Modos de convergencia (cont.).

- **Completitud de la noción de convergencia en medida.**
- **Diagramas de relaciones entre modos de convergencia.**

Completitud de la noción de convergencia en medida.

A lo largo de esta clase, $(X, \mathscr{X}, \mu)$ es un espacio de medida y $L_p := L_p(X, \mathscr{X}, \mu)$ con $1 \leq p < +\infty$.

Convergencia en medida $\not\Longrightarrow$ convergencia c.t.p.

En efecto, la subsucesión de funciones características de subintervalos del $[0, 1]$ que introdujimos la clase pasada, no converge en ningún punto. Sin embargo, ya vimos que esa sucesión tiende a 0 en L_p y por lo tanto también en medida.

Sin embargo, en el teorema siguiente, veremos que si una sucesión converge en medida, entonces tiene una subsucesión que converge c.t.p. De hecho, veremos que el resultado vale para sucesiones de Cauchy en medida.

Teor.: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en medida de funciones medibles. Entonces, hay una función medible f y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge c.t.p. y en medida a f.

Dem.: Sean $g_k := f_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, con $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{f_n\}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, si $E_k := \left\{x \in X : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\right\}$, entonces $\mu(E_k) < 2^{-k}$. **Ej.**

Sean $F_k := \bigcup_{j\geq k} E_j,\ k\in\mathbb{N}$. Entonces, $\mu(F_k) < \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-(k-1)}$.

Sea $F :=\downarrow\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Como $\mu(F_1) < +\infty$, $\mu(F) = \lim_k \mu(F_k) = 0$.

Sea $x \notin F \implies \exists k\in\mathbb{N} : x\notin F_k \implies x\notin E_j\ \forall j\geq k \implies \forall i > j \geq k$,

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + \cdots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)|$$
$$< 2^{-(i-1)} + \cdots + 2^{-j} \leq \sum_{l=j}^{\infty} 2^{-l} = 2^{-(j-1)} \leq 2^{-(k-1)} \tag{1}$$

$\implies \{g_k(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R} \implies \exists \lim_k g_k(x)\in\mathbb{R}$.

Sea $f(x) := \begin{cases} \lim_k g_k(x), & x\notin F, \\ 0, & x\in F, \end{cases} \implies g_k \xrightarrow{k} f$ c.t.p.

Pasando al límite en (1) cuando $i\to+\infty$, se tiene que

$$\forall x\notin F_k,\quad |f(x) - g_j(x)| \leq 2^{-(k-1)} \quad \forall j\geq k. \tag{2}$$

Sean $\alpha,\ \varepsilon > 0$. Sea $k\in\mathbb{N} :\ 2^{-(k-1)} < \min\{\alpha,\varepsilon\}$. Entonces,

$$\forall j\geq k,\ \{x\in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\}$$
$$\subset \left\{x\in X : |f(x) - g_j(x)| > 2^{-(k-1)}\right\} \overset{(2)}{\subset} F_k$$

$\implies \mu\left(\{x\in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\}\right) \leq \mu(F_k) \leq 2^{-(k-1)} < \varepsilon$.

$\implies g_j$ **converge en medida a** f. ■

Corol.: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en medida de funciones medibles. Entonces, $\exists f$ medible tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.
Además, f es única c.t.p.

Dem.: Completitud. Teorema anterior $\Longrightarrow$ hay una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge en medida a una función medible f. Veamos que $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.

Sean $\alpha,\ \varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en medida,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m, n \geq N,\ \mu\left(\left\{x \in X : \ |f_m(x) - f_n(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2}\right\}\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

y como $\{f_{n_k}\}$ converge en medida a f,

$$\exists K \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq K,\ \mu\left(\left\{x \in X : \ |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2}\right\}\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, $\forall n \geq N$, tomando $k \geq K : \ n_k \geq N$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_n(x)|$$

$$\Longrightarrow \{x \in X : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}$$

$$\subset \underbrace{\left\{x \in X : \ |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2}\right\}}_{\mu(\cdot) < \frac{\varepsilon}{2}} \cup \underbrace{\left\{x \in X : \ |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \tfrac{\alpha}{2}\right\}}_{\mu(\cdot) < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\{x \in X : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}\right) < \varepsilon \Longrightarrow f_n \xrightarrow{n} f \text{ en medida.}$$

Unicidad. Sea $\{f_n\}$ tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ en medida.

Supngamos que $\exists g$ medible, tal que $f_n \xrightarrow{n} g$ en medida.

Veamos que $f = g$ c.t.p.

