Wiktor Kuchta

M11.1

Wielomiany Czebyszewa spełniają równość $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, a ekstrema wielomianu T_n są w punktach $u_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Zatem

$$
\begin{aligned}
T_{n+j}(u_k) &= T_{n+j}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{(n+j)k\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(k\pi + \frac{jk\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^k \cdot \cos\frac{jk\pi}{n} \\
&= T_n(u_k) \cdot T_j(u_k).
\end{aligned}
$$

M11.2

Niech $\varepsilon > 0$. Oznaczmy x_{ni} zera $n+1$-szego wielomianu ortogonalnego z wagą p, a A_{ni} to odpowiednie współczynniki z kwadratury Gaussa.

Z tw. Weierstrassa istnieje w taki, że $f - w < \varepsilon$ na $[a, b]$. Dla $n > \deg w$ wzór Gaussa jest dokładny, więc mamy

$$
\begin{aligned}
|G_n(f) - I(f)| \leq& \left|\int_a^b p(x)f(x)\,dx - \int_a^b p(x)w(x)\,dx\right| \\
&+ \left|\sum_{i=0}^n A_{ni}w(x_{ni}) - \sum_{i=0}^n A_{ni}f(x_{ni})\right| \\
\leq& \int_a^b p(x)\left|f(x) - w(x)\right|\,dx + \sum_{i=0}^n A_{ni}\left|w(x_{ni}) - f(x_{ni})\right| \\
\leq& \varepsilon\int_a^b p(x)\,dx + \varepsilon\sum_{i=0}^n A_{ni} = 2\varepsilon\int_a^b w(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

M11.3

Błąd złożonej metody Simpsona dla $\int_0^\pi \sin x\,dx$ możemy oszacować z góry przez

$$
\frac{h^4}{180}(\pi - 0)\sin^{(4)}(\xi) \leq \frac{\pi^5}{180n^4}.
$$

Zatem jeśli $n \geq 18$, to otrzymamy błąd $\leq 2 \cdot 10^{-5}$. Można eksperymentalnie sprawdzić, że wystarczy $n = 16$.

Błąd złożonej metody trapezów dla $\int_0^\pi \sin x \, dx$ możemy oszacować z góry przez

$$\left| -\frac{\pi^3}{12n^2} \sin^{(2)}(\xi) \right| \leq \frac{\pi^3}{12n^2}.$$

Zatem jeśli $n \geq 360$, to otrzymamy błąd $\leq 2 \cdot 10^{-5}$. Można eksperymentalnie sprawdzić, że wystarczy $n = 287$.

M11.4

$$w_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' a_k T_k(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} w_n(x)\, dx &= {\sum_{i=0}^{n}}' a_i \int_{-1}^{1} T_i(x)\, dx \\
&= {\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}}' a_{2i} \int_{-1}^{1} T_{2i}(x)\, dx \\
&= 2 {\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}}' \frac{a_{2i}}{1 - 4i^2} && \text{M10.1}
\end{aligned}$$

M11.5

$$e^{e^{e^x}}$$

M11.7

Niech $w_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$. Wtedy

$$v_n(t) = w_n(\arccos t) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(j \arccos t) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(t).$$

Wielomiany Czebyszewa T_n tworzą ciąg ortogonalny dla iloczynu skalarnego

$$<f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x) g(x)\, dx = \int_0^\pi f(\cos t) g(\cos t)\, dt,$$

zatem zminimalizowanie całki

$$\int_0^\pi \Big(\pi - x^2 - w_n(x)\Big)^2\, dx = \int_0^\pi \Big(\pi - (\arccos(\cos x))^2 - v_n(\cos x)\Big)^2\, dx$$

sprowadza się do znalezienia wielomianu optymalnego dla $f(t) = \pi - (\arccos t)^2$. Jest to po prostu rzut ortogonalny f na Π_n, więc

$$c_j = \frac{\langle f, T_j \rangle}{\langle T_j, T_j \rangle}.$$