

Conjuntos abiertos y cerrados.

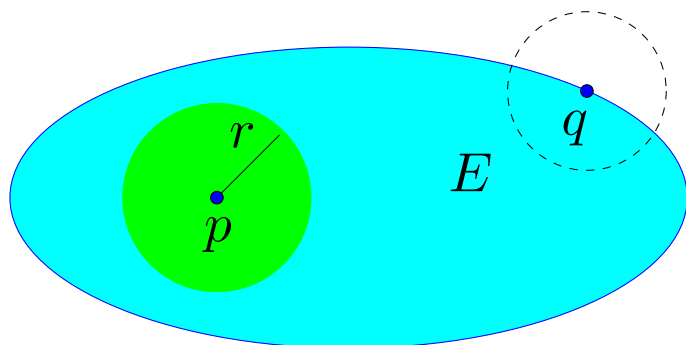
- Conjuntos abiertos.
- Puntos de acumulación.
- Conjuntos cerrados.
- Clausura de un conjunto.

Conjuntos abiertos.

A lo largo de la clase de hoy,

d es una métrica en X y $E \subset X$.

Def.: Un punto $p \in E$ es un **punto interior** de E si $\exists r > 0 : B_r(p) \subset E$.

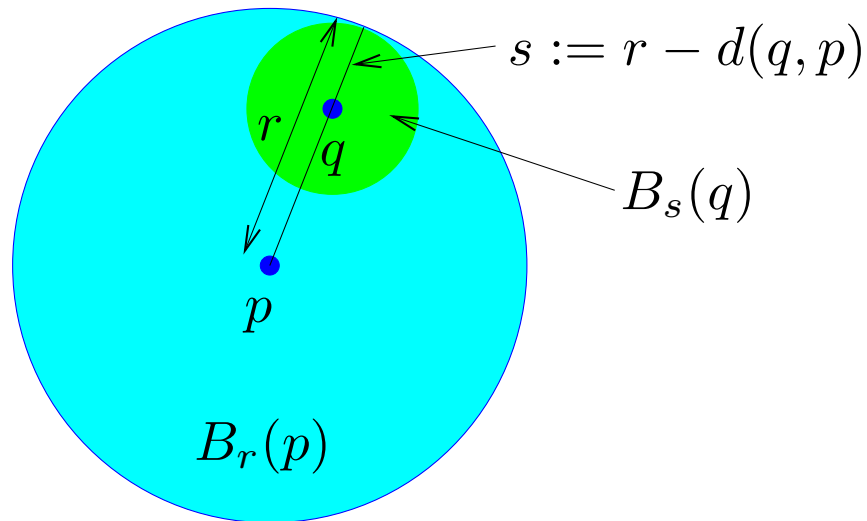


- p : punto interior;
- q : no es punto interior.

Def.: Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

Ejemplo: El espacio métrico X es abierto pues $\forall p \in X, \forall r > 0$,
 $B_r(p) := \{q \in X : d(q, p) < r\} \subset X$.

Teor.: Las bolas (abiertas) son conjuntos abiertos.



Dem.: Sean $p \in X$ y $r > 0$. Veremos que $B_r(p)$ es abierto. Para ello, veremos que $\forall q \in B_r(p)$, q **es un punto interior de $B_r(p)$** .

Sea $q \in B_r(p) \implies d(q, p) < r \implies r - d(q, p) > 0$.

Entonces, sea $s := r - d(q, p) > 0$. **Veremos que $B_s(q) \subset B_r(p)$** .

Sea $x \in B_s(q) \implies d(x, q) < s = r - d(q, p)$
 $\implies d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < r \implies x \in B_r(p)$

Entonces, $\forall q \in B_r(p)$, $\exists s > 0 : B_s(q) \subset B_r(p) \implies B_r(p)$ abierto. \square

Puntos de acumulación.

Def.: Sea $p \in X$. p es un **punto de acumulación** de E , si $\forall r > 0$, $B_r(p)$ contiene puntos de E distintos de p ; vale decir, si

$$\forall r > 0, \exists q \neq p : q \in B_r(p) \cap E.$$

Def.: Sea $p \in E$. p es un **punto aislado** de E , si no es un punto de acumulación.

Teor.: p es un punto aislado de E si y sólo si $\exists r > 0 : B_r(p) \cap E = \{p\}$.

Dem.: $\boxed{\implies}$ Sea p punto aislado de E

$\implies p \in E$, pero no es punto de acumulación de E

$\implies \exists r > 0 : \forall q \neq p, q \notin B_r(p) \cap E$

$\implies B_r(p) \cap E = \{p\}$.

