Mecánica de Fluidos

Hidrostática

<u>Definiciones</u>

- <u>Presión absoluta</u>: presión respecto al vacío
- <u>Presión manométrica</u>: presión respecto a la presión atmosférica
- <u>Peso específico</u>

$$\gamma := \rho g$$

- <u>Centro gravedad</u>
  (ρ cte)

$$x_{CG} = \frac{\int_V x dV}{V}; y_{CG} = \frac{\int_V y dV}{V}; z_{CG} = \frac{\int_V z dV}{V}$$

$$x_{CG} = \frac{\int_A x dA}{A}; y_{CG} = \frac{\int_A y dA}{A}; z_{CG} = \frac{\int_A z dA}{A}$$

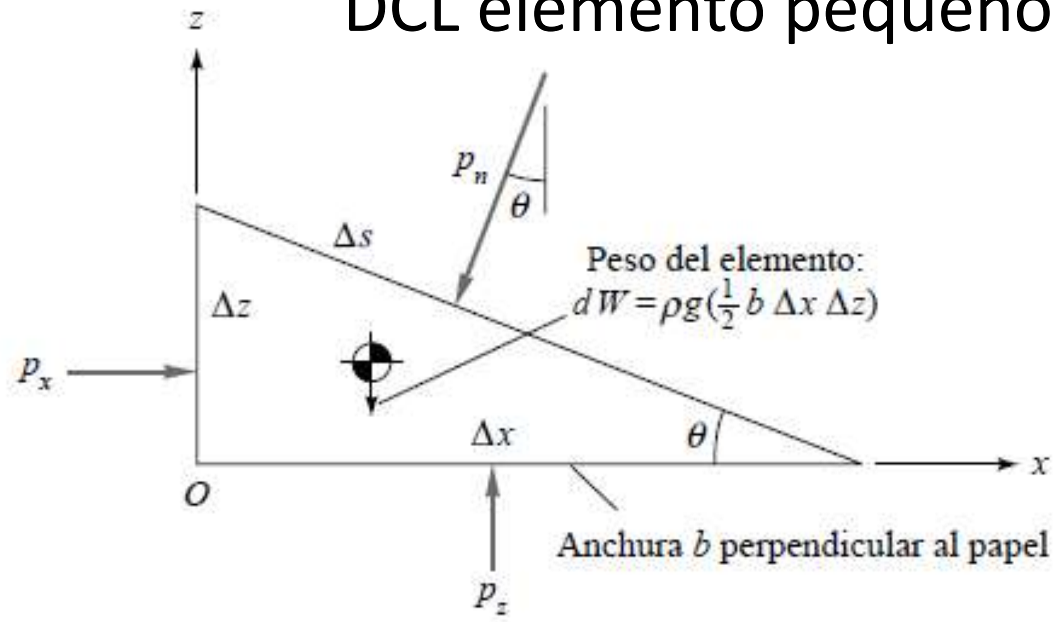
$$x_{CG} = \frac{\int_L x dl}{L}; y_{CG} = \frac{\int_L y dl}{L}; z_{CG} = \frac{\int_L z dl}{L}$$

- <u>Centro de presión</u>: lugar donde actúa la fuerza resultante debido a la presión

<u>Observación</u>

- Cuando estemos frente a sistema líquido gas en reposo se despreciará la presión del gas frente al líquido pues su densidad es muchísimo menor

DCL elemento pequeño de fluido estático



$$\sum F_x = p_x b\Delta z - p_n b\Delta s \sin\theta = 0$$

$$\sum F_z = p_z b\Delta x - p_n b\Delta s \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g b\Delta x\Delta z = 0$$

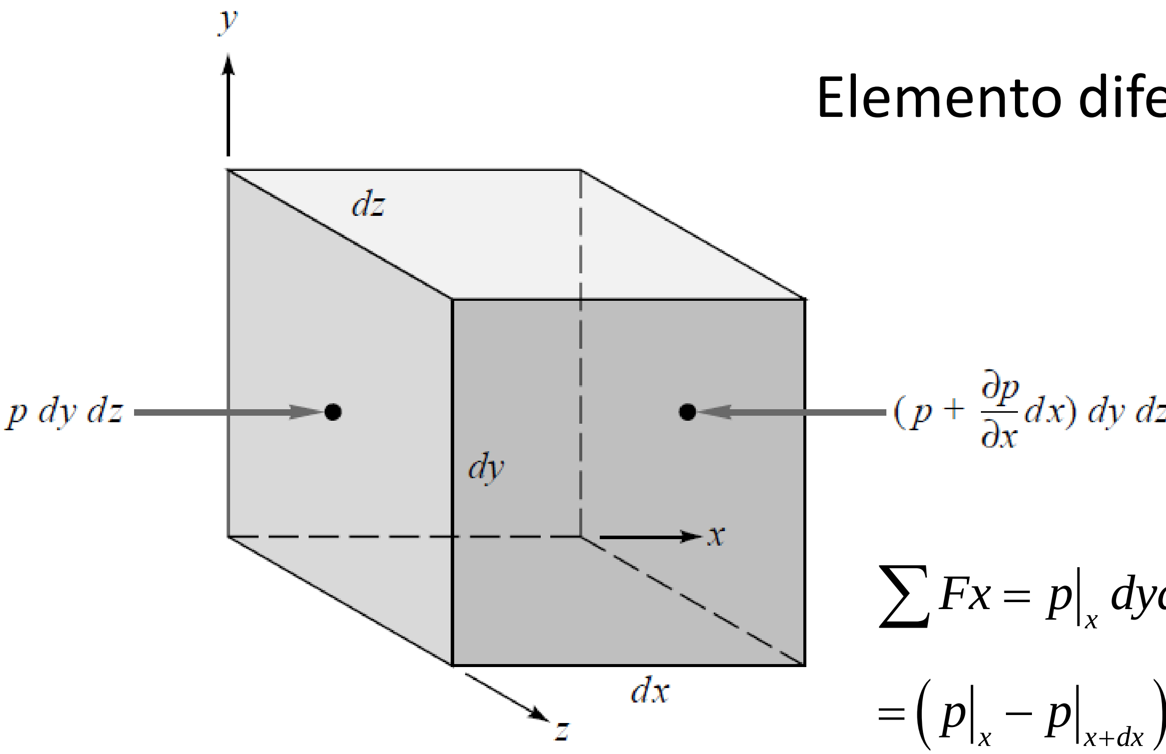
Por geometría $\Delta s \sin\theta = \Delta z; \Delta s \cos\theta = \Delta x$

$$\Rightarrow p_x = p_n; p_z = p_n + \frac{1}{2}\rho g\Delta z$$

En el límite $\Delta z \to 0$

$p_x = p_n = p_z = p$ **p es la misma en todas la direcciones**

Elemento diferencial de fluido estático



$$\sum Fx = p\big|_x \, dydz - p\big|_{x+dx} \, dydz$$

$$= \left(p\big|_x - p\big|_{x+dx} \right) dydz \approx \left(p\big|_x - p\big|_x - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$$

Análogamente en los otros ejes

$$\Rightarrow \vec{F}_{presión} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz = -\nabla p dxdydz$$

Aplicamos la 2° Ley de Newton

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{presión} + \vec{F}_{gravedad} + \vec{F}_{roce}$$

Si no hay movimiento $\vec{a} = 0$ y $\vec{F}_{roce} = 0$

$$0 = -\nabla p dxdydz + \rho \vec{g} dxdydz$$

$$\Rightarrow \nabla p = \rho \vec{g}$$

Si eje ẑ apunta hacia abajo se obtiene

$$p_2 - p_1 = -\int_1^2 \rho g dz$$

Para realizar la integración hay que analizar caso a caso

Líquidos incompresibles $\rho = \text{cte}$

$$p_2 - p_1 = -\int_1^2 \rho g dz = -\rho \int_1^2 g dz$$

Si se considera distancias pequeñas g es independiente de z:

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

Gases ideales $p = \rho RT$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg}{RT}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\,dz$$

Si se considera que T no varía con la altura se tiene:

