Wiktor Kuchta

M14.1

Z definicji normy indukowanej

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

mamy wprost zgodność normy z normą indukowaną:

$$\|A\mathbf{x}\|_p \leqslant \|A\|_p \|\mathbf{x}\|_p .$$

Korzystając z definicji i łączności mnożenia macierzy otrzymujemy tezę:

$$\|AB\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|AB\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \leqslant \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\|_p \|B\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \leqslant \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\|_p \|B\|_p \|\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \|A\|_p \|B\|_p .$$

M14.2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ & 1 & -1 & \dots & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz B jest trójkątna i ma jedynki na przekątnej, więc $\det B = 1$. Niech

$$c_j = [2^{j-2}, 2^{j-3}, \dots, 2, 1, 1, 0, \dots, 0]^\top,$$

tzn. ostatnia jedynka jest na j-tej pozycji. Mamy $Bc_j = e_j$, więc macierz C złożona z kolumn c_j jest odwrotnością B. Jest ona także górnotrójkątna i $\det C = 1$.

Norma $\|\cdot\|_\infty$ macierzy to jej maksymalna suma modułów w wierszu, zatem $\|B\|_\infty = n$, a $\|C\|_\infty = 2^{n-1}$. Mamy $\operatorname{cond}_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = n2^{n-1} \gg 1 = \det B$, co oznacza, że przy rozwiązywaniu układu równań tej macierzy może dojść do dużych błędów.

M14.4

Mamy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i $A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \mathbf{r}$, więc $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{r}$. Nakładając obustronnie normę i korzystając ze zgodności norm otrzymujemy

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| = \left\|A^{-1}\mathbf{r}\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{r}\| = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\|} = \operatorname{cond}(A)\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\|}.$$

Dalej $\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\| \, \|\mathbf{x}\|$, więc dzieląc obustronnie przez $\|\mathbf{x}\|$ otrzymujemy

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\| \, \|\mathbf{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

M14.6

Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Rozpatrzmy metodę iteracyjną Richardsona

$$\mathbf{x}^{(x+1)} = (I - \tau A)\mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{b} \qquad (k \geqslant 0)$$

zastosowaną do rozwiązywania układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie $0 < \tau < 2/\beta$.

Zauważmy, że macierz $I - \tau A$ ma wektory własne A, ale z wartościami własnymi $1 - \tau\lambda_i$. Zatem są one niewiększe niż $1 - \tau\alpha$ i niemniejsze niż $1 - \tau\beta$. Mamy $1 - \tau\alpha < 1$ z dodatniości τ i α. Mamy $\tau\beta < 2$, więc $1 - \tau\beta > -1$. Zatem wartości własne $I - \tau A$ są co do modułu mniejsze niż 1 i iteracja jest zbieżna.

M14.7

Załóżmy, że A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną wierszowo. Metoda Jacobiego rozpatruje podział A na jej przekątną i macierze pod i nad przekątną: $A = L + D + U$. Następnie przeprowadzamy iterację o wzorze

$$\mathbf{x}^{(x+1)} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}\mathbf{b},$$

tzn. macierz przekształcenia tej metody to $B_J = -D^{-1}(L + U)$.

Macierz D się składa z odwróconych wyrazów na przekątnej macierzy A. Mnożąc ją z prawej przez $(L + U)$ otrzymujemy macierz $(L + U)$, w której każdy wiersz został podzielony przez odpowienią wartość na przekątnej A. Skoro $(L + U)$ ma zera na przekątnej i $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, to $\|B_J\|_\infty = \|L + U\|_\infty < 1$.

Do zbieżności metody wystarczy mieć jakąkolwiek normę macierzy iteracji mniejszą niż 1, zatem w naszym przypadku metoda jest zbieżna.

M14.8

Załóżmy, że A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną wierszowo. Metoda Gaussa-Seidela rozpatruje podział A na macierz dolnotrójkątną i ściśle górnotrójkątną tzn. $A = L_* + U$. Następnie przeprowadzamy iterację o wzorze

$$\mathbf{x}^{(x+1)} = -L_*^{-1}U\mathbf{x}^{(n)} - L_*^{-1}\mathbf{b}.$$

Rozpatrzmy wartości własne macierzy B_S:

$$
\begin{aligned}
-L_*^{-1}U\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\
-U\mathbf{x} &= \lambda L_*\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Załóżmy, że $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, $|x_i| = 1$. Skupiając się na i-tym wierszu otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j &= \lambda\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j \\
\lambda a_{ii}x_i &= -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j - \lambda\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \\
|\lambda|\,|a_{ii}| &\leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| - |\lambda|\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \\
|\lambda| &\leqslant \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}.
\end{aligned}
$$

Z dominacji przekątniowej mamy

$$
\begin{aligned}
|a_{ii}| &> \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\
|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| &> \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|,
\end{aligned}
$$

a zatem $|\lambda| < 1$. Wszystkie wartości własne są co do modułu mniejsze niż 1, a zatem metoda jest zbieżna.

M14.9

Załóżmy, że A jest macierzą ściśle dominującą kolumnowo. Metoda Jacobiego rozpatruje podział A na jej przekątną i macierze pod i nad przekątną: $A = L + D + U$. Następnie przeprowadzamy iterację o wzorze

$$
\mathbf{x}^{(x+1)} = -D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}\mathbf{b},
$$

tzn. macierz przekształcenia tej metody to $B_J = -D^{-1}(L+U)$.

Rozpatrzmy normę $\|C\|_N = \|DCD^{-1}\|_1$. Wtedy $\|B_J\|_N = \|(L+U)D^{-1}\|_1$. Mnożenie z prawej przez macierz diagonalną mnoży kolumny macierzy po lewej przez odpowiednie wyrazy na przekątnej. To oznacza, że z dominacji przekątniowej dla $C = (L+U)D^{-1}$ mamy $\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1$. Norma $\|\cdot\|_1$ to maksimum takich sum modułów dla kolumn, zatem $\|B_J\|_N < 1$ i iteracja jest zbieżna.