UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

PROCESOS ESTOCÁSTICOS - TAREA 1

Daniela Lefimil, Vicente Marchant, Vicente Márquez
Fecha de entrega: 28/05/2020

Problema 1: Verifique un proceso aleatorio $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definido por $Y_t = \sum_{j=1}^{t} \xi_j$, donde $\xi_j \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

1. tiene esperanza cero
2. no es estacionario. (Hint: Es suficiente calcular la función de autocovarianzas.)
3. ¿Por qué?

Solución:

1. Calculando la esperanza, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E(Y_t) &= E\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{t} E(\xi_j) && \text{(por linealidad)} \\
&= 0 && \text{(por distribución normal)}
\end{aligned}
$$

2. Teniendo en cuenta la definición de procesos estacionarios, calculamos la función de autocovarianza, considerando las siguientes propiedades:

Sea X, Y, Z, W variables aleatorias y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$Cov(X, X) = Var(X) \tag{1}$$

$$Cov(aX + bY, cW + dZ) = acCov(X, W) + adCov(X, Z) + bcCov(Y, W) + bdCov(Y, Z) \tag{2}$$

Así, desarrollando,

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t+h}) &= Cov\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=1}^{t+h} \xi_j\right) \\
&= Cov\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=1}^{t} \xi_j + \sum_{j=t+1}^{t+h} \xi_j\right) \\
\overset{(2)}{}&= Cov\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=1}^{t} \xi_j\right) + Cov\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=t+1}^{t+h} \xi_j\right) \\
\overset{(1)}{}&= Var\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{t} Var(\xi_j) \\
&= t\sigma^2
\end{aligned}
$$

Del cálculo anterior, notemos que,

$$\sum_{j=1}^{t} \xi_j \quad \wedge \quad \sum_{j=t+1}^{t+h} \xi_j$$

son independientes, por lo que,

$$Cov\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j, \sum_{j=t+1}^{t+h} \xi_j\right) = 0$$

Así, como la función de autocovarianza depende del tiempo (t), el proceso no es estacionario débil y en consecuencia no es estacionario estricto.

3. Cada explicación está dentro de las respuestas de 1. y 2. respectivamente.

Problema 2: Sea $\{Y_t : t \in \mathbb{N}\}$ un proceso estacionario estricto con $\mathbb{E}(Y_t) = m < +\infty$ y $cov(Y_t, Y_{t+h}) = R(|h|)$.

Sea $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ un proceso definido de la siguiente manera

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{si } t \text{ es impar} \\ Y_t + 1 & \text{si } t \text{ es par} \end{cases}$$

1. Pruebe que $cov(Y_t, Y_{t+h}) = cov(X_t, X_{t+h})$
2. Demuestre que X_t no es estacionario.

Solución:

1. Por definición de covarianza, se tiene que :

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t+h}) &= E[(Y_t + E(Y_t))(Y_{t+h} - E(Y_{t+h}))] \\ &= E[Y_t Y_{t+h} - E(Y_t)Y_{t+h} - Y_t E(Y_{t+h}) + E(Y_t)E(Y_{t+h})] \\ &= E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) + E(Y_t)E(Y_{t+h}) \\ &= E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos definir

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})$$

Ahora, para el caso de **t impar** y **t+h impar**, se observa que:

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) = Cov(Y_t, Y_{t+h})$$

Ahora, para el caso de **t par** y **t+h par**, se observa que:

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= E([Y_t + 1][Y_{t+h} + 1]) - E(Y_t + 1)E(Y_{t+h} + 1) \\ &= E(Y_t Y_{t+h} + Y_t + Y_{t+h} + 1) - [(E(Y_{t+h}) + 1)(E(Y_t) + 1)] \\ &= E(Y_t Y_{t+h}) + E(Y_t) + E(Y_{t+h}) + 1 - [E(Y_{t+h})E(Y_t) + E(Y_{t+h}) + E(Y_t) + 1] \\ &= E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) = Cov(Y_t, Y_{t+h}) \end{aligned}$$

Para el caso en que **t+h impar** y **t par** se tiene que

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= E((Y_t + 1)Y_{t+h}) - E(Y_t + 1)E(Y_{t+h}) \\ &= E(Y_t Y_{t+h} + Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) - E(Y_{t+h}) \\ &= E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) \\ &= Cov(Y_t, Y_{t+h}) \end{aligned}$$

Para el caso en que **t+h par** y **t impar** se obtiene lo mismo que en el caso anterior. Por lo tanto se concluye que

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(Y_t, Y_{t+h})$$

2. Para demostrar que no es estacionario, haremos un análisis con respecto a la esperanza del proceso

$$E(X_t) = \begin{cases} E(Y_t) = m & \text{si } t \text{ es impar} \\ E(Y_t + 1) = m + 1 & \text{si } t \text{ es par} \end{cases}$$

Se puede observar que las esperanzas no son las mismas al variar t entre par e impar. Por lo tanto, la esperanza de X_t depende de t se concluye que no es estacionario.

