LISTADO 2: OPTIMIZACIÓN 1
MÉTODO SIMPLEX

Ejercicio I Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$min \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$s.a \qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \ , x_2 \ , x_3 \ \geq 0$$

Resuelva llevando el problema a su forma estandar y utilizando la tabla del método SIMPLEX, resuelva:
Solución
Como el problema tiene 3 restricciones, introducimos 3 variables de holgura x_4, x_5, x_6
Escribimos el problema en su FORMA ESTANDAR:

$$min \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$s.a \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 4$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 6$$

$$x_1 \ , x_2 \ , x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6 \geq 0$$

Tabla de metodo SIMPLEX:
*observación: en la fila de z, anotamos los coeficientes de la función a minimizar con los signos cambiados y en la columna z va $(1\ 0\ 0\ 0)^T$
· tabla 1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	10
x_5	0	2	1	-1	0	1	0	4
x_6	0	-1	3	1	0	0	1	6

TEST DE OPTIMALIDAD
*observación: sirve para identificar cual es la columna donde se encontrara el pivot.

$$max_{1\leq j\leq 3}\{z_j - c_j > 0\} = 3 = z_3 - c_3$$

*observación: en este caso será la columna 3

CALCULO DE COCIENTE PARA ELECCION DE PIVOT
*observación: sirve para saber cual sera la fila de nuestro pivot, ya que con el test de optimalidad ya sabemos cual es la columna

$$min\{\frac{x_i}{\alpha_{i3}} : \alpha_{i3} > 0\} = min\{\frac{x_4}{\alpha_{43}}, \frac{x_6}{\alpha_{63}}\} = min\{\frac{10}{1}, \frac{6}{1}\} = 6$$

*observación: la primera restricción es que nuestro supuesto "pivot"debe ser positivo, asi α_{53} queda fuera ya que es -1
Luego tomamos los componentes de la columna LD y lo dividimos por el componente de esa fila y de la columna 3 en este caso. Finalmente se escoge el minimo valor para pivot.

Nuestro pivot sera $\alpha_{63} = 1$

ENTRA x_3 Y SALE EL x_6
*observación: entra la componente de la columna del pivot (x_3) y sale la componente de la fila del pivot (x_6), es decir en lugar del x_6 se cambia por un x_3

*observación: Recordar que debemos convetir en 0 todos los valores de la columna del pivot y el pivot debe ser 1, para esto realizamos:

OPERACIONES POR FILA

Antes de comenzar definimos F4 como la fila de x_4, F5 la fila de x_5 y F6 como la fila de x_6

F4 - 1*F6

columna x_1: 1 - (1 * -1) = 2
columna x_2: 1 - (1 * 3) = -2
columna x_3: 1 - (1 * 1) = 0
columna x_4: 1 - (1 * 0) = 1
columna x_5: 0 - (1 * 0) = 0
columna x_6: 0 - (1 * 1) = -1
columna LD: 10 - (1 * 6) = 4

F5-F6:

columna x_1: 2 - (-1 * -1) = 1
columna x_2: 1 - (-1 * 3) = 4
columna x_3: -1 - (-1 * 1) = 0
columna x_4: 0 - (-1 * 0) = 0
columna x_5: 1 - (-1 * 0) = 1

columna x_6: 0 - (-1 * 1) = 1
columna LD: 4 - (-1 * 6) = 10

FZ-F6:

columna x_1: 2 - (-3 * -1) = -1
columna x_2: 1 - (-3 * 3) = 10
columna x_3: -3 - (-3 * 1) = 0
columna x_4: 0 - (-3 * 0) = 0
columna x_5: 0 - (-3 * 0) = 0
columna x_6: 0 - (-3 * 1) = 3
columna LD: 0 - (-3 * 6) = 18
Asi queda nuestra tabla 2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	1	-10	0	0	0	-3	-18
x_4	0	2	-2	0	1	0	-1	4
x_5	0	1	4	0	0	1	1	10
x_3	0	-1	3	1	0	0	1	6

*observación: recordar cambiar el x_6 por el x_3
Realizamos nuevamente el :
TEST DE OPTIMALIDAD

$$max_{j=1,2,6}\{z_j - c_j > 0\} = max\{1, -10, -3\} = 1 = z_1 - c_1$$

*observación: nuestro pivot estara en la columna x_1

CALCULO DE COCIENTE PARA ELECCION DE PIVOT

$$min\{\frac{x_i}{\alpha_{i1}} : \alpha_{i1} > 0\} = min\{\frac{x_4}{\alpha_{41}}, \frac{x_5}{\alpha_{51}}\} = min\{\frac{4}{2}, \frac{10}{1}\} = 2$$

*observación: dejamos fuera a α_{31} ya que es -1 (negativo)
nuestro pivot sera $\alpha_{41} = 2$

ENTRA x_1 Y SALE EL x_4

OPERACIONES POR FILA Fila pivote *observación: una buena forma de comenzar nuestras operacionespor fila es hacer nuestro pivot igual a 1 (en la tabla 1 no fue necesario porque el pivot ya era 1):
F4 =>F4/2:
columna x_1: 2 / 2 = 1
columna x_2: -2 / 2 = -1
columna x_3: 0 / 2 = 0
columna x_4: 1 / 2 = 0.5
columna x_5: 0 / 2 = 0
columna x_6: -1 / 2 = -0.5
columna LD: 4 / 2 = 2

