

Análisis Numérico III

Introducción al Método de Elementos Finitos

Módulo 6, Presentación 13

Raimund Bürger

11 de julio de 2022

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

La EDO de segundo orden **autoadjunta**

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = g(x) \quad (6.1)$$

es la **ecuación diferencial de Euler** del problema variacional

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_a^b (p(x)(u')^2 + q(x)u^2 - 2g(x)u) dx \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (6.2)$$

Cada función $y = y(x)$, $y \in C^2[a, b]$, que minimiza $I[u]$, es decir, que satisface

$$\forall u \in C^2[a, b] : \quad I[y] \leq I[u],$$

necesariamente es una solución de la EDO (6.1). Por otro lado, bajo ciertas hipótesis una solución $y = y(x)$, $y \in C^2[a, b]$, de (6.1) también es una solución del problema variacional $I[u] \stackrel{!}{=} \text{mín.}$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

La equivalencia entre ambos problemas que forma el fundamento de los **métodos variacionales**. Basicamente la idea de estos métodos es la **solución aproximada del problema variacional**, pero donde uno no se limita a funciones en $C^2[a, b]$. La solución aproximada del problema variacional también es considerada una solución aproximada de la ecuación diferencial.

Consideremos (6.1):

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = g(x)$$

junto con las **condiciones de borde**

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{6.3}$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Las condiciones se convierten en condiciones homogéneas si definimos

$$z(x) := y(x) - Q(x), \quad Q(x) := \alpha \frac{b-x}{b-a} - \beta \frac{a-x}{b-a},$$

de manera que

$$Q(a) = \alpha, \quad Q(b) = \beta, \quad \frac{dQ}{dx} = -\frac{\alpha - \beta}{b-a},$$

$$LQ = \frac{\alpha - \beta}{b-a} p'(x) + q(x)Q(x) =: f(x),$$

y definiendo $h(x) := g(x) - f(x)$, podemos escribir el problema de valores de frontera como

$$(Lz)(x) = h(x), \quad z(a) = z(b) = 0.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Podemos limitarnos a estudiar el problema de valores de frontera semi-homogéneo

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = g(x), \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (6.4)$$

Aquí se supone que

$$\begin{aligned} p &\in C^1[a, b], \quad q, g \in C^1[a, b], \\ p(x) &\geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

En este caso, el problema (6.4) posee una solución única $y \in C^2[a, b]$.

El dominio \mathcal{D} del operador diferencial L es el conjunto de todas las funciones en $C^2[a, b]$ que desaparecen en a y b :

$$\mathcal{D} := \{u \in C^2[a, b] \mid u(a) = u(b) = 0\}.$$

El PVF es equivalente al problema de encontrar una solución de

$$Lu = g, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (6.6)$$

Bajo las hipótesis (6.5) existe una solución única de este problema.

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ahora definimos el producto escalar

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x) \, dx, \quad u, v \in L^2[a, b]$$

y la norma

$$\|u\|_2 := (u, u)^{1/2}.$$

Un operador T con el dominio (de definición) D_T y la propiedad

$$\forall u, v \in D_T : \quad (u, Tv) = (Tu, v)$$

se llama **simétrico** o **autoadjunto** sobre D_T . Además, este operador se llama **definido positivo** si

$$\forall u \in D_T : \quad u \neq 0 \implies (Tu, u) > 0.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Teorema 6.1 El operador L es simétrico y definido positivo sobre \mathcal{D} .

Demostración Como $Lv = -(pv')' + qv$, obtenemos

$$\begin{aligned}(u, Lv) &= \int_a^b u(x) \left(-(p(x)v'(x))' + q(x)v(x) \right) dx \\ &= -u(x)p(x)v'(x) \Big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)) dx.\end{aligned}\tag{6.7}$$

El primer término en el lado derecho de (6.7) desaparece ya que $u \in \mathcal{D}$, y el segundo es simétrico con respecto a u y v , es decir,

$$(u, Lv) = (v, Lu) = (Lu, v).$$

Entonces, L es simétrico.

