Wiktor Kuchta

7/4d

Niech f to endomorfizm $\mathbb{Q}$ jako grupy abelowej. Zauważmy, że dla $p/q \in \mathbb{Q}$ mamy

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1),$$

więc

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

Każdy taki homomorfizm jest wyznaczony jednoznacznie przez wartość dla 1, więc mamy bijekcję $f \mapsto f(1)$ między $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$ a $\mathbb{Q}$. Ponadto

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) \cdot g(1),$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1),$$

zatem jest to izomorfizm. W szczególności $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$ jest ciałem.

Grupa abelowa $\mathbb{Q}$ nie jest cykliczna, więc nie jest $\mathbb{Z}$-modułem prostym.