UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Análisis Real II (525302)
Listado $N°2$ (Integrales).

Problemas a resolver en práctica

1. Suponga que μ es una medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible no negativa que satisface $\int_\Omega f d\mu = 0$. Demuestre que $f = 0$ μ casi dondequiera.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Asumamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right)$ es una función medible. Supongamos que:

   - Para todo $x \in \Omega$, $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.
   - Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega |f_n| \, d\mu \leq K$, donde K es una constante positiva.

   Demuestre que
   $$\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty.$$

3. *a*) Compruebe que $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\{k\}}$ es una medida positiva sobre $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+))$.

   b) Aplicando el teorema de convergencia dominada demuestre que
   $$\lim_{\alpha \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos\left(2^k \alpha\right) = 2.$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, $\alpha > 0$ y $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ una función medible. Demuestre que la función
   $$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < \alpha \ , \\ signo\,(f(x))\,\alpha & \text{si } |f(x)| \geq \alpha \end{cases}$$
   es medible.

2. Considere el espacio de medida positiva $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Suponga que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mu)$. Demuestre que $\alpha f \in L^1(\mu)$ y que $\int_A (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_A f d\mu$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Asuma que $f \in L^1(\mu)$. Calcule
$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{w \in \Omega : f(w) \geq n\}\right).$$

4. Sea ν la medida sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ que satisface $\nu(]a,b]) = b - a$. Considere la función
$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \qquad \forall t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$
¿Se cumplirá que $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} G(x, 1/n)\, \nu(d\,x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} G(x, 1/n)\, \nu(d\,x)$? Justifique su respuesta.

CMG/cmg.