Aplicaciones de la derivada (parte 2)

Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Aproximación de una función

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $a \in I$, con I un intervalo. Si definimos la función

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

que corresponde a la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$, entonces

$$0 = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x-a}.$$

Así, por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \forall x : 0 < |x-a| < \delta \implies \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|} < \varepsilon \\ \implies |f(x) - g(x)| < \varepsilon |x-a|. \end{aligned}$$

La diferencial

Aproximación de una función

Así se justifica la aproximación en una vecindad del punto a

$$f(x) \approx g(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Esta aproximación se puede escribir como

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) \quad (*)$$

Denotando $\Delta x = x - a$ y $\Delta y = f(x) - f(a)$ como variaciones de x e y $(y = f(x))$, entonces lo anterior se puede interpretar como

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x.$$

donde la igualdad se tiene cuando $x \to a$.

La diferencial

Definición

Con las aproximaciones anteriores, se define la aplicación **diferencial de** f en el punto a como $df_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \longmapsto df_a = f'(a) \cdot h.$$

Su gráfica corresponde una recta que pasa por $(0,0)$ y es paralela a la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$. Además, de $(*)$ se cumple que

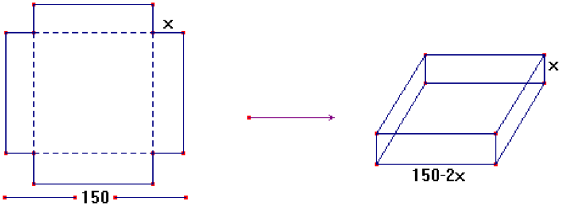
$$f(x) \approx f(a) + df_a(x-a).$$

Ejemplo. Se desea construir un cilindro de hormigón como tubería de agua de grosor $15cm$, altura $1m$ y radio interno $50cm$. Use la diferencial para aproximar la cantidad de material en m^3 que se necesita.

Máximos y mínimos

Introducción

Problema. *Con un trozo de cartón de $1{,}5m$ se construye una caja de base cuadrada de la siguiente forma: se le cortan un cuadrado en cada esquina de largo x y se pliegan las aletas sobrantes en cada lado.*



El volumen de la caja depende de x. Entonces, ¿cuál es el valor de x que permite el mayor volumen de la caja resultante?

Máximos y mínimos

Problema

El volumen de la caja está dada por la función

$$V(x) = x(150-2x)^2 = 4x^3 - 600x^2 + 22500$$

con $0 \leq x \leq 75cm.$, donde consideramos los valores de V en $x = 0$ y $x = 75$ como volumen 0.

Para contestar nuestra pregunta, necesitamos encontrar $x_0 \in [0, 75]$ tal que

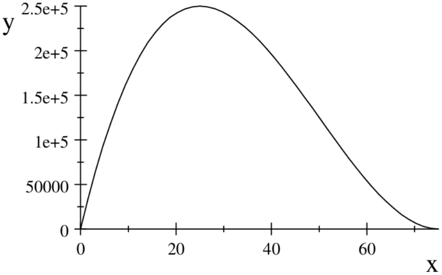
$$\forall x \in [0, 75] : \; V(x_0) \geq V(x).$$

El punto x_0 se denominará **punto de máximo absoluto** de V en el intervalo $[0, 75]$.

Analizamos la gráfica de V a continuación.

Máximos y mínimos

Problema



De la gráfica[1] se puede concluir función tiene un máximo en el intervalo $[20, 30]$ y en este punto la derivada es nula ya que la recta tangente es horizontal.

[1] e= 10^5

Máximos y mínimos

T.V.E.

Ejercicio. Resolver la ecuación $V'(x) = 0$ y encontrar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir como se indicó en el problema. Además, determine el volumen de esta caja.

Formalmente, hemos usamos el **Teorema de Valores Extremos**:

Teorema (T.V.E.)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$\forall x \in [a, b] : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

donde x_1 y x_2 son llamados **puntos de mínimo y de máximo absolutos** para f en el intervalo $[a, b]$, respectivamente, y los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se llaman **valores extremos**.

Observaciones:

- ♢ El teorema garantiza la existencia de un punto de máximo y mínimo de f (o puntos extremos), no cómo encontrarlos.
- ♢ Las hipótesis del teorema son necesarias. Por ejemplo, $g(x) = 2 - x$ definida sobre $]0, 1]$ es una función continua, pero alcanza un valor máximo. Otro ejemplo es

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

función no continua sobre un intervalo cerrado y acotado. Alcanza un valor mínimo, pero no máximo.

Máximos y mínimos relativos

Estudiamos puntos extremos en un sentido local.

Definición.

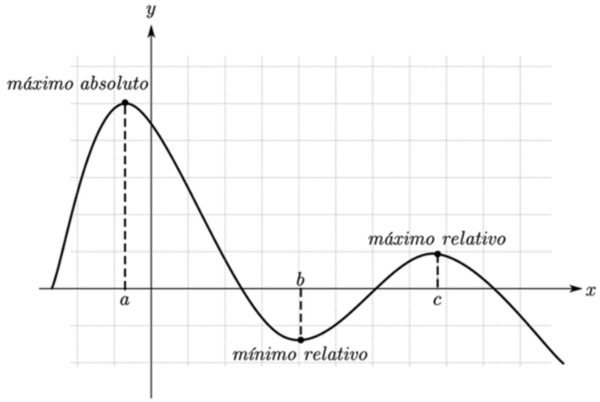
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre I intervalo abierto.

1. Se dice que x_1 es un **punto de mínimo relativo** para f si existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in]x_1 - \delta, x_1 + \delta[: f(x_1) \leq f(x)$.
2. Se dice que x_2 es un **punto de máximo relativo** para f si existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in]x_2 - \delta, x_2 + \delta[: f(x) \leq f(x_2)$.

Los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se llaman **mínimo** y **máximo relativo** (o local) de f, respectivamente.

Máximos y mínimos relativos

Gráfica



¿Qué condición cumple un punto extremo relativo cuando f es derivable?

Teorema

Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, entonces a no es un punto de extremo relativo.

Dem. Supongamos que $f'(a) > 0$. Como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tenemos que $\forall x \in]a - \delta, a + \delta[\implies \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} x \in]a - \delta, a[&\implies f(x) < f(a) \text{ y} \\ x \in]a, a + \delta[&\implies f(x) > f(a), \end{aligned}$$

lo que muestra que a no es un punto de extremo relativo.

Máximos y mínimos relativos

Punto crítico

Del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario

Corolario.

Si a es un punto de extremo relativo de f entonces no es derivable en a o $f'(a) = 0$.

Definición.

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Diremos que a es un **punto crítico** de f si f no es derivable en a o bien es derivable y $f'(a) = 0$.

Así, el corolario se enuncia como: *Si a es un punto de extremo relativo de f entonces a es un punto crítico.*

Máximos y mínimos relativos

Punto crítico

Observaciones:

- ♢ Es posible que un punto extremo relativo de una función, ésta no tenga derivada en ese punto. Por ejemplo $f(x) = |x|$ tiene un punto crítico en $x = 0$ que es un punto mínimo (global) de la función.
- ♢ Al analizar una función derivable f, para encontrar los puntos críticos de f se debe resolver $f'(x) = 0$.
- ♢ Un punto crítico puede ser máximo, mínimo o no ser extremo relativo. Por ejemplo, $g(x) = x^3$ tiene un punto crítico en $x = 0$, pero no es un extremo relativo.
- ♢ ¿Qué criterio nos permite decidir cuáles puntos críticos son extremos relativos?