Listado 6: Problemas de valores iniciales

1. Problemas con papel y lápiz

1. Con los métodos de Adams-Bashforth de dos y tres pasos y el valor de h dado en cada caso, calcule aproximaciones a la solución exacta de los siguientes problemas de valores iniciales. Utilice las soluciones exactas dadas más adelante para calcular los valores iniciales que necesite en cada caso.

   (a)
   $$y'(x) = 1 + \frac{y(x)}{x}, \; x \in [1,4], \qquad h = \frac{1}{2}.$$
   $$y(1) = 1.$$

   (b)
   $$x'(t) = \frac{t}{x(t)}, \; t \in [0,3], \qquad h = \frac{1}{2}.$$
   $$x(0) = 1.$$

   (c)
   $$y'(t) = \frac{e^t}{y(t)}, \; t \in [0,2], \quad h = \frac{1}{2}.$$
   $$y(0) = 1.$$

   (d)
   $$x'(t) = t - x(t), \; t \in [0,4], \quad h = 1.$$
   $$x(0) = 1.$$

   Sabiendo que las soluciones exactas de los problemas anteriores son las siguientes, determine el error de aproximación global en el extremo superior del intervalo de integración para cada método empleado:

   (a) $y(x) = x\,(1 + \ln(x))$.
   (b) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$.
   (c) $y(t) = \sqrt{2e^t - 1}$.
   (d) $x(t) = 2e^{-t} + t - 1$.

2. Con los métodos de Adams-Moulton de uno y dos pasos[1] y el valor de h especificado en cada caso, calcule aproximaciones a la solución exacta de los problemas de valores iniciales $1a$ y $1d$. Determine en cada caso el error de aproximación global en el extremo superior del intervalo de integración. Utilice las soluciones exactas dadas más adelante para calcular los valores iniciales que necesite en cada caso.

3. Considere el problema de valores iniciales (PVI):

   $$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in]a, b[,$$
   $$y(a) = y_a.$$

   De manera similar a como se define el error de truncamiento local para métodos explícitos de un paso, puede definirse éste para métodos implícitos o métodos de paso múltiple:

[1] Métodos que se obtienen con $k = 1$ (de un paso) y $k = 2$ (de dos pasos).

(a) Para Euler implícito:

$$\tau_h(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x+h, y(x+h)).$$

(b) Para Adams-Bashforth de dos pasos:

$$\tau_h(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{1}{2}\left(3f(x, y(x)) - f(x-h, y(x-h))\right).$$

(c) Para Adams-Moulton de un paso (Euler-Cauchy implícito):

$$\tau_h(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(x+h, y(x+h)) + f(x, y(x))\right).$$

Demuestre, con ayuda de expansiones de Taylor de $y(x)$ y de $g(x) := f(x, y(x))$ alrededor de x, que Euler implícito es consistente de orden 1 y que el orden de consistencia de los restantes dos métodos es 2.

4. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -x(t) - 2y(t), \qquad t \in [0,1], \\ x(0) = 2,\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

(a) Escriba el problema anterior en la forma $z'(t) = Az(t)$ con $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

(b) Escriba Euler explícito para la solución de este problema en la forma $z_{j+1} = Bz_j$.

(c) Escriba Euler implícito para la solución de este problema en la forma $Cz_{j+1} = z_j$. ¿Es C invertible para cualquier $h > 0$?

(d) Determine aproximaciones a $z(1)$ con los métodos de Euler explícito y Euler implícito tomando $h = \frac{1}{4}$.

5. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + z(t), \\ y'(t) &= 2y(t) + z(t), \\ z'(t) &= -z(t), \qquad t \in [0,1], \\ x(0) = 1,\ y(0) &= -1,\ z(0) = 1. \end{aligned}$$

(a) Escriba el problema anterior en la forma $w'(t) = Aw(t)$ con $w(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

(b) Escriba Euler explícito para la solución de este problema en la forma $w_{j+1} = Bw_j$.

