Clase 12: Volumen de sólidos (Método de la sección transversal y Método del Disco)

Prof. Jonathan Briones D.

Universidad de Concepción
Concepción-Chile

Semestre II-2022

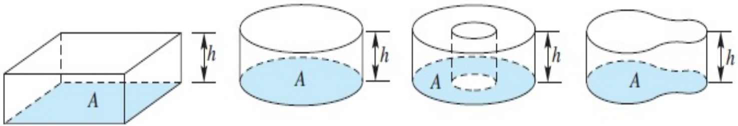
Volumen de sólidos

Cilindro recto

Definición 12.1

Un **cilindro recto** es un sólido que se genera moviendo una región plana A (base) a lo largo de una distancia h, en dirección perpendicular a A.

Los siguientes sólidos son cilindros rectos:

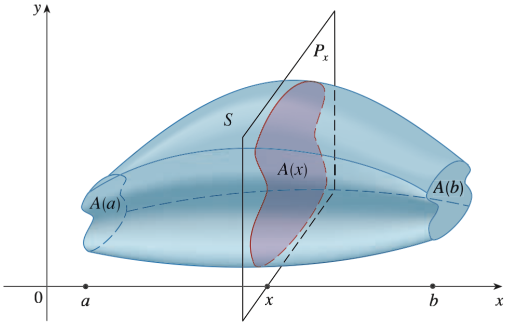


Dado un cilindro recto, su volumen V viene dado por $V = A \cdot h$, donde A es la base de S y h la altura.

Volumen de sólidos

Método de la sección transversal

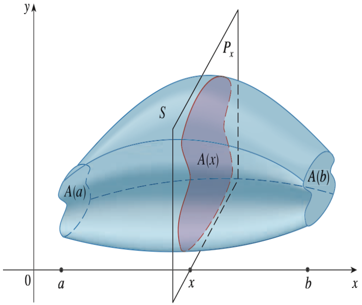
Consideremos un sólido S acotado por planos perpendiculares al eje X en $x = a$ y $x = b$ como en la imagen.



¿Cómo calcular el volumen de S?

Volumen de sólidos

Método de la sección transversal



La idea fundamental será rebanar S en n rojadas. Para ello, sea

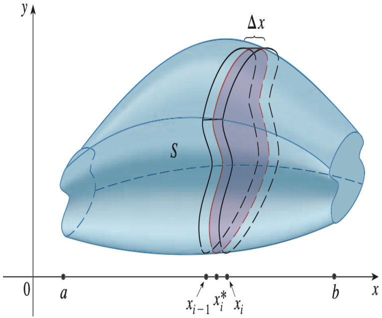
$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$$

una partición de $[a, b]$.

Si hacemos un corte perpendicular al eje X, que pase por un punto ${x_i}^* \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$, se obtiene una región (que llamaremos sección transversal) cuya área $A({x_i}^*)$ depende del punto ${x_i}^*$ donde se hace el corte.

Volumen de sólidos

Método de la sección transversal



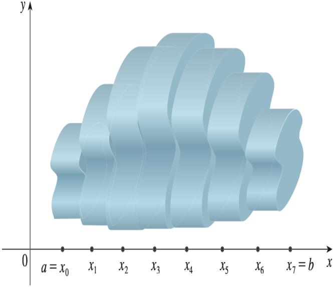
Si aumentamos el número de cortes, se generan n cilindros rectos con volumen

$$V_i = A({x_i}^*) \cdot \triangle x_i$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$, donde $\triangle x_i$ es la altura del cilindro y $A({x_i}^*)$ su área basal.

Volumen de sólidos

Método de la sección transversal



Luego, el volumen V de S es aproximadamente

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} A({x_i}^*)\triangle x_i$$

Notar que la última expresión corresponde a la **suma de Riemann** de la función

$$A : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto A(x)$$

que proporciona el área $A(x)$ de la región transversal que pasa por un punto $x \in [a, b]$.