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Demostración del Teorema 6.1 (continuación) Para $u|_{[a,b]} \not\equiv 0$:

$$\begin{aligned}(Lu, u) &= \int_a^b \left(p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 \right) dx \\ &\geq p_0 \int_a^b (u'(x))^2 dx + \int_a^b q(x)(u(x))^2 dx \\ &\geq \frac{p_0}{(b-a)^2} \int_a^b (u(x))^2 dx > 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Aquí usamos la **desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales**

$$\begin{aligned}(u(x))^2 &= \left(\int_a^x 1 \cdot u'(\xi) d\xi \right)^2 \\ &\leq \int_a^x 1^2 d\xi \int_a^x (u'(\xi))^2 d\xi \leq (b-a) \int_a^b (u'(\xi))^2 d\xi \Rightarrow \\ \int_a^b (u(x))^2 dx &\leq \int_a^b \left((b-a) \int_a^b (u'(\xi))^2 d\xi \right) dx = (b-a)^2 \int_a^b (u'(\xi))^2 d\xi.\end{aligned}$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ahora, (6.7) implica

$$\begin{aligned}\forall u, v \in \mathcal{D} : \quad (u, Lv) &= (Lu, v) \\ &= \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)) \, dx.\end{aligned}$$

Pero la integral no existe sólo para $u, v \in \mathcal{D}$, sino que también (por ejemplo) para **funciones diferenciables por trozos** cuyas primeras derivadas sean **cuadráticamente integrables**. En general, consideraremos el espacio $V^r(a, b)$, donde $w \in V^r(a, b)$ si y sólo si

- a) $w \in C^{r-1}[a, b]$.
- b) Con la excepción de un número finito o a lo más numerable de puntos, $w^{(r-1)}$ es diferenciable en $[a, b]$.
- c) $w^{(r)} \in L^2[a, b]$, donde $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- d) Además, se requiere que

$$\|w\|_{V^r(a,b)} := \left(\int_a^b \sum_{\varrho=0}^r |w^{(\varrho)}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (6.8)$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Para $r = 0$, (a) y (b) son vacías, y (c) exige que

$$\|w\|_{V^0(a,b)} = \left(\int_a^b |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|w\|_2 < \infty,$$

es decir, $V^0(a, b) = L^2(a, b)$.

Ejemplo 6.1 Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos del tamaño h y definimos los nodos $x_i = a + ih$ para $i = 0, \dots, n$, $a + nh = b$. En este caso, los trazados poligonales

$$\begin{aligned} s_{\Delta}(x) &:= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + f_i \\ &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h} (x - x_i) + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

son elementos de $V^1(a, b)$ porque $s_{\Delta} \in C^0[a, b]$ y $s_{\Delta}(x)$ es diferenciable en todas partes con la excepción de los nodos x_1, \dots, x_{n-1} .

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ejemplo 6.1 (continuación) Finalmente, para $f \in C^1[a, b]$ resulta

$$s'_\Delta(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

lo que nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left((s_\Delta(x))^2 + (s'_\Delta(x))^2 \right) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((s_\Delta(x))^2 + (s'_\Delta(x))^2 \right) dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ahora sea

$$D := \{w \in V^1(a, b) \mid w(a) = w(b) = 0\},$$

y definimos la forma bilineal simétrica

$$[u, v] := \int_a^b (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)) dx, \quad u, v \in D. \quad (6.9)$$

Obviamente, $\mathcal{D} \subset D$. Para $u, v \in \mathcal{D} \subset D$ tenemos $[u, v] = (Lu, v)$.

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Si $g(x)$ denota la parte derecha de la ecuación diferencial (6.1), la siguiente expresión es bien definida para cada $u \in D$:

$$\begin{aligned} I[u] &= [u, u] - 2(u, g) \\ &= \int_a^b \left(p(x)(u'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 - 2u(x)g(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Teorema 6.2 Sea y la solución de (6.1) o (6.3), respectivamente. Entonces

$$\forall u \in D, u \neq y : \quad I[y] < I[u].$$

Demostración

1. Dado que $Ly = g$ e $y \in \mathcal{D}$, sabemos que

$$(u, g) = (u, Ly) = [u, y],$$

y según (6.10),

$$I[y] = [y, y] - 2(y, g) = (y, Ly) - 2(y, Ly) = -(y, Ly) = -[y, y].$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Demostración del Teorema 6.2 (continuación)

2. La simetría de $[\cdot, \cdot]$ implica que

$$[u - y, u - y] = [u, u] - 2[u, y] + [y, y].$$

Entonces podemos expresar $I[u]$ como

$$\begin{aligned} I[u] &= [u, u] - 2(u, g) \\ &= [u, u] - 2(u, Ly) \\ &= [u, u] - 2[u, y] + [y, y] - [y, y] \\ &= [u - y, u - y] - [y, y]. \end{aligned}$$

