UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EXAMEN DE RECUPERACION (02/12/2004)

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

RBP/LNB/rbp

Problema 1.
a) Determine la(s) región(es) Ω del plano tal que para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$ se puede garantizar la existencia de una única solución del PVI

$$y' = x\,\sqrt[3]{y} + \frac{2\,y}{x}\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

$\boxed{\textbf{10 puntos}}$

b) Resolver el PVI de la parte a), considerando $(x_0, y_0) = (-1, 8)$.

$\boxed{\textbf{10 puntos}}$

Pauta
La ecuación es de la forma $y' = f(x, y)$, siendo $f(x, y) = x\,\sqrt[3]{y} + \dfrac{2\,y}{x}$.
i) f es continua en $\Omega_I := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x \neq 0\}$
ii) Derivando f respecto a y, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{3\,y^{2/3}} + \frac{2}{x}\,,$$

la cual es continua en $\Omega_{II} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x \neq 0\,, y \neq 0\}\,.$ $\boxed{\textbf{5 puntos}}$
Así, f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\Omega := \Omega_I \cap \Omega_{II} = \Omega_{II}$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$
De esta manera, el teorema de existencia y unicidad (visto en clase), garantiza la solubilidad única de la ecuación si (x_0, y_0) cae dentro de alguna de las regiones (conexas) $\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x > 0\,, y > 0\}$, $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x < 0\,, y > 0\}$, $\Omega_3 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x < 0\,, y < 0\}$, $\Omega_4 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x > 0\,, y < 0\}$.
$\boxed{\textbf{2 puntos}}$

b) Notamos que estamos frente a Ecuación de tipo Bernoulli:

$$y' - \frac{2}{x}y = x\,y^{1/3} \quad \Rightarrow \quad y^{-1/3}\,y' - \frac{2}{x}y^{2/3} = x\,, \quad (y \neq 0)\,,$$

la cual, haciendo el cambio: $\boxed{z = y^{2/3}}$, se convierte en la EDO lineal de primer orden:

$$z' - \frac{4}{3\,x}\,z = \frac{2}{3}x\,,$$

con condición inicial $z(-1) = 4$. El factor integrante es $\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{4}{3\,x}\,dx\right) = x^{-4/3}$. Multiplicando la EDO previa por $\mu(x)$, se obtiene

$$\left(x^{-4/3}\,z\right)' = \frac{2}{3}x^{-1/3}\,, \qquad \Rightarrow \qquad z(x) = x^2 + C\,x^{4/3}\,, \qquad \boxed{\textbf{7 puntos}}$$

cuya constante $C \in \mathbf{R}$ resulta ser igual a 3. **1 punto**
Esto implica que

$$y(x) = \left(x^2 + 3\,x^{4/3}\right)^{3/2}. \qquad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Problema 2. **10 puntos** En una reacción química, cierto compuesto se transforma en otra sustancia a una razón proporcional a la cantidad no transformada. Si inicialmente habían 20 gramos del compuesto original y después de una hora quedan 16 gramos, ¿qué cantidad de la sustancia transformada habrá al cabo de dos horas?

Pauta

Sea $x(t)$ la cantidad (en $[g]$) de la sustancia transformada al cabo de t horas. Del enunciado se tiene que el PVI que rige la reacción es:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(20-x)\,, \qquad x(0) = 0\,, \qquad x(1) = 4\,, \qquad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

siendo k la constante de proporcionalidad. Resolviendo el PVI, se obtiene que

$$x(t) = 20\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right). \qquad \boxed{\textbf{5 puntos}}$$

Luego, al cabo de 2 horas habrán $x(2) = 7,2\,[g]$ de la sustancia transformada. **1 punto**

Problema 3. Resuelva el PVI **15 puntos**

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,\delta(t-1)\,, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 1\,.$$

Pauta

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación propuesta, resulta

$$\mathcal{L}[y''(t)] - 3\,\mathcal{L}[y'(t)] + 2\,\mathcal{L}[y] = 2\,\mathcal{L}[\delta(t-1)]$$

$$\Rightarrow s^2\,\mathcal{L}[y] - s\,y(0) - y'(0) - 3\left(s\,\mathcal{L}[y(t)] - y(0)\right) + 2\,\mathcal{L}[y(t)] = 2\,\mathrm{e}^{-s}$$

$$\Rightarrow \left(s^2 - 3s + 2\right)\mathcal{L}[y(t)] = 2\,\mathrm{e}^{-s} + 1 \qquad \boxed{\textbf{6 puntos}}$$

