi en todas partes y, para todo $m \in \mathbb{N}$, $|f_m g| \le |fg| \in L^1(R^N)$. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, $\int_{R^N} f_m(x)\, g(x)\, dx \xrightarrow{m\to\infty} \int_{R^N} f(x)\, g(x)\, dx$.

Fijando a $m \in \mathbb{N}$, tenemos de la parte 2 del Lema 3.2 que $f_m \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} f_m$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad de Young (2.3) indica que $\|f_m \star \rho_n\|_\infty \le \|f_m\|_\infty \|\rho_n\|_1 \le C \|f\|_\infty$.

Ahora, dado un espacio de Banach separable E, la topología de subespacio para la bola abierta $B_{E'}(0,1)$ con respecto a la topología débil-$\star$ de E' es metrizable[2]. Como $L^1(R^N)$ es separable, esto se particulariza a que la topología de subespacio para la bola abierta $B := B_{L^\infty(R^N)}(0,1)$ respecto a la topología débil-$\star$ de $L^\infty(R^N)$ es metrizable; esto es, existe una métrica $d\colon B \times B \to R$ cuyas bolas abiertas inducen dicha topología. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $\max(C,1)\, \|f\|_\infty < 1$. Entonces, las afirmaciones de los dos párrafos anteriores se pueden expresar como:

$$d(f, f_m) \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad \text{y} \qquad (\forall\, m \in \mathbb{N}) \quad d(f_m, f_m \star \rho_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ tomamos un $m(k)$ tal que $d(f, f_{m(k)}) < \frac{1}{2k}$ y un $n(k)$ tal que $d(f_{m(k)}, f_{m(k)} \star \rho_{n(k)}) < \frac{1}{2k}$; por la desigualdad triangular, $d(f, f_{m(k)} \star \rho_{n(k)}) < \frac{1}{k}$.

[2] Teorema 3.28 de **Haim Brezis**, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

Por lo tanto, la sucesión $(f_{m(k)} \star \rho_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en $C_c^\infty(R^N)$ y converge a f en la topología de subespacio para B respecto la topología débil-$\star$ de $L^\infty(R^N)$. Por lo tanto, esa convergencia también ocurre en la topología débil-$\star$ de $L^\infty(R^N)$. $\square$

Clase 4 del Tartar: Truncación, medidas de Radon, distribuciones

En la parte 2 del Lema 3.3 empleamos truncaciones crudas de la función que deseábamos aproximar. Precisaremos de formas más delicadas de truncar.

Definición 4.1

1. Una *sucesión truncadora* es una sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $C_c^\infty(R^N)$ que
   - es acotada en $L^\infty(R^N)$,
   - $\theta_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ para casi todo $x \in R^N$,
   - y $D^\alpha\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ en $L^\infty(R^N)$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \geq 1$.
2. Una *sucesión truncadora especial* $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida mediante $\theta_n(x) = \theta_1(x/n)$ para $x \in R^N$ y $n \in \mathbb{N}$, donde $\theta_1 \in C_c^\infty(R^N)$ satisface $0 \leq \theta_1(x) \leq 1$ para todo $x \in R^N$, $\theta_1(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\theta_1(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

Construir semejante θ_1 se puede hacer mediante convolución; más en general:

Lema 4.2

Sean $0 < a < b < c$. Entonces, existe $\theta \in C_c^\infty(R^N)$ con $0 \leq \theta(x) \leq 1$ para todo $x \in R^N$ con $\theta(x) = 1$ si $|x| \leq a$, $\theta(x) = 0$ si $|x| \geq c$ y $\int_{R^N} \theta(x)\,dx = \int_{B(0,b)} 1\,dx$.

Demostración: Sea $\varepsilon \in (0, \min(b-a, c-b))$. Sea $f := \chi_{B(0,b)}$ (función característica). Sea $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(R^N)$ nonegativa, con $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) = \overline{B(0,\varepsilon)}$ y $\int_{R^N} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$. Entonces, $\theta = f \star \rho_\varepsilon$ satisface todas estas propiedades, con la última viniendo de la identidad:

$$\left(\forall\, g, h \in L^1(R^N)\right) \quad \int_{R^N} (g \star h)(x)\,dx = \left(\int_{R^N} g(x)\,dx\right)\left(\int_{R^N} h(x)\,dx\right). \quad (4.1)$$

□

Si $h \in L^p(R^N)$ y $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión truncadora, entonces $h\,\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ casi en todas partes y $|h\,\theta_n| \le C\;|h|$ casi en todas partes. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, si $1 \le p < \infty$, entonces $h\,\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ en $L^p(R^N)$ y, si $p = \infty$, entonces $h\,\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ y en $L^q_{\text{loc}}(R^N)$, $1 \le q < \infty$.

Definición 4.3

Sea Ω un abierto de R^N.

1. Una *medida de Radon* μ sobre Ω es una forma lineal definida en $C_c(\Omega)$, $\varphi \mapsto \langle \mu, \varphi\rangle$, tal que, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C(K) > 0$ tal que

$$(\forall\,\varphi \in C_c(\Omega) \text{ con } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K) \quad |\langle \mu, \varphi\rangle| \le C(K)\;\|\varphi\|_\infty\,. \tag{4.2}$$

   Escribiremos $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ y a los miembros de $C_c(\Omega)$ les llamaremos *funciones test* (para medidas de Radon).

2. Una *distribución* S sobre Ω es una forma lineal definida en $C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \mapsto \langle S, \varphi\rangle$, tal que, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C(K) > 0$ y un entero nonegativo $m(K)$ tales que

$$(\forall\,\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ con } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K) \quad |\langle S, \varphi\rangle| \le C(K) \max_{|\alpha|\le m(K)} \|D^\alpha \varphi\|_\infty\,. \tag{4.3}$$

   Escribiremos $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y a los miembros de $C_c^\infty(\Omega)$ les llamaremos *funciones test* (para distribuciones).

3. Si se puede escoger $m(K) = m_0$ para todos los compactos $K \subset \Omega$, diremos que la distribución es de orden $\le m_0$.

Es inmediato comprobar que toda medida de Radon es (se restringe a) una distribución de orden ≤ 0.

Si Ω es un abierto de R^N y $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definimos la medida de Radon inducida $T_f : C_c(\Omega) \to R$ mediante

$$(\forall\, \varphi \in C_c(\Omega)) \quad \langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{4.4}$$

Esta aplicación está bien definida y es lineal. Además, dado un compacto $K \subset \Omega$ y cualquier $\varphi \in C_c(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$,

$$\left|\langle T_f, \varphi \rangle\right| = \left| \int_K f(x)\, \varphi(x)\, dx \right| \leq \|f\|_{L^1(K)} \, \|\varphi\|_\infty \,,$$

lo que termina de probar que T_f es una medida de Radon ($T_f \in \mathcal{M}(\Omega)$) y, consiguientemente, T_f es también una distribución ($T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$) de orden ≤ 0.

Medidas de Radon o distribuciones que son inducidas de esta manera por funciones en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se denominan *regulares*. Se puede probar (¿tarea?) que, si dos funciones $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ inducen la misma distribución ($T_f = T_g$), entonces necesariamente $f = g$ casi en todas partes de Ω. Por lo tanto, existe una relación biunívoca entre $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y las distribuciones regulares.

Esto hace que sea común denotar a la distribución regular T_f inducida por una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sencillamente por f.

Dado un punto a en un abierto Ω, otra medida de Radon importante es la *delta de Dirac* centrada en a, denotada por δ_a, definida mediante

$$(\forall\, \varphi \in C_c(\Omega)) \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a). \tag{4.5}$$

Claramente δ_a es una forma lineal sobre $C_c(\Omega)$. Además, dado un compacto $K \subset \Omega$ y cualquier $\varphi \in C_c(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$,

$$\left|\langle \delta_f, \varphi \rangle\right| = |\varphi(a)| \leq 1 \; \|\varphi\|_\infty \,,$$

lo que termina de probar que δ_a es una medida de Radon ($\delta_a \in \mathcal{M}(\Omega)$) y, consiguientemente, δ_a es también una distribución ($\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$) de orden ≤ 0. La distribución δ_a no es regular[3]; esto es, no es inducida por alguna función en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Proposición sin número

Toda distribución de orden ≤ 0 se extiende en forma única a una medida de Radon.

Demostración: Sea Ω un abierto novacío de R^N y sea $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución de orden ≤ 0. Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante especial. Dada $\varphi \in C_c(\Omega)$, sea $\tilde{\varphi} \in C_c(R^N)$ la extensión por cero de φ.

[3] Ver Lema 1.7 (p. 24) de **Gabriel N. Gatica**, *Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*, Editorial Reverté, Barcelona, 2014.

Notemos que $\tilde{\varphi} \star \rho_n \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\varphi}$ en $L^\infty(R^N)$; en efecto, para todo $x \in R^N$,

$$|\tilde{\varphi}(x) - (\tilde{\varphi} \star \rho_n)(x)| = \left| \int_{R^N} (\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x-y))\, \rho_n(y)\, dy \right|$$
$$\leq \int_{\overline{B(0,1/n)}} |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x-y)|\ \rho_n(y)\, dy \leq \omega_{\tilde{\varphi}}(1/n) \times 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ya que $\tilde{\varphi}$ es uniformemente continua. ¡Esto **no funciona** con cualquier $\tilde{\varphi} \in L^\infty(R^N)$!

Para $n \geq M(\varphi) := \lceil 2/\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\varphi), \partial\Omega) \rceil$, $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} \star \rho_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0,1/n)}$ está compactamente contenido en Ω. Por lo tanto, la sucesión de evaluaciones $(\langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle)_{n \geq M(\varphi)}$ está bien definida, ya que cada $\tilde{\varphi} \star \rho_n$ es una función en $C_c^\infty(\Omega)$. Esta sucesión de números es de Cauchy porque

$$|\langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_m \rangle - \langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle| = |\langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_m - \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle|$$
$$\leq C\Big(\operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0, 1/M(\varphi))}\Big) \max_{|\alpha| \leq 0} \|D^\alpha (\tilde{\varphi} \star \rho_m - \tilde{\varphi} \star \rho_n)\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$\leq C\Big(\operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0, 1/M(\varphi))}\Big) \|\tilde{\varphi} \star \rho_m - \tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(\Omega)}$$

y porque, como $(\tilde{\varphi} \star \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^\infty(R^N)$, también lo es en $L^\infty(\Omega)$. Así, la aplicación $\mu_S \colon C_c(\Omega) \to R$ definida por $\langle \mu_S, \varphi \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle$ está bien definida. La aplicación μ_S hereda la calidad de lineal.

