Álgebra 1 (525140)
Listado 8
Problemas sobre *Capítulo 4: Funciones*
Profesores: Víctor Aros, Camilo Lacalle, Álvaro Guzmán,
Carlos Muñoz, Mauricio Ascencio, Felipe Vargas, Manuel Melo,
Luis Bello, Fernando Roldán, Diego Paredes, Mónica Selva, Felipe Sánchez.
DIM - CFM

Listado 8: Exponenciales y logaritmos

Este listado de problemas se ha dividido en cuatro secciones: problemas básicos, problemas intermedios, problemas avanzados y desafíos.

Los desafíos no se resolverán en clases ni en ayudantías. Son problemas cuyo nivel de complejidad es superior al esperado en este curso, inténtalos una vez que sepas resolver los problemas restantes.

Los problemas marcados con **(A)** serán resueltos en la ayudantía, propuestas de solución de los mismos serán publicadas cuando publiquemos el siguiente listado.

Te exhortamos a revisar frecuentemente la página Canvas del curso, revisar el material publicado en ella contribuirá a mejorar tu aprendizaje de los temas del curso.

1. Problemas básicos

1. Determine usando propiedades y definiciones, el valor de:

   (a) $\log 0,00001$.
   (b) $\log_{32}(\frac{1}{64})$.
   (c) $\log_3(\sqrt[5]{3})$.
   (d) $\log_5(\sqrt[3]{25})$.
   (e) $\log_{\frac{1}{2}}(32)$.
   (f) $\log_8(\frac{1}{16})$.

2. Determine el valor de x para cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $x = \log_4(16)$.
   (b) $x = \log_5(5)$.
   (c) $\log_{16}(x) = 4$.
   (d) $\log_2(x) = -\frac{1}{3}$.
   (e) $x = \log(\frac{1}{10})$.
   (f) $\log_x(9) = \frac{2}{3}$.

3. Escriba como un solo logaritmo, suponiendo que $a, b, x, y, z, w \in \mathbb{R}^+, a, b \neq 1$.

   (a) $\frac{1}{3}\log_3(64) - \frac{1}{2}\log_3(25) + 20\log_3(1)$.
   (b) $3\log_b(x) - \frac{1}{2}\log_b(yz)$.
   (c) $\log_b(y^2 - 1) - \log_b(y + 1)$.
   (d) $\log_3(7) + \log_3(7^2) + \log_3(7^3) - \log_3(7^6)$.
   (e) $\log_b(xyz) - 2\log_b(w)$.
   (f) $\log_b(x + 1) - \log_b(y + 1)$.
   (g) $\frac{1}{3}\log_a(y) - \frac{2}{5}\log_a(z)$.
   (h) $\ln(x^4 - 1) - \ln(x^2 + 1)$, $|x| > 1$.

2. Problemas intermedios

1. Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes ecuaciones.

   (a) $\sqrt[4]{a^{x-5}} = \sqrt[6]{a^{7x-3}} : \sqrt[6]{a^{43}}$.
   (b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x}\left(\dfrac{8}{3}\right)^{2x} = 2^{x-3}$.
   (c) $(3^x)^{x-4} = \frac{1}{27}$.
   (d) $2 \cdot 3^{x-1} + 3^{2x} = \frac{1}{3}$.
   (e) $2 \cdot 9^x = 3^x + 1$.
   (f) $\dfrac{25^{x+1} + 1}{5^x} = 10$.
   (g) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.
   (h) $4^x - 2^x = 2$.
   (i) $4 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0$.
   (j) **(A)** $25^x + 5 = 6 \cdot 5^x$.
   (k) $\log_2(x)(\log_2(x) + 1) = 2$.
   (l) **(A)** $\ln|x + 1| + \ln|x + 3| = \ln 8$.

