UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 3 ALGEBRA III 525201-0 - Comentarios

ATENCIÓN: favor escribir su desarrollo de manera cuidadosa y detallada. Cada item (9.1, 9.2, etc) tiene un puntaje máximo de **10 puntos**.

Problema 9. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $A := \{v_1, ..., v_n\}$ y $B := \{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente $(n\,, m \in \mathbb{N})$.

9.1 Demuestre que $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \,:\, \exists\, T_{ij} \in \mathcal{L}(V,W)$, tal que $\forall\, k \in \{1,...,n\} \,:$ $T_{ij}(v_k) \,:=\, \begin{cases} \Theta_W & k \neq i \\ w_j & k = i\,. \end{cases}$

Comentario: La mayoría no tuvo en cuenta que primero había que definir la función T_{ij} en V.

Desarrollo: La regla de correspondencia de la función propuesta es $T_{ij}(x) \,:=\, \alpha_i\, w_j$, para cualquier vector $x \,=\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, v_k \in V$. Se verifica que $\forall\, l \in \{1,...,n\} \,:\, T_{ij}(v_l) \,:=\, \begin{cases} \Theta_W & l \neq i \\ w_j & l = i\,. \end{cases}$

A continuación, para $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$, mostramos que T_{ij} es lineal. Sean $x\,, y \in V$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos que $\exists \{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $x \,=\, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l\, v_l \in V$. Asimismo, $\exists \{\beta_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $y \,=\, \sum_{l=1}^{n} \beta_l\, v_l \in V$. Luego, $\lambda\, x \,+\, y \,=\, \sum_{l=1}^{n} (\lambda\, \alpha_l \,+\, \beta_l)\, v_l \in V$, con lo cual resulta

$$T_{ij}(\lambda\, x + y) \,=\, (\lambda\, \alpha_i \,+\, \beta_i)\, w_j \,=\, \lambda\, \alpha_i\, w_j \,+\, \beta_i\, w_j \,=\, \lambda\, T_{ij}(x) \,+\, T_{ij}(y)\,,$$

de donde se concluye que $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$.

9.2 ¿Será $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}}$ una base de $\mathcal{L}(V,W)$? Justifique/demuestre según su respuesta.

Comentario: Varios se confundieron con la definición de independencia lineal, y obviaron detalles importantes en el desarrollo.

Desarrollo:

Afirmación 1: $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}}$ es l.i.

Consideremos la combinación lineal de la aplicación lineal nula $\Theta \in \mathcal{L}(V,W)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, T_{ij} \,=\, \Theta\,,$$

con $\{\alpha_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \subseteq \mathbb{K}$. Consideremos $l \in \{1,...,n\}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, T_{ij}(v_l) \,=\, \Theta(v_l) \,=\, \Theta_W \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, T_{ij}(v_l)}_{=\,\alpha_{lj} w_j} \,=\, \Theta_W \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj} w_j \,=\, \Theta_W\,,$$

de donde, dado que $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ es una base, se desprende que $\forall\, j \in \{1,...,m\} \,:\, \alpha_{lj} \,=\, 0$. Siendo $l \in \{1,...,n\}$ fijo pero arbitrario, se concluye que $\forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \,:\, \alpha_{lj} \,=\, 0$, y queda establecida la independencia lineal del conjunto $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}}$.

Afirmación 2: $\langle \{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \rangle \,=\, \mathcal{L}(V,W)$. Se hará por doble inclusión.

En vista que $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \subseteq \mathcal{L}(V,W)$, se infiere que $\langle \{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \rangle \,\subseteq\, \mathcal{L}(V,W)$.

Veamos que $\mathcal{L}(V,W) \,\subseteq\, \langle \{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}} \rangle$: Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$, y $x \in V$. Entonces $\exists \{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ tal que $x \,=\, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l\, v_l \in V$. Luego, tenemos por ser T lineal

$$T(x) \,=\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, T(v_i)\,,$$

pero para cada $i \in \{1, ..., n\}$: $T(v_i) \in W$, entonces $\exists \{\beta_{i,j}\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{K}$: $T(v_i) = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\, w_j$. De esta manera resulta

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\, w_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\,(\alpha_i\, w_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\, T_{ij}(x) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\, T_{ij}\right)(x)\,.$$

Como $x \in V$ es fijo pero arbitrario, se deduce que $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}\, T_{ij}$, y por lo tanto se tiene que $\mathcal{L}(V, W) \subseteq \langle \{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} \rangle$.

Conclusión: $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}}$ una base de $\mathcal{L}(V, W)$. Como consecuencia, se tiene que $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = m\, n$.

Problema 10. Sea $V := \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, y $L \in \mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ (i.e. L es un endomorfismo sobre V) definido por

$$\forall\, p \in V \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, (L(p))(x) := (1 - x^2)p''(x) - x\, p'(x) + a^2\, p(x)\,,$$

siendo a un parámetro real fijo.

a) Determine para qué valores de a, L es un automorfismo.

Como V es de dimensión finita, se sabe (discutido en clases) que

$$L \text{ es automorfismo} \Leftrightarrow L \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow L \text{ es epimorfismo.}$$

Sea $p \in V$, de la forma $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. Derivando, se encuentra que $p'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\,\alpha_3 x^2$ y $p''(x) = 2\,\alpha_2 + 6\,\alpha_3 x$, con lo cual resulta

$$L(p)(x) = ... = (a^2\,\alpha_0, + 2\,\alpha_2) + (\alpha_1(a^2 - 1) + 6\,\alpha_3)x + \alpha_2\,(a^2 - 4)x^2 + \alpha_3\,(a^2 - 9)x^3\,.$$

Luego, si $p \in \mathrm{Ker}(L)$, entonces $L(p) = \Theta$ (polinomio nulo), lo cual implica que

$$\begin{cases} a^2\,\alpha_0 + 2\,\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1(a^2 - 1) + 6\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2\,(a^2 - 4) = 0 \\ \alpha_3\,(a^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 9 \end{pmatrix}}_{0:\,A} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, se tendrá que L es monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Ker}(L) = \{\Theta\}$, y esto ocurrirá si y sólo si $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)(a^2 - 9) \neq 0$. En consecuencia, L será automorfismo si y sólo si $a \in \mathbb{R} \backslash \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) Determinar explícitamente L^{-1}.

