UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PRÁCTICA 5: INTEGRACIÓN MULTIDIMENSIONAL
CÁLCULO III (525211)

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando el Teorema de Fubini.

Problema 2. Calcule, dibujando la región de integración, las siguientes integrales. Compruebe el resultado cambiando el orden de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2}\, dxdy$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\, dydx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\, dydx$

(e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 \left(x^2+2xy-3y^2\right) dydx$

(h) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2}\, dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \cos\left(x^3\right) dxdy$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} \left(\frac{1}{4+y^3}\right) dxdy$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{u^2}{2}}^2 u^3\, dzdudv$

Problema 3. Encontrar el volumen de los siguientes sólidos:

1. Debajo del plano $x - 2y + z = 1$ y arriba de la región acotada por la recta $x + y = 1$ y la curva $x^2 + y = 1$.

2. Debajo de la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región acotada por la recta $x = 4$ y la curva $y^2 = x$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 4. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones acotadas e integrables en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo. Demuestre utilizando las propiedades básicas de integrabilidad que:

$$\frac{1}{2}\int_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

Problema 5. Sea $R = \{0,1\} \cup \{-1,1\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $f(1,1) = 6$, $f(1,-1) = 3$, $f(0,1) = 1$ y $f(0,-1) = 2$. Calcular $\displaystyle\iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y)\; d(x,y)$.

Problema 6. Calcule, dibujando la región de integración, las siguientes integrales. Compruebe el resultado cambiando el orden de integración.

1. $\displaystyle\iint_D \left(xe^{-\frac{x^2}{y}}\right) d(x,y)$, con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 1 \leq y \leq 2,\, x^2 < y\right\}$.

2. $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\, d(x,y)$, con D la región acotada por las curvas $x = |y|$ y $x = 1$.

3. $\displaystyle\iint_D e^{\frac{-2y}{x}} d(x,y)$, con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq x^2\right\}$.

4. $\displaystyle\iint_D xy^2 d(x,y)$, con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right\}$.

5. $\displaystyle\iiint_D 3xy\; d(x,y,z)$, con D la región solida acotada por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

6. $\displaystyle\iiint_D x\; d(x,y,z)$, con D la región acotada por los ejes coordenados y el plano $3x + y + z = 2$.

Problema 7. Encontrar el volumen de los siguientes sólidos:

1. Debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo con vértices $(1,1), (4,1)$ y $(1,2)$.

2. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0, z = 0, x = y$ e $y = 1$.

3. $2x + 3y + 4z = 12$ y los semiplanos cartesianos del primer octante.

4. $z = 4 - x^2 - y^2$ y sobre el plano XY, es decir, con $z \geq 0$.

Problema 8. La siguiente suma de integrales representa la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre una region $\mathcal{S}$. Identifique $\mathcal{S}$ e invierta el orden de integración:

$$\left\{\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x}\right\} f(x,y)\, dydx$$