

# Práctica 8

## 1. Calcular los límites

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})$

Notar que tenemos una forma indeterminada del tipo  $\infty - \infty$ . Luego, el desarrollo es:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}) \cdot \frac{(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})}{(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - (x^4 + 7x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2 + \sqrt{x^4(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2 + x^2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-7 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{-7 - 0}{1 + \sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{-7}{2} \quad // \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3|x| + 1}{x|x| - 3x}$

Como  $x \rightarrow 0^+$ , entonces  $x > 0$ . Luego  $|x| = x$ , y el límite queda como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x(x - 3)}$$

Ahora, cerca del cero por la derecha, se cumple que  $3x + 1 > 0$ ,  $x > 0$ ,  $x - 3 < 0$ , por lo que  $x(x - 3)$  tiende a 0 negativamente, y se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x(x - 3)} = -\infty \quad //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x(x+2)} = +\infty \quad \text{porque si } x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^2-1 < 0, x(x+2) < 0 \\ \Rightarrow \frac{x^2-1}{x(x+2)} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-1}{x(x-2)} = -\infty$$

Por lo tanto,  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales de  $f$

• Asíntotas horizontales: Hacemos tender  $x$  a  $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

Luego, la única asíntota horizontal es  $y = 1$

Notar que no pueden haber asíntotas oblicuas, pues para esto, el límite con  $x$  tendiendo a algún infinito, debería haber dado infinito, pero ambos dieron 1

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+1}{2x^3+2x} & , x < 0 \\ \frac{x^{\frac{3}{2}}+1}{\sqrt{x+1}} & , x > 0 \end{cases}$$

• Asíntotas verticales: Notar que  $\frac{2x^2+1}{2x^3+2x}$  se indetermina sólo en  $x = 0$  que **no está** en su dominio de definición ( $x < 0$ ), pero sí se puede hacer tender  $x$  a 0 por la izquierda

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+1}{2x(x^2+1)} = -\infty$$

Por lo tanto,  $x = 0$  sí es una asíntota vertical de  $g(x)$

luego,  $\frac{x^{3/2}+1}{\sqrt{x+1}}$  se indetermina en  $x=-1$ , pero esto no está en su dominio de definición, y tampoco se puede hacer tender  $x$  a  $-1$  manteniendo esta definición de  $f(x)$ .  
Por lo tanto,  $x=0$  es la única asíntota vertical

• Asíntotas horizontales: Hacemos tender  $x$  a  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}+1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{2x^3+2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^3(2+\frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{x(2+\frac{2}{x^2})} = 0$$

por lo tanto,  $y=0$  es una asíntota horizontal

• Asíntotas oblicuas: La única posibilidad es con  $x \rightarrow +\infty$ , pues  $x \rightarrow -\infty$  da una asíntota horizontal.

La asíntota oblicua es una recta de ecuación  $y=mx+n$ , donde  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , y  $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$   
Calculamos  $m$  primero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}+1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}(1+\frac{1}{x^{3/2}})}{x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}(1+\frac{1}{x^{3/2}})}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x^{3/2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1 \end{aligned}$$

Ahora calculamos  $n$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}+1}{\sqrt{x+1}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}+1-x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{3/2}+1-x\sqrt{x+1}) \cdot (x^{3/2}+1)+x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot (x^{3/2}+1)+x\sqrt{x+1}} \quad \text{*suma por su diferencia} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x^{3/2}+1-x^3-x^2}{\sqrt{x+1}(x^{3/2}+1+x\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}-1)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x^{3/2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x^{3/2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \frac{-1}{1 \cdot (1+1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(x)$  tiene la asíntota oblicua  
 $y = x - \frac{1}{2}$

3. Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que la recta  
 $y = 3x + 2$  sea una asíntota oblicua de la gráfica  
de  $f(x) = \frac{6x^2 - 1}{2x + a}$

Queremos que se cumplan las igualdades

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 1}{2x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(6 - \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{a}{x})} = 3$$

este límite no depende del valor de  $a$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 1}{2x + a} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 1 - 6x^2 - 3ax}{2x + a} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - 3ax}{2x + a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-\frac{1}{x} - 3a)}{x(2 + \frac{a}{x})} = \frac{-3}{2} a \end{aligned}$$

$$\text{queremos } \frac{-3}{2} a = 2 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$