Wiktor Kuchta

Zadanie 1.

Lemat 1 (Monotoniczność)**.** *Jeśli* $(k, v) \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$*, to* $\forall j \leqslant k.\, (j, v) \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$*. Jeśli* $(k, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!]\delta$*, to* $\forall j \leqslant k.\, (j, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!]\delta$*.*

Dowód. Indukcja względem struktury typu τ.

Pierwsza część: załóżmy, że $(k, v) \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$.

Przypadek $\tau = \alpha$. Mamy $\mathcal{V}[\![\alpha]\!]\delta = \delta(\alpha) \in \mathit{SemType}$. Teza wynika z definicji:

$$\mathit{SemType} = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathrm{CVal}) \mid \forall (k, v) \in S.\, \forall j < k.\, (j, v) \in S\}.$$

Przypadek $\tau = \texttt{bool}$. Mamy $\mathcal{V}[\![\texttt{bool}]\!]\delta = \{(k, b) \mid k \in \mathbb{N} \wedge b \in \{\texttt{true}, \texttt{false}\}\}$. Zatem teza też wynika z definicji.

Przypadek $\tau = \forall \alpha.\, \tau$. Mamy

$$\mathcal{V}[\![\forall \alpha.\, \tau]\!]\delta = \{(k, \Lambda.\, e) \mid (\Lambda.\, e) \in \mathrm{CVal} \wedge \forall S \in \mathit{SemType}.\, (k, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)\}.$$

Zatem v ma postać $\Lambda.\, e$. Weźmy $j \leqslant k$. Chcemy pokazać, że $(j, \Lambda.\, e) \in \mathcal{V}[\![\forall \alpha.\, \tau]\!]\delta$. Z założenia indukcyjnego lemat zachodzi dla $(k, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)$ dla dowolnego $S \in \mathit{SemType}$. Zatem $(j, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)$ dla dowolnego $S \in \mathit{SemType}$, a więc tezę mamy z definicji.

Przypadek $\tau = \exists \alpha.\, \tau$. Mamy

$$\mathcal{V}[\![\exists \alpha.\, \tau]\!]\delta = \{(k, \texttt{pack}\ v) \mid \exists S \in \mathit{SemType}.\, (k, v) \in \mathcal{V}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)\}.$$

Zatem v ma postać $\texttt{pack}\ v'$. Weźmy $S \in \mathit{SemType}$ świadczące o $(k, \texttt{pack}\ v') \in \mathcal{V}[\![\exists \alpha.\, \tau]\!]\delta$ i $j \leqslant k$. Chcemy pokazać, że $(j, \texttt{pack}\ v') \in \mathcal{V}[\![\exists \alpha.\, \tau]\!]\delta$. Z założenia indukcyjnego lemat zachodzi dla $(k, v') \in \mathcal{V}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)$, zatem $(j, v') \in \mathcal{V}[\![\tau]\!](\delta, \alpha \mapsto S)$ i teza zachodzi z definicji.

Przypadek $\tau = \mu \alpha.\, \tau$. Mamy

$$\mathcal{V}[\![\mu \alpha.\, \tau]\!]\delta = \{(k, \texttt{fold}\ v) \mid v \in \mathrm{CVal} \wedge \forall j < k.\, (j, v) \in \mathcal{V}[\![\tau[\mu \alpha.\, \tau / \alpha]]\!]\delta\}.$$

Weźmy $j \leqslant k$, wtedy $(j, v) \in \mathcal{V}[\![\mu \alpha.\, \tau]\!]\delta$ wynika łatwo z definicji.

Przypadek $\tau = \tau_1 \to \tau_2$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{V}[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]\delta = \{(k, \lambda x.\, e) \mid (\lambda x.\, e) \in \mathrm{CVal} \wedge{}& \\ &\forall j \leqslant k.\, \forall v.\, (j, v) \in \mathcal{V}[\![\tau_1]\!]\delta \implies (j, e[v/x]) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta\}.\end{aligned}$$

Weźmy $j \leqslant k$, wtedy $(j, v) \in \mathcal{V}[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]\delta$ wynika łatwo z definicji.

Druga część: teraz załóżmy, że $(k, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!]\delta$. Mamy

$$\mathcal{E}[\![\tau]\!]\delta = \{(k, e) \mid \forall j < k, e'.\, e \searrow^j e' \implies (k - j, e') \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta\}.$$

Weźmy $j \leqslant k$. Chcemy pokazać, że $(j, e) \in \mathcal{E}[\![\tau]\!]\delta$. Weźmy $j' < j$. Wiemy, że $e \searrow^{j'} e'$ implikuje $(k - j', e') \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$, a chcemy pokazać, że implikuje $(j - j', e') \in \mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$. Ale to wynika z monotoniczności dla $\mathcal{V}[\![\tau]\!]\delta$, którą przed chwilą udowodniliśmy.

□

Zadanie 2.

Lemat 2 (Kompatybilność aplikacji)**.**

$$\frac{\Delta; \Gamma \models e_1 : \tau_1 \to \tau_2 \qquad \Delta; \Gamma \models e_2 : \tau_1}{\Delta; \Gamma \models e_1\, e_2 : \tau_2}$$

Dowód. Weźmy $\delta \in \mathcal{D}[\![\Delta]\!]$ i $(k, \gamma) \in \mathcal{G}[\![\Gamma]\!]\delta$. Chcemy pokazać $(k, \gamma(e_1\, e_2)) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$.

Wiemy, że $(k, \gamma(e_1)) \in \mathcal{E}[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]\delta$, więc pokażemy $(k, \gamma(e_1\, e_2)) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]$ korzystając z lematu Bind. Musimy pokazać, że $\forall j \leqslant k. \forall v. (j, v) \in \mathcal{V}[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]\delta \implies (j, v\, \gamma(e_2)) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$.

Zatem weźmy takie j i v. Wiemy (z definicji $\models$ i monotoniczności), że $(j, \gamma(e_2)) \in \mathcal{E}[\![\tau_1]\!]\delta$, więc pokażemy $(j, v\, \gamma(e_2)) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$ korzystając z lematu Bind. Musimy pokazać, że $\forall l \leqslant j. \forall u. (l, u) \in \mathcal{V}[\![\tau_1]\!]\delta \implies (l, v\, u) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$.

Zatem weźmy takie l i u. Z definicji relacji dla typu funkcyjnego wiemy, że v ma postać $\lambda x. e$ i $(l, e[u/x]) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$. Z Closure under expansion mamy $(l + 1, v\, u) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$, więc z monotoniczności $(l, v\, u) \in \mathcal{E}[\![\tau_2]\!]\delta$ tak, jak chcieliśmy.

□