UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Álgebra IV: Introducción a las Matemáticas Discretas 525412
Duración: 24 horas
2 de noviembre de 2021
Prof.: C. Thraves Caro

Pauta Certamen 1

1. (**2.0 puntos**) Sea T un árbol. Demuestre que T tiene un vértice v tal que para toda arista $e \in E(T)$, la componente de $T-e$ que contiene a v tiene al menos $\lceil n(T)/2 \rceil$ vértices. Demuestre que tal vértice es único o que existen exactamente dos de ellos y son vecinos.

   Respuesta: *Sea T un árbol, luego toda arista e es de corte, y separa T en dos componentes conexas. Primero le daremos dirección a cada una de las aristas de T de la siguiente forma. Sea $e = \{u, v\}$ una arista en T tal que al borrar e de T la componente conexa que contiene a u contiene menos de la mitad de los vértices de T y la componente conexa que contiene a v contiene más de la mitad de los vértices de T. Entonces transformamos la arista $\{u, v\}$ en la arista (u, v), el arco que va dirigido de u a v. Notemos que puede existir una arista para la cual no se pueda definir una dirección ya que al borrarla separa T en dos componentes conexas de igual tamaño. Si existe esa arista es única y en dicho caso dejamos esa arista sin dirección. Notemos ademas que para cada hoja u de T, el grado de entrada es cero en el digrafo, ya que tienen una sola arista incidente en T y si suponemos que T tiene más de dos vértices, u siempre queda en la componente conexa con menos de la mitad de los vértices de T.*

   Sea P el camino dirigido de largo máximo en el digrafo. Notemos que dicho camino dirigido no puede usar la arista sin dirección, en caso que esta exista. Sea r el último vértice de P, dicho vértice existe porque T no tiene ciclos, por lo tanto el digrafo no tiene ciclos, y T es finito. Por lo tanto, el grado de salida de r es cero, o en otras palabras, si borramos cualquier arista incidente a r en T, la componente conexa que contiene a r tiene al menos la mitad de los vértices de T.

   Veremos que el ˇertice r es el vértice que estamos buscando. Para poder concluir esto, tenemos que ver que al borrar cualquier arista de T, la componente conexa que contiene a r tiene al menos la mitad de los vértices de T. Sea $\{u, v\}$ una arista de T. Supongamos que al borrar $\{u, v\}$, el vértice v se queda en la misma componente conexa que r, digamos en T_1. Luego existe un camino entre v y r en T_1, al recorrer dicho camino, la última arista es incidente a r, y al borrarla sabemos que deja a r en la componente con al menos la mitad de los vértices de T. Dicha componente está completamente contenida en T_1, por lo tanto T_1 tiene más de la mitad de los vértices de T, que es la componente donde queda r al borrar $\{u, v\}$. Lo que nos permite concluir que r cumple con la propiedad que estamos buscando.

   Ahora supongamos que existen dos vértices r y p en T que tienen la misma propiedad y esos dos vértices no son vecinos, es decir, el $r-p$-camino en T tiene largo mayor estricto que uno. Luego, existe un vértice k en dicho camino que tiene dos aristas incidentes a él en el camino. Si borramos cualquiera de esas dos aristas los vértices p y r se separan. Sea k_r y k_p los vecinos de k en el $r-p$-camino que están más cerca de r y de p, respectivamente (k_r y k_p podrían ser r y/o p). Sea T_r la componente conexa que contiene a r al borrar $\{k, k_r\}$, y sea T_p la componente conexa que contiene a p al borrar la misma arista. De la misma forma, sea T'_r la componente conexa que contiene a r al borrar $\{k_p, k\}$, y sea T'_p la componente conexa que contiene a p al borrar la misma arista. Entonces sabemos que:

   $$|V(T_r)| = |V(T_p)| = |V_(T'_r)| = |V(T'_p)| = |V(T)|/2.$$

   Sin embargo, T_r está contenido en T'_r y además k pertenece a T'_r y no pertenece a T_r, por lo tanto $|T_r| < |T'_r|$, lo que es una contradicción. Por lo tanto no pueden existir dos vértices no vecinos con la *misma propiedad. Finalmente, si tres o más, como deben ser vecinos, entonces esto genera un clique de tamaño tres o más, pero esto genera una contradicción ya que T es un árbol.*

2. (**2.0 puntos**) Dado los conjuntos finitos $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$, sea $U = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \cdots \times S_m$. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es igual a U, y dos vértices u y v en U son vecinos si y sólo si difieren en cada una de sus coordenadas. Determine $\chi(G)$.

   Sea G el grafo descrito en el enunciado. Primero daremos una cota inferior para $\chi(G)$ encontrando un clique en G. Ordenamos los elementos de cada conjunto S_i, y denotamos s_i^j al j-ésimo elemento de S_i. Sea $k = \text{mín}_i |S_i|$. Sea $K = \{(s_1^j, s_2^j, s_3^j, \ldots, s_m^j) \colon 1 \leq j \leq k\}$. El conjunto K tiene k elementos, y como no hay dos elementos de K que tengan una coordenada igual, entonces K es un clique. Por lo tanto tenemos que $k \leq \chi(G)$.

   Para cerrar la demostración daremos una cota superior para $\chi(G)$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $|S_1| = k$ (en caso de no serlo siempre podemos renombrar los conjuntos sin afectar a G. Definimos la siguiente partición de V. Sea $V_j = \{(v_1, v_2, \ldots, v_m) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \colon v_1 = s_1^j\}$. Es decir, V_j contiene a todos los vértices de G cuya primera coordenada es igual al j-ésimo elemento de S_1. De esta forma, cada V_j forma un conjunto independiente porque todos los elementos coinciden en la primera coordenada. Como estamos suponiendo que $|S_1| = k$, entonces dicha partición tiene k elementos. Para concluir, podemos colorear V usando un color para cada V_j y de esta forma $\chi(G) \leq k$, lo que nos permite concluir que $\chi(G) = k = \text{mín}_i |S_i|$.

3. (**2.0 puntos**) Demuestre que un digrafo conexo es fuertemente conexo si y sólo si todo arco pertenece a un ciclo dirigido.

   Respuesta: *Sea D un digrafo conexo tal que todos sus arcos pertenecen a un ciclo dirigido. Como D es conexo, para todo par de vértices u, v de D, existe un camino (no necesariamente dirigido) $u = v_1, v_2, \ldots, v_l = v$. Como todo arco vive en un ciclo dirigido, para todo i el arco que conecta los vértices v_i y v_{i+1} pertenece a un ciclo dirigido. Ese ciclo determina un camino dirigido que va de v_i a v_{i+1} y un camino que va de v_{i+1} a v_i. Uniendo esos caminos en el sentido correcto obtenemos un camino dirigido entre u y v, y otro entre v y u.*

   Sea D un grafo dirigido fuertemente conexo. Tomemos un arco (u, v), como D es fuertemente conexo, entonces existe un camino dirigido entre v y u. Al unir ese camino con el arco (u, v) obtenemos un ciclo dirigido.