Además, dado un compacto novacío K de R^N, para todo $\varphi \in C_c(\Omega)$ con soporte contenido en K y todo $n \geq M_K := \lceil 2/\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \rceil$,

$$\begin{aligned}
|\langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle| &\leq C\Big(K + \overline{B(0, 1/M_K)}\Big) \, \|\tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&= C\Big(K + \overline{B(0, 1/M_K)}\Big) \, \|\tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(R^N)} \\
&\leq C\Big(K + \overline{B(0, 1/M_K)}\Big) \, \|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty(R^N)} \, \|\rho_n\|_{L^1(R^N)} \\
&= C\Big(K + \overline{B(0, 1/M_K)}\Big) \, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \,,
\end{aligned}$$

por lo que

$$|\langle \mu_S, \varphi \rangle| = \left| \lim_{n \to \infty} \langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle \right| \leq C\Big(K + \overline{B(0, 1/M_K)}\Big) \, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \,.$$

Por lo tanto, μ_S satisface la definición de una medida de Radon.

Ahora comprobamos que μ_S extiende a S. Sea φ una función test donde se puede evaluar a S; esto es, $C_c^\infty(\Omega)$. Entonces, para $n \geq M(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
|\langle S, \varphi \rangle - \langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle| &\leq C\Big(\operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0, 1/M(\varphi))}\Big) \, \|\varphi - \tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq C\Big(\operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0, 1/M(\varphi))}\Big) \, \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{n \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

por lo que $\langle S, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle = \langle \mu_S, \varphi \rangle$.

Por último, comprobamos que la extensión μ_S de S es única. En efecto, de haber alguna otra medida de Radon ν_S que también extiende a la distribución S, para todo $\varphi \in C_c(\Omega)$ y para todo $n \geq M(\varphi)$,

$$|\langle \nu_S, \varphi \rangle - \langle \nu_S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle| \leq C_{\nu_S} \left(\operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B(0, 1/M(\varphi))} \right) \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \star \rho_n\|_{L^\infty(\Omega)},$$

por lo que $\langle \nu_S, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \nu_S, \tilde{\varphi} \star \rho_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S, \varphi \star \rho_n \rangle$, donde hemos usado que ν_S extiende a S. Por las mismas razones (y esto no depende de la forma particular en que construimos a μ_S), $\langle \mu_S, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S, \varphi \star \rho_n \rangle$, de donde $\langle \nu_S, \varphi \rangle = \langle \mu_S, \varphi \rangle$; esto es, $\nu_S = \mu_S$. □

Hasta el momento solamente hemos dado ejemplos de distribuciones de orden ≤ 0. Hay construcciones directas de distribuciones de orden superior, pero haremos aparecer muchas mediante el concepto que introducimos a continuación.

Definición 4.4

Dados una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y un multi-índice $\alpha \in [\mathbb{N}_0]^N$, se define la distribución $D^\alpha T$ mediante

$$(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \tag{4.6}$$

Comprobemos que (4.6) efectivamente define una distribución. Para empezar, claramente es una forma lineal sobre $C_c^\infty(\Omega)$.

Ahora, dado cualquier compacto $K \subset \Omega$ y cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, se tiene

$$\begin{aligned}|\langle D^\alpha T, \varphi\rangle| = |\langle T, D^\alpha \varphi\rangle| &\leq C(K) \max_{|\beta| \leq m(K)} \left\| D^\beta D^\alpha \varphi \right\|_\infty \\ &\leq C(K) \max_{|\gamma| \leq m(K)+|\alpha|} \left\| D^\gamma \varphi \right\|_\infty ,\end{aligned}$$

donde $C(K)$ y $m(K)$ son las constantes de la desigualdad (4.3) que satisface la distribución T. Así, $D^\alpha T$ efectivamente es una distribución sobre Ω de acuerdo a la Definición 4.3.

La diferenciación de distribuciones de la Definición 4.4 generaliza la noción convencional de diferenciación en el siguiente sentido: Dada una función $f \in C^1(\Omega)$ y una dirección $j \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} ;$$

esto es, la derivada (en el sentido de la Definición 4.4) de la distribución inducida por $f \in C^1(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ coincide con la distribución inducida por la derivada (convencional) $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Empleando la convención habitual de denotar las distribuciones regulares con el mismo símbolo que la función que las indujo, esto se escribe $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ (!).

Para probar esta afirmación, sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \right\rangle - (-1) \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \int_\Omega \frac{\partial (f\,\varphi)}{\partial x_j}.$$

Sea $\widetilde{f\varphi}$ la extensión por cero de $f\,\varphi$ a todo R^N. Entonces, $\widetilde{f\varphi} \in C^1(R^N)$. Así, si $B(0,r)$ es una bola que contiene a $\operatorname{supp}(\varphi) \supset \operatorname{supp}(f\,\varphi) = \operatorname{supp}(\widetilde{f\varphi})$,

$$\left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_{B(0,r)} \frac{\partial (\widetilde{f\varphi})}{\partial x_j} = \int_{\partial B(0,r)} (\widetilde{f\varphi})(y)\, \nu_j(y)\, dS(y) = 0.$$

La *función de Heaviside* o *escalón* $H\colon R \to R$ está definida casi en todas partes por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Para todo $\varphi \in C_c^\infty(R)$, $\left\langle \frac{dH}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle H, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx} = \varphi(0)$. Por lo tanto,

$$\frac{dH}{dx} = \delta_0. \tag{4.8}$$

Sea $u := -1 + 2H$; esto es, u es la *función signo*. Entonces, $\frac{du}{dx} = 2\delta_0$. Ahora, $u^3 = u$ y $u^2 = 1$. Entonces se tiene la aparente paradoja de que $\frac{d}{dx}(u^3) = 2\delta_0$, pero $3u^2\,\frac{du}{dx} = 6\delta_0$. Lo que está pasando es que no se puede definir apropiadamente un producto entre distribuciones cualquiera. Menos todavía cabe esperar una regla de Leibniz para las derivadas de semejantes productos entre distribuciones.

Tendremos que contentarnos con definir una noción más restringida de producto.

Clase 5 del Tartar: Espacios de Sobolev y multiplicación por funciones suaves

Habiendo definido distribuciones, es fácil definir los Espacios de Sobolev.

Definición 5.1

Sean Ω un abierto de R^N, $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}_0$. Definimos al *Espacio de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ como al espacio de (clases de equivalencia de) funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq m$.

Este es un espacio normado al equipársele con la norma

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty & \text{si } p = \infty. \end{cases} \tag{5.1}$$

En todos los casos, la norma $\|u\|_{m,p}$ es equivalente a la norma $\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$.

Lema 5.2

1. Para $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}_0$, el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es Banach.
2. En el caso $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ se denota por $H^m(\Omega)$ y es un espacio de Hilbert porque su norma $\|u\|_{m,2}$ es inducida por el producto escalar

$$(u, v) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, \overline{D^\alpha v(x)} \, dx. \tag{5.2}$$

Demostración: $\boxed{\text{Parte 1}}$ Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Por la estructura de la norma, para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq m$, la sucesión $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$; como éste es completo, existe $u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$ tal que $\left\|u^{(\alpha)} - D^\alpha u_n\right\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Si conseguimos probar que, para $|\alpha| \leq m$,

$$D^\alpha u^{(0)} = u^{(\alpha)} \tag{‡}$$

esta parte estaría lista, porque tendríamos que $u^{(0)} \in W^{m,p}(\Omega)$ y, si $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned}\left\|u^{(0)} - u_n\right\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left\|D^\alpha u^{(0)} - D^\alpha u_n\right\|_p^p\right)^{1/p} \\ &\overset{(‡)}{\leq} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left\|u^{(\alpha)} - D^\alpha u_n\right\|_p^p\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

y, si $p = \infty$,

$$\begin{aligned}\left\|u^{(0)} - u_n\right\|_{m,\infty} &= \max_{|\alpha|\leq m} \left\|D^\alpha u^{(0)} - D^\alpha u_n\right\|_\infty \\ &\overset{(‡)}{=} \max_{|\alpha|\leq m} \left\|u^{(\alpha)} - D^\alpha u_n\right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Probemos (‡), que involucra una derivada distribucional. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha u^{(0)}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u^{(0)}, D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \langle u_n, D^\alpha \varphi\rangle \\ = \lim_{n\to\infty} \langle D^\alpha u_n, \varphi\rangle = \langle u^{(\alpha)}, \varphi\rangle,\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde la primera y la tercera igualdad emplean la definición de derivada distribucional y la segunda y la cuarta igualdad usan que las distribuciones involucradas son regulares y la desigualdad de Hölder (φ y $D^\alpha \varphi$ están en $L^{p'}(\Omega)$). Esto prueba (‡).

Parte 2 Es directo comprobar que el producto interior propuesto efectivamente induce la norma de $W^{m,2}(\Omega)$, del cual ya sabemos, por la Parte 1, que es completo. □

Definición 5.3

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\psi \in C^\infty(\Omega)$, entonces $\psi\, T$ (o $T\, \psi$) es la distribución definida por

$$(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \quad \langle \psi\, T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\, \varphi\rangle. \tag{5.10}$$

Para comprobar que (5.10) efectivamente define una distribución nos conviene tener una variante para dimensiones y órdenes superiores de la identidad de Leibniz para la derivada convencional de un producto.

Definición 5.4

Sean α y β dos multi-índices de largo N.

- Se dice que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_i \leq \alpha_i$ para $1 \leq i \leq N$.
- Se define $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$
- Se define $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_N}{\beta_N} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Con esta notación podemos expresar que, para todo $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$,

$$D^\alpha(f\, g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f\, D^{\alpha-\beta} g, \tag{5.12}$$

lo que es fácil de probar mediante inducción. Ahora podemos comprobar que $\psi\, T$ de la Definición 5.3 satisface: Para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$,

$$\begin{aligned}
|\langle \psi\, T, \varphi \rangle| = |\langle T, \psi\, \varphi \rangle| &\leq C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \|D^\alpha(\psi\, \varphi)\|_\infty \\
&= C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi\, D^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_\infty \\
&\leq C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^\beta \psi \right\|_{L^\infty(K)} \left\| D^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_\infty \right].
\end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
|\langle \psi\, T, \varphi \rangle| &\leq C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\beta} \psi \right\|_{L^{\infty}(K)} \left\| D^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_{\infty} \right] \\
&\leq C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \left[\left(\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\beta} \psi \right\|_{L^{\infty}(K)} \right) \max_{\beta \leq \alpha} \left\| D^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_{\infty} \right] \\
&\leq \left(C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\beta} \psi \right\|_{L^{\infty}(K)} \right) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \max_{\beta \leq \alpha} \left\| D^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_{\infty} \\
&= \left(C(K) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\beta} \psi \right\|_{L^{\infty}(K)} \right) \max_{|\alpha| \leq m(K)} \left\| D^{\alpha} \varphi \right\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Así, $\psi\, T$ satisface la Definición 4.3 de distribución sobre Ω. De paso, este argumento demuestra que si T es una distribución de orden $\leq m$, entonces $\psi\, T$ también es una distribución de orden $\leq m$.

También es importante comprobar que, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, entonces $\psi\, T_f = T_{\psi f}$ (en la notación convencional, $\psi\, f = \psi\, f$). En efecto, para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$,

$$
\langle \psi\, T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \psi\, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\, \psi\, \varphi = \int_{\Omega} \psi\, f\, \varphi = \langle T_{\psi f}, \varphi \rangle.
$$

Las derivadas del producto entre una función $C^\infty(\Omega)$ y una distribución en $\mathcal{D}'(\Omega)$ satisfacen la misma fórmula de Leibniz general (5.12).