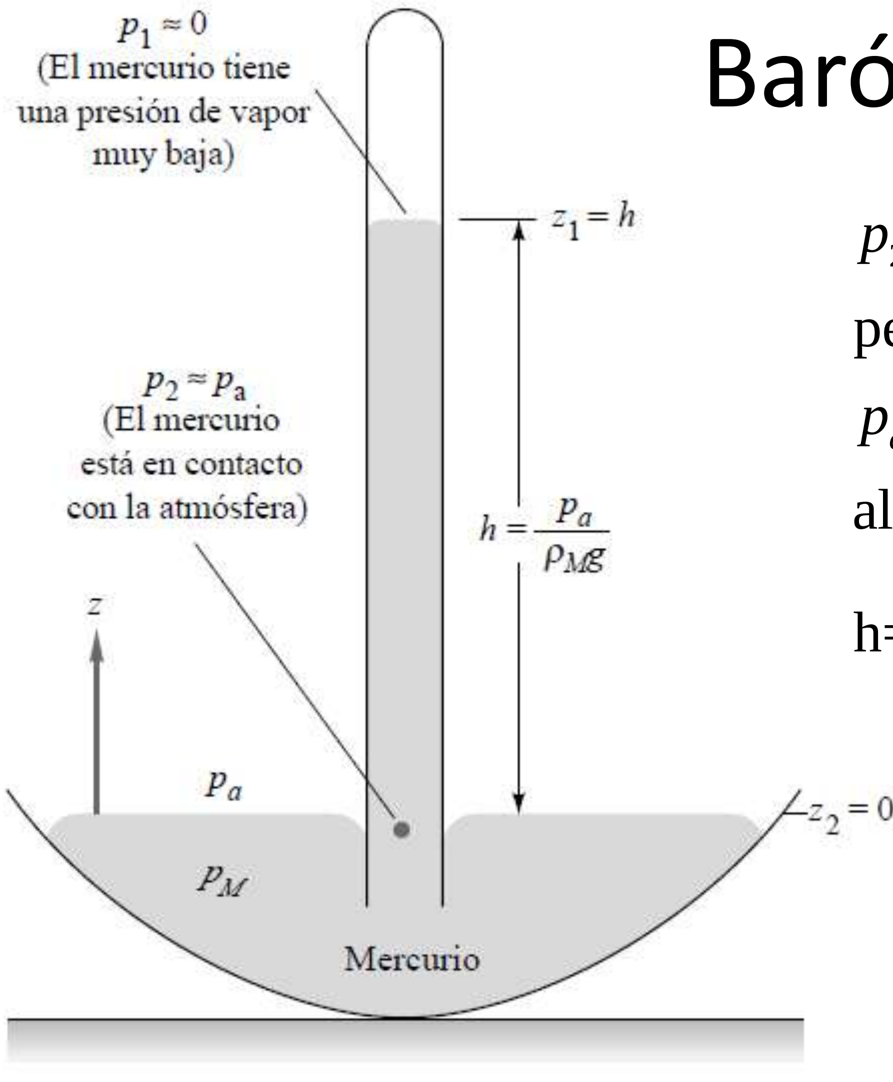
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\frac{g}{RT}(z_2 - z_1) \Rightarrow p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)\right)$$

Si se considera que $T = T_0 - Bz;$ con $T_0 = 288^{\text{o}} K$ y $B = 0.0065^{\text{o}} K / m$:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R\left(T_0 - Bz\right)}dz \Rightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{g}{BR}\ln\left[\frac{T_0 - Bz_2}{T_0 - Bz_1}\right]$$

$$\Rightarrow p_2 = p_{at}\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{\frac{g}{BR}}$$

Manómetros



Barómetro de Mercurio

$$p_2 - p_1 = -\rho_{Hg} g \left(z_2 - z_1\right)$$

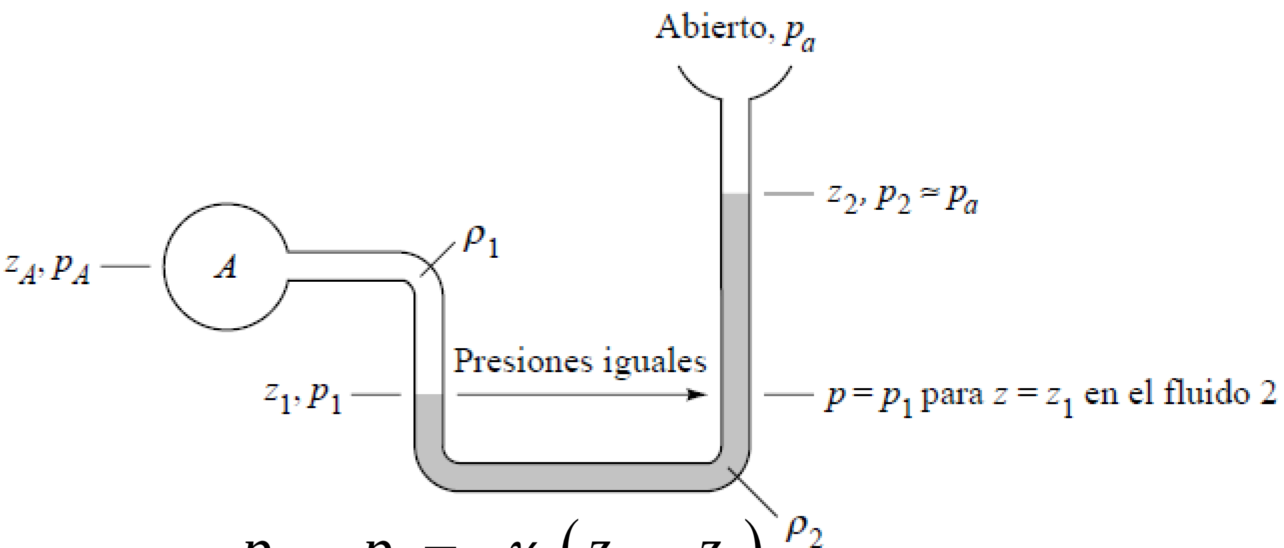
pero $p_1 = 0$, $p_2 = p_{at}$ y $z_2 = 0$ luego

$$p_{at} = \rho_{Hg} g h$$

al nivel del mar normalmente se tiene que

$$\text{h} = \frac{p_{at}}{\rho_{Hg} g} = 760mm$$

Manómetro abierto



$$p_A - p_1 = -\gamma_1 \left(z_A - z_1 \right)$$

$$p_1 - p_2 = -\gamma_2 \left(z_1 - z_2 \right)$$

Sumando ambas expresiones

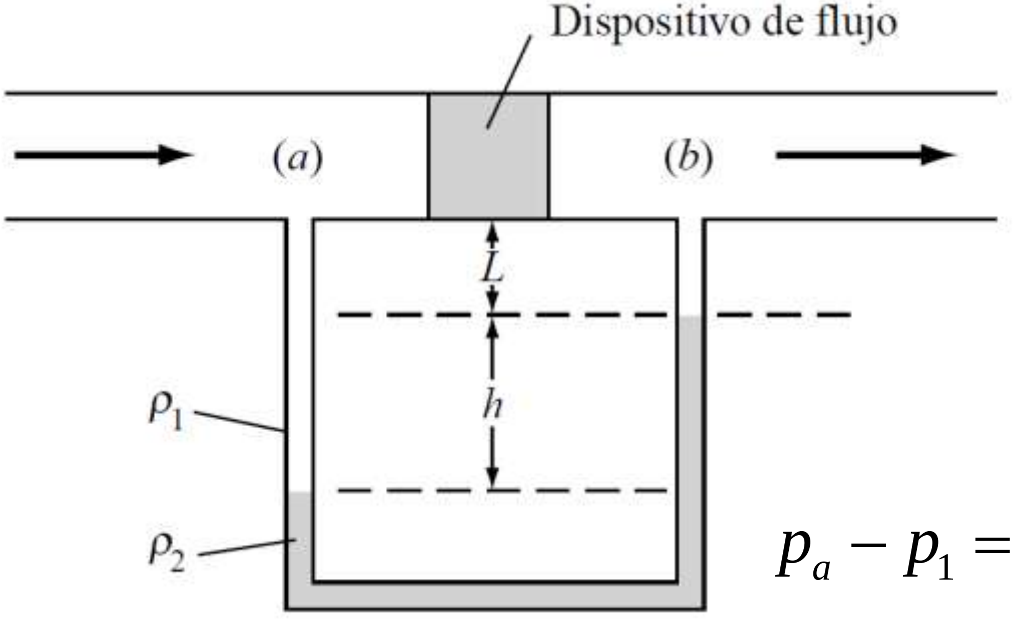
$$p_A - p_2 = -\gamma_1 \left(z_A - z_1 \right) - \gamma_2 \left(z_1 - z_2 \right)$$

$$\Rightarrow p_A = p_{at} - \gamma_1 \left(z_A - z_1 \right) - \gamma_2 \left(z_1 - z_2 \right)$$

