UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales II (525222)
Listado Nº 7 (Transformadas de Fourier)

PROBLEMAS A RESOLVER EN PRACTICA

Se podrá usar en lo que sigue el siguiente teorema sobre derivación de integrales dependiendo de un parámetro.

Teorema: *Sean $I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R}$ dos intervalos de $\mathbb{R}$, que pueden ser no acotados, y $g : I \times J \to \mathbb{C}$ una función de dos variables que satisface*

(i) $\forall\, \omega \in J$, $t \mapsto g(t,\omega)$ *es CPT en cualquier subintervalo compacto* $\subset I$ *e integrable sobre* I*;*

(ii) $\forall\, t \in I$, $\omega \mapsto g(t,\omega)$ *es de clase* C^1 *en* J*;*

(iii) $\forall\, \omega \in J$, $t \mapsto \partial_\omega g(t,\omega)$ *es CPT en cualquier subintervalo compacto* $\subset I$*;*

(iv) *existe* $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ *CPT en cualquier subintervalo compacto* $\subset I$ *e integrable sobre* I *tal que* $|\partial_\omega g(t,\omega)| \leq \varphi(t) \ \ \forall\, (t,\omega) \in I \times J$.

Luego $G : \omega \mapsto \int_I g(t,\omega)\,\mathrm{d}t$ *es de clase* C^1 *sobre* J *y*

$$G'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_I g(t,\omega)\,\mathrm{d}t = \int_I \partial_\omega g(t,\omega)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. **(Una propiedad de la transformada de Fourier).**
Suponga que f es CPT en cualquier intervalo compacto de $\mathbb{R}$, integrable sobre $\mathbb{R}$ y tal que $h(t) = t f(t)$ es integrable sobre $\mathbb{R}$. Muestre que

$$\widehat{h}(\omega) = \mathrm{i}\,\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) \ \ \forall\, \omega \in \mathbb{R}\,.$$

2. **(Transformada de Fourier de una función gaussiana).**

   (a) Usando el resultado del Problema 1, determine una ecuación diferencial para la transformada de Fourier $\widehat{f}$ de la función gaussiana

   $$f(t) = \mathrm{e}^{-at^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ , \tag{1}$$

   donde $a > 0$.

   (b) Deduzca que la TF de la función gaussiana (1) es la función gaussiana

   $$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\ . \tag{2}$$

   Indicación: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

(c) Compruebe que $f(t)$ y $\widehat{f}(\omega)$ satisfacen la relación de Parseval.

3. **(Fenómeno de Gibbs para transformadas de Fourier.)**
Considere la función
$$f(t) = \begin{cases} \pi & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$
con $t_0 > 0$.

(a) Determine la TF $\widehat{f}(\omega)$ de $f(t)$.

(b) Muestre que $f(t) = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathrm{f}}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\, \mathrm{d}\omega$ si $t \neq t_0, -t_0$. Deduzca que $\int_0^\infty \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v = \pi/2$.

(c) Para $a > 0$, sea
$$f_a(t) = \int_{-a}^{a} \widehat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega \ .$$
Muestre que
$$f_a(t) = \varphi_a(t_0 + t) + \varphi_a(t_0 - t) \quad \text{con} \quad \varphi_a(u) = \int_0^{au} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v \ .$$

(d) Deduzca que existe un valor $t_1(a) < t_0$ tal que $\lim_{a\to\infty} t_1(a) = t_0$ y $\lim_{a\to\infty} f_a(t_1(a)) \simeq 1.09\pi$ supera de 9% el valor $f(t_0-) = \pi$. De manera similar, muestre que existe $t_2(a) > -t_0$ tal que $\lim_{a\to\infty} t_2(a) = -t_0$ y $\lim_{a\to\infty} f_a(t_1(a)) \simeq 1.09\pi$.
Indicación: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v \simeq 1.18\pi$.

4. **(Resolución de una EDO lineal no homogenea).**
Considere la EDO
$$-y''(t) + k^2 y(t) = f(t) \,, \tag{3}$$
donde $f(t)$ es una función integrable sobre $\mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ es una constante. Tomando la TF de los dos miembros de (3) y usando que la TF inversa de $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+k^2}$ es $g(t) = \frac{\pi}{k}\mathrm{e}^{-k|t|}$, determine una solución particular de (3).

5. **(Resolución del PVIF para una cuerda vibrante infinita).**
Considere el PVIF modelando una cuerda vibrante infinita
$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x,t) - c^2 \partial_x^2 y(x,t) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ y(x,0) = f(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \\ \partial_t y(x,0) = g(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \end{cases}$$
donde las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son respectivamente de clase C^2 y C^1 y son integrables sobre $\mathbb{R}$.
Resolver este PVIF usando el método de la transformada de Fourier.

PROBLEMAS PARA EL ESTUDIANTE

6. Para $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, considere la función

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n \, \mathrm{e}^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

   Muestre que $f_n(t)$ es integrable sobre $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Determine la TF $\widehat{f_0}(\omega)$ de $f_0(t)$.
   Use la propiedad del Problema 1 para deducir la TF $\widehat{f_n}(\omega)$ de $f_n(t)$ para $n \geq 1$.
   ¿ Para que valores de n la TF $\widehat{f_n}(\omega)$ es integrable sobre $\mathbb{R}$?
   ¿ Para que valores de n la función $f_n(t)$ es continua en $\mathbb{R}$?

7. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrable sobre $\mathbb{R}$ y CPT en cualquier intervalo compacto $\subset \mathbb{R}$, sea

$$F(t) = \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}s \ \ , \ t \in \mathbb{R} \ .$$

   Muestre que si $\lim_{t \to \pm\infty} F(t) = 0$, luego $\widehat{F}(0) = 0$ y

$$\widehat{F}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{\mathrm{i}\,\omega} \quad , \quad \omega \neq 0 \ .$$

8. Sea $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{\sin \omega}{\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

   (a) Muestre que $\widehat{f}(\omega)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)^2$ es integrable sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Usando la TF inversa de $\widehat{f}(\omega)$, la cual está dada por la función $f(t)$ del Problema 3 con $t_0 = 1$, determine el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \, \mathrm{d}\omega \ .$$

9. Considere el PVIF

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = k\partial_x^2 T(x,t) + h\partial_x T(x,t) \ , \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} T(x,t) = 0 \ , \ t > 0 \\ T(x,0) = f(x) \, , \, x \in \mathbb{R} \ , \end{cases}$$

   donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, acotada e integrable sobre $\mathbb{R}$.
   Resolver este PVIF mediante el método de la transformada de Fourier.

Diciembre 1, 2025.
DS/ds