

ALGEBRA III (525201)

Pauta Evaluación 1

1. Sea $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se definen las familias de conjuntos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \wedge \quad C_n = \bigcap_{l=n}^{\infty} A_l$$

- a) (7 Ptos.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} \subseteq B_n \quad \wedge \quad (x \in C_n \implies \forall l \geq n, \quad x \in B_l).$$

- b) (8 Ptos.) Deduzca de a) que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- c) (7 Ptos.) Muestre que si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia creciente de conjuntos, es decir

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k \subseteq A_{k+1},$$

entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- d) (8 Ptos.) Suponga que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k = \left[0, \frac{k}{k+1}\right)$. Determine el valor de

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{y} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

2. Un conjunto no vacío ordenado (A, \leq) se dice *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío $B \subseteq A$ tiene un primer elemento, es decir $\exists \tilde{b} \in B, \forall b \in B, \tilde{b} \leq b$.

- a) (10 Ptos.) Pruebe que si (A, \leq) es bien ordenado, entonces \leq es una relación de orden total. Muestre, con un ejemplo, que la implicancia contraria no es cierta.

- b) (10 Ptos.) Sea R la relación en \mathbb{Z}^2 definida por:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad (x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2).$$

Pruebe que R es relación de orden en \mathbb{Z}^2 .

- c) (10 Ptos.) Determine si R es relación de orden parcial o total. ¿Es (\mathbb{Z}^2, R) un conjunto bien ordenado?

Soln:

1. a) Probemos primero que: $\forall n \in \mathbb{N} : B_{n+1} \subseteq B_n$. Sea $x \in U :$

$$x \in B_{n+1} \iff \exists k \geq n+1, x \in A_k \implies \exists k \geq n, x \in A_k \implies x \in B_n.$$

Por otro lado, se tiene que:

$$x \in C_n \iff \forall l \geq n, x \in A_l.$$

Como $\forall l \in \mathbb{N}, A_l \subseteq B_l$, entonces

$$x \in C_n \iff \forall l \geq n, x \in A_l \implies \forall l \geq n, x \in B_l.$$

- b) $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, x \in C_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall l \geq n, x \in A_l \implies \exists n \in \mathbb{N}, \forall l \geq n, x \in B_l$. Por otro lado, como $B_n \subseteq B_{n-1} \subseteq \dots \subseteq B_1$, entonces $x \in B_n \implies \forall 1 \leq l \leq n, x \in B_l$. Así, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. De aquí,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Por otro lado, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \implies x \in B_1 \iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Luego,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- c) Supongamos ahora que

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_k \subseteq A_{k+1}.$$

Luego, por resultados vistos en clase, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = A_n$. Así,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Por b) se tiene entonces que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

De esta forma, todas las inclusiones anteriores son en realidad igualdades y por lo tanto se obtiene el resultado buscado.

- d) Como $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{k+1} \leq \frac{k+1}{k+2}$, entonces $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \subseteq A_{k+1}$. Luego por b) se tiene que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mostremos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1).$$

En efecto, $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{k+1} < 1$, luego $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \subseteq [0, 1)$, lo que implica, por resultados vistos en clase, que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq [0, 1).$$

Sea ahora $0 \leq x < 1$, escogiendo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x < \frac{k}{k+1} \iff xk + k < k \iff k > \frac{x}{1-x},$$

se tiene que $x \in A_k$, lo que implica que

$$[0, 1) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado buscado.

2. a) Si (A, \leq) es bien ordenado, entonces en particular $\forall \{x, y\} \subseteq A$ tiene un primer elemento ya sea x o y , es decir $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Por lo tanto, todo par de elementos $\{x, y\} \subseteq A$ es comparable. Así la relación de orden \leq es total. Sin embargo, no todo conjunto (A, \leq) ordenado totalmente es bien ordenado: Por ejemplo, el conjunto (\mathbb{Z}, \leq) con \leq la relación de orden usual en \mathbb{Z} es ordenado totalmente sin embargo el conjunto $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Z}$ de los enteros negativos no tiene primer elemento. Por lo tanto, (\mathbb{Z}, \leq) no es bien ordenado.
- b) i) Refleja (02 Ptos.): $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq x \implies (x, y) R (x, y)$.
- ii) Antisimetría (04 Ptos.): Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$. Supongamos que $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$.
- Si $x_1 = x_2$, entonces $y_1 \leq y_2$ y $y_2 \leq y_1$, lo cual implica que $y_1 = y_2$ y así $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
 - Si $x_1 \neq x_2$, entonces necesariamente $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$. En el primer caso, no es posible que $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$ pues $x_2 > x_1$, lo cual es una contradicción. Lo mismo se concluye en el segundo caso. Por lo tanto, la relación es antisimétrica.
- iii) Transitividad (04 Ptos.) : Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) R (x_3, y_3)$.
- Si $x_1 = x_2 = x_3$, entonces $y_1 \leq y_2 \wedge y_2 \leq y_3 \implies y_1 \leq y_3$. Así, $(x_1, y_1) R (x_3, y_3)$.
 - Si $x_1 = x_2$ y $x_2 < x_3$, entonces $x_1 < x_3 \implies (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$.
 - Si $x_1 < x_2$ y $x_2 = x_3$, entonces $x_1 < x_3 \implies (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$.
 - Si $x_1 < x_2$ y $x_2 < x_3$, entonces $x_1 < x_3 \implies (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$.
- Por lo tanto, la relación es transitiva y luego de orden.
- c) Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$. Luego, si $x_1 = x_2$, entonces $y_1 \leq y_2$ o $y_2 \leq y_1$. De aquí, $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ o $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$. Si por el contrario, $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$. En el primer caso $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ y en el segundo $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$. Por lo tanto, en cualquier caso (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son comparables y por consiguiente R es relación de orden total. No obstante, (\mathbb{Z}, R) no es un conjunto bien ordenado, ya que si consideramos por ejemplo $B = \mathbb{Z}^- \times \{0\} \subseteq \mathbb{Z}^2$, entonces B no tiene un primer elemento, pues si $(b, 0) \in B$ lo fuese, entonces $(b - 1, 0) \in B$ y $(b - 1, 0) R (b, 0)$, lo cual es una contradicción.