Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 02: Operaciones en cuocientes de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}[x]$
Álgebra con Software (527282)

1. ¿Cuáles clases son invertibles en $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$?
2. Calcular la inversa de la clase de $x+1$ en $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3)\mathbb{Q}[x]}$.
3. Justificar por qué la clase de x no es invertible en $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3)\mathbb{Q}[x]}$.
4. Diremos que $x \neq 0$ es *divisor de cero* si existe $y \neq 0$ tal que $xy = 0$. Indicar todos los divisores de cero en $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ y $\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.
5. Misma notación del ejercicio anterior: indicar todos los polinomios de la forma $x+c$ tales que la clase de $x+c$ sea un divisor de cero en $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2-1)\mathbb{Q}[x]}$. *(Sugerencia: el teorema del resto permite convertir divisiones de polinomios en evaluaciones)*

Cuociente de los polinomios del cuociente

Considerar la siguiente construcción de una estructura:

- Se comienza con el cuociente $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.
- Se considera la estructura de todos los polinomios en la variable x con coeficientes en dicho cuociente.
- Se cuocienta por el ideal de los múltiplos de $x^3 - \overline{1}$ para obtener la estructura S.

Ésta es la tabla de multiplicación de S, con la identificación $t = \bar{x}$.

```
I = 2*ZZ
Q = ZZ.quotient(I)
P.<x> = Q[]
J = (x^3-1)*P
S.<t> = P.quotient(J)
names=[latex(n) for n in S]
S.multiplication_table(names=names)
```

$*$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
t	0	t	t^2	t^2+t	1	$t+1$	t^2+1	t^2+t+1
$t+1$	0	$t+1$	t^2+t	t^2+1	t^2+1	t^2+t	$t+1$	0
t^2	0	t^2	1	t^2+1	t	t^2+t	$t+1$	t^2+t+1
t^2+1	0	t^2+1	$t+1$	t^2+t	t^2+t	$t+1$	t^2+1	0
t^2+t	0	t^2+t	t^2+1	$t+1$	$t+1$	t^2+1	t^2+t	0
t^2+t+1	0	t^2+t+1	t^2+t+1	0	t^2+t+1	0	0	t^2+t+1

6. Argumentar por qué los elementos mostrados en la tabla representan a todas las clases de S.
7. Verificar las multiplicaciones (algunas, unas cinco?) realizadas al construir la tabla.

Mini proyecto: verificar la construcción de los números complejos

Recordar: el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos puede ser construido como el conjunto de todos los pares (a, b) de números reales con las operaciones siguientes:

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2)$

El objetivo de esta colección de problemas es mostrar que la estructura cuociente $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)\mathbb{R}[x]}$ es idéntica a $\mathbb{C}$.
Sea $K = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)\mathbb{R}[x]}$. Considerar la función $f : \mathbb{C} \to K$ dada por $f((a, b)) = \overline{a + bx}$.

8. La función f envía pares de números reales en clases de equivalencia de polinomios. Identificar objetivos concretos para poder concluir que f es una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}$ y K.*(no basta con decir "invertible")*
9. Mostrar la propiedad siguiente: toda clase de K contiene exactamente un polinomio de grado menor o igual a uno.
10. Mostrar: f es una biyección.
11. Mostrar: f preserva la suma, es decir $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$. *(Cuidado: la operación "suma" significa cosas distintas en el dominio y en el codominio.)*
12. Repetir el ejercicio anterior para la multiplicación.
13. Explicar, con palabras, por qué lo demostrado hasta ahora implica que $\mathbb{C}$ y K son, de alguna manera, "la misma estructura con distintos nombres".
14. Verificar que tanto f como su inversa envían las raíces cuadradas de -1 en raíces cuadradas de -1. *(Cuidado: ¿qué significa "-1" en el dominio y en el codominio?)*