

6/4

Rozważmy stos wywołań algorytmu Hoare’a na tablicy rozmiaru n , każde kolejne wywołanie jest na wycinku poprzedniej tablicy.

Przez wywołanie *zbalansowane* rozumiemy wywołanie początkowe lub takie, które działa na tablicy o rozmiarze nie większym niż $3/4$ razy rozmiar tablicy wywołania poprzedniego. W każdym wywołaniu mamy szansę $1/2$ wylosować pivot, który podzieli tablicę na dwie tablice „zbalansowane” (więc następne wywołanie na pewno będzie zbalansowane).

Dla wywołania zbalansowanego na tablicy rozmiaru m oczekiwany koszt wykonania jego i bezpośrednio następujących wywołań niezbalansowanych możemy oszacować przez

$$m \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2m.$$

Zatem całkowity koszt możemy oszacować przez

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2n(3/4)^k = 8n.$$

6/5

$$h(\text{drzewo puste}) = 0, \quad h(v) = 1 + \min\{h(\text{lewy syn } v), h(\text{prawy syn } v)\}$$

Zauważmy, że poddrzewo x zawiera drzewo pełne o wysokości $h(x)$, a więc ma $\geq 2^{h(x)} - 1$ wierzchołków. Czyli jeśli m to liczba wierzchołków w poddrzewie x , to $h(x) \leq \lg(m + 1)$.

Warunek, że h lewego syna jest nie mniejsze niż prawego, gwarantuje nam, że przechodząc do prawego syna wartość h się zmniejsza o 1.

W każdym wierzchołku kopca będziemy trzymać wartość h dla niego.

Powiedzmy, że chcemy złączyć sterty A i B . Jeśli któraś jest pusta, to zwracamy drugą. Jeśli maksimum A jest mniejsze od maksimum B , to je zamieniamy. Teraz możemy rekurencyjnie złączyć B z prawym poddrzewem A , a następnie przywrócić prawidłowy balans i wartości h .

Korzystając z tej operacji możemy łatwo zaimplementować wstawianie elementu (złączenie ze stertą jednoelementową) i usunięcie maksimum (złączenie lewego i prawego poddrzewa sterty).

6/6

Zauważmy, że każdy ciąg operacji rotacji jest odwracalny, zatem wystarczy pokazać, że możemy zmienić kształt każdego drzewa BST w ścieżkę (pochyloną w prawo).

Tezę pokażemy indukcją względem liczby wierzchołków. Drzewa o < 2 wierzchołkach już są takimi ścieżkami.

Weźmy drzewo o ≥ 2 wierzchołkach. Z tezy indukcyjnej jego lewe poddrzewo L możemy zmienić w ścieżkę i korzystając z rotacji otrzymać drzewo o pustym lewym poddrzewie. Teraz korzystając z założenia indukcyjnego jego prawe poddrzewo zamieniamy w ścieżkę.