UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION RECUPERACION (01/08/06)

EDO (521218)

Problema 1. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(x^2 - y^2 - 4)y' = 2xy$$

(i) Determine las posibles regiones de existencia y unicidad de solución para los PVI asociados con esta EDO, y grafíquelas.
(ii) Encuentre la solución general de esta EDO.
(iii) Encuentre la curva solución de esta EDO, que pasa por el punto $(0, 2)$, y grafíquela.

Pauta:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$$

De la continuidad de la función f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ vemos que las regiones de existencia y unicidad vienen definidas por las ramas de la elipse $x^2 - y^2 = 4$ lo que define 3 regiones de existencia y unicidad para los correspondientes PVI's asociados a la EDO dada.

La EDO es equivalente a la forma diferencial

$$2xydx + (y^2 - x^2 + 4)dy = 0,$$

la cual no es exacta pues,

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2 + 4)$$

Se puede ver que existen factores de Integración $\mu = \mu(y)$ pues $\cdots$

Un F.I. se encuentra resolviendo la EDO

$$2xy\,\mu'(y) + 4x\,\mu(y) = 0,$$

de donde $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$

$$\therefore \quad 2xy\,dx + (y^2 - x^2 + 4)dy = 0$$

se transforma en exacta al multiplicarla por $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$

En efecto, $\cdots$

Búsqueda de la solución

$$\frac{2x}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2} + \frac{4}{y^2}\right)\,dy = 0$$

$M(x,y) = \dfrac{2x}{y}$

$M(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{4}{y^2}$

$\dfrac{2x}{y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$\therefore F(x,y) = \displaystyle\int \frac{2x}{y} dx$

$F(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + c(y)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + c'(y) = 1 + \dfrac{4}{y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}$

$\Rightarrow \quad c'(y) = 1 + \dfrac{4}{y^2}$

$\Rightarrow \quad c(y) = y - \dfrac{4}{y}$

$\therefore F(x,y) = \frac{x^2}{y} + y - \frac{4}{y}$

y las soluciones son:

$$\frac{x^2}{y} + y - \frac{4}{y} = c \tag{1}$$

(iii) Si queremos que la solución pase por el punto $P(0,2)$ de (1) se obtiene que $c = 0$. Por lo tanto la solución buscada es

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

.

PROBLEMA 2.
Un cuerpo que pesa 19,6 N se suspende (verticalmente) del extremo de un resorte, lo cual hace que el resorte se alargue 10 cm de su longitud natural. Luego, se desplaza el cuerpo 50 cm por encima de su posición de equilibrio y se suelta. Considerando que el valor de la aceleración de la gravedad es $g = 9,8$ m/s^2, determinar

a) la ecuación del movimiento.

b) la posición del cuerpo en el instante $t = \dfrac{\pi}{21\sqrt{2}}$ segundos.

c) la amplitud del movimiento.

Atención: resolver el problema propuesto sin aplicar transformada de Laplace.
Pauta:
Sea $x(t)$ la posición (en metros) del cuerpo respecto de la posición de equilibrio (del sistema masa-resorte), en el instante t (en segundos).
En vista que no hay fuerza externa ni amortiguamiento, la ecuación que rige al movimiento es

$$m\, x''(t) + k\, x(t) \;=\; 0\,,$$

donde m representa la masa del cuerpo y k la constante del resorte. De esta manera se deduce que $m = \frac{19,6}{9,8} = 2$ Kg, y haciendo el análisis en el estado de equilibrio, se concluye que $k = \frac{19,6}{0,1} = 196$ N/m.
En consecuencia, la EDO que gobierna el movimiento está dado por

$$x''(t) \;+\; 98\, x(t) \;=\; 0\,, \tag{2}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = -1/2$, $x'(0) = 0$.
Resolviendo (2): Las raíces de la ecuación característica asociada a (2), $\lambda^2 + 98 = 0$, son $\lambda = \pm 7\sqrt{2}\,\imath$, siendo $\imath$ la unidad imaginaria. Esto conduce a afirmar que la solución general de la EDO (2) está dada por

