Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Tarea 2 — miércoles 23 de abril de 2025

Entrega: miércoles 7 de mayo de 2025, 23.00 horas

- **NO** se aceptan entregas fuera de plazo
- Entrega: en formato .pdf, **un sólo archivo** preparado con LaTeX(o equivalente); subido a CANVAS
- Intentos de entrega que **no** cumplan con algún de estos requisitos (escaneados, enviados por correo, más de un archivo, etc.) no serán calificados
- **NO** habrá cambios de plazo — **no** se acepta **ningún** tipo de excusa a posteriori (excepción: licencias médicas certificadas por DISE)

Problema 1. Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} xyz \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y,z) \notin C, \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \in C, \end{cases} \quad \text{donde } C := \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

a) Demostrar que f es continua en C.
b) Si $(x,y,z) \in C$, ¿es f diferenciable en (x,y,z)?
c) Si $(x,y,z) \in C$, calcular, si existen, $f_{yx}(x,y,z)$ y $f_{xy}(x,y,z)$.
d) ¿Es f de clase C^2 en vecindades de $(0,0,1)$? ¿de $(0,0,0)$?

Problema 2. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la siguiente función es diferenciable en $(0,0)$?

$$f_p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x+y)}{|x|^p + |y|^p} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema 3. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f_x y f_y en $(0,0)$.
b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$? ¿Es de clase C^1?
c) ¿Se tiene $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$? Justifique su respuesta.

Problema 4.

a) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(\boldsymbol{x})$ para la función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, x_2) = -\ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

con $\boldsymbol{x}_0 = (0,1)$ y el término residual $R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ correspondiente.

b) Determinar el polinomio de Taylor $T_2(\boldsymbol{x})$ para la función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 y + 2xz^3 + (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{yz}$$

con $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)$ y el término residual $R_2((x,y,z), \boldsymbol{x}_0)$ correspondiente.

c) Acotar $R_2((x,y,z), \boldsymbol{x}_0)$ sobre la bola $B_1 := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{w}\|_\infty \leq 1\}$.

Problema 5. Determinar constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad w(x,t) = t^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{t}\|x\|_2^2\right)$$

es una solución de la EDP

$$w_t - (w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} + \cdots + w_{x_nx_n}) = 0 \quad \text{(ecuación del calor } n\text{-dimensional).}$$

Problema 6. Se considera la ecuación

$$2x^2 + y + \sin(xy) = 0.$$

¿Es posible resolver esta ecuación en una vecindad de $(0,0)$ en la forma $y = g_1(x)$ o $x = g_2(y)$? Si posible, calcular las derivadas $g_1'(0)$ y $g_2'(0)$.

Problema 7. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Demostrar que en una vecindad de $(2,5)$ el sistema (1) es resoluble mediante una función continuamente diferenciable $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ tal que $u(2,5) = -1$ y $v(2,5) = 0$. Determinar las primeras derivadas de u y v en el punto $(2,5)$.