Si fluido 1 es un gas

$$p_A = p_{at} - \gamma_2 \left(z_1 - z_2 \right)$$

Manómetro en U



$$p_a - p_1 = -\gamma_1\left(0 - \left[-\left(L+h\right)\right]\right)$$

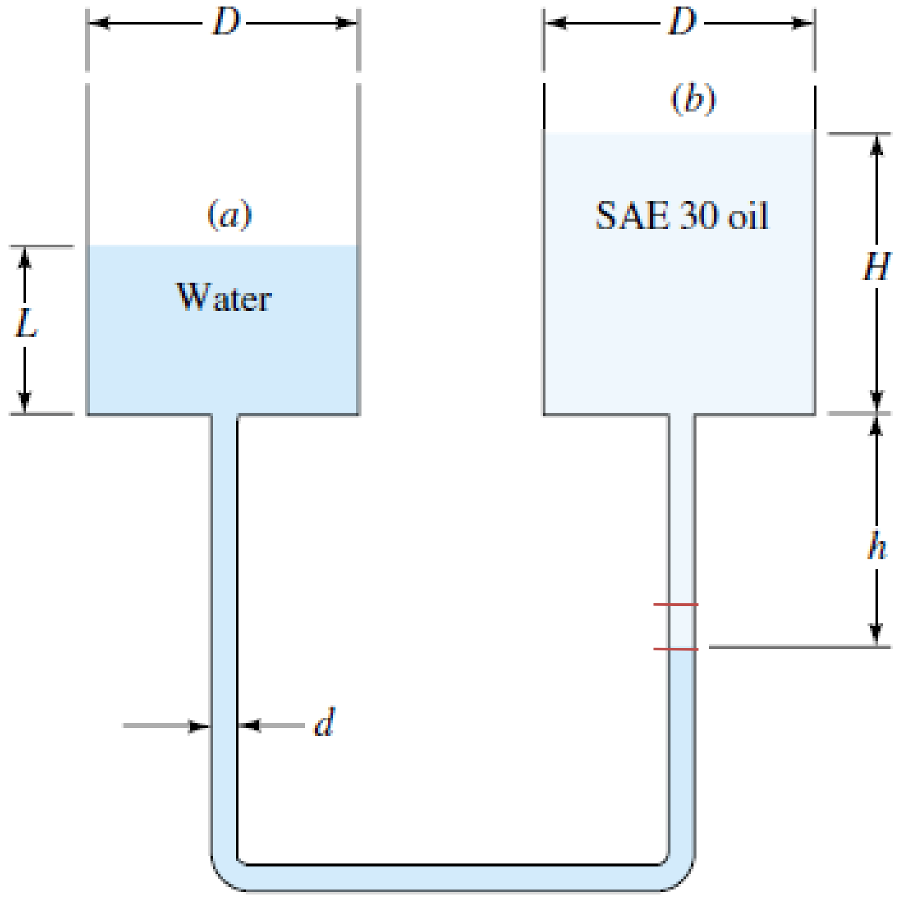
$$p_1 - p_2 = -\gamma_2\left(\left[-\left(L+h\right)\right] + L\right)$$

$$p_2 - p_b = -\gamma_1\left(-L - 0\right)$$

Sumando todas las expresiones

$$p_a - p_b = \left(\gamma_2 - \gamma_1\right)h$$

Ejemplo : Los contenedores de la figura son cilindros y están en condiciones tal que $p_a = p_b$. Obtenga una fórmula para la diferencia de presión $p_a - p_b$ cuando la interfase aceite-agua sube $\Delta h < H$ para i) $d \ll D$, ii) $d < D$



Notemos que:

$$p_a + \gamma_W (L + h) = p_b + \gamma_A (H + h)$$

si $p_a = p_b \Rightarrow \gamma_W (L + h) = \gamma_A (H + h)$

Si se mueve la interfase aceite-agua $\Delta h < h$

Caso i) $d << D$ significa que no hay cambio de altura en los niveles

$$p_a + \gamma_W (L + h - \Delta h) - \gamma_A (H + h - \Delta h) = p_b$$

usamos que $\gamma_W (L + h) = \gamma_A (H + h) \Rightarrow \Delta p = \Delta h \left(\gamma_W - \gamma_A\right)$

Caso ii). El líquido baja en a) y suben en b), luego

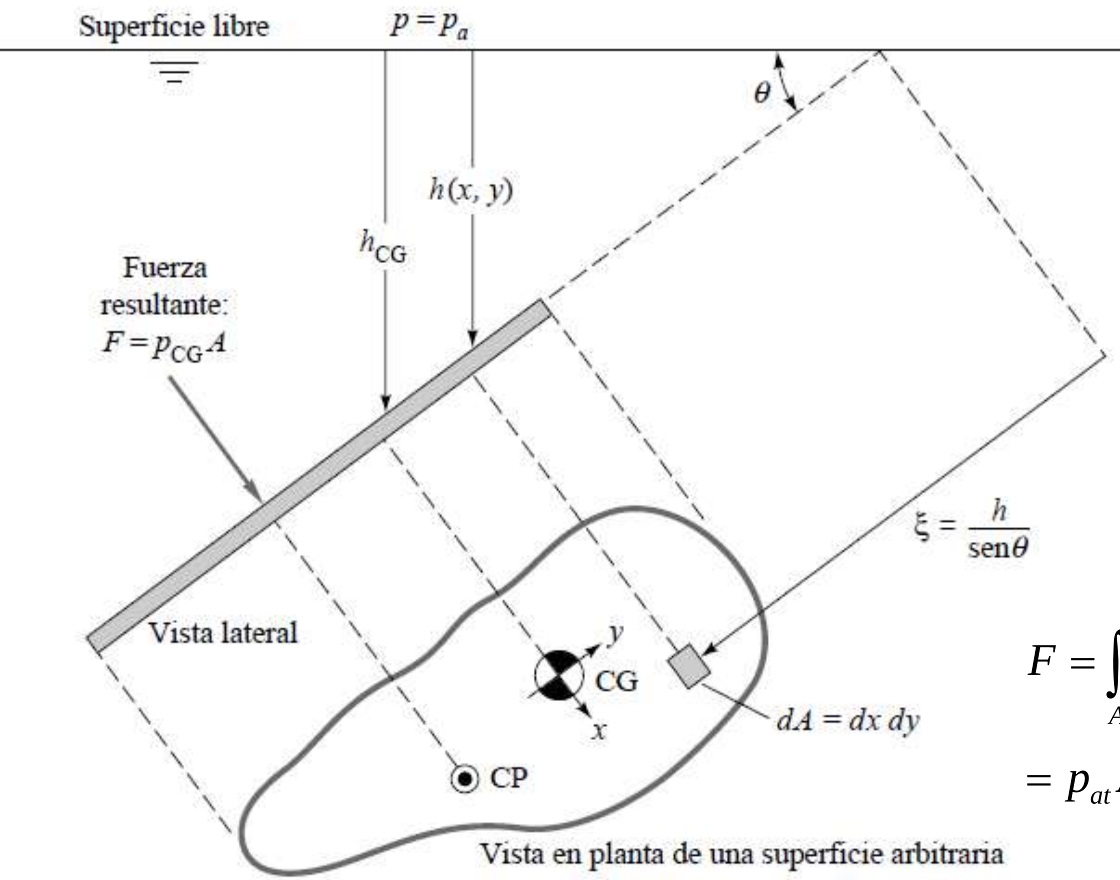
$$p_a + \gamma_W \left(\left(L - \Delta L\right) + h - \Delta h\right) - \gamma_A \left(\left(H + \Delta H\right) + h - \Delta h\right) = p_b$$

Ahore se debe realizar un balance de masa entre los líquidos

$$\frac{\pi}{4} d^2 \Delta h = \frac{\pi}{4} D^2 \Delta L = \frac{\pi}{4} D^2 \Delta H \Rightarrow d^2 \Delta h = D^2 \Delta L = D^2 \Delta H, \text{ luego}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \Delta h \left(\gamma_W \left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right) - \gamma_A \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)\right)$$

Fuerzas sobre superficies



$$F = \int_A p dA = \int_A (p_{at} + \gamma h) dA$$

$$= p_{at} A + \gamma \int_A h dA = p_{at} A + \gamma \int_A \xi \sin\theta dA$$

$$= p_{at} A + \gamma \sin\theta \int_A \xi dA$$

notamos que $\dfrac{\int_A \xi dA}{A} = \xi_{CG}$

$$\Rightarrow F = p_{at} A + \gamma \xi_{CG} \sin\theta A = p_{at} A + \gamma h_{CG} A = p_{CG} A$$

La fuerza sobre una superficie es igual a la presión en el CG de la superficie por su área

¿Dónde actúa esta fuerza?

Tomando el torque desde el CG de la superficie

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \int \vec{r} \times p d\vec{A}$$

$$= \int \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right) \times p\hat{k} dA$$

$$= (-\hat{j}) \int xpdA + \hat{i} \int ypdA$$

El primer término

$\vdots$

$$x_{cp} F = -\gamma \sin\theta \int xydA$$

$$\Rightarrow x_{cp} = -\frac{\gamma \sin\theta \int xydA}{F}$$

$$= -\frac{\gamma \sin\theta \cdot I_{XY}}{p_{CG} A}$$

El segundo término

$$\int ypdA = \int y \left(p_{at} + \gamma \xi \sin\theta \right) dA$$

$$= p_{at} \int ydA + \gamma \sin\theta \int \xi ydA$$

pero $\int ydA = 0$ por definición de CG

$$\Rightarrow \int ypdA = \gamma \sin\theta \int (\xi_{CG} - y) ydA$$

$$= \gamma \xi_{CG} \sin\theta \int ydA - \gamma \sin\theta \int y^2 dA$$

$$\Rightarrow \int ypdA = -\gamma \sin\theta \int y^2 dA$$

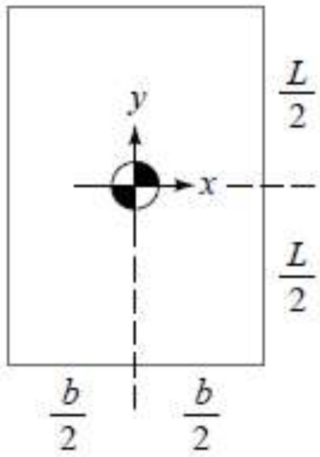
Si consideramos la fuerza neta resultante

$$y_{cp} F = -\gamma \sin\theta \int y^2 dA \Rightarrow y_{cp} = -\frac{\gamma \sin\theta \int y^2 dA}{F}$$

$$= -\frac{\gamma \sin\theta \cdot I_{XX}}{p_{CG} A}$$

CP esta siempre bajo el CG!!