Finalmente, si suponemos que $A(x)$ es continua y hacemos que $n \to +\infty$ se tiene que

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A({x_i}^*)\triangle x_i = \int_a^b A(x)\, dx$$

En conclusión, hemos logrado el siguiente resultado:

Teorema 12.2

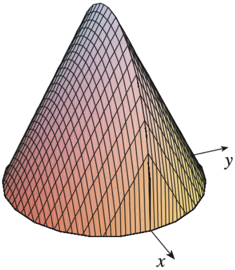
Si S es un sólido tal que el área de cualquier sección transversal está determinada por una función A no negativa y continua en $[a, b]$, entonces el volumen de S es

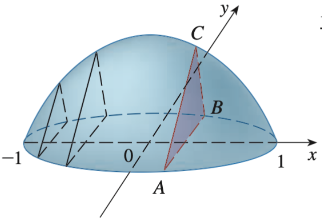
$$V(S) = \int_a^b A(x)\, dx$$

Ejemplo 1

Método de la sección transversal

- Encontrar el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 1, y las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos equiláteros.

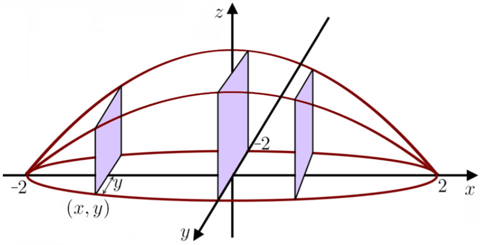




Ejemplo 2

Método de la sección transversal

- Encuentre el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales perpendiculares a la base y paralelas al eje Y son cuadrados.

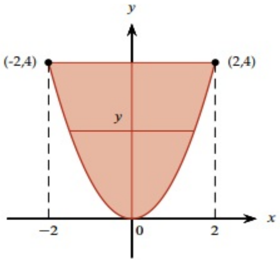


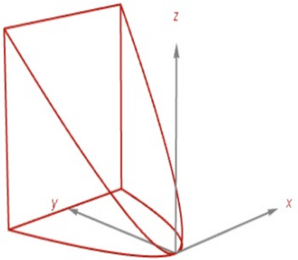
Ejemplo 3

Método de la sección transversal

En ocasiones, conviene invertir los roles de x e y para facilitar cálculos.

- Calcular el volumen de un sólido que tiene como base un sector de parábola comprendido entre $y = x^2$ y la recta $y = 4$, y las intersecciones con planos perpendiculares a la base y paralelos al eje X son cuadrados.

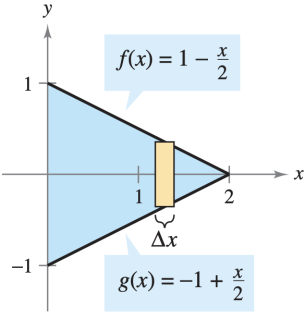




Ejemplo 4

Método de la sección transversal

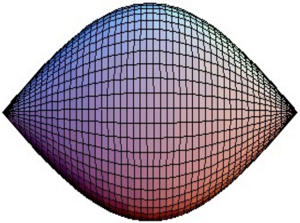
- Encontrar el volumen del sólido cuya base es la región acotada por las rectas
$$f(x) = 1 - \frac{x}{2},\ g(x) = -1 + \frac{x}{2} \text{ y } x = 0$$
y las secciones transversales perpendiculares al eje X son triángulos equiláteros.

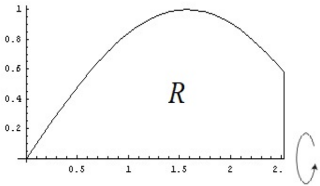


Definición 12.3

Un **sólido de revolución** es un cuerpo obtenido luego de rotar una región plana alrrededor de una recta fija del plano, denominada eje de revolución del sólido.

La recta en que gira o rota la región plana no intersecta a ésta, pero si puede ser parte de su frontera.

