

Numerabilidad.

- **Coordinabilidad.**
- **Numerabilidad.**
- **Conjuntos numerables.**
- **Conjuntos no numerables.**

Coordinabilidad.

Sea $f : A \rightarrow B$ una **función**. Recordemos algunas definiciones básicas.

- **Imagen:** Dado $E \subset A$, $f(E) := \{f(x), x \in E\} \subset B$.
- **Preimagen:** Dado $F \subset B$, $f^{-1}(F) := \{x \in A : f(x) \in F\} \subset A$.
- f es **inyectiva** si $\forall x, y \in A : x \neq y, f(x) \neq f(y)$.
- f es **sobreyectiva** si $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.
- Una función definida en \mathbb{N} ,
$$f : \mathbb{N} \rightarrow B,$$
$$n \mapsto x_n,$$
se denomina una **sucesión** y se denota $\{x_n\}$ o $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Def.: Dos conjuntos, A y B , son **coordinables** si $\exists f : A \rightarrow B$ biyectiva, en cuyo caso denotamos $A \sim B$.

La coordinabilidad es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).

Numerabilidad.

Def.: Dado un conjunto A :

- A es **finito** si $A = \emptyset$ o $\exists N \in \mathbb{N} : A \sim \{1, 2, \dots, N\}$;
- A es **infinito** si no es finito;
- A es **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$;
- A es **a lo sumo numerable** si es finito o numerable;
- A es **no numerable** si no es numerable ni finito.

Notemos que si $A \sim \{1, 2, \dots, N\}$, entonces A es un conjunto finito que contiene exactamente N elementos.

Por otra parte, un conjunto X es numerable, si y sólo si hay una sucesión $\{x_n\}$ que contiene todos los elementos de X ($n \mapsto x_n$ sobreyectiva) sin repetir ($n \mapsto x_n$ inyectiva). Es decir, si $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ con x_n todos distintos.

Conjuntos numerables.

Ejemplo 1: Sea $P := \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los naturales **pares**. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow P, \\ k &\mapsto 2k. \end{aligned}$$

f es biyectiva $\implies P \sim \mathbb{N}$ y por lo tanto **P es numerable**.

Este ejemplo muestra que un conjunto numerable (\mathbb{N}) puede contener un subconjunto propio también numerable (P).

Ejemplo 2: Consideremos la siguiente sucesión:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Esa sucesión contiene todos los enteros sin repetición, de manera que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ n &\mapsto x_n, \end{aligned}$$

es una biyección $\implies \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ y por lo tanto **\mathbb{Z} es numerable**.

Este ejemplo muestra que también **\mathbb{Z} es numerable** y, otra vez, que un conjunto numerable (\mathbb{Z}) contiene un subconjunto propio numerable (\mathbb{N}).

Teor.: Sean A un conjunto numerable y $E \subset A$ un subconjunto **infinito**.
Entonces, E también es numerable.

Este teorema nos dice en términos intuitivos que, entre los conjuntos infinitos, los numerables son los más pequeños.

Dem.: A numerable $\implies A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ con x_n todos distintos.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el menor índice n tal que $x_n \in E$.

Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ el menor índice $n > n_1$ tal que $x_n \in E$.

Procedemos **recursivamente**: habiendo escogido $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, los k índices más pequeños tales que $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k} \in E$, sea $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ el menor índice $n > n_k$ tal que $x_n \in E$ (que existe, pues si no E **sería finito**).

De ese modo, construimos el subconjunto $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\} \subset E$.

Como $E \subset A$, todo elemento de E es algún x_n y, por lo tanto, en algún paso del procedimiento recursivo ese x_n es uno de los x_{n_k} escogidos $\implies E \subset \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$.

Por lo tanto, $E = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ y, como los x_{n_k} son todos distintos, E es **numerable**. \square

Teor.: La unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

Dem.: $\forall n \in \mathbb{N}$, sean $E_n := \{x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}, \dots\}$ numerables.

$$\begin{array}{cccccc}
 E_1 : & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & \cdots \\
 E_2 : & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 E_n : & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Sea $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, \dots\}$.

Como los E_n no son necesariamente disjuntos dos a dos, esta sucesión puede tener términos repetidos. Si eliminamos esos términos repetidos, nos queda que E es un conjunto a lo sumo numerable (es decir finito o numerable) de términos x_{nm} todos distintos. Como E contiene los elementos de cada E_n y como cada E_n es numerable, E tiene infinitos elementos. Por lo tanto, E es numerable. \square

Corol.: La unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es un conjunto a lo sumo numerable.

Dem.: Ej. \square

Corol.: \mathbb{Q} es numerable.

Dem.:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{numerable}} \implies \mathbb{Q} \text{ numerable. } \square$$

Corol.: Si A es numerable, entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n es numerable.

Dem.: Por inducción en n . Si $n = 1$, $A^n = A$ numerable.

Supongamos A^n numerable. Entonces,

$$A^{n+1} = \{(x, y), x \in A^n, y \in A\} = \bigcup_{y \in A} \underbrace{\{(x, y), x \in A^n\}}_{\text{numerable}} \text{ numerable. } \square$$

Conjuntos no numerables.

Teor.: Sea $A := \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \{0, 1\} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos. Entonces A es **no numerable**.

Dem.: Por el absurdo. **Supongamos A numerable** \implies

$A = \{E_m, m \in \mathbb{N}\}$, con $E_m := \{x_{mn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $x_{mn} \in \{0, 1\} \ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cccccc} E_1 : & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ E_2 : & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ E_m : & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Sea $F := \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $y_n := 1 - x_{nn}, n \in \mathbb{N}$

$\implies y_n \in \{0, 1\} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies F \in A$.

Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{N}, y_n := 1 - x_{nn} \neq x_{nn}$

$\implies F \neq E_n \ \forall n \in \mathbb{N} \implies F \notin A. \triangleright=\triangleleft \quad \square$