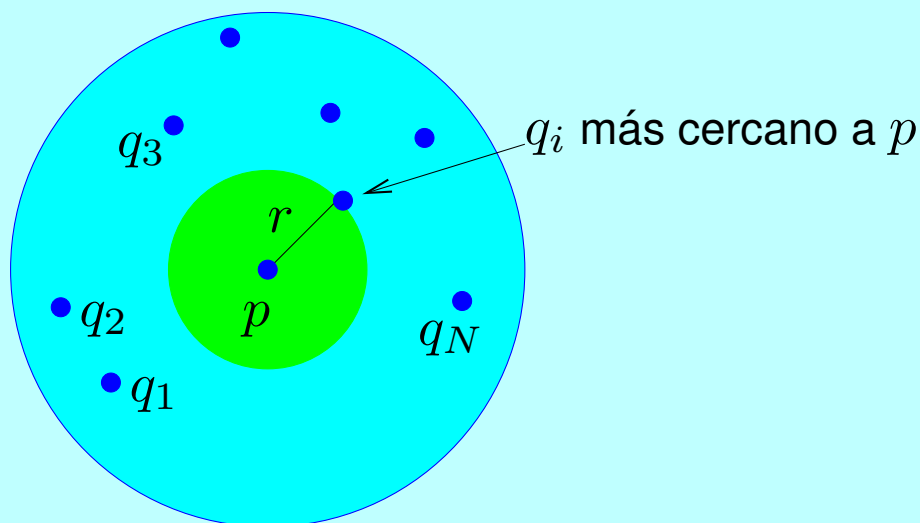
$\boxed{\impliedby}$ Sea p tal que $\exists r > 0 : B_r(p) \cap E = \{p\}$

$\implies p \in E$, pero no es punto de acumulación de E

$\implies p$ punto aislado de E . \square

Teor.: Si p es un punto de acumulación de E , toda bola centrada en p contiene infinitos puntos de E .

Dem.: Sea p un punto de acumulación de E . Por el absurdo, **supongamos que hay una bola centrada en p que sólo contiene finitos puntos de E .** Sean q_1, \dots, q_N los puntos de E distintos de p que caen en esa bola.



Sea $r := \min_{1 \leq i \leq N} d(q_i, p) > 0 \implies d(q_i, p) \geq r \quad \forall i = 1, \dots, N$

$\implies q_1, \dots, q_N \notin B_r(p)$. Por lo tanto $B_r(p)$ no contiene puntos de E distintos de p . Entonces **p no es un punto de acumulación de E .** $\triangleright \triangleleft$ \square

Conjuntos cerrados.

Def.: Un conjunto es **cerrado** si contiene todos sus puntos de acumulación.

Ejemplo: El espacio métrico X es cerrado pues contiene todos los puntos, sean de acumulación o no.

Las nociones de abierto y cerrado no son excluyentes: hay conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo (por ejemplo el espacio métrico X), así como hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados (por ejemplo, \mathbb{Q} en \mathbb{R} **Ej.**).

En cambio, las nociones de abierto y cerrado son **complementarias** en el sentido del teorema siguiente.

Recordemos que si $E \subset X$, el **complemento** de E (en X) es el conjunto

$$E^c := X \setminus E := \{x \in X; x \notin E\}.$$

Teor.: Un conjunto es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.

Dem.: $\boxed{\implies}$ Sea E abierto. **Demostraremos que E^c es cerrado.**

Sea x punto de acumulación de E^c

$$\implies \forall r > 0, \exists q \neq x : q \in B_r(x) \cap E^c$$

$$\implies \forall r > 0, B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset \implies \forall r > 0, B_r(x) \not\subset E$$

$$\implies x \text{ no es punto interior de } E, \text{ que es abierto}$$

$$\implies x \notin E \implies x \in E^c \implies E^c \text{ es cerrado.}$$

$\boxed{\impliedby}$ Sea E^c cerrado. **Demostraremos que E es abierto.**

Sea $x \in E \implies x \notin E^c$, que es cerrado

$$\implies x \text{ no es punto de acumulación de } E^c$$

$$\implies \exists r > 0 : B_r(x) \cap E^c \text{ no contiene puntos distintos de } x ; \text{ pero } x \notin E^c$$

$$\implies B_r(x) \cap E^c = \emptyset \implies B_r(x) \subset E \implies E \text{ es abierto. } \square$$

Corol.: Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

Dem.: $\boxed{\text{Ej.}}$

Teor.:

- Si G_α es abierto $\forall \alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es abierto.
- Si F_β es cerrado $\forall \beta \in B$, entonces $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ es cerrado.
- Si G_1, \dots, G_N son abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^N G_i$ es abierto.
- Si F_1, \dots, F_M son cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^M F_i$ es cerrado.

