M13.1

(a)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Dodatnia określoność i jednorodność są oczywiste. Nierówność trójkąta dla norm wynika z nierówności trójkąta dla wartości bezwzględnej:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1 .$$

(b)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

Dodatnia określoność i jednorodność są oczywiste.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k + y_k| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (|x_k| + |y_k|) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty \end{aligned}$$

M13.2

Mamy pokazać, że

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2$$

jest równe pierwiastkowi kwadratowemu największej wartości własnej $A^\top A$.

Macierz $A^\top A$ jest symetryczna i nieujemnie określona, więc ma układ ortonormalny wektorów własnych (v_i) z nieujemnymi wartościami własnymi λ_i.

Zakładając, że $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$ ma normę 1, mamy

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^\top A^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top A^\top A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{x}^\top \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^\top A \mathbf{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^\top \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i^\top \sum_{i=j}^{n} \alpha_j \lambda_j \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \alpha_i a_j \lambda_j \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

Liczby α_i^2 tworzą podział jedynki, zatem kwadrat normy możemy oszacować z góry przez $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$. To supremum jest osiągane dla odpowiedniego wektora własnego.

M13.3

(a)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant n \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant n \|\mathbf{x}\|_\infty$$

(b)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 \leqslant n \max_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^2 \leqslant n\,\|\mathbf{x}\|_\infty^2$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$

(c)

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$[|x_1|,\dots,|x_n|]^\top [1,\dots,1] \leqslant \left\|[|x_1|,\dots,|x_n|]^\top\right\|_2 \left\|[1,\dots,1]^\top\right\|_2,$$

czyli

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 .$$

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant (|x_1| + \ldots + |x_k|)^2,$$

bo po prawej mamy składniki dodatnie i każdy składnik po lewej występuje po prawej. Zatem

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 .$$

M13.4

Mamy pokazać, że

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Dla $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ mamy

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

To oszacowanie górne jest osiągane dla $x_j = \operatorname{sgn} a_{ij}$.

M13.5

Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n^2}$ zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

Jest to norma, bo jest ona równoważna normie $\|\cdot\|_2$ dla wektorów z $\mathbb{R}^{n^2}$.

Oznaczmy i-ty wiersz macierzy A przez a_{i*}, a j-tą kolumnę przez a_{*j}.

Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza możemy pokazać zgodność normy $\|\cdot\|_E$ z $\|\cdot\|_2$:

$$\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_{i*}\mathbf{x})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|a_{i*}\|_2^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} a_{ij}^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|A\|_E^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 .$$

Ze zgodności norm możemy wywnioskować submultiplikatywność: Niech $AB = C$, wtedy

$$\begin{aligned}\|C\|_E &= \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \|c_{*j}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \|Ab_{*j}\|_2^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \|A\|_E^2 \|b_{*j}\|_2^2} = \|A\|_E \sqrt{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \|b_{*j}\|_2^2} = \|A\|_E \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}^2} \\ &= \|A\|_E \|B\|_E .\end{aligned}$$

M13.7

(a)

Niech L to macierz trójkątna dolna z jedynkami na głównej przekątnej. Oznaczmy jej odwrotność przez L'

Skoro $LL' = I$, to

$$L[l'_{*1}\ \ l'_{*2}\ \ \ldots\ \ l'_{*n}] = [Ll'_{*1}\ \ Ll'_{*2}\ \ \ldots\ \ Ll'_{*n}] = [e_1\ \ e_2\ \ \ldots\ \ e_n].$$

Skupmy się na k-tej kolumnie.

Dla kolejnych $1 \leqslant i < k$ mamy $L_{i*}l'_{*k} = 0$, czyli z zerowości pierwszych $i-1$ wierszy l'_{*k} i zerowości kolumn dalszych niż i wiersza L_{i*} mamy $L_{ii}l'_{ik} = 0$. Skoro $L_{ii} = 1$, to $l'_{ik} = 0$.

Podobnie mamy $L_{k*}l'_{*k} = 1$, więc $L_{kk}l'_{kk} = 1$ i $l'_{kk} = 1$.

Zatem L' jest dolnotrójkątna z jedynkami na przekątnej.

(b)

Niech L to macierz dolnotrójkątna z jedynkami na przekątnej.

Niech L_j to macierz powstała poprzez wyzerowanie w L wyrazów pod przekątną, poza kolumną j. Są to macierze operacji wierszowych – dodawania wielokrotności wierszy mnożonej macierzy do wiersza j. Odwrotność L_j powstaje poprzez negację wyrazów poza przekątną.

Mamy $L = L_1L_2 \ldots L_n$ i $L^{-1} = L_n^{-1}L_{n-1}^{-1} \ldots L_1^{-1}$, ten iloczyn jest łatwy do obliczenia, bo to tylko operacje wierszowe.