525043
Taller de Razonamiento Matemático II

Nicolás Sanhueza-Matamala
nsanhuezam@udec.cl
ICM, Universidad de Concepción, Chile

Objetivos de hoy

- Solución a problema anterior
- Un problema del listado

Problema anterior

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico “El Jordan 24”.

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico “El Jordan 24”. Inesperadamente, cuando vas a registrarlo a la Sociedad Chilena de Derechos de Autor (SCD), te dicen que ya existen otros artistas cuyo nombre es “El Jordan x”, con x natural.

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico "El Jordan 24". Inesperadamente, cuando vas a registrarlo a la Sociedad Chilena de Derechos de Autor (SCD), te dicen que ya existen otros artistas cuyo nombre es "El Jordan x", con x natural.

Para evitar confusiones, la SCD elige un natural $n \geq 1$ y pone las siguientes reglas.

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico “El Jordan 24”. Inesperadamente, cuando vas a registrarlo a la Sociedad Chilena de Derechos de Autor (SCD), te dicen que ya existen otros artistas cuyo nombre es “El Jordan x”, con x natural.

Para evitar confusiones, la SCD elige un natural $n \geq 1$ y pone las siguientes reglas. Solo pueden existir “Jordan x” y “Jordan y” al mismo tiempo si es que

1. tanto x como y son naturales entre 1 y $2n$, y además;

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico “El Jordan 24”. Inesperadamente, cuando vas a registrarlo a la Sociedad Chilena de Derechos de Autor (SCD), te dicen que ya existen otros artistas cuyo nombre es “El Jordan x”, con x natural.

Para evitar confusiones, la SCD elige un natural $n \geq 1$ y pone las siguientes reglas. Solo pueden existir “Jordan x” y “Jordan y” al mismo tiempo si es que

1. tanto x como y son naturales entre 1 y $2n$, y además;
2. x no divide a y.

Quieres iniciar tu carrera en la música urbana y elegiste el nombre artístico “El Jordan 24”. Inesperadamente, cuando vas a registrarlo a la Sociedad Chilena de Derechos de Autor (SCD), te dicen que ya existen otros artistas cuyo nombre es “El Jordan x”, con x natural.

Para evitar confusiones, la SCD elige un natural $n \geq 1$ y pone las siguientes reglas. Solo pueden existir “Jordan x” y “Jordan y” al mismo tiempo si es que

1. tanto x como y son naturales entre 1 y $2n$, y además;
2. x no divide a y.

¿Cuál es la máxima cantidad de Jordans que puede haber?

Recuerdo

En esencia, la pregunta es:

Dado $n \geq 1$ natural, sea $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que X no contiene a ningún par de números distintos x, y tal que x divida a y. ¿Cuál es el máximo posible que puede tener $|X|$?

Recuerdo

En esencia, la pregunta es:

Dado $n \geq 1$ natural, sea $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que X no contiene a ningún par de números distintos x, y tal que x divida a y. ¿Cuál es el máximo posible que puede tener $|X|$?

Siempre se puede lograr un conjunto de tamaño n, $X = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$.

Recuerdo

En esencia, la pregunta es:

Dado $n \geq 1$ natural, sea $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que X no contiene a ningún par de números distintos x, y tal que x divida a y. ¿Cuál es el máximo posible que puede tener $|X|$?

Siempre se puede lograr un conjunto de tamaño n, $X = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$.

El desafío es mostrar que no se puede encontrar tal conjunto de tamaño $n+1$.

Observaciones

Observación 1: En esencia, la pregunta es:

Dado $n \geq 1$ natural, sea $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que X no contiene a ningún par de números distintos x, y tal que x divida a y. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener $|X|$?

Observaciones

Observación 1: En esencia, la pregunta es:

Dado $n \geq 1$ natural, sea $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que X no contiene a ningún par de números distintos x, y tal que x divida a y. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener $|X|$?

Observación 2: Siempre se puede lograr un conjunto de tamaño n, por ejemplo

$$X = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}.$$

El desafío es mostrar que no se puede encontrar tal conjunto de tamaño $n+1$.