3. Pero en virtud de (6.9),

$$\forall u \in D, u \neq y : [u - y, u - y] > 0,$$

tal que

$$I[u] = [u - y, u - y] - [y, y] > -[y, y] = I[y]. \quad \blacksquare$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Si tenemos solamente $p(x), q(x) \geq 0$, entonces $(Lu, u) \geq 0$ para $u \in \mathcal{D}$ y $[u, u] \geq 0$ para $u \in D$. Si (6.1) o (6.3) posee la solución y ,

$$\forall u \in \mathcal{D} : \quad I[y] \leq I[u],$$

pero la función y **posiblemente no es única**.

Según el Teorema 6.2, el PVF (6.6) es resuelto si se ha encontrado la función y para la cual $I[u]$ asume su mínimo. En el **método de Ritz** (1908), se minimiza $I[u]$ de forma aproximada.

Se considera un **sub-espacio M -dimensional $D_M \subset D$** , por ejemplo generado por las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_M$. Como $D_M \subset D$, estas funciones deben satisfacer $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$, y toda función $v \in D_M$ puede ser representada como combinación lineal

$$v = \sum_{\mu=1}^M \alpha_{\mu} \varphi_{\mu}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Esta función v satisface

$$\begin{aligned} I[v] &= [v, v] - 2(v, g) \\ &= \left[\sum_{\mu=1}^M \alpha_{\mu} \varphi_{\mu}, \sum_{\nu=1}^M \alpha_{\nu} \varphi_{\nu} \right] - 2 \left(\sum_{\mu=1}^M \alpha_{\mu} \varphi_{\mu}, g \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^M \alpha_{\mu} \alpha_{\nu} [\varphi_{\mu}, \varphi_{\nu}] - 2 \sum_{\mu=1}^M \alpha_{\mu} (\varphi_{\mu}, g) \\ &=: \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Los números $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ se determinan en tal forma que $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ **asume su mínimo**. Una condición necesario para que eso ocurra es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M)}{\partial \alpha_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^M [\varphi_{\mu}, \varphi_{\nu}] \left(\frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial \alpha_i} \alpha_{\nu} + \alpha_{\mu} \frac{\partial \alpha_{\nu}}{\partial \alpha_i} \right) - (\varphi_i, g) = 0. \end{aligned}$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Dado que

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_i} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

podemos escribir

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^M [\varphi_i, \varphi_\nu] \alpha_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M [\varphi_\mu, \varphi_i] \alpha_\mu = \sum_{j=1}^M [\varphi_i, \varphi_j] \alpha_j,$$

por lo tanto los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ incógnitos deben satisfacer el sistema lineal

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_M)}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^M [\varphi_i, \varphi_j] \alpha_j - (\varphi_i, g) = 0, \quad i = 1, \dots, M.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Definiendo

$$a_{ij} := [\varphi_i, \varphi_j], \quad b_i := (\varphi_i, g), \quad (6.12)$$
$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}. \quad (6.13)$$

La matriz \mathbf{A} es **simétrica**.

Sea $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)^T \neq 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^M k_i \varphi_i =: w \in D_M, \quad w \neq 0,$$
$$0 < [w, w] = \sum_{i,j=1}^M [\varphi_i, \varphi_j] k_i k_j = \sum_{i,j=1}^M a_{ij} k_i k_j = \mathbf{k}^T \mathbf{A} \mathbf{k},$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Concluimos que el sistema lineal posee una solución única $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*)^T$. Ahora, según (6.11) y (6.12),

$$\Phi(\alpha) = \alpha^T \mathbf{A} \alpha - 2\alpha^T \mathbf{b}, \quad (6.14)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha^*)^T \mathbf{A} (\alpha - \alpha^*) &= \alpha^T \mathbf{A} \alpha - 2\alpha^T \mathbf{A} \alpha^* + (\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^* \\ &= \alpha^T \mathbf{A} \alpha - 2\alpha^T \mathbf{b} + (\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^* \quad (6.15) \\ &= \Phi(\alpha) + (\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^*. \end{aligned}$$

De (6.14) obtenemos con $\alpha = \alpha^*$ y $\mathbf{A} \alpha^* = \mathbf{b}$:

$$\Phi(\alpha^*) = (\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^* - 2(\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^* = -(\alpha^*)^T \mathbf{A} \alpha^*.$$

