

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (521218-525221)

Listado 6

Sistemas Lineales de EDO: Primera Parte

Problemas a resolver en práctica

1. Escriba la EDO lineal de orden 3 que sigue, como un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$x'''(t) - t^3 x''(t) + 4e^{-3t} x'(t) + 2t x(t) = t^2 e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Desarrollo:

Haciendo $\begin{cases} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \\ y_3(t) = x''(t), \end{cases}$ obtenemos el sistema $\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = y_3(t) \\ y'_3(t) = x'''(t). \end{cases}$

Notemos que la última ecuación es:

$$y'_3(t) = x'''(t) = -2tx(t) - 4e^{-3t}x'(t) + t^3x''(t) + t^2e^{3t}$$

Por tanto, el sistema requerido, es

$$\begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = y_3(t) \\ y'_3(t) = -2ty_1(t) - 4e^{-3t}y_2(t) + t^3y_3(t) + t^2e^{3t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que en forma matricial, el sistema de EDO anterior, se expresa como:

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2t & -4e^{-3t} & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Considere el sistema $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \quad t \in \mathbb{R}$, siendo $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (i) Muestre que las funciones vectoriales $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, por

$\mathbf{u}(t) := e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w}(t) := e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, son solución del sistema dado.

- (ii) Muestre que toda combinación lineal $c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3\mathbf{w}(t)$ es también solución del sistema dado (c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias).

(iii) Muestre que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente en el conjunto de las funciones vectoriales (por columnas) de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 .

Solución.

(i) Primero comprobamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $\exp'(\lambda x) = \lambda \exp(\lambda x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\frac{d}{dt} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \left(e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\frac{d}{dt} e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \left(e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

y

$$\frac{d}{dt} e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \left(e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(ii) Como la derivada es lineal,

$$\frac{d}{dt} (c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \mathbf{w}(t)) = c_1 \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) + c_2 \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + c_3 \frac{d}{dt} \mathbf{w}(t).$$

Del inciso (i) tenemos que

$$\begin{aligned} c_1 \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) + c_2 \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + c_3 \frac{d}{dt} \mathbf{w}(t) &= c_1 \mathbf{A} \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{A} \mathbf{v}(t) + c_3 \mathbf{A} \mathbf{w}(t) \\ &= \mathbf{A} (c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \mathbf{w}(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} (c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \mathbf{w}(t)) = \mathbf{A} (c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \mathbf{w}(t)).$$

(iii) El Wronskiano de \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , evaluado en $t = 0$, es igual a

$$W[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad (\text{matriz es triangular inferior}),$$

luego es diferente de 0. Por ende $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ resulta ser un conjunto linealmente independiente.

3. Considere el sistema no homogéneo

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t).$$

Verifique que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{X}_p(t) := e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, es una solución, cuando $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{F}(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Desarrollo

Calculamos la derivada de $\mathbf{X}_p(t)$:

$$\mathbf{X}'_p(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (e^t + t e^t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De otra parte, para $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_p(t) + \mathbf{F}(t) = e^t \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos $\mathbf{X}'_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}_p(t) + \mathbf{F}(t)$ y por tanto $\mathbf{X}_p(t)$ es una solución (particular) del sistema de EDOs propuesto.

4. Resuelva $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t), & y(0) = 1, \end{cases}$

Desarrollo:

En este caso la matriz de los coeficientes \mathbf{A} es dada por $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3$. Así, los valores propios de \mathbf{A} son:

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1 \quad (\text{ambos simples}).$$

Para los vectores propios determinamos los espacios propios

$$S_{\lambda_1} = \text{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) \quad \text{y} \quad S_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}).$$

Realizando los cálculos correspondientes (DEJADOS DE EJERCICIO AL LECTOR), resulta:

$$S_{\lambda_1} = \text{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$S_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

De lo anterior, se desprende que $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de \mathbf{A} .

