UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS REAL I (525.301)

Cap. 3. Ejercicios adicionales.

En los ejercicios que siguen, (X, d) es un espacio métrico.

1. Sea E un subconjunto denso de X y $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Demuestra que $x_n \to x$ si y sólo si $d(x_n, p) \to d(x, p)$ $\forall p \in E$.

2. Sea $E \subset X$. Demuestra que E es abierto en X si y sólo si se cumple la siguiente condición:

   Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de X y $x_n \to x \in E$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $x_n \in E$.

3. Demuestra que para todo $E \subset X$, $\operatorname{diam}(E) = \operatorname{diam}(\overline{E})$.

4. Demuestra que la unión finita de subespacios métricos completos de X es un espacio métrico completo. Demuestra que la intersección arbitraria de espacios métricos completos es un espacio métrico completo.

5. Demuestra que X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión de X tiene una subsucesión de Cauchy.

6. Demuestra que si X es totalmente acotado y $E \subset X$, entonces E es totalmente acotado.

7. Demuestra que X es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ hay un cubrimiento finito de X por conjuntos cerrados de diametro menor o igual a ε.

8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

   (a) Demuestra que $x_n \to \pm\infty$ si y sólo si toda sus subsucesiones $x_{n_k} \to \pm\infty$.

   (b) Demuestra que $\{x_n\}$ no es acotada superiormente (inferiormente) si y sólo si hay una subsucesión $x_{n_k} \to +\infty$ (resp. $x_{n_k} \to -\infty$).

9. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n := \{x_m,\ m \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ (la *cola* de la sucesión) y sean $a_n := \inf X_n$ y $b_n := \sup X_n$. Demuestre que $\{a_n\}$ es una sucesión monótona creciente que converge a $\liminf x_n$ y que $\{b_n\}$ es una sucesión monótona decreciente que converge a $\limsup x_n$.

10. Sean $\{x_{n_k}\}$ y $\left\{x_{n'_k}\right\}$ dos subsucesiones de $\{x_n\}$ tales que $\{n_k\} \cup \{n'_k\} = \mathbb{N}$. Demuestra que si $x_{n_k} \to x$ y $x_{n'_k} \to x$, entonces $x_n \to x$. Generaliza la propiedad al caso en que $\mathbb{N}$ es unión de los índices de finitas subsucesiones. Da un ejemplo en el que $\mathbb{N}$ es unión de los índices de infinitas subsucesiones tales que cada subsucesión converge a x pero la sucesión $\{x_n\}$ no converge.

11. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales positivos. Demuestra que toda sucesión $\{x_n\}$ de X que satisface $d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$, es una sucesión de Cauchy.