Contents

1 Transformadas de Laplace

Una transformada es un operador matemático que toma elementos de un espacio de funciones, digamos X, y los mapea al mismo espacio X (no necesariamente a la misma función o una función con el mismo dominio). La idea es que esta nueva representación sea más útil para algún propósito. En nuestro caso, la idea es usar una transformada que nos ayude a resolver EDOs de manera más sencilla.

Ejemplo 1.1. *Ejemplos que ya conocemos de transformadas son: las integrales indefinidas o las derivadas.*

Sea X algún espacio (apropiado) de funciones, y $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos la transformada $\mathcal{F}$ por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt, \tag{1}$$

para $f \in X$.

Notemos que esta transformada toma una función de variable t y la transforma en una función de variable s. La función $K(s,t)$ se le conoce como núcleo o kernel de la transformada.

En particular, definiremos un tipo especial de transformade sobre en el intervalo no acotado $[0, \infty)$ y consideraremos la función $K(s,t) = e^{-st}$:

Definición

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces, diremos que la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{2}$$

es la **transformada de Laplace** de f, siempre que la integral impropia converja.

Notación: Como se mencionó antes, el resultado de la transformada de Laplace para una función $f(t)$ es una función de variable s. Para referirnos al resultado de la transformación de una función usaremos letras mayúsculas, por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s), \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 1.2. 1. *Determine la transformada de Laplace de $f(t) = 1$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-sb}}{-s} - \frac{1}{-s} \\
&= \frac{1}{s} + \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-sb}}{-s}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$ siempre que $s > 0$ (de lo contrario la integral diverge).

2. *Determine la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$, con $a \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt \\
&= \frac{1}{s-a} + \lim_{b\to\infty} \frac{e^{(a-s)b}}{a-s}
\end{aligned}$$

Notemos que la integral anterior divergerá si $s \leq a$. Por el contrario, si $s > a$ tenemos que la integral converge y

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a.$$

De los ejemplos anteriores, podemos notar que necesitamos algunas condiciones para que la transformada de una función f exista.

1.1 Condiciones suficientes para la existencia de las Transformadas de Laplace

Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es que f sea continua por tramos en $[0, \infty)$ y que f sea de orden exponencial para $t > T$.

Definición

Diremos que una función f es **continua por tramos** en el intervalo $[0, \infty)$ si existe un número finito de puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ en $[0, \infty)$ tales que f es continua en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k), y presenta **discontinuidades de salto** en los puntos t_k, para $k = 1, 2, \ldots, n$, i.e.

$$\lim_{t\to t_k^+} f(t) \neq \lim_{t\to t_k^-} f(t),$$

pero ambos son finitos.
Además, debe pasar que

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) < \infty.$$

Definición

Diremos que una función es **de orden exponencial** c, si existen constantes $c, M, T > 0$, tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \forall t > T.$$

Teorema 1.1

Si f es una función continua por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial c, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ existe para $s > c$.

Una propiedad importante de **las transformadas de Laplace** es que estas **son lineales**, es decir,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

para todo s donde tanto F como G estén definidas!

Ejemplo 1.3.

1. *Usando los ejemplos anteriores, determine la transformada de Laplace de $f(t) = 5 + 6e^{-8t}$.*

   Notemos que la función $f(t)$ es continua en todo $t \in \mathbb{R}$. Además,

   $$|f(t)| = f(t) \leq 11, \forall t \geq 0.$$

   Luego, por teorema la transformada de f esxiste y se puede calcular usando linealidad:

   $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{5 + 6e^{-8t}\}(s) &= 5\mathcal{L}\{1\}(s) + 6\mathcal{L}\{e^{-8t}\}(s)\\ &= \frac{5}{s} + \frac{6}{s+8}.\end{aligned}$$

2. *Determine, si es posible, la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{t^2}$.*

   Supongamos que existen constantes $c, M, T > 0$ tales que

   $$|f(t)| = e^{t^2} \leq Me^{ct}, \forall t \geq T.$$

   Esto implica que $e^{t(t-c)} \leq M$. Tomando límite cuando $t \to \infty$ se tiene una contradicción. Por lo tanto, f no es de orden exponencial.