Proposición 5.5

Sean $\psi \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y α un multi-índice. Entonces,

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \psi)\,(D^{\alpha-\beta} T). \tag{5.13}$$

Demostración: Se hace por inducción sobre el orden de α. El núcleo del argumento es la observación de que, para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$ y toda función test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\psi T)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \psi T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle T, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial(\psi \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \psi \varphi \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\varphi \right\rangle = \left\langle \psi \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_j} T, \varphi \right\rangle; \end{aligned}$$

esto es, $\dfrac{\partial(\psi T)}{\partial x_j} = \psi \dfrac{\partial T}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} T.$ □

Notemos que, para todo $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y todo $a \in \Omega$, $\psi\,\delta_a = \psi(a)\,\delta_a$. En particular, $x_j\,\delta_0 = 0$ para $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Clase 6 del Tartar: Densidad de productos tensoriales y sus consecuencias

Aceptando distribuciones como soluciones, algunas ecuaciones algebraicas/diferenciales/diferenciales parciales adquieren nuevas soluciones. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, N\}) \quad x_j\, f(x) = 0$$

solamente admite a $f \equiv 0$ (módulo igualdad casi en todas partes) como solución entre las funciones sobre R^N. Pero, aceptando soluciones distribucionales, aparece la familia de soluciones $f = c\,\delta_0$, $c \in R$. Es útil saber que no hay más, pero para probarlo necesitamos introducir algunos conceptos y resultados que involucran productos tensoriales.

Definición 6.1

Sean f_1 y f_2 funciones definidas sobre ciertos conjuntos X_1 y X_2, respectivamente, y que devuelven valores reales o complejos. Entonces su *producto tensorial* $f_1 \otimes f_2$ es la función definida sobre $X_1 \times X_2$ mediante

$$(\forall\, (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2) \quad (f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2).$$

Lema 6.2 —reforzado

Sean $\Omega_1 \subset R^{N_1}$ y $\Omega_2 \subset R^{N_2}$ productos cartesianos de intervalos abiertos novacíos finitos o infinitos (e.g., espacios euclidianos, ciertos hiperparalelepípedos). Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es tal que

$$(\forall\, \varphi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1))\ (\forall\, \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)) \quad \langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = 0, \tag{6.1}$$

entonces T es la distribución nula.

Demostración: $\boxed{\text{Una primera observación}}$ Sea K un compacto contenido en un abierto de la forma $\prod_{i=1}^{N}(a_i, b_i)$, donde $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$, $1 \leq i \leq N$. Entonces, existen intervalos cerrados finitos $[c_i, d_i]$, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$K \subset \prod_{i=1}^{N}[c_i, d_i] \subset \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i).$$

Si $K = \emptyset$, esto es obvio. En otro caso, lo probamos por inducción sobre N. Si $N = 1$, $K \subset [\text{ínf}\, K, \sup K] \subset (a_1, b_1)$. Ahora, asumiendo los casos 1 al $N-1$ y tratando el caso N, observamos que el conjunto proyección

$$K' := \left\{x' \in R^{N-1} \mid (\exists\, \tilde{x} \in R) \quad (x', \tilde{x}) \in K\right\} \subset \prod_{i=1}^{N-1}(a_i, b_i)$$

es compacto; en efecto, para toda sucesión $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K', existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un $\tilde{x}_n \in R$ tal que $(x'_n, \tilde{x}_n) \in K$ y, como K es compacto, existe una subsucesión $\big((x'_{\phi(n)}, \tilde{x}_{\phi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x = (x', \tilde{x}) \in K$ y, consiguientemente, hemos hallado una subsucesión $(x'_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún límite $x' \in K$. Similarmente se prueba que también es compacto el conjunto proyección

$$\tilde{K} := \left\{\tilde{x} \in R \mid (\exists\, x' \in R^{N-1}) \quad (x', \tilde{x}) \in K\right\} \subset (a_N, b_N).$$

Por la hipótesis de inducción, existen intervalos cerrados finitos $[c_1, d_1], \ldots, [c_N, d_N]$ tales que $K' \subset \prod_{i=1}^{N-1}[c_i, d_i] \subset \prod_{i=1}^{N-1}(a_i, b_i)$ y $\tilde{K} \subset [c_N, d_N] \subset (a_N, b_N)$, por lo que

$$K \subset K' \times \tilde{K} \subset \prod_{i=1}^{N}[c_i, d_i] \subset \prod_{i=1}^{N}(a_i, b_i).$$

$\boxed{\text{Caso en el que } T \text{ es de orden } \leq 0}$ Ω_1 y Ω_2 son de la forma $\prod_{i=1}^{N_1}(a_i, b_i)$ y $\prod_{i=1}^{N_2}(a_{N_1+i}, b_{N_1+i})$, respectivamente. Sea $\psi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ arbitrario y sea $K := \text{supp}(\psi)$. Por la observación inicial, $K \subset \prod_{i=1}^{N_1+N_2}[c_i, d_i] \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ para alguna colección $[c_1, d_1], \ldots, [c_{N_1+N_2}, d_{N_1+N_2}]$ de intervalos cerrados finitos. Para $1 \leq i \leq N_1 + N_2$, existe un margen $\lambda_i > 0$ tal que todavía $[c_i - \lambda_i, d_i + \lambda_i]$ está contenido en (a_i, b_i); luego, existe $\eta_i \in C_c^\infty((a_i, b_i))$ que satisface $\eta_i = 1$ en $[c_i, d_i]$. Definiendo a $\eta_1 \in C_c^\infty(\Omega_1)$ y $\eta_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)$ mediante $\eta_1(x) := \prod_{i=1}^{N_1} \eta_i(x_i)$ y $\eta_2(x) := \prod_{i=1}^{N_2} \eta_{N_1+i}(x_i)$, tenemos que $\eta_1 \otimes \eta_2 \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ y su soporte contiene a K. De esta manera, $\psi = (\eta_1 \otimes \eta_2)\psi$.

Por el Teorema de Aproximación Polinomial de Weierstrass existe una sucesión de polinomios de $N_1 + N_2$ variables $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a ψ uniformemente en $\text{supp}(\eta_1 \otimes \eta_2)$. Notemos que cada P_n se puede escribir en la forma

$$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq \deg(P_n)} \underbrace{c_\alpha\, x_1{}^{\alpha_1} \cdots x_{N_1}{}^{\alpha_{N_1}}}_{:=S_\alpha(x_1,\ldots,x_{N_1})} \underbrace{x_{N_1+1}{}^{\alpha_{N_1+1}} \cdots x_{N_1+N_2}{}^{\alpha_{N_1+N_2}}}_{:=T_\alpha(x_{N_1+1},\ldots,x_{N_1+N_2})},$$

donde los c_α son constantes. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle T, \psi \rangle = \langle T, (\eta_1 \otimes \eta_2)\psi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T, (\eta_1 \otimes \eta_2) P_n \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha| \leq \deg(P_n)} \langle T, (\eta_1 \otimes \eta_2)(S_\alpha \otimes T_\alpha) \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha| \leq \deg(P_n)} \langle T, (\eta_1\, S_\alpha) \otimes (\eta_2\, T_\alpha) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

$\boxed{\text{Caso sin restricción de orden para } T}$ Sean $(\rho_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\rho_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones suavizantes en $C_c^\infty(R^{N_1})$ y $C_c^\infty(R^{N_2})$, respectivamente. Dado $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\Omega_1^k := \prod_{i=1}^{N_1} \left(a_i + \frac{1}{k}, b_i - \frac{1}{k}\right) \quad \text{y} \quad \Omega_2^k := \prod_{i=1}^{N_2} \left(a_{N_1+i} + \frac{1}{k}, b_{N_1+i} - \frac{1}{k}\right).$$

Sea k_0 el primer $k \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega_1^k \times \Omega_2^k \neq \emptyset$. Fijando a $k \geq k_0$, sea n_0^k tal que,

$$n \geq n_0^k \implies \operatorname{supp}(\rho_{1,n}) \subset B(0,1/k) \ \wedge \ \operatorname{supp}(\rho_{2,n}) \subset B(0,1/k).$$

Para todo $n \geq n_0^k$ y todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1^k \times \Omega_2^k)$ se tiene ("$\Subset$" significa inclusión compacta)

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\left(\varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})\right) &\subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\rho_{1,n}) \times \operatorname{supp}(\rho_{2,n}) \\ &\Subset \Omega_1^k \times \Omega_2^k + \overline{B(0,1/k)} \times \overline{B(0,1/k)} \subset \Omega_1 \times \Omega_2. \end{aligned}$$

Se sigue que para $n \geq n_0^k$ la forma T_n^k sobre $C_c^\infty(\Omega_1^k \times \Omega_2^k)$ definida por

$$\left(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1^k \times \Omega_2^k)\right) \quad \langle T_n^k, \varphi\rangle := \langle T, \varphi \star (\rho_{n,1} \otimes \rho_{n,2})\rangle. \tag{6.3}$$

está bien definida. Es fácil probar que es una distribución y que es de orden ≤ 0.

Además, T_n^k satisface la condición (6.1) porque si $\varphi = \psi_1 \otimes \psi_2$, entonces $\varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})$ también es un producto tensorial; a saber, $(\psi_1 \star \rho_{1,n}) \otimes (\psi_2 \star \rho_{2,n})$. Por la parte anterior, inferimos que cada T_n^k es la distribución nula.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ una función test arbitraria. Su soporte $\operatorname{supp}(\varphi)$, por estar compactamente contenido en $\Omega_1 \times \Omega_2$, está compactamente contenido en $\Omega_1^k \times \Omega_2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $(\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ hereda ser una sucesión suavizante (pero no es una sucesión suavizante *especial* aún cuando $(\rho_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\rho_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ lo sean). Por lo tanto, podemos probar análogamente (no igual, porque allá usamos una sucesión suavizante especial) a como lo hicimos en la Proposición sin número de la Clase 4 que $\varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ en $L^\infty(R^{N_1} \times R^{N_2})$ y que todas las funciones involucradas, de cierto n en adelante, tienen su soporte contenido en un compacto en común contenido en $\Omega_1^k \times \Omega_2^k$. Todavía más, para todo multi-índice α (pero hasta cierto orden finito basta), $\partial^\alpha(\varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})) \xrightarrow{n\to\infty} \partial^\alpha\varphi$ en $L^\infty(R^{N_1} \times R^{N_2})$ Así,

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle T|_{C_c^\infty(\Omega_1^k \times \Omega_2^k)}, \varphi \star (\rho_{1,n} \otimes \rho_{2,n})\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n^k, \varphi\rangle = 0. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

□

Proposición sin número

Dados $n \in \mathbb{N}_0$ y $f \in BUC(R)$ definimos $I_n(f)(x) := \int_0^1 z^n f(xz)\,dz$. Entonces, $I_n(f)$ es uniformemente continua.

Si, además, $f' \in BUC(R)$, entonces $I_n(f)' = I_{n+1}(f')$.