(c) Escriba Euler implícito para la solución de este problema en la forma $Cw_{j+1} = w_j$. ¿Es C invertible para cualquier $h > 0$?

(d) Determine aproximaciones a $w(1)$ con los métodos de Euler explícito y Euler implícito tomando $h = \frac{1}{4}$.

6. Convierta cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales en un sistema de orden 1.

   (a)

$$\begin{aligned} x'''(t) + \frac{1}{2}x(t)x''(t) &= 0, \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) &= 1. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x'''(t) + 4x''(t) + 5x'(t) &= 0, \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) &= -1. \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} x''(t) + (x(t)^2 - 1)x'(t) + x(t) &= 0, \quad t \in [0,1], \\ x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) &= 0.1. \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} x''(t) + 4x'(t) + x(t) &= \mathrm{sen}(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 1,\ x'(0) &= 0. \end{aligned}$$

   Continúe en el problema 1 de la siguiente sección.

2. Experimentos computacionales

1. Considere los problemas de valores iniciales en problema 6 de sección anterior. Resuelva cada uno de ellos, con ayuda de MATLAB con los siguientes esquemas numéricos y los siguientes tamaños de paso.

   (a) Método de Runge-Kutta cuya tabla de Butcher es la siguiente y $h = \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

   (b) Adams-Bashforth de dos pasos [2], $h = \frac{1}{4}$. El valor inicial adicional que necesita, calcúlelo con un método de Runge-Kutta de orden mayor o igual que 2. ¿Puede utilizar la aproximación que calculó en ítem anterior?

   (c) Adams-Bashforth de cuatro pasos [3], $h = \frac{1}{6}$. Los valores iniciales adicionales que necesita, calcúlelos con RK4.

   (d) RK4 (método de orden 4), cuya tabla es la siguiente, $h = \frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

[2] Método que se obtiene con $k = 1$

[3] Método que se obtiene con $k = 3$

(e) Método Predictor-Corrector de orden cuatro y $h = \frac{1}{6}$.

Un método Predictor-Corrector de orden 4 es el siguiente: dadas aproximaciones $y_0, y_1, \dots, y_j$ a $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_j)$ calcular y_{j+1} como sigue:

- Paso 1: Calcular $\hat{y}_{j+1}$ con AB de 4 pasos, es decir,

$$\hat{y}_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}\left(55 f_j - 59 f_{j-1} + 37 f_{j-2} - 9 f_{j-3}\right).$$

- Paso 2: Reemplazar y_{j+1} en parte derecha de AM de 3 pasos por $\hat{y}_{j+1}$ y obtener así y_{j+1}, es decir,

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}\left(9 f(x_{j+1}, \hat{y}_{j+1}) + 19 f_j - 5 f_{j-1} + f_{j-2}\right).$$

Las aproximaciones iniciales adicionales que necesite, obténgalas con un método de un paso y orden 4.

2. En este experimento comprobaremos que en métodos de paso múltiple consistencia y convergencia no son equivalentes. Para ello resolveremos el siguiente problema de valores iniciales

$$x'(t) = 4t\frac{\sqrt{x(t)^2+1}}{x(t)}, \quad t \in [0,5] \tag{1a}$$

$$x(0) = 1, \tag{1b}$$

cuya solución exacta es $x(t) = \sqrt{(2t^2+\sqrt{2})^2-1}$, con uno de los siguientes métodos de paso múltiple y tamaño de paso h

$$x_j = \sqrt{(2(jh)^2+\sqrt{2})^2-1},\ j = 0,1,2, \tag{2a}$$

$$x_j = -\alpha(x_{j-1}-x_{j-2}) + x_{j-3} + (\alpha+3)\frac{h}{2}\left(f_{j-1}+f_{j-2}\right),\ j = 3,4,\dots,\frac{5}{h}, \tag{2b}$$

siendo α un número real, dando valor a α se construye un método de paso múltiple.

