Wiktor Kuchta

Zadanie 2.

Załóżmy nie wprost, że istnieje e takie, że $\vdash e : \forall\alpha.\,\alpha$. Wtedy z fundamentalnego twierdzenia relacji logicznych mamy $\vdash e \overset{\text{LR}}{\approx} e : \forall\alpha.\,\alpha$, tzn. $(e, e) \in \mathcal{E}[\![\forall\alpha.\,\alpha]\!]$. A więc e ewaluuje się do $v = \Lambda\alpha.\,e'$ takiego, że $(v, v) \in \mathcal{V}[\![\forall\alpha.\,\alpha]\!]$. Z definicji mamy

$$\forall\tau_1, \tau_2, R \in \mathrm{Rel}[\tau_1, \tau_2].\, (e'\{\alpha \mapsto \tau_1\}, e'\{\alpha \mapsto \tau_2\}) \in \mathcal{E}[\![\alpha]\!]_{[\alpha\mapsto(\tau_1,\tau_2,R)]}.$$

Weźmy dowolne τ_1, τ_2 i przyjmijmy $R = \emptyset$, które trywialnie spełnia warunek należenia do $\mathrm{Rel}[\tau_1, \tau_2]$. Wtedy $e'\{\alpha \mapsto \tau_1\}$ i $e'\{\alpha \mapsto \tau_2\}$ ewaluują się odpowiednio do v_1, v_2 takich, że $(v_1, v_2) \in \mathcal{V}[\![\alpha]\!]_{[\alpha\mapsto(\tau_1,\tau_2,R)]} = R = \emptyset$. Sprzeczność.

Zadanie 3.

Weźmy e takie, że $\vdash e : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \to \alpha$. Wtedy z fundamentalnego twierdzenia relacji logicznych mamy $(e, e) \in \mathcal{E}[\![\forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \to \alpha]\!]$. Rozwijając definicje relacji logicznych otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\exists e'.\, e \to^* \Lambda\alpha.\, e' \land\\
&\forall\tau_1, \tau_2, R \in \mathrm{Rel}[\tau_1, \tau_2].\\
&\exists e_1, e_2.\, e'\{\alpha \mapsto \tau_1\} \to^* \lambda x : \tau_1.\, e_1 \land e'\{\alpha \mapsto \tau_2\} \to^* \lambda x : \tau_2.\, e_2 \land\\
&\forall(v_1, v_2) \in R.\\
&\exists e_1', e_2'.\, e_1\{v_1/x\} \to^* \lambda x : \tau_1.\, e_1' \land e_2\{v_2/x\} \to^* \lambda x : \tau_2.\, e_2' \land\\
&\forall(v_1', v_2') \in R.\\
&\exists(v_1'', v_2'') \in R.\, e_1'\{v_1'/x\} \to^* v_1'' \land e_2'\{v_2'/x\} \to^* v_2''.
\end{aligned}$$

Wyciągając kwantyfikatory uniwersalne na początek i redukując

$$\begin{aligned}
&e\ \tau_i\ v_i\ v_i' \to e'\{\alpha \mapsto \tau_i\}\ v_i\ v_i' \to^*\\
&(\lambda x : \tau_i.\, e_i)\ v_i\ v_i' \to e_i\{v_i/x\}\ v_i' \to^*\\
&(\lambda x : \tau_i.\, e_i')\ v_i' \to e_i'\{v_i'/x\} \to^* v_i''
\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\forall\tau_1, \tau_2, R \in \mathrm{Rel}[\tau_1, \tau_2], (v_1, v_2) \in R, (v_1', v_2') \in R.\\
&\exists(v_1'', v_2'') \in R.\, e\ \tau_1\ v_1\ v_1' \to^* v_1'' \land e\ \tau_2\ v_2\ v_2' \to^* v_2''.
\end{aligned}$$

Darmowe twierdzenie w stylu Wadlera otrzymamy, jeśli ograniczmy R do funkcji:

$$\forall\tau_1, \tau_2, r \colon \mathrm{Val}_{\tau_1} \to \mathrm{Val}_{\tau_2}, v_1 \in \mathrm{Val}_{\tau_1}, v_1' \in \mathrm{Val}_{\tau_1}.\, r(e\ \tau_1\ v_1\ v_1') = e\ \tau_2\ r(v_2)\ r(v_2'),$$

gdzie przez równość rozumiemy równość wartości otrzymanych po ewaluacji (r traktujemy jako funkcję call-by-value).

Pokażemy, że funkcja e zawsze zwraca pierwszy argument albo zawsze zwraca drugi argument.

Weźmy dowolne v, v' dowolnego typu τ. Niech $r(\mathsf{true}) = v$, $r(\mathsf{false}) = v'$. Mamy

$$r(e\ \mathsf{bool}\ \mathsf{true}\ \mathsf{false}) = e\ \tau\ r(\mathsf{true})\ r(\mathsf{false}) = e\ \tau\ v\ v'.$$

Co oznacza, że wynik ewaluacji $e\ \tau\ v\ v'$ to będzie v, jeśli e $\mathsf{bool}\ \mathsf{true}\ \mathsf{false}$ ewaluuje się do true i v', jeśli do false (darmowe twierdzenie mówi, że któreś z tych musi zajść).

Możemy wywnioskować, że typ $\forall\alpha.\, \alpha \to \alpha \to \alpha$ koduje typ bool (lub np. $\mathsf{Unit} + \mathsf{Unit}$) przez eliminację, tzn. jest to typ wartości boolowskich w kodowaniu Churcha. Każda wartość tego typu zachowuje się tak samo jak $\Lambda\alpha.\, \lambda t{:}\alpha.\, \lambda f{:}\alpha.\, t$ albo jak $\Lambda\alpha.\, \lambda t{:}\alpha.\, \lambda f{:}\alpha.\, f$.