Como \mathbf{A} es definida positiva, para $\alpha \neq \alpha^*$ sabemos que

$$(\alpha - \alpha^*)^T \mathbf{A} (\alpha - \alpha^*) > 0.$$

Finalmente, en virtud de lo anterior, (6.15) implica que

$$0 < \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha^*), \quad \alpha \neq \alpha^*.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Esto significa que la función buscada de D_M , para la cual $I[v]$ asume su mínimo sobre D_M , es

$$v^*(x) = \sum_{\mu=1}^M \alpha_{\mu}^* \varphi_{\mu}(x),$$

donde

$$\min_{v \in D_M} I[v] = I[v^*].$$

Si por casualidad entre las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ se encuentra la solución del problema de valores de frontera, o sea si $y \equiv \varphi_k$ para algún índice k , la solución del sistema lineal (6.13) es

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{para } i = 1, \dots, M, i \neq k, \\ 1 & \text{para } i = k, \end{cases}$$

es decir, $v^*(x) = \varphi_k(x) = y(x)$.

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Esto es una consecuencia directa del Teorema 7.2 si tomamos en cuenta que

$$I[v] = \Phi(\alpha) \geq \Phi(\alpha^*) = I[v^*] \geq I[y].$$

Podemos resumir que el **método de Ritz** consiste en la computación del vector α^* del sistema $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = ([\varphi_i, \varphi_j])_{i,j=1,\dots,M}, \quad b_i = (\varphi_i, g).$$

La combinación $v^* = \sum_{\mu=1}^M \alpha_\mu^* \varphi_\mu$ es la función deseada, la cual **minimiza el funcional $I[u]$ sobre D_M** . Recordamos que las componentes de \mathbf{A} y \mathbf{b} son dadas por

$$a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] = \int_a^b (p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)) \, dx,$$

$$b_i = (\varphi_i, g) = \int_a^b \varphi_i(x)g(x) \, dx.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

El problema de si estas integrales pueden ser calculadas exactamente depende de las **funciones de base** $\varphi_1, \dots, \varphi_M$. En general, tendremos que utilizar un método de cuadratura (integración numérica), lo cual causa un **error adicional**.

La elección de las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ **depende del problema** puesto y de la precisión deseada. Por ejemplo, se usarán funciones de base **periódicas** si se sabe que la solución del problema de valores de frontera es periódica. Por otro lado, cuando no hay ninguna información acerca de la solución, frecuentemente se usan **polinomios**, por ejemplo polinomios ortogonales.

Las dificultades mencionadas aquí se pueden evitar parcialmente si usamos polinomios definidos por trozos, por ejemplo funciones **spline**. Estas consideraciones nos llevan al **método de elementos finitos**.

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ejemplo 6.2 Consideremos el problema de valores de frontera

$$-y'' = \sin x, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

el cual puede ser resuelto exactamente. Aquí $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, y $g(x) = \sin x$.

a) Sea $M = 1$ y $\varphi_1(x) = x(\pi - x)$, $\varphi_1'(x) = \pi - 2x$. En este caso,

$$a_{11} = \int_0^\pi (\varphi_1'(x))^2 dx = \int_0^\pi (\pi^2 - 4\pi x + 4x^2) dx = \frac{\pi^3}{3},$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^\pi \varphi_1(x)g(x) dx = \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x dx \\ &= \pi \int_0^\pi x \sin x dx - \int_0^\pi x^2 \sin x dx \\ &= \pi \left[\sin x - x \cos x \right]_0^\pi - \left[2x \sin x + (2 - x^2) \cos x \right]_0^\pi \\ &= \pi^2 + (2 - \pi^2) + 2 = 4. \end{aligned}$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ejemplo 6.2 (continuación)

a) Entonces, $\alpha_1 = 12/\pi^3$ y

$$v^*(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) = \frac{12}{\pi^3} x(\pi - x) \approx 0,387x(\pi - x).$$

La función $v^*(x)$ asume su máximo $v^*(\pi/2) = 3/\pi \approx 0,955$.

b) Sea $M = 2$, $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_1'(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin(2x)$, $\varphi_2'(x) = 2 \cos(2x)$. Tenemos

$$a_{11} = \int_0^\pi (\varphi_1'(x))^2 dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_{12} = \int_0^\pi \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx = 2 \int_0^\pi \cos x \cos(2x) dx = 0,$$

$$a_{22} = \int_0^\pi (\varphi_2'(x))^2 dx = 4 \int_0^\pi \cos^2(2x) dx = 2\pi,$$

$$b_1 = \int_0^\pi \varphi_1(x) g(x) dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \int_0^\pi \varphi_2(x) g(x) dx = \int_0^\pi \sin(2x) \sin x dx = 0.$$

