Wiktor Kuchta

M12.2

Mamy daną dziedzinę $[a, b]$, funkcję wagową p. Chcemy znaleźć A_0, x_0 takie, że dla dowolnego wielomianu w stopnia < 2 zachodzi

$$\int_a^b p(x)w(x)\,dx = A_0 w(x_0).$$

Wiemy, że kwadratura Gaussa Q_0 ma rząd 2, a więc spełnia nasze wymagania. Musimy rozważyć ciąg standardowych wielomianów ortogonalnych P_i prostopadłych w sensie wagi p. Mamy $P_0(x) = x, P_1(x) = \left(x - \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle}\right) P_0(x)$. Zatem

$$x_0 = \frac{\int_a^b xp(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx},$$

$$A_0 = \int_a^b p(x)\lambda_0(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx.$$

M12.3

Kwadratura Gaussa Q_1 jest rzędu 4 i żądanej postaci, więc spełnia nasze wymagania.

Musimy znaleźć wielomiany ortogonalne dla wagi $(1 + x^2)$:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x - \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = x - \frac{\int_0^1 x + x^3\,dx}{\int_0^1 1 + x^2\,dx} = x - \frac{9}{16}\\
P_2(x) &= \left(x - \frac{\langle xP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle}\right) P_1(x) - \frac{\langle P_1, P_1\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle}\\
&= \left(x - \frac{\int_0^1 (x + x^3)\left(x - \frac{9}{16}\right)^2\,dx}{\int_0^1 (1 + x^2)\left(x - \frac{9}{16}\right)^2\,dx}\right)\left(x - \frac{9}{16}\right) - \frac{\int_0^1 (1 + x^2)\left(x - \frac{9}{16}\right)^2\,dx}{\int_0^1 1 + x^2\,dx}\\
&= \left(x - \frac{829}{1712}\right)\left(x - \frac{9}{16}\right) - \frac{107}{1280}\\
&= x^2 - \frac{112x}{107} + \frac{101}{535}\\
&= \left(x - \frac{56}{107} + \frac{\sqrt{4873/5}}{107}\right)\left(x - \frac{56}{107} - \frac{\sqrt{4873/5}}{107}\right).
\end{aligned}$$

M12.4

Niech $\langle f, g\rangle = \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx$ i P_i to standardowe wielomiany ortogonalne w sensie normy średniokwadratowej z tą wagą.

Niech w_n to wielomian moniczny stopnia n. Możemy go zapisać w postaci $P_n + r$, gdzie r jest stopnia $< n$. Wtedy

$$\begin{aligned}&\int_a^b p(x)(w_n(x))^2\,dx\\&= \int_a^b p(x)(P_n(x))^2\,dx + \int_a^b p(x)(r(x))^2\,dx + 2\int_a^b p(x)r(x)P_n(x)\,dx,\end{aligned}$$

gdzie ostatni składnik to $2\langle r, P_n\rangle = 0$. Zakładamy, że waga p jest dodatnia, więc pierwszy składnik jest stały, a aby zminimalizować całość musimy przyjąć $r = 0$.

M12.7

Dla równania postaci $y'(t) = f(t, y(t))$ jawną metodą Eulera jest

$$y_{n+1} = y_n + hf_n,$$

a niejawną metodą Eulera jest

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1},$$

gdzie $f_k = f(t_k, y_k), t_k = t_0 + kh, h > 0$.

Rozważmy problem

$$y'(t) = \lambda y(t)\ \ (t > 0), \quad y(0) = 1,$$

gdzie $\lambda < 0$, $t_0 = 0$. Mamy $f(t, y(t)) = \lambda y(t)$.

Jawna metoda Eulera daje nam

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n,$$

więc $y_n \to 0$ jeśli $\frac{-2}{\lambda} > h > 0$.

Niejawna metoda Eulera daje nam

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h\lambda}.$$

Aby $y_n \to 0$ musimy mieć $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| < 1$, a więc zawsze.

M12.8

Rozważmy problem

$$y'(t) = \lambda y(t)\ \ (t > 0), \quad y(0) = 1,$$

gdzie $\lambda < 0$, $t_0 = 0$. Mamy $f(t, y(t)) = \lambda y(t)$.

Metoda Cranka-Nicolson ma wzór

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right).$$

Stosując go do naszego problemu otrzymujemy

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda y_{n+1}\right) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y_n = \frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda} y_n.$$

M12.9

Rozważmy problem

$$y'(t) = \lambda y(t) \ \ (t > 0), \quad y(0) = 1,$$

gdzie $\lambda < 0$, $t_0 = 0$. Mamy $f(t, y) = \lambda y$.

Metoda Heuna ma wzór

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f_n + f(t_{n+1}, y_n + hf_n)\Big).$$

Stosując go do naszego problemu otrzymujemy

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda y_n + \lambda^2 h y_n\right) = \left(1 + h\lambda + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) y_n.$$