



Problema 1. (15 puntos)

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique **una** de ellas.

1.1 $\{X \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) : |\mathcal{P}(X)| = 8\} = \{X \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) : |X| = 3\}$.

1.2 $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(m^2 > n)$.

1.3 $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : [(xy \leq 0) \wedge (|x - y| = 2x)]$.

Solución:

1.1 Verdadera (3 puntos)

1.2 Verdadera (3 puntos)

1.3 Falsa (3 puntos)

Justificación:

1.1 Dado que para todo conjunto A se cumple $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$ es 8 si y solo si

$$2^{|A|} = 8 \Leftrightarrow |A| = 3.$$

Entonces es cierto que los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$ con cardinalidad 3 son los mismos que satisfacen que su conjunto potencia tiene cardinalidad 8. (6 puntos)

1.2 Llamemos $p(n)$ a la función proposicional $\forall m \in \mathbb{Z} : m^2 > n$. Dado que el cuadrado de cualquier número entero es mayor o igual que cero, la proposición $p(-1)$ ($\forall m \in \mathbb{Z} : m^2 > -1$) es verdadera.

Como $p(-1)$ es verdadera, se cumple que existe un entero n tal que $p(n)$. (6 puntos)

1.3 La negación de esta proposición es

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : [(xy > 0) \vee (|x - y| \neq 2x)].$$

Llamemos $p(x)$ a la función proposicional $\forall y \in \mathbb{R} : [(xy > 0) \vee (|x - y| \neq 2x)]$. Cuando x es, por ejemplo, -1, la proposición $p(-1)$, que es

$$\forall y \in \mathbb{R} : [(-y > 0) \vee (|-1 - y| \neq -2)],$$

es verdadera pues, dado que el valor absoluto de cualquier número real es mayor o igual que cero, es cierto que $\forall y \in \mathbb{R} : |-1 - y| \neq -2$. Dado que hemos podido encontrar un número real x para el que $p(x)$ es verdadera, la proposición $\exists x \in \mathbb{R} : p(x)$ es verdadera y su negación, que es la proposición original, es falsa. (6 puntos)

Problema 2. (15 puntos)

Demuestre que si el número natural a es impar, entonces $7 + (-1)^a(3a - 2)$ es múltiplo de 6.

Observación: Un número entero x es múltiplo de 6 si y solo si existe $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $x = 6m$.

Solución: Para demostrar la proposición, consideraremos a a un número natural impar y probaremos por método directo que $7 + (-1)^a(3a - 2)$ es múltiplo de 6.

Supongamos que a un número natural impar.

(2 puntos)

Sabiendo esto podemos llamar n al número natural tal que $a = 2n - 1$ (sabemos que tal n existe ya que a es impar natural).

(4 puntos)

Desarrollamos la expresión $7 + (-1)^a(3a - 2)$ reemplazando a por $2n - 1$.

$$\begin{aligned} 7 + (-1)^a(3a - 2) &= 7 + (-1)^{(2n-1)}(3(2n-1) - 2) \\ &= 7 + (-1)^{2n}(-1)^{-1}(6n - 3 - 2) \\ &= 7 + (-1)(6n - 5) \\ &= 7 - 6n + 5 \\ &= 12 - 6n \\ &= 6(2 - n) \end{aligned}$$

(5 puntos)

Como n es natural, entonces $2 - n$ es un número entero y ya que $6(2 - n)$ resulta de multiplicar 6 por un número entero, entonces $6(2 - n)$ es múltiplo de 6 y por lo tanto $7 + (-1)^a(3a - 2)$ es múltiplo de 6.

(4 puntos)

Problema 3. (15 puntos)

En la Facultad de Ingeniería se realizó una encuesta a un grupo de 200 estudiantes de primer año sobre sus gustos por las asignaturas Cálculo, Álgebra y Química.

La información recopilada fue la siguiente:

- A 68 estudiantes les gusta Química, a 138 les gusta Álgebra, a 160 les gusta Cálculo.
- A 120 les gusta Álgebra y Cálculo. A 20 les gusta Química, pero no les gusta Álgebra. A 13 les gusta Química y Álgebra, pero no Cálculo. A 15 les gusta Química y Cálculo, pero no Álgebra.