6.1. Problemas de valores de frontera de EDOs

Ejemplo 6.2 (continuación)

b) Entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}; \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0; \quad v^*(x) = \sin x,$$

lo que es la solución exacta del problema.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

6.2.1 Funciones de planteo lineales por trozos Ahora seguimos desarrollando el método de Ritz en una versión donde cada función φ_i es diferente de cero sólo en un (pequeño) subintervalo de $[a, b]$.

Tal como para la interpolación por splines, subdividimos el intervalo en n partes de igual tamaño h introduciendo los nodos

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n; \quad a + nh = b. \quad (6.16)$$

Consideremos primero **funciones de planteo** lineales por trozos y continuas s_h .

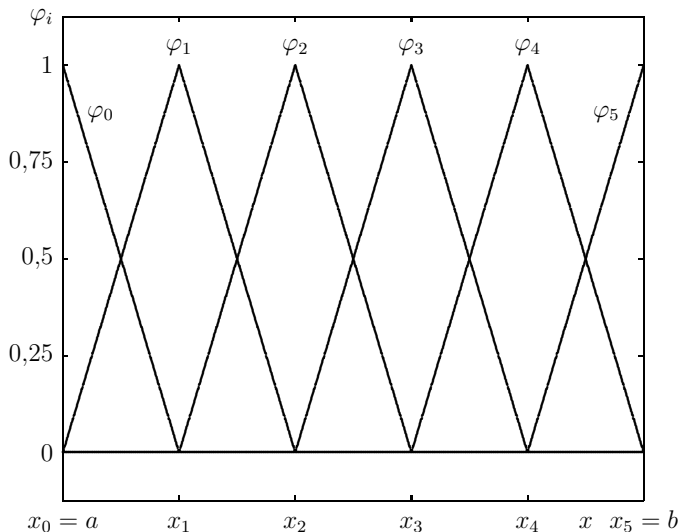
6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

El espacio S_h de estas funciones tiene como base las funciones $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-a}{h} - i + 1 & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{x-a}{h} + i + 1 & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_0(x) &= \begin{cases} -\frac{x-a}{h} + 1 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases} \\ \varphi_n(x) &= \begin{cases} \frac{x-a}{h} - n + 1 & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}\end{aligned}\tag{6.17}$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Las funciones φ_i , $i = 0, \dots, n$, dadas por (6.17) para $n = 5$:



6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Cada función de S_h tiene la representación

$$s_h(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x).$$

Para la aproximación de la solución de (6.4), usaremos solamente aquellas funciones en S_h que satisfacen las condiciones de borde $s_h(a) = s_h(b) = 0$, es decir, para las cuales

$$s_h(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(a) = \alpha_0 \varphi_0(a) = 0,$$
$$s_h(b) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(b) = \alpha_n \varphi_n(b) = 0.$$

Como $\varphi_0(a) = \varphi_n(b) = 1$, esto implica que $\alpha_0 = \alpha_n = 0$, o sea podemos considerar las funciones

$$s_h^0(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i(x). \quad (6.18)$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Cada función s_h^0 es diferenciable en $[a, b]$ en todas partes, con la excepción de los nodos x_1, \dots, x_{n-1} , e integrable cuadráticamente junto con su derivada. Si llamamos $P_h^1(a, b)$ al espacio de todas las funciones (6.18), observamos que $P_h^1(a, b) \subset D$, o sea las funciones (6.18) **sirven de planteo para el método de Ritz**.

Ya sabemos que los elementos de la matriz \mathbf{A} se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] &= \int_a^b (p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)) \, dx. \end{aligned}$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Dado que

$$\varphi_j(x) = 0 \quad \text{para } j \notin \{i-1, i, i+1\} \text{ y } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}],$$

sabemos que $[\varphi_i, \varphi_j] = 0$ para $|i-j| \geq 2$, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$b_i = (\varphi_i, g) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) g(x) dx.$$

Ahora, para $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n-1})^T$ determinamos $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_{n-1}^*)^T$ como solución del sistema lineal

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}. \quad (6.19)$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

