UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Listado 4 ALGEBRA III 525201-0 Transformaciones Lineales

1. Sea la función $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p) := \displaystyle\int_0^x p(t)\, dt\,, \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
   a) Muestre que T es lineal.
   b) Determine si T es inyectiva o sobreyectiva.
2. Sea $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función definida por $S(A) := A + A^{\mathrm{t}} \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Muestre que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
   b) Determine si S es un automorfismo.
   c) Determine $\forall\, k \in \mathbb{N} : \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : S^k(A)$.
3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $T \in \mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V)$ para la cual $\exists\, m \in \mathbb{N} : \exists\, v_0 \in V : \Big(T^m(v_0) = \Theta_V \wedge T^{m-1}(v_0) \neq \Theta_V\Big)$. Demuestre que el conjunto $\{v_0, ..., T^{m-1}(v_0)\}$ es l.i.
4. Sea $B := \{\mathrm{e}^x\,, x\mathrm{e}^x\,, x^2\,\mathrm{e}^x\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, y sea $D : \langle B\rangle \to \langle B\rangle$ el operador derivada, definido por $D(f) := \dfrac{df}{dx}\,, \quad \forall\, f \in \langle B\rangle$.
   a) Muestre que B es l.i.
   b) Pruebe que D es un automorfismo.
   c) Determine D^{-1}.
5. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (a) T es inyectiva si y sólo si T transforma conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes.
   (b) T es sobreyectiva si y sólo si T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.
   (c) T es isomorfismo si y sólo si T transforma bases de V en bases de W.
6. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $A := \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ y $B := \{u_j\}_{j\in J} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$. Demuestre que
   a) Si $T(A)$ genera a $\mathrm{Im}(T)$ y B genera a $\mathrm{Ker}(T)$, entonces $A \cup B$ genera a V.
   b) Si $T(A)$ y B son l.i., entonces $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B$ es l.i.
   c) Si $T(A)$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ y B es una base de $\mathrm{Ker}(T)$, entonces $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B$ es una base de V.
7. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Demuestre que $\mathcal{L}(V,W)$ es un subsespacio vectorial de $\mathcal{F}(V,W)$.
8. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T\,, S \in \mathcal{L}(V,W)$, y sea $\{v_i\}_{i\in I}$ un conjunto generador de V. Demuestre que si $\forall\, i \in I : T(v_i) = S(v_i)$, entonces $T = S$.
9. Sean U, V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $S \in \mathcal{L}(U,V)$. Entonces $T \circ S \in \mathcal{L}(U,W)$. Además, la aplicación $T \mapsto T \circ S$ es una transformación lineal de $\mathcal{L}(V,W)$ en $\mathcal{L}(U,W)$, y la aplicación $S \mapsto T \circ S$ es una transformación lineal de $\mathcal{L}(U,V)$ en $\mathcal{L}(U,W)$.

10. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V,W)$, y U un subespacio vectorial de V. Se define la *función restricción de T a U* por $T' := T|_U$.

    a) Aplique el Ejercicio anterior para concluir que la restricción $T' \in \mathcal{L}(U,W)$.
    b) T' es monomorfismo si y sólo si $U \cap \operatorname{Ker}(T) = \{\Theta_V\}$.
    c) $\operatorname{Im}(T') = \operatorname{Im}(T)$ si y sólo si $V = U + \operatorname{Ker}(T)$.
    d) T' es un isomorfismo si y sólo si $V = U \oplus \operatorname{Ker}(T)$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\forall\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,t) := (x+y, y-t, x+z)$.

    a) Demuestre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.
    b) Determine bases para $\operatorname{Ker}(T)$ y para $\operatorname{Im}(T)$. Además, determinar $r(T)$.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T\,,S \in \mathcal{L}(V)$. Demostrar que $\operatorname{Ker}(ST) = T^{-1}(\operatorname{Ker}(S) \cap \operatorname{Im}(T))$ (aquí, T^{-1} denota conjunto imagen inversa, y $ST := S \circ T$).

13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T\,,S \in \mathcal{L}(V)$.
    Demostrar que ST es inyectiva si y sólo si $\Big(\operatorname{Ker}(S) \cap \operatorname{Im}(T) = \{\Theta_V\} \wedge \operatorname{Ker}(T) = \{\Theta_V\}\Big)$.

14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que

$$a)\ \operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T^2)\,, \quad b)\ \operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)\,, \quad c)\ T^2 = \Theta \Leftrightarrow \operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)\,.$$

15. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ sobreyectiva si y sólo si $\dim(W) \leq \dim(V)$.

16. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que $\forall\, T \in \mathcal{L}(V,W) : \exists\, U \subseteq V$ subespacio vectorial, tal que $U \cap \operatorname{Ker}(T) = \{\Theta_V\} \wedge \operatorname{Im}(T) = \{T(u) : u \in U\}$.

17. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 := T \circ T = T$. Sabiendo que $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ denota la transformación identidad, demuestre que

$$a)\ V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)\,, \quad b)\ T + \tilde{I} \text{ es un automorfismo.}$$

18. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Dos transformaciones lineales $S\,,T \in \mathcal{L}(V)$ se dicen Similares, denotado por $S \sim T$, si $\exists\, P \in \mathcal{L}(V)$ automorfismo tal que $T = P^{-1} \circ S \circ P$.

    a) Muestre que la relación de similaridad definida por $\forall\, S\,,T \in \mathcal{L}(V) : S \sim T \Leftrightarrow S \wedge T$ son similares, es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}(V)$.
    b) Determine $[\tilde{I}]_\sim$, siendo $\tilde{I} \in \mathcal{L}(V)$ la transformación identidad.

19. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim(V) = \dim(W)$. Demuestre que V y W son espacios isomorfos.

20. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $U \subseteq V$ un subespacio vectorial, y $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Se sabe (ver Ejercicio 17 en Listado 3) que V/U es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (llamado *espacio (vectorial) cuociente*).

    a) Muestre que la aplicación $\pi : V \to V/U$, definido por $v \mapsto [v] \quad \forall\, v \in V$, es una transformación lineal sobreyectiva, llamada *epimorfismo canónico*.

    Suponga ahora que además $U \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. Demuestre que

    b) $\exists\,!\,\overline{T} \in \mathcal{L}(V/U, W)$ tal que $\overline{T} \circ \pi = T$.
    c) $\operatorname{Ker}(\overline{T}) = \operatorname{Ker}(T)/U \wedge \operatorname{Im}(\overline{T}) = \operatorname{Im}(T)$.
    d) $\overline{T}$ es un monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Ker}(T) = U$.
    e) $\overline{T}$ es un epimorfismo si sólo si T es un epimorfismo.
    f) $\overline{T}$ es un isomorfismo si y sólo si T es un epimorfismo y $\operatorname{Ker}(T) = U$.
    g) $V/\operatorname{Ker}(T)$ y $\operatorname{Im}(T)$ son isomorfos (Se conoce como el *Primer teorema del isomorfismo*).