UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Práctica 14 - Álgebra III (525201)

Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Pruebe que dos matrices similares tienen igual polinomio minimal, pero no necesariamente dos matrices de igual dimensión y con igual polinomio minimal son similares.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices similares. Esto es, $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible tal que

$$A = PBP^{-1}.$$

Sean p, q los polinomios minimales de A y B, respectivamente. Es decir, p (resp. q) es el polinomio de mónico de menor grado tal que $p(A) = 0$ (resp. $q(B) = 0$).

Tenemos que

$$q(A) = q(PBP^{-1}) = Pq(B)P^{-1} = 0,$$

y por tanto $\deg(p) \leq \deg(q)$; viendo que $p(B) = 0$ concluimos que $\deg(q) \leq \deg(p)$. Se sigue que $\deg(q) = \deg(p)$.

En resumen, p y q son polinomios mónicos del mismo grado tal que $p(A) = q(A) = 0$. Por unicidad del polinomio minimal concluimos que $p \equiv q$.

Por otro lado, si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que los polinomios minimales de ambos son x^2 (pues se componen de bloques de Jordan de tamaño a lo más 2). Sin embargo, A y B no son similares pues no tienen el mismo rango. ■

Ejercicio 2. Encuentre un ejemplo de $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que su polinomio característico y su polinomio minimal sean ambos igual a $p(x) = -x(1-x)^2(3-x)$.

Demostración. Podemos construir A mediante bloques de Jordan acordes. En este caso, cada factor de p nos entrega un bloque de Jordan que nos sirve

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$
$$(1-x)^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(3-x) \mapsto \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida por: $f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax + b^t x + c$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es convexa, es decir,

$$\forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Podemos ver que f está compuesta de tres términos:

$$f(x) = \overbrace{\frac{1}{2}x^t Ax}^{\text{cuadrático}} + \overbrace{b^t x}^{\text{lineal}} + \overbrace{c}^{\text{afín}}$$

Un cálculo directo arroja que

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y)^t A(\lambda x + (1-\lambda)y) + b^t(\lambda x + (1-\lambda)y) + c \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y)^t A(\lambda x + (1-\lambda)y) + \lambda b^t x + (1-\lambda)b^t y + \lambda c + (1-\lambda)c \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y)^t A(\lambda x + (1-\lambda)y) + \lambda(b^t x + c) + (1-\lambda)(b^t y + c). \end{aligned}$$

Como era de esperarse, los términos lineales y afines verifican la (des)igualdad de manera inmediata. Por tanto, nos resta analizar el término cuadrático para concluir convexidad de f.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda x + (1-\lambda)y)^t A(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \frac{1}{2}\left(\lambda x^t A\lambda x + \lambda x^t A(1-\lambda)y^t + (1-\lambda)y^t A\lambda x + (1-\lambda)y^t A(1-\lambda)y\right) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x^t Ax - \lambda x^t A(1-\lambda)x + 2\lambda(1-\lambda)x^t Ay^t \\ &+ (1-\lambda)y^t Ay - (1-\lambda)y^t A\lambda y) \\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}x^t Ax\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}y^t Ay\right) - R \end{aligned}$$

donde R es el residuo de la forma

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1-\lambda)\lambda}{2}\left(x^t Ax - 2x^t Ay^t + y^t Ay\right) \\ &= \underbrace{\frac{(1-\lambda)\lambda}{2}}_{>0}\underbrace{(x-y)^t A(x-y)}_{>0} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(\lambda x + (1-\lambda y)) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - R \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

■

Ejercicio 4. Demuestre que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es semidefinida positiva si y sólo si todos sus valores propios son no negativos.

