Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Dr. Raimund Bürger
Profesor Titular

Cálculo III

(Código 525211)

Evaluación 1 — lunes 8 de junio de 2020

Entrega: 15.15 horas.

Fundamentar la respuesta a cualquier sub-problema puesto en forma de pregunta.

Problema 1. (10 puntos) Sea la altitud de una montaña puede ser descrita por

$$h(x,y) = 1 - 0{,}01(x-1)^2 - 0{,}04(y+2)^2$$

(por ejemplo, pensado en distancias expresadas en kilómetros).

a) Supongamos que una montañista se encuentra en el punto $(x^0, y^0) = (4, 1)$. ¿En qué dirección debe caminar si desea acceder a la cima por camino directo?

b) ¿En qué dirección debe caminar si desea descender con la mayor rapidez posible? ¿Y en que dirección si desea mantener su altitud?

Solución sugerida.

a) Dado que $h(x,y) \leq 1$ y $h(x,y) = 1$ sólo para $x = 1$ e $y = -2$, la cima está localizada en $c = (1, -2)$. La montañista se debe dirigir en la dirección $\vec{d} = \frac{1}{\|\vec{d}_0\|}\vec{d}_0$ donde $\vec{d}_0 = c - (x^0, y^0) = (1-4, -2-1) = (-3, -3)$, es decir

$$\vec{d} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1).$$

(*No* se preguntó por la dirección del ascenso más rápido.) **3 puntos**

b) La dirección del descenso más rápido, denotada aquí por $\vec{r}$, es opuesta a la dirección del ascenso más rápido. Aquí es dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}(x^0,y^0) &= -\frac{1}{\|\nabla h(x^0,y^0)\|}\nabla h(x^0,y^0) \\ &= -\frac{1}{\|(-0{,}02(x^0-1), -0{,}08(y^0+2))\|}\big(-0{,}02(x^0-1), -0{,}08(y^0+2)\big).\end{aligned}$$

Para el punto bajo consideración obtenemos

$$\vec{r} = -\frac{1}{\|(-0{,}06, -0{,}24)\|}(-0{,}06, -0{,}24) = \frac{1}{\sqrt{17}}(1,4). \quad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

Para mantener la altitud la montañista debe dirigirse en una dirección $\vec{q}$ con derivada direccional

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{q}}(x^0, y^0) = \vec{q} \cdot \nabla h(x^0, y^0) = 0.$$

Entonces $\vec{q}$ debe ser ortogonal a $\vec{r}$, es decir $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, luego

$$\vec{q} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}(-4, 1). \quad \boxed{\textbf{3 puntos}}$$

Problema 2. (10 puntos)

a) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)\big(\cos(2xy) + \sin(2xy)\big).$$

Demostrar que f es diferenciable en $(x^0, y^0) = (0, 0)$ y determinar el plano tangente en este punto.

b) Demostrar que f satisface la ecuación de Laplace, $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$, sobre $\mathbb{R}^2$.

c) Supongamos que una función $g : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones, es decir $\Delta f = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$, donde U es un conjunto abierto. ¿Qué ecuación satisface cada una de las derivadas g_x, g_y y g_z si suponemos $g \in C^3(U)$? Aviso: evaluar $\Delta(g_x)$, etc.

Solución sugerida.

a) Las primeras derivadas de f son

$$\begin{aligned} f_x &= 2x \exp(x^2 - y^2)\big(\cos(2xy) + \sin(2xy)\big) \\ &\quad + \exp(x^2 - y^2)\big(-2y \sin(2xy) + 2y \cos(2xy)\big) \\ &= 2 \exp(x^2 - y^2)\big((x + y) \cos(2xy) + (x - y) \sin(2xy)\big), \\ f_y &= -2y \exp(x^2 - y^2)\big(\cos(2xy) + \sin(2xy)\big) \\ &\quad + \exp(x^2 - y^2)\big(-2x \sin(2xy) + 2x \cos(2xy)\big) \\ &= 2 \exp(x^2 - y^2)\big((x - y) \cos(2xy) - (x + y) \sin(2xy)\big). \end{aligned}$$

