Análisis Numérico III
Problemas de valores iniciales
de ecuaciones diferenciales ordinarias (Parte I)
Módulo 1, Presentación 2

Raimund Bürger

21 de marzo de 2022

1.2. Consistencia y convergencia

1.2.1 Métodos consistentes Queremos saber bajo qué condiciones los valores numéricos generados por un método de paso simple aproximan la solución exacta en los puntos de la malla, y queremos discutir la precisión de la aproximacón. Para tal efecto, estudiamos el problema

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_a, \tag{1.21}$$

y el método de paso simple

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{i+1}^h &= \boldsymbol{y}_i^h + h\boldsymbol{\Phi}\bigl(x_i, \boldsymbol{y}_i^h; h\bigr), \quad i = 0, \dots, N-1; \\ \boldsymbol{y}_0^h &= \boldsymbol{y}_a. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Los valores $\boldsymbol{y}_i^h$ son aproximaciones de los valores reales de la solución $\boldsymbol{y}(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, sólo si el sistema de ecuaciones de diferencias finitas (1.22), también es una aproximación del sistema de ecuaciones diferenciales (1.21).

1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo Consideremos el PVI

$$y' = f(x, y) = -2\lambda xy, \quad x > 0; \quad y(0) = 1,$$

con un parámetro $\lambda > 0$ y la solución exacta $y(x) = \exp(-\lambda x^2)$, y los siguientes métodos:

- el método de Euler explícito

$$y_{i+1}^h = y_i^h - 2h\lambda x_i y_i^h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \quad y_0^h = 1,$$

- el método de Euler implícito

$$y_{i+1}^h = y_i^h - 2h\lambda x_{i+1} y_{i+1}^h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \quad y_0^h = 1,$$

el cual puede ser escrito aquí como

$$y_{i+1}^h = \frac{y_i^h}{1 + 2h\lambda x_{i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \quad y_0^h = 1,$$

1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo (continuación)

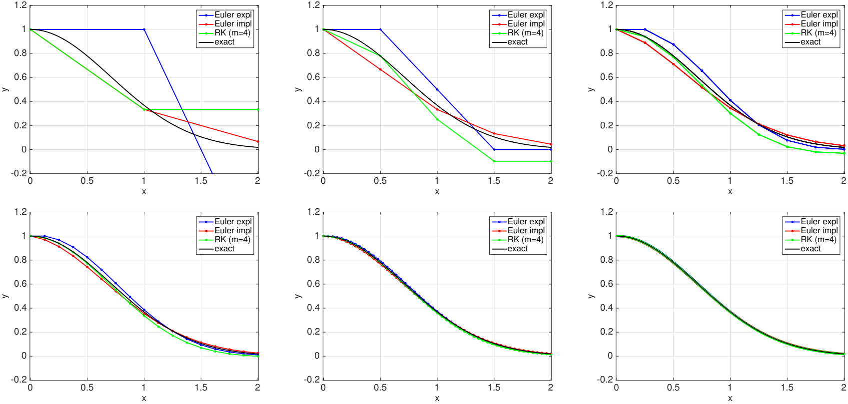
- y el método de Runge-Kutta clásico con $m = 4$ donde en cada paso se calcula

$$
\begin{aligned}
k_1^{(i)} &= -2\lambda x_i y_i^h, \\
k_2^{(i)} &= -2\lambda \left(x_i + \frac{h}{2}\right) \left(y_i^h + \frac{h}{2} k_1^{(i)}\right), \\
k_3^{(i)} &= -2\lambda \left(x_i + \frac{h}{2}\right) \left(y_i^h + \frac{h}{2} k_2^{(i)}\right), \\
k_4^{(i)} &= -2\lambda \left(x_i + h\right) \left(y_i^h + h k_3^{(i)}\right), \quad \text{luego} \\
y_{i+1}^h &= y_i^h + \frac{h}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)
\end{aligned}
$$

(para $i = 0, 1, 2, \ldots$; con $y_0^h = 1$.)

