UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VA/MA/LB/JG/CL/HN/CO

Listado Nº2: Vectores, Rectas y Planos

Álgebra 2 - 525150

1. Un vector que va desde $S(x,y,z)$ a $T(5,-4,2)$ es dos veces el tamaño del vector que va de $R(2,-1,5)$ a S. Determine las coordenadas del punto S.

2. Sean los vectores $\vec{a}=(-2,3)^t$ y $\vec{b}=(4,-3)^t$. Un vector dirigido que representa al vector $\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$ tiene por punto inicial $P(5,-\frac{3}{2})$. Determinar el punto final del vector.

3. Sea $\vec{z}$ un vector, tal que $(-5,2)^t=2\vec{z}+(1,-8)^t$. Determinar, si existen, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que:
$$\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\alpha\vec{z}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

4. El vector $\vec{u}=(-2,2,6)^t$ es el vector de posición del vector $\overrightarrow{AB}$. Si se sabe que $M(-4,-3,1)$ es punto medio del segmento $\overline{AB}$, determine las coordenadass de los puntos A y B.

5. Considere el triángulo de vértices $A(-1,2,2)$, $B(4,2,-3)$ y $C(9,-3,7)$. Por el punto $D(2,2,-1)$ del lado $\overline{AB}$, se traza una paralela al lado $\overline{AC}$, cortando al lado $\overline{BC}$ en el punto E. Determine las coordenadas del punto E.

6. Considere los puntos del espacio $A(2,3,-2)$ y $B(6,-3,2)$. Determinar las coordenadas del punto P que está sobre el segmento de recta que une A con B, y que dista de A, $\frac{3}{4}$ la distancia entre A y B.

7. Determinar, si existen, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, según corresponda, tales que:

   (a) $\alpha\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$

   (b) $\alpha\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

   (c) $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$

   (d) $\alpha\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-5\\7\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$

8. Considere los puntos en el plano: $A(5,1)$, $B(-2,3)$, $C(-3,-2)$ y $D(1,-4)$. Determinar, si existe, las coordenadas de un punto E en el plano, de modo que
$$3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ED}=3\overrightarrow{AE}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$$

9. Considere los vectores $\vec{a}=(2,2\alpha-3)^t$ y $\vec{b}=(1-\alpha,-5)^t$, siendo α un parámetro real. Determinar, si es posible, los valores de α, tales que:

   (a) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (b) $\vec{a}\perp\vec{b}$ (c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ (d) $\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}=1$ (e) $\alpha\vec{a}+\vec{b}=(1,8)^t$

10. Sean $\vec{a}=(2,-1,2)^t$ y $\vec{b}=(1,2,-2)^t$ dos vectores. Determinar dos vectores $\vec{c},\vec{d}$ en $\mathbb{R}^3$, que verifican $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$ y $c\parallel\vec{b}$.

11. Sean $P=(-3,8)$ y $Q=(12,-32)$. Determinar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $\overline{PQ}$ en cinco partes de igual longitud.

12. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Determine el valor de $\|\vec{a}\|$ si se sabe que $\|\vec{b}\| = 3$, $\|\vec{a}+\vec{b}\| = 4$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\| = 6$.

    (b) Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{\theta}$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 1$ y $\|\vec{c}\| = 4$. Determine el valor de $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ y de $\vec{c}\cdot\vec{a}$.

    (c) Determine el valor de $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ si $\|\vec{a}\| = 11$, $\|\vec{b}\| = 23$ y $\|\vec{a}-\vec{b}\| = 30$.

13. Demuestre las siguientes propiedades:

    (a) Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores ortonormales (ortogonales y unitarios), entonces

    $$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \ \|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}\,\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

    (b) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores no nulos tales que $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{\theta}$, entonces $\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{c}\|^2 = 2\vec{a}\cdot\vec{c}$.

    (c) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores, entonces $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$.

    (d) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores, entonces $4\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2$.

14. Considere 4 puntos en el espacio: $A(2,-1,3)$, $B(-4,5,0)$, $C(4,-1,3)$ y $D(4,4,-7)$. Sean P y Q puntos en el espacio, tales que

    - P está sobre el segmento $\overline{AB}$, y dista de B, $\frac{1}{4}$ veces la distancia entre A y B,
    - Q se encuentra sobre el segmento $\overline{CD}$, y dista de C, $\frac{3}{5}$ veces la distancia entre C y D.

    Determinar las componentes del vector $\vec{w}$ que va de P a Q.

