UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 6 ALGEBRA III 525201-1: Matriz representante. Valores y vectores propios. Diagonalización
Ejercicios a discutir en clases de ayudantía:

1. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, $D := \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ matriz diagonal. Demuestre que
   a) Si $B := (b_1 \,|\, b_2 \,|\, \cdots \,|\, b_p)$, entonces $A\,B = \Big(A\,b_1 \,|\, A\,b_2 \,|\, \cdots \,|\, A\,b_p\Big)$.
   b) Si $B := (b_1 \,|\, b_2 \,|\, \cdots \,|\, b_p)$, entonces $B\,D = \Big(\alpha_1\,b_1 \,|\, \alpha_2\,b_2 \,|\, \cdots \,|\, \alpha_p\,b_p\Big)$.
   c) Si además $m = p$, entonces $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Sean $B_1 := \{(1,2)\,,\,(1,0)\}$ y $B_2 := \{(a,b)\,,\,(c,d)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que la matriz de paso de B_1 a B_2 es $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los vectores que componen la base B_2.

3. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$, cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas respectivas es $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Determine la regla de correspondencia de T.
   b) Caracterice los elementos de $\mathrm{Ker}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.
   c) Determine una base de $\mathrm{Ker}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$, así como la nulidad y el rango de T.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definida por $T(x,y) := (a\,x + b\,y\,,\,c\,x + d\,y)$, con $a\,,b\,,c\,,d \in \mathbb{R}$ (parámetros fijos). Demuestre que si $(a-d)^2 + 4bc > 0$, entonces T es diagonalizable.

5. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, B_1 y B_2 bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $[\mathrm{Im}(T)]_{B_2} := \{[T(v)]_{B_2} \,:\, v \in \mathbb{R}^2\}$ es generado por $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ y $w_3 := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, siendo $a \in \mathbb{R}$.
   a) Determine una base de $\mathrm{Im}(T)$ y el rango de T, según los valores admisibles que puede tomar el parámetro a.
   b) Si $a = -2$ y $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es tal que $[p]_{B_2} := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, ¿pertenece p a $\mathrm{Im}(T)$? En caso afirmativo, expresar p como combinación lineal de la base de $\mathrm{Im}(T)$ correspondiente.

6. Determine si los siguientes endomorfismos son diagonalizables:
   a) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definido $\forall\, z \in \mathbb{C} \,:\, G(z) := \overline{z}$, considerando $\mathbb{C}$ un espacio vectorial real.
   b) $S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, definido por $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, S(x,y,z) := (y,z,x)$, considerando $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
   c) $E : \mathcal{P}_2(\mathcal{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definido por $\forall\, p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,:\, \forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, E(p)(t) := t\,p'(t) - p(t)$.

7. Sea $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k^2-1 & 6 & k^3+1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.
   a) Sabiendo que $\lambda = 6$ es raíz doble del polinomio característico de A, determinar para qué valores del parámetro k la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.
   b) Para los casos en que A es diagonalizable, determinar la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D correspondiente.

8. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, $\lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, distintos entre sí, y $T \in \mathcal{L}(V)$ que verifica: $T(v_1) = \lambda_1\,v_1$, $T(v_2) = \lambda_1\,v_2$, $T(v_3) = \lambda_2\,v_3$. ¿Será T diagonalizable? Justifique su respuesta. Además, resolver en V: $T(v) = (\lambda_1 + \lambda_2)\,v$, $T(v) = \theta$, $T(v) = 2\lambda_1\,v$.

9. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (infinito o finito dimensional), y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = T$. Determine $\sigma(T)$ y los espacios propios respectivos.

Ejercicios propuestos:

1. Sea $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ tal que $\forall\, p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $S(p) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ viene dada $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, S(p)(x) \,:=\, x\, p(x) \,+\, p(0)$. Considerando B_1 y B_2 las bases canónicas de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente:

   a) determine la matriz asociada a S.
   b) sea $p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definido por $\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, p(t) \,:=\, 2 \,-\, 5\,t$. Determine $S(p)$, y verifique la identidad que la relaciona con su vector de coordenadas y matriz asociada.
   c) caracterice los elementos de $\mathrm{Ker}(S)$ y de $\mathrm{Im}(S)$.
   d) determine una base de $\mathrm{Ker}(S)$ y de $\mathrm{Im}(S)$, así como la nulidad y el rango de S.

2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial finito dimensional, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que su matriz representante, respecto de cierta base $B \,:=\, \{v_1, v_2, v_3\}$, viene dada por:

$$a)\ A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c)\ A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \quad A := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine cuáles de las matrices anteriores conduce a afirmar que T es diagonalizable. En los casos afirmativos (precisando el cuerpo $\mathbb{K}$ de ser necesario), determine una base de $\mathbb{K}^{3\times 1}$ formada por vectores propios de A, y la matriz diagonal que es semejante a A.
   b) Para cada matriz A, y considerando sus valores propios, determine el valor de $\det(A)$, y decidir si T es automorfismo.

3. Diagonalizar, si es posible, la matriz siguiente $A := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -i & i & 1 \\ 1+i & -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix}$.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, con valores propios $1\,, -2\,, 0$ y correspondientes vectores propios, identificados por sus vectores de coordenadas, respecto de la base canónica, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine la definición de T.

5. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, definido por $p \mapsto T(p)$ donde $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, T(p)(x) \,:=\, (a - b + 4c) \,+\, (3a + 2b - c)x \,+\, (2a + b - c)x^2$, cuando $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) \,=\, a \,+\, bx \,+\, cx^2$.

   a) Considerando la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, determine la matriz que representa a T.
   b) Analice si T es o no diagonalizable. En caso de serlo, indique la base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ correspondiente.
   c) Considere $B_1 \,:=\, \{q_1, q_2, q_3\}$ otra base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, donde $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, q_1(x) \,:=\, 1 - x$, $q_2(x) \,:=\, 1 + x$, $q_3(x) \,:=\, x + x^2$. Determine $[T]_{B_1}^{B_1}$, de al menos dos formas distintas.

6. Sea $V \,:=\, \mathcal{C}(\mathbb{R})$, y $T \in \mathcal{L}(V)$, donde, para cada $f \in V$, $T(f) \in V$ viene definida $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, T(f)(x) \,:=\, \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Pruebe que T no posee valores propios.

7. Considere la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Evaluando A^2, A^3, etc., determine una expresión que indique el valor de A^m, para cualquier $m \in I\!N$. Deducir el valor de $(A \,+\, 2\, I_3)^m$, para $m \in I\!N$ arbitrario.

8. Para calcular $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A^m$, siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable, se procede de la siguiente manera. Primero, diagonalizar la matriz A, identificando la matriz que diagonaliza $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Tener en cuenta la propiedad $\forall\, m \in \mathbb{N} \,:\, A^m \,=\, P\, D^m\, P^{-1}$.
   Segundo, calcular $B \,:=\, \displaystyle\lim_{m\to+\infty} D^m$, y si existe entonces $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A^m \,=\, P\, B\, P^{-1}$.
   Aplique el procedimiento anterior a la matriz $A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\alpha \in \sigma(T)$. Considere $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, tal que $\forall\, t \in \mathbb{R} \,:\, p(t) \,:=\, \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, t^j$, con $\{\alpha_j\}_{j=0}^m \subseteq \mathbb{R}$. Esto induce la aplicación $p(T) \,:\, V \to V$, definida por $p(T) \,:=\, \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, T^j$, con la convención $T^0 \,:=\, \tilde{I}$. Demuestre que $p(T) \in \mathcal{L}(V)$ y $p(\alpha) \in \sigma(p(T))$.