Ambas derivadas existen y son continuas en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 2.8 la función f es diferenciable en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en particular en $(x^0, y^0) = (0, 0)$. Para este punto tenemos $f(0, 0) = \cos 0 = 1$, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, es decir el plano tangente es dado por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \quad \boxed{\textbf{4 puntos}}$$

b) Se tiene

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4x \exp(x^2 - y^2)\big((x + y) \cos(2xy) + (x - y) \sin(2xy)\big) \\ &\quad + 2 \exp(x^2 - y^2)\big(\cos(2xy) - 2y(x + y) \sin(2xy) \\ &\qquad + \sin(2xy) + 2y(x - y) \cos(2xy)\big) \\ &= 2 \exp(x^2 - y^2)\big((2x^2 - 2y^2 + 4xy + 1) \cos(2xy) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (2x^2 - 2y^2 - 4xy + 1)\sin(2xy)\big),\\
f_{yy} &= -4y\exp(x^2 - y^2)\big((x-y)\cos(2xy) - (x+y)\sin(2xy)\big)\\
&\quad + 2\exp(x^2 - y^2)\big(-\cos(2xy) - 2x(x-y)\sin(xy)\\
&\quad - \sin(2xy) - 2x(x+y)\cos(2xy)\big)\\
&= 2\exp(x^2 - y^2)\big((-2x^2 + 2y^2 - 4xy - 1)\cos(2xy)\\
&\quad + (-2x^2 + 2y^2 + 4xy - 1)\sin(2xy)\big).
\end{aligned}
$$

Evidentemente, $f_{xx} + f_{yy} = 0$. $\boxed{\textbf{4 puntos}}$

c) Si $g \in C^3$, podemos permutar el orden de derivación de las terceras derivada parciales. En este caso,

$$
\Delta(g_x) = g_{xxx} + g_{xyy} + g_{xzz} = g_{xxx} + g_{yyx} + g_{zzx} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta g) = \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0,
$$

es decir g_x también satisface la ecuación de Laplace. Lo mismo es válido para g_y y g_z. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Problema 3. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$
f(x,y) = \begin{cases} y^3 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}
$$

a) Analizar la continuidad de f en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$?

Solución sugerida.

a) Se analizan diversos casos para un punto $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$.

1.) Sea $x^0 < 0$ y $y^0 \in \mathbb{R}$, sea $r = \frac{1}{2}|x^0| > 0$. Entonces $f = 0$ sobre $U_r(x^0, y^0)$. Esto implica que $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U_r(x^0, y^0)$. En particular, ambas derivadas parciales existen y son acotadas en la vecindad $U_r(x^0, y^0)$. De acuerdo al Teorema 2.3 concluimos que f es continua en (x^0, y^0). $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

2.) Sea $x^0 > 0$, $y \in \mathbb{R}$, y $r = \frac{1}{2}|x^0| > 0$. Entonces $f(x,y) = y^2$ sobre $U_r(x^0, y^0)$. Esto implica que $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 3y^2$ para todo $(x,y) \in U_r(x^0, y^0)$. Ambas derivadas parciales existen en $U_r(x^0, y^0)$, y se tiene para todo $(x,y) \in U_r(x^0, y^0)$

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = 0,\\
&\big|f_y(x,y)\big| = 3y^2 \leq \text{máx}\left\{3\left|\left(y^0 - \frac{x^0}{2}\right)^2\right|, 3\left|\left(y^0 - \frac{x^0}{2}\right)^2\right|\right\}.
\end{aligned}
$$

Como ambas derivadas parciales son acotadas en la vecindad $U_r(x^0, y^0)$, podemos concluir que de acuerdo al Teorema 2.3, f es continua en (x^0, y^0). $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

3.) Sea $x^0 = 0$, $y^0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Para estos puntos se tiene

$$
\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x^0 + h, y^0) - f(x^0, y^0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(y^0)^3 - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(y^0)^3}{h} \overset{h \to 0, h > 0}{\longrightarrow} \pm\infty,
$$

es decir este límite no existe y por lo tanto $f_x(x^0, y^0)$ no existe. Esto significa que no podemos aplicar el Teorema 2.3. Efectivamente, f es discontinua en estos puntos. Sea la sucesión $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $x_k = 1/k$ y $y_k = y^0$. Entonces $f(x_k, y_k) = (y^0)^3$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $(x_k, y_k) \to (0, y^0)$ cuando $k \to \infty$, pero

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = (y^0)^3 \neq f(0, y^0) = 0.$$

Esto significa que f no es continua en puntos $(x^0, y^0) = (0, y^0)$ cuando $y^0 \neq 0$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

4.) Queda por analizar $(x^0, y^0) = (0, 0)$. En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x^0, y^0 + h) - f(x^0, y^0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,\\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + h, y^0) - f(x^0, y^0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Ambas derivadas parciales existen en (x^0, y^0) y son evidentemente acotadas. Pero para cualquier $\tilde{y} \neq 0$ se tiene

