Wiktor Kuchta

7/4bD

Pojęcie $\mathbb{Z}$-modułu jest równoważne pojęciu grupy abelowej, więc $\mathbb{Z}$-moduły proste to grupy abelowe bez nietrywialnych podgrup właściwych. Takie grupy muszą być równe podgrupie generowanej przez dowolny element niezerowy, czyli są cykliczne. Grupa $\mathbb{Z}$ ma nietrywialne podgrupy właściwe, zatem $\mathbb{Z}$-moduły proste to grupy cykliczne rzędu pierwszego.

Homomorfizm z grupy cyklicznej jest wyznaczony przez wartość dla 1. Dla każdej wartości w $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ otrzymujemy inny endomorfizm $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Czyli pierścień endomorfizmów $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest mocy p, więc z tw. Wedderburna jest izomorficzny z ciałem $F(p)$.

7/5D

Niech V to niezerowa przestrzeń liniowa nad ciałem K. Ta przestrzeń ma pewną bazę $\mathcal{B}$ i każdy element możemy utożsamić z jego współrzędnymi w tej bazie (indeksowanymi elementami bazy).

Jest to oczywiście $\mathrm{End}_K(V)$-moduł z operacją stosowania endomorfizmu na wektorze. To, że $\mathrm{End}_K(V)$ jest pierścieniem, wynika z nietrywialności V.

Taki endomorfizm jest jednoznacznie wyznaczony przez wartości dla elementów $\mathcal{B}$. Z kolei taka wartość to dowolna kombinacja liniowa współrzędnych, tzn. należy do wolnej grupy abelowej $V \cong \bigoplus_{b\in\mathcal{B}} K$. Czyli pierścień $\mathrm{End}_K(V)$ jest izomorficzny z $V^{\mathcal{B}}$.

Załóżmy nie wprost, że mamy nietrywialny podmoduł właściwy $V' < V$ jako $\mathrm{End}_K(V)$-moduł, czyli podprzestrzeń liniową niezmienniczą na wszystkie endomorfizmy V. Wtedy przestrzeń V' jest rozpinana przez pewnien układ wektorów $\mathcal{C}$, który się rozszerza do $\mathcal{D}$ bazy V. Elementy V' mają zerowe współrzędne dla wektorów z $\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}$. Istnieje endomorfizm V, który wektor z $\mathcal{C}$ przekształca na wektor w $\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}$, więc V' nie jest zamknięte na mnożenie przez skalar. Sprzeczność.

7/6D

Załóżmy, że M jest R-modułem. Wówczas M jest też R'-modułem, gdzie $R' = \mathrm{End}_R(M)$. Dla $r \in R$ definiujemy $f_r \colon M \to M$ przez $f_r(m) = rm$.

Niech $r', s' \in \mathrm{End}_R(M) = R'$ i $m_1, m_2 \in M$.

$$\begin{aligned}
f_r(r'(m_1) + s'(m_2)) &= r(r'(m_1) + s'(m_2)) && \text{definicja } f_r \\
&= rr'(m_1) + rs'(m_2) && \text{rozdzielność mnożenia skalarnego} \\
&= r'(rm_1) + s'(rm_2) && R\text{-liniowość} \\
&= r'(f_r(m_1)) + s'(f_r(m_2)) && \text{definicja } f_r
\end{aligned}$$

Zatem f_r jest endomorfizmem R'-modułu M (jest funkcją R'-liniową).