Demostración: Para la primera parte notemos que

$$|I_n(x) - I_n(y)| \le \int_0^1 z^n \, |f(xz) - f(yz)| \; dz \le \omega_f(|x-y|) \xrightarrow{|x-y| \to 0} 0.$$

Para la segunda parte, observemos primero que

$$\left| \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} - f'(t) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f'(s) \, ds - f'(t) \right|$$
$$\stackrel{\tilde{s} = (s-t)/\varepsilon}{=} \left| \int_0^1 \big(f'(t + \varepsilon \tilde{s}) - f'(t) \big) \, d\tilde{s} \right| \le \omega_{f'}(|\varepsilon|). \quad (\P)$$

Así,

$$\left| \frac{I_n(f)(x+h) - I_n(f)(x)}{h} - I_{n+1}(f')(x) \right|$$
$$= \left| \int_0^1 \left[z^n \, \frac{f((x+h)z) - f(xz)}{h} - z^{n+1} f'(xz) \right] \, dz \right|$$
$$\le \int_0^1 z^{n+1} \left| \frac{f(xz + hz) - f(xz)}{hz} - f'(xz) \right| \, dz \le \omega_{f'}(|h|) \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

donde en la última desigualdad hemos usado (¶) y el hecho de que, como $|z| \le 1$, $\omega_{f'}(|hz|) \le \omega_{f'}(|h|)$. □

Ahora podemos probar que el sistema de ecuaciones que discutimos al comienzo de esta Clase no admite más soluciones raras que aquellas que ya habíamos encontrado.

Lema 6.3

Sea $T \in \mathcal{D}'(R^N)$ tal que $x_j\, T = 0$ para $j \in \{1, \ldots, N\}$. Entonces, existe $C \in R$ tal que $T = C\, \delta_0$.

Demostración: Lo hacemos por inducción sobre la dimensión N.

$\boxed{N = 1}$ Sea $\varphi \in C_c^\infty(R)$ una función test que satisfaga $\varphi(0) = 0$. Entonces, para todo $x \in R \setminus \{0\}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)\, dt = x \int_0^1 \varphi'(xz)\, dz = x\, I_0(\varphi')(x).$$

Directo de los extremos de esta cadena de igualdades, observamos que $I_0(\varphi')$ hereda de φ el poseer soporte compacto. Por la Proposición sin número de esta Clase y como φ' y todas sus derivadas son acotadas y uniformemente continuas, $I_0(\varphi') \in C^\infty(R)$. Por lo tanto, $I_0(\varphi') \in C_c^\infty(R)$. Luego, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x\, I_0(\varphi') \rangle = \langle x\, T, I_0(\varphi') \rangle = 0$.

Sea ahora $\theta \in C_c^\infty(R)$ que satisfaga $\theta(0) = 1$. Dado ahora **cualquier** $\varphi \in C_c^\infty(R)$, claramente,

$$\varphi = \underbrace{\varphi - \varphi(0)\theta}_{\text{función test que se anula en 0}} + \varphi(0)\theta \tag{6.5}$$

por lo que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(0)\theta \rangle = \langle T, \theta \rangle\, \varphi(0) = \langle \langle T, \theta \rangle \delta_0, \varphi \rangle\,, \tag{6.6}$$

que es el resultado deseado con $C = \langle T, \theta \rangle$.

$\boxed{\text{Casos 1 al } N-1 \text{ implican el caso } N}$ Asumamos que nuestro resultado deseado es válido para todas las dimensiones entre 1 y $N-1$.

Observemos que, dado $\psi \in C_c^\infty(R^{N-1})$, el mapa $C_c^\infty(R) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \otimes \psi \rangle \in R$ define una distribución sobre R, que denotamos por $U_\psi \in \mathcal{D}'(R)$; en efecto, dado un compacto $K \subset R$ y algún $\varphi \in C_c^\infty(R)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, se tiene la cota

$$
\begin{aligned}
\left|\langle U_\psi, \varphi \rangle\right| = |\langle T, \varphi \otimes \psi \rangle| &\leq C(\overbrace{K_\psi}^{:= K \times \operatorname{supp}(\psi)}) \max_{|\alpha| \leq m(K_\psi)} \|D^\alpha(\varphi \otimes \psi)\|_\infty \\
&\leq C(K_\psi) \max_{|\alpha| \leq m(K_\psi)} \left[\|D^{\alpha_1}\varphi\|_\infty \left\|D^{(\alpha_2,\dots,\alpha_N)}\psi\right\|_\infty\right] \\
&\leq \left[C(K_\psi) \max_{|\beta| \leq m(K_\psi)} \left\|D^\beta \psi\right\|_\infty\right] \max_{|\alpha_1| \leq m(K_\psi)} \|D^{\alpha_1}\varphi\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Ahora, para todo $\varphi \in C_c^\infty(R)$,

$$
\langle x\, U_\psi, \varphi \rangle = \langle U_\psi, x\, \varphi \rangle = \langle T, (x\, \varphi) \otimes \psi \rangle = \langle T, x_1(\varphi \otimes \psi) \rangle = \langle x_1 T, \varphi \otimes \psi \rangle = 0.
$$

Luego, $x\, U_\psi$ es la distribución nula. Por la hipótesis de inducción en dimensión 1 tenemos que $U_\psi = V(\psi)\, \delta_0$, donde $V(\psi)$ es un escalar que depende de ψ.

¡El mapa $\psi \mapsto V(\psi)$ es distribución sobre R^{N-1}! En efecto, tiene el dominio y el codominio correctos y es fácil comprobar que es lineal. Para probar la necesaria cota, démonos una función test fija sobre R que valga 1 en 0; por ejemplo, $\hat{\rho} := \exp(1)\rho$, donde ρ es la de (2.8). Entonces, para todo compacto $\tilde{K} \subset R^{N-1}$ y toda función test $\psi \in C_c^\infty(R^{N-1})$ con $\operatorname{supp}(\psi) \subset \tilde{K}$,

$$
\begin{aligned}
|V(\psi)| = |\langle V(\psi)\delta_0, \hat{\rho}\rangle| &= \left|\langle U_\psi, \hat{\rho}\rangle\right| = |\langle T, \hat{\rho}\otimes\psi\rangle| \\
&\le C\Big([-1,1]\times\tilde{K}\Big) \max_{|\alpha|\le m\left([-1,1]\times\tilde{K}\right)} \|D^\alpha(\hat{\rho}\otimes\psi)\|_\infty \\
\le \left[C\Big([-1,1]\times\tilde{K}\Big) \max_{|\alpha_1|\le m\left([-1,1]\times\tilde{K}\right)} \|D^{\alpha_1}\hat{\rho}\|_\infty\right] &\max_{|\beta|\le m\left([-1,1]\times\tilde{K}\right)} \left\|D^\beta\psi\right\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Es legítimo entonces emplear la notación $\langle V, \psi\rangle$ en lugar de $V(\psi)$.

Ahora, para todo $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ y para toda función test $\psi \in C_c^\infty(R^{N-1})$,

$$
\begin{aligned}
\langle x_j V, \psi\rangle = \langle V, x_j\psi\rangle = V(x_j\psi)\,1 &= \langle V(x_j\psi)\delta_0, \hat{\rho}\rangle = \langle U_{x_j\psi}, \hat{\rho}\rangle \\
&= \langle T, \hat{\rho}\otimes(x_j\psi)\rangle = \langle T, x_{j+1}(\hat{\rho}\otimes\psi)\rangle = \langle x_{j+1}T, \hat{\rho}\otimes\psi\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Así, $x_j V$ es la distribución nula para $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Por la hipótesis de inducción en dimensión $N-1$ tenemos que $V = c^*\delta_0$ para alguna constante c^*.

De esta manera, para todo $\varphi \in C_c^\infty(R)$ y todo $\psi \in C_c^\infty(R^{N-1})$,

$$
\begin{aligned}
\langle T, \varphi\otimes\psi\rangle = \langle U_\psi, \varphi\rangle = \langle\langle V, \psi\rangle\delta_0, \varphi\rangle &= \langle V, \psi\rangle\varphi(0) = \langle c^*\delta_0, \psi\rangle\varphi(0) \\
&= c^*\psi(0)\varphi(0) = c^*(\psi\otimes\varphi)(0) = \langle c^*\delta_0, \psi\otimes\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $T - c^*\delta_0$ se anula en todas las funciones test que tienen la estructura de producto tensorial. Por el Lema 6.2, $T - c^*\delta_0 = 0$. $\square$

Hemos caracterizado las soluciones del sistema de ecuaciones distribucional $x_jT = 0, 1 \leq j \leq N$. Ahora pretendemos caracterizar las soluciones del sistema de ecuaciones distribucional $\frac{\partial T}{\partial x_j} = 0, 1 \leq j \leq N$. Pero antes necesitamos adelantar un resultado de la Clase 7.

Lema 7.2 — adelantado, distinto, sacado de otra parte[4]

Sea $A \subset R^N$ y sea $\mathcal{O}$ una colección de abiertos de R^N que forman un cubrimiento de de A; esto es, $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$. Entonces, existe una colección $\Psi \subset C_c^\infty(R^N)$ tal que:

1. $(\forall\, \psi \in \Psi)\ (\forall\, x \in R^N) \quad 0 \leq \psi(x) \leq 1$.
2. para todo compacto $K \subset A$, todas salvo un número finito de las $\psi \in \Psi$ se anulan idénticamente en K,
3. para cada $\psi \in \Psi$ existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\operatorname{supp}(\psi) \subset U$ y
4. para todo $x \in A$, se tiene $\sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1$.

A tal colección Ψ se le llama *partición C^∞ de la unidad para A subordinada a $\mathcal{O}$*.

Demostración: $\boxed{\text{Una primera observación}}$ Sea $S \subset R^N$, $S \neq \emptyset$. Probaremos que la función $\operatorname{dist}(\cdot, S)\colon R^N \to R$ es Lipschitz-continua. Sean $x, y \in R^N$. Entonces, para todo $s \in S$, $\operatorname{dist}(x, S) \leq |x - s| \leq |x - y| + |y - s|$. Tomando ínfimo respecto a s y reorganizando, obtenemos $\operatorname{dist}(x, S) - \operatorname{dist}(y, S) \leq |x - y|$. Intercambiando los roles de x e y tenemos también que $\operatorname{dist}(y, S) - \operatorname{dist}(x, S) \leq |y - x| = |x - y|$. En resumen,

$$(\forall\, x, y \in R^N) \quad |\operatorname{dist}(x, S) - \operatorname{dist}(y, S)| \leq |x - y|\,.$$

[4]Teorema 3.15 con una pequeña corrección de **Robert A. Adams & John J. F. Fournier**, *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

Truncaciones que evitan la frontera y el infinito

Sea $U \subset R^N$, $r > 0$ y $w > 0$. Entonces,

$$U^{r,w} := \{x \in U \mid |x| \le r \wedge \operatorname{dist}(x, \partial U) \ge w\}$$

es compacto. En efecto, los casos en que $U = \emptyset$ o $U = R^N$ son triviales; en otro caso, observemos que, como $U^{r,w}$ es acotado por construcción, basta comprobar que es cerrado. Ahora, como $\overline{U} \setminus U \subset \partial U$, no hay nadie en $\overline{U} \setminus U$ que esté a distancia mayor o igual que w de ∂U. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U^{r,w} &= \left\{x \in \overline{U} \mid |x| \le r \wedge \operatorname{dist}(x, \partial U) \ge w\right\} \\ &= \overline{U} \cap \overline{B(0,r)} \cap \underbrace{\operatorname{dist}(\cdot, \partial U)^{-1}\Big(\overbrace{[w, \infty)}^{\text{cerrado}}\Big)}_{\text{cerrado por continuidad de } \operatorname{dist}(\cdot,\, \partial U)} \end{aligned}$$

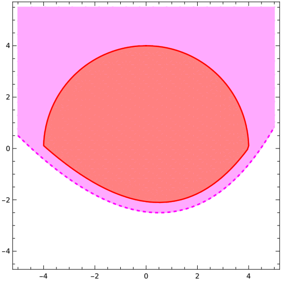

Figura: Ilustración de un conjunto U (en rosado) y de uno de sus $U^{r,w}$ (en rojo coral).

y hemos expresado a $U^{r,w}$ como una intersección de cerrados, que es cerrada.