Momentos de Inercia

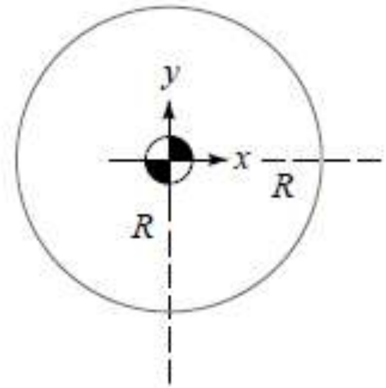


$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

(a)

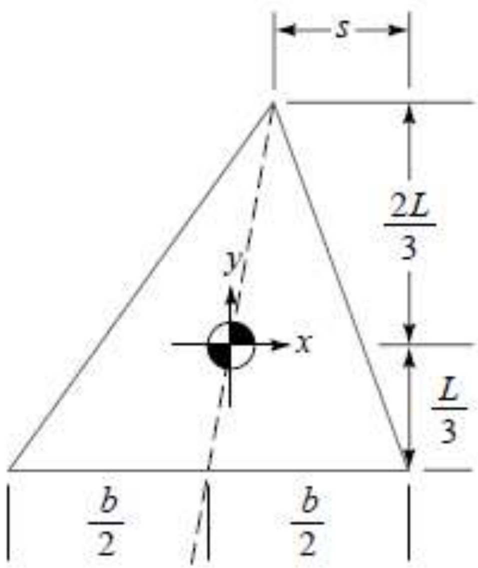


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

(b)

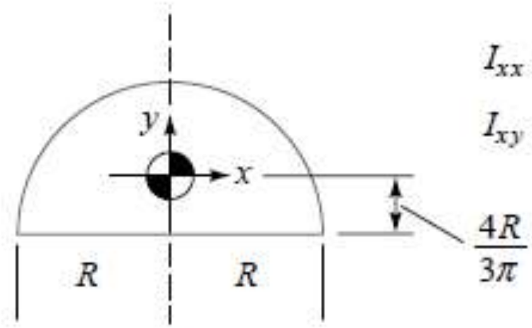


$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$

(c)



$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xx} = 0{,}10976R^4$$

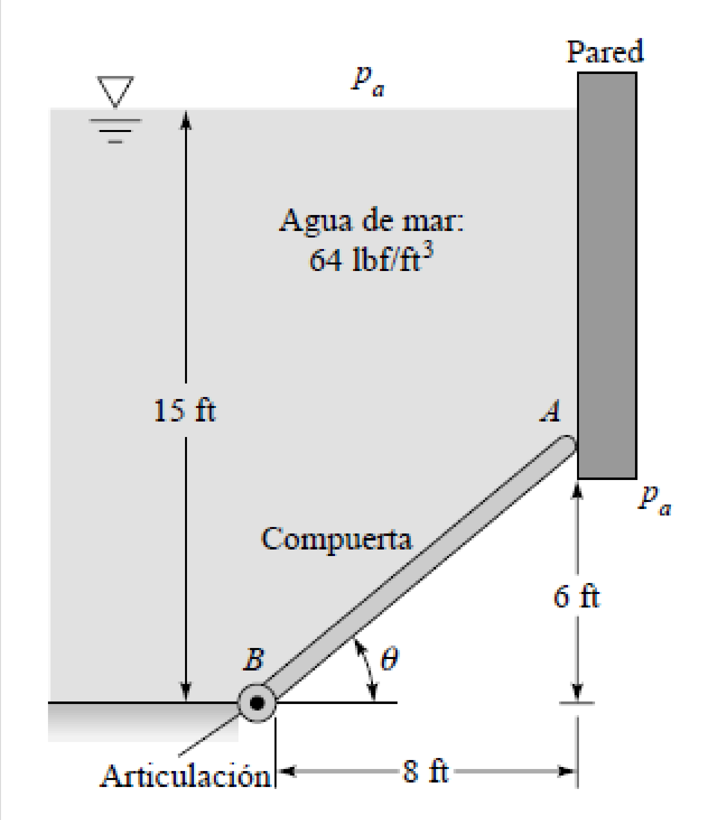
$$I_{xy} = 0$$

(d)

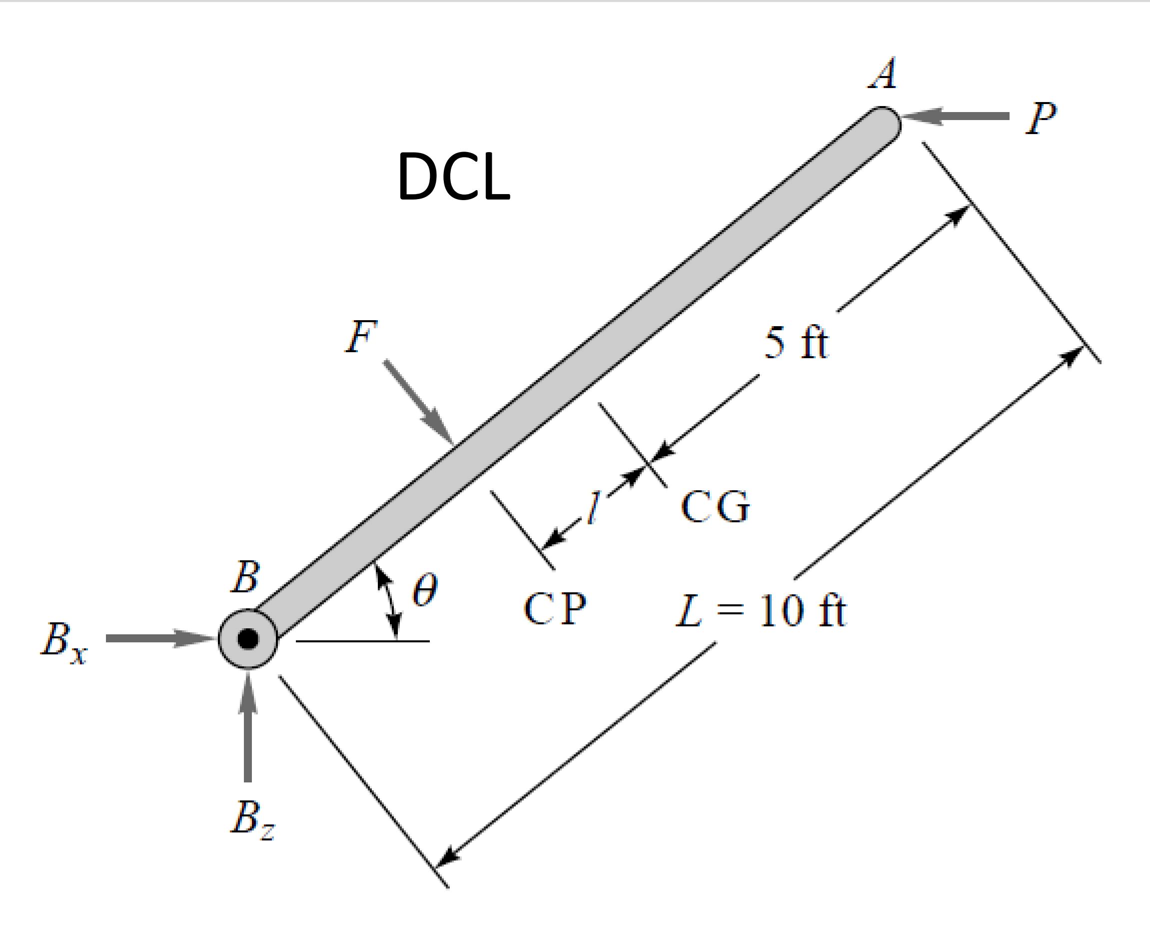
Ejemplo

EJEMPLO 2.5

La compuerta de la Figura E2.5*a* tiene 5 ft de ancho, está articulada en el punto *B* y descansa sobre una pared lisa en el punto *A*. Calcule (*a*) la fuerza sobre la compuerta debida a la presión del agua, (*b*) la fuerza horizontal *P* que se ejerce sobre la pared en *A* y (*c*) las reacciones en la charnela *B*.