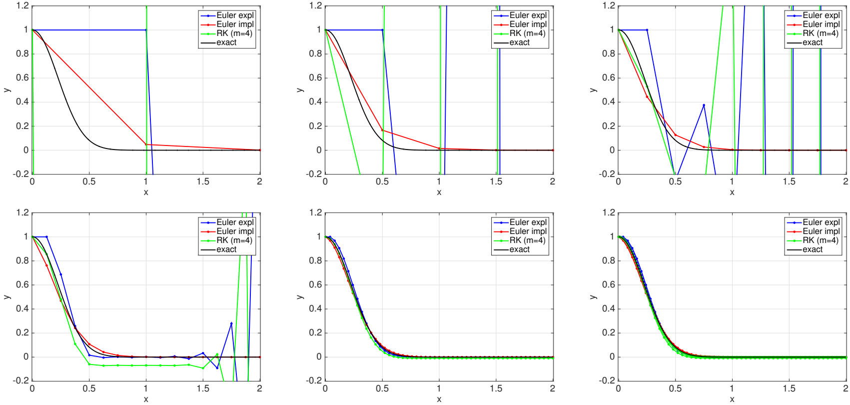
1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo (continuación) Para $\lambda = 1$, $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{25}$ y $\frac{1}{100}$:



1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo (continuación) Para $\lambda = 10$, $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{25}$ y $\frac{1}{100}$:



1.2. Consistencia y convergencia

Definición 1.1 Se dice que la función vectorial $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}; h)$ satisface la hipótesis de continuidad si $\boldsymbol{\Phi}$ depende de forma continua de sus $n+2$ argumentos escalares en

$$\mathcal{R}_{h_0} := \big\{(x, y_1, \dots, y_n, h) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid a \leqslant x \leqslant b,\\ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant h \leqslant h_0\big\},$$

donde h_0 es una constante suficientemente pequeña.

Definición 1.2 El esquema (1.22) se llama consistente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1.21) si

$$\boldsymbol{\Phi}(x, \boldsymbol{y}; 0) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad x \in [a, b], \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

En lo siguiente, se supone que el método definido por $\boldsymbol{\Phi}$ satisface la hipótesis de continuidad, y que es consistente.

1.2. Consistencia y convergencia

Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ es una solución exacta de $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{h}\big(\boldsymbol{y}(x+h) - \boldsymbol{y}(x)\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{h}\big(\boldsymbol{y}(x+h) - \boldsymbol{y}(x)\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) \right\} \\
&\quad - \big(\boldsymbol{y}'(x) - \boldsymbol{f}\big(x, \boldsymbol{y}(x)\big)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{h}\big(\boldsymbol{y}(x+h) - \boldsymbol{y}(x)\big) - \boldsymbol{y}'(x) \right\} \\
&\quad - \lim_{h\to 0} \left\{ \boldsymbol{\Phi}\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) - \boldsymbol{f}\big(x, \boldsymbol{y}(x)\big) \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces, cada solución del sistema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ satisface asintóticamente para $h \to 0$ el sistema de ecuaciones de diferencias finitas.

1.2. Consistencia y convergencia

Debido a la continuidad de

$$\varrho\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) := \frac{1}{h}\big(\boldsymbol{y}(x+h) - \boldsymbol{y}(x)\big) - \boldsymbol{\Phi}\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) \qquad (1.23)$$

con respecto a h para $h \to 0$, cada solución del sistema de EDOs es una solución aproximada del sistema de ecuaciones de diferencias (1.22). La cantidad $\varrho(x, \boldsymbol{y}(x); h)$ se llama error de truncación del método de paso simple.

Para obtener un método de gran precisión, se exige que para $h \to 0$, (1.23) desaparezca como h^p, con $p > 0$ lo más grande posible.

Definición 1.3 El método (1.22) se llama consistente del orden p si p es el mayor número positivo tal que para cada solución $\boldsymbol{y}(x)$ de $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ suficientemente diferenciable, y para todo $x \in [a, b]$

$$\varrho\big(x, \boldsymbol{y}(x); h\big) = \mathcal{O}\big(h^p\big) \quad \text{cuando } h \to 0. \qquad (1.24)$$

$\mathcal{O}(h^p)$: vector cuyos componentes son funciones de h, con norma acotada por Mh^p, M independiente de h. Un método consistente del orden p también se llama método del orden p.