Afirmamos también que el conjunto

$$\tilde{U}^{r,w} := \{x \in U \mid |x| < r \wedge \operatorname{dist}(x, \partial U) > w\}$$

es abierto. De nuevo, los casos en los que $U = \emptyset$ o $U = R^N$ son triviales. En otro caso,

$$\tilde{U}^{r,w} = \operatorname{int}(U) \cap B(0,r) \cap \underbrace{\operatorname{dist}(\cdot, \partial U)^{-1}\Big(\overbrace{(w, \infty)}^{\text{abierto}}\Big)}_{\text{abierto por continuidad de } \operatorname{dist}(\cdot,\, \partial U)}$$

y hemos expresado a $\tilde{U}^{r,w}$ como una intersección finita de abiertos, que es abierta.

$\boxed{\text{Caso } A \text{ compacto}}$ El caso $A = \emptyset$ es trivial. En otro caso, por la compacidad de A sabemos que existe una subcolección finita de abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{O}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j.$$

Afirmamos que existen compactos $K_1, \ldots, K_n$ tales que $K_j \subset U_j$ para $1 \leq j \leq n$ y todavía $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$. Por la discusión anterior, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, todo $r > 0$ y todo $w > 0$, el conjunto $\tilde{U}_j^{r,w} := \{x \in U_j \mid |x| < r \wedge \operatorname{dist}(x, \partial U_j) > w\}$ es abierto. Como $U_j = \bigcup_{r>0,\ w>0} \tilde{U}_j^{r,w}$, entonces $A \subset \bigcup_{j \in \{1,\ldots,N\},\ r>0,\ w>0} \tilde{U}_j^{r,w}$. Como este es un cubrimiento abierto del compacto A, existe una colección finita G de tripletas $(j, r, w) \in \{1, \ldots, N\} \times R_+ \times R_+$ tal que $A \subset \bigcup_{(j,r,w) \in G} \tilde{U}_j^{r,w}$. Por supuesto, para cada $(j, r, w) \in G$, el abierto $\tilde{U}_j^{r,w}$ está contenido en el compacto $U_j^{2r,w/2} = \{x \in U_j \mid |x| \leq 2r \wedge \operatorname{dist}(x, \partial U_j) \geq w/2\}$. Definiendo, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ al compacto (por ser unión finita de compactos)

$$K_j := \bigcup_{\substack{(i,r,w) \in G \\ i=j}} U_i^{2r,w/2} \subset U_j,$$

tenemos que

$$A \subset \bigcup_{(i,r,w) \in G} \tilde{U}_i^{r,w} = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\substack{(i,r,w) \in G \\ i=j}} \tilde{U}_i^{r,w} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\substack{(i,r,w) \in G \\ i=j}} U_i^{2r,w/2} = \bigcup_{j=1}^{n} K_j.$$

Afirmamos que existe $\kappa_j > 0$ tal que el compacto $K_j + \overline{B(0,\kappa_j)}$ todavía está contenido en U_j, $1 \le j \le n$. Cada vez que un compacto K está contenido en un abierto U, existe un $\kappa > 0$ tal que todavía $K + \overline{B(0,\kappa)} \subset U$. Si $K = \emptyset$, es obvio. Si $K \neq \emptyset$ y esta afirmación fuese falsa, para todo $m \in \mathbb{N}$ existiría un $x_m \in K$ y un $y_m \in \overline{B(0,1/m)}$ tal que $x_m + y_m \notin U$. Obviamente $y_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$ y, como K es compacto, existiría una función creciente $\xi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(x_{\xi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ tendería a algún $x^* \in K$. Luego, $x^* = \lim_{m\to\infty}(x_{\xi(m)} + y_{\xi(m)})$ pertenecería a la vez a K y al complemento de U (pues éste es cerrado), lo que sería una contradicción.

Afirmamos que existe $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$ tal que $\phi_j \ge 0$ en R^N y $\phi_j > 0$ en K_j, $1 \le j \le n$. Sea $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante especial. Sea $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que $1/M \le \kappa_j/2$. Definimos

$$\phi_j := \chi_{K_j + \overline{B(0,\kappa_j/2)}} \star \rho_M .$$

Por (2.2), $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K_j + \overline{B(0,\kappa_j/2)} + \overline{B(0,1/M)}$, que a su vez está contenido en $K_j + \overline{B(0,\kappa_j)}$. Como por el Lema 2.3, $\phi_j \in C^\infty(R^N)$, se tiene que $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$. Por ser convolución de funciones nonegativas, ϕ_j también lo es. Además,

$$\begin{aligned}(\forall\, x \in K_j) \quad \phi_j(x) &= \int_{R^N} \chi_{K_j + \overline{B(0,\kappa_j/2)}}(y)\, \rho_M(x-y)\, dy \\ &= \int_{\left(K_j + \overline{B(0,\kappa_j/2)}\right) \cap B(x,1/M)} \rho_M(x-y)\, dy > 0,\end{aligned}$$

pues la última integral es la de una función continua y positiva sobre un dominio de medida positiva (a menos que $K_j = \emptyset$, pero en ese caso no hay ningún $x \in K_j$ y el ϕ_j definido más arriba es idénticamente nulo e igual serviría).

Afirmamos que existe una función $\phi \in C^\infty(R^N)$ tal que $\phi > 0$ en R^N y $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j$ en A. Como la función continua $\tilde{\phi} := \sum_{j=1}^n \phi_j$ es positiva en $\tilde{K} := \bigcup_{j=1}^n K_j$, el compacto $\tilde{K}$ está contenido en el abierto $\tilde{\phi}^{-1}(R_+)$. Ya sabemos entonces que existe algún $\lambda > 0$ tal que el compacto $\tilde{K} + \overline{B(0,\lambda)}$ todavía está contenido en $\tilde{\phi}^{-1}(R_+)$; esto es, $\tilde{\phi}$ es positiva en $\tilde{K} + \overline{B(0,\lambda)}$. Sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $1/L \leq \lambda/2$. Entonces la función

$$\zeta := \chi_{\tilde{K}+\overline{B(0,\lambda)}} \star \rho_L$$

pertenece a $C^\infty(R^N)$ y asume valores en $[0,1]$ (nonegativa porque los factores de la convolución lo son; acotada por 1 por la desigualdad de Young (2.3)).

Dado $x \in R^N$ tal que $\operatorname{dist}(x, \tilde{K}) \leq \lambda/2$, la bola $\overline{B(x,\lambda/2)}$ (que contiene al soporte de $y \mapsto \rho_L(x-y)$) está contenida en $\tilde{K} + \overline{B(0,\lambda)}$. Por lo tanto, $\zeta(x) = 1$.

Ahora, dado $x \in R^N$ tal que $\operatorname{dist}(x, \tilde{K}) > \lambda$, por la continuidad de $\operatorname{dist}(\cdot, \tilde{K})$, existe algún radio $\mu > 0$ tal que, para todo $z \in B(x,\mu)$ todavía se tiene $\operatorname{dist}(z, \tilde{K}) > \lambda$ y, consiguientemente, $z \notin \tilde{K} + \overline{B(0,\lambda)}$. Por lo tanto, la bola $\overline{B(x,\lambda/2)}$ (que, insistimos, contiene al soporte de $y \mapsto \rho_L(x-y)$) posee una intersección de medida positiva con la región donde $\chi_{\tilde{K}+\overline{B(0,\lambda)}}$ se anula. Por lo tanto, $\zeta(x) < 1$.

La función $\phi := \tilde{\phi} + (1-\zeta)$ hereda de los términos que la definen su regularidad $C^\infty(R^N)$ y su nonegatividad. Tambien ϕ es positiva globalmente porque si $\operatorname{dist}(x, \tilde{K}) \leq \lambda$, entonces $\tilde{\phi}(x) > 0$ y, si $\operatorname{dist}(x, \tilde{K}) > \lambda$, entonces $1 - \zeta(x) > 0$. Por último, si $\operatorname{dist}(x, \tilde{K}) \leq \lambda/2$, entonces $\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + (1-1) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)$, lo que incluye a los $x \in A \subset \bigcup_{j=1}^n K_j = \tilde{K}$.

La colección $\Psi := \{\psi_j := \phi_j/\phi \mid 1 \leq j \leq n\}$ satisface las propiedades requeridas en este caso de A compacto. El ítem 1 se obtiene directamente de la nonegatividad de cada uno de los ϕ_j y de la positividad de ϕ. El ítem 2 es obvio en este caso en que la colección Ψ es finita. El ítem 3 se satisface porque $\operatorname{supp}(\psi_j) = \operatorname{supp}(\phi_j) \subset U_j$, $1 \leq j \leq n$. El ítem 4 se satisface porque ya vimos que en A ocurre que $\phi = \sum_{j=1}^{n} \phi_j$.

$\boxed{\text{Caso } A \text{ abierto}}$ Para todo $j \in \mathbb{N}$, ya vimos que el conjunto

$$A_j := A^{j,1/j} = \{x \in A \mid |x| \leq j \ \wedge \ \operatorname{dist}(x, \partial A) \geq 1/j\}$$

es compacto. Como A es abierto, $A = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Sean

$$\begin{array}{lll}
B_1 := A_1 & \subset \operatorname{int}(A_2) & =: C_1, \\
B_2 := A_2 \setminus \operatorname{int}(A_1) & \subset \operatorname{int}(A_3) & =: C_2, \\
B_3 := A_3 \setminus \operatorname{int}(A_2) & \subset \operatorname{int}(A_4) \setminus A_1 & =: C_3, \\
B_4 := A_4 \setminus \operatorname{int}(A_3) & \subset \operatorname{int}(A_5) \setminus A_2 & =: C_4, \\
B_5 := A_5 \setminus \operatorname{int}(A_4) & \subset \operatorname{int}(A_6) \setminus A_3 & =: C_5, \\
\quad\vdots & & \quad\vdots
\end{array}$$

Los B_j son compactos y los C_j son abiertos.

