Problema 1. *Sean* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *y* $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ *espacios de Hilbert, y sea* $\boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ *con espacio nulo* $V := N(\boldsymbol{B})$.

a) *Demuestre que* $\sup\limits_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \dfrac{\langle \boldsymbol{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup\limits_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq\theta}} \dfrac{\langle \boldsymbol{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q.$

b) *Suponga que existe* $\beta > 0$ *tal que* $\sup\limits_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq\theta}} \dfrac{\langle \boldsymbol{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$, *y pruebe que* $H = R(\boldsymbol{B}^*) \oplus V$.

Demostración. (a) Dado $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$ y $q \in Q$ se tiene $V^\perp \subset H$ de aquí

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H}$$

Como $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H, Q)$, entonces V es cerrado, ademas como $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ es Hilbert, se tiene por teorema de descomposición ortogonal que

$$H = V \oplus V^\perp.$$

Considerando esto

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} &= \sup_{\substack{v\in V\oplus V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \\
&= \sup_{\substack{v=w+z\in V\oplus V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(w+z), q\rangle_Q}{\|w+z\|_H} \\
&= \sup_{\substack{v=w+z\in V\oplus V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(w)+\mathbf{B}(z), q\rangle_Q}{\|w+z\|_H} \\
&= \sup_{\substack{v=w+z\in V\oplus V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(z), q\rangle_Q}{\|w+z\|_H}
\end{aligned}$$

Sean $(w, z) \in V \times V^\perp$, por def de norma

$$\begin{aligned}
\|w+z\|_H^2 &= \langle w+z, w+z\rangle_H \\
&= \langle w, w+z\rangle_H + \langle z, w+z\rangle_H \\
&= \langle w, w\rangle_H + \langle w, z\rangle_H + \langle z, w\rangle_H + \langle z, z\rangle_H \\
&= \|w\|_H^2 + \|z\|_H^2
\end{aligned}$$

de aquí

$$\|z\|_H \leq \|w+z\|_H \Longrightarrow \frac{1}{\|w+z\|_H} \leq \frac{1}{\|z\|_H} \quad \text{con } \|w+z\|_H \neq 0 \text{ y } \|z\|_H \neq 0.$$

Utilizando esta desigualdad

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v=w+z\in V\oplus V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(z), q\rangle_Q}{\|w+z\|_H} \leq \sup_{\substack{z\in V^\perp\\ z\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(z), q\rangle_Q}{\|z\|_H}.$$

Como ambas desigualdades se cumplen entonces

$$\sup_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q$$

(b) De la parte (a) se sabe que

$$H = V \oplus V^\perp$$

por lo que solo basta probar que $R(\mathbf{B}^*) = N(\mathbf{B})^{\perp}$. De la parte (a) es fácil ver que

$$\|\mathbf{B}^*(q)\|_H = \sup_{\substack{v\in V^{\perp}\\ v\neq\theta}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \quad \forall q\in Q$$

Y así por hipotesis se tiene que

$$\|\mathbf{B}^*(q)\| \geq \beta\|q\| \quad \forall q\in Q.$$

En particular, para $q\in N(\mathbf{B}^*)$ se tiene que

$$0 = \|\mathbf{B}^*(q)\| \geq \beta\|q\|$$

esto implica que $q=\theta_Q$, por lo que $N(\mathbf{B}^*) = \{\theta_Q\}$. Aplicando teorema 1, se tiene que $R(\mathbf{B}^*)$ es cerrado y por tanto $R(\mathbf{B}^*) = \overline{R(\mathbf{B}^*)} = N\left((\mathbf{B}^*)^*\right)^{\perp} = N(\mathbf{B})^{\perp}$.

□

Problema 2. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ un espacio de Hilbert complejo y considere $H\times H$ provisto del producto escalar*

$$\langle (u,v),(z,w)\rangle_{H\times H} := \langle u,z\rangle_H + \langle v,w\rangle_H \quad \forall (u,v),\ (z,w)\in H\times H.$$

Además, dado $A\in\mathcal{L}(H,H)$, defina el operador $B: H\times H \longrightarrow H\times H$ por

$$B((u,v)) := (iA(v), -iA^*(u)) \quad \forall (u,v)\in H\times H.$$

Demuestre que $\|B\| = \|A\|$ y que B es autoadjunto.