1.2. Consistencia y convergencia

1.2.2 El orden de consistencia de algunos métodos de paso simple Consideremos $n = 1$, con f es suficientemente diferenciable.

Ejemplo 1.3 (Método de Euler explícito) Aquıtenemos

$$\varrho\big(x, y(x); h\big) = \frac{1}{h}\big(y(x+h) - y(x)\big) - \Phi\big(x, y(x); h\big).$$

Como

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= y(x) + hf\big(x, y(x)\big) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

resulta

$$\varrho\big(x, y(x); h\big) = \frac{1}{h}\big(y(x+h) - y(x)\big) - f\big(x, y(x)\big) = \mathcal{O}(h),$$

luego el método de Euler (es decir, el método de trazado poligonal) es de primer orden.

1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo 1.4 Consideremos la familia de métodos

$$\mathbf{\Phi}(x,\boldsymbol{y};h) = (1-c)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}) + c\boldsymbol{f}\left(x+\frac{h}{2c},\boldsymbol{y}+\frac{h}{2c}\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\right), \tag{1.25}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. el método de trazado poligonal mejorado con la representación explícita

$$\boldsymbol{y}_{i+1}^h = \boldsymbol{y}_i^h + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}\left(x_i,\boldsymbol{y}_i^h\right) + \boldsymbol{f}\left(x_{i+1},\boldsymbol{y}_i^h + h\boldsymbol{f}\left(x,\boldsymbol{y}_i^h\right)\right)\right];$$

para $c=1$ obtenemos el método del trazado poligonal modificado

$$\boldsymbol{y}_{i+1}^h = \boldsymbol{y}_i^h + h\boldsymbol{f}\left(x_i+\frac{h}{2},\boldsymbol{y}_i^h+\frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(x_i,\boldsymbol{y}_i^h\right)\right).$$

Para el análisis del error de truncación, volvemos al caso escalar:

$$\begin{aligned} & f\left(x+\frac{h}{2c},y+\frac{h}{2c}f(x,y)\right) \\ & = f(x,y) + \frac{h}{2c}\left(f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)\right) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

1.2. Consistencia y convergencia

Ejemplo 1.4 (continuación) Obtenemos el desarrollo del método en polinomio de Taylor (con respecto a h)

$$\begin{aligned}&\Phi\big(x, y(x); h\big)\\ &= f\big(x, y(x)\big) + \frac{h}{2}\Big(f_x\big(x, y(x)\big) + f_y\big(x, y(x)\big) f\big(x, y(x)\big)\Big) + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Desarrollando la solución exacta en polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\big(y(x+h) - y(x)\big)\\ &= f\big(x, y(x)\big) + \frac{h}{2}\Big(f_x\big(x, y(x)\big) + f_y\big(x, y(x)\big) f\big(x, y(x)\big)\Big) + \mathcal{O}(h^2),\end{aligned}$$

Usando la definición (1.23) del error de truncación, obtenemos

$$\varrho\big(x, y(x); h\big) = \mathcal{O}(h^2) \quad \text{cuando } h \to 0.$$

Para $c \neq 0$ todos los métodos son de segundo orden.

1.2. Consistencia y convergencia

Se puede demostrar analogamente que los esquemas de Heun y el método clásico de Runge-Kutta (con $m = 4$) son de los ordenes 3 y 4, respectivamente (Tarea).

1.2.3 El orden de convergencia A parte de la consistencia del método exigimos también que los valores $\boldsymbol{y}_i^h$ aproximen mejor los valores de la solución exacta $y(x_i)$ si se reduce el tamaño de paso h. Queremos que los valores $\boldsymbol{y}_i^h$ converjan a los valores exactos $\boldsymbol{y}(x_i)$ cuando $h \to 0$. Un método con esta propiedad se llama convergente.