E2.5a



$$a)F=\gamma h_{CG}A=64\cdot\underbrace{(9+3)}_{h_{CG}}\cdot\underbrace{(10\cdot 5)}_{A}lb_f$$
$$=38400lb_f$$

$$b)\sum F_x=-F\sin\theta+P-B_x=0$$
$$\sum F_z=-F\cos\theta+B_z=0$$

2 ecuaciones 3 incógnitas

$\Rightarrow$ se necesita evaluar el torque

$$\vec{T}_B=\vec{r}_A\times\vec{P}+\vec{r}_{CP}\times\vec{F}=0$$
$$=10\sin\theta\cdot P\hat{k}-(5-l)\cdot F\hat{k}=0$$

l se obtiene de $l=\dfrac{\gamma\sin\theta\cdot I_{XX}}{p_{CG}A}$

$$l=\frac{64\sin\theta\left(5\cdot 10^3/12\right)}{38400}=0.417\,ft$$

$$\Rightarrow P=29300lb_f$$

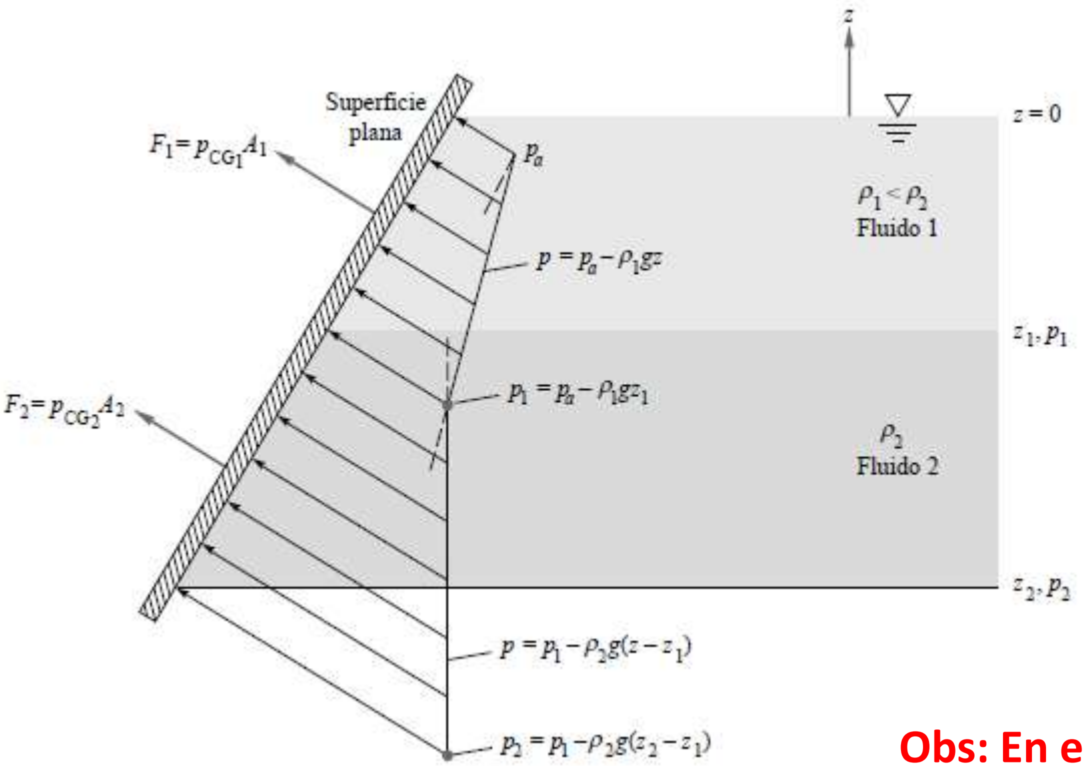
$c)$Conociendo F y P reemplazando en

$$\sum F_x=-F\sin\theta+P-B_x=0$$
$$\sum F_z=-F\cos\theta+B_z=0$$

se obtiene: $B_x=6300lb_f;B_z=30700lb_f$

Fluidos en capas

- Se utiliza el Principio de superposición



$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i p^i{}_{CG} A_i$$

$$y^i_{CP} = -\frac{\gamma_i \sin\theta_i I^i_{XX}}{p^i{}_{CG} A_i}; \quad x^i_{CP} = -\frac{\gamma_i \sin\theta_i I^i_{XY}}{p^i{}_{CG} A_i}$$

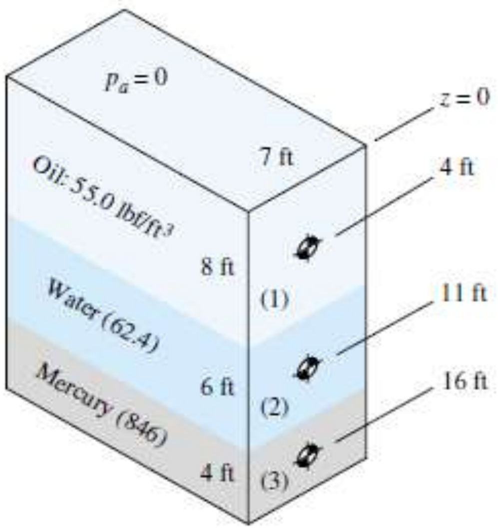
<u>Obs</u>: En el caso de superficies curvas se calcula F_V y F_H para cada pedazo de superficie y luego se calculan los respectivos torques

EXAMPLE 2.8

A tank 20 ft deep and 7 ft wide is layered with 8 ft of oil, 6 ft of water, and 4 ft of mercury. Compute (*a*) the total hydrostatic force and (*b*) the resultant center of pressure of the fluid on the right-hand side of the tank.

Solution

Divide the end panel into three parts as sketched in Fig. E2.8, and find the hydrostatic pressure at the centroid of each part, using the relation (2.38) in steps as in Fig. E2.8:



$$p_{CG_1} = (55.0 \text{ lbf/ft}^3)(4 \text{ ft}) = 220 \text{ lbf/ft}^2$$

$$p_{CG_2} = (55.0)(8) + 62.4(3) = 627 \text{ lbf/ft}^2$$

$$p_{CG_3} = (55.0)(8) + 62.4(6) + 846(2) = 2506 \text{ lbf/ft}^2$$

These pressures are then multiplied by the respective panel areas to find the force on each portion:

$$F_1 = p_{CG_1}A_1 = (220 \text{ lbf/ft}^2)(8 \text{ ft})(7 \text{ ft}) = 12{,}300 \text{ lbf}$$

$$F_2 = p_{CG_2}A_2 = 627(6)(7) = 26{,}300 \text{ lbf}$$

$$F_3 = p_{CG_3}A_3 = 2506(4)(7) = \underline{70{,}200 \text{ lbf}}$$

$$F = \sum F_i = 108{,}800 \text{ lbf} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

Equations (2.47) can be used to locate the CP of each force F_i, noting that $\theta = 90°$ and $\sin\theta = 1$ for all parts. The moments of inertia are $I_{xx_1} = (7\text{ ft})(8\text{ ft})^3/12 = 298.7\text{ ft}^4$, $I_{xx_2} = 7(6)^3/12 = 126.0\text{ ft}^4$, and $I_{xx_3} = 7(4)^3/12 = 37.3\text{ ft}^4$. The centers of pressure are thus at

$$y_{CP_1} = -\frac{\rho_1 g I_{xx_1}}{F_1} = -\frac{(55.0\text{ lbf/ft}^3)(298.7\text{ ft}^4)}{12{,}300\text{ lbf}} = -1.33\text{ ft}$$

$$y_{CP_2} = -\frac{62.4(126.0)}{26{,}300} = -0.30\text{ ft} \qquad y_{CP_3} = -\frac{846(37.3)}{70{,}200} = -0.45\text{ ft}$$

This locates $z_{CP_1} = -4 - 1.33 = -5.33$ ft, $z_{CP_2} = -11 - 0.30 = -11.30$ ft, and $z_{CP_3} = -16 - 0.45 = -16.45$ ft. Summing moments about the surface then gives

$$\sum F_i z_{CP_i} = F z_{CP}$$

or

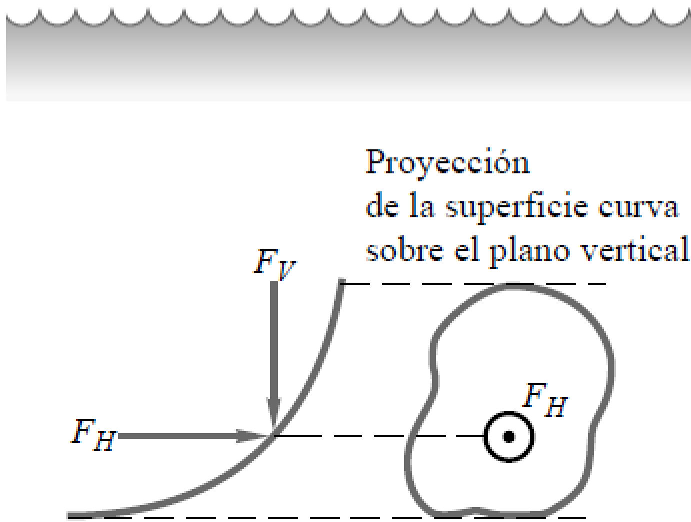
$$12{,}300(-5.33) + 26{,}300(-11.30) + 70{,}200(-16.45) = 108{,}800 z_{CP}$$

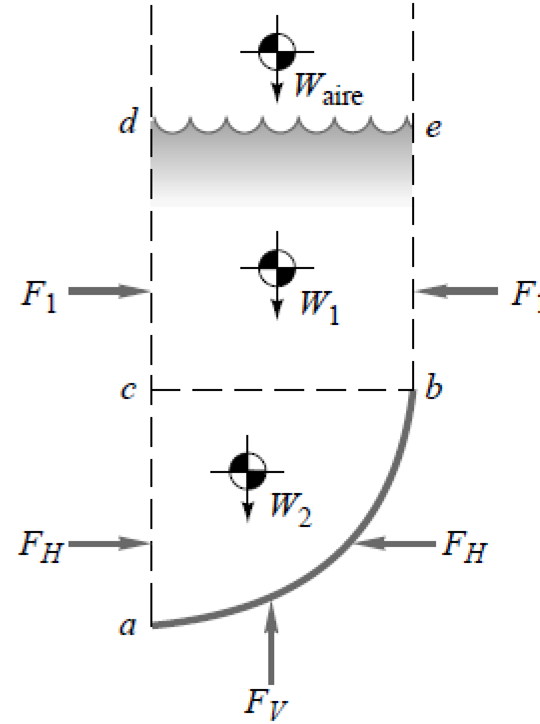
or

$$z_{CP} = -\frac{1{,}518{,}000}{108{,}800} = -13.95\text{ ft} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

The center of pressure of the total resultant force on the right side of the tank lies 13.95 ft below the surface.