(m) $2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}+2^{x+5}+2^{x+6}=61.$

2. Considere las siguientes funciones:

   (a) $f_1 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_1(x)=\ln(x^2-1)$.
   (b) $f_2 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_2(x)=\log_2(8-x^3)$.
   (c) $f_3 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_3(x)=\ln(||x|-1|-1)$.
   (d) $f_4 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_4(x)=e^{\sqrt{\log_3(x^2-4)}}$.
   (e) $f_5 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_5(x)=e^{\ln(x)}$.
   (f) $f_6 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_6(x)=\ln(e^x)$.
   (g) $f_7 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $f_7(x)=\dfrac{2^{2x}}{2^x-4}$.
   (h) $f_8 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_8(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

   - Determine el dominio de cada una de ellas.
   - Analice si son inyectivas. Justifique su respuesta.
   - Demuestre que f_1 y f_3 son funciones pares.
   - Restrinja dominio o codominio de f_2, f_5, f_6 de modo que la función resultante sea biyectiva y defina su inversa.

3. Sean $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ funciones definidas por

$$g(x)=\log_2(x-1), \qquad h(x)=x^2-x-5.$$

   Determine el dominio de g. Defina, si existen, las funciones $g \circ h$ y $\dfrac{g}{h}$.

4. Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\log_2(4x^2-8x+7)$. Determine el dominio de f y demuestre que la restricción de f a $[4,+\infty[$ es biyectiva. Defina la inversa de $f|_{[4,+\infty[}$ indicando dominio, codominio y ecuación.

5. Determine los valores de x, y para los que se satisfacen los siguientes sistemas de ecuaciones.

   (a) $\begin{cases} xy = 10^{10} \\ y^{\log x} = 10^{25}. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \\ \log_x(y-18) = 2. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2^x 2^{2y} = 32 \\ \dfrac{2^{3x}}{2^{5y}} = 16. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 228 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 95. \end{cases}$

6. Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple:

   (a) $\log_9\left(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right) < 0.$
   (b) $e^{3x}+2e^{2x}-8e^x \leq 0,$
   (c) $5^{x^2+3}\left(\dfrac{1}{25}\right)^x \geq \left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-3}.$
   (d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \leq 1,$
   (e) $2^x-2^{-x} \geq 3(1+2^{-x}).$
   (f) $\log_2(3x^2+x+1) > 0.$
   (g) **(A)** $\log_{1/5}(5x-6) \leq \log_{1/5}(x^2).$
   (h) $\log_{1/3}(x)+\log_{1/3}(x-4) < \log_{1/3}(2).$
   (i) **(A)** $-2+\log_5(4x+2) > \log_5(2-8x).$

7. Sean $a \in \mathbb{R}, a>0, a \neq 1$ y $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x)=\log_a\left(x^2+(a-2)x+a+1\right).$$

(a) Encuentre para qué valores de a se cumple que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) Suponga que $a = 3$. ¿Es f inyectiva? Justifique su respuesta.

(c) Suponga $a = 2$. Encuentre para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(x) = 1 + \log_2 |x+3|.$$

8. Considere las funciones $f :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ siguientes:

$$f(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right), \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(|x-1| - 1\right).$$

   (a) Determine el dominio de g.

   (b) Determine los valores de $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ para los cuales $f(x) \leq g(x)$.

9. Sea f la función definida por

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \sqrt{1 - \log_3(4 - x^2)} \end{aligned}$$

   (a) Determine el dominio y recorrido de f.

   (b) Muestre que f no es inyectiva.

   (c) Determine $A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ de modo que $g : A \to \mathrm{Rec}(f)$ con $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, sea biyectiva y defina su inversa.

10. **(A)** Sea f la función definida por

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} &\to [0, 1[\\ x \mapsto f(x) &= \sqrt{1 - e^{2x}} \end{aligned}$$

   (a) Determine el dominio de f.

   (b) Demuestre que f es biyectiva y defina su inversa.

11. Considere la función $f :]3, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \ln(x^2 - 9)$. Determine el recorrido de f y defina $f \circ f$.

12. Sean $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\log(x)}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 10^{e+x}$. Defina, si existen, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

13. Un mezclador disminuye la concentración de un soluto al 2 %, esto es, si x es la concentración del soluto antes de entrar al mezclador, entonces al salir ésta será de $m(x) = 0{,}02x$. Por otra parte, la intensidad de la luz que atraviesa un matraz depende de la concentración y de la solución que éste contiene según la función siguiente:

$$I(y) = I_0 e^{-10{,}2y}.$$

   Si vertemos en el matraz la solución que entrega el mezclador, ¿como varía la intensidad de la luz que lo atraviesa en función de la concentración del soluto antes de incorporarla al mezclador?

