Álgebra I

Prof. Víctor Aros Quinán
Departamento de Ingeniería Matemática
Semestre 1 - 2024

Tema Nº4: Polinomios
Clase N°27 - 13/06/2024

Texto Guía: Álgebra Primer Curso.

Polinomios

Definición

Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Un polinomio es una función $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definida de la siguiente forma:

$$\forall x \in \mathbb{K} : p(x) =$$

es decir, la función p se puede escribir como suma de potencias positivas de x multiplicadas por constantes pertenecientes a un cuerpo.

Polinomio

Definición

El conjunto de los polinomios definidos sobre $\mathbb{K}$ se puede representar por $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Además, denotaremos por $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ al conjunto formado por todos los polinomios de grado menor o igual que n y coeficientes en $\mathbb{K}$.

Operaciones en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$

Consideremos lo siguiente:

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \;\text{ y }\; q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$$

así, se tiene:

1. La **SUMA** de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio:

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_rx^r$$

donde $c_i = a_i + b_i$, con $i = 0, 1, 2, ..., r$ y $r \leq \max\{n, m\}$.

Operaciones en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$

Consideremos lo siguiente:

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \text{ y } q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$$

así, se tiene:

1. La **SUMA** de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio:

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_rx^r$$

   donde $c_i = a_i + b_i$, con $i = 0, 1, 2, ..., r$ y $r \leq \max\{n, m\}$.

2. El **PRODUCTO** de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + ... + b_mx^m)$$

   donde $\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

Ejercicios

1. Consideremos los siguientes polinomios:

$$p(x) = x + 1,\ q(x) = x^5 + 2x^2 - 1,\ r(x) = -x^5 + 4x^3 + 2$$

   Determine los siguientes polinomios:

   (a) $p + q$ (b) $p \cdot q$ (c) $p + rq$ (d) $pr - qp$

2. Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definido como $p(x) = x^3 - 4x + 1$. Determine, si es posible, un polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de modo que:
   (a) $\mathrm{gr}(p + q) = 10$
   (b) $\mathrm{gr}(p + q) = 1$
   (c) $\mathrm{gr}(pq) = -\infty$
   (d) $\mathrm{gr}(p + q) = 2$
   (e) $\mathrm{gr}(qp) \geq 7$

Funciones Racionales

Definición

Dado un cuerpo de números $\mathbb{K}$ y $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, la función $h = p/q$ se denomina función racional, es decir, una función racinal es la que resulta del cociente de dos polinomios y es tal que:

$$h : \mathbb{K} - \{x \in \mathbb{K} : q(x) = 0\} \to \mathbb{K}, h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde, p se denomina **dividendo** y q **divisor**.

Funciones Racionales Impropias

Lema

Dados $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ siendo $p, q \neq \theta$, con $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$, es decir, $\frac{p}{q}$ es una función racional impropia. Luego, existen y son únicos dos polinomios s, r pertenecientes a $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, tales que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{con } r(x) = \theta \ \vee \ \text{gr}(r) < \text{gr}(q)$$

Los polinomios s y r se denominan **cociente** y **resto** que resultan de dividir p por q.

Algoritmo de la División en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$

El cociente y el resto de dividir un polinomio por otro no nulo se calculan mediante un algoritmo similar al de la división de números enteros.

Ejemplos: Determine el cociente y resto de la división p/q si:

1. $p(x) = 5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x$ y $q(x) = x^2 + 1$.
2. $p(x) = 2x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ y $q(x) = x^2 + 1$.
3. $p(x) = -2x^2 + 4x^4 + 1 - x$ y $q(x) = x^2 - 1$.

Regla de Ruffini

La **Regla de Ruffini** nos permitira calcular los coeficientes del cociente y el resto de dividir un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - c$.

Ejemplos: Determine el cociente y resto de la división de p con s:

1. $p(x) = 5x^7 - 9x^6 - 3x^5 + x^3 + 8x + 1$ y $s(x) = x - 2$
2. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y $s(x) = x - 16$
3. $p(x) = x^6 - 4ix^2 - 9x^4 - 64$ y $s(x) = x + 3$

Raíces de un Polinomio

Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, de grado mayor o igual a 1, por otro de la forma $x - c$ es $p(c)$.

Raíces de un Polinomio

Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, de grado mayor o igual a 1, por otro de la forma $x - c$ es $p(c)$.

Definición

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$, c es raíz o cero de p si y solo si $p(c) = 0$ (note que $p(c) = 0$ si y solo si p es divisible por $x - c$ o el resto de la división de p por $x - c$ es el polinomio nulo.)