Demostración. Sea A semidefinida positiva. Es decir, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t A x \geq 0$. Como A es simétrica, entonces es diagonalizable de la forma $A = P^t D P$. Luego,

$$\begin{aligned} x^t A x &= x^t P^t D P x \\ &= (Px)^t D (Px) \\ &= y^t D y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando $y = e_i$ (i.e. $x = P^{-1} e_i$) concluimos que $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Supongamos que A es simétrica con todos sus valores propios no negativos. Luego, $x^t A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$ pues es una suma de términos no negativos. ∎

Ejercicio 5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Determine si A es definida positiva o no.

Demostración. Sea $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la k-ésima submatriz A. Es decir,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ A_n &= A \end{aligned}$$

Por inspección tenemos que $\det A_1 = 2$ y $\det A_2 = 3$, por lo cual proponemos que $\det A_k = k + 1$. En efecto, supongamos que $\det A_r = r + 1$ para todo $r \leq k$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \det A_{k+1} &= 2 \cdot \det A_k - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot A_k - (-1) \cdot (-1) \cdot \det A_{k-1} \\ &= 2 \cdot A_k - \det A_{k-1} \\ &= 2(k+1) - k \\ &= (k+1) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, todos los determinantes de las submatrices de A son positivos, de lo cual se sigue que A es definida positiva. ∎

Ejercicio 6. Sea $S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$. Se define la siguiente relación $\leq$ en S.

$$A \leq B \iff (B - A) \text{ es semidefinida positiva.}$$

a) Pruebe que $\leq$ es relación de orden en S. ¿Es relación de orden total o parcial?

Demostración.

- **Reflexividad:** Tenemos que $A - A = \Theta$ y la matriz nula es semidefinida positiva.
- **Antisimetría:** Supongamos que $A \leq B$ y $B \leq A$. Luego, $(B-A)$ y $-(B-A)$ son semidefinidas positivas. Sin embargo, esto sólo es posible si $(B - A)$ es semidefinida positiva y negativa al mismo tiempo. De aquí se sigue que $(B - A) = \Theta$ y en consecuencia $A = B$.
- **Transitividad:** Sean $A \leq B$ y $B \leq C$. Luego, $(A - B)$ y $(B - C)$ son semidefinidas positivas. Como suma de matrices semidefinidas positivas es semidefinida positiva, tenemos que $(A - C) = (A - B) + (B - C)$ es semidefinida positiva.

De las tres propiedades anteriores concluimos que $\leq$ es relación de orden en S. La relación es de orden parcial pues para A indefinida, $A \not\leq \Theta$ y $\Theta \not\leq A$. ∎

b) Demuestre que $\forall A \in S$, $\exists A^+, A^-$ semidefinidas positivas tales que

$$A = A^+ - A^-, \quad A^+A^- = A^-A^+ = \theta.$$

Demostración. Dado que A es simétrica, entonces es diagonalizable y podemos descomponer la matriz diagonal D en

$$D = \overbrace{\frac{1}{2}(D + |D|)}^{D^+} + \overbrace{\frac{1}{2}(D - |D|)}^{D^-}.$$

Notemos que D^+ (D^-) es la matriz D con los valores positivos (negativos) en la misma posición de D, pero con entradas 0 en las posiciones de los valores negativos (positivos). Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= P(D^+ + D^-)P^{-1} \\ &= \underbrace{PD^+P^{-1}}_{\text{semidef. pos.}} + \underbrace{PD^-P^{-1}}_{\text{semidef. neg.}} \\ &= A^+ - A^- \end{aligned}$$

con $A^{\pm} = \pm PD^{\pm}P^{-1}$.

Además, se verifica que

$$\begin{aligned} A^+A^- &= -PD^+P^{-1}PD^-P^{-1} \\ &= -PD^+D^-P^{-1} \\ &= -P\Theta P^{-1} \\ &= \Theta \end{aligned}$$

∎

Ejercicio 7. Determine el lugar geométrico y haga un dibujo de las siguientes cónicas:

a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2 = 0,$

b) $25x^2 + 120xy + 144y^2 = 0,$

c) $82x^2 + 48xy + 68y^2 + 80x + 60y + \frac{1}{4} = 0.$