M10.6.

Niech $f \in C^4[a,b]$, $h = \frac{b-a}{2}, m = \frac{a+b}{2}$, $F(t) = f(m - ht)$.

Błąd metody Simpsona wynosi

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right)\\ &= h\left(\int_{-1}^1 F(t)dt - 1/3(F(-1) + 4F(0) + F(1))\right).\end{aligned}$$

Niech

$$G(t) = \int_{-t}^t F(u)du - t/3(F(-t) + 4F(0) + F(t)),$$

wtedy błąd to $hG(1)$.

Niech $H(t) = G(t) - t^5G(1)$. Zauważmy, że $H(0) = H(1) = 0$, więc H' się zeruje w pewnym $\xi_1 \in (0,1)$.

$$G'(x) = F(x) + F(-x) - \frac{x}{3}(-F'(-x) + F'(x)) - \frac{1}{3}(F(-x) + 4F(0) + F(x)).$$

$H'(0) = 0$, więc H'' się zeruje w pewnym $\xi_2 \in (0, \xi_1)$.

$$G''(x) = F'(x) - F'(-x) - \frac{x}{3}(F''(-x) + F''(x)) - \frac{2}{3}(-F'(-x) + F'(x)).$$

$H''(0) = 0$, więc H''' się zeruje w pewnym $\xi_3 \in (0, \xi_2)$.

$$\begin{aligned}G'''(x) &= F''(x) + F''(-x) - \frac{x}{3}(-F'''(-x) + F'''(x)) - F''(-x) - F''(x)\\ &= -\frac{x}{3}(F'''(x) - F'''(-x)),\\ H'''(\xi_3) &= -\frac{\xi_3}{3}(F'''(\xi_3) - F'''(-\xi_3)) - 60\xi_3^2G(1) = 0.\end{aligned}$$

Z twierdzenia o wartości średniej

$$F'''(\xi_3) - F'''(-\xi_3) = 2\xi_3\frac{F'''(\xi_3) - F'''(-\xi_3)}{2\xi_3} = 2\xi_3F^{(4)}(\xi_4)$$

dla pewnego $\xi_4 \in (-\xi_3, \xi_3)$.

Zatem

$$0 = H'''(\xi_3) = -\frac{\xi_3}{3}2\xi_3F^{(4)}(\xi_4) - 60\xi_3^2G(1) = -\xi_3^2\left(\frac{2}{3}F^{(4)}(\xi_4) + 60G(1)\right),$$

$$G(1) = -\frac{F^{(4)}(\xi_4)}{90} = -h^4\frac{f^{(4)}(\xi_4)}{90}$$

i błąd wynosi $hG(1) = -\frac{f^{(4)}(\xi_4)}{90}h^5$.