¿Cómo se soluciona una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de orden 2?

Caso: Polinomio característico con raíces complejas

Carlos M. Mora

Función exponencial

Fije $\lambda = a + b\,i$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(\lambda\, x) = \exp(a\, x)\,(cos\,(b\, x) + i\, sen\,(b\, x))\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\exp(a\,x)\,(cos\,(b\,x) + i\,sen\,(b\,x)) &= a\,\exp(a\,x)\,(cos\,(b\,x) + i\,sen\,(b\,x)) \\ &\quad + \exp(a\,x)\,(-b\,sen\,(b\,x) + i\,b\,cos\,(b\,x)) \\ &= a\,\exp(\lambda\,x) + b\,i\,\exp(a\,x)\,(i\,sen\,(b\,x) + cos\,(b\,x)) \\ &= a\,\exp(\lambda\,x) + b\,i\,\exp(\lambda\,x) \\ &= (a + b\,i)\exp(\lambda\,x)\end{aligned}$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dx}\exp(\lambda\,x) = \lambda\,\exp(\lambda\,x)$$

Problema

Encuentre todas las funciones del tipo $x \mapsto \exp(\lambda x)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, que satisfacen:

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

con $p, q \in \mathbb{R}$.

Buscaremos soluciones de (1) con la forma $Y(x) = \exp(\lambda x)$. Ya que $\frac{d}{dx}\exp(\lambda x) = \lambda \exp(\lambda x)$, $\frac{d^2}{dx^2}\exp(\lambda x) = \lambda^2 \exp(\lambda x)$. Sustituyendo en (1) obtenemos

$$\lambda^2 \exp(\lambda x) + p\lambda \exp(\lambda x) + q \exp(\lambda x) = 0.$$

Lo que implica

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

o sea λ es un cero del polinomio característico $\lambda^2 + p\lambda + q$.

La función $Y(x) = \exp(\lambda x)$ satisface (1) si y solo si

$$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Solución general de una EDO lineal de orden 2 homogénea

Considere la EDO

$$Y''(x) + p(x)\, Y'(x) + q(x)\, Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]a, b[\,, \tag{2}$$

donde $p, q :]a, b[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Un sistema fundamental de soluciones de (2) está formado por dos funciones independientes $f_1, f_2 :]a, b[\to \mathbb{R}$ que satisfacen (2).

Supongamos que f_1, f_2 es un sistema fundamental de soluciones de (2). Entonces, la solución general de (2) es: $Y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

El conjunto de todas las soluciones de (2) forma un subespacio vectorial. La dimensión de este subespacio es 2. En efecto, considere una solución cualquiera $Y(x)$ de (2). Sean

$$Y_1''(x) + p(x)\, Y_1'(x) + q(x)\, Y_1(x) = 0 \quad \forall x \in \,]a, b[\,, \quad Y_1(x_0) = 1, \quad Y_1'(x_0) = 0.$$

$$Y_2''(x) + p(x)\, Y_2'(x) + q(x)\, Y_2(x) = 0 \quad \forall x \in \,]a, b[\,, Y_2(x_0) = 0, \quad Y_2'(x_0) = 1.$$

Puesto que $W[Y_1, Y_2](x_0) = 1$, Y_1 y Y_2 son LI. El teorema de EyU asegura que

$$Y(x) = Y(x_0)\, Y_1(x) + Y'(x_0)\, Y_2(x).$$

Problema

Asuma que $p, q \in \mathbb{R}$ son tales que $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Encuentre la solución general de:

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ya que $\frac{p^2}{4} - q < 0$, el polinomio característico $\lambda^2 + p\,\lambda + q$ tiene como raíces los números complejos

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Entonces $Y_k(x) = \exp(\lambda_k\, x)$, con $k = 1, 2$, satisfacen (3). Aplicando el principio de superposición obtenemos que

$$Y(x) = C_1\, \exp(\lambda_1\, x) + C_2\, \exp(\lambda_2\, x)$$

es solución de (3) para cada $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1\, \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(cos(\alpha\, x) + i\, sen(\alpha\, x)) + C_2\, \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(cos(-\alpha\, x) + i\, sen(-\alpha\, x)) \\ &= C_1\, \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(cos(\alpha\, x) + i\, sen(\alpha\, x)) + C_2\, \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(cos(\alpha\, x) - i\, sen(\alpha\, x)) \end{aligned}$$

con $\alpha = \sqrt{q - p^2/4}$.