La solución del sistema (6.19) entrega la solución aproximada del problema de valores de frontera (6.4):

$$s_h^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^* \varphi_i(x).$$

Ya demostramos que la matriz \mathbf{A} siempre es **simétrica y definida positiva**. Para que una función s_h^* sea una aproximación suficientemente precisa de la verdadera solución y , el tamaño de paso h debe ser muy pequeño. Normalmente, (6.19) es un **sistema de gran tamaño**, con una matriz que siempre es simétrica, definida positiva y tridiagonal, por lo tanto, el sistema (6.19) puede ser resuelto por muchos **métodos iterativos**.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Ejemplo 6.3 Consideremos nuevamente el ejemplo de la ecuación diferencial ordinaria $-y'' = \sin x$ con las condiciones de borde $y(0) = y(\pi) = 0$. Para $i = 1, \dots, n$, obtenemos

$$a_{i,i-1} = \int_0^\pi \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx,$$

dado que fuera de $[x_{i-1}, x_i]$, por lo menos una de las funciones o φ_{i-1} o φ_i desaparece. Entonces

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} \right) dx = -\frac{1}{h}, \\ a_{ii} &= \int_0^\pi (\varphi'_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi'_i(x))^2 dx = \frac{2}{h}, \\ a_{i,i+1} &= a_{i+1,i} = -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n-1$.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Ejemplo 6.3 (continuación) Es decir, obtenemos la matriz definida positiva

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

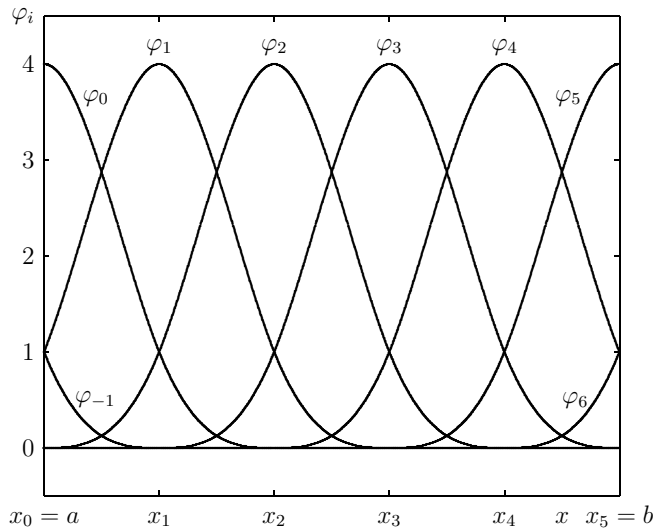
6.2.2 Funciones de planteo cúbicas por trozos Para poder aplicar el método de Ritz con funciones de planteo cúbicas, definimos la siguiente base de funciones sobre $[a, b]$, donde a los nodos ya definidos (6.16) agregamos $x_{-k} = a - kh$ y $x_{n+k} = b + kh$ para $k = 1, 2, 3$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \left(-\frac{a-x}{h} - i + 2\right)^3 & \text{para } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \cap [a, b], \\ 1 + 3\left(-\frac{a-x}{h} - i + 1\right) + 3\left(-\frac{a-x}{h} - i + 1\right)^2 - 3\left(-\frac{a-x}{h} - i + 1\right)^3 & \text{para } x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [a, b], \\ 1 + 3\left(-\frac{a-x}{h} + i + 1\right) + 3\left(\frac{a-x}{h} + i + 1\right)^2 - 3\left(\frac{a-x}{h} + i + 1\right)^3 & \text{para } x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [a, b], \\ \left(\frac{a-x}{h} + i + 2\right)^3 & \text{para } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \cap [a, b], \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

$$i = -1, 0, \dots, n, n+1.$$

(6.20)

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs



6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Cada **función spline** es de la forma

$$s_h(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(x). \quad (6.21)$$

Sin embargo, para la aproximación usaremos sólo aquellas funciones spline que satisfacen las condiciones de borde $s_h(a) = s_h(b) = 0$.

