UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ayudantía 3
Análisis Real II (525302)
Medidas e Introducción a la Medida de Lebesgue

Alumno Ayudante: Jorge Aguayo Araneda.

En lo que sigue, si no se dice lo contrario, X es un conjunto y $\mathcal{X}$ es una σ-Álgebra sobre X.

Problema 1 Sean $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida y $A \in \mathcal{X}$. Se define la función $\lambda_A : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\forall E \in \mathcal{X})\ \lambda_A(E) = \mu(A \cap E)$$

Demuestre que λ_A es una medida.

Problema 2 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de medida y $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq [0, +\infty)$. Demuestre que la función $\lambda : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\forall E \in \mathcal{X})\ \lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(E)$$

es una medida.

Problema 3 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{X}$ tales que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \mu_n(X) = 1$. Demuestre que la función $\lambda : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\forall E \in \mathcal{X})\ \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E)$$

es una medida tal que $\lambda(X) = 1$.

Problema 4 Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty)$ y $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}$ una función dada por

$$(\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\ \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{n\in E} a_n & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$$

a) Demuestre que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ es un espacio de medida[1].

b) Demuestre que, para todo espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ puede escribirse con la misma descomposición anterior considerando una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty]$.

Problema 5 Sea X un conjunto no numerable y $\mathcal{X} = \left\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \sim \mathbb{N} \vee A^C \sim \mathbb{N}\right\}$, la cual es una $\sigma-$Álgebra sobre X. Demuestre que la función $\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\forall E \in \mathcal{X})\ \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \sim \mathbb{N} \\ +\infty & \text{si } A^C \sim \mathbb{N} \end{cases}$$

es una medida.

---

[1] Cuando $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = 1$, se obtiene la medida de contar o de conteo, la cual es la medida usual en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Definición 1 Sea $\mu : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ una función. Se dice que μ es *finitamente aditiva* si para toda familia finita de conjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{X}$, con $n \in \mathbb{N}$, se cumple que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Problema 6 Demuestre que la función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$(\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\ \ \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es finito} \\ +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$$

es finitamente aditiva, pero no constituye una medida.

Problema 7 Sean $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ y $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida

a) Demuestre que $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$

b) Demuestre que, si $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) < +\infty$, entonces $\limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n)$

c) Demuestre que, si $\mu(X) < +\infty$, entonces

$$\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n) \leq \limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n)$$

d) Si además existe $\lim E_n$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\lim(E_n))$.

e) Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo. Construya una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $\lim A_n = \emptyset$, pero tal que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) > 0$.

Problema 8 Sea $\mu : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ una función finitamente aditiva tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y, para toda sucesión creciente $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

Demuestre que μ es una medida.

Problema 9 Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{X}$ se dice *nulo* si y sólo si $\mu(A) = 0$. Sea $N_\mu = \{A \in \mathcal{X} \mid \mu(A) = 0\}$, demuestre que

a) $N_\mu \neq \emptyset$.

b) Si $A \in N_\mu$, $B \in \mathcal{X}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in N_\mu$.

c) N_μ es $\sigma-$Álgebra si y sólo si $\mu \equiv 0$.

Problema 10 Sean $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ un espacio de medida de Lebesgue y $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

[2] Se denota $A \sqcup B = A \cup B$ cuando $A \cap B = \emptyset$.

a) Demuestre que $\lambda(\{a\}) = 0$ y que la medida de todo conjunto numerable es 0.

b) Demuestre que $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b])$.

Problema 11 Sean $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ un espacio de medida de Lebesgue y $E, K \subseteq \mathbb{R}$ tales que E es abierto y K es compacto. Demuestre que

a) $\lambda(E) > 0$ si y sólo si $E \neq \emptyset$.

b) $\lambda(K) < +\infty$.

Problema 12 Sean $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ un espacio de medida de Lebesgue. Se define la sucesión $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como sigue

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 1] \\ E_1 &= E_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ E_2 &= E_1 \setminus \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right] \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ E_{n+1} &= E_n \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{3^{i+1} - 2}{3^{n+1}}, \frac{3^{i+1} - 1}{3^{n+1}}\right)\right] \end{aligned}$$

y el *conjunto de Cantor* como $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Demuestre que $\lambda(C) = 0$.

1° de Septiembre de 2014