Problema

Asuma que $p, q \in \mathbb{R}$ son tales que $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Encuentre la solución general de:

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(\cos(\alpha\,x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha\,x)) + C_2 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)(\cos(\alpha\,x) - i\,\mathrm{sen}(\alpha\,x)) \\ &= (C_1 + C_2)\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\cos(\alpha\,x) + i\,(C_1 - C_2)\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\mathrm{sen}(\alpha\,x), \end{aligned}$$

donde $\alpha = \sqrt{q - p^2/4}$.

$C_1 = C_2 = 1/2$: $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\cos(\alpha\,x)$ es solución de (4)
$C_1 = -C_2 = 1/2$: $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\mathrm{sen}(\alpha\,x)$ es solución de (4)

Solución general de (4)

$$Y(x) = K_1 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\cos(\alpha\,x) + K_2 \exp\left(-\frac{p}{2}x\right)\mathrm{sen}(\alpha\,x)$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

¿Son LI las funciones $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right) cos\,(\alpha\, x)$, $\exp\left(-\frac{p}{2}x\right) sen\,(\alpha\, x)$?

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\ \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) cos\,(\alpha\, x) + c_2\ \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) sen\,(\alpha\, x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$c_1\, cos\,(\alpha\, x) + c_2\, sen\,(\alpha\, x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$ puesto que

$$\begin{vmatrix} \alpha\ \cos\,(\alpha\, x) & \alpha\ \operatorname{sen}\,(\alpha\, x) \\ -\alpha\ \operatorname{sen}\,(\alpha\, x) & \alpha\ \cos\,(\alpha\, x) \end{vmatrix} = \alpha^2\left(\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)\right) = \alpha^2 \neq 0,$$

Para $x \geq 0$, describa el comportamiento de las soluciones de:

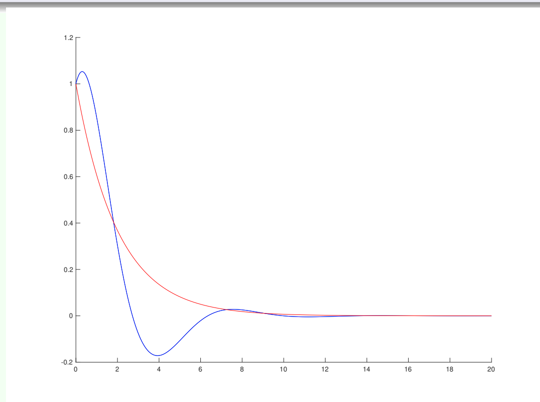
$$Y''(x) + Y'(x) + Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Polinomio característico: $\lambda^2 + \lambda + 1$.
Raíces: $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}}$
Solución general:

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) sen\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(C_1\, cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right) + C_2\, sen\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right). \end{aligned}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Cuando x se acerca a $+\infty$ la solución decrece rápidamente a 0. Hay oscilaciones.



Solución general

$$Y''(x) + p\,Y'(x) + q\,Y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $p, q \in \mathbb{R}$.

Caso: polinomio característico con dos raíces reales diferentes ($\frac{p^2}{4} - q > 0$)

$$Y(x) = C_1 \,\exp\left(\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) x\right) + C_2 \,\exp\left(\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) x\right)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Caso: polinomio característico con dos raíces complejas ($\frac{p^2}{4} - q < 0$)

$$Y(x) = C_1 \,\exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) cos\,(\alpha\,x) + C_2 \,\exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) sen\,(\alpha\,x)$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha = \sqrt{q - p^2/4}$.

Caso: polinomio característico con una única raíz ($\frac{p^2}{4} - q = 0$)

$$Y(x) = C_1 \,\exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right) + C_2\,x\,\exp\left(-\frac{p}{2}\,x\right)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.