



MAT1610 - Clase 35

Integrales trigonométricas

Diego De la Vega

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

07 de junio del 2024

Objetivo

- Abordar integrales trigonométricas.

Ejemplo 1: Determine

$$\int \cos^3(x) dx$$

Ejemplo 2: Determine

$$\int \sin^5(x) \cdot \cos^2(x) dx$$

Ejemplo 3: Determine

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m(x) \cdot \cos^n(x) dx$

Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraemos un factor coseno y utilizamos $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^{2k+1}(x) dx &= \int \operatorname{sen}^m(x) \cos^{2k}(x) \cos(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^k \cos(x) dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \operatorname{sen}(x)$

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m(x) \cdot \cos^n(x) dx$

Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor seno y utilizamos $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ para expresar los factores restantes en términos del cos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1}(x) \cos^n(x) dx &= \int \operatorname{sen}^{2k}(x) \operatorname{sen}(x) \cos^n(x) dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x))^k \operatorname{sen}(x) \cos^n(x) dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \cos(x)$

Estrategia para la evaluación de $\int \text{sen}^m(x) \cdot \text{cos}^n(x) dx$

Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\text{cos}^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Algunas veces es útil utilizar la identidad

$$\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$$

Ejemplo 4: Determine

$$\int \tan^6(x) \sec^4(x) dx$$

Ejemplo 5: Determine

$$\int \tan^5(t) \sec^7(t) dt$$

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m(x) \cdot \sec^n(x) dx$

Si la potencia de la secante es par ($n = 2k, k \geq 2$), extraemos un factor $\sec^2(x)$ y utilizamos $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan(x)$:

$$\begin{aligned}\int \tan^m(x) \sec^{2k}(x) dx &= \int \tan^m(x) (\sec^2(x))^{k-1} \sec^2(x) dx \\ &= \int \tan^m(x) (1 + \tan^2(x))^{k-1} \sec^2(x) dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \tan(x)$

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m(x) \cdot \sec^n(x) dx$

Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor $\tan(x)\sec(x)$ y utilizamos $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec(x)$:

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1}(x) \sec^n(x) dx &= \int (\tan^2(x))^k \sec^{n-1}(x) \tan(x) \sec(x) dx \\ &= \int (\sec^2(x) - 1)^k \sec^{n-1}(x) \tan(x) \sec(x) dx\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \sec(x)$

Ejemplo 6: Determine

$$\int \tan^3(x) dx$$

Ejemplo 7: Determine

$$\int \sec^3(x) dx$$

Ejemplo 7: Determine

$$\int \sec^3(x) dx$$

Solución: Al integrar por partes,

$$\begin{aligned} u &= \sec(x) & dv &= \sec^2(x) dx \\ du &= \sec(x) \tan(x) dx & v &= \tan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3(x) dx &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec(x) \tan^2(x) dx \\ &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3(x) &= \sec(x) \tan(x) + \int \sec(x) dx \\ 2 \int \sec^3(x) &= \sec(x) \tan(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + C \\ \int \sec^3(x) &= \frac{1}{2} (\sec(x) \tan(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)|)) + C_1 \end{aligned}$$

Corolario

Para evaluar las integrales

$$\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx$$

$$\int \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx$$

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx$$

Se pueden usar las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Ejemplo 8: Determine

$$\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)dx &= \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(4x - 5x) + \operatorname{sen}(4x + 5x)]dx \\ &= \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(9x)]dx \\ &= \frac{1}{2} \int [-\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(9x)]dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(x)dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(9x)dx \\ &= \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{18}\cos(9x) + C\end{aligned}$$

Conclusión

- Abordamos integrales trigonométricas

Libro guía

- Págs. 471-476.