

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M5

12 listopada 2020 r.

M5.1. 1 punkt Wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych $n + 1$ węzłach x_0, \dots, x_n można podać wzorem

$$(1) \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(x),$$

gdzie

$$(2) \quad \lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

a) $\sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1$

b) $\sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$

M5.2. 1 punkt Wykazać, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

przy czym $f[x_j] = f(x_j)$.

M5.3. 1 punkt Dowieść, że jeśli p jest wielomianem stopnia n , to $q(x) := p[x, x_1, \dots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n - k$, z takim współczynnikiem przy x^{n-k} , jaki stoi w p przy x^n .

M5.4. 1 punkt Wyznaczyć wielomian p o następujących wartościach:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

Korzystając z tego wyniku podać wielomian q , który ma następujące wartości:

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

M5.5. 1 punkt Załóżmy, że $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ i że $h = (b - a)/n > 0$. Wykazać, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{1}{4} n! h^{n+1}.$$

M5.6. 1 punkt Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f , że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\leq n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$M(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n+1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

M5.7. 1 punkt Niech $L_1 \in \Pi_1$ interpoluje funkcję f w punktach x_0 i x_1 . Wykazać, że dla każdego $x \in [x_0, x_1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 M_2,$$

gdzie $M_2 := \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)|$.

M5.8. 1 punkt Niech L_n będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \exp x$ w zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1} . Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-5}?$$

6 listopada 2020
Rafał Nowak