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\big|f(x^0 + h, \tilde{y}) - f(x^0, \tilde{y})\big| = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|\tilde{y}|^3}{h} \overset{h\to 0, h>0}{\longrightarrow} \infty,$$

es decir la derivada parcial f_x no existe en ningún punto $(0, \tilde{y})$ con $\tilde{y} \neq 0$. Por lo tanto, no existe ninguna vecindad $U_r(x^0, y^0)$ tal que f_x existe y es acotada para todo $(x, y) \in U_r(x^0, y^0)$. Así, el Teorema 2.3 no puede ser aplicado. No obstante, f es continua en $(0, 0)$. Para ver esto, notamos que

$$\big|f(x, y) - f(0, 0)\big| \leq |y^3 - 0| = |y|^3.$$

Es decir, para $\varepsilon > 0$ se tiene $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$ si

$$|(x, y) - (0, 0)| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon) := \varepsilon^{1/3},$$

ya que si esto es válido,

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon^{1/3},$$

luego $|y|^3 < \varepsilon$. Esto significa que f es continua en $(0, 0)$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Concluimos que f es continua sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$.

b) La función f es diferenciable en $(x^0, y^0) = (0, 0)$. Si bien no podemos aplicar el Teorema 2.8, podemos aplicar la Definición 2.7. Efectivamente, a partir de $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$ obtenemos que la función f satisface las condiciones de la Definición 2.7 con $f(x^0, y^0) = 0$ y $\vec{c} = \{0, 0\}$ si logramos demostrar que existe una función f^0 con las propiedades requeridas. Efectivamente, en una vecindad $U(x^0, y^0)$ la función f^0 debe satisfacer

$$f(x, y) = d\big((x, y), (x^0, y^0)\big) f^0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f^0(x, y)$$

lo que podemos lograr definiendo

$$f^0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función satisface $f^0(x,y) = 0$ para $x \leq 0$ o $y = 0$, y para $x > 0$ e $y \neq 0$ tenemos

$$\left|f^0(x,y)\right| \leq \frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y|.$$

En consecuencia, para $\varepsilon > 0$ dado y si

$$d((x,y),(x^0,y^0)) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\varepsilon) := \varepsilon^{1/3},$$

se tiene $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon^{1/3}$, y por lo tanto $|f^0(x,y)| < \varepsilon$. Esto implica que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^0(x,y) = f^0(0,0) = 0,$$

es decir f^0 satisface el item (1.) en la Defnción 2.7, por lo tanto f es diferenciable en $(x^0,y^0) = (0,0)$. **5 puntos**

Problema 4. (10 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) Demostrar que $-1 \leq f(x,y) \leq 1/3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $\alpha \in [-1, 1/3]$.

b) ¿Se puede elegir α en tal forma que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$?

c) Calcular la derivada direccional de f en la dirección $\vec{d} := (1/\sqrt{2})(1,-1)$ en el punto $(x^0,y^0) = (1,1)$.

Solución sugerida.

a) Si $xy = 0$, entonces $f(x,y) \in \{0, \alpha\}$, es decir $-1 \leq f(x,y) \leq 1/3$. Supongamos que $xy \neq 0$. En tal caso,

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0,$$

y podemos calcular

$$\begin{aligned} &\frac{xy}{x^2+xy+y^2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{2}y^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0, \\ &\frac{xy}{x^2+xy+y^2} \geq -1 \Leftrightarrow xy \geq -x^2 - xy - y^2 \Leftrightarrow 0 \geq -(x+y)^2. \end{aligned}$$

Combinando las desigualdades, obtenemos $-1 \leq f(x,y) \leq 1/3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **4 puntos**

b) Consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Por otro lado, para $(x_k, y_k) = (1/k, 0)$ se tiene $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, y

$$f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Como f posee límites direccionales diferentes en $(0,0)$, la función no puede ser continua en este punto, independiente de cual sea el valor de α. Es decir, no es posible elegir α en tal forma que f sea continua en este punto. **3 puntos**

c) Utilizando que para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

obtenemos $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 0$, luego $\nabla f(1,1) = 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{d}}(1,1) = \vec{d} \cdot \nabla f(1,1) = 0.$$ **3 puntos**

Problema 5. (15 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) ¿La función f es acotada sobre $\mathbb{R}^2$?

b) Demostrar que existe una constante M_0 tal que para $\varepsilon > 0$ dado,

$$\min\bigl\{|x|, |y|\bigr\} < \varepsilon \Rightarrow \bigl|f(x,y)\bigr| < M_0 \varepsilon^2.$$

c) Demostrar que la función f es continua en $(0,0)$, utilizando el resultado de (b).

d) Calcular las derivadas parciales de f y demostrar que existe una constante M_1 tal que para $\varepsilon > 0$ dado,

$$\max\bigl\{|x|, |y|\bigr\} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < M_1 \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < M_1 \varepsilon.$$

e) Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$, utilizando el resultado de (d).

f) ¿Se puede aplicar el Teorema de Schwarz en $(x^0, y^0) = (0,0)$?