Invocando la PROPIEDAD enunciada al principio, las funciones vectoriales (por columnas):

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{X}_1(t) := e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{X}_2(t) := e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema dado. Además, en vista que el Wronskiano de \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 , evaluado en $t = 0$, es $W[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2](0) = -4 \neq 0$, se infiere que el conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ es linealmente independiente. Así, la SOLUCIÓN GENERAL, del sistema dado, se expresa como:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Ahora usamos las condiciones iniciales para determinar c_1 y c_2 . Tomando $t = 0$ en la solución general, e igualando con el vector inicial del PVI, obtenemos

$$\mathbf{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 3c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, se resuelve sin mayores dificultades. Al adicionar las dos filas obtenemos $4c_1 = 3$, esto es, $c_1 = 3/4$, y luego substituyendo en la primera ecuación, obtenemos $c_2 = 2 - c_1 = 5/4$. Así, la única solución del PVI dado es

$$\mathbf{X}(t) = \frac{3}{4} e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Usando valores y vectores propios, determine la solución del PVI

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 3z(t), \\ y'(t) = -3y(t), \\ z'(t) = 3x(t) + 2z(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2. \end{cases}$$

Solución: La forma matricial del sistema es $X(t) = A \cdot X'(t)$ donde $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos los valores propios de A :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 3 \\ 0 & -3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Luego $|A - \lambda I| = 0$ si $\lambda = -3 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 5$, por lo tanto los valores propios de A son $-3, -1$ y 5 .

Determinamos los vectores propios de A : Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $(A - \lambda I)v = \theta_{\mathbb{R}^3}$

a) Si $\lambda = -3$:

$$(A + 3I)v = \theta_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5x - y + 3z \\ 0 \\ 3x + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, $3x + 5z = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{5}x$, reemplazando lo obtenido se tiene que $5x - y + 3z = \frac{16}{5}x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{5}x$.

Con $x = 5$, se obtiene que $S_{-3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ por lo que un vector propio de A asociado a $\lambda = -3$ es $\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Si $\lambda = -1$:

$$(A + I)v = \theta_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x - y + 3z \\ -2y \\ 3x + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$, reemplazando lo obtenido se tiene que $3x + 3z = 0 \Rightarrow z = -x$.

Con $x = 1$, se obtiene que $S_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ por lo que un vector propio de A asociado a $\lambda = -1$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Si $\lambda = 5$:

$$(A + I)v = \theta_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3x - y + 3z \\ -8y \\ 3x - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, $-8y = 0 \Rightarrow y = 0$, reemplazando lo obtenido se tiene que $3x - 3z = 0 \Rightarrow z = x$.

Con $x = 1$, se obtiene que $S_5 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ por lo que un vector propio de A asociado a $\lambda = 5$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego $\left\{ e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema fundamental de soluciones del sistema dado, por lo tanto la solución general del sistema es

$$X(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Para determinar las constantes c_1, c_2 y c_3 , sabemos que

$x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 2$; por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver el sistema anterior usamos transformaciones elementales, esto es,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & ; 1 \\ 16 & 0 & 0 & ; -1 \\ -3 & -1 & 1 & ; 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & ; 3 \\ 16 & 0 & 0 & ; -1 \\ -6 & -2 & 2 & ; 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & ; 3 \\ 16 & 0 & 0 & ; -1 \\ 0 & -2 & 8 & ; 13 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene:

$$c_1 = (-1/16), c_2 = (-1/4), c_3 = (25/16).$$

Finalmente, la única solución al PVI dado es

$$X(t) = (-1/16)e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1/4)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (25/16)e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Exprese el sistema de ecuaciones diferenciales dado como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2y'(t) + 2x(t) = 0, t \in \mathbb{R} \\ y''(t) - x'(t) = y'(t) + y(t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Desarrollo.

Introducimos las funciones $\mathbb{R} \ni t \mapsto z_k(t)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, tales que $z_1 := x$, $z_2 := x'$, $z_3 := y$, $z_4 := y'$.

Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \\ z'_3(t) \\ z'_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ 3z_2(t) - 2z_4(t) - 2z_1(t) \\ z_4(t) \\ z_2(t) + z_4(t) + z_3(t) \end{pmatrix}.$$

En forma matricial, el sistema EDO de primer orden (lineal) se expresa como

$$\begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \\ z'_3(t) \\ z'_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Verifique que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ t e^t \\ e^t(t + \frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$ es solución del sistema

$$\mathbf{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Muestre que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{Z}_p(t) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{32} - \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}$, es una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + t. \end{cases}$$

4. Exprese la EDO / sistema EDO lineal de alto orden dada(o) como un sistema EDO lineal de primer orden.

(i) $y'''(t) - (t-1)y''(t) - t^2y'(t) + y(t) = \sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\begin{cases} x''(t) - x(t) + y(t) = \sin(t) \\ x' + 3y' = e^t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\begin{cases} x''(t) = 3x'(t) + 4y'(t) - x(t) \\ y''(t) = 3x'(t) + y'(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Verifique que $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$, es un **conjunto fundamental** de soluciones para el sistema de EDO homogéneo.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$