UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS: CURSO DE REPASO (525315)
Listado Nº 1 (Funciones de varias variables: Diferenciación)

1. **(Límite en $\mathbb{R}^2$).** Estudie la existencia de los siguientes límites y determine el límite cuando existe:

$$(a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2} \qquad (c)\quad \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^4 y}{x^2-y^2}\ .$$

2. **(Gradiente)** Calcule el gradiente de la función $f(x,y,z) = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. **(Coordenadas esféricas)** Las coordenadas esféricas (r,θ,φ) de un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ estan definidas por:
$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$
con $(r,\theta,\varphi) \in R =]0,\infty[\times[0,\pi[\times[0,2\pi[$. Muestre que $\Phi : (r,\theta,\varphi) \in R \mapsto (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es diferenciable en R y determine su matriz Jacobiana.

4. **(Diferenciabilidad)** Sea $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
   (a) Muestre que f se puede prolongar por continuidad en $(0,0)$.
   (b) Muestre que f tiene derivadas parciales de respeto a x y y en $(x,y) \neq 0$ y en $(x,y) = (0,0)$. Determine estas derivadas parciales.
   Muestre que estas derivadas parciales no son continuas en el orígen.
   (c) ¿ f es diferenciable en el orígen? Justifique su respuesta.

5. **(Regla de la cadena)** Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C_1 en $\mathbb{R}^2$.
   (a) Escriba la regla de la cadena para $\partial_x h(x,y)$ y $\partial_y h(x,y)$, donde $h(x,y) = f(x,u(x,y))$.
   (b) Calcule las derivadas parciales de respeto a x y y de las siguientes funciones:
$$g(x,y) = f(y,x) \quad , \quad k(x,y) = f(y, f(x,x))\ .$$

6. **(Plano tangente a una superficie)** Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en el punto $(1,1,1)$.

7. **(Función de clase C^1 pero no de clase C^2)** Sea $g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.
   (a) Muestre que $f(x,y) = xyg(x,y)$ se puede prolongar en una función continua en todo $\mathbb{R}^2$, denotada también f.

(b) Muestre que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

(c) Muestre que f tiene derivadas parciales $\partial_x \partial_y f$ y $\partial_y \partial_x f$ en $(0,0)$ pero que estas derivadas son distintas. ¿ Eso contradice el teorema de Schwarz?
Muestre que f no es de clase C^2 en un entorno de $(0,0)$.

8. **(Solución de una EDP)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 solución de la ecuación

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\ .$$

(a) Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = f(u+v, u-v)$ es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

(b) Halle todas las soluciones f de clase C^2 de la ecuación $(*)$.

9. **(Función gausiana en $\mathbb{R}^2$)** Considere la función de dos variables reales definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \exp\left(-x^2 - y^2\right)\ .$$

(a) Muestre que g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y determine su matriz jacobiana.

(b) Determine las curvas de niveles de g.

(c) Esboze las curvas obtenidas al intersectar la superficie $z = g(x,y)$ con los planos verticales $y = 0$, $x = 0$ y $y = x$.

(d) Muestre que el gradiente de g en el punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ es ortogonal a la curva de nivel de g pasando por este punto.

(e) Determine los extremos de g en $\mathbb{R}^2$.

10. **(Estudio de una función discontinua en $\mathbb{R}^2$)** Considere la función

$$h(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1+x}\right)\ .$$

(a) Muestre que h es diferenciable en $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq -1\}$ y determine su matriz jacobiana.

(b) Muestre que h tiene una discontinuad de salto al cruzar la recta $x = -1$ salvo en el punto $(-1,1)$.

(c) Determine las curvas de niveles de h.

(d) Estudie la existencia del limite de $h(x,y)$ cuando $(x,y) \to (-1,1)$.

(e) Muestre que el gradiente de h en el punto $(x_0,y_0) \in U$ es ortogonal a la curva de nivel de h pasando por este punto.

(f) ¿ h tiene extremos en U ? Determine $\sup_{(x,y)\in U} h(x,y)$ y $\inf_{(x,y)\in U} h(x,y)$.

Marzo 28, 2022.
DS/ds