Lista 3

Wiktor Kuchta (nr indeksu 315599)

14 marca 2023

1	2	3	4	5	6
+	+	+	+		+

1.

Podkreślone β-redeksy:

$$\underline{(\lambda x.x)(\underline{(\lambda x.x)(\lambda z.\underline{(\lambda x.x)z})})}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\lambda x.xx)(\lambda yz.yz) &\to xx[x := (\lambda yz.yz)] \equiv (\lambda yz.yz)(\lambda yz.yz) \\
&\to (\lambda z.yz)[y := (\lambda yz.yz)] \equiv \lambda z.(\lambda yz.yz)z \\
&\to \lambda z.(\lambda z.yz)[y := z] \equiv \lambda z.(\lambda t.yt)[y := z] \equiv \lambda z.(\lambda t.zt) \equiv \lambda zt.zt
\end{aligned}$$

3.

Pokażemy równoważność poniższych reguł:

$$\dfrac{}{\lambda x.Mx = M}\,\eta \quad \text{gdzie } x \notin FV(M)$$

$$\dfrac{Mx = Nx}{M = N}\,\text{Ext} \quad \text{gdzie } x \notin FV(M) \cup FV(N)$$

Wyprowadzamy (Ext) z (η). Zakładamy $x \notin FV(M) \cup FV(N)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\lambda x.Mx = M}\,\eta}{M = \lambda x.Mx}\,\text{Sym} \qquad \dfrac{\dfrac{Mx = Nx}{\lambda x.Mx = \lambda x.Nx}\,\text{MonAbs} \qquad \dfrac{}{\lambda x.Nx = N}\,\eta}{\lambda x.Mx = N}\,\text{Trans}}{M = N}\,\text{Trans}$$

Wyprowadzamy (η) z (Ext). Zakładamy $x \notin FV(M)$.

$$\dfrac{\dfrac{}{(\lambda x.Mx)x = Mx}\,\beta}{\lambda x.Mx = M}\,\text{Ext}$$

4.

Ustalmy λ-termy M i N takie, że $M = N$. Indukcją względem struktury kontekstów pokażemy, że dla każdego kontekstu C zachodzi $C[M] = C[N]$.

1. Jeśli C ma postać x (zmienna), to $C[M] \equiv C[N] \equiv x$, a więc $C[M] = C[N]$ wnioskujemy regułą Refl.
2. Jeśli $C \equiv []$, to $C[M] \equiv M$ i $C[N] \equiv N$, więc korzystamy bezpośrednio z założenia $M = N$.
3. Jeśli C ma postać $C_1[]C_2[]$, to z założenia indukcyjnego mamy $C_1[M] = C_1[N]$ oraz $C_2[M] = C_2[N]$. Korzystając z MonApp otrzymujemy

$$C[M] \equiv C_1[M]C_2[M] = C_1[N]C_2[N] \equiv C[N].$$

4. Jeśli C ma postać $\lambda x.C_1[]$, to z założenia indukcyjnego mamy $C_1[M] = C_1[N]$. Korzystając z MonAbs otrzymujemy

$$C[M] \equiv \lambda x.C_1[M] = \lambda x.C_1[N] \equiv C[N].$$

6.

Niech $\omega_3 \equiv \lambda x.(\lambda t_1.(\lambda t_2.(\lambda t_3.xt_3)t_2)t_1)x$, tzn. standardowa $\omega \equiv \lambda x.xx$, tylko że x którego aplikujemy został trzykrotnie η-ekspandowany.

a)

$\omega_3\omega_3$

b)

$\omega\omega(\omega_3\omega_3)$