Sea $\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}\right\} = \left\{\frac{1}{2^i} : i \in \{1,2,\dots,8\}\right\}$. Escriba un código MATLAB en el que:

(a) Resuelva el problema (1) con (2), $\alpha = 0$ y $h \in \mathcal{C}$. Para cada valor de h calcule

$$\tau_h = \frac{|x(3h)-x_3|}{h}, \quad e_h = \max_{0\le j\le 5/h} |x(jh)-x_j|.$$

Guarde los valores resultantes en un vector, serán utilizados para estimar cuáles podrían ser los órdenes de convergencia y consistencia del esquema numérico.

(b) Calcule, para los pares de valores $h_1 = \frac{1}{2^i}, h_2 = \frac{1}{2^{i+1}}$, $i \in \{1,2,\dots,7\}$, los cocientes

$$\frac{\log\left(\frac{\tau_{h_1}}{\tau_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)},$$

que, si se asemejan, son un indicador del orden de consistencia del método.

(c) Calcule, para los pares de valores $h_1 = \frac{1}{2^i}, h_2 = \frac{1}{2^{i+1}}$, $i \in \{1,2,\dots,7\}$, los cocientes

$$\frac{\log\left(\frac{e_{h_1}}{e_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \tag{3}$$

que, si se asemejan, son un indicador del orden de convergencia.

(d) Repita el experimento anterior (los tres ítemes anteriores), pero con $\alpha = 2$.

(e) ¿Cuál de los dos métodos (el método con $\alpha = 0$ o el método con $\alpha = 2$) debería ser consistente? ¿Cuál puede ser su orden de consistencia? ¿Cree que ambos métodos deben ser convergentes? ¿Cuál puede ser el orden de convergencia de cada uno? [4]

3. La ecuación de van der Pol

$$x'' - \varepsilon\left(1 - x^2\right)x' + x = 0, \qquad t \in [0, T]$$

modela un oscilador con amortiguamiento no lineal. Fue propuesta por primera vez por Balthasar van der Pol alrededor de 1920 para describir el comportamiento de un circuito formado por un inductor, una resistencia y un capacitor, colocados en serie.

Estudiemos el comportamiento de este problema para distintos valores de ε.

(a) Transforme la ecuación anterior a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1.

(b) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 20, \qquad \varepsilon = 0, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t), donde x_t representa la aproximación a $x(t)$ obtenida con el esquema numérico. Note que en este caso la solución exacta del problema es una función sinusoidal.

(c) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 20, \qquad \varepsilon = 4, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t). Note que en este caso la solución sigue siendo periódica, pero no tiene forma de función sinusoidal. ¿Cuántos pasos realiza `ode45` para resolver el problema con las tolerancias dadas? La cantidad de pasos que realiza el método es la cantidad de puntos en $[0, T]$ en los que el método calcula aproximaciones a la solución exacta del problema.

(d) Resuelva el problema de valores iniciales que resulta si

$$T = 200, \qquad \varepsilon = 40, \qquad x(0) = 0.75, \qquad x'(0) = 0.$$

Utilice para ello `ode45` y tolerancia, tanto absoluta como relativa, igual a 10^{-6}. Grafique los pares (t, x_t). ¿Cuántos pasos realiza `ode45` para resolver el problema con las tolerancias dadas? Una particularidad de la ecuación de van der Pol es su comportamiento *stiff* para valores grandes de ε. Para estos valores es conveniente utilizar un método adecuado para problemas *stiff*, ellos podrán calcular una aproximación con la misma exactitud, pero en menos tiempo.

(e) Resuelva el mismo problema anterior, pero utilice esta vez `ode15s`, también con tolerancias iguales a 10^{-6}. ¿Cuántos pasos realiza `ode15s` para resolver el problema con las tolerancias dadas?

(f) Si continuamos aumentando el valor de ε el problema es cada vez más difícil de resolver por `ode45`. Con $\varepsilon = 40$ la cantidad de pasos que realiza `ode45` es un poco más del doble de la cantidad de pasos que realiza `ode15s`. Pero, ¿qué ocurre si $\varepsilon = 100$ y $T = 500$?