Problema 3: Suponga que cinco fuentes radioactivas emiten partícula de acuerdo a un proceso de Poisson con tasas $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, $\lambda_4 = 5$, $\lambda_5 = 4$ por segundo respectivamente. El contador Geiger, independientemente de cualquier otra cosa, registra las partículas emitidas con probabilidades $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$, $p_4 = 0{,}8$, $p_5 = 0{,}75$, respectivamente.

Solución: Sean $N_1(t), \ldots, N_5(t)$ los 5 procesos independientes de Poisson asociados a cada fuente radioactiva y $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sus tasas respectivas. Por principio de superposición de procesos de Poisson, estos se pueden unir en un mismo proceso $N(t) = \sum_{i=1}^{5} N_i(t)$ con tasa $\lambda = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 23$. Por otro lado, podemos considerar el proceso de Poisson asociado a las partículas registradas: $N^{(1)}(t)$ con tasa $\lambda^{(1)} = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \, p_i = 18$ y el proceso de Poisson asociado a las partículas no registradas: $N^{(2)}(t)$ con tasa $\lambda^{(2)} = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \, (1 - p_i) = 5$. Así, tenemos que $N(t) \sim Po(23)$, $N^{(1)}(t) \sim Po(18)$ y $N^{(2)}(t) \sim Po(5)$.

1. Calcule la probabilidad de que al menos una partícula haya sido registrada 1 min después de iniciado el conteo

La probabilidad pedida está asociada al proceso de Poisson $N^{(1)}(t)$, y está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t \geq 1) &= 1 - \mathcal{P}(t = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{(-18*60)}(18*60)^0}{0!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Después de 3 minutos, ¿cuál es el número total esperado de partículas que hayan sido registradas?

El número total esperado de partículas estará dado por la esperanza del proceso de Poisson $N(t)$, es decir

$$\mathbb{E}[N(180)] = 180 * \lambda^{(1)} = 3240 \ \text{ partículas}$$

Problema 4: En un cierto juego se gana o se pierde $M\$100$ con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Un cierto jugador parte de $M\$200$ y pretende llegar a tener $M\$400$ de modo que cuando los tiene se retira del juego. También se retira si pierde su capital de $M\$200$.

1. Después de jugar dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que siga teniendo $M\$200$?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que ya esté arruinado cuando llega a la cuarta jugada?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que se arruine justamente en la cuarta jugada?

Hint: Use el diagrama de las trayectorias del proceso
Solución:
Desarrollando el diagrama de las trayectorias obtenemos lo siguiente: Así,

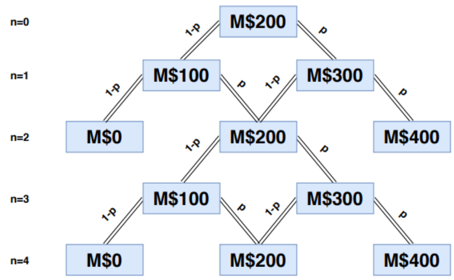

Figura 1: Diagrama de trayectorias del proceso, problema 4.

1. Se necesita calculas $P(X_2 = 200)$, entonces, siguiendo el diagrama de trayectorias:

$$P(X_2 = 200) = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p)$$

2. Dentro del contexto, "estar arruinado" quiere decir que el jugador se queda con $M\$0$. Es decir, cuando llega a la cuarta jugada ya debe haber quedado con $M\$0$. Vemos que en la segunda jugada,

$$P(X_2 = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$$

Siendo que si en la segunda jugada se queda sin dinero, por instrucciones del enunciado sabemos que el jugador debe retirarse, por lo que no sería capaz de llegar a la cuarta jugada.
Ahora, en la tercera jugada vemos que,

$$P(X_3 = 0) = 0$$

no es posible quedarse sin dinero si el jugador fue capaz de llegar hasta la tercera jugada.
Por lo que la probabilidad de que el jugador quede arruinado antes de que llegue a la cuarta jugada es de

$$P(X_2 = 0) = (1-p)^2$$

3. Se necesita calculas $P(X_4 = 0)$, entonces, siguiendo el diagrama de trayectorias:

$$P(X_4 = 0) = (1-p)p(1-p)(1-p) + p(1-p)(1-p)(1-p) = 2p(1-p)^3$$