Lista 11

Wiktor Kuchta (nr indeksu 315599)

20 czerwca 2023

1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	+	+

1.

$$\text{(Form)}\,\dfrac{\text{(Form)}\,\dfrac{\text{(Sort)}\,\dfrac{}{\emptyset \vdash * : \Box} \qquad \text{(Sort)}\,\dfrac{}{\emptyset \vdash * : \Box}}{\emptyset \vdash * \to * : \Box} \qquad \text{(Sort)}\,\dfrac{}{\emptyset \vdash * : \Box}}{\emptyset \vdash (* \to *) \to * : \Box}$$

1. $* : \Box$	Sort
2. $* \to * : \Box$	Form, 1, 1
3. $(* \to *) \to * : \Box$	Form, 2, 1

2.

1. $\alpha : *$	
2. $x : \alpha$	
3. $y : \alpha$	
4. $x : \alpha$	Weak, 2
5. $\lambda y : \alpha .\, x : \alpha \to \alpha$	Abst, 3–4
6. $\lambda y : \alpha .\, x : (\lambda \beta : * .\, \beta \to \beta)\, \alpha$	Conv, 5

3.

1. $\forall x \in S.\, P(x) \to Q(x)$	
2. $\forall y \in S.\, P(y)$	
3. $\boxed{z}\; z \in S$	
4. $P(z)$	$\forall$E, 2
5. $P(z) \to Q(z)$	$\forall$E, 1
6. $Q(z)$	$\to$E, 5, 4
7. $\forall z \in S.\, Q(z)$	$\forall$I, 3–6
8. $(\forall y \in S.\, P(y)) \to \forall z \in S.\, Q(z)$	$\to$I, 2–7
9. $(\forall x \in S.\, P(x) \to Q(x)) \to (\forall y \in S.\, P(y)) \to \forall z \in S.\, Q(z)$	$\to$I, 1–8

1. $S : *$	
2. $P : S \to *$	
3. $Q : S \to *$	
4. $t : \Pi x : S.\, P(x) \to Q(x)$	
5. $a : \Pi y : S.\, P(y)$	
6. $z : S$	
7. $az : P(z)$	Appl, 5, 6
8. $tz : P(z) \to Q(z)$	Appl, 4, 6
9. $tz(az) : Q(z)$	Appl, 8, 7
10. $\lambda z.\, tz(az) : \Pi z : S.\, Q(z)$	Abst, 6–9
11. $\lambda az.tz(az) : (\Pi y : S.\, P(y)) \to \Pi z : S.\, Q(z)$	Abst, 5–10
12. $\lambda taz.tz(az)$ $: (\Pi x : S.\, P(x) \to Q(x)) \to (\Pi y : S.\, P(y)) \to \Pi z : S.\, Q(z)$	Abst, 4–11

4.

$$(\text{Form})\,\dfrac{(\text{Sort})\,\dfrac{}{\emptyset \vdash * : \Box} \qquad (\text{Var})\,\dfrac{(\text{Sort})\,\dfrac{}{\emptyset \vdash * : \Box}}{\alpha : * \vdash \alpha : *}}{\emptyset \vdash (\Pi \alpha : *.\, \alpha) : *}$$

1. $* : \Box$	Sort
2. $\alpha : *$	
3. $\alpha : *$	Var, 1
4. $(\Pi \alpha : *.\, \alpha) : *$	Form, 1, 2–3

5.

(a)

Przypomnienie:

$$(\text{Form})\ \frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s_2}$$

$$A \to B = \Pi\_ : A.\, B$$

Aby móc uformować $A \to B$ bądź $\Pi x : A.\, B$ potrzebujemy reguły (Form) dla pary (s_1, s_2), gdzie s_1 jest rodzajem A, a s_2 rodzajem B.

Aby uformować $\bot = \Pi\alpha : *.\, \alpha$ potrzebujemy reguły dla $(\square, *)$.

$$M = \lambda S : *.\lambda P : \underline{S \to *}.\lambda x : S.\underline{Px \to \bot}.$$

Aby uformować pierwszy i drugi podkreślony typ, potrzebujemy odpowiednio $(*, \square)$ i $(*, *)$. Innymi słowy, w wyrażeniu korzystamy z polimorfizmu $(\bot)$, typów zależnych (P) i przestrzeni funkcyjnej $(Px \to \bot)$, co wymaga $\lambda P2$.

M jest jednak funkcją zwracającą typ (konstruktorem typu), zatem otypowanie M wymaga całego λC.

(b)

1. $S : *$
   2. $P : S \to *$
      3. $x : S$
      4. $Px : *$ — Appl, 2, 3
      5. $\bot : *$ — Form
      6. $Px \to \bot : *$ — Form, 4, 5
   7. $\lambda x : S.\, Px \to \bot : S \to *$ — Abst, 3–6
8. $\lambda P : S \to *.\, \lambda x : S.\, Px \to \bot : (S \to *) \to S \to *$ — Abst, 2–7

9. $\lambda S : *.\, \lambda P : S \to *.\, \lambda x : S.\, Px \to \bot$
   $: \Pi S : *.\, (S \to *) \to S \to *$ — Abst, 1–8

(c)

$S \to *$ interpretuje się zwykle jako predykaty na S czy typ własności S (w językach terminalnych $S \to$ `Bool` może wyrazić tylko własności rozstrzygalne). Jeśli $P : S \to *$, to w teorii konstruktywnej Ps możemy rozumieć jako typ dowodów własności P dla a. Jeśli dowody nas nie obchodzą, to P rozumiemy jako zbiór elementów z S.

Zatem term M zamienia predykat (na dowolnym S) na jego negację. Teoriomnogościowo jest to dopełnienie zbioru (w uniwersum S).

6.

(a)

1. $S : *$
2. $P : S \to *$
    3. $c : \Pi\alpha : *.\, (\Pi x : S.\, Px \to \alpha) \to \alpha$
        4. $n : \Pi x : S.\, Px \to \bot$
        5. $\bot : *$ — Form
        6. $c\,\bot : (\Pi x : S.\, Px \to \bot) \to \bot$ — Appl, 3, 5
        7. $c\,\bot\,n : \bot$ — Appl
    8. $\lambda n.\, c\,\bot\,n : (\Pi x : S.\, Px \to \bot) \to \bot$ — Abst, 4–7
9. $\lambda cn.\, c\,\bot\,n$
   $: (\Pi\alpha : *.\, (\Pi x : S.\, Px \to \alpha) \to \alpha) \to (\Pi x : S.\, Px \to \bot) \to \bot$ — Abst, 3–8

(b)

Korzystamy z typów zależnych i polimorfizmu, ale nie z konstruktorów typów, więc wystarczy $\lambda P2$.

(c)

Term N to jedna strona prawa De Morgana: jeśli istnieje element S spełniający P, to nieprawdą jest, że dla każdego elementu S zachodzi $\neg P$.