Comentario: Varios desarrollos en esta parte incurrieron en errores de tipo conceptual, generando incoherencia matemática.

Desarrollo: Consideramos $a \in \mathbb{R} \backslash \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, para garantizar que L es automorfismo, por ende invertible. Así, existe $L^{-1} \in \mathcal{L}(V)$, tal que

$$\forall\, p, q \in V \,:\, L(p) = q \Leftrightarrow L^{-1}(q) = p\,.$$

Sean $p, q \in V$ tales que $L(p) = q$, siendo $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, y $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$. No es difícil establecer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, L(p)(x) = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$

sistema lineal que tiene solución única por el supuesto sobre a. Como resultado, se tiene que $\alpha_3 = \frac{\beta_3}{a^2 - 9}$, $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{a^2 - 4}$, $\alpha_1 = \frac{1}{a^2 - 1}\left(\beta_1 - \frac{6}{a^2 - 9}\beta_3\right)$ y $\alpha_0 = \frac{1}{a^2}\left(\beta_0 - \frac{2}{a^2 - 4}\beta_2\right)$. Finalmente se concluye que $L^{-1} : V \to V$ viene dada, para cualquier $q \in V$ con $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$, por

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, L^{-1}(q)(x) \,:=\, \frac{1}{a^2}\left(\beta_0 - \frac{2}{a^2-4}\beta_2\right) + \frac{1}{a^2-1}\left(\beta_1 - \frac{6}{a^2-9}\beta_3\right)x + \frac{\beta_2}{a^2-4}x^2 + \frac{\beta_3}{a^2-9}x^3 \,.$$

c) Determinar $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$ para aquellos valores de a en los cuales L es singular (no invertible).

Comentario: La mayoría supo trabajar bien esta parte. Errores detectados obedecen a un cálculo erróneo o despiste. Sólo se entregarán los resultados que debieron haberse obtenido en este item.

$$\begin{array}{lll}
\text{Para } a^2 = 0 & \mathrm{Ker}(L) \,=\, \langle\{1\}\rangle\,, & \mathrm{Im}(L) \,=\, \langle\{-x, -4x2+2, -9x^3+6x\}\rangle\,, \\
\text{Para } a^2 = 1 & \mathrm{Ker}(L) \,=\, \langle\{x\}\rangle\,, & \mathrm{Im}(L) \,=\, \langle\{1, -3x^2+2, -8x^3+6x\}\rangle\,, \\
\text{Para } a^2 = 0 & \mathrm{Ker}(L) \,=\, \langle\{1-2x^2\}\rangle\,, & \mathrm{Im}(L) \,=\, \langle\{4, 3x, 6x-5x^3\}\rangle\,, \\
\text{Para } a^2 = 0 & \mathrm{Ker}(L) \,=\, \langle\{4x^3-3x\}\rangle\,, & \mathrm{Im}(L) \,=\, \langle\{9, 8x, 5x^2+2\}\rangle\,.
\end{array}$$

Problema 11. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 := T \circ T = T$. Sabiendo que $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ denota la transformación identidad, demuestre que $T + \tilde{I}$ es un automorfismo.
Comentario: Aquí varios indujeron, de manera incorrecta, que $T = \tilde{I}$, lo cual no tiene asidero alguno, acorde al enunciado. Esto, lamentablemente, dañó el objetivo de la demostración.
Demostración: Nuevamente, como las aplicaciones involucradas son endomorfismos, y el espacio vectorial V es de dimensión finita, se cumple (discutido en clases)

$$T + \tilde{I} \text{ es automorfismo} \Leftrightarrow T + \tilde{I} \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow T + \tilde{I} \text{ es epimorfismo.}$$

Veamos que el endomorfismo $T + \tilde{I}$ es un monomorfismo. En efecto, es suficiente con mostrar que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \subseteq \{\theta\}$, pues la otra inclusión es trivial.
Sea $z \in \mathrm{Ker}(T + \tilde{I})$. Entonces

$$\begin{aligned}
(T + \tilde{I})(z) \,=\, \theta &\Rightarrow T(z) + z \,=\, \theta \qquad (1) \\
&\Rightarrow T(T(z) + z) \,=\, T(\theta) \,=\, \theta \\
&\Rightarrow T^2(z) + T(z) \,=\, \theta \\
&\Rightarrow T(z) + T(z) \,=\, \theta \\
&\Rightarrow T(z) \,=\, \theta \\
\text{en (1)} &\Rightarrow z \,=\, \theta\,,
\end{aligned}$$

de donde se establece que $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) \subseteq \{\theta\}$, y por lo tanto $\mathrm{Ker}(T + \tilde{I}) = \theta\}$, es decir $T + \tilde{I}$ es monomorfismo. Finalmente, debido a lo señalado al principio sobre endomorfismos definidos en espacios V de dimensión finita, se concluye que $T + \tilde{I}$ es un automorfismo.

Fecha de entrega (por sistema CANVAS): 28.05.2020, 12:30 horas

---

RBP/rbp 15.05.2020