

Lista 13

Wiktor Kuchta (nr indeksu 315599)

30 maja 2023

1	2	3	4	5	6	7
+	+	+	+	+	+	+

1.

Term można otypować na nieskończenie wiele sposobów (wykorzystujemy przechodność i tranzytywność ile razy chcemy), ale każda wynikła translacja jest konwertowalna z jednym z poniższych termów:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda x : \text{string}. x) (\text{intToString } 1) \\
 & (\lambda x : \text{string}. x) (\text{realToString } (\text{intToReal } 1))
 \end{aligned}$$

Pierwszy term się ewaluuje do "1", a drugi do "1.0". Funkcje koercji są niekoherentne.

2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\overline{r : \{x : \text{Nat}\} \vdash r : \{x : \text{Nat}\}}^{\text{Ass}}}{r : \{x : \text{Nat}\} \vdash (r.x) : \text{Nat}}^{\{\}E} \quad \frac{\frac{\overline{\vdash 0 : \text{Nat}}^{\text{cst}} \quad \overline{\vdash 1 : \text{Nat}}^{\text{cst}}}{\vdash \{x = 0, y = 1\} : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}}^{\{\}I} \quad \frac{\overline{\{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\} <: \{x : \text{Nat}\}}^{\{\}w <:}}{\vdash \{x = 0, y = 1\} : \{x : \text{Nat}\}}^{\text{Sub}}}{\vdash \lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x) : \{x : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}}^{\rightarrow I} \quad \frac{\vdash \{x = 0, y = 1\} : \{x : \text{Nat}\}}{\vdash (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0, y = 1\} : \text{Nat}}^{\rightarrow E} \\
 & \frac{\frac{\overline{r : \{x : \text{Nat}\} \vdash r : \{x : \text{Nat}\}}^{\text{Ass}}}{r : \{x : \text{Nat}\} \vdash (r.x) : \text{Nat}}^{\{\}E} \quad \frac{\frac{\overline{\{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\} <: \{x : \text{Nat}\}}^{\{\}w <:} \quad \overline{\text{Nat} <: \text{Nat}}^{\text{Refl} <:}}{\{x : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat} <: \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}}^{\rightarrow <:}} \quad \frac{\overline{\vdash 0 : \text{Nat}}^{\text{cst}} \quad \overline{\vdash 1 : \text{Nat}}^{\text{cst}}}{\vdash \{x = 0, y = 1\} : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}}^{\{\}I}}{\vdash \lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x) : \{x : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}}^{\rightarrow I} \quad \frac{\vdash \lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x) : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}}{\vdash (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0, y = 1\} : \text{Nat}}^{\text{Sub}} \quad \frac{\vdash \{x = 0, y = 1\} : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}}{\vdash (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0, y = 1\} : \text{Nat}}^{\rightarrow E}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) (\underline{((\lambda r : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \{x = r.x\}) \{x = 0, y = 1\})}) \\
 & \quad \rightarrow \\
 & (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = \underline{\{x = 0, y = 1\}.x}\} \\
 & \quad \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0\} \rightarrow \{x = 0\}.x \rightarrow 0 \\
& \frac{(\lambda f : \{x : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}. \lambda x : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \\
& (\lambda x : \text{Nat}. x)(f((\lambda r : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \{x = r.x\})x)))}{(\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0, y = 1\}} \\
& \rightarrow \\
& \frac{(\lambda f : \{x : \text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}. \lambda x : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \\
& (f((\lambda r : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \{x = r.x\})x)))}{(\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x)) \{x = 0, y = 1\}} \\
& \rightarrow \\
& \frac{(\lambda x : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \\
& ((\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x))((\lambda r : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \{x = r.x\})x)))}{\{x = 0, y = 1\}} \\
& \rightarrow \\
& (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x))((\lambda r : \{x : \text{Nat}, y : \text{Nat}\}. \{x = r.x\})\{x = 0, y = 1\}) \\
& \rightarrow \\
& (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x))\{x = \{x = 0, y = 1\}.x\} \\
& \rightarrow \\
& (\lambda r : \{x : \text{Nat}\}. (r.x))\{x = 0\} \rightarrow \{x = 0\}.x \rightarrow 0
\end{aligned}$$

4.

(a)

Wszystkie typy rekordów z polami $x : \top$ i $y : \top$ oraz typ \top .

(b)

$$\tau_i = \{l_1 : \top, \dots, l_i : \top\}$$

(c)

$$\tau_i = \{l_1 : \top, \dots, l_i : \top\} \rightarrow \top$$

5.

(a)

Nie, można udowodnić lematy o inwersji mówiące, że podtyp typu funkcyjnego jest typem funkcyjnym, a podtyp rekordu jest rekordem.

(b)

Nie, z lematu o inwersji dla typu funkcyjnego musielibyśmy mieć nadtyp i podtyp dowolnego typu.

6.

Można, korzystając z `fst` jako koercji.

7.

Założmy, że `bot <: int <: float`.

Gdyby `ref` był kowariantny, to moglibyśmy do `int ref` przypisać `3.14`, i przy dereferencji otrzymać `3.14 : int`.

Gdyby `ref` był kontrawariantny, to moglibyśmy `int ref` podtypować do `bot ref` i przy dereferencji otrzymać wartość typu pustego.