3. *La función*

   $$f(t) = \begin{cases} 0, & si\ t = 0, \\ \frac{1}{t}, & si\ t > 0 \end{cases}$$

   no es continua por tramos en $[0, +\infty)$.

4. *Determine la transformada de Laplace de*

   $$f(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 \leq t < 3\pi, \\ \sin(t), & si \quad t \geq 3\pi. \end{cases}$$

   La función $f(t)$ es continua por tramos, tiene una única discontinuidad en $t = 3\pi$. Además, es de orden exponencial:

   $$|f(t)| \leq e^t, \forall t \geq 0.$$

Como $f(t)$ cumple las hipótesis del teorema, posee transformada de Laplace. Para calcularla separamos la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^{3\pi} e^{-st}dt + \lim_{b\to\infty}\int_{3\pi}^{b} e^{-st}\cdot\sin(t)dt \\ &= \frac{-e^{-3\pi s}}{s} + \frac{1}{s} - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-st}(s\sin(t)+\cos(t))}{s^2+1}\right]_{t=3\pi}^{t=b} \\ &= \frac{-e^{-3\pi s}}{s} + \frac{1}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s^2+1},\end{aligned}$$

para $s > 0$.

Las transformadas de algunas funciones conocidas se enuncian a continuación:

1. $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$, para $s > 0$.
2. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}$, para $s > a$.
4. $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, para $s > 0$.
5. $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$, para $s > 0$.
6. $\mathcal{L}\{\sinh(kt)\}(s) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$, para $s > |k|$.
7. $\mathcal{L}\{\cosh(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-k^2}$, para $s > |k|$.

Ejemplo 1.4. *Determine la transformada de Laplace de la función $f(t) = 4 - 3t^4$.*

$$\mathcal{L}\left\{4-3t^4\right\}(s) = 4\mathcal{L}\{1\}(s) - 3\mathcal{L}\{t^4\}(s) = 4\mathcal{L}\{1\}(s) - 3\mathcal{L}\{t^4\}(s) = \frac{4}{s} - \frac{72}{s^5},$$

para $s > 0$.

Teorema 1.2

Sea f una función continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, entonces el $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Una manera de usar este resultado es: si una función $F(s)$ es tal que $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$, entonces no existe una función f continua por tramos y de orden exponencial tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$.

1.2 Transformadas de Laplace Inversas

La relación entre f y su transformada de Laplace $F(s)$ define una **transformada de Laplace inversa**.

Teorema 1.3

Sean f y g dos funciones de orden exponencial y continua por tramos, tales que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ que cumple:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{para todo } s > s_0.$$

Entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$, exceptuando los puntos en que f y g son discontinuas.

Lo anterior nos dice que si

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s),$$

entonces f es única, lo que da sentido a la **Transformada de Laplace inversa** de F:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).$$

Algunas Transformadas Inversas de Laplace, que se desprenden directamente de las fórmulas ya vistas se enumeran a continuación:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}(t) = 1.$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}(t) = t^n \quad n \in \mathbb{Z}^+.$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}(t) = e^{at}.$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\}(t) = \sin(kt).$
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}(t) = \cos(kt).$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\}(t) = \sinh(kt).$
7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\}(t) = \cosh(kt).$

Linealidad de la Transformada inversa . Al igual que la transformada de Laplace, la transformada inversa es lineal, es decir, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\}(t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s))\}(t) + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

Ejemplo 1.5. *Determine las transformadas de Laplace Inversa de las siguientes funciones:*

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2}\right\}(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{s^2-2}\right\}(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sinh(\sqrt{2}t).$

2. *El siguientes es un ejemplo donde debemos separar la expresión dada en fracciones parciales:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s-3}{(s^2-1)(s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{3(s-1)} + \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{3(s+2)}\right\}(t) \\
&= -\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}(t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}(t) \\
&= -\frac{2}{3}e^t + e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t}.
\end{aligned}$$