Lista 4

Wiktor Kuchta (nr indeksu 315599)

28 marca 2023

1	2	3	4	5	6
	+	+	+	+	+

3.

Niech $\mathsf{Iter} = \lambda nfz.\, \mathsf{Rec}\ n\ (\lambda x.f)\ z$.

$$\begin{aligned}\mathsf{Iter}\ 0\ M\ N &\to^3 \mathsf{Rec}\ 0\ (\lambda x.M)\ N = N\\ \mathsf{Iter}\ (\mathsf{suc}\ n)\ M\ N &\to^3 \mathsf{Rec}\ (\mathsf{suc}\ n)\ (\lambda x.M)\ N = \underline{(\lambda x.M)\ n}\ (\mathsf{Rec}\ n\ (\lambda x.M)\ N)\\ &\to M\ (\mathsf{Rec}\ n\ (\lambda x.M)\ N) \leftarrow^3 M\ (\mathsf{Iter}\ n\ M\ N)\end{aligned}$$

$(x \notin FV(M))$

4.

$$\begin{aligned}\mathsf{Rec} &= \lambda nfz.\, nfz\\ \mathsf{0} &= \lambda fz.\, z\\ \mathsf{suc} &= \lambda nfz.\, f\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ f\ z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Rec}\ \mathsf{0}\ M\ N &\to^3 \mathsf{0}\ M\ N \to^2 N\\ \mathsf{Rec}\ (\mathsf{suc}\ n)\ M\ N &\to^3 \mathsf{suc}\ n\ M\ N \to^3 M\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ M\ N)\end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{0} &= \lambda f z.\, z \\
\mathsf{suc} &= \lambda n f z.\, f\ n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Rec} &= \lambda n f z.\, n\ (\lambda n.\, f\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ f\ z)\ z \\
\mathsf{Rec} &= \mathsf{Y}\ (\lambda r n f z.\, n\ (\lambda n.\, f\ n\ (r\ n\ f\ z)\ z) \\
\mathsf{Rec}\ \mathsf{0}\ M\ N &\to^3 \mathsf{0}\ (\lambda n.\, M\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ M\ N)\ N \to^2 N \\
\mathsf{Rec}\ (\mathsf{suc}\ n)\ M\ N &\to^3 \mathsf{suc}\ n\ (\lambda n.\, M\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ M\ N))\ N \\
&\to^4 M\ n\ (\mathsf{Rec}\ n\ M\ N)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{isZero} &= \lambda n.\, \mathsf{Rec}\ n\ (\lambda x y.\, \mathsf{false})\ \mathsf{true} \\
\mathsf{pred} &= \lambda n.\, \mathsf{Rec}\ n\ (\lambda x y.\, x)\ \mathsf{0}
\end{aligned}
$$

6.

Drzewo typowania musiałoby mieć taką postać:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \rho \to \tau}\ \text{Ass} \quad \dfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \rho}\ \text{Ass}}{\Gamma, x : \sigma \vdash x\ x : \tau}\ \to E}{\Gamma \vdash \lambda x.\, x\ x : \sigma \to \tau}\ \to I
$$

Skąd mamy sprzeczność $\rho = \rho \to \tau$.