UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Ayudantía 7

1. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, ambos de dimensión finita. Demuestre que $\dim(V) = \dim(W)$ si y sólo si V y W son espacios isomorfos.

2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $T : V \to V$ una transformación lineal para la cual existe $n \in \mathbb{N}$ y $v_0 \in V$ tales que $T^n(v_0) = \theta$ y $T^{n-1}(v_0) \neq \theta$. Pruebe que el conjunto $\{v_0, T(v_0), \dots, T^{n-1}(v_0)\}$ es l.i.

3. Suponga que V es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal y $B_U = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de U. Demuestre que T es sobreyectiva si y solo si $V = \langle \{T(b_1), \dots, T(b_n)\} \rangle$. Concluya que $\dim(U) \geq \dim(V)$.

4. Sea $(U, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

   a) Sea S un subespacio de U. Defina la relación $\sim_S$ en U dada por $u \sim_S v \Leftrightarrow u - v \in S$. Demuestre que $\sim_S$ es una relación de equivalencia.

   b) Denotemos por $U/\sim_S$ al conjunto cociente de U con la relación $\sim_S$. Demuestre que $(U/\sim_S, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial, donde

   $$[x] \oplus [y] = [x + y], \quad \forall x, y \in U$$
   $$\alpha \odot [x] = [\alpha x], \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in U$$

   c) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal sobreyectiva con $S = \ker(T)$. Definamos otra transformación $\hat{T} : U/\sim_S \to V$ dada por $\hat{T}([x]) = T(x)$, $\forall [x] \in U/\sim_S$. Pruebe que $\hat{T}$ está bien definida, es lineal y biyectiva.

   d) Dado S un subespacio de U, decimos que la codimensión de S es la dimensión del espacio $U/\sim_S$. Sea $T : U \to V$ sobreyectiva. Considere $S = \ker(T)$ y demuestre que si la codimensión de U es finita, entonces la dimensión de V también lo es.

JAL/RAE/rae 3 de mayo de 2022