F5 =>F5-1*F1:

columna x_1: 1 - (1 * 1) = 0
columna x_2: 4 - (1 * -1) = 5
columna x_3: 0 - (1 * 0) = 0
columna x_4: 0 - (1 * 0.5) = -0.5
columna x_5: 1 - (1 * 0) = 1
columna x_6: 1 - (1 * -0.5) = 1.5
columna LD: 10 - (1 * 2) = 8

F3 =>F3- (-1)*F4:

columna x_1: -1 - (-1 * 1) = 0
columna x_2: 3 - (-1 * -1) = 2
columna x_3: 1 - (-1 * 0) = 1
columna x_4: 0 - (-1 * 0.5) = 0.5
columna x_5: 0 - (-1 * 0) = 0
columna x_6: 1 - (-1 * -0.5) = 0.5
columna LD: 6 - (-1 * 2) = 8

FZ =>FZ-(-1)*F4:

columna x_1: -1 - (-1 * 1) = 0
columna x_2: 10 - (-1 * -1) = 9
columna x_3: 0 - (-1 * 0) = 0
columna x_4: 0 - (-1 * 0.5) = 0.5
columna x_5: 0 - (-1 * 0) = 0
columna x_6: 3 - (-1 * -0.5) = 2.5
columna LD: 18 - (-1 * 2) = 20
*observación: cambiarle los signos a la fila z al escribirlos en la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	-9	0	-1/2	0	-5/2	-20
x_1	0	1	-1	0	1/2	0	-1/2	2
x_5	0	0	5	0	-1/2	1	3/2	8
x_3	0	0	2	1	1/2	0	1/2	8

Observamos que $z_j - c_j < 0 \; \forall j = 2, 4, 6$ (son negativos) por esto obtenemos una unica solucion factible basica optima $x = (2, 0, 8, 0, 8, 0)$ y la funcion objetivo = -20
*observación: los valores que sobrevivien en la solución factible basica son los $x_x$que entran y son 0 los valores x_x que salen, por eso es importanto ir cambiandolos cada vez, para llevar el orden correcto y llegar a la solución correcta.

Ejercicio II Resolver el problema siguiente usando la tabla del simplex:

$$min \;\; 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$$

$$s.a \;\; 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

Determinar una solución factible donde el valor de la función objetivo no sea superior a -5000

<u>Solución</u> Introducir 3 variables de holgura ya que hay 3 restricciones:
FORMA ESTANDAR

$$min \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$
$$s.a \quad 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_{5+0x_6+0x_7} = 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 = 10$$
$$-x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 = 3$$
$$x_1\ , x_2\ , x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$$

Tabla de metodo SIMPLEX

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-3	2	-1	1	0	0	0	0
x_5	0	2	-3	-1	1	1	0	0	8
x_6	0	-1	2	2	-3	0	1	0	10
x_7	0	-1	1	-4	1	0	0	1	3

TEST DE OPTIMALIDAD

$$max_{1\leq j\leq 4}\{z_j - c_j > 0\} = 2 = z_2 - c_2$$

*observación: el pivot esta en la columna 2
CALCULO DE COCIENTE PARA ELECCION DE PIVOT

$$min\{\frac{x_i}{\alpha_{i2}} : \alpha_{i4} > 0\} = min\{\frac{x_6}{\alpha_{62}}, \frac{x_7}{\alpha_{72}}\} = min\{\frac{10}{2}, \frac{3}{1}\} = 3$$

nuestro pivot sera $\alpha_{72} = 1$

ENTRA x_2 Y SALE EL x_7(entra la columna del pivot y sale la fila del pivot)

OPERACIONES POR FILA

F5 =>F5 - (-3)*F7:
columna x_1: 2 - (-3 * -1) = -1
columna x_2: -3 - (-3 * 1) = 0
columna x_3: -1 - (-3 * -4) = -13
columna x_4: 1 - (-3 * 1) = 4
columna x_5: 1 - (-3 * 0) = 1
columna x_6: 0 - (-3 * 0) = 0
columna x_7: 0 - (-3 * 1) = 3
columna LD : 8 - (-3 * 3) = 17

F6 =>F6 - 2*F7 :

columna x_1: -1 - (2 * -1) = 1
columna x_2: 2 - (2 * 1) = 0
columna x_3: 2 - (2 * -4) = 10
columna x_4: -3 - (2 * 1) = -5
columna x_5: 0 - (2 * 0) = 0
columna x_6: 1 - (2 * 0) = 1
columna x_7: 0 - (2 * 1) = -2
columna LD: 10 - (2 * 3) = 4