[4] El experimento que hemos realizado no nos permite asegurar ni la consistencia ni la convergencia de los esquemas numéricos, solo nos permite intuir si los esquemas son consistentes, si son convergentes y, en caso de serlo, cuáles podrían ser sus órdenes de consistencia y convergencia.

4. La forma de la solución exacta de un PVI no determina si el problema es o no stiff.

   Considere los siguientes problemas de valores iniciales

$$x'(t) = -2x(t) + y(t) + 2\operatorname{sen}(t), \qquad t \in [0, 10], \tag{4a}$$
$$y'(t) = x(t) - 2y(t) + 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t), \tag{4b}$$
$$x(0) = 2,\ y(0) = 3 \tag{4c}$$

   y

$$x'(t) = -2x(t) + y(t) + 2\operatorname{sen}(t), \qquad t \in [0, 10], \tag{5a}$$
$$y'(t) = 998x(t) - 999y(t) + 999\cos(t) - 999\operatorname{sen}(t), \tag{5b}$$
$$x(0) = 2,\ y(0) = 3. \tag{5c}$$

   Ambos tienen la misma solución exacta

$$x(t) = 2e^{-t} + \operatorname{sen}(t), \qquad y(t) = 2e^{-t} + \cos(t),$$

   sin embargo, el primero de ellos no es un problema stiff y el segundo sí lo es. Para comprobarlo:

   (a) Resuelva el primer problema con `ode15s` y `ode113`. El primero de los métodos es adecuado para problemas stiff, el segundo no lo es. ¿Cuántas aproximaciones a $x(t)$ e $y(t)$ calculó cada método?

   (b) Grafique, en una misma figura, las aproximaciones a $x(t)$ obtenidas con ambos métodos y la solución exacta, evaluada en 1000 puntos entre 0 y 10.

   (c) Repita los ítems anteriores, pero resuelva esta vez el segundo problema.

   (d) Calcule el error global de cada método aplicado a cada PVI. A continuación se explica cómo calcular el error global en MATLAB.

   En clase de definió el error global de un esquema numérico para la solución del problema de valores iniciales

$$x'(t) = f(t, x(t)), t \in [a, b], \quad x(a) = x_a$$

   como

$$e_h = \max_{0\le j\le N} |x(a + jh) - x_j|, \texttt{ con } N = \frac{b-a}{h}.$$

   Si la solución al problema de valores iniciales es una función $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, entonces

$$e_h = \max_{0\le j\le N} \|x(a + jh) - x_j\|, \texttt{ con } N = \frac{b-a}{h},$$

   donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Usualmente se toma una de las normas p, $p \ge 1$.

   Los esquemas en MATLAB para la solución de problemas de valores iniciales no dividen el intervalo de integración en subintervalos del mismo tamaño h, pero también puede calcularse el error global asociado a ellos: si el esquema calcula aproximaciones a la solución exacta del PVI en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_N$ (no necesariamente igualmente espaciados), entonces

$$e_h = \max_{0\le j\le N} \|x(t_j) - x_j\|, \quad (x_j \texttt{ denota la aproximación a } x(t_j)).$$

   El comando `vecnorm` de MATLAB permite calcular e_h utilizando una de las normas p de $\mathbb{R}^n$: suponga que el comando `ode113` retorna el vector `t` (contiene los valores $t_0, t_1, \ldots, t_N$) y la matrix `X`, que tiene tantas filas como elementos tiene `t` y n columnas (observe que para cada $t \in [a, b]$, $x(t)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$). El vector e_h puede calcularse como sigue:

- Paso 1, evaluamos solución exacta en `t`:
  `Xex = solex(t)` si `solex` es una función MATLAB que retorna una matriz con las mismas dimensiones que `X`, pero sus componentes son los valores que resultan de evaluar en `t` a la solución exacta del PVI.
- Paso 2, calcular e_h con ayuda de los comandos MATLAB `vecnorm` y `max`:
  $e_h =$ `max(vecnorm(X-Xex,p,2))`, donde p es un número real mayor o igual que 1 o `Inf`, si queremos utilizar la norma infinito.