

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M9

10 grudnia 2019 r.

- M9.1.** 1 punkt Niech $\{P_k(x)\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[-a, a]$, z wagą $p(x)$ o własności $p(-x) = p(x)$. Wykazać, że wówczas

$$P_{2m}(x) = S_m(x^2), \quad P_{2m+1}(x) = x R_m(x^2) \quad (m = 0, 1, \dots),$$

gdzie S_m, R_m są wielomianami stopnia m .

- M9.2.** 1 punkt Wykazać, że wielomiany $\{S_m(t)\}$ z poprzedniego zadania są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $v(t) = p(\sqrt{t})/\sqrt{t}$, a wielomiany $\{R_m(t)\}$ są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $w(t) = \sqrt{t} p(\sqrt{t})$.

- M9.3.** 1 punkt Wykazać, że wielomian $\tilde{T}_n := 2^{1-n} T_n$ ma najmniejszą normę w przedziale $[-1, 1]$ spośród wszystkich wielomianów stopnia $\leq n$, o współczynniku wiodącym równym 1.

- M9.4.** 2 punkty Niech dla $f \in C[a, b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ ($k = 1, 2, \dots$). Wykazać, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

- M9.5.** 1 punkt Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259

- M9.6.** 2 punkty Wyznaczyć z dokładnością do 6 miejsc po przecinku współczynniki wielomianu $w_2(x) = ax^2 + bx + c$, będącego drugim wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji $\sin(x)$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

Wskazówka, z której nie można korzystać w rozwiązaniu: $a + b + c \approx 0.465\dots$

- M9.7.** 1 punkt, Włącz komputer! Niech $w_5^* \in \Pi_5$ będzie piątym wielomianem optymalnym (w sensie normy jednostajnej) dla funkcji $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ na zbiorze $[-1, 1]$. Wykazać, że zachodzą nierówności:

$$0.002 < \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - w_5^*(x)| < 0.009.$$

- M9.8.** 2 punkty, Włącz komputer! Rozważyć aproksymację funkcji Rungego $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ w przedziale $[-1, 1]$ za pomocą wielomianu $w \in \Pi_9$. Dla każdego z poniższych wielomianów podać wartość błędu $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - w(x)|$ (wartość tę można przybliżyć obliczając $|f(x_k) - w(x_k)|$ dla $x_k = -1 + 2k/N$, gdzie N jest bardzo duże, np. $N = 1000$). Rozważyć następujące wielomiany:

- wielomian interpolujący funkcję f w węzłach równoodległych,
- wielomian interpolujący funkcję f w zerach wielomianu T_{10} ,
- wielomian interpolujący funkcję f w punktach ekstremalnych wielomianu T_9 ,
- 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x) \equiv 1$,
- 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Czebyszewa.

30 listopada 2020

Rafał Nowak