Solución sugerida.

a) Eligiendo, por ejemplo, $x = y$, obtenemos

$$f(x,x) = \frac{x^4}{3x^2} = \frac{x^2}{3}.$$

Como $f(x,x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, la función f no es acotada. **2 puntos**

b) Notamos en primer lugar que $f(x,y) \geq 0$, por lo tanto $f(x,y) = |f(x,y)|$. Consideremos $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (en caso contrario se tiene $f(x,y) = 0$), entonces

$$f(x,y) \leq \frac{x^2y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad f(x,y) \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2.$$

Entonces si $|x| < \varepsilon$ o $|y| < \varepsilon$ se tiene $f(x,y) \leq \varepsilon^2$, es decir podemos elegir $M_0 = 1$. **2 puntos**

c) Utilizando el resultado anterior obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ dado se tiene que si

$$d\big((x,y),(0,0)\big) < \delta(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon/M_0},$$

entonces $|x|, |y| < \sqrt{\varepsilon/M_0}$ y de acuerdo al resultado de (b),

$$\big|f(x,y) - f(0,0)\big| = |f(x,y)| \leq M_0\big(\sqrt{\varepsilon/M_0}\big)^2 = \varepsilon.$$

Esto significa que f es continua en $(0,0)$. **2 puntos**

d) Para $(x,y) \neq (0,0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x^3y^2 + 4xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{4xy^4}{(x^2+2y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x^4y + 4x^2y^3 - 4x^2y^3}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+2y^2)^2}. \end{aligned}$$

Para $(x,y) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Aplicando un cálculo similar a la parte (b), obtenemos si $(x,y) \neq (0,0)$, $|x| < \varepsilon$ y $|y| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \frac{4|x|y^4}{(x^2+2y^2)^2} \leq \frac{4|x|y^4}{(2y^2)^2} = |x| < \varepsilon, \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= \frac{2x^4|y|}{(x^2+2y^2)^2} \leq \frac{2x^4|y|}{(x^2)^2} = 2|y| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Combinando esta información con $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ obtenemos que se puede elegir $M_1 = 2$. **3 puntos**

e) Utilizando el resultado anterior obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ dado se tiene que si

$$d\big((x,y),(0,0)\big) < \delta(\varepsilon) := \varepsilon/M_1,$$

entonces $|x|, |y| < \varepsilon$ y de acuerdo al resultado de (b),

$$\big|f_x(x,y) - f(0,0)\big| = |f(x,y)| \leq M_1\varepsilon/M_1 = \varepsilon.$$

Esto significa que f_x es continua en $(0,0)$; análogamente f_y es continua en $(0,0)$. Ambas derivadas parciales existen, además, sobre $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 2.8 podemos concluir que f es diferenciable en $(0,0)$. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

f) Calculamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \big(f(0,h) - f(0,0) \big) = 0.$$

Por otro lado, para $(x,y) \neq (0,0)$ calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4xy^4}{(x^2+2y^2)^2} \right) = \frac{16xy^3(x^2+2y^2)^2 - 4xy^4 \cdot 2(x^2+2y^2) \cdot 4y}{(x^2+2y^2)^4} \\ &= 16 \frac{xy^3(x^2+2y^2) - xy^4 \cdot 2y}{(x^2+2y^2)^3} = \frac{16x^3y^3}{(x^2+2y^2)^3} \end{aligned}$$

La derivada f_{xy} no es continua en $(0,0)$. Para ver esto, consideremos la sucesión $(x_k, y_k) = (1/k, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Claramente $(x_k, y_k) \to (0,0)$ cuando $k \to \infty$, pero

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = \frac{\frac{16}{k^6}}{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^2} \right)^3} = \frac{16}{27} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{16}{27} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Por lo tanto, la derivada f_{xy} no es continua en $(0,0)$, y el Teorema de Schwarz no puede ser aplicado. $\boxed{\textbf{4 puntos}}$