Observaciones

Observación 3: Entonces lo que quedaba por demostrar es:

Si $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ es un conjunto de tamaño $n + 1$, y no contiene ningún par de números distintos $x, y \in X$ tal que x divide a y; entonces $|X| \leq n$.

Observaciones

Observación 3: Entonces lo que quedaba por demostrar es:

Si $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ es un conjunto de tamaño $n + 1$, y no contiene ningún par de números distintos $x, y \in X$ tal que x divide a y; entonces $|X| \leq n$.

Observación 4: Podemos usar la idea de problema anterior: basta encontrar $B_1, \ldots, B_n$ que cubran todo $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ y tal que X tiene a lo más un elemento en cada conjunto B_i.

Observaciones

Para esto, necesitamos que cada B_i solo tenga elementos que se dividan entre ellos. Por ejemplo, las potencias de 2 sirven:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$$

porque para cada par de potencias de 2, la más chica divide a la más grande.

Observaciones

Para esto, necesitamos que cada B_i solo tenga elementos que se dividan entre ellos. Por ejemplo, las potencias de 2 sirven:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32\ldots$$

porque para cada par de potencias de 2, la más chica divide a la más grande.

¿Cómo usar esta idea en números que no son múltiplos de 2?

Observaciones

Recordando el Teorema Fundamental de la Aritmética, *todo* número x se puede escribir como $x = 2^p q$, donde p y q son enteros no-negativos y q es impar.

Observaciones

Recordando el Teorema Fundamental de la Aritmética, *todo* número x se puede escribir como $x = 2^p q$, donde p y q son enteros no-negativos y q es impar. Por ejemplo,

$$7 = 2^0 \times 7, \qquad 12 = 2^2 \times 3, \qquad 24 = 2^3 \times 3.$$

Observaciones

Recordando el Teorema Fundamental de la Aritmética, *todo* número x se puede escribir como $x = 2^p q$, donde p y q son enteros no-negativos y q es impar. Por ejemplo,

$$7 = 2^0 \times 7, \qquad 12 = 2^2 \times 3, \qquad 24 = 2^3 \times 3.$$

Esto es bueno porque si $x = 2^p q$ y además $y = 2^r q$, entonces x divide a y (si $p \leq r$).

Observaciones

Si es que $1 \leq x \leq 2n$ y $x = 2^p q$ con q impar, entonces $q \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Hay a lo más n posibilidades: podemos escribirlas como $2i - 1$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Observaciones

Si es que $1 \leq x \leq 2n$ y $x = 2^p q$ con q impar, entonces $q \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Hay a lo más n posibilidades: podemos escribirlas como $2i - 1$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por lo tanto podemos agrupar a los números x en $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ dependiendo de cuál es el número impar q que queda al escribirlo como $x = 2^p q$.

Observaciones

Si es que $1 \leq x \leq 2n$ y $x = 2^p q$ con q impar, entonces $q \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Hay a lo más n posibilidades: podemos escribirlas como $2i - 1$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por lo tanto podemos agrupar a los números x en $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ dependiendo de cuál es el número impar q que queda al escribirlo como $x = 2^p q$.

Por ejemplo, si $n = 6$, tenemos...

Observaciones

Más precisamente, podemos escribir, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto

$$B_i = \{x \in \{1, \ldots, 2n\} : \exists p \geq 0, x = 2^p \times (2i - 1)\}$$

y esos son los conjuntos que vamos a usar para la demostración.

Solución con detalle

Sea $n \geq 1$ natural. Diremos que $X \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ es *válido* si no tiene ningún par de números tal que uno divida al otro. Vamos a mostrar que existe un conjunto válido de tamaño n, luego vamos a mostrar que no existe ninguno más grande.

Solución con detalle

Sea $n \geq 1$ natural. Diremos que $X \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ es *válido* si no tiene ningún par de números tal que uno divida al otro. Vamos a mostrar que existe un conjunto válido de tamaño n, luego vamos a mostrar que no existe ninguno más grande.

El conjunto $X = \{n + 1, \ldots, 2n\}$ tiene tamaño n.