14. Bajo condiciones ambientales simples una población que habita un ambiente con un suministro de alimento constante y suficientemente alto evolucionará al equilibrio según la siguiente función:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}},$$

   donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento, $0 \leq P_0 \leq K$ es la población inicial (observa que es igual a $P(0)$) y K es la población máxima que puede sobrevivir con los recursos dados.

   (a) Si la población inicial es $P_0 = K/3$, ¿cuánto tarda en duplicarse la población? ¿Y si $P_0 = K/4$?

   (b) Entendiendo que el dominio de P es $[0, \infty[$, ¿Cuál es el recorrido de P?

(c) ¿Es P una función inyectiva? ¿Qué significa eso en términos de lo que representa?

15. Se efectuó un experimento para determinar los efectos del tiempo transcurrido sobre la memoria de una persona. Se pidió a las personas que vieran una fotografía que contenía muchos objetos diferentes. En distintos intervalos de tiempo después de esto, se les pedía que recordaran tantos objetos como pudieran. El estudio arrojó que la función de estimación de la memoria porcentual promedio es:

$$R(t) = 84 - 25\ln(t) \ \ , \ \ t \geq 1,$$

donde R es la memoria porcentual promedio y t es el tiempo medido en horas desde que se observó la fotografía.

(a) ¿Cuál es la memoria promedio 5 horas después de ver la fotografía?

(b) ¿En qué momento el porcentaje será del 35 %?

16. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del sismo con el área A a su alrededor afectada por el temblor:

$$R(A) = \frac{23}{10}\log(A + 34.000) - \frac{15}{2},$$

donde A está en millas cuadradas.

(a) Si el área afectada es de 30.000 millas cuadradas, ¿de qué magnitud es el temblor?

(b) Si la magnitud del temblor es de 7.5, ¿cuál es el área de la región afectada?

17. Suponga que posee P (millones de pesos) y abre con ellos una cuenta de ahorro que paga un $r\,\%$ de interés compuesto 2 veces al año. Entonces, al final de los primeros seis meses su ahorro habrá aumentado a

$$P + \frac{\kappa}{2}P = \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)P$$

millones de pesos si $\kappa = \frac{r}{100}$ y al final del año tendrá

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)P + \frac{\kappa}{2}\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)P = \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)^2 P$$

millones de pesos.

(a) ¿Cuánto dinero tendrá al final de un año si la cuenta paga un $r\,\%$ de interés compuesto 4 veces al año? ¿y si paga un $r\,\%$ de interés compuesto 8 veces al año?

(b) Escriba una función que dado un número natural n retorne cuánto dinero tendrá al final de n años si ahorra P (millones de pesos) con un $r\,\%$ interés compuesto mensualmente.

(c) Si usted ahorra 5 millones de pesos en una cuenta que paga un 6 % de interés compuesto mensualmente, ¿cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

(d) ¿Cuánto dinero usted debe depositar en una cuenta que pague un 6 % de interés compuesto mensualmente si al cabo de cinco años desea tener 20 millones de pesos?

3. Problemas avanzados

1. La función $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ con

$$q(t) = \frac{140}{1 + 9\exp_e(-0{,}165\,t)}$$

describe la cantidad de individuos de cierta especie t años después de haber sido introducida a un hábitat controlado.

(a) ¿Cuántos individuos de la especie se introdujeron inicialmente en el hábitat?

(b) ¿Cuántos individuos de la especie habrá 10 años después de haber sido introducida la especie en el hábitat controlado?

(c) Determine, si es posible, en qué momento la cantidad de individuos de la especie será igual a 200.

(d) ¿Es posible restringir dominio o codominio de q de modo que la función resultante tenga inversa? ¿Qué representa la inversa de la función resultante?

2. El Yodo 131 es un isótopo radioactivo que se utiliza en el tratamiento del cáncer de tiroides.

   Se ha comprobado experimentalmente que las sustancias radioactivas se desintegran de forma exponencial, es decir, si Y_0 es la cantidad inicial de Yodo 131 suministrada a un paciente, entonces

$$Y(t) = Y_0 \exp_e(-\alpha\, t)$$

   es su cantidad t días después. El número $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante que mide la tasa de desintegración del Yodo 131.

