Wiktor Kuchta

8/1b

Załóżmy, że $g\colon M \to N$ jest monomorfizmem. Udowodnić, że $g(M)$ jest składnikiem prostym modułu $N \iff \exists f\colon N \to M,\ f \circ g = \mathrm{id}_M$.

($\Longrightarrow$)

Monomorfizm g indukuje izomorfizm $M \to g(M)$, więc mamy też izomorfizm odwrotny $g'\colon g(M) \to M$.

Z własności uniwersalnej koproduktu g' się faktoryzuje na pewne $f\colon N \to M$ i włożenie $i\colon g(M) \to N$, tzn. $g' = f \circ i$. Składając prawostronnie z g otrzymujemy $\mathrm{id}_M = f \circ i \circ g = f \circ g$, bo i to w tym wypadku po prostu inkluzja.

($\Longleftarrow$)

Zauważmy, że

$$n = (n - g(f(n))) + g(f(n)),$$

więc $N = \ker f + \operatorname{Im} g$. Jeśli $n \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$, to $f(n) = 0$ i $n = g(m)$ dla pewnego m. Mamy $0 = f(n) = f(g(m)) = m$, więc $N = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

8/2

(a) $\Longrightarrow$ (b)

Załóżmy, że dla każdego epimorfizmu $f\colon M \to N$ dowolnych modułów M, N i każdego $g\colon P \to N$ istnieje $h\colon P \to M$ takie, że $f \circ h = g$.

Weźmy epimorfizm $f\colon M \to P$ i $g = id_P$, wtedy mamy $h\colon P \to M$ takie, że $f \circ h = id_P$. Z 8/1a to oznacza, że f się rozszczepia, zatem P jest projektywny.

(b) $\Longrightarrow$ (c)

Załóżmy, że moduł P jest projektywny. To oznacza, że dla każdego epimorfizmu $f\colon M \to P$ jądro f jest składnikiem prostym M.

Niech M to moduł wolny składający się z formalnych kombinacji liniowych elementów P. Istnieje epimorfizm $f\colon M \to P$ interpretujący napis formalny operacjami modułowymi P, więc $M = \ker f \oplus M'$ dla pewnego podmodułu $M' \subseteq M$. Z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie mamy

$$P \cong M/(\ker f) = (\ker f \oplus M')/(\ker f) \cong M'.$$

(c) $\implies$ (a)

Załóżmy, że istnieje moduł L taki, że $P \oplus L$ jest wolny z bazą X.

Niech p to rzut $P \oplus L \to P$.

Weźmy epimorfizm $f\colon M \to N$ i homomorfizm $g\colon P \to N$. Dla każdego $x \in X$ mamy wartość $n = g(p(x)) \in N$, więc istnieje $m \in M$ taki, że $f(m) = n$. To wyznacza pewną funkcję $X \to M$, która się rozszerza do homomorfizmu $h\colon P \oplus L \to M$ takiego, że

$$f \circ h = g \circ p.$$

Składając prawostronnie z włożeniem $i\colon P \to P \oplus L$ otrzymujemy

$$f \circ (h \circ i) = g \circ p \circ i = g,$$

gdzie $h \circ i\colon P \to M$.

8/4a

($\implies$)

Załóżmy, że $M = \oplus_{i \in I} M_i$ jest projektywny. To oznacza, że M jest składnikiem prostym pewnego modułu wolnego, zatem każdy jego składnik prosty M_i też jest składnikiem prostym modułu wolnego.

($\impliedby$)

Załóżmy, że M_i jest projektywny dla każdego $i \in I$.

Weźmy epimorfizm $f\colon L \to N$ i homomorfizm $g\colon M \to N$. Niech j_i to włożenia $M_i \to M$, wtedy $g \circ j_i\colon M_i \to N$. Z projektywności M_i i zad. 8/2a istnieją $h_i\colon M_i \to L$ takie, że $f \circ h_i = g \circ j_i$. Z uniwersalnej własności koproduktu istnieje $h\colon M \to L$ takie, że $h \circ j_i = h_i$, więc

$$f \circ h \circ j_i = g \circ j_i.$$

Z uniwersalnej własności koproduktu $\varphi = f \circ h - g$ jest jedynym homomorfizmem spełniającym

$$\varphi \circ j_i = 0,$$

a więc jest homomorfizmem zerowym i $f \circ h = g$. Zatem M jest projektywny.