FZ =>FZ - (-2)*F7:
columna x_1: 3 - (-2 * -1) = 1
columna x_2: -2 - (-2 * 1) = 0
columna x_3: 1 - (-2 * -4) = -7
columna x_4: -1 - (-2 * 1) = 1
columna x_5: 0 - (-2 * 0) = 0
columna x_6: 0 - (-2 * 0) = 0
columna x_7: 0 - (-2 * 1) = 2
columna LD : 0 - (-2 * 3) = 6
*observación: recordar cambiar los signos de la fila Z

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-1	0	7	-1	0	0	-2	-6
x_5	0	-1	0	-13	4	1	0	3	17
x_6	0	1	0	10	-5	0	1	-2	4
x_2	0	-1	1	-4	1	0	0	1	3

TEST DE OPTIMALIDAD

$$max_{j=1,3,4,7}\{z_j - c_j > 0\} = 7 = z_3 - c_3$$

*observación: el pivot esta en la columna 3
CALCULO DE COCIENTE PARA ELECCION DE PIVOT

$$min\{\frac{x_i}{\alpha_{i3}} : \alpha_{i3} > 0\} = min\{\frac{4}{10}\} = \frac{2}{5}$$

nuestro pivot sera $\alpha_{63} = 10$

ENTRA x_3 Y SALE EL x_6

OPERACIONES POR FILA:
F3 =>F3 /10
columna x_1:1 / 10 = 1/10
columna x_2:0 / 10 = 0
columna x_3:10 / 10 = 1
columna x_4:-5 / 10 = -0.5

columna x_5:0 / 10 = 0
columna x_6:1 / 10 = 0.1
columna x_7:-2 / 10 = -0.2
columna LD :4 / 10 = 0.4

F5 =>F5 - (-13)*F3:

columna x_1:-1 - (-13 * 1/10) = 3/10**
columna x_2:0 - (-13 * 0) = 0
columna x_3:-13 - (-13 * 1) = 0
columna x_4:4 - (-13 * -0.5) = -5/2
columna x_5:1 - (-13 * 0) = 1
columna x_6:0 - (-13 * 0.1) = 1.
columna x_7:3 - (-13 * -0.2) = 0.4
columna LD: 17 - (-13 * 0.4) = 22.2

F2 =>F2 - (-4) *F3:

columna x_1:1 - (-4 * -0.3) = -0.2
columna x_2:1 - (-4 * 0) = 1
columna x_3:-4 - (-4 * 1) = 0
columna x_4:1 - (-4 * -0.5) = -1
columna x_5:0 - (-4 * 0) = 0
columna x_6:0 - (-4 * 0.1) = 0.4
columna x_7:1 - (-4 * -0.2) = 0.2
columna LD: 3 - (-4 * 0.4) = 4.6

FZ =>FZ - (-7)*F3:

columna x_1:5 - (-7 * -0.3) = 2.9
columna x_2:0 - (-7 * 0) = 0
columna x_3:-7 - (-7 * 1) = 0
columna x_4:1 - (-7 * -0.5) = -2.5
columna x_5:0 - (-7 * 0) = 0
columna x_6:0 - (-7 * 0.1) = 0.7
columna x_7:2 - (-7 * -0.2) = 0.6
columna LD :6 - (-7 * 0.4) = 8.8

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-17/10	0	0	5/2	0	-7/10	-3/5	-44/5
x_5	0	-17/10	0	0	-5/2	1	-13/10	2/5	111/5
x_3	0	1/10	0	1	-1/2	0	1/10	-1/5	2/5
x_2	0	-6/10	1	0	-1	0	2/5	1/5	23/5

TEST DE OPTIMALIDAD

$$max_{j=1,4,6,7}\{z_j - c_j > 0\} = 5/2 = z_4 - c_4$$

CALCULO DE COCIENTE PARA ELECCION DE PIVOT

$$min\{\frac{x_i}{\alpha_{i3}} : \alpha_{i3} > 0\} =$$

Revisamos el teorema 3.13 la parte b), la funcion objetivo decrece indefinidamente a lo largo de la semirecta:

$$\{(0, 23/5, 2/5, 0, 111/5, 0, 0) + t(0, 1, 1/2, 1, 5/2, 0, 0) : t > 0\}$$

en las varaibles originales:

$$\{(0, 23/5, 2/5, 0) + t(0, 1, 1/2, 1) : t > 0\}$$

nuestra semirecta queda: $y_y = (0, 23/5, 2/5, 0,) + t(0, 1, 1/2, 1)$ se tiene que y satisface llas restricciones
Determinamos el valor de t para $c^T y_t \leq -5000$

$$c^T y_t = (3 \ \ -2 \ 1 \ \ -1)y_t = -\frac{44}{5} - \frac{5}{2}t$$

para despejar t

$$-5000 \leq -\frac{44}{5} - \frac{5}{2}t$$
$$\frac{5}{2}t \geq -\frac{44}{5} + 5000$$
$$t \geq \frac{2}{5}(\frac{-44 + 25000}{5})$$
$$t \geq \frac{49912}{25} = 1996, 48$$

elegimos t =2000, una solucion factible es:

$$(0, \frac{10023}{5}, \frac{5002}{5}, 2000)$$

Concepción, 2 de junio de 2021
FFB/JGL/CVC/jgl/cvc