15. Sean $A = (3,-1,5)$, $B = (4,2,-5)$ y $C = (-4,0,3)$ los vértices de un triángulo. Determine la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

16. Se sabe que los tres lados de un triángulo en el plano, están contenidos en las rectas

    $$L_1 : 4x - 3y + 9 = 0, \quad L_2 : 3x + 4y + 38 = 0 \quad \text{y} \quad L_3 : 11x - 2y + 6 = 0,$$

    respectivamente. Determine los vértices del triángulo, así como el valor de su perímetro y área de la superficie que encierra.

17. Determinar si los puntos $A(8,5)$ y $B(-2,2)$ pertenecen a la recta que pasa por $P_0(4,-1)$, con vector director $\vec{a} = (2,3)^t$.

18. Dada la recta $L = \{(x,y) = (-1,6) + \alpha(1,4) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, obtener las coordenadas de los puntos pertenecientes a L que están a $2\sqrt{17}$ unidades de distancia del punto $S(1,14)$.

19. Demostrar que los puntos $A(-2,-7,7)$, $B(2,-1,3)$ y $C(4,2,1)$ son colineales.

20. Determine la ecuación vectorial, paramétrica, simétrica (cartesiana), de la recta que:

    (a) es paralela a la recta $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z+3}{2}\}$ y pasa por $Q(2,-1,7)$.

    (b) corta ortogonalmente a la recta $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x+1}{2} = -y - 41 = \frac{z-8}{4}\}$, y pasa por el punto $Q(3,-2,0)$.

    (c) es ortogonal a las rectas

    $$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \ \text{ y } \ L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

    y pasa por el punto $Q(3,1,2)$.

21. Considere las rectas $L_1 = \{(x,y,z) = (2,-1,6) + t(2,-1,-5) : t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 : \frac{5-x}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{10}$. Determine el valor de la distancia entre estas rectas.

22. Considere las rectas $L_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = 5 - z$ y $L_2 : \frac{x}{2} = -y - 1 = z - 4$.

    (a) Muestre que las rectas se cruzan en el espacio (no se intersectan).

    (b) Determinar el valor de la distancia entre estas rectas.

23. Sean L_1 y L_2, dos rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$, ambas pasan por $P(1,2,3)$, con vectores directores $\vec{a} = (2,-3,-6)^t$ y $\vec{b} = (-1,2,-2)^t$, respectivamente. Determine la ecuación de la recta que biseca el ángulo que forman L_1 y L_2. **Indicación:** revisar propiedades de las diagonales de un rombo.

24. Sean $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, determine la ecuación del plano Π que pasa por los puntos $(a,0,0), (0,b,0)$ y $(0,0,c)$. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a Π que pasa por el origen.

25. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-3,-4)$ y corta al eje X, sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta es 5 unidades.

26. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro, con cual se definen los planos

    $$\Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - \alpha y + z = 3\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2\alpha y - \alpha z = 5\}.$$

    Determine, si existe, el valor de α de modo que:

    (a) los planos sean perpendiculares.

    (b) los planos sean paralelos.

27. Sean Π un plano y L una recta, definidos por:

    $$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y - z = -5\} \quad \text{y} \quad L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 1 = \tfrac{y+2}{2} = \tfrac{z-3}{4}\}$$

    Determine, si es posible, la interseción entre Π y L.

28. Determinar la distancia del punto $S(5,-2,3)$ al plano

    $$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

29. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique apropiadamente su respuesta, en cada caso.

    (a) Considere los puntos $S(2,3,2)$ y $T(-1,1,4)$. Se definen los conjuntos

    $$A = \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{SP} \parallel \overrightarrow{ST}\}$$

    y Π, el plano que pasa por T, con vectores directores $\overrightarrow{TS}$ y $\vec{e_1} := (1,0,0)^t$, entonces $A \subseteq \Pi$.

    (b) Sean L y Π una recta y un plano cualquiera en $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Si dos puntos distintos de L pertenecen a Π, entonces $L \subseteq \Pi$.

    (c) Sea Π el plano que pasa por el origen de coordenadas, con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces, todas las rectas con vector director $\vec{u}$, están contenidas en Π.

30. Decida si los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(2,1,0)$ y $D(-1,2,1)$ son coplanarios.

31. Considere la recta $L = \{(x,y) = (1,7)+t(1,m) : t \in \mathbb{R}\}$, siendo m un parámetro real. Determinar para qué valor de m, la recta L es tangente a la circunferencia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

32. Determinar la ecuación del plano que pasa por $A(1,4,-2)$ y que dista una unidad de la recta $L = \{(x,y,z) = (2,6,5) + t(2,-4,0) : t \in \mathbb{R}\}$.