Normas Vectoriales y Normas Matriciales

M. Sepúlveda

Marzo, 2021

Norma en un espacio vectorial (recuerdo)

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$). Una norma sobre V es una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que verifica las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} &\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \textit{y } \|v\| \geqslant 0 \quad \textit{para todo } v \in V. \\ &\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \quad \textit{para todo } \alpha \in \mathbb{K}, \textit{ y } v \in V. \\ &\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \textit{para todo } u, v \in V. \end{aligned}$$

Sea V un espacio de dimensión finita. Las tres normas siguientes son las más usadas en la práctica:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= \sum_i |v_i|, \\ \|v\|_2 &= \left(\sum_i |v_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{(v,v)}, \\ \|v\|_\infty &= \max_i |v_i|. \end{aligned}$$

Otro ejemplo (típico) de norma

Teorema

Sea V un espacio de dimensión finita. para todo $p \geqslant 1$, la aplicación $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\|v\|_p = \left(\sum_i |v_i|^p \right)^{1/p}$$

es una norma.

Nota: la desigualdad triangular conocida en este caso como desigualdad de Minkowski:

$$\left(\sum_i |u_i + v_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_i |u_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_i |v_i|^p \right)^{1/p}$$

se puede demostrar a partir de la desigualdad de Hölder:

$$\sum_i |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_i |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_i |v_i|^q \right)^{1/q}$$

con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Que es una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz o desigualdad de Bunyakovskii.

Normas matriciales

Definición

Sea $\mathcal{A}_n$ el anillo de las matrices de orden n, de elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma matricial es una aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes propiedades:

$$\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0, \quad \text{y } \|\mathbf{A}\| \geqslant 0 \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{A}_n.$$

$$\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{K}, \text{ y } \mathbf{A} \in \mathcal{A}_n.$$

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}_n.$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}_n.$$

Normas matriciales subordinadas

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$, la aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| \quad &:= \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}v\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ \|v\| \leqslant 1}} \|\mathbf{A}v\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ \|v\| = 1}} \|\mathbf{A}v\| \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \|\mathbf{A}v\| \leqslant \alpha\|v\| \quad \text{para todo } v \in \mathbb{C}^n\}\end{aligned}$$

norma matricial llamada norma matricial subordinada (a la norma vectorial dada).

- Debido a la compacidad de la esfera unitaria, $\exists u \neq 0 \quad$ y $\quad \|\mathbf{A}u\| = \|\mathbf{A}\|\|u\|$.
- Toda norma matricial subordinada verifica $\|\mathbf{I}\| = 1$.
- Existen normas vectoriales y matrices reales tales que

$$|\mathbf{A}| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}v\|}{\|v\|} < \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}v\|}{\|v\|} = \|\mathbf{A}\|$$

(pero no es el caso de las normas vectoriales $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$)

Normas matriciales subordinadas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$

Teorema

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *una matriz cuadrada. Entonces*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &:= \sup \frac{\|\mathbf{A}v\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \\ \|\mathbf{A}\|_2 &:= \sup \frac{\|\mathbf{A}v\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\varrho(\mathbf{A}^*\mathbf{A})} = \sqrt{\varrho(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)} = \|\mathbf{A}^*\|_2, \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &:= \sup \frac{\|\mathbf{A}v\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|. \end{aligned}$$

La norma $\|\cdot\|_2$ *es invariante por transformación unitaria:*

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I} \Longrightarrow \|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{U}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\|_2.$$

Por otro lado, si la matriz $\mathbf{A}$ *es normal, entonces* $\|\mathbf{A}\|_2 = \varrho(\mathbf{A})$.

Relación entre el radio espectral y las normas matriciales

Teorema

1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada cualquiera y* $\|\cdot\|$ *una norma matricial cualquiera, subordinada o no. Entonces*

$$\varrho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|.$$

2. *Sea una matriz* $\mathbf{A}$ *y un número* $\varepsilon > 0$*, existe al menos una norma matricial subordinada tal que*

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon$$

Una norma matricial no-subordinada: la norma de Frobenius

Teorema

La aplicación $\|\cdot\|_E : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|A\|_E = \left\{ \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \sqrt{tr(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}$$

para toda matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *de orden* n*, es una norma matricial no-subordinada (para* $n \geqslant 2$*), invariante por transformación unitaria*

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I} \Longrightarrow \|\mathbf{A}\|_E = \|\mathbf{A}\mathbf{U}\|_E = \|\mathbf{U}\mathbf{A}\|_E = \|\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\|_E.$$

y que verifica

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_2, \quad \text{para todo} \quad \mathbf{A} \in \mathcal{A}_n.$$

Relación entre el radio espectral y las normas matriciales

Teorema

1. *Sea* $\|\cdot\|$ *una norma matricial subordinada y* $\mathbf{B}$ *una matriz cuadrada y tal que*

$$\|\mathbf{B}\| < 1$$

Entonces la matriz $(I + B)$ *es invertible y*

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{B}\|}$$

2. *Si una matriz de la forma* $(I + B)$ *es singular, entonces necesariamente*

$$\|\mathbf{B}\| \geqslant 1$$

para toda matriz, subordinada o no.

Sucesiones de vectores y matrices

Teorema

Sea $\mathbf{B}$ *una matriz cuadrada. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k v = 0$, *para todo vector* v,
3. $\varrho(\mathbf{B}) < 1$
4. $\|\mathbf{B}\| < 1$ *para al menos una matriz subordinada* $\|\cdot\|$.

Teorema

Sea $\mathbf{B}$ *una matriz cuadrada y* $\|\cdot\|$ *una norma matricial cualquiera. Entonces l*

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{B}^k\|^{1/k} = \varrho(\mathbf{B})$$