Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

# Análisis Numérico II

(Código 525441)

**Tarea no. 1 — martes 10 de abril de 2018**

Plazo de entrega: viernes 20 de abril de 2018, 12.15 horas

**Problema 1.** Determinar los valores propios, las multiplicidades geométricas y algebraicas respectivas, y los espacios propios correspondientes de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -6 \\ 9 & -7 & -3 \\ 9 & -3 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 4 & 4 \\ -5 & 15 & 5 & 5 \\ -7 & -2 & 28 & 3 \\ -7 & -2 & 3 & 28 \end{bmatrix}.$$

**Problema 2.**

a) Demostrar la *fórmula de Sherman-Morrison*: si $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz dada por $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$, donde $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal invertible y $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x} \neq -1$, entonces también $\boldsymbol{M}$ es invertible, y

$$\boldsymbol{M}^{-1} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{D}^{-1} - (1 + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}.$$

b) Utilizar el resultado de (a) para determinar la inversa de la matriz

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Problema 3.**

a) Calcular una descomposición triangular $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LR}$, con búsqueda de pivote en la matriz restante, de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

b) Utilizando la descomposición de (a), calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$.

c) Resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (25, -6, -22, -24)^{\mathrm{T}}$.

**Problema 4.** Se considera el sistema lineal $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ dado por

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 7 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 5 & 9 \\ 4 & -6 & 4 & 18 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 14 \\ -19 \\ 24 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

a) Ejecutando el algoritmo de Gauss sin búsqueda del pivote, determinar una descomposición $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LR}$ y resolver el sistema $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.
b) Aprovechando la descomposición $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LR}$ calculada en (a), resolver también el sistema $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{b}}$ con $\tilde{\boldsymbol{b}}=(38,-101,87,144)^{\mathrm{T}}$.

**Problema 5.** Se considera el sistema lineal $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 1000 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1031 \end{pmatrix}.$$

Resuelve el sistema usando una aritmética con cuatro dígitos significantes, usando el algoritmo de Gauss (a) sin estrategia de pivote y (b) con búsqueda del pivote en la columna. Interpretar los resultados y comparar con la solución exacta (perteneciente a $\mathbb{Z}^3$).

Se recomienda usar la representación científica de los números, por ejemplo

$$\begin{aligned} 1234.567 &\longrightarrow 1.234567\times 10^3 \longrightarrow \texttt{1.235E}+\texttt{3} \\ 0.000654321 &\longrightarrow 6.5432\times 10^{-4} \longrightarrow \texttt{6.543E}-\texttt{4}. \end{aligned}$$

Transformar cada resultado intermedio a esta forma y redondear hasta el último dígito. Ojo: Internamente, las calculadoras usan una exactitud mayor que la desplegada en la pantalla.

**Problema 6.** Sean

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Usando el algoritmo de la descomposición de Cholesky, calcular hasta una decimal

$$t_0 := \min\bigl\{t\in\mathbb{R} : \boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I} \text{ es definida positiva}\bigr\}. \tag{3}$$

**Problema 7.**

a) Demostrar que la siguiente cantidad *no* define una norma vectorial para $0<p<1$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

b) Sea $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\|\boldsymbol{A}\|_1$ y $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ estan efectivamente dadas por (3.7) y (3.9), respectivamente.
c) Demostrar o refutar: la norma matricial de Frobenius (3.10) sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$ es compatible con las normas vectoriales (i) $\|\cdot\|_\infty$, (ii) $\|\cdot\|_1$, (iii) $\|\cdot\|_2$.