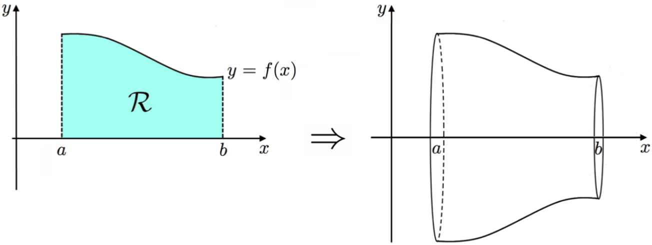




Volumen de un sólido de revolución

Método del disco

Sea f continua y no negativa sobre un intervalo $[a, b]$ y sea S el sólido generado al girar la región encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ e $y = b$, alrededor del eje X.



¿Cómo calcular el volumen del solido de revolución S ?

Volumen de un sólido de revolución

Método del disco

Si hacemos un corte paralelo al eje Y que pase por un punto $x \in [a, b]$, se generan secciones transversales de área

$$A(x) = \pi(f(x))^2$$

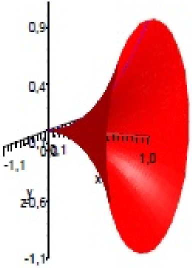
Luego, por el método de la sección transversal, el volumen de S es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Ejemplos

Método del disco

- Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región comprendida entre la curva $f(x) = x^2$, el eje X y la recta vertical $x = 1$, alrededor del eje de las abscisas.



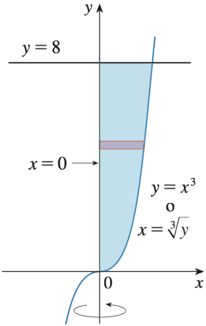
- Muestre que el volumen de una esfera de radio $r > 0$ es $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

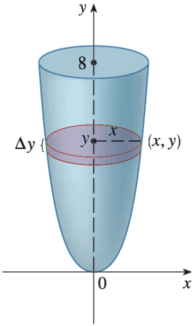
Ejemplos

Método del disco

En ocasiones, el método del disco puede ser utilizado para calcular el volumen de sólidos que giran entorno al eje Y.

Por ejemplo, calcule el volumen del sólido generado al rotar la región definida por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ entorno al eje Y.



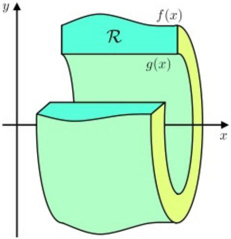


Volumen de un sólido de revolución

Extensión del método del disco

En el caso mas general donde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, el volumen V del sólido generado al girar la región R entre f y g con $x \in [a, b]$ entorno al eje X es:

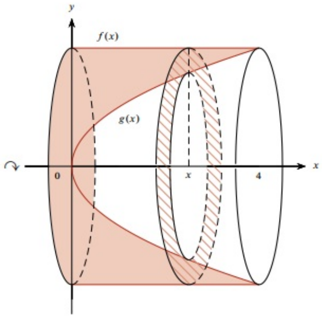
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$



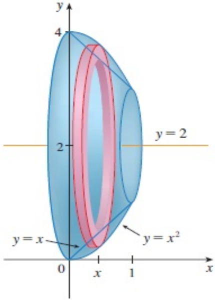
Ejemplos

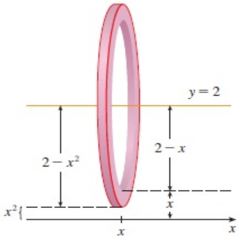
Extensión del método del disco

- Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje X, la región R comprendida entre $f(x) = 4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ con $x \in [0, 4]$.



- Si la región R encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor de la recta $y = 2$. Calcular el volumen del sólido resultante.





- Sea R la región acotada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje X. Plantear las integrales que permiten calcular el volumen del sólido resultante si éste se gira entorno al:

  (1) Eje X, (2) Recta $y = -3$ y (3) Recta $y = 7$.

- Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar entorno a la recta $y = 3$ la siguiente región R:

$$R = \begin{cases} x^2 = y - 2 \\ 2y - x = 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$