UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Trabajo Práctico 1 - Análisis Real I (525301)
Soluciones sugeridas

Ejercicio 1. Sea $X \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que $c \leq \sup X$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.

Demostración. Supongamos que $c \leq \sup X$. Luego, pueden darse dos casos: $c = \sup X$ o $c < \sup X$.

Si $c = \sup X$ y existiese $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tenga $c - \varepsilon \geq x$, habríamos encontrado una cota superior $c^* := c - \varepsilon$ estrictamente menor que el supremo de X, lo cual es una contradicción (¿por qué?).

Por otro lado, si $c < \sup X$, entonces, por definición de supremo, c no es una cota superior de X y por tanto existe $x \in X$ tal que $c \leq x$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$c - \varepsilon < c \leq x \implies c - \varepsilon < x$$

Supongamos ahora que $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$.

Razonando por contradicción, supondremos $c > \sup X$. Luego, tomando $\varepsilon = c - \sup X$ obtenemos que $\exists x \in X$ tal que

$$c - (c - \sup X) < x \iff \sup X < x$$

lo cual es una contradicción (¿por qué?).

Un resultado análogo para el ínfimo es que $c \geq \inf X$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $c + \varepsilon > x$. La demostración de esto es completamente análoga al resultado anterior. ■

Ejercicio 2. Sean $A \subset B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Demuestra que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Demostración. Notemos que toda cota inferior de B es una cota inferior de A (¿por qué?), en particular $\inf B$. Luego, por definición de ínfimo tenemos que $\inf B \leq \inf A$.

Reemplazando cota inferior por superior e ínfimo por supremo en el razonamiento anterior, concluimos que $\sup A \leq \sup B$.

Además, si a^* y a_* son cotas superiores e inferiores, respectivamente, de A, se tiene que $a_* \leq a^*$ (¿por qué?). Luego, $\inf A \leq \sup A$.

Por tanto, utilizando la transitividad de $\leq$ concluimos que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \sup B$. ■

Ejercicio 3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$. Demuestra que $\sup A \leq \inf B$. Demuestra también que $\sup A = \inf B$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

Demostración. Sea $y \in B$. Por hipótesis tenemos que y es una cota superior de A. Luego, $\sup A \leq y$. Como y se escogió de manera arbitraria, concluimos que $\sup A$ es cota inferior de B y por tanto $\sup A \leq \inf B$.

Para la segunda parte basta probar que $\inf B \leq \sup A$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$, $y \in B$ (los cuales dependen de la elección de ε) tales que $y - x < \varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} y - x < \varepsilon \quad &\iff \\ y < x + \varepsilon &\implies \\ \inf B < x + \varepsilon &\iff \\ \inf B - \varepsilon < x \end{aligned}$$

Luego, por Ejercicio 1 tenemos que $\inf B \leq \sup A$. Así,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A, y \in B) : y - x < \varepsilon \implies \inf B \leq \sup A \tag{1}$$

Por otro lado, consideremos $\varepsilon > 0$. Como $\inf B \leq \sup A$, por Ejercicio 1 se tiene que $\exists x \in A$ (dependiente de $\varepsilon/2$)

$$\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < x$$

Luego, reordenando, tenemos que $\inf B < x + \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando nuevamente el Ejercicio 1, se sigue que $\exists y \in B$ tal que

$$y < \left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \iff y - x < \varepsilon$$

De modo que

$$\inf B \leq \sup A \implies (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A, y \in B) : y - x < \varepsilon \tag{2}$$

Así, del hecho que $\inf B \geq \sup A$, de (1) y de (2) tenemos que $\inf B = \sup A$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A, y \in B$ tales que $y - x < \varepsilon$.

■

Ejercicio 7. Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente, tales que $\forall x \in A$, $\exists y \in B$ tal que $x \leq y$. Demuestra que $\sup B = \sup A$. Enuncia y demuestra un resultado análogo para el ínfimo.

Demostración. Como en el Ejercicio 2 quedó demostrado que $B \subset A \implies \sup B \leq \sup A$, basta probar que $\sup A \leq \sup B$ (i.e. que $\sup B$ es cota superior de A).

Sea $x \in A$. Luego, $\exists y \in B$ tal que $x \leq y$ y que, a su vez, es menor que $\sup B$ (¿por qué?). Así, por transitividad tenemos que $x \leq \sup B$.

Como x fue escogido de manera arbitraria, se concluye que $\sup B$ es cota superior de A y por tanto se tiene lo pedido. ■