Demostración. En primer lugar, veamos que B es lineal y acotado. Sea $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ y $(u,v),(w,z)\in H\times H$, entonces

$$\begin{aligned}
B(\alpha(u,v)+\beta(w,z)) &= B((\alpha u+\beta w),(\alpha v+\beta z))\\
&= (iA(\alpha v+\beta z), -iA^*(\alpha u+\beta w))\\
&= (i\alpha A(v)+i\beta A(z), -i\alpha A^*(u) - i\beta A^*(w))\\
&= (i\alpha A(v)+, -i\alpha A^*(u)) + (i\beta A(z), -i\beta A^*(w))\\
&= \alpha(iA(v)+, -iA^*(u)) + \beta(iA(z), -iA^*(w))\\
&= \alpha B((u,v)) + \beta B((w,z))
\end{aligned}$$

Por tanto B es lineal, veamos que es acotado, dado $(u,v)\in H\times H$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|B((u,v))\|^2_{H\times H} &= \|(iA(v), -iA^*(u))\|^2_{H\times H}\\
&= \langle (iA(v), -iA^*(u)), (iA(v), -iA^*(u))\rangle_{H\times H}\\
&= \langle iA(v), iA(v)\rangle_H + \langle -iA^*(u), -iA^*(u)\rangle_H\\
&= i(-i)\langle A(v), A(v)\rangle_H + (-i)i\langle A^*(u), A^*(u)\rangle_H\\
&= \langle A(v), A(v)\rangle_H + \langle A^*(u), A^*(u)\rangle_H\\
&= \|A(v)\|^2_H + \|A^*(u)\|^2_H\\
&= \|A(v)\|^2_H + \|A(u)\|^2_H\\
&\leq \|A\|^2_H\|v\|^2_H + \|A\|^2_H\|u\|^2_H\\
&\leq \|A\|^2_H\left(\|v\|^2 + \|u\|^2\right)\\
&= \|A\|^2_H(\langle v,v\rangle_H + \langle u,u\rangle_H)\\
&= \|A\|^2_H(\langle u,u\rangle_H + \langle v,v\rangle_H)\\
&= \|A\|^2_H\langle (u,v),(u,v)\rangle_{H\times H}\\
&= \|A\|^2_H\|(u,v)\|^2_{H\times H}
\end{aligned}$$

Así,

$$\|B((u,v))\| \leq \|A\|_H\|(u,v)\|_{H\times H}$$

De aquí se deduce que $B\in\mathcal{L}(H\times H)$ y que $\|B\|\leq\|A\|$. Por otro lado

$$B((\theta_H, v)) = (iA(v), -iA^*(\theta_H)) = (iA(v), \theta_H)$$

ademas

$$\|B((\theta_H, v))\|^2_{H\times H} = \langle (iA(v), \theta_H), (iA(v), \theta_H)\rangle_{H\times H} = \langle iA(v), iA(v)\rangle_H + \langle \theta_H, \theta_H\rangle_H = i(-i)\langle A(v), A(v)\rangle_H = \|A(v)\|^2_H$$

de esto es fácil ver

$$\|(\theta, v)\|^2_{H\times H} = \|v\|_H .$$

Utilizando lo anterior

$$\|A\| = \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|_H\leq 1}} \|A(v)\|_H = \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|_H\leq 1}} \|B((\theta_H, v))\|_{H\times H} \leq \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|_H\leq 1}} \|B\| \|(\theta_H, v)\| = \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|_H\leq 1}} \|B\| \|v\|_H = \|B\| .$$

Juntando ambas desigualdades, se tiene que $\|A\| = \|B\|$. Para mostrar que B es autoadjunto se procede como sigue. Dados $(u, v), (w, z) \in H \times H$

$$\begin{aligned}
\langle B(u,v), (w,z)\rangle_{H\times H} &= \langle (iA(v), -iA^*(u)), (w,z)\rangle_{H\times H}\\
&= \langle iA(v), w\rangle_H + \langle -iA^*(u), z\rangle_H\\
&= i\langle A(v), w\rangle_H + -i\langle A^*(u), z\rangle_H\\
&= i\langle v, A^*(w)\rangle_H + -i\langle u, A(z)\rangle_H\\
&= \langle v, -iA^*(w)\rangle_H + \langle u, iA(z)\rangle_H\\
&= \langle u, iA(z)\rangle_H + \langle v, -iA^*(w)\rangle_H\\
&= \langle (u,v), (iA(z), -iA^*(w))\rangle_{H\times H}\\
&= \langle (u,v), B^*(w,z)\rangle_{H\times H}
\end{aligned}$$

de esto se desprende

$$B^*(w,z) = (iA(z), -iA^*(w)) = B(w,z)$$

es decir, B es autoadjunto. □

Problema 3. *Dado Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, defina el operador $A : H^1(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$ por*

$$A(u) := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right\} v_j \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

donde $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\} \subset H^1(\Omega)$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \subset H^2(\Omega)$. Demuestre que A es lineal y acotado y encuentre el operador adjunto A^*.