Llamemos

- \mathcal{U} , al conjunto de los estudiantes encuestados,
- A , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta Álgebra,
- C , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta Cálculo y
- Q , al conjunto de los estudiantes a los que les gusta Química.

3.1 Construya un diagrama de Venn para este problema. Sombree en él:

- el conjunto de estudiantes a los que les gusta sólo Álgebra y
- el conjunto de estudiantes a los que les gusta Álgebra y Cálculo, pero no Química.

3.2 ¿A cuántos estudiantes les gustan las tres asignaturas?

3.3 ¿A cuántos estudiantes les gusta Álgebra y Cálculo, pero no Química?

3.4 ¿A cuántos estudiantes no les gusta Álgebra?

Observación: En las preguntas 3.2, 3.3 y 3.4 no basta con escribir la cardinalidad pedida, debe escribir la ecuación o las ecuaciones que le permitieron obtenerla.

Solución:

Problema 4. (15 puntos)

Considere las siguientes relaciones:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}, \quad \mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x(x - 1) = (2y + 7)(x - 1)\}.$$

4.1 Represente a \mathcal{F} en el plano cartesiano. Justifique.

4.2 Determine si \mathcal{F} es función. Justifique su respuesta.

4.3 Determine si \mathcal{G} es función. Justifique su respuesta.

Solución:

4.1 Dado que

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$$

la relación \mathcal{F} está formada por los pares

$$\{(x, x) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Los pares en \mathcal{F} son la unión de los puntos en la recta $y = x$ con los puntos en la recta $y = -x$ del plano cartesiano. Su representación en el plano cartesiano es la mostrada en la figura 1.

(5 puntos)

4.2 Para que \mathcal{F} sea función debe ocurrir que cada $x \in \mathbb{R}$ se relacione con exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}$. Sin embargo, cualquier número distinto de 0 se relaciona con dos números reales según \mathcal{F} , por ejemplo, los pares $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son elementos de \mathcal{F} . Esto significa que \mathcal{F} no es función.

(5 puntos)

4.3 Cuando $x = 1$, la ecuación que define a \mathcal{G} se satisface para cualquier número real y . Si $x \neq 1$, la ecuación que define a \mathcal{G} es equivalente a $x = 2y + 7$. Por tanto, los pares ordenados en \mathcal{G} son los siguientes

$$\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ \left(x, \frac{x-7}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

La relación \mathcal{G} no es función pues el número real 1 se relaciona, según \mathcal{G} , con infinitos números reales.

(5 puntos)

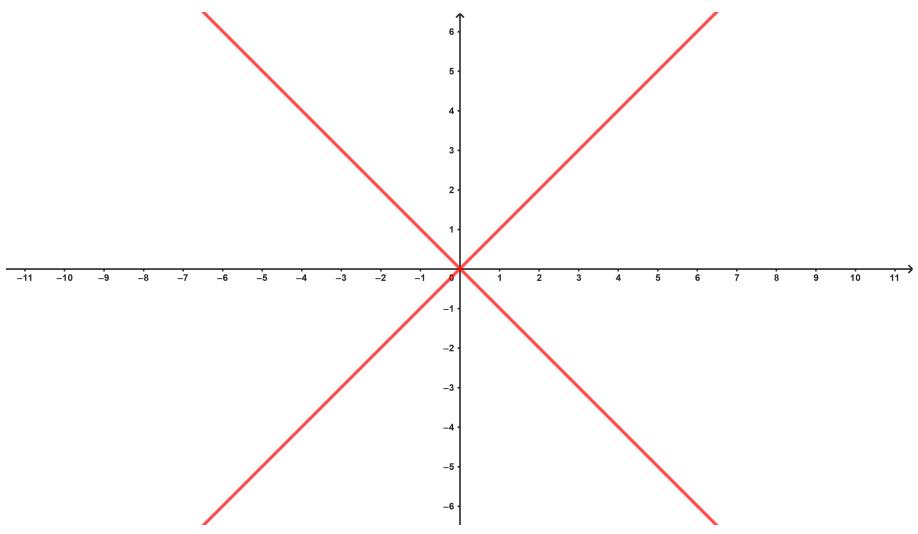


Figura 1: Representación gráfica de \mathcal{F} en pregunta 4