Como $\{x \in X : \ f(x) \neq g(x)\} = \uparrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : \ |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\}$,
veamos que $\mu\left(\left\{x \in X : \ |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

$$\Longrightarrow \left\{x \in X : \ |f(x) - g(x)| > \tfrac{1}{k}\right\}$$
$$\subset \underbrace{\left\{x \in X : \ |f(x) - f_n(x)| > \tfrac{1}{2k}\right\}}_{\mu(\cdot) \xrightarrow{n} 0} \cup \underbrace{\left\{x \in X : \ |f_n(x) - g(x)| > \tfrac{1}{2k}\right\}}_{\mu(\cdot) \xrightarrow{n} 0}$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\left\{x \in X : \ |f(x) - g(x)| > \tfrac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Entonces, $\mu\left(\{x \in X : \ f(x) \neq g(x)\}\right) = 0 \Longrightarrow f = g$ c.t.p. ■

Ya demostramos que $\boxed{\text{Convergencia en } L_p \implies \text{convergencia en medida}}$ y

es fácil ver que $\boxed{\text{Convergencia en medida } \not\Longrightarrow \text{ convergencia en } L_p. \quad \boxed{\textbf{Ej.7.E.}}}$

Sin embargo, la última implicación vale si hay **convergencia dominada.**

Teor.: Sean $f_n \in L_p,\ n \in \mathbb{N},$ tales que $\exists g \in L_p : \ |f_n| \leq g$ c.t.p $\quad \forall n \in \mathbb{N}.$
Entonces, si $f_n \to f$ en medida, se tiene que $f \in L_p$ y $f_n \to f$ en $L_p.$

Dem.: Por el absurdo. **Supongamos que $f_n \overset{n}{\not\to} f$ en L_p** (bien sea porque $f \notin L_p$ o porque $f \in L_p,$ pero $\|f_n - f\|_p \overset{n}{\not\to} 0.$)

Entonces, $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists \{g_k\}$ subsucesión de $\{f_n\}$: $\|g_k - f\|_p \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Por hipótesis, $f_n \overset{n}{\to} f$ en medida $\implies g_k \overset{k}{\to} f$ en medida $\boxed{\textbf{Ej.7.G.}}$

$\overset{\text{Teor. ant.}}{\Longrightarrow} \exists \{h_l\}$ subsucesión de $\{g_k\}$ y $\exists h$ medible: $h_l \overset{l}{\to} h$ c.t.p. y en medida

$\implies \{h_l\}$ subsucesión de $\{f_n\} \overset{\text{Ej.7.G.}}{\Longrightarrow} h_l \overset{l}{\to} f$ en medida $\overset{\text{Corol. ant.}}{\Longrightarrow} h = f$ c.t.p.

$\implies h_l \overset{l}{\to} f$ c.t.p. y, por hipótesis, $|h_l| \leq g \in L_p \quad \forall l \in \mathbb{N}.$

$\overset{\text{T.C.D. en } L_p}{\Longrightarrow} f \in L_p$ y $h_l \overset{l}{\to} f \in L_p$ $\rhd\!\!=\!\!\lhd$ Entonces, $f_n \to f$ en $L_p.$ ■

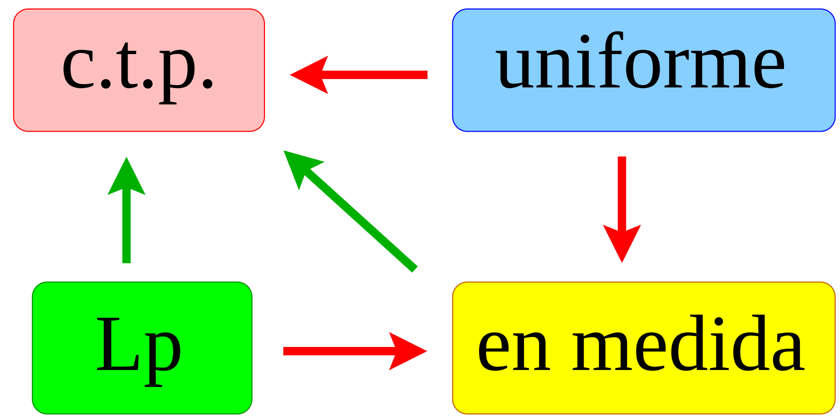
Diagramas de relaciones entre modos de convergencia.

Simbología

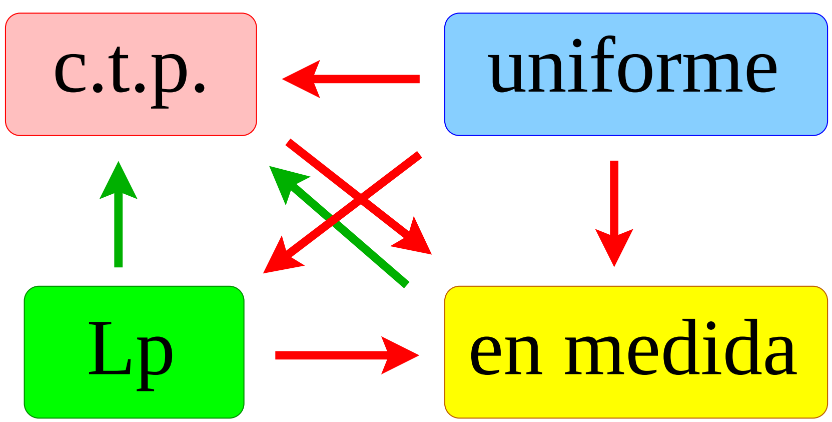
→ implica convergencia

→ implica convergencia de una subsucesión

Caso general



$\mu(X) < +\infty$



Convergencia dominada