UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

Calculo III Joaquin Riquelme, Javier Salinas Concepción 2025, Abril

# CALCULO III

Listado ( Derivadas direccionales, parciales y Diferenciabilidad)

## Ejercicios ayudantia

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que todas sus derivadas direccionales en (1,1) son 0.Entonces demuestre que $\nabla f(1,1) = 0$

2. Verifique si la siguiente función es diferenciable en $\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. Calcule las derivadas parciales de $f(x,y) = ln(\frac{x}{y})$. Determine el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en cuales las derivadas existen

4. 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y+2y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en (0,0) y en (1,1)
   (b) Calcule la derivada direccional de f en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = (1, -2)$ en los puntos (0,0) y (1,1)
   (c) Encuentre el plano tangente en el punto (1,1)

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Demuestre que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} : \nabla(fg)(x,y) = f(x,y)\nabla g(x,y) + g(x,y)\nabla f(x,y)$$

## Ejercicios para el estudiante

1. Calcule el gradiente de la funcion $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2. Sea $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

   (a) muestre que f se puede prolongar por continuidad en (0,0)

   (b) Muestre que f tiene derivadas parciales respecto a x e y en $(x,y) \neq (0,0)$ y en $(x,y) = (0,0)$. Determine estas derivadas parciales.

   (c) ¿f es diferenciable en el origen?. Justifique

3. Halle la ecuación del plano tangente en el punto (1,1,1) a la superficie $z = x^2y^2 + y - 1$

4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2-xy+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Analice la continuidad en el punto (0,0)

   (b) Calcule, si existen, las derivadas parciales de primer orden en (0,0)

   (c) Calcule las dervivadas parciales en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

   (d) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}$, donde $\overrightarrow{u}$ es una direccion de $\mathbb{R}^2$

5.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Analice continuidad y diferenciablilidad en el punto (0,0)

   (b) Determine todas las direcciones $\overrightarrow{u}$ tales que $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(0,0)$ existe.¿Existe la derivada parcial en (0,0)?