Skidbacken

Emil Wiklund[*]

Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå, Sverige

21 september 2020

Sammanfattning

Sammanfattningsvis handlar denna raport om vilken derivatra olika punkter på en graf erhåller samt lösandet av punkter. Rapporten ger lösningar på tre problem.

Det första problemen handlar om att beräkna derivatan i en punkt med ett givet x-värde. Lösningen visar på ett korrekt sätt att lösa denna typ av uppgift som också ger oss ett exakt svar på vad för derivata den specifika punkten erhåller.

Det andra problemet handlar om att beräkna den punkt där derivatan är som störst. Detta problem löser vi med hjälp av andraderivata tillsammans med användning av kedjeregeln och kunskap angående derivata samt andraderivata.

Det tredje problemet handlar om beräkning av en okänd variabel. Den okända variabeln blir känd genom användning av ett givet värde ur en punkt samt användningen av ett utryck från en föregående deluppgift.

1 Introduktion

Denna rapport går ut på att visa lösningar ur uppgiften *skidbacken*. I uppgiften finns det tre stycken deluppgifter vilket rapporten går igenom. Dessa handlar om begreppen *derivata* och *lutning*. Det uppgiften går ut på är hur man räknar ut *derivatan* vid ett vist tillfälle. Deluppgift ett går igenom backens *lutning* i en viss punkt. Deluppgift två går igenom lösandet av backens brantaste punkt den tredje och sista deluppgiften går igenom lösandet av variabeln a.

[*]email: `emiwik-9@student.ltu.se`

1.1 Derivata och lutning

Dokumentet nämner begreppet *derivata* och *lutning* och då är det viktigt att den som läser detta kan förstå innebörden av dessa. Dessa är kopplade till varandra och när *derivata* nämns menar man på *lutningen. Derivatan* eller *lutningen* tyder på förändringshastighet i en viss tidpunkt.

Om vi exempelvis har två olika punkter. Punkten $(x, f(x))$ och punkten $(x+h, f(x+h))$ kan man dra en linje mellan dessa, en *sekant* mellan punkterna. Med *sekant* menar man på medellutningen till två punkter. I det här fallet punkterna $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$. Skulle man låta h gå mot 0 så kommer sekantens *lutning* att tillslut övergå till en tangent. Då kan vi teckna ett utryck för sekantens *lutning*:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Om vi låter h gå mot 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

får vi tangentens *lutning* genom att räkna ut gränsvärdet i punkten $(x, f(x))$.

2 Backens lutning

Uppgiftens lösande sker på följande sätt:

> Bestäm backens lutning för $x = 0.8$.

Lösning: Derivera $y = 0.5e^{-x^2}$ för att få ut funktionen för lutningen, funktionen för derivatan ser ut: $y' = xe^{-x^2}$ Därefter sätter vi in värdet $x = 0.8$ i funktionen för lutningen

$$y'(0.8) = 0.8e^{-0.8^2}$$

Insättningen av 0.8 ger lutningen värdet $\approx (-0.42)$.Vilket är svaret på deluppgiften.

3 Backens brantaste punkt

Uppgiftens lösande sker på följande sätt:

> Ställ upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

Lösning: Det uppgiften frågar efter är x-värdet i den punkten där backen är som brantast. Vi vet att backens *lutning* är som störst där y' är störst. Det vill säga där y'' är lika med 0.

Vi beräknar och skriver om y':

$$\begin{aligned}
y &= 0.5 \cdot e^{-ax^2} \\
y' &= -ax \cdot e^{-ax^2} \\
y' &= -\frac{ax}{e^{ax^2}}
\end{aligned}$$

Här väjer vi att använda *kedjeregeln* då vi utifrån y' kan få ut fyra stycken funktioner. Dessa kallar vi för$f(x) = -ax$, $f'(x) = -a$, $g(x) = e^{-x^2}$ och $g'(x) = -2ax \cdot e^{-x^2}$. Genom *kedjeregeln* kan vi få ut *andraderivatan*. Vi fortsätter genom att sätta in de kända värdena och ställer upp en ekvation enligt *kedjeregeln*:

$$y'' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = -a \cdot e^{ax^2} + ax \cdot 2ax \cdot e^{ax^2}$$

Därefter eftersom *lutningen* var är störst när *andraderivatan* är lika med 0 ger vi y'' värdet 0, efter detta förenklar vi ekvationen:

$$\begin{aligned}
&- a \cdot e^{ax^2} + ax \cdot 2ax \cdot e^{ax^2} = 0 \\
&- a \cdot e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2} = 0 \\
&a \cdot e^{-ax^2}(2ax^2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

Utifrån detta använder vi oss utav nollproduktsmetoden som ger följande $ae^{ax^2} > 0$. Om vi utgår ifrån detta vilkor kan vi få ut ett värde för x.

$$\begin{aligned}
2ax^2 - 1 &= 0 \\
2ax^2 &= 1 \\
x^2 &= \frac{1}{2a} \\
x &= \sqrt{\frac{1}{2a}}
\end{aligned}$$

Detta ger oss svaret till uppgiften. $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ är det x-värde i den punkten där *derivatan* är som störst. Det vill säga där backen är som brantast.

4 Lösning av variabel

Uppgiftens lösande sker på följande sätt:

Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1.0$.

Lösning: Uppgiften går att lösa genom användandandet av x-värdet från föregående deluppgift.

$$x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

Det uppgiften frågar efter är det värde som a kommer att ha då $x = 1.0$ Genom att sätta in x-värdet i utrycket ovan ger det oss möjligheten att ställa upp en ekvation som går att lösa på följande sätt:

$$
\begin{aligned}
&1 = \sqrt{\frac{1}{2a}} \\
&1^2 = \frac{1}{2a} \\
&2a = 1 \\
&a = \frac{1}{2} = 0.5.
\end{aligned}
$$

Genomförd ekvation ger oss a-värdet 0.5 vilket är svaret på den sista deluppgiften.

5 Diskussion

I denna rapport har vi löst tre stycken deluppgifter relaterade till derivata genom användning av *kedjeregeln* samt andraderivata.

Att lösa denna typen av problem är enkelt i denna uppgift. Däremot hade uppgiften varit större, exempelvis bestått av svårare utryck eller ett värde i en punkt med fler decimaler kunde uppgiftens svårighetsgrad ökat betydligt. Men utifrån denna uppgift kan man skapa sig en förstelse kring hur man löser dessa typer av problem, vilket gör det enklare genom en stärkt försteålse lösa svårare problem.