Om att chansa på kryssfrågeprov

Håkan Jonsson*
Luleå tekniska universitet
97187 Luleå

25 augusti 2015

Sammanfattning

I denna rapport redovisar vi hur vi har löst två uppgifter som handlar om hur många poäng man kan förvänta sig att få om man chansar sig genom ett prov med kryssfrågor.

1 Introduktion

I denna rapport, som är en del av kursmaterialet i kursen D0015E om datateknik och ingenjörsvetenskap vid Luleå tekniska universitet, redovisar vi hur vi har löst följande två uppgifter som berör chansningar på kryssfrågeprov:

1. Vad är det förväntade antalet poäng man får på en enskild fråga om man chansar utan att ens titta på svarsalternativen?

2. Hur många poäng kan man totalt förvänta sig att få på ett prov om man chansar på alla frågor?

Uppgifterna behandlas i var sitt avsnitt nedan.

*Email: hj@ltu.se

2 Definitioner och inledande beteckningar

För att resonera om kryssfrågor och prov inför vi några definitioner. En *kryssfråga* är en fråga till vilken det finns ett mängd *svarsalternativ*, eller bara *svar*, varav minst ett är *korrekt*. Svar som inte är korrekta kallas *felaktiga*. Ett *prov* är en mängd kryssfrågor som alla har $k \geq 1$ svarsalternativ varav $r \leq k$ är korrekta.

Exempel 1. *Om två svar av fem är korrekta på en kryssfråga så är* $r = 2$ *och* $k = 5$.

På varje fråga får högst ett svarsalternativ väljas. Ett korrekt svar ger 1 poäng medan felaktiga svar och obesvarade frågor ger 0 poäng. Poängen på alla frågorna summeras ihop till provets *totalpoäng*. Vid chansning, dvs val av svar på måfå, antar vi att sannolikheten för att välja ett visst svar är likformigt fördelad. För att resonera omkring vad chansning ger så använder vi oss av grundläggande sannolikhetslära [1].

3 Antal poäng på en enskild fråga

Första uppgiften handlar om vad den förväntade poängen på en kryssfråga är om man bara svarar på måfå.

3.1 Sannolikheter

Låt X_i vara en stokastisk variabel (även kallad *slumpvariabel*) vars värde är poängen på fråga i. Utfallsrummet Ω som involverar X_i innehåller då de två oberoende händelserna $\{X_i \text{ är } 0,\ X_i \text{ är } 1\}$ som motsvarar 0 respektive 1 poäng på frågan.

För att få poäng ska man välja en av de r korrekta svaren bland de totalt k svarsalternativ som finns. Enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen, där sannolikheten är antalet gynnsamma händelser delat med totala antalet händelser, gäller då att

$$P(X_i = 1) = \frac{r}{k}, \tag{1}$$

där P är en sannolikhetsfunktion. För komplementhändelsen $X_i = 0$, dvs att svaret är felaktigt, gäller då att

$$\begin{aligned} P(X_i = 0) &= 1 - P(X_i = 1) \\ &= 1 - \frac{r}{k} \\ &= \frac{k-r}{k}. \end{aligned} \tag{2}$$

Med hjälp av sannolikheterna kan vi beräkna det förväntade väntevärdet av poängen på fråga i.

3.2 Väntevärde

För att beteckna en stokastisk variabels väntevärde använder man *väntevärdesoperatorn* E. För en godtycklig stokastisk variabel A är väntevärdet definierat som

$$E[A] = \sum_x x P(A = x),$$

där $\sum_x$ betecknar att vi summerar över alla värden som slumpvariabeln kan anta. Denna definition ger oss, tillsammans med ekvationerna 1 och 2, att det förväntade antalet poäng är

$$\begin{aligned} E[X_i] &= 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) \\ &= P(X_i = 1) \\ &= \boxed{\frac{r}{k}}, \end{aligned} \tag{3}$$

vilket är svaret på uppgift 1.

Exempel 2. *Om två svar av fem är korrekta, och således* $r = 2$ *och* $k = 5$*, är väntevärdet* $E[X_i] = 0.4$.

4 Förväntad totalpoäng

När vi nu vet vilket poäng en enskild fråga förväntas komma att ge kan vi lösa uppgift 2 och beräkna den förväntade totalpoängen på ett prov. För detta syfte inför vi ännu en slumpvariabel

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

där n är antalet frågor på provet. Eftersom operatorn E per definition är *linjär*, dvs för alla X och Y är $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, så är väntevärdet

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E[X_i]
\end{aligned}
$$

vilket, enligt ekvation 3, betyder att

$$E[Y] = \boxed{\frac{rn}{k}}$$

är svaret på uppgift 2.

Exempel 3. *Om vi tänker oss ett konkret fall med $n = 30$ frågor som var och en har $k = 5$ svarsalternativ, varav exakt $r = 2$ är korrekta, blir det förväntade antalet poäng*

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \frac{2 \cdot 30}{5} \\
&= 12
\end{aligned}
$$

om man chansar på alla frågorna.

Referenser

[1] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics - An Applied Introduction*. Addison-Wesley, 2003.