

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M13

21 stycznia 2021 r.

**M13.1.** 1 punkt Niech  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Sprawdzić, że wzór

a)  $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|,$

b)  $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$

definiuje normę w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

**M13.2.** 1.5 punkta Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów  $\|\cdot\|_2$ , wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny*  $\varrho(A^T A)$  macierzy  $A^T A$  jest z definicji jej największą wartością własną.

**M13.3.** 1 punkt Wykazać, że dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  zachodzą nierówności

a)  $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty;$

b)  $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty;$

c)  $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$

**M13.4.** 1 punkt Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową  $\|\cdot\|_\infty$  wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

**M13.5.** 1 punkt Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową  $\|\cdot\|_2$ .

**M13.6.** 1 punkt Załóżmy, że nieosobliwa macierz  $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest symetryczna, tj.  $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$  dla  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości  $a_{ij}^{(k)}$ , otrzymywane w tej metodzie kolejno dla  $k = 2, 3, \dots, n$ , są takie, że  $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$  dla  $i, j = k, k+1, \dots, n$ .

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

**M13.7.** 1 punkt

- a) Wykazać, że jeśli  $L$  jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to  $L^{-1}$  również jest macierzą tego typu.
- b) Opracować metodę wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy trójkątnej dolnej  $L$ , z jedynkami na przekątnej głównej.

**M13.8.** 2 punkty. Włącz komputer.

Zaprogramować efektywnie metodę eliminacji Gaussa w języku Julia. Należy zaprezentować funkcję `solve!(A,b)`, która dla danej macierzy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i wektora  $b \in \mathbb{R}^n$  znajduje rozwiązanie układu równań  $Ax = b$ . *Wskazówka.* Aby uzyskać efektywną implementację, można rozważyć układ równań  $A^T x = b$ . Efektywna implementacja to taka, która działa co najwyżej 30-razy dłużej niż wbudowana metoda `\(A,b)`. Ponadto, dla zaoszczędzenia na obliczeniach, można pominąć wybór elementów głównych.

12 stycznia 2021  
Rafał Nowak