Fuerzas sobre superficies curvas





$$F_H = \text{fuerza hidrostática sobre la proyección vertical}$$

$$F_V = \text{peso del líquido sobre la superficie}$$

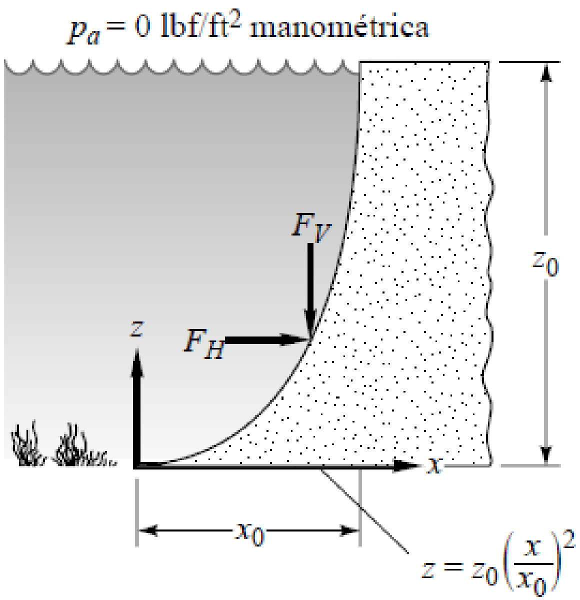
¿Dónde actúan?

F_H actúa en el CP de la proyección vertical

F_V actúa en el CG del líquido sobre la superficie

EJEMPLO 2.7

Una presa tiene una forma parabólica $z/z_0 = (x/x_0)^2$, como se muestra en la Figura E2.7*a*, con $x_0 = 10$ ft y $z_0 = 24$ ft. El fluido es agua, $\rho g = 62{,}4$ lbf/ft³, y se puede despreciar la presión atmosférica. Calcule las fuerzas F_H y F_V sobre la presa y la posición del CP sobre el que actúan. La anchura de la presa es de 50 ft.



La proyección vertical es un rectángulo de 24*x*50

$$F_H = \gamma h_{CG} A$$

$$=62{,}4 \cdot \underset{h_{CG}}{12} \cdot \underbrace{(24 \times 50)}_{A}$$

$$= 899 \cdot 10^3 \, lb_f$$

El *CP* de esta fuerza está localizado en:

$$z_{CP} = 12 - \frac{\gamma \sin\theta \cdot I_{XX}}{p_{CG} A}$$

$$= 12 - \frac{62,4 \cdot \sin(\pi/2) \cdot (50 \times 24^3/12)}{899 \cdot 10^3}$$

$$= 8 \, ft$$

$$F_V = \gamma \cdot Volumen = \gamma \cdot \; fondo \cdot área = \gamma \cdot 50 \cdot \left(240 - \int_{x=0}^{x=10} z_0 \frac{x^2}{x_0^2} dx \right) = \gamma \cdot 50 \cdot 160$$

$$F_V = 499200 lb_f$$

Se debe ahora calcular el CG del líq.

$$x_{CG} = \frac{\int xdA}{A} = \frac{\int_{x=0}^{x=10} \int_{z=0,24x^2}^{z=24} xdxdz}{160} = \frac{3}{8} x_0 = 3,75\, ft$$

$$z_{CG} = \frac{\int zdA}{A} = \frac{\int_{x=0}^{x=10} \int_{z=0,24x^2}^{z=24} zdxdz}{160} = \frac{3}{5} z_0$$

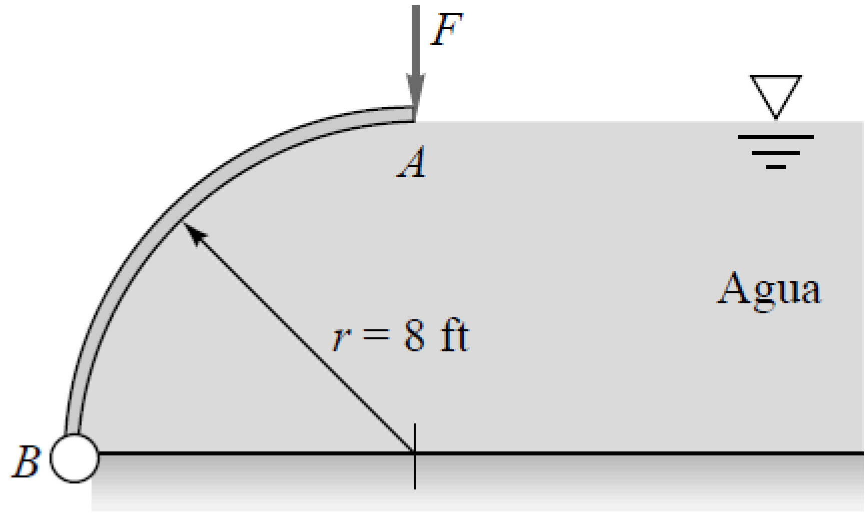
Para calcular el torque neto se considera

F_V con el brazo x_{CG}

F_H con el brazo z_{CP}

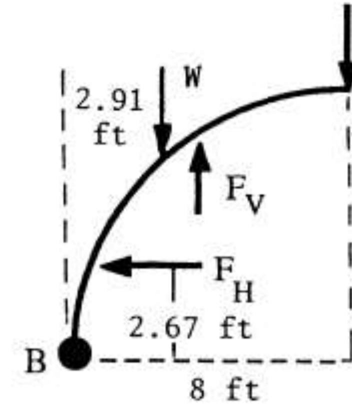
Ejemplo

La compuerta *AB* de la Figura P2.83 es un cuarto de círculo de 10 ft de anchura articulada en el punto *B*. Determine la mínima fuerza *F* que permite mantener abierta la compuerta. Suponga que la compuerta es uniforme y pesa 3000 lbf.



P2.83

Notemos que si el líquido estuviera arriba la fuerza hidrostática sería idéntica en magnitud y dirección pero con sentido contrario.



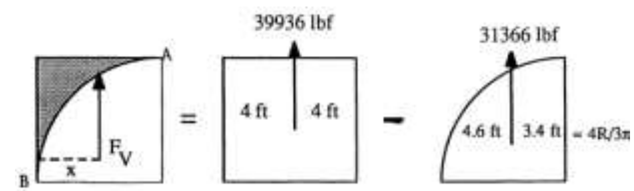
$$F_H = \gamma h_{CG} A = 62,4 \cdot 4 \cdot (8 \times 10) = 19968 lb_f$$

$$z_H^{CP} = -\frac{\gamma \sin\theta \cdot I_{XX}}{p_{CG} A} = -\frac{\gamma \sin\theta \cdot I_{XX}}{\gamma h_{CG} A} = -\frac{\left(10 \times 8^3/12\right)}{4 \cdot (8 \times 10)} = -1,33\, ft$$

$$F_V = \gamma \cdot Volumen = \gamma \cdot\, fondo \cdot área = 62,4 \cdot 10 \cdot \left(8 \times 8 - \frac{\pi}{4} \cdot 8 \times 8\right)$$

$$= 8570 lb_f$$

$$x_{CG} = \frac{M_1 \cdot X_{CG1} - M_2 \cdot X_{CG2}}{M_1 - M_2} = \frac{A_1 \cdot X_{CG1} - A_2 \cdot X_{CG2}}{A_1 - A_2}$$



$$= \frac{4 \cdot 64 - \frac{\pi}{4} \cdot 64 \cdot \left(\frac{4R}{3\pi}\right)}{64 - \frac{\pi}{4} \cdot 64} = 6,213\, ft; \text{ (tomando el origen en el centro del círculo)}$$

Para el peso propio de la compuerta se debe calcular el CG

$$x_{CG}=\frac{\int xdl}{L}=\frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} R\sin\theta R d\theta}{\pi R/2}$$

$$=\frac{2R}{\pi}=5,093\,ft;\text{(tomando el origen en el centro del círculo)}$$

Tomamos el torque respecto a la rótula

$$\sum\vec{T}=\vec{r}_H\times\vec{F}_H+\vec{r}_V\times\vec{F}_V+\vec{r}_P\times\vec{F}_P+\vec{r}_A\times\vec{F}_A$$

$$=\left(4-1,33\right)\cdot 19968+\left(8-6,213\right)\cdot 8570$$

$$-\left(8-5,093\right)\cdot 3000-8\cdot F_A=0$$

$$\Rightarrow F_A=7480lb_f\ \text{(el sentido es hacia abajo)}$$

Fuerza de empuje y flotación

Principios de Arquímides

- Un cuerpo inmerso experimenta una fuerza de empuje hacia arriba igual al peso del líquido desplazado
- Un cuerpo flotante desplaza su propio peso en el fluido en el cual flota

Ej: Un de agua vaso con hielo tiene hielo sobre la superficie tal cual lo indica la figura. ¿Si se derrite el hielo, se rebalsará el vaso?

