

A student 3.

$$\star \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [-2, 1)$$

En efecto, por doble inclusión.

$$\begin{aligned} \Leftarrow) \text{ Sea } x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in \left[-1 - \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right] \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 - \frac{1}{i} \wedge x \leq 1 - \frac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como, $\forall i \in \mathbb{N}, i > 1$, entonces $-\frac{1}{i} > -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{i} > -2$
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left[-1 - \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right] \supseteq [-2, 1)$

Así, como $x \leq 1 - \frac{1}{i} < 1$. Así como $x \leq -1 - \frac{1}{i} < -1 \Rightarrow x < -1$ (*)

Por (*) y (**), $x \in [-2, 1)$ y de este modo $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq [-2, 1)$ □

2) Recíprocamente, Sea $x \in [-2, 1)$

• Si $x = -2$, $x \in A_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

• Si $x \in (-2, 1)$, se puede escribir el intervalo $(-2, 1)$ como la unión de intervalos $[-1, 1]$ con un "desplazamiento" "pequeño" hacia la izquierda

• observamos que existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $x \in (-1 - \epsilon, 1 - \epsilon)$

$$\left[-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \supseteq (-1 - \epsilon, 1 - \epsilon) \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$(2 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}) \supseteq x \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

• Como $\epsilon > 0$, por P.A.

$$[1, 5] = A \cup B$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \epsilon > \frac{1}{n_1}$$

$$\bullet \exists n_2 \in \mathbb{N} : \epsilon < \frac{1}{n_2} \quad (\text{Pues } \epsilon < 1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\epsilon < -\frac{1}{n_1} \\ -\epsilon > -\frac{1}{n_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\epsilon < 1-\frac{1}{n_1} \quad (*) \\ 1-\epsilon > 1-\frac{1}{n_2} \quad (***) \end{cases}$$

Queremos probar que $\exists n \in \mathbb{N}$ que satisfice $(*)$ y $(**)$, pues en tal caso, $x \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = A_n \Rightarrow \epsilon \in U$

$$\begin{aligned} 1-\epsilon > 1-\frac{1}{n_2} &\geq 1-\frac{1}{n} \\ 1-\epsilon < 1-\frac{1}{n_1} &\leq 1-\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Basta considerar $n \in [n_1, n_2]$, pues si $n \geq n_2 \Rightarrow 1-\frac{1}{n} \leq 1-\frac{1}{n_2}$ y si $n \leq n_1 \Rightarrow 1-\frac{1}{n} \geq 1-\frac{1}{n_1}$

$$\text{y en tal caso, } \left[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \subseteq \left[1-\frac{1}{n_2}, 1-\frac{1}{n_1}\right]$$

$$\text{y a su vez, como } [1-\epsilon, 1-\epsilon] \subseteq \left[1-\frac{1}{n_2}, 1-\frac{1}{n_1}\right]$$

Se concluye $(1-\epsilon, 1-\epsilon) \in A_n$ y como $x \in (1-\epsilon, 1-\epsilon)$
 $\Rightarrow x \in A$ y $\therefore x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$c) A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), i \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} \subseteq) \text{ Sea } x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i} \end{aligned}$$

$$\text{Como } i \geq 1, \frac{1}{i} < 1 \text{ y } -\frac{1}{i} > -1$$

$$\text{Luego, } \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \subseteq (-1, 1) \text{ y por lo tanto, } x \in (-1, 1)$$

$$\supseteq) \text{ Sea } x \in (-1, 1), \text{ Queremos probar que } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{En efecto, } n=1, \text{ Así } (-1, 1) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ y como ya probamos la inclusión contraria, } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = (-1, 1).$$

$$\bullet \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$

$$\supseteq) \text{ Es claro que } \forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{n} < 0 \text{ y } 0 < \frac{1}{n}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \{0\} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y así } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq \{0\}.$$

$$\begin{aligned} \subseteq) \text{ Sea } x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |x| < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Supongamos $|X| > 0$, entonces por Propiedad Arquimédica
 $\exists n^* \in \mathbb{N}$ tal que $|X| > \frac{1}{n}$ ($\rightarrow \leftarrow$)
 lo que es una contradicción. Por lo tanto, $|X| = 0 \Rightarrow X = \emptyset$.

Así probamos la inclusión restante, y se concluye.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$

(P2) $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ creciente ($A_i \subseteq A_{i+1}$) $A_i \neq \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$, todos distintos.
 Se define $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por

$$B_1 = A_1, B_k = A_k - A_{k-1} \quad \forall k \geq 2.$$

Probar que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Tenemos que probar:

- 1) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
- 2) $\forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}, B_i \cap B_j = \emptyset$
- 3) $B_k \neq \emptyset \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

§ En efecto,

• $B_1 = A_1 \neq \emptyset$ Pues la familia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ No tiene elementos ~~vacíos~~ ^{Vacíos.}

• $\forall k \geq 2, B_k \neq \emptyset$, Poes si $B_k = \emptyset$, $A_k \setminus A_{k-1} = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_k = A_{k-1} \\ A_k \subset A_{k-1} \end{cases}$$

Como $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente y todos sus elementos son distintos, lo anterior ~~no~~ puede ocurrir y por lo tanto $B_k \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Veamos que son disjuntos a pares.

Sea $i, j \in \mathbb{N}$, $1 < i < j$ (Sin pérdida de generalidad)

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j &= (A_i \setminus A_{i-1}) \cap (A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap A_j \cap A_{j-1}^c \\ &= (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap A_{j-1}^c \cap A_j \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } i > 1 \quad B_1 \cap B_i &= A_1 \cap (A_i \setminus A_{i-1}) \\ &= A_1 \cap A_i \cap A_{i-1}^c \\ &= (A_1 \setminus A_{i-1}) \cap A_i \end{aligned}$$