Afirmamos que A está contenido en $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. En efecto, todo miembro $x \in A$ está contenido en alguno de los A_j; por de pronto, A_j con $j = \left\lceil \text{máx}\left(|x|, \text{dist}(x, \partial A)^{-1}\right)\right\rceil$. Ahora, sea $j^*(x) = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} \mid x \in A_j\}$. Si $j^*(x) = 1$, entonces $x \in B_1$. Si $j^*(x) \geq 2$, entonces $x \in A_{j^*(x)} \setminus A_{j^*(x)-1} \subset A_{j^*(x)} \setminus \text{int}\left(A_{j^*(x)-1}\right) = B_{j^*(x)}$.

De esto se sigue que A está contenido en $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Los abiertos C_j, a diferencia de los abiertos $U \in \mathcal{O}$ del cubrimiento abierto de la hipótesis, vienen con la siguiente garantía: Cada C_j tiene intersección novacía con un número finito de otros $C_{j'}$.

Ahora, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$B_j \subset A_j \cap B_j \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U \cap C_j = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} (U \cap C_j).$$

Por lo tanto, el compacto B_j y su cubrimiento abierto $\bigcup_{U \in \mathcal{O}} U \cap C_j$ satisfacen las hipótesis de este lema. Como ya probamos la tesis de este lema para el caso de compactos como B_j, sabemos que existe una colección Ψ_j de funciones $C_c^{\infty}(R^N)$ tal que

- los miembros de Ψ_j toman valores en $[0, 1]$,
- para todo compacto $K \subset B_j$ todas salvo un número finito de las $\psi \in \Psi_j$ se anulan idénticamente en K,
- para cada $\psi \in \Psi_j$ existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset U \cap C_j$,
- $\sum_{\phi \in \Psi_j} \phi(x) = 1$ para $x \in B_j$.

Además, en este caso especial sabemos de nuestra construcción que podemos asumir que cada una de las colecciones Ψ_j es finita.

Sea $\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\phi\in\Psi_j} \phi(x)$. Afirmamos que en cada compacto $K \subset A$ esta suma involucra un número finito de términos no nulos. En efecto, como los C_j conforman un cubrimiento abierto de A, también lo son de K. Como K es compacto, existe un conjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que todavía $K \subset \bigcup_{j\in\Lambda} C_j$. Sea $\Lambda' := \{j' \in \mathbb{N} \mid (\exists\, j \in \Lambda)\ C_j \cap C_{j'} \neq \emptyset\}$, el cual todavía es un conjunto finito porque cada unos de los finitos C_j con $j \in \Lambda$ intersecta con una cantidad a su vez finita de otros $C_{j'}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \Lambda'$ y para todo $\phi \in \Psi_k$, sabemos que existe algún $U \in \mathcal{O}$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset U \cap C_k \subset C_k$, por lo que $\phi|_K \equiv 0$. Por lo tanto, $\sigma|_K = \sum_{j\in\Lambda'} \sum_{\phi\in\Psi_j} \phi|_K(x)$, el cual, como cada Ψ_j es una colección finita, resulta ser una suma finita.

Una gran ventaja de esto es que σ resulta ser una función $C^\infty(R^N)$ que toma valores mayores o iguales que 1 en A.

Así, la colección

$$\Psi := \left\{ \psi := x \mapsto \begin{cases} \phi(x)/\sigma(x) & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \;\middle|\; \phi \in \Psi_j \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \right\}$$

satisface las condiciones.

$\boxed{\text{Caso } A \text{ general}}$ A está contenido en $\bigcup_{U\in\mathcal{O}} U =: B$ y éste es un abierto. Cualquier partición C^∞ de la unidad para B subordinada a $\mathcal{O}$ también servirá para A. $\square$

Lema 6.4

Sea Ω un abierto conexo de R^N. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisface $\frac{\partial T}{\partial x_j} = 0$ para $1 \leq j \leq N$, entonces T es inducida por una función constante ("T es una constante"); esto es, existe una constante C tal que, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle T, \varphi\rangle = C \int_\Omega \varphi(x)\,dx$.

Demostración: $\boxed{\text{Caso en el que } \Omega \text{ es producto cartesiano de intervalos}}$ Tratamos este caso por inducción sobre la dimensión.

En el caso unidimensional Ω tiene la forma (a, b). Dada cualquier función test $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$ que satisfaga $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, notamos que la función ψ definida sobre (a, b) mediante $\psi(x) := \int_a^x \varphi(t)\,dt$ satisface $\psi \in C_c^\infty((a, b))$ y $\psi' = \varphi$. Entonces,

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \frac{d\psi}{dx}\right\rangle = -\left\langle \frac{dT}{dx}, \psi\right\rangle = 0.$$

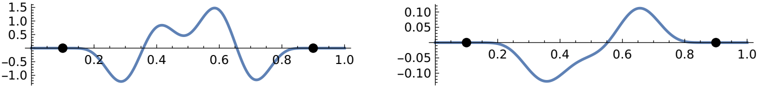

Figura: *Izquierda:* Ilustración de un $\varphi \in C_c^\infty((0, 1))$ de integral nula. Los puntos negros marcan los extremos de su soporte. *Derecha:* Ilustración de ψ, la antiderivada de φ que se anula en 0.

Sea $\eta \in C_c^\infty((a,b))$ alguna función test que satisfaga $\int_a^b \eta(x)\,dx = 1$ (usar Lema 4.2 o adaptar (2.8)). Entonces, ahora para **cualquier** $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$,

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \underbrace{\varphi - \left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)\eta}_{\text{tiene integral nula}} + \left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)\eta \right\rangle = \langle T, \eta\rangle \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (6.7)$$

que es lo que queríamos probar este caso unidimensional con $C = \langle T, \eta\rangle$.

Asumamos ahora que el resultado deseado es válido para productos cartesianos de entre 1 y $N-1$ intervalos e intentemos probarlo para

$$\Omega = \underbrace{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_{N-1}, b_{N-1})}_{:=\omega} \times (a_N, b_N).$$

Dado $\psi \in C_c^\infty(\omega)$, definimos a $T_\psi \in \mathcal{D}'((a_N, b_N))$ mediante

$$\big(\forall\, \varphi \in C_c^\infty((a_N, b_N))\big) \quad \langle T_\psi, \varphi\rangle := \langle T, \psi \otimes \varphi\rangle \qquad (6.8)$$

(en la demostración del Lema 6.3 ya dimos el argumento que demuestra que este tipo de forma lineal efectivamente es una distribución). Notemos que

$$\begin{aligned}\big(\forall\, \varphi \in C_c^\infty((a_N, b_N))\big) \quad \left\langle \frac{dT_\psi}{dx}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle T_\psi, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\left\langle T, \psi \otimes \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \frac{\partial(\psi \otimes \varphi)}{\partial x_N} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_N}, \psi \otimes \varphi \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Así, $\frac{dT_\psi}{dx}$ es la distribución nula. Por la hipótesis de inducción,
$\langle T_\psi, \varphi\rangle = S(\psi) \int_{a_N}^{b_N} \varphi(x)\,dx$ para todo $\varphi \in C_c^\infty((a_N, b_N))$, donde $S(\psi)$ es un escalar que depende de ψ.

¡El mapa $\psi \mapsto S(\psi)$ es una distribución sobre ω! En efecto, tiene el dominio y el codominio correcto y es fácil comprobar que es lineal y que satisface la cota necesaria. Es legítimo entonces emplear la notación $\langle S, \psi \rangle$ en lugar de $S(\psi)$.

Volvamos a emplear a aquel $\eta \in C_c^\infty((a_N, b_N))$, fijo, que satisfacía $\int_{a_N}^{b_N} \eta(x)\, dx = 1$. Para todas las direcciones $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ y para todo $\psi \in C_c^\infty(\omega)$,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial S}{\partial x_j}, \psi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle = -S\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) \int_a^b \eta(x)\, dx = -\left\langle T_{\frac{\partial \psi}{\partial x_j}}, \eta \right\rangle \\
= -\left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \otimes \eta \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial(\psi \otimes \eta)}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \psi \otimes \eta \right\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Así, $\frac{\partial S}{\partial x_j}$ es la distribución nula para $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Por la hipótesis de inducción, $\langle S, \psi \rangle = C^* \int_\omega \psi(x)\, dx$ para todo $\psi \in C_c^\infty(\omega)$, donde C^* es una constante. De esta manera, para todo $\psi \in C_c^\infty(\omega)$ y todo $\varphi \in C_c^\infty((a_N, b_N))$,

$$
\begin{aligned}
\langle T, \psi \otimes \varphi \rangle = \langle T_\psi, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle \int_{a_N}^{b_N} \varphi(x)\, dx \\
= C^* \int_\omega \psi(x)\, dx \int_{a_N}^{b_N} \varphi(x)\, dx = C^* \int_\Omega (\psi \otimes \varphi)(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Luego, $T - C^*$ (aquí C^* quiere decir la distribución inducida por la función constante C^*) se anula en los productos tensoriales. Por el Lema 6.2 en la forma reforzada que dimos, $T = C^*$, lo que prueba la tesis de inducción y, consiguientemente, el resultado deseado cuando Ω es un producto cartesiano de intervalos.

$\boxed{\text{Caso en el que } \Omega \text{ es un abierto conexo cualquiera}}$ Sea $\Omega' \subset \Omega$ un producto cartesiano de intervalos abiertos (una *caja* para decirlo abreviadamente) tal que $\overline{\Omega'} \Subset \Omega$. Entonces, para todas las direcciones $j \in \{1, \ldots, N\}$ y todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$, $\left\langle \frac{\partial T|_{C_c^\infty(\Omega')}}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = 0$. Del ya probado caso especial de este lema para cajas, se sigue que existe una constante $C(\Omega')$ tal que, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$, $\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T|_{C_c^\infty(\Omega')}, \varphi \right\rangle = C(\Omega') \int_{\Omega'} \varphi(x)\, dx = C(\Omega') \int_\Omega \varphi(x)\, dx$. Si Ω'' es cualquier otra caja contenida en Ω tal que $\overline{\Omega''} \Subset \Omega$ y tal que $\Omega' \cap \Omega'' \neq \emptyset$, se tiene, por las mismas razones, que para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega'')$, $\langle T, \varphi \rangle = C(\Omega'') \int_\Omega \varphi(x)\, dx$ para alguna constante $C(\Omega'')$. Tomando una $\varphi \in C_c^\infty(\Omega' \cap \Omega'')$ de integral 1 (la hay), se tendrá que $C(\Omega') = \langle T, \varphi \rangle = C(\Omega'')$. Como Ω es conexo, esta última igualdad manifiesta que existe una sola constante C que hace que $\langle T, \varphi \rangle = C \int_\Omega \varphi(x)\, dx$ para toda función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ cuyo soporte esté contenido en una caja abierta cuya clausura todavía esté compactamente contenida en Ω.

