Propiedades de la convergencia uniforme.

- **Convergencia uniforme y continuidad.**
- **Convergencia en $\mathscr{C}(E)$.**
- **Convergencia uniforme e integración Riemann.**
- **Convergencia uniforme y derivación.**
- **Series de potencias.**
- **Funciones definidas mediante series de potencias.**

Convergencia uniforme y continuidad.

A lo largo de esta clase, X e Y son espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente, y $E \subset X$.

Teor.: Sean $f_n : X \to Y,\, n \in \mathbb{N},\;\; f : E \to Y$ y $x \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en E y f_n son continuas en x $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en x.

Dem.: Sea $\varepsilon > 0$.

$f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $E \implies$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\, \forall t \in E,\, d_Y(f_n(t), f(t)) < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

f_N continua en $x \implies$

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in E : d_X(t, x) < \delta,\;\; d_Y(f_N(t), f_N(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, $\forall t \in E : d_X(t, x) < \delta$,

$$d_Y(f(t), f(x)) \leq \underbrace{d_Y(f(t), f_N(t))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_N(t), f_N(x))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d_Y(f_N(x), f(x))}_{<\varepsilon/3}$$

$$\implies d_Y(f(t), f(x)) < \varepsilon.$$

Entonces, f es continua en x. $\square$

Convergencia en $\mathscr{C}(E)$.

Def.: Sea $\mathscr{C}(E)$ el espacio de funciones $f : E \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas:

$$\boxed{\mathscr{C}(E) := \{f \in \mathscr{B}(E) : f \text{ continua}\}\,.}$$

Como la suma de funciones continuas es una función continua y el producto de una función continua por un escalar también es una función continua, entonces $\mathscr{C}(E)$ es un **subespacio vectorial** de $\mathscr{B}(E) \implies (\mathscr{C}(E), \|\cdot\|_\infty)\, la$ es un E.V.N.

Igual que en $\mathscr{B}(E)$, en $\mathscr{C}(E)$, la convergencia en $\|\cdot\|_\infty$ es la convergencia uniforme.

Corol.: $\mathscr{C}(E)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(E)$.

Dem.: Sea $f \in \overline{\mathscr{C}(E)} \implies \exists\{f_n\} \subset \mathscr{C}(E) : \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$

$\implies f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $E \implies f$ es continua en E

$\implies f \in \mathscr{C}(E)$. Entonces $\mathscr{C}(E)$ es cerrado. $\square$

Lema.: Sea X un espacio métrico completo y $E \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces, E es completo.

Dem.: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en E

$\implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq N,\ d_X(x_m, x_n) < \varepsilon$

$\implies \{x_n\}$ es de Cauchy en X.

X es completo $\implies \exists x \in X : x_n \xrightarrow{n} x$.

Como $\{x_n\} \subset E$ y E es cerrado $\implies x \in E$.

Entonces, $\{x_n\}$ converge en $E \implies E$ es completo. $\square$

Teor.: $\mathscr{C}(E)$ es un espacio de Banach.

Dem.: Por el corolario anterior, $\mathscr{C}(E)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(E)$.

La clase pasada vimos que $\mathscr{B}(E)$ es completo

Entonces, el lema anterior implica que $\mathscr{C}(E)$ es completo.

Vale decir, $\mathscr{C}(E)$ es un espacio de Banach. $\square$

Convergencia uniforme e integración Riemann.

Teor.: Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, integrables Riemann en $[a,b]$.

Si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$,

entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\boxed{\int_a^b f_n \xrightarrow{n} \int_a^b f.}$

Dem.: $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$ y f_n acotadas $\Longrightarrow$ f es acotada.

Sean $\varepsilon_n := \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n} 0.$

$\forall x \in [a,b], \ \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \ f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = \underline{\int_a^b}(f_n - \varepsilon_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b}(f_n + \varepsilon_n) = \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)$$

$$\Longrightarrow \ 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \underbrace{\int_a^b (f_n + \varepsilon_n) - \int_a^b (f_n - \varepsilon_n)}_{= 2\int_a^b \varepsilon_n} = 2\varepsilon_n(b-a) \xrightarrow{n} 0.$$

Entonces, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \implies \begin{cases} f \text{ es integrable Riemann en } [a,b] \text{ y} \\ \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \end{cases}$$

Recién demostramos que $\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)$.

