UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III (525201)
Ayudantía 2

1. Demuestre las siguientes propiedades del producto Cartesiano de conjuntos.

   a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   b) $(A \times B)^c = (A^c \times U) \cup (U \times B^c)$

   c) $(A \times B) \subseteq (A \times C) \wedge A \neq \emptyset \Rightarrow B \subseteq C$

   d) $A \times B = \displaystyle\bigcup_{b \in B} (A \times \{b\})$

2. Sean $A, B \subseteq E$.

   a) Pruebe que $A^c \times B^c \subseteq (E \times E) \setminus (A \times B)$.

   b) Muestre con un contraejemplo que no se cumple que $A^c \times B^c = (E \times E) \setminus (A \times B)$.

   c) Muestre que para cualquier conjunto $E \neq \emptyset$, existen $A, B \subseteq E$ tales que $A^c \times B^c \neq (E \times E) \setminus (A \times B)$. ¿Qué pasa si $E = \emptyset$?

3. Para la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ encuentre $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ en cada caso. Justifique su respuesta.

   a) $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, 2i + 1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

   b) $A_i = \left[-1 - \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right]$, $\forall i \in \mathbb{N}$

   c) $A_i = \left(\frac{-1}{i}, \frac{1}{i}\right)$, $\forall i \in \mathbb{N}$

   d) $A_i = \mathbb{R} - [0, i]$, $\forall i \in \mathbb{N}$

4. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se dice creciente si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq A_{i+1}$.

   a) Dada $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia creciente de conjuntos no vacíos y todos distintos, se define la familia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ por:

   $$B_1 = A_1 \quad \wedge \quad B_k = A_k - A_{k-1}, \forall k \geq 2$$

   Pruebe que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

   b) Defina una familia creciente de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no vacíos y todos distintos tal que:

   $$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$$

JAL/RAE/rae — 29 de marzo de 2022