Sea V_1 el volumen de hielo bajo la línea de flotación y

V_2 el volumen de hielo por sobre la línea de flotación.

$$V_i = \frac{m_W}{\rho_W} + \left(V_1 + V_2\right) \text{ y } V_f = \frac{m_W}{\rho_W} + \frac{\left(V_1 + V_2\right)\rho_{ice}}{\rho_W} \quad \text{(todo el hielo se derritió)}$$

Por el balance de fuerzas

$$F_b = \gamma_W V_1 = W_{ice} = \gamma_{ice}\left(V_1 + V_2\right), \text{ reemplazando en } V_f$$

$$V_f = \frac{m_W}{\rho_W} + \frac{\left(V_1 + V_2\right)\rho_{ice}}{\rho_W} \cdot \frac{\gamma_W V_1}{\gamma_{ice}\left(V_1 + V_2\right)} = \frac{m_W}{\rho_W} + V_1$$

$\Rightarrow$ No se rebalsa

Presión y movimiento de cuerpo rígido

Recordando una expresión anterior

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{presión} + \vec{F}_{gravedad} + \vec{F}_{roce}$$

Si hay movimiento de cuerpo rígido $\vec{F}_{roce} = 0$

$$\rho\vec{a}dxdydz = \left(\rho\vec{g} - \nabla p\right)dxdydz \Rightarrow \nabla p = \rho\left(\vec{g} - \vec{a}\right)$$

De la cinemática de cuerpo rígido sabemos que:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_0$$

donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular y $\vec{r}_0$ el vector posición.

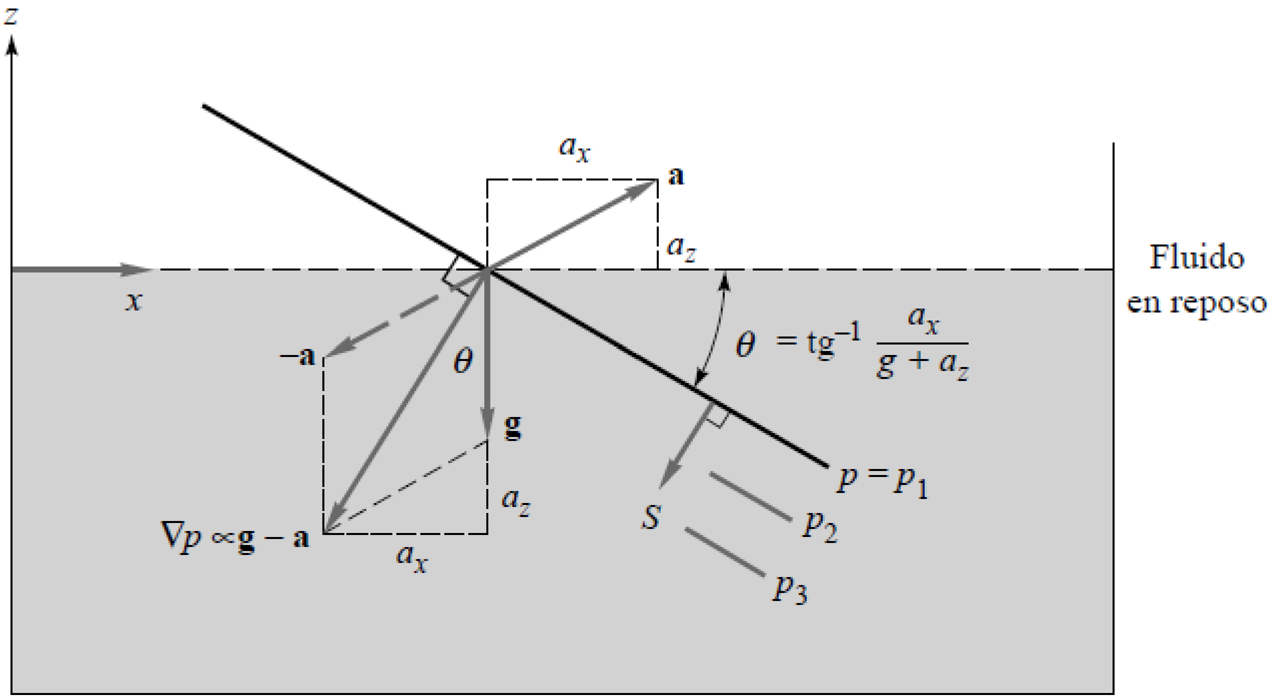
Derivando se obtiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_0\right) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}_0$$

Ej: Un tanque de agua está en caída libre bajo la acción de la gravedad. Suponiendo un roce despreciable calcule la presión en el fondo del estanque

Como es un un cuerpo en caída libre su movimiento está descrito por $\vec{a} = \vec{g}$ entonces $\nabla p = \rho\left(\vec{g} - \vec{a}\right) = 0 \Rightarrow p$ es constante e igual a p_{at}

Aceleración uniforme lineal

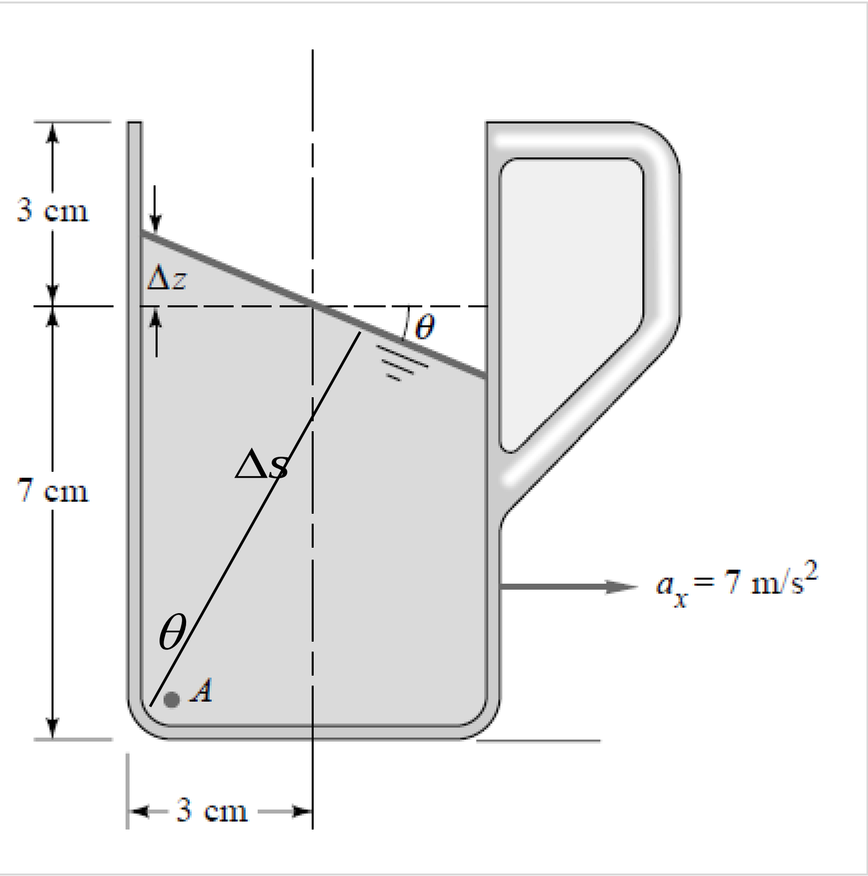


La dirección de máximo aumento de la presión se da en $\left(\nabla p / \|\nabla p\|\right)$ o equivalentemente en $\left(\vec{g} - \vec{a}\right)$, luego las isolíneas de presión son perpendiculares a $\left(\vec{g} - \vec{a}\right)$. Realizando geometría simple se llega a:

$$\theta = \mathrm{atan}\left(\frac{a_x}{g + a_z}\right) \text{ y } \frac{dp}{ds} = \rho\sqrt{{a_x}^2 + \left(g + a_z\right)^2}$$

Ejemplo: Una cinta transportadora lleva una taza de café sobre una bandeja horizontal mientras se acelera a $7\ m/s^2$. La taza tiene $10 cm$ de profundidad y $6\ cm$ de diámetro y el café que contiene llega hasta $3\ cm$ del borde en reposo.

a)¿Se derramará café? ; b) ¿Cuál es la máxima presión sobre la taza si $\rho_{café} = 1010\ kg/m^3$?