De esta manera, procedemos a despejar $\mathcal{L}[y(t)]$, para luego calcular $y(t)$ aplicando la transformada inversa de Laplace y algunas de sus propiedades (en especial la segunda propiedad de traslación), con lo cual se tiene

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{(s-1)(s-2)} + \frac{2\,\mathrm{e}^{-s}}{(s-1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s-1)(s-2)}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = g(t) + 2\,H_1(t)\,g(t-1)\,, \qquad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

donde

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathrm{e}^{t} * \mathrm{e}^{2\,t} = \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{e}^{2\,\tau}\,d\tau = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}\,. \qquad \boxed{\textbf{3 puntos}}$$

Finalmente, la solución del PVI dado es

$$\boxed{y(t) = (\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}) + 2\,H_1(t)\left(\mathrm{e}^{2(t-1)} - \mathrm{e}^{(t-1)}\right)}\,. \qquad \boxed{\textbf{2 puntos}}$$

Problema 4. Determine la solución general del siguiente sistema.

$\boxed{\textbf{15 puntos}}$

$$\begin{cases} x' = -2x + \mathrm{e}^{-2t} \\ y' = 4x - 2y \\ z' = x - 2z \end{cases}$$

Pauta

La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X' = A\,X + B(t)$, siendo $X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como $\boxed{X(t) = X_H(t) + X_P(t)}$, donde $X_H(t)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $X_P(t)$ es una solución particular del sistema original.

a) **Cálculo de** $X_H(t)$: calculando los valores propios de A, éstos son los ceros del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = -(\lambda+2)^3$, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$. El respectivo espacio propio asociado está dado por:

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(0,1,0)^T\,,(0,0,1)^T\}\rangle\,.$$

Así tenemos dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}. \qquad \boxed{\textbf{5 puntos}}$$

Hallando $\boxed{X_3(t) = (u_1 + u_0\, t)\, \mathrm{e}^{-2\,t}}$, siendo $u_0\,, u_1 \in \mathbf{R}^3$ a determinar. **1 punto**

Para esto, primero caracterizamos el espacio rango de $A + 2\,I$, el cual viene dado por

$$ER(A{+}2I) := \{B = (a,b,c)^T \quad | \quad r(A{+}2I|B) = r(A{+}2I)\} = \{(a,b,c)^T \quad | \quad a = 0\,, b = 4\,c\}$$

Luego, u_0 y u_1 se buscan (y escogemos una de las soluciones admisibles) tal que satisfagan:

$$(A + 2I)\, u_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_0 = (0, 4, 1)^T$$

$$(A + 2I)\, u_1 = u_0 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = (1, 0, 0)^T\,.$$

3 puntos

De esta manera, se tiene $X_3(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 4\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}$, con lo que la solución general del sistema homogéneo es

$$X_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 4\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}\,,$$

siendo C_1, C_2 y C_3 constantes reales arbitarias. **1 punto**

b) **Cálculo de** $X_P(t)$: usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $\boxed{X_P(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t) + C_3\, X_3(t)}$, donde $C_1(t)$, $C_2(t)$ y $C_3(t)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2\,t} \\ \mathrm{e}^{-2\,t} & 0 & 4\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\,t} & t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo resulta (**nota:** al integrar, proporcionamos sólo una primitiva):

$$C_3'(t)\,\mathrm{e}^{-2\,t} = \mathrm{e}^{-2\,t} \quad \Rightarrow \quad C_3'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_3(t) = t$$

$$C_1'(t)\,\mathrm{e}^{-2\,t} + 4\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,C_3'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(t) = -2\,t^2$$

$$C_2'(t)\,\mathrm{e}^{-2\,t} + t\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,C_3'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2(t) = -\frac{t^2}{2}\,,$$

con lo que resulta

$$X_P(t) = \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ \frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}\,,$$ **4 puntos**

con lo que concluimos que la solución general del sistema propuesto es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 4\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \\ \frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \end{pmatrix}\,,$$ **1 punto**

siendo C_1, C_2 y C_3 constantes reales arbitarias.