Sea $P_h^3(a, b)$ el espacio de estas funciones. Pero $\varphi_{-1}(a) = \varphi_1(a) = \varphi_{n-1}(b) = \varphi_{n+1}(b) = 1$ y $\varphi_0(a) = \varphi_n(b) = 4$, es decir, las funciones (6.21) **no van a satisfacer en general** las condiciones de borde.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Nuevas funciones de base

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{para } i = 2, \dots, n-2, \\ \varphi_0(x) - 4\varphi_{-1}(x) & \text{para } i = 0, \\ \varphi_0(x) - 4\varphi_1(x) & \text{para } i = 1, \\ \varphi_n(x) - 4\varphi_{n-1}(x) & \text{para } i = n-1, \\ \varphi_n(x) - 4\varphi_{n+1}(x) & \text{para } i = n. \end{cases}$$

Obviamente, estas funciones satisfacen

$$\psi_0(a) = \psi_1(a) = \psi_{n-1}(b) = \psi_n(b) = 0;$$

entonces,

$$\psi_i(a) = \psi_i(b) = 0 \quad \text{para } i = 0, \dots, n.$$

Se puede demostrar que estas funciones son **linealmente independientes**.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Concluimos que cada función $s_h^0 \in P_h^3(a, b)$ posee una representación

$$s_h^0(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(x), \quad s_h^0(a) = s_h^0(b) = 0.$$

Las funciones ψ_i forman una base del espacio $P_h^3(a, b)$, el cual a su vez es un **subespacio de \mathcal{D}** . Por lo tanto, podemos usar las funciones ψ_i como **funciones de planteo** para el método de Ritz.

Los elementos de la matriz \mathbf{A} ahora son

$$\begin{aligned} a_{ij} = [\psi_i, \psi_j] &= \int_a^b (p(x)\psi_i'(x)\psi_j'(x) + q(x)\psi_i(x)\psi_j(x)) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (p(x)\psi_i'(x)\psi_j'(x) + q(x)\psi_i(x)\psi_j(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Ahora $[\psi_i, \psi_j] = 0$ para $|i - j| \geq 4$; \mathbf{A} es una **matriz de banda**, que en su i -ésima fila tiene sólo los elementos $a_{i,i-3}, a_{i,i-2}, \dots, a_{i,i+3}$ diferentes de cero. La matriz es **simétrica y definida positiva**.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

6.2.3 Estudio del error y extensiones Para el espacio D ya definimos la norma $\|\cdot\|_{V^1(a,b)}$ en (6.8):

$$\|w\|_{V^1(a,b)} := \left(\int_a^b \sum_{\varrho=0}^r |w^{(\varrho)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Si y es la solución exacta del problema de valores de frontera (6.4):

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = g(x), \quad y(a) = y(b) = 0$$

y $u^* \in D$ es una solución aproximada, nos interesa una **cota del error** $\|u^* - y\|_{V^1(a,b)}$.

Para el planteo con funciones cúbicas por trozos, también es posible estimar

$$\|u^* - y\|_{\infty} := \max_{x \in [a,b]} |u^*(x) - y(x)|.$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Lema 6.1 Bajo las hipótesis de regularidad (6.5):

$$\begin{aligned}p &\in C^1[a, b], \quad q, g \in C^1[a, b], \\p(x) &\geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in [a, b]\end{aligned}$$

existen constantes $0 < \gamma_{2,1} < \Gamma_{2,1}$ y $0 < \gamma_\infty < \Gamma_\infty$ tales que

$$\begin{aligned}\forall u \in V^2(a, b) : \quad \gamma_\infty \|u\|_\infty^2 &\leq [u, u] \leq \Gamma_\infty \|u\|_\infty^2, \\ \forall u \in V^1(a, b) : \quad \gamma_{2,1} \|u\|_{V^1(a,b)}^2 &\leq [u, u] \leq \Gamma_{2,1} \|u\|_{V^1(a,b)}^2.\end{aligned}$$

Teorema 6.3 Sea y la solución exacta del problema de valores de frontera (6.4) y $v^* \in D_M$ la aproximación obtenida por el método de Ritz. Entonces, para cada $v \in D_M$ tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned}\|v^* - y\|_{V^1(a,b)} &\leq \left(\frac{\Gamma_{2,1}}{\gamma_{2,1}} \right)^{1/2} \|v - y\|_{V^1(a,b)} \quad \text{si } D_M \subset V^1(a, b), \\ \|v^* - y\|_\infty &\leq \left(\frac{\Gamma_\infty}{\gamma_\infty} \right)^{1/2} \|v' - y'\|_\infty \quad \text{si } D_M \subset V^2(a, b).\end{aligned}\tag{6.22}$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Demostración del Teorema 6.3 Ya establecimos $[v - y, v - y] = I[v] + [y, y]$ para toda función $v \in V^1(a, b)$, es decir, tambien para todo $v \in D_M \subset D = V^1(a, b)$.

