UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FPV/fpv 15.12.25(11:00) **Pauta Evaluación 2(recuperativa)** **MAT 525212/525252**

P1 (**15 pts.**)

1. Determinar el radio de convergencia de la Serie de Taylor de $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2+9}$ en torno a $z_0 = 2$.
2. Use una Serie de Taylor conocida para encontrar la asociada a $g(z) = ze^z$ en torno a $z = 1$.
   `Indicación`: $g(z) = e \cdot e^{z-1} \cdot \big[1 + (z-1)\big]$

Solución Propuesta

1. Las singularidades de f son $z = \pm 3i$. Como

$$|2 - 3i| = |2 + 3i|$$

   se concluye que el radio de convergencia $\mathrm{R} = |2 - 3i| = \sqrt{13}$. **[7pts.]**

2. Usamos la Serie de Taylor $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ cualesquiera sea $w \in \mathbb{C}$. En este caso $w = z - 1$, y gracias a la indicación

$$\begin{aligned}
g(z) &= e(1+w)e^w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ew^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ew^{n+1}}{n!} \\
&= e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ew^k}{k(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ew^k}{(k-1)!} \\
&= e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e(1+k)w^k}{k!}
\end{aligned}$$

[8pts.]

P2 (**8+8 pts.**)

(a) Evaluar $\int_\Gamma (z^2 - 2z + 2)dz$ donde Γ es una trayectoria simple y regular

(a1) no es cerrada y conecta $z = i$ con $z = 1$,

(a2) es cerrada y $z = i$ y $z = 1$ son puntos de la curva.

(b) Determinar que $z = 0$ es un polo simple de $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z\text{Ln}(1+z)}$.

Enseguida evaluar $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$

Solución Propuesta

(a) El integrando es una función entera y tiene por primitiva $F(z) = \frac{1}{3}z^3 - z^2 + 2z$ y luego

(a1) Gracias al TFC

$$\int_\Gamma (z^2 - 2z + 2)dz = F(1) - F(i)$$

[4 pts.]

(a2) Gracias al Teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_\Gamma (z^2 - 2z + 2)dz = 0$$

.

[4 pts.]

(b) Aplicamos la definición de polo simple, observando que $Ln(z+1)$ es analítica en la bola cerrada $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} z f(z) &= \lim_{z \to 0} \frac{\sin(2z)}{\text{Ln}(1+z)} \\ &= \lim_{z \to 0} \left[\frac{2\cos(2z)}{\frac{1}{1+z}} \right] \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

[4 pts.]

Enseguida, gracias al Fórmula de Cauchy

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 4\pi i$$

[4 pts.]

P3 (**6+5+5 pts.**)

Propiedad: Sea f una función analítica en el disco agujereado de radio $r > 0$ y centro z_0:

$$D_*(z_0, r) := \{z \in \mathrm{C} : \ 0 < |z - z_0| \leq r\}$$

y que tiene un polo de orden $m \in \mathbb{N}$ precisamente en z_0. Establecer que z_0 es un polo simple de $h = \frac{f'}{f}$ y su residuo en dicho polo es

$$\mathrm{Res}_1(h, z_0) = -m$$

`Indicación`: $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ donde g es analítica en z_0.

Ilustrar la propiedad para evaluar $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ si

(a) $f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1, r = \frac{1}{3}$ $\qquad$ (b) $f(z) = \frac{1}{z\mathrm{Ln}(z+1)}$, $z_0 = 0, r = \frac{2}{3}$.

Solución Propuesta

1º Demostración de la Propiedad

Por definición de polo simple evaluamos

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} &= \lim_{z-z_0} \frac{-m(z-z_0)^{-m} g(z) + (z-z_0)^{-m+1} g'(z)}{(z-z_0)^{-m} g(z)} \\
&= -m + \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{g'(z)}{g(z)} \\
&= -m.
\end{aligned}$$

Nota: $g(z_0) \neq 0$ **[6 pts.]**

2º Gracias a la propiedad debemos determinar el orden del polo en cada caso.

(a) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -1$. En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{\sin(\pi z)}{z-1} \\
&= \lim_{z\to 1} \left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{1}\right] = -\pi \neq 0.
\end{aligned}$$

[5 pts.]

(b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2$. En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} z^2 f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{\mathrm{Ln}(z+1)} \\
&= \lim_{z\to 0} \left[\frac{1}{\frac{1}{1+z}}\right] = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

[5pts.]

P4 (13 pts.) Establecer, fundamentando sus cálculos (VP) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \pi.$

Solución Propuesta

- Designando por I la integral a evaluar, entonces

$$I = Re(J), \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx$$

- Determinación de J vía el Método de la Residuos de Cauchy:
  - Sea $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ y la trayectoria

$$\Gamma_{R,r} = C_R \cup \overrightarrow{(-R,0)(-r,0)} \cup C_r \cup \overrightarrow{(r,0)(R,0)},\ 0 < r < R$$

  - Gracias al primer Lema de Jordan y el Teorema de Cauchy-Goursat
    - $\displaystyle\oint_{\Gamma_{R,r}} f(z)dz = 0$
    - $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} f(z)dz = 0$
  - Gracias al segundo lema de Jordan

$$\int_{c_r} f(z)dz = (-i\pi)\cdot \mathrm{Res}_1(f,0) \quad \wedge \quad \mathrm{Res}_1(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = -i$$

- Si $r \to 0^+$ se infiere desde la identidad

$$0 = \oint_{\Gamma_{R,0}} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx - (i\pi)\cdot \mathrm{Res}_1(f,0)$$

que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = (i\pi)\mathrm{Res}_1(f,0) = \pi$$