Reemplazando en esta desigualdad las integrales inferior y superior por la integral de Riemann, se tiene que

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)$$

$$\implies \int_a^b f_n - \int_a^b \varepsilon_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_n + \int_a^b \varepsilon_n)$$

$$\implies -\varepsilon_n (b-a) \leq \int_a^b f - \int_a^b f_n \leq \varepsilon_n (b-a)$$

$$\implies \left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \varepsilon_n (b-a) \xrightarrow{n} 0 \implies \int_a^b f_n \xrightarrow{n} \int_a^b f. \quad \square$$

Corol.: Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, integrables Riemann en $[a,b]$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.}$

Convergencia uniforme y derivación.

A diferencia de lo que ocurre con la continuidad y con la integración Riemann, **no es verdad** que si $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente y f_n son derivables en x $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es derivable en x y $f_n'(x) \xrightarrow{n} f'(x)$. Lo que vale es lo siguiente:

Teor.: Sean $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables $\forall n \in \mathbb{N}$. Si:

i) $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge y

ii) la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$,

entonces:

a) $\exists f : [a, b] \to \mathbb{R} : f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a, b]$ y

b) f es derivable y $f_n'(x) \xrightarrow{n} f'(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Dem.: Lo veremos en el caso particular en que $f_n' : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas.
La demostración en el caso general puede verse en el Teor. 7.17 del libro de Rudin.

Regla de Barrow $\implies \int_{x_0}^x f_n' = f_n(x) - f_n(x_0)$

$\implies f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n' \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(i) $\implies \exists c \in \mathbb{R} : \ f_n(x_0) \xrightarrow{n} c.$

(ii) $\implies \exists g : \ [a,b] \to \mathbb{R} : \ f_n' \xrightarrow{n} g$ uniformemente en $[a,b]$.

Como estamos suponiendo que $f_n' : \ [a,b] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, son continuas, g resulta continua y $\int_{x_0}^x f_n' \xrightarrow{n} \int_{x_0}^x g \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces, $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'n \xrightarrow{n} c + \int_{x_0}^x g \quad \forall x \in [a,b]$.

Sea $f : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := c + \int_{x_0}^x g, \quad x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}
\implies |f_n(x) - f(x)| &= \left| \left[f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n' \right] - \left[c + \int_{x_0}^x g \right] \right| \\
&\le |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^x |f_n' - g| \\
&\le |f_n(x_0) - c| + \|f_n' - g\|_\infty \, |x - x_0| \\
&\le |f_n(x_0) - c| + \|f_n' - g\|_\infty \, (b-a) \quad \forall x \in [a,b].
\end{aligned}$$

a) Sea $\varepsilon > 0.$ $\begin{cases} \text{(i)} \implies \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_1, \ |f_n(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{(ii)} \implies \exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_2, \ \|f_n' - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{cases}$

$\implies \exists N := \max\{N_1.N_2\} \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N, \ \ \forall x \in [a,b],$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - c|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|f_n' - g\|_\infty}_{<\varepsilon/(2(b-a))} (b-a) < \varepsilon$$

$\implies f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente en $[a,b]$.

b) Recordemos que $f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g$ y que g es continua. Entonces,

T.F.C. $\implies f$ es derivable en $[a,b]$ y $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces, (ii) $\implies f_n' \xrightarrow{n} f'$ en $[a,b]$. $\square$

Corol.: Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables $\forall n \in \mathbb{N}$. Si:

i) $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge y

ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$,

entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ y

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es derivable y $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ en $[a,b]$.

Series de potencias.

Def.: Una **serie de potencias** es una serie de funciones de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ con } c_n, x \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}\text{)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Veremos que con cada serie de potencias su asocia un radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$ tal que la serie converge $\forall x : |x| < R$ y diverge $\forall x : |x| > R$. (Si $|x| = R$, la serie puede converger o diverger.)

Recordemos dos criterios de convergencia de series que ya hemos demostrado:

Criterio de la raíz: Sean $a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \geq 0$, y $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Entonces:

a) $\alpha < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;

b) $\alpha > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge;

c) Si $\alpha = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ puede converger o diverger.

Criterio de Weierstrass: Sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \geq 0$.

Sean $a_n \geq 0$ tales que $|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall x \in E, \ \forall n \geq 0$.

Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E.

