

7/7

Próby w poszukiwaniu elementu zakończonym sukcesem to dokładnie próby wykonane podczas wstawiania tego elementu. Z równym prawdopodobieństwem będziemy wyszukiwać dowolny element (w kolejności wstawiania), więc aby obliczyć oczekiwany koszt wyszukiwania, obliczymy oczekiwany koszt wszystkich wstawień i podzielimy przez n .

Prawdopodobieństwo, że przy wstawianiu i -tego (indeksując od 0) elementu będziemy potrzebowali co najmniej j prób wynosi

$$\prod_{k=0}^{j-1} \frac{i-k}{m-k} \leq \left(\frac{i}{m}\right)^j.$$

Zatem oczekiwaną liczbę prób przy jego wstawianiu możemy oszacować przez

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{i}{m}\right)^j \leq \frac{1}{1 - \frac{i}{m}}.$$

Oczekiwany koszt dowolnego wstawienia to w takim razie

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{1 - \frac{i}{m}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{m}{m-i} = \frac{m}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{m-i} = \frac{m}{n} \sum_{i=m-n+1}^m \frac{1}{i} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{m-n}^m \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m}{m-n} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$