a) $\theta = \text{atan}\left(\dfrac{a_x}{g+a_z}\right) = \text{atan}\left(\dfrac{7}{9,8+0}\right)$

$\Rightarrow \theta = 35,5°$

$\Rightarrow \Delta z = r\tan\theta = 3\tan(35,5°) = 2,14$

$\Rightarrow$ No se rebalsa

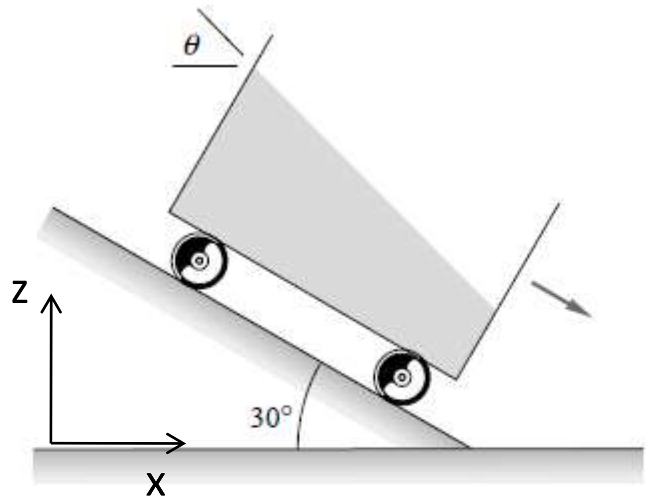
b) $\dfrac{dp}{ds} = \rho\sqrt{a_x^{\ 2} + (g+a_z)^2}$

$\dfrac{dp}{ds} = 1010\sqrt{7^2 + (9,8)^2} = 12170,5$ Pa/m

Pero $\Delta s = (7+\Delta z)\cos\theta = 7,44$cm

$\Rightarrow \Delta p = 12170,5$ Pa/m $\times\ 7,44$ cm $= 906$ Pa

Ejemplo : El estanque de la figura se mueve por una cuña con roce despreciable. ¿Cuánto vale θ? Interprete físicamente el resultado



Como no hay roce

$$\vec{a} = \left(g\sin 30°\right)\cos 30°\hat{\imath} - \left(g\sin 30°\right)\sin 30°\hat{k}$$

Aplicando la fórmula $\theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{a_x}{g + a_z}\right)$ se llega a:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{g\sin 30°\cos 30°}{g - g\sin^2 30°}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin 30°\cos 30°}{\cos^2 30°}\right) = 30°$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

En este caso $\vec{a} = \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right) = \Omega \hat{k} \times \left(\Omega \hat{k} \times r\hat{r} \right) = -\Omega^2 r\hat{r}$

reemplazamos

$$\nabla p = \rho \left(\vec{g} - \vec{a} \right) = \rho \left(-g\hat{k} + \Omega^2 r\hat{r} \right)$$

resolvemos las EDOs

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \Omega^2 \rho r; \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

$$\Rightarrow\ p(r,z) = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho r^2 + f(z),\ \text{luego}\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma = f'(z)$$

$$\Rightarrow\ f(z) = -\gamma z + cte \Rightarrow\ p(r,z) = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho r^2 - \gamma z + cte$$

Para hallar el valor de la cte se necesita saber la presión en un punto, por ejemplo se puede elegir el S.R. en la superficie libre

$$p(r=0, z=0) = p_{at} \Rightarrow\ p(r,z) = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho r^2 - \gamma z + p_{at}$$

La iso-superficie de valor p_{at} se calcularía de

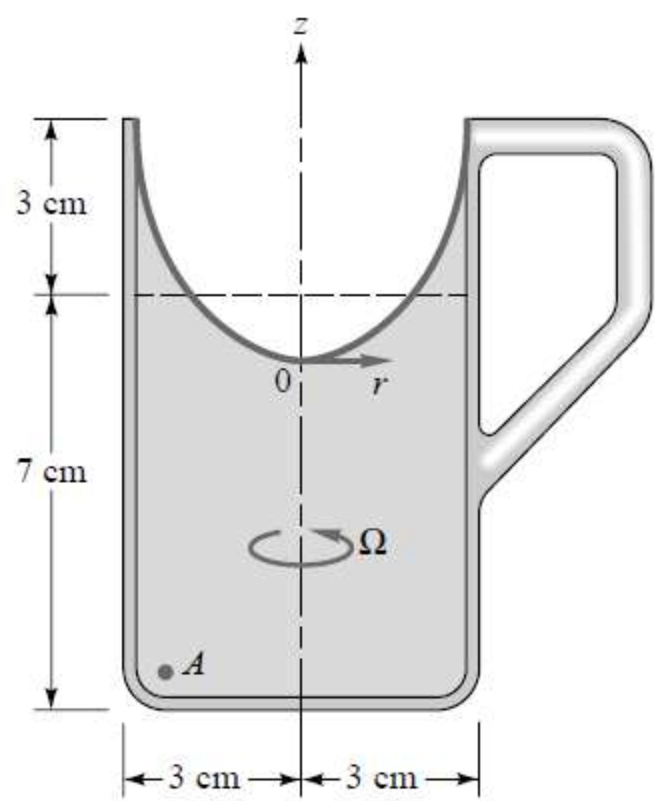
$$p_{at} = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho r^2 - \gamma z + p_{at} \Rightarrow z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 \text{ (paraboloide de revolución)}$$

Para cualquier otra superficie

$$z = \frac{p_{at} - p}{\gamma} + \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

Ejemplo: La misma taza de café del ejemplo anterior ahora rota en torno a su eje de forma que el café llega al borde.

a)¿A qué Ω rota? b) ¿Cuál es la presión máxima que sufre la taza?



Si intentamos resolver este problema utilizando la expresión anterior tenemos la dificultad de que no se sabe cuanto "bajó" la superficie libre, luego eso es lo primero que se debe calcular.

El volumen de un sólido de revolución está dado por:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi x f(x) dx$$

y en este caso sería

$$\mathrm{V} = \int_{x_0=0}^{x_1=R} 2\pi x \left(\frac{\Omega^2}{2g} x^2 \right) dx = \frac{\pi \Omega^2 R^4}{4g}$$

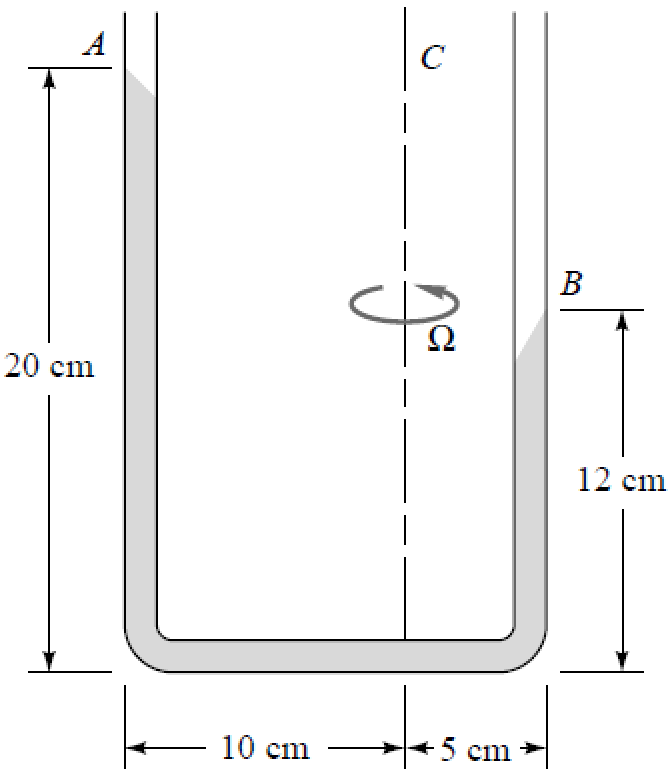
por otro lado el volumen "total" es $\pi R^2 z = \pi R^2 \frac{\Omega^2 R^2}{2g} = \frac{\pi \Omega^2 R^4}{2g}$

$\Rightarrow$ el líquido baja $\frac{z}{2}$ en el centro y sube $\frac{z}{2}$ en los bordes.

Con esta información entonces $z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 \Rightarrow 6 = \frac{\Omega^2}{2 \cdot 9{,}8} 3^2 \Rightarrow \Omega = 36{,}16$ rad/s

Para b) se tiene que $p(z = -4, r = 3) = p_{at} + \frac{1}{2} \Omega^2 \rho r^2 - \gamma z = p_{at} + 990$ Pa

Ejemplo: ¿A qué velocidad angular debe girar el U-tubo en torno al eje *C* para obtener la configuración de la figura? El fluido es mercurio a 20°C



Recordemos que las iso-líneas de presión tienen la forma

$$p(r,z) = \frac{1}{2}\Omega^2 \rho r^2 - \gamma z + cte$$

En este problema tenemos dos puntos pertenecientes a la iso-línea $p(r=5, z=12) = p_{at}$ y $p(r=10, z=20) = p_{at}$ y dos incógnitas Ω y cte

$\Rightarrow \Omega = 14,47$ rad/s