Sea ahora $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitraria. Como $\operatorname{supp}(\varphi)$ es compacto, existe una colección finita de cajas abiertas $\Omega_1, \ldots, \Omega_M \subset \Omega$ con $\overline{\Omega_1}, \ldots, \overline{\Omega_M} \Subset \Omega$, tales que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$. Sea Ψ una partición C^∞ de la unidad para $\operatorname{supp}(\varphi)$ subordinada a $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_M\}$, que sabemos que existe por el Lema 7.2 que adelantamos. Por la propiedad 2 de la partición de la unidad y la compacidad de $\operatorname{supp}(\varphi)$, podemos asumir que Ψ es una colección finita, digamos $\Psi = \{\psi_\ell\}_{\ell=1}^L$.

De esta manera,

$$\langle T,\varphi\rangle \overset{\text{L. 7.2(4)}}{=} \left\langle T,\sum_{\ell=1}^{L}(\psi_\ell\varphi)\right\rangle = \sum_{\ell=1}^{L}\langle T,\psi_\ell\varphi\rangle$$

$$\overset{\text{L. 7.2(3) y párr. ant.}}{=} \sum_{\ell=1}^{L} C\int_\Omega \psi_\ell(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{L. 7.2(4)}}{=} C\int_\Omega \varphi(x)\,dx.$$

$\square$

Lema 6.5

Para todo $p\in[1,\infty)$ y $m\in\mathbb{N}_0$ se tiene que $C_c^\infty(R^N)$ es denso en $W^{m,p}(R^N)$.

Demostración: Sea $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión truncadora especial; esto es, $\theta_n(x)=\theta_1(x/n)$ con $\theta_1\in C_c^\infty(R^N)$, $0\le\theta_1(x)\le 1$ para todo $x\in R^N$ y $\theta_1(x)=1$ si $|x|\le 1$. Sea $u\in W^{m,p}(R^N)$ arbitrario. Para todo $n\in\mathbb{N}$ definimos $u_n:=\theta_n\,u$. Como $|u_n|\le|u|$ casi en todas partes y $u_n\xrightarrow{n\to\infty}u$ puntualmente casi en todas partes, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, $u_n\xrightarrow{n\to\infty}u$ en $L^p(R^N)$. Sea α un multi-índice con $|\alpha|\le m$. Por la Proposición 5.5, $D^\alpha u_n=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta\theta_n\,D^{\alpha-\beta}u$. El término con $\beta=0$ en esta suma converge a $D^\alpha u$ en $L^p(R^N)$ debido al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (de nuevo). Por otro lado, los términos con $|\beta|\ge 1$ involucran derivadas de θ_n que convergen uniformemente a 0, por lo que dichos términos tienden a la función nula en $L^p(R^N)$. Por lo tanto, $D^\alpha u_n\xrightarrow{n\to\infty}D^\alpha u$ en $L^p(R^N)$. Juntando los distintos α, tenemos que $u_n\xrightarrow{n\to\infty}u$ en $W^{m,p}(R^N)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_n\|_{m,p} < \varepsilon/2$.

Sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante especial. Afirmamos que $u_n \star \rho_k \xrightarrow{k\to\infty} u_n$ en $W^{m,p}(R^N)$. Para probar esto basta con probar que, para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq m$,

$$D^\alpha(u_n \star \rho_k) = D^\alpha u_n \star \rho_k, \tag{§}$$

pues, en tal caso el Lema 3.2 nos aseguraría que $D^\alpha(u_n \star \rho_k) \xrightarrow{k\to\infty} D^\alpha u_n$ en $L^p(R^N)$. Para probar (§), que es un candidato a igualdad entre distribuciones, tomemos un $\varphi \in C_c^\infty(R^N)$ arbitrario. Entonces, recordando que $\check{\rho}_k(x) := \rho_k(-x)$,

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha(u_n \star \rho_k), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle u_n \star \rho_k, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_n, D^\alpha\varphi \star \check{\rho}_k\rangle \\ &\overset{\text{L. 2.3(2)}}{=} (-1)^{|\alpha|}\langle u_n, D^\alpha(\varphi \star \check{\rho}_k)\rangle = \langle D^\alpha u_n, \varphi \star \check{\rho}_k\rangle = \langle D^\alpha u_n \star \rho_k, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

lo que es exactamente (§). Por lo tanto, efectivamente $u_n \star \rho_k \xrightarrow{k\to\infty} u_n$ en $W^{m,p}(R^N)$. Por lo tanto, existe algún índice $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u_n \star \rho_\ell\|_{m,p} < \varepsilon/2$. Por la desigualdad triangular,

$$\|u - u_n \star \rho_\ell\|_{m,p} \leq \|u - u_n\|_{m,p} + \|u_n - u_n \star \rho_\ell\|_{m,p} < \varepsilon.$$

Como $u_n \star \rho_\ell \in C_c^\infty(R^N)$, hemos obtenido el resultado deseado. $\square$

Si $p = \infty$, el mismo método demuestra que todo $u \in W^{m,\infty}(R^N)$ se puede aproximar por una sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con miembros en $C_c^\infty(R^N)$ en el sentido que, para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha\psi_n$ converge a $D^\alpha u$ en $L^\infty(R^N)$-débil-$\star$ y en $L^q_{\text{loc}}(R^N)$ para $q \in [1, \infty)$.

Para abiertos $\Omega \subset R^N$ generales, no es cierto en general que $C_c^\infty(\Omega)$ sea denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

Definición 6.6

$W_0^{m,p}(\Omega)$ es la clausura de $C_c^\infty(R^N)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

Si la frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz, entonces las funciones en $W_0^{m,p}(\Omega)$ se anulan en la frontera en un sentido que se puede precisar. Si $\partial\Omega$ es lo suficientemente pequeña, puede ocurrir que $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$; esto está relacionado con el hecho de que las funciones en $W^{m,p}(\Omega)$ no son necesariamente continuas. El teorema de inyección de Sobolev, que enunciamos ahora y probaremos después, provee condiciones sobre el orden m y el exponente p que garantizan que los miembros de $W^{m,p}(\Omega)$ sean automáticamente continuos.

Teorema 6.7: Teorema de inyección[5] de Sobolev

1. Caso subcrítico: Si $1 \leq p < \frac{N}{m}$, entonces $W^{m,p}(R^N) \subset L^r(R^N)$, donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$, pero $W^{m,p}(R^N)$ no es un subespacio de $L^s(R^N)$ para $s > r$.
2. Caso crítico: Si $p = \frac{N}{m}$, entonces $W^{m,p}(R^N) \subset L^q(R^N)$ para todo $q \in [p, \infty)$. Pero $W^{m,N/m}(R^N)$ no es un subespacio de $L^\infty(R^N)$ si $p > 1$. Pero en el caso $p = 1$, $W^{N,1}(R^N) \subset C_0(R^N)$.
3. Caso supercrítico: Si $\frac{N}{m} < p < \infty$, entonces $W^{m,p}(R^N) \subset C_0(R^N)$. Si, para algún entero k, $\frac{N}{k} < p < \frac{N}{k-1}$, entonces $W^{k,p}(R^N) \subset C^{0,\gamma}$, con $\gamma = k - \frac{N}{p}$.

[5] Inglés: *embedding*

DEMOSTRACIÓN: Pendiente. $\square$

Por ejemplo, si $\Omega = R^N \setminus F$, donde F es una colección finita de puntos y si $p \leq N/m$, se puede probar que $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ y coincide con $W^{m,p}(R^N)$.

Es útil recordar que cualquier subconjunto cerrado $K \subset R^N$ puede ser el conjunto donde se anula una función C^∞. En efecto, $R^N \setminus K$ se puede expresar como una unión numerable de bolas abiertas $B(z_n, r_n)$. Dándonos algún $\varphi \in C_c^\infty(R^N)$ que sea positiva en la bola abierta unitaria y cuyo soporte sea la bola cerrada unitaria, uno considera la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n\, \varphi\left(\frac{x-z_n}{r_n}\right)$, escogiendo a la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que la serie y todas sus derivadas converjan uniformemente (por ejemplo, $c_n := 2^{-n} \min\limits_{0\leq k\leq n} r_n^k$). Esto prueba que el conjunto donde se anula una función suave puede ser muy irregular.

También es útil recordar que existen abiertos con frontera "gruesa". Por ejemplo, si se enumeran los puntos con coordenadas racionales de R^N en una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, para $\varepsilon > 0$ definimos $A_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, \varepsilon\, 2^{-n})$, entonces A_ε es abierto y posee medida de Lebesgue menor o igual a $|B_{R^N}(0,1)|\, \varepsilon^N$. Por otro lado, $\overline{A_\varepsilon} = R^N$ (¿por qué?). De esta manera, la frontera $\partial A_\varepsilon = \overline{A_\varepsilon} \setminus \operatorname{int}(A_\varepsilon) = R^N \setminus A_\varepsilon$ posee medida de Lebesgue infinita.

Clase 7 del Tartar: Extendiendo la noción de soporte

Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^N)$, distintos miembros de la clase de equivalencia de u pueden tener distintos soportes. Necesitamos una noción más robusta de soporte para este tipo de funciones y, más en general, para medidas de Radon y distribuciones.

Definición 7.1

Se dice que una medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ *se anula* en un abierto $\omega \subset \Omega$ si

$$(\forall\, \varphi \in C_c(\omega)) \quad \langle \mu, \varphi \rangle = 0. \tag{7.1}$$

Se dice que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *se anula* en un abierto $\omega \subset \Omega$ si

$$(\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\omega)) \quad \langle T, \varphi \rangle = 0. \tag{7.2}$$

Para una medida de Radon, coincide anularse en ω de acuerdo a (7.1) con, considerándose como una distribución, anularse en ω de acuerdo a (7.2) (la implicación notrivial se argumenta suavizando mediante convolución; cf. demostración del Lema 7.3).

Para poder definir el soporte de una medida de Radon o de una distribución, necesitamos asegurarnos que anularse en cada miembro de una colección de abiertos implica anularse también en su unión, lo que requiere emplear una *partición de la unidad*.

[Aquí iba originalmente el Lema 7.2, que adelantamos.]

Lema 7.3

Si una medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ o una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se anula en el abierto $\omega_i \subset \Omega$ para todo $i \in I$, entonces se anula en $\bigcup_{i\in I} \omega_i$.

Demostración: Sea $\omega := \bigcup_{i\in I} \omega_i$. En el caso de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tomemos una función test $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$. Sea Ψ una partición C^∞ de la unidad para ω subordinada a $\{\omega_i\}_{i\in I}$. Como $\operatorname{supp}(\varphi)$ es compacto, solamente un número finito de miembros de Ψ no se anula idénticamente en $\operatorname{supp}(\varphi)$; llamémoslos $\psi_1, \dots, \psi_M \in C_c^\infty(R^N)$. Cada uno de los ψ_j, $1 \le j \le M$, tiene su soporte compactamente contenido en alguno de los ω_i, $i \in I$. En $\operatorname{supp}(\varphi)$, $1 = \sum_{\psi\in\Psi} \psi = \sum_{j=1}^M \psi_j$. Por lo tanto, en todo Ω, $\varphi = \sum_{j=1}^M (\varphi\,\psi_j)$. De esta manera,

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^M \langle T, \underbrace{\varphi\,\psi_j}_{\text{soporte } \Subset \text{ algún } \omega_i}\rangle = 0.$$

Sea ahora $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Sea $\varphi \in C_c(\omega)$. Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión suavizante. Sabemos que existe algún umbral $L \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge L$ se tiene que el soporte de $\varphi_n := \varphi \star \rho_n$ está contenido en algún compacto fijo $K \subset \omega$. Como μ se anula en los abiertos ω_i de acuerdo a (7.1), la distribución $\mu|_{C_c^\infty(\Omega)}$ se anula en los abiertos ω_i de acuerdo a (7.2). Por la parte anterior, $\mu|_{C_c^\infty(\Omega)}$ se anula en la unión ω. Luego, $\langle \mu, \varphi_n\rangle = 0$ para todo $n \ge L$. Como $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ uniformemente en K, $\langle \mu, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mu, \varphi_n\rangle = 0$. $\square$

Definición 7.4

Dada una medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, definimos su *soporte*, que denotamos por $\operatorname{supp}(\mu)$, como el conjunto cerrado que es el complemento del mayor conjunto abierto donde μ se anula.