Demostración. Antes de comenzar, dado $j \in \{1, \ldots, N\}$ con $N \in \mathbb{N}$ definimos el funcional

$$\begin{aligned}
F_j &: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\\
u &\mapsto F_j(u) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j
\end{aligned}$$

El cual es lineal y acotado, en efecto, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
F_j(\alpha u + \beta v) &= \int_\Omega \nabla(\alpha u + \beta v) \cdot \nabla u_j\\
&= \int_\Omega (\alpha\nabla u + \beta \nabla v) \cdot \nabla u_j\\
&= \int_\Omega (\alpha\nabla u \cdot \nabla u_j + \beta\nabla v \cdot \nabla u_j)\\
&= \int_\Omega \alpha\nabla u \cdot \nabla u_j + \int_\Omega \beta\nabla v \cdot \nabla u_j\\
&= \alpha\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j + \beta\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u_j\\
&= \alpha F_j(u) + \beta F_j(v)
\end{aligned}$$

Así, F_j es lineal con $j \in \{1, \ldots, N\}$. Por otro lado, dado $u \in H^1(\Omega)$ y $j \in \{1, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned}
|F_j(u)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_j \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla u_j| \\
&\underset{\text{CS}}{\leq} \int_\Omega \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u_j\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\underset{\text{CS}}{\leq} \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|u_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \\
&= \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Por tanto F_j es acotado con $j \in \{1, \ldots, N\}$. Considerando lo anterior probaremos que $A \in \mathcal{L}\left(H^1(\Omega), H^2(\Omega)\right)$, primero probemos que A es lineal, dado $u, v \in H^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
A(\alpha u + \beta v) &= \sum_{j=1}^N F_j(\alpha u + \beta v) v_j \\
&= \sum_{j=1}^N \left(\alpha F_j(u) + \beta F_j(v)\right) v_j \\
&= \sum_{j=1}^N \left(\alpha F_j(u) v_j + \beta F_j(v) v_j\right) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^N F_j(u) v_j + \beta \sum_{j=1}^N F_j(v) v_j \\
&= \alpha A(u) + \beta A(v).
\end{aligned}$$

Es decir A es lineal. Veamos que A es acotado, dado $u \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|A(u)\|_{H^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{j=1}^N F_j(u) v_j \right\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^N \|F_j(u) v_j\|_{H^2(\Omega)} \\
&= \sum_{j=1}^N |F_j(u)| \|v_j\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v_j\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \|v_j\|_{H^2(\Omega)} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Así A es acotado y por tanto $A \in \mathcal{L}\left(H^1(\Omega), H^2(\Omega)\right)$. Para encontrar el operador adjunto A^*, se procede como sigue, dados $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^2(\Omega)$ se tiene

$$\langle A(u), v \rangle_{H^2(\Omega)} = \left\langle \sum_{j=1}^N F_j(u) v_j, v \right\rangle_{H^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^N F_j(u) \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)}$$

Dado que $\left(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}\right)$ es un espacio de Hilbert y $F_j \in H^1(\Omega)'$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$, entonces por teorema de representación de Riesz se tiene que para todo $u \in H^1(\Omega)$

$$F_j(u) = \langle u, \mathcal{R}(F_j) \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\},$$

considerando esto

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} F_j(u) \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{N} \langle u, \mathcal{R}(F_j) \rangle_{H^1(\Omega)} \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left\langle u, \mathcal{R}(F_j) \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)} \right\rangle_{H^1(\Omega)} \\ &= \left\langle u, \sum_{j=1}^{N} \mathcal{R}(F_j) \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)} \right\rangle_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

de aquí

$$A^*(v) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{R}(F_j) \langle v_j, v \rangle_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

□

Apendice

Teorema 1. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado tal que $N(A) = \{\theta_X\}$. Entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado de Y si y solo si existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\| \leq C \|A(x)\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$