

ALGEBRA III (525201)
Ayudantía 5

1. Sea E un conjunto no vacío y \mathcal{R} una relación refleja y transitiva en E . Se define la relación \sim por:

$$\forall a, b \in E, a \sim b \iff a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a$$

- a) Probar que \sim es relación de equivalencia.
- b) Probar que si $a' \in [a]_\sim$ y $b' \in [b]_\sim$, entonces $a\mathcal{R}b \iff a'\mathcal{R}b'$.
- c) Considere la relación \mathcal{R}^* definida en E/\sim como sigue:

$$\forall [a]_\sim, [b]_\sim \in E/\sim, [a]_\sim \mathcal{R}^* [b]_\sim \iff a\mathcal{R}b$$

Pruebe que \mathcal{R}^* está bien definida y es una relación de orden en E/\sim .

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} , y $\{W_i\}_{i \in \Omega}$ una familia de subespacios de V . Demuestre que $\bigcap_{i \in \Omega} W_i$ es un subespacio de V .
3. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y V_p, V_i , los subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones pares e impares respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} V_p &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}, \\ V_i &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x)\} \end{aligned}$$

- a) Demuestre que V_p y V_i son espacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - b) Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_p + V_i$, ¿es esta suma directa?
4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- a) Demuestre que si U es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , entonces

$$A(U) := \{Ax : x \in U\}$$

es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

- b) Demuestre que si U y W son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n tales que $U \oplus W = \mathbb{R}^n$ y A es invertible, entonces $A(U) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.
- c) Demuestre que si U y W son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n tales que $U \oplus W = \mathbb{R}^n$ y $A(U) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, entonces A es invertible.