

Listado N°5: Valores, Vectores Propios y Transformaciones Lineales

ÁLGEBRA 2 - 525150

1. Considere las siguientes matrices:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (d) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores propios de cada matriz y sus respectivas multiplicidades.

2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tales que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine, sin calcular, una base para la $\text{Im}(A)$ y una base para la $\text{Im}(B)$. ¿Tienen ambas matrices la misma imagen? Justifique.
- (b) Justifique, sin calcular, el polinomio característico de la cada matriz. ¿Por qué cero es valor propio de ambas matrices?
- (c) Muestre que $v = (1, 1, 1)^t$ es vector propio de ambas matrices.

3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\lambda = 1$ sea un valor propio de A . ¿Cuál es la multiplicidad algebraica de λ ?
- (b) Considerando $a = -2$. Determine los restantes valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas y geométricas.
- (c) Considerando $a = -2$. ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, determine P , invertible, y D , diagonal, de modo que $AP = PD$.

4. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine para qué valores de a se cumple que A es invertible. Justifique su respuesta.
- (b) Determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas. Tenga en cuenta que ésta depende del valor de a .
- (c) Calcule los subespacios propios asociados a cada valor propio de A .
- (d) Decida si A es diagonalizable.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (no necesariamente distintos entre sí) son valores propios de A . Entonces $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

(a) Muestre, utilizando la expresión anterior para $p_A(\lambda)$, que el determinante de A es el producto de sus valores propios.

(b) Suponga ahora que $A \in M_3(\mathbb{R})$ es tal que 0, 1 y 2 son los valores propios de A . Responda y justifique:

$$(b.1) \text{ ¿Es } A \text{ diagonalizable?} \quad (b.2) \text{ ¿Es } A \text{ invertible?}$$

6. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable, con matriz que diagonaliza P , no singular y matriz diagonal D semejante con A . Demostrar que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $A^m = P D^m P^{-1}$.

7. Sean $k \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k^2 - 1 & 6 & k^3 + 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

a) Sabiendo que $\lambda = 6$ es raíz doble del polinomio característico de A , determinar para qué valores del parámetro k la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.

b) Para los casos en que A es diagonalizable, determinar la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D correspondiente.

8. Determine si las aplicaciones dadas son aplicaciones lineales (considere que los espacios vectoriales son reales).

$$(a) T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_1(x, y) = (xy, yx, 0). \quad (b) T_2 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), T_2(A) = A + 2A^t.$$

$$(c) T_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, T_3(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)). \quad (d) T_4 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, T_4(A) = -\det(A).$$

9. Determine una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ en cada caso:

$$(a) T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(1, 1, 0) = (2, -2, 0), T(1, -1, 0) = (0, 0, 2) \text{ y } T(0, 0, 1) = (1, 1, -1).$$

$$(b) T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } T(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } T(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Determine, si es posible, una transformación lineal $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuántas transformaciones existen que cumplen estas condiciones?

11. Decida si las siguientes transformaciones lineales son isomorfismos. En caso de serlo determinar la transformación inversa.

$$(a) T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_1(x, y) = (x + y, x - y).$$

$$(b) T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_2(x, y, z) = (x - 2y, y + z, x + y - z).$$

$$(c) T_3 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, T_3(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, z_1 - z_2).$$

12. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = (x - y, y + z).$$

(a) Determine bases de $\operatorname{Ker}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, y deduzca la nulidad y el rango de T .

(b) Determine la imagen por T , de los subespacios

$$S_1 = \{(x, y, z) : x = y = z\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad \text{y} \quad S_3 = \{(x, y, z) : x = y\}.$$

(c) Considere el subespacio de \mathbb{R}^3 , $S_4 = \{(x, y, 0) : x = -y\}$, que además es subespacio de S_1 . ¿Es $T(S_4)$ un subespacio de $T(S_1)$? Fundamente su respuesta apropiadamente.

(d) Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 .

(e) Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 3, 0)\} \quad \text{y} \quad C = \{(0, 1), (-1, 2)\},$$

de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente.

(f) Determine el conjunto imagen inversa $T^{-1}(1, 2)$. ¿Será subespacio vectorial? Justificar.

13. Sea $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función, tal que:

$$\text{Ker}(T) = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : a = 3b \wedge c = d = e\}$$

¿Puede T ser una transformación lineal? Justifique.

14. Defina la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (-2, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 3 \\ -\frac{27}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

15. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(1 + t - t^2) = e_1 + e_3, \quad T(t^2 - t) = e_1 + e_2 - e_3, \quad T(2 + t - 2t^2) = -e_1 + e_2 - 2e_3,$$

siendo e_1, e_2 y e_3 los vectores canónicos de \mathbb{R}^3 . Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas $B_1 = \{1, t, t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ y $B_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

16. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases

$$B = \{(1, 2, 0), (0, 1, -1), (-2, 0, 2)\} \quad \text{y} \quad C = \{x^2 - 1, x - 1, x + 1\}$$

es la siguiente

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine la imagen por T de $v = (1, 1, 1)$.

(b) Determine, si es posible, un vector $v \in \mathbb{R}^3$ de manera que $T(v) = x^2 - 1$.

(c) Determine $T(x, y, z)$ siendo x, y, z números reales cualesquiera.

17. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por:

$$T(p) = p'$$

(a) Determine bases de $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, y deduzca la nulidad y el rango de T .

(b) Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

- (c) Determine la matriz asociada a T con respecto a las bases $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $C = \{p_1, p_2\}$, de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente, donde presente que $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 + x + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (d) Determine las matrices de paso que hacen equivalentes a las dos matrices obtenidas en los puntos anteriores.
18. Dados los siguientes pares de transformaciones lineales T y L . Determine, si es posible, $T \circ L$, $L \circ T$, $(T \circ L)(u)$ y $(L \circ T)(v)$.
- (a) $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que
- $$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [L]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- con
- $$B = \{1, x, x^2\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- Además,
- $$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
- (b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tales que
- $$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [L]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- con
- $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- Además,
- $$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
19. Se tiene una transformación lineal $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que tiene un solo valor propio, $\lambda = 3$. El espacio propio asociado a este valor es:
- $$S_3(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
- Además se sabe que $T \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determine la regla de correspondencia de T .
20. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal de la cual se conocen 3 vectores propios asociados al valor propio -2 , $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -2)$ y $v_3 = (1, 1, 0, 1)$, además se sabe que $Ker(G) = \langle (0, 0, 1, 0) \rangle$. Determine la regla de correspondencia de T .
21. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$F(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2z, y + z)$$

- (a) Calcule sus valores propios, junto con sus multiplicidades algebraicas y geométricas.
- (c) Determine si F es o no diagonalizable, y diagonalice si es que lo fuere.