Wiktor Kuchta

6/2c

(i)

Niech $K = \mathbb{Q}$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $X^4 - 2$ nad K. Ten wielomian możemy rozłożyć na

$$X^4 - 2 = (X - \sqrt[4]{2})(X - i\sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2}),$$

więc $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$.

Niech $a = (2+i)\sqrt[4]{2}$. Wtedy $a^2 = (3+4i)\sqrt{2}$ i $a^4 = -14 + 48i$, więc $i = \frac{a^4+14}{48}$ i $\sqrt[4]{2} = \frac{a}{2+i}$. Zatem $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}((2+i)\sqrt[4]{2})$.

(ii)

Niech $K = \mathbb{Q}(i)$ i L jest ciałem rozkładu wielomianu $X^4 - 2$ nad K, czyli $L = \mathbb{Q}(i)(\sqrt[4]{2})$.

6/5a

Wiemy, że $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = 4$. Ponadto jest to rozszerzenie rozkładu wielomianu $(X^2 - 5)(X^2 - 7)$, więc jest Galois i $|G(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q})| = 4$.

Możemy wskazać 5 ciał pośrednich:

$$\mathbb{Q},\ \ \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ \ \mathbb{Q}(\sqrt{7}),\ \ \mathbb{Q}(\sqrt{35}),\ \ \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}).$$

Z zasadniczego twierdzenia teorii Galois te ciała są w bijekcji z podgrupami grupy $G(\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q})$. Skoro jest ich co najmniej pięć, to ta grupa jest grupą czwórkową Kleina i znaleźliśmy jej wszystkie podgrupy. Zatem wskazaliśmy wszystkie szukane ciała pośrednie.