Derivada de funciones inversas

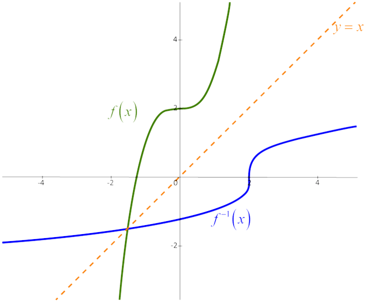
Cálculo I
Semestre I-2024

Universidad de Concepción

Derivada de una función inversa

Sea $f : I \to J$ una biyección entre los intervalos abiertos I y J. Se puede probar que f continua en $I \implies f^{-1}$ continua en J.

Geométricamente, si $y = f(x)$ es una curva continua entonces $y = f^{-1}(x)$ es continua, debido a que ambas curvas son reflexiones en el plano XY con respecto a la recta $y = x$.



Derivada de una función inversa

Recordemos que

$$\forall x \in I, \forall y \in J : y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Ahora, si $a \in I$ y $c = f(a)$, con $f'(a) \neq 0$, entonces calculamos, para $x = f^{-1}(y)$

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(c) &= \lim_{y \to c} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(c)}{y - c} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se aplica teorema de sustitución de límites, considerando $x = f^{-1}(y)$ y $\lim\limits_{y \to c} f^{-1}(y) = a$.

Derivada de una función inversa

Fórmula

Luego, para todo punto $y = f(x) \in J$ con $f'(x) \neq 0$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (*)$$

Esto muestra que dada f función biyectiva, siempre que $f'(x) \neq 0$ (y exista), f^{-1} tiene derivada en el punto $y = f(x)$ y la cual se calcula de acuerdo a la fórmula encontrada.

Observación. Si se supone que f^{-1} es derivable en $y = f(x)$, $(*)$ se obtiene por la regla de la cadena, dado que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\implies (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \\ &\implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Derivada de una función inversa

Ejemplos

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^5 - x^3 + 2x$. Calcular $(f^{-1})'(2)$.

Ejemplo 2. Determinar la derivada de la función arcocoseno.

Solución. La función $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos(x)$ tiene inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f^{-1}(y) = \arccos(y)$. Luego, si $x \neq 0, \pi$, por $(*)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por lo tanto, $\forall x \in]-1, 1[: \dfrac{d}{dx}[\arccos(x)] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Función exponencial y logaritmo

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$ un valor fijo. La función **exponencial de base** a se define como

$$\begin{aligned} \exp_a : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \exp_a(x) = a^x \end{aligned}$$

y su función inversa, la función **logaritmo de base** a

$$\begin{aligned} \log_a : \ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

De esta forma, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+ : y = a^x \iff x = \log_a(y)$.

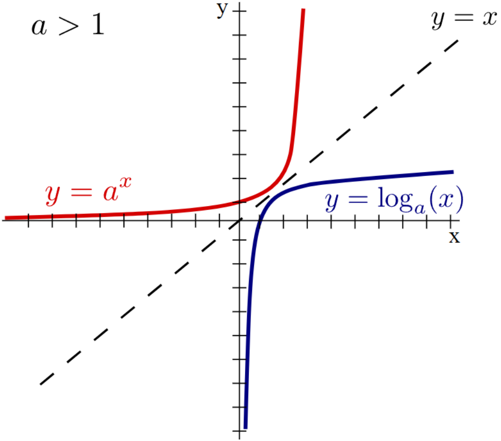
Observación. No confundir función exponencial $\exp_a(x)$ con función potencia $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ un valor fijo. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se cumplen las siguientes propiedades

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- Si $b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$, $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Función exponencial y logaritmo

Gráfica



¿Cómo es la gráfica de $\log_a(x)$ si $0 < a < 1$?

Derivada de la función exponencial

Estudiamos la derivada de $f(x) = a^x$.

Si $x = 0$ entonces $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \in \mathbb{R}$ (asumimos que existe).

En $x \neq 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot f'(0) = f'(0) \cdot f(x).$$

Luego, f' es proporcional a f.

Más adelante estableceremos que para $f(x) = e^x$, **función exponencial natural**, se tiene que $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, y luego para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, es decir

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \frac{d}{dx}[e^x] = e^x.$$

Derivada de la función exponencial

Fórmula

De lo anterior, podemos determinar la derivada de la función compuesta $h(x) = e^{g(x)}$, con g función derivable. Por Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

La función inversa de la función exponencial natural $\exp_e$ es el **logaritmo natural** o logaritmo en base e, denotada por $\ln$.

Observación. Notar que $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$, luego

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \frac{d}{dx}[a^x] = \ln(a) \cdot a^x$$

Derivada de la función logaritmo

Fórmula

Ahora estudiamos la derivada de la función logaritmo natural como inversa de $f(x) = e^x$, es decir, $f^{-1}(x) = \ln(x)$. En el punto $y = e^x$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Por lo tanto,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : \frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

De la misma forma para $\log_a$, como $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : \frac{d}{dx}[\log_a(x)] = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

Derivada de la función logaritmo

Función compuesta

Además, por Regla de la cadena, si g es una función derivable y $g(x) > 0$ para todo $x \in J \subseteq \mathbb{R}$

$$\forall x \in J \ : \frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

Ejercicios. Calcular las siguientes derivadas

- $\dfrac{d}{dx}[e^{3x+1}]$.
- $\dfrac{d}{dx}\left[7^{x^2}\right]$.
- $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(x^3+1)\right]$.
- $\dfrac{d}{dx}\left[\log_3(x+1)\right]$.
- $\dfrac{d}{dx}[x^x]$.
- $\dfrac{d}{dx}[e^{\arctan(x^2)}]$.