Hay que tomar en cuenta que debido a

$$i = \frac{x_i - a}{h},$$

el número i crece cuando achicamos h.

1.2. Consistencia y convergencia

Definición 1.4 Un método de paso simple (1.22) se llama convergente en $x \in [a, b]$ si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ a+ih \to x \in [a,b]}} \left(\boldsymbol{y}_i^h - \boldsymbol{y}(x) \right) = 0.$$

Además, el método se llama convergente del orden p si

$$\boldsymbol{y}_i^h - \boldsymbol{y}(x) = \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

donde $\mathcal{O}(h)$ denota un vector cuyos componentes dependen de h.

Resulta que para los métodos de paso simple, la consistencia junto con la propiedad adicional que se especifica en la definición abajo asegura la convergencia.

1.2. Consistencia y convergencia

Definición 1.5 Se dice que una función $f = f(x,y)$ satisface una condición de Lipschitz o es Lipschitz continua en un dominio $[a,b] \ni x$ con respecto a $y \in I$ si existe una constante L (la constante de Lipschitz) tal que para todo $y^*, y^{**} \in I$ y $x \in [a,b]$,

$$\left| f(x,y^*) - f(x,y^{**}) \right| \leqslant L|y^* - y^{**}|.$$

Más generalmente, φ satisface una condición de Lipschitz en un dominio $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ con respecto a la variable x_k si

$$\begin{aligned} &\Big|\varphi\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{(1)}, x_{k+1}, \ldots, x_n\big) \\ &\quad - \varphi\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{(2)}, x_{k+1}, \ldots, x_n\big)\Big| \leqslant L\left|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}\right| \end{aligned}$$

para todo par $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{(i)}, x_{k+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{G}$, $i = 1, 2$.

Ahora se supone que Φ como función de x, y y h es Lipschitz continua con respecto a y. Precisamente, sea

$$\begin{aligned} &\left|\Phi(x,y^*;h) - \Phi(x,y^{**};h)\right| \leqslant L|y^* - y^{**}| \\ &\text{para todo } x \in [a,b],\ y^*, y^{**} \in \mathbb{R},\ \text{y } h \in [0,h_0]. \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.2. Consistencia y convergencia

Teorema 1.1 Consideremos un método de paso simple dado para $n = 1$ mediante la función $\Phi = \Phi(x, y; h)$. Supongamos que

(a) la función Φ satisface la hipótesis de continuidad (Definción 1.1),

(b) el método es consistente del orden p, y

(c) la función Φ satisface la condición de Lipschitz (1.26).

En este caso, el método converge del orden p.

Demostración

1. El método es especificado por

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h\Phi\bigl(x_i, y_i^h; h\bigr); \tag{1.27}$$

por otro lado, la suposición del orden de consistencia implica que la solución exacta $y = y(x)$ satisface

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Phi\bigl(x_i, y(x_i); h\bigr) + \mathcal{O}(h^{p+1}). \tag{1.28}$$

1.2. Consistencia y convergencia

Demostración del Teorema 1.1 (continuación)

2. Definiendo

$$\varepsilon_i := y_i^h - y(x_i),$$

restando (1.28) de (1.27) y tomando en cuenta que

$$\left|\mathcal{O}(h^{p+1})\right| \leqslant Mh^{p+1}$$

con una constante M que no depende de h, obtenemos

$$|\varepsilon_{i+1}| \leqslant |\varepsilon_i| + h\Big|\Phi\big(x_i, y_i^h; h\big) - \Phi\big(x_i, y(x_i); h\big)\Big| + Mh^{p+1}. \tag{1.29}$$

Utilizando la Lipschitz continuidad (1.26) y

$$\varepsilon_0 = y_0^h - y(x_0) = 0,$$

obtenemos de (1.29) la desigualdad de diferencias

$$|\varepsilon_{i+1}| \leqslant (1 + hL)|\varepsilon_i| + Mh^{p+1}, \quad |\varepsilon_0| = 0. \tag{1.30}$$

1.2. Consistencia y convergencia

Demostración del Teorema 1.1 (continuación)