Por otro lado, de acuerdo con $\min_{v \in D_M} I[v] = I[v^*]$,

$$\begin{aligned}\min_{v \in D_M} [v - y, v - y] &= \min_{v \in D_M} I[v] + [y, y] \\ &= I[v^*] + [y, y] = [v^* - y, v^* - y].\end{aligned}$$

Entonces,

$$\forall v \in D_M : [v - y, v - y] \geq [v^* - y, v^* - y].$$

Dado que

$$\begin{aligned}v - y &\in V^1(a, b) \quad \text{si } D_M \subset V^1(a, b) \text{ y} \\ v - y &\in V^2(a, b) \quad \text{si } D_M \subset V^2(a, b),\end{aligned}$$

Teorema 6.3 sigue en virtud del Lemma 6.1.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Usaremos el teorema para estimar el error cometido por el método de elementos finitos. Para ello aprovechamos que (6.22):

$$\|v^* - y\|_{V^1(a,b)} \leq \left(\frac{\Gamma_{2,1}}{\gamma_{2,1}} \right)^{1/2} \|v - y\|_{V^1(a,b)} \quad \text{si } D_M \subset V^1(a,b),$$

$$\|v^* - y\|_{\infty} \leq \left(\frac{\Gamma_{\infty}}{\gamma_{\infty}} \right)^{1/2} \|v' - y'\|_{\infty} \quad \text{si } D_M \subset V^2(a,b)$$

es válido para cada función $v \in D_M$. Primero, sea $D_M = P_h^1(a,b)$, es decir, el espacio de las funciones **continuas y lineales por trozos con $s_h(a) = s_h(b) = 0$** . Además, sea v_h la única función de $P_h^1(a,b)$ que satisface $v_h(x_i) = y(x_i)$ para $i = 0, \dots, n$:

$$v_h(x) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}(x - x_i) + y(x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Entonces, para cada $y \in C^2[a,b]$ tenemos las cotas

$$\|v'_h - y'\|_{\infty} \leq 2Lh, \quad \|v_h - y\|_{\infty} \leq Lh^2$$

con una constante L .

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Insertando esta expresión en (6.22), obtenemos

$$\begin{aligned}\|v^* - y\|_{V^1(a,b)} &\leq (\Gamma_{2,1}/\gamma_{2,1})^{1/2} \|v_h - y\|_{V^1(a,b)} \\ &\leq (\Gamma_{2,1}/\gamma_{2,1})^{1/2} L(b-a)h(4+h^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Esto demuestra que el error medido en la norma $\|\cdot\|_{V^1(a,b)}$ es por lo menos proporcional a h , o sea el método converge para $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, y $nh = b - a$ del primer orden. El método parece menos preciso que el método de diferencias finitas. Pero hay que tomar en cuenta que en $\|\cdot\|_{V^1(a,b)}$ **también se mide el error de la aproximación de la derivada**. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\|v^* - y\|_{V^0(a,b)} = \mathcal{O}(h^2).$$

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

Ahora elegimos el espacio $P_h^3(a, b) \subset V^2(a, b)$ de las funciones spline cúbicas, y sea $v_h(x)$ el spline que satisface las condiciones

$$v_h(x_i) = y(x_i), \quad i = 0, \dots, n; \quad (6.23)$$

$$v_h'(a) = y'(a), \quad v_h'(b) = y'(b). \quad (6.24)$$

A través de las condiciones (6.23) y (6.24), la función v_h está determinada unicamente. Según resultados de la aproximación de una función por una función spline,

$$\|v_h' - y'\|_\infty \leq M_1 N L h^3.$$

Usando (6.22), obtenemos

$$\max_{x \in [a, b]} |v^*(x) - y(x)| = \|v^* - y\|_\infty \leq M_1 N L \sqrt{\frac{\Gamma_\infty}{\gamma_\infty}} h^3 = \mathcal{O}(h^3). \quad (6.25)$$

El error es del orden a lo menos $\mathcal{O}(h^3)$, y el método es más preciso que el de diferencias finitas.

6.2. Elementos finitos para PVFs de EDOs

En general, para el método de Ritz podríamos usar funciones de planteo φ_i polinomiales por trozos de alto orden para incrementar el orden de convergencia. Sin embargo, tal medida no vale el esfuerzo computacional adicional. El método de elementos finitos puede ser aplicado a la solución numérica de cualquier problema lineal de valores de frontera de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.