

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 11

7 stycznia 2021 r.

M11.1. 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n .

M11.2. 1 punkt Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a, b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \rightarrow \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x) dx$.

M11.3. 1 punkt

- a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x dx$ z błędem $\leq 2 \cdot 10^{-5}$.
- b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n ?

M11.4. 1 punkt Niech będzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$, gdzie T_k jest k -tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^1 w_n(x) dx = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2i}}{1 - 4i^2}.$$

M11.5. 1 punkt Poeksperymentować z metodą adaptacyjną Simpsona

```
function AdaptiveSimpson(f,a,b; abstol=1.0e-8)
    nf = 3;
    ff = f([a, (a+b)/2, b]);
    nf = 3; # Initial Simpson approximation
    I1 = (b-a)*dot([1, 4, 1], ff)/6;
    function adaptrec(f,a,b,ff,I1,tol,nf)
        h = (b-a)/2;
        fm = f([a+h/2, b-h/2]);
        nf = nf + 2;
        # Simpson approximations for left and right subinterval
        fR = [ff[2], fm[2], ff[3]];
        fL = [ff[1], fm[1], ff[2]];
        IL = h*dot([1, 4, 1], fL)/6;
        IR = h*dot([1, 4, 1], fR)/6;
        I2 = IL + IR;
        I = I2 + (I2 - I1)/15;
        # Extrapolated approximation
        if (abs(I-I2) > tol)
            IL, nf = adaptrec(f, a, a+h, fL, IL, tol/2, nf);
            IR, nf = adaptrec(f, b-h, b, fR, IR, tol/2, nf);
            I = IL + IR;
        end
        return I, nf;
    end
    return adaptrec(f, a, b, ff, I1, abstol, nf);
end;
```

Podać przykład funkcji $f \in C^\infty[-1, 1]$, dla której obliczanie całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$, z dokładnością $\text{abstol}=10^{-6}$, wymaga co najmniej 1000 wywołań funkcji f .

Wskazówka: zob. [D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, rozdział 7.6.]

- M11.6.** 2 punkty Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Julia, do obliczania całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$ za pomocą interpolacyjnej kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function ClenshawCurtis(f,n)
    # Chebyshev extreme points
    x = cos.(pi*(0:n)/n)
    fx = f.(x)/(2n)
    # Fast Fourier transform
    g = real(FFTW.fft(vcat(fx,fx[n:-1:2])))
    # Chebyshev coefficients
    a = vcat( g[1], g[2:n]+g[2*n:-1:n+2], g[n+1] )
    w = zeros(length(a))
    w[1:2:end] = 2 ./ (1 .- (0:2:n) .^ 2 )
    LinearAlgebra.dot(w,a)
end
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

- M11.7.** 1 punkt Znaleźć liczby c_j , dla których wielomian trygonometryczny $w_n(x) := \sum_{j=0}^n c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2 dx.$$

- M11.8.** 2 punkty Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k) T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1} .

- M11.9.** 1,5 punktu Udowodnić, że rząd kwadratury Lobatto wynosi $2n$, tzn. pokazać, że wzór

$$(1) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^n f(\cos(k\pi/n))$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$ oraz niedokładny dla pewnego wielomianu $f \in \Pi_{2n}$.

- M11.10.** 1 punkt Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C , żeby równość

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia ≤ 5 . Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

- M11.11.** 2 punkty. Włącz komputer i uzasadnij odpowiedź. Obliczyć z dokładnością do $\varepsilon = 10^{-3}$ wartość całki

$$I(f) = \int_0^\infty \cos^2(x)e^{-x} = 3/5.$$

2 stycznia 2021
Rafał Nowak