3. Los valores ε_i satisfacen

$$|\varepsilon_i| \leqslant \eta_i, \quad i = 0, \dots, N, \tag{1.31}$$

donde los valores η_i, $i = 0, \dots, N$ son recursivamente definidos por la ecuación de diferencias

$$\eta_{i+1} = (1 + hL)\eta_i + Mh^{p+1}, \quad \eta_0 = 0. \tag{1.32}$$

(Podemos demostrar (1.31) por inducción, partiendo de $|\varepsilon_0| = \eta_0 = 0$; ahora si $|\varepsilon_i| \leqslant \eta_i$ para $i = 0, \dots, k$ con $h > 0$, (1.30) y (1.32) implican

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leqslant (1 + hL)|\varepsilon_k| + Mh^{p+1} \\ &\leqslant (1 + hL)\eta_k + Mh^{p+1} = \eta_{k+1}.) \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 1.1 (continuación)

4. El problema (1.32),

$$\eta_{i+1} = (1 + hL)\eta_i + Mh^{p+1}, \quad \eta_0 = 0,$$

es un problema de valores iniciales de una ecuación de diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes. Su solución es la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución de la ecuación homogénea $\bar{\eta}_{i+1} = (1 + hL)\bar{\eta}_i$ es

$$\bar{\eta}_i = C(1 + hL)^i = C \exp\bigl(i \ln(1 + hL)\bigr).$$

Planteo $\tilde{\eta}_i = \alpha = \mathrm{const.}$ para la ecuación no homogénea:

$$\alpha = (1 + hL)\alpha + Mh^{p+1} \Longleftrightarrow \alpha = -\frac{Mh^p}{L},$$

entonces la solución general de (1.32) es

$$\eta_i = \bar{\eta}_i + \tilde{\eta}_i = C(1 + hL)^i - \frac{Mh^p}{L}.$$

1.2. Consistencia y convergencia

Demostración del Teorema 1.1 (continuación)

4. usando

$$\eta_0 = 0 = C - \frac{Mh^p}{L}$$

obtenemos

$$\eta_i = \frac{Mh^p}{L}\big((1 + hL)^i - 1\big).$$

5. Finalmente

$$\begin{aligned} \left|y_i^h - y(x_i)\right| = |\varepsilon_i| \leqslant \eta_i &= \frac{Mh^p}{L}\big((1 + hL)^i - 1\big) \\ &\leqslant h^p \frac{M}{L}\big(\mathrm{e}^{iLh} - 1\big) \\ &\leqslant h^p \frac{M}{L}\big(\mathrm{e}^{L(b-a)} - 1\big) = \mathcal{O}(h^p). \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.2. Consistencia y convergencia

Lamentablemente es imposible acotar M, ni siquiera su orden de magnitud, en situaciones prácticas, asi que la desigualdad (1.33) es poco apta para estimar el error.

Definición 1.6 a función $\mathbf{\Phi} : \mathcal{R}_{h_0} \to \mathbb{R}^n$ satisface una condición de Lipschitz en $\mathcal{R}_{h_0}$ con respecto a $y_1, \ldots, y_n$ si la siguiente desigualdad es válida en $\mathcal{R}_{h_0}$ con una constante L:

$$\left\| \mathbf{\Phi}(x, \boldsymbol{y}; h) - \mathbf{\Phi}(x, \boldsymbol{y}^*; h) \right\|_2 \leqslant L \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \|_2. \tag{1.34}$$

Teorema 1.2 Consideremos un método de paso simple para $n \geqslant 1$ mediante la función vectorial $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(x, \boldsymbol{y}; h)$. Supongamos que

(a) la función $\mathbf{\Phi}$ satisface la hipótesis de continuidad,

(b) el método es consistente del orden p, y

(c) la función $\mathbf{\Phi}$ satisface la condición de Lipschitz (1.34).

En este caso, es método converge del orden p, o sea existe una constante C tal que

$$\left\| \boldsymbol{y}_i^h - \boldsymbol{y}(x_i) \right\|_2 \leqslant C h^p.$$