$$x(t) \;=\; A\,\cos(7\sqrt{2}\,t) \;+\; B\,\mathrm{sen}(7\sqrt{2}\,t)\,, \tag{3}$$

siendo A, B constantes reales arbitrarias.
Encontrando la solución del PVI deducido:
Imponiendo la condición $x(0) = -1/2$ se deduce que $A = -1/2$, mientras que para que $x'(0) = 0$ se cumpla, se debe tener $B = 0$. De esta forma, la solución del PVI antes indicado es

$$x(t) \;=\; -\frac{1}{2}\cos(7\sqrt{2}\,t)\,,$$

el cual se interpreta como la ecuación del movimiento inducido.
En $t = \frac{\pi}{21\sqrt{2}}$ segundos, se tiene $x(\frac{\pi}{21\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\cos(\pi/3) = -\frac{1}{4}$, lo cual significa que en ese instante, el cuerpo se encuentra 25 cm por encima de la posición de equilibrio.
Finalmente, se observa que el movimiento obtenido es un movimiento armónico simple, de amplitud 0,5 m.

Problema 3.

$$\begin{cases} y''(t) \,+\, 2y'(t) \,-\, 3\,y(t) = \delta(t-2) \\ y(0) \,=\, 1 \quad y'(0) = -\,1 \end{cases}$$

Pauta:

$$s^2\mathcal{L}[y(t)](s) \,-\, sy(0) \,-\, y'(0) + 2s\mathcal{L}[y(t)](s) \,-\, 2y(0) \,-\, 3\mathcal{L}[y(t)](s) = e^{-2s}.$$

$$(s^2 \,+ 2s \,-\, 3)\mathcal{L}[y(t)](s) - s \,-\, 1 = e^{-2s}.$$

$$(s+3)(s-1)\mathcal{L}[y(t)](s) \,= e^{-2s} \,+ s \,+\, 1 \quad \text{ de donde}$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)(s-1)} \,+ \frac{(s+1)}{(s+3)(s-1)}.$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{(s+3)(s-1)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+3)(s-1)}\right](t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= H(t\,-\,2)\,f(t-2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right](t) \,+\, \frac{1}{2}\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right](t) && (4)\\ &= H(t\,-\,2)\,f(t-2) + \frac{1}{2}e^{-3t} \,+\, \frac{1}{2}e^{t} && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right](t). = && (7)\\ &= \frac{-1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right](t) \,+\, \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1}\right](t) && (8)\\ &= \frac{-1}{4}e^{-3t} \,+\, \frac{1}{4}e^{t} && (9) \end{aligned}$$

Problema 4.
Usando el método de valores y vectores propios, encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{8}{3}x(t) - \frac{1}{3}y(t) \\ y'(t) = \frac{4}{3}x(t) + \frac{4}{3}y(t) \end{cases}.$$

Pauta:

a) De $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$, resulta $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Además, el espacio vectorial

$$\mathrm{Ker}(A - 2I)$$

es generado por el vector $v = (1, 2)$.
Buscamos un vector $u_1 = (a, b)$ de modo que

$$(A - 2I)u_1 = v$$

Al resolver resulta $u_1 = (\alpha, 2\alpha - 3)$, con $\alpha \in \mathcal{R}$. Tomando $\alpha = 1$, obtenenmos $u_1 = (1, -1)$.
De este modo, obtenemos el vector

$$X_1(t) = e^{2t}\{(1, -1) \, + \, t(1, 2)\} = e^{2t}(1 + t, -1 + 2t).$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$X_H(t) = c_1 \, X_1(t) + c_2 \, (1, 2)$$

con c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

Nota: Existe método alternativo para encontrar la solución. Se agregará posteriormente a la pauta.