Wiktor Kuchta

M2.4.

Notacja: $\langle n \rangle$ intuicyjnie oznacza n-krotnie skumulowany błąd względny niewiększy niż u. Tzn. jeśli mamy $\tilde{x} = x\Pi_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i)^{\pm 1}$ dla $|\alpha_i| \leqslant u$, to $\tilde{x} = x\langle n \rangle$. Z wykładu wiemy, że $|\langle n \rangle| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$ oraz $\text{fl}(a \diamond b) = (a \diamond b)\langle 1 \rangle$.

Teza: Dla każdego $k \in \{0, \ldots, n\}$ mamy

$$\tilde{w}_k = a_n x^{n-k}\langle 2(n-k) \rangle + \sum_{i=k}^{n-1} a_i x^{i-k}\langle 2(i-k)+1 \rangle$$

Dowód:

Przypadek bazowy się zgadza $\tilde{w}_n = a_n$

Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_k &= ((\tilde{w}_{k+1} * x)\langle 1 \rangle + a_k)\langle 1 \rangle \\
&= \left(\left(a_n x^{n-k}\langle 2(n-k-1) \rangle + \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i x^{i-k}\langle 2(i-k-1)+1 \rangle \right) \langle 1 \rangle + a_k \right) \langle 1 \rangle \\
&= \left(\left(a_n x^{n-k}\langle 2(n-k-1)+1 \rangle + \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i x^{i-k}\langle 2(i-k) \rangle \right) + a_k \right) \langle 1 \rangle \\
&= a_n x^{n-k}\langle 2(n-k) \rangle + \sum_{i=k}^{n-1} a_i x^{i-k}\langle 2(i-k)+1 \rangle
\end{aligned}$$

Zatem $\tilde{w}_0 = a_n x^n\langle 2n \rangle + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \langle 2i+1 \rangle$, jest to wynik dokładny dla tego samego x i pewnych współczynników a_i' zaburzonych o najwyżej $\langle 2n \rangle$ od początkowych a_i, czyli algorytm jest poprawny numerycznie.

M2.5.

$$\text{fl}(a + a^2) = (a + (a * a)\langle 1 \rangle)\langle 1 \rangle = a\langle 1 \rangle + (a * a)\langle 2 \rangle$$

Znajdźmy rozwiązanie $A = a\langle 1 \rangle + (a * a)\langle 2 \rangle = \bar{a} + \bar{a}^2$ dla $a > 2$. Jest to równanie kwadratowe i szukamy rozwiązania blisko a, a więc dodatniego i większego z dwóch.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{-1 + \sqrt{1+4A}}{2} = \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A} = \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a\langle 1 \rangle + (a * a)\langle 2 \rangle} \\
&= \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(a\langle 1 \rangle + \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{-1}{2} + \left(a\langle 1 \rangle + \frac{1}{2} \right) = a\langle 1 \rangle
\end{aligned}$$

Zatem $\text{fl}(a + a^2)$ jest dokładną wartością $\bar{a} + \bar{a}^2$ dla pewnego $\bar{a} = a\langle 1 \rangle$, więc algorytm jest poprawny numerycznie.