Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Evaluación 1, versión de práctica
Álgebra con Software (527282)

Instrucciones. Desarrollar justificadamente las respuestas a los problemas planteados.
Tiempo. 90 minutos.

Problema 1. (XX puntos)
Sea K un campo. Trabajar en el anillo de polinomios $K[x]$.

1. Si $p_1(x), p_2(x)$ son polinomios ($p_2(x)$ no nulo), mostrar que el resto de la división de $p_1(x)$ por $p_2(x)$ está en el ideal $(p_1(x), p_2(x))$.
2. Concluir: el máximo común divisor de $p_1(x)$ y $p_2(x)$ está en el ideal $(p_1(x), p_2(x))$.
3. Concluir: si $d(x)$ es el máximo común divisor de $p_1(x)$ y $p_2(x)$, entonces las soluciones de $d(x) = 0$ son las mismas que las del sistema $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0$.

Problema 2. (XX puntos)
Se tiene un anillo S:

```
S.<t> = GF(9,'t')
```

Este anillo es conmutativo y unitario y contiene un elemento t. Sus tablas de adición y multiplicación son las siguientes:

$+$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i
b	b	c	a	e	f	d	h	i	g
c	c	a	b	f	d	e	i	g	h
d	d	e	f	g	h	i	a	b	c
e	e	f	d	h	i	g	b	c	a
f	f	d	e	i	g	h	c	a	b
g	g	h	i	a	b	c	d	e	f
h	h	i	g	b	c	a	e	f	d
i	i	g	h	c	a	b	f	d	e

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c	a	c	b	g	i	h	d	f	e
d	a	d	g	e	h	b	i	c	f
e	a	e	i	h	c	d	f	g	b
f	a	f	h	b	d	i	c	e	g
g	a	g	d	i	f	c	e	b	h
h	a	h	f	c	g	e	b	i	d
i	a	i	e	f	b	g	h	d	c

1. Construir un homomorfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \to S$. ¿Cuál es su kernel?
2. Con ayuda de software, calcular algunas potencias de t. ¿Está t en la imagen del homomorfismo ϕ?
3. En las tablas de adición y multiplicación, ¿cuál letra representa al 0? ¿Al 1? ¿Al 2? ¿A t? *(Observación: la última pregunta tiene dos respuestas posibles.)*

Problema 3. (XX puntos)
Sea

$$A = \left\{ a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

1. Mostrar: A es un subanillo de $\mathbb{R}$.
2. Mostrar: la función $f : A \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dada por $f(a+b\sqrt{2}) = a+3b$ es un homomorfismo de anillos.

Problema 4. (XX puntos)
Sean I, J dos ideales de A, y sea M el ideal de A más pequeño del cual I y J sean subconjuntos. Mostrar:

1. $M \subseteq I + J$
2. $I + J \subseteq M$