Dada una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos su *soporte*, que denotamos por $\operatorname{supp}(T)$, como el conjunto cerrado que es el complemento del mayor conjunto abierto donde T se anula.

Estas definiciones tienen sentido porque el mayor conjunto abierto aludido es la unión de todos los abiertos donde μ o T, según corresponda, se anula. De no haber ningún abierto donde ocurra el anulamiento, esta unión es vacía y el soporte es todo Ω.

La segunda parte del Lema 7.3 manifiesta que para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, ambas nociones de anulamiento coinciden, por lo que ambas nociones de soporte coinciden.

Las particiones de la unidad también nos ayudarán a estudiar cómo es que funciones en espacios de Sobolev se comportan cerca de la frontera de su dominio. Hay propiedades de los espacios de Sobolev que dependen de alguna noción de suavidad de la frontera del dominio, pero también hay otras propiedades, llamadas *locales*, para las que la frontera no juega ningún rol.

Definición 7.5

Dado un abierto $\Omega \subset R^N$, un entero $m \geq 0$ y $p \in [1, \infty]$, definimos al espacio $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ como el espacio de distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que, para todo $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, se tiene que $\varphi T \in W^{m,p}(\Omega)$.

Proposición sin número

Sea Ω un abierto de R^N. Entonces, $L^1_{\text{loc}}(\Omega) = W^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Demostración: $\boxed{L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset W^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)}$ Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ la *distribución* φf es regular e inducida por la *función* (sobre Ω) φf, la que pertenece a $L^1(\Omega) = W^{0,1}(\Omega)$ debido a que $\int_\Omega |\varphi\, f| \le \|\varphi\|_\infty \, \|f\|_{L^1(\text{supp}(\varphi))} < \infty$.

$\boxed{W^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)}$ Sea $\mathcal{O}$ la colección de aquellas bolas $B(x,r)$ con $x \in \mathbb{Q}^N \cap \Omega$ y $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ tales que $\overline{B(x,r)} \Subset \Omega$. Como Ω es abierto, $\Omega = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$; en particular, $\mathcal{O}$ es un cubrimiento abierto de Ω. Sea Ψ una partición C^∞ de la unidad para Ω subordinada a $\mathcal{O}$, cuya existencia garantiza el Lema 7.2. Dado cualquier $T \in W^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$, definiremos una función f en casi todo Ω por partes. Dado $U \in \mathcal{O}$, sea $\{\varphi_1^U, \dots, \varphi_{N_U}^U\}$ la colección finita de miembros de Ψ que *no* se anulan idénticamente en el compacto $\overline{U}$. Entonces $\varphi^U := \sum_{j=1}^{N_U} \varphi_j^U \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, $\varphi^U T \in W^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ y *definimos* a f dentro de U por $f(x) := \left(\varphi^U T\right)(x)$ para casi todo $x \in U$.

Casi nadie se escapa. Haciendo esto habremos definido a f en cada uno de los $U \in \mathcal{O}$ salvo en algún subconjunto $W^U \subset U$ de medida nula. Por lo tanto, habremos definido a f en todo $\Omega = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ salvo, a lo más, en $W := \bigcup_{U \in \mathcal{O}} W^U$, el cual, por ser unión numerable de conjuntos de medida nula, es también de medida nula.

Definición es consistente. Sea $U, \tilde{U} \in \mathcal{O}$ con $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. En casi todo $U \cap \tilde{U}$ la función f fue definida tomando los valores de $\left(\varphi^U T\right)\big|_{U \cap \tilde{U}}$ y también los de $\left(\varphi^{\tilde{U}} T\right)\Big|_{U \cap \tilde{U}}$. Sea $\chi \in C_c^\infty(U \cap \tilde{U})$. Entonces,

$$\left\langle \left.(\varphi^U T)\right|_{C_c^\infty(U\cap\tilde U)}, \chi \right\rangle = \langle \varphi^U T, \chi\rangle = \langle T, \varphi^U \chi\rangle \overset{\text{en } U \supset \operatorname{supp}(\chi),\, \varphi^U \equiv 1}{=} \langle T, \chi\rangle$$

$$= [\text{el mismo argumento}] = \left\langle \left.(\varphi^{\tilde U} T)\right|_{C_c^\infty(U\cap\tilde U)}, \chi \right\rangle.$$

Como da lo mismo inducir distribución primero y restringir a funciones test sobre un subdominio segundo que restringir a un subdominio primero e inducir distribución segundo, inferimos que $(\varphi^U T)(x) = (\varphi^{\tilde U} T)(x)$ para casi todo $x \in U \cap \tilde U$.

La función construida es localmente integrable Sea K un subconjunto compacto de Ω. Sea $\{\varphi_1^K, \dots, \varphi_{N_K}^K\}$ la colección finita de miembros de Ψ que *no* se anulan idénticamente en K. Entonces, recordando que cada uno de los φ_j^K asume valores en $[0,1]$ y además tiene su soporte contenido en algún abierto $U_j^K \in \mathcal{O}$,

$$\int_K |f| = \int_K \sum_{j=1}^{N_K} \varphi_j^K |f| = \sum_{j=1}^{N_K} \int_{K\cap U_j^K} \varphi_j^K |f|$$

$$= \sum_{j=1}^{N_K} \int_{K\cap U_j^K} \varphi_j^K \left|\varphi^{U_j^K} T\right| \le \sum_{j=1}^{N_K} \left\|\varphi^{U_j^K} T\right\|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

□

La parte 1 del Teorema de inyección de Sobolev, en el caso de orden de diferenciación débil $m = 1$, implica que para $1 \leq p < N$ se tiene que $W^{1,p}(R^N) \subset L^{p^*}(R^N)$, donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ (algunos autores llaman a p^* el *conjugado Sobolev de* p). De aquí se deduce que que, para todo abierto Ω de R^N, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}_{\text{loc}}(\Omega)$. En efecto, dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, la función φu pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$ y se anula fuera del soporte de φ. Si $\widetilde{\varphi u}$ es la extensión de φu a todo R^N que se define por 0 fuera de Ω, se tiene que todavía $\widetilde{\varphi u} \in W^{1,p}(R^N) \subset L^{p^*}(R^N)$. Por lo tanto, $\varphi u \in L^{p^*}(\Omega)$ y consiguientemente, $u \in L^{p*}_{\text{loc}}(\Omega)$. Sin condiciones sobre la frontera de Ω no hay garantía de que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$.

Lema 7.6

1. Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, entonces para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ se tiene que $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ (y existe $C > 0$ independiente de u y v tal que $\|uv\|_{1,r} \leq C \|u\|_{1,p} \|v\|_{1,q}$).
2. Si $1 \leq p, q, s < N$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$, entonces para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ se tiene que $uv \in W^{1,s}_{\text{loc}}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN: $\boxed{\text{Parte 1}}$ Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y sea $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ otra función test que satisfaga $\theta|_{\text{supp}(\varphi)} \equiv 1$. La función θu coincide con u dentro del soporte de φ y, a diferencia de u, su extensión por cero satisface $\widetilde{\theta u} \in W^{1,p}(R^N)$. En el caso $1 \leq p < \infty$, por el Lema 6.5, existe una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_c^\infty(R^N)$ tal que

$$\|\widetilde{\theta u} - w_n\|_{1,p} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad (\|)$$

Debido a que $\frac{\partial \widetilde{\theta u}}{\partial x_j} = \widetilde{\theta \frac{\partial u}{\partial x_j}} + \widetilde{\frac{\partial \theta}{\partial x_j} u}$ (¿por qué?), a que θ es constante en el soporte de φ y a que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = 1$,

$$\left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, \varphi - \int_\Omega \frac{\partial w_n}{\partial x_j} v\, \varphi \right| = \left| \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} \left(\frac{\partial \widetilde{\theta u}}{\partial x_j} - \frac{\partial w_n}{\partial x_j} \right) v\, \varphi \right|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\| \frac{\partial \widetilde{\theta u}}{\partial x_j} - \frac{\partial w_n}{\partial x_j} \right\|_p \|v\|_q \, \|\varphi\|_{r'} \xrightarrow{n \to \infty} 0, \quad \text{por } (\|).$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial w_n}{\partial x_j} v\, \varphi = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, \varphi$. Similarmente se prueba que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi$ y que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n\, v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega u\, v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$. En el caso $p = \infty$, por lo comentarios que siguen al Lema 6.5, existe una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_c^\infty(R^N)$ tal que

$$(\forall\, \alpha \in [\mathbb{N}_0]^N \text{ con } |\alpha| \leq 1) \quad D^\alpha w_n \xrightarrow{n\to\infty} D^\alpha \widetilde{\theta u} \quad \text{en } L^\infty(R^N)\text{-débil-}\star. \tag{\#}$$

Como $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, la extensión por cero $\widetilde{v\varphi}$ pertenece a $L^1(R^N)$, que entendemos es el predual de $L^\infty(R^N)$. Por lo tanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, \varphi = \int_{R^N} \frac{\partial \widetilde{\theta u}}{\partial x_j} \widetilde{v\varphi} \overset{(\#) \text{ con } \alpha = 0}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{R^N} \frac{\partial w_n}{\partial x_j} \widetilde{v\varphi} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial w_n}{\partial x_j} v\, \varphi.$$

Similarmente se prueba en este caso también que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi = \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi$ y que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n\, v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega u\, v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$.

Entonces, para todo $p \in [1, \infty]$,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial (uv)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \varphi + uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_j} v + w_n \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \varphi + w_n v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] \\
\text{Leibniz para funciones } C^1 \quad &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} w_n \varphi + v \frac{\partial (w_n \varphi)}{\partial x_j} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_j}, w_n \varphi \right\rangle + \left\langle v, \frac{\partial (w_n \varphi)}{\partial x_j} \right\rangle \overset{\text{Def. 4.4}}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Como esto vale para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, hemos probado que $\frac{\partial (uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, una desigualdad de Hölder prueba que esta última función está en $L^r(\Omega)$ al igual que uv, lo que termina de probar que $uv \in W^{1,r}(\Omega)$.

$\boxed{\text{Parte 2}}$ **[Seguir]**