Def.: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, su **radio de convergencia** es

$$R := \frac{1}{\alpha} \qquad \text{con } \alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|},$$

donde recordemos que si $\alpha = 0$, $R = +\infty$ y si $\alpha = +\infty$, $R = 0$.

Teor.: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R.

a) Si $|x| < R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente;
b) si $|x| > R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge;
c) si $|x| = R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ puede converger o diverger.

Dem.: Sean $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ y $R := \frac{1}{\alpha}$, el radio de convergencia de la serie de potencias. Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\right)|x| = \alpha\,|x|\,.$$

Entonces:

a) $|x| < R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente;
b) $|x| > R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge;
c) $|x| = R = \frac{1}{\alpha} \implies \alpha\,|x| = 1 \implies$ la serie puede converger o diverger.

Ejemplos:

Serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1} = 1 \implies R = \frac{1}{\alpha} = 1$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$ (como ya sabíamos).

Además, si $|x| < 1$, sabemos que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}.}$

$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. $\alpha = \limsup \sqrt[n]{n} = 1 \implies R = \frac{1}{\alpha} = 1$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$.

$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. $\alpha = \limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = +\infty \implies R = \frac{1}{\alpha} = 0$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ diverge $\forall x \neq 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Recordemos que $\boxed{\alpha = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.}$

$\implies 0 \leq \alpha \leq \limsup \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \limsup \frac{n!}{(n+1)!} = \limsup \frac{1}{(n+1)} = 0$

$\implies \alpha = 0 \implies R = \frac{1}{\alpha} = +\infty$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Funciones definidas mediante series de potencias.

Teor.: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$.
Entonces, $\forall r > 0 : r < R$, la serie converge uniformemente en $[-r, r]$.

Dem.: $\forall x \in [-r, r]$, $|c_n x^n| \leq |c_n|\, r^n \quad \forall n \geq 0$.
Como $r < R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ converge.
Entonces, por el criterio de Weierstass, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$. $\square$

Corol.: Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Sea $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Entonces f es continua.

Dem.: Sea $x \in (-R, R) \implies |x| < R$. Sea $r : |x| < r < R$.
Por el teorema anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$.
Como $x \mapsto c_n x^n$ son continuas $\forall n \geq 0$, f es continua en $[-r, r]$
En particular f es continua en x. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Teor.: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, sea $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ la serie que se obtiene derivando la primera término a término.

Entonces, los radios de convergencia de ambas series coinciden.

Dem.: Los radios de convergencia de cada una las dos series son:

$R := \frac{1}{\alpha}$ con $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ y $R' := \frac{1}{\alpha'}$ con $\alpha' := \limsup \sqrt[n]{|n c_n|}$.

Como $\alpha' = \lim \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \alpha$, entonces $R = R'$ $\square$

Corol.: Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Sea $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Entonces, f es derivable y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n \quad \forall x \in (R, R)$.

Dem.: Sea $x \in (-R, R) \implies |x| < R$. Sea $r : |x| < r < R$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ convergen uniformemente en $[-r.r]$, entonces f es derivable en $[-r, r]$. y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$, $x \in [-r, r]$.

En particular f es derivable en x y $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n \quad \forall x \in (R, R)$. $\square$

Ejemplos de aplicación:

Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Sol.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, para $x = \frac{1}{2}$.

Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con radio de convergencia $R = 1$.

La serie que se obtiene derivando término a término, $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, tambien tiene radio de convergencia $R = 1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall x : \ |x| < 1.$$

En particular, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$ $\square$

Obtener un desarollo en serie de potencias de la función $\log(1-x),\ 0<x<1.$ Usarlo para obtener una serie que converja a $\log 2$:

Sol.: Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, cuyo radio de convergencia es $R=1.$

Entonces, $\forall x:\ 0<x<1,\ \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge uniformemente en $[0,x].$

Por lo tanto,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\bigg|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por otra parte, usando la suma de la serie geométrica,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-t)\bigg|_{t=0}^{t=x} = -\log(1-x).$$

Entonces, $\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

Para obtener una serie que converja a $\log 2$, procedemos así:

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}. \quad \square$$

Por ejemplo, sumando los 10 primeros términos de la serie, se obtiene $0.69306\ldots$ que es una aproximación de $\log 2 = 0.693147\ldots$ con error menor que 10^{-4}.