Solución con detalle

Sea $n \geq 1$ natural. Diremos que $X \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ es *válido* si no tiene ningún par de números tal que uno divida al otro. Vamos a mostrar que existe un conjunto válido de tamaño n, luego vamos a mostrar que no existe ninguno más grande.

El conjunto $X = \{n + 1, \ldots, 2n\}$ tiene tamaño n. Para ver que es válido, notemos que si $x, y \in X$ son distintos y además x divide a y, entonces $y \geq 2x$.

Solución con detalle

Sea $n \geq 1$ natural. Diremos que $X \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ es *válido* si no tiene ningún par de números tal que uno divida al otro. Vamos a mostrar que existe un conjunto válido de tamaño n, luego vamos a mostrar que no existe ninguno más grande.

El conjunto $X = \{n + 1, \ldots, 2n\}$ tiene tamaño n. Para ver que es válido, notemos que si $x, y \in X$ son distintos y además x divide a y, entonces $y \geq 2x$. Pero $x \geq n + 1$,

Solución con detalle

Sea $n \geq 1$ natural. Diremos que $X \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ es *válido* si no tiene ningún par de números tal que uno divida al otro. Vamos a mostrar que existe un conjunto válido de tamaño n, luego vamos a mostrar que no existe ninguno más grande.

El conjunto $X = \{n+1, \ldots, 2n\}$ tiene tamaño n. Para ver que es válido, notemos que si $x, y \in X$ son distintos y además x divide a y, entonces $y \geq 2x$. Pero $x \geq n+1$, entonces $y \geq 2x \geq 2(n+1) = 2n+2 > 2n$, contradicción.

Solución con detalle

Ahora mostraremos que todo conjunto válido tiene tamaño a lo más n.

Solución con detalle

Ahora mostraremos que todo conjunto válido tiene tamaño a lo más n.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos el conjunto

$$B_i = \{x \in \{1, \dots, 2n\} : \exists p \geq 0, x = 2^p \times (2i - 1)\}$$

Solución con detalle

Ahora mostraremos que todo conjunto válido tiene tamaño a lo más n.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos el conjunto

$$B_i = \{x \in \{1, \ldots, 2n\} : \exists p \geq 0, x = 2^p \times (2i - 1)\}$$

Primero notamos que, como todo entero se puede escribir como $2^p q$ con q impar, entonces todo número en $\{1, \ldots, 2n\}$ pertenece a algún B_i. Es decir,

$$\{1, \ldots, 2n\} = B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

Solución con detalle

Por otro lado, para i fijo, si es que $x, y \in B_i$ y además $x \leq y$ entonces tenemos que $x = 2^p(2i-1)$, $y = 2^r(2i-1)$ con $p \leq r$, por lo tanto uno x divide a y.

Solución con detalle

Por otro lado, para i fijo, si es que $x, y \in B_i$ y además $x \leq y$ entonces tenemos que $x = 2^p(2i - 1)$, $y = 2^r(2i - 1)$ con $p \leq r$, por lo tanto uno x divide a y. Como X es válido, no puede tener dos elementos en el mismo B_i.

Solución con detalle

Por otro lado, para i fijo, si es que $x, y \in B_i$ y además $x \leq y$ entonces tenemos que $x = 2^p(2i-1)$, $y = 2^r(2i-1)$ con $p \leq r$, por lo tanto uno x divide a y. Como X es válido, no puede tener dos elementos en el mismo B_i. Es decir, si X es un conjunto válido, entonces $|X \cap B_i| \leq 1$.

Solución con detalle

Por otro lado, para i fijo, si es que $x, y \in B_i$ y además $x \leq y$ entonces tenemos que $x = 2^p(2i-1)$, $y = 2^r(2i-1)$ con $p \leq r$, por lo tanto uno x divide a y. Como X es válido, no puede tener dos elementos en el mismo B_i. Es decir, si X es un conjunto válido, entonces $|X \cap B_i| \leq 1$.

Por lo tanto,

$$|X| \leq \sum_{i=1}^{n} |X \cap B_i| \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Un problema

Muestre que no existen dos potencias de 2 distintas que puedan obtenerse la una a partir de la otra reordenando los dígitos.