Cálculo II (527150)

Clase 18: Sucesiones reales

Sucesiones de números reales

Definición

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Normalmente, se asocia una función con sus valores:

$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5) \ldots)$$

y se escribe con notación de subíndices: $f(n) = a_n$,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$$

Ejemplos de sucesiones

Ejemplos

- $a_n = 3n + 2$
- $a_n = n!$
- La sucesión de Fibonacci, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
- $a_n =$ la cantidad de divisores de n
- $a_n =$ el n-ésimo decimal de π

Convergencia de sucesiones

Definición

Decimos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al número real L, lo que se escribe

$$\lim a_n = L,$$

si para todo margen de error $\varepsilon > 0$ sólo un número finito de términos de la sucesión no está en el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Una sucesión es *convergente* si converge a algún valor. De lo contrario, es *divergente*.

Ejemplos de convergencia/divergencia

Ejemplos

- $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
- $a_n = 5$
- $a_n = (-1)^n$

Propiedades de la convergencia

Propiedades (álgebra de sucesiones convergentes)

Si $\lim a_n = L$, $\lim b_n = M$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\lim(a_n + b_n) = L + M$
- $\lim(a_n - b_n) = L - M$
- $\lim \lambda a_n = \lambda L$
- $\lim a_n b_n = LM$
- Si $M \neq 0$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$

Propiedad (relación con funciones reales)

Si $f : [N, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función real tal que $f(n) = a_n$ para todo número natural $n \geq N$, entonces

$$\lim a_n = \lim_{x \to \infty} f(x)$$