Dem.: Ej.

Sin embargo, como se ve en los ejemplos que siguen:

- **intersección de infinitos abiertos no tiene por que ser abierto;**
- **unión de infinitos cerrados no tiene por que ser cerrado.**

Ejemplos: En \mathbb{R} ,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1] .$$

Ej.: Demuestra esas dos igualdades.

Clausura de un conjunto.

Def.: La **clausura** de E es el conjunto $\overline{E} := E \cup E'$, donde E' denota el conjunto de puntos de acumulación de E .

Prop.: $x \in \overline{E} \iff \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

Dem.: $\boxed{\implies}$ Sea $x \in \overline{E}$. Entonces, (i) $x \in E$ o (ii) $x \in E'$.

(i) $x \in E \implies \forall r > 0, x \in B_r(x) \cap E \implies \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

(ii) $x \in E' \implies \forall r > 0, \exists q \neq x : q \in B_r(x) \cap E$
 $\implies \forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

$\boxed{\impliedby}$ Sea x tal que, $\forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Veremos dos casos:

(i) $x \in E$ y (ii) $x \notin E$.

(i) Si $x \in E$, como $E \subset \overline{E}$, entonces $x \in \overline{E}$.

(ii) Si $x \notin E$, como $\forall r > 0, B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, entonces

$\forall r > 0, \exists q \neq x : q \in B_r(x) \cap E \implies x \in E' \implies x \in \overline{E}$. \square

Teor.: (a) $E = \overline{E} \iff E$ es cerrado.

(b) \overline{E} es cerrado. (Vale decir, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.)

(c) F cerrado y $F \supset E \implies F \supset \overline{E}$. (Vale decir, \overline{E} es el cerrado más pequeño que contiene a E .)

Dem.: (a) $\boxed{\implies}$ $E = \overline{E} = E \cup E' \implies E \supset E' \implies E$ cerrado.

$\boxed{\impliedby}$ E cerrado $\implies E \supset E' \implies \overline{E} = E \cup E' = E$.

(b) **Demostraremos que $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.** Como $\overline{E} \subset \overline{\overline{E}}$, basta ver la otra inclusión.

Sea $x \in \overline{\overline{E}}$. Sea $r > 0$. Por la proposición anterior, $B_r(x) \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Sea $y \in B_r(x) \cap \overline{E}$. Como $B_r(x)$ es abierto, $\exists s > 0 : B_s(y) \subset B_r(x)$.

Como $y \in \overline{E}$, entonces $B_s(y) \cap E \neq \emptyset \implies B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\forall r > 0 : B_r(x) \cap E \neq \emptyset \implies x \in \overline{E} \implies \overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$.

(c) Sea F cerrado tal que $F \supset E$.

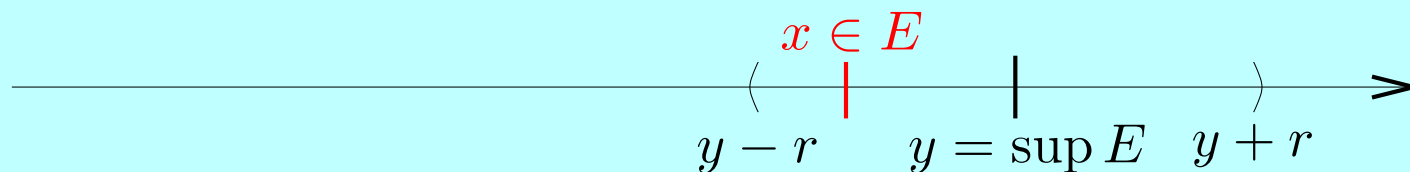
Entonces, por la definición de punto de acumulación, $F' \supset E'$.

Por lo tanto, $\overline{F} = F \cup F' \supset E \cup E' = \overline{E}$.

Pero F es cerrado. Entonces (a) $\implies F = \overline{F} \supset \overline{E}$. \square

Teor.: Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente. Entonces $\sup E \in \overline{E}$.

Dem.:



Sea $y := \sup E$. **Veremos que** $\forall r > 0 : B_r(y) \cap E \neq \emptyset$.

Notemos que en \mathbb{R} , $B_r(y) = (y - r, y + r)$.

Sea $r > 0$. Como $y = \sup E$, entonces, $y - r$ no es cota superior de E

$$\implies \exists x \in E : y - r < x \leq y$$

$$\implies B_r(y) \cap E = (y - r, y + r) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies y \in \overline{E}. \quad \square$$

Corol.: Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y cerrado. Entonces, $\sup E \in E$ (y, por lo tanto, $\sup E = \max E$).

Dem.: Ej.