   (a) Determine α sabiendo que la vida media de Yodo 131 (días que demora en que se reduzca a la mitad la cantidad inicial de la sustancia) es 8,03 días.

   (b) Si a un paciente se le suministra una cantidad inicial de 100 milicurios de Yodo 131 y, sabiendo que a partir de 5 milicurios, la cantidad de Yodo 131 en el cuerpo ya no matará las células cancerígenas, ¿a partir de qué día el Yodo 131 en el cuerpo del paciente ya no es efectivo?

   (c) ¿Es posible determinar t de modo que la cantidad de Yodo 131 en el paciente sea igual a cero milicurios?

3. La función $T : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$T(t) = 70 + 130 \exp_e(-0{,}048555\, t)$$

   representa la temperatura, en grados Fahrenheit, de una taza de café t minutos después de haber sido sacada de un microondas.

   Responda las siguientes preguntas, justificando cada respuesta.

   (a) ¿Cuál es la temperatura de la taza recién salida del microondas?

   (b) La función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$c(f) = \frac{5}{9}(f - 32)$$

   describe la relación entre valores de temperatura en grados Fahrenheit (f) y grados Celsius c. Determine, si es posible, $c \circ T$. ¿Qué describe esta función?

   (c) ¿Cuántos minutos después de salir del microondas es la temperatura de la taza igual a la mitad de la temperatura con que salió del microondas?

   (d) Sabiendo que la temperatura de la taza nunca es inferior a la temperatura de la habitación donde se encuentra el microondas, ¿cuál es la temperatura de la habitación?

4. El voltaje durante la carga de un componente eléctrico (capacitor) está dado por:

$$V(t) = 5 \cdot \left(1 - \exp_e\left(\frac{-t}{60}\right)\right),$$

   donde t representa el tiempo, en segundos.

   Responda las siguientes preguntas, justificando cada respuesta rigurosamente.

   (a) ¿Cuál es el voltaje inicial del capacitor?

   (b) ¿Cuál será el voltaje una vez transcurrido un minuto de carga?

   (c) Determine cuántos segundos después de comenzar la carga el capacitor alcanza el 40 % de la carga máxima (5 V).

   (d) ¿Se cargará completamente el capacitor en algún momento? Si ocurre, determine cuándo.

5. **(A)** El pH de una solución corresponde a menos el logaritmo en base 10 de la concentración de iones H^+, es decir,
$$pH = -\log([H^+]),$$
donde $[H^+]$ es la cantidad de moles de H^+ por litro de disolución,
$$[H^+] = \frac{Cantidad\ de\ moles\ de\ H^+}{volumen\ en\ litros}.$$
Se tienen dos soluciones, 100 ml de la solución A con un pH de 5 y 100 ml de la solución B con pH 6.

Responda las siguientes preguntas, justificando cada respuesta rigurosamente.

(a) ¿En cuál de las dos soluciones hay más iones H^+?

(b) ¿Cuál es el pH de la solución que resulta de juntar y mezclar las soluciones A y B?

(c) Determine la cantidad de la solución A que se debe mezclar con la solución B para obtener una solución con pH 5.7.

4. Desafíos

1. Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{2024} \frac{1}{\log_i(2024!)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Observación: El símbolo $\sum$ se utiliza para indicar una suma. Para saber qué números se deben sumar exactamente es importante identificar:

- índice de la sumatoria: es i en el primero de los ejemplos anteriores y k en el segundo,
- límite inferior de la sumatoria, se especifica debajo del símbolo de sumatoria, en la primera suma de las anteriores el límite inferior es 2 y en la segunda es 1,
- límite superior de la sumatoria, se especifica encima del símbolo de sumatoria, en las dos sumas anteriores el índice superior es 2024.
- fórmula para los sumandos, es una función del índice, en el primer ejemplo es $\log_i(2024!)$ y en el segundo es $\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Por ejemplo, si deseamos escribir la suma $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{1000}$ con el símbolo de sumatoria debemos notar primero que si $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x}$, la suma anterior es la de los valores de f en $1,2,3,\ldots,1000$.

Podemos escribirla de la siguiente forma: $\sum_{x=1}^{1000} f(x) = \sum_{x=1}^{1000} \sqrt{x}$.