Wiktor Satora 411502 gr.2

Język Python

System Windows 11 x64, Środowisko PyCharm

MOWNiT – Sprawozdanie 3

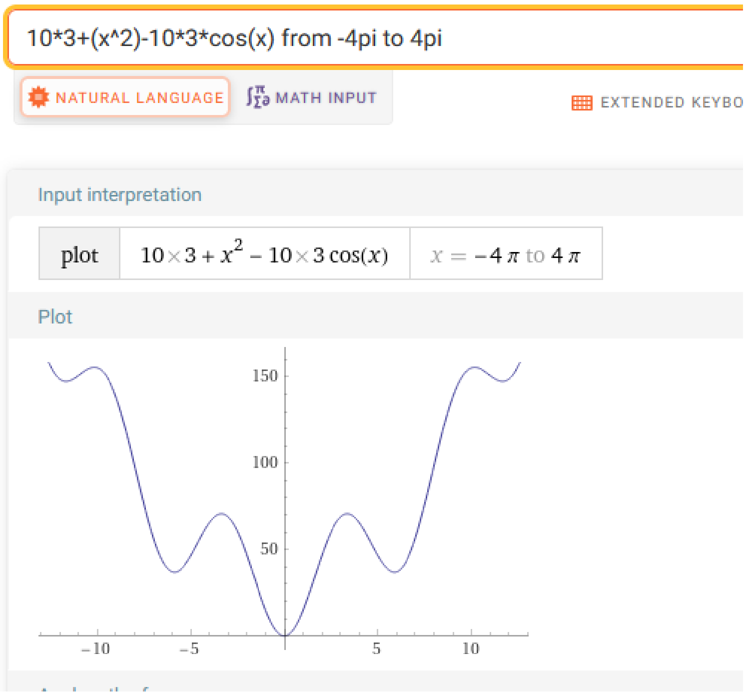
Interpolacja funkcjami sklejanymi 3-go oraz 2-go stopnia

Polecenie:

Dla funkcji $f(x)$ zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych.
Podobnie jak poprzednio określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby **przedziałów** i dla różnych **warunków brzegowych**.
Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.
Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

Zadana funkcja:

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx)$$ dla: k=1, m=3, [-4pi, 4pi]



Wykonanie:

Użyto próbkowania przedziału dla p=1000 punktów.

Błąd maksymalny: max(abs(f(x)-W(x))), gdzie f-funkcja właściwa, W-funkcja interpolująca

Błąd średniokwadratowy: $\frac{1}{p}\sqrt{\sum_1^p (f(x) - W(x))^2}$, gdzie f-funkcja właściwa, W-funkcja interpolująca, p-próbkowanie

Interpolacja funkcjami 3 stopnia

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia jest najczęściej używana

Wyprowadzanie wzoru

Warunki początkowe:

- s_i on $[x_i, x_{i+1}] \rightarrow$ cubic polynomial:
  $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
- $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
- $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
- $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$
- $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$

Gdzie s_i to wzór kolejnych funkcji interpolujących na kolejnych przedziałach. X_i – kolejne węzły dzielące funkcję na przedziały. f – oryginalna funkcja

Ponieważ $s_i(x)$ - sześcienna,
to $s_i''(x)$ -liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$
wprowadzam $h_i = x_{i+1} - x_i$, wtedy (z (*)):

$$s_i''(x) = s_i''(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + s_i''(x_{i+1})\frac{x-x_i}{h_i}$$

Jest to prosty wzór na interpolację poprzez funkcję liniową

całkując dwukrotnie otrzymuję:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x-x_i)^3 + C(x-x_i) + D(x_{i+1}-x),$$

gdzie C, D - stałe całkowania.
korzystając z warunków interpolacji :
$s_i(x_i) = y_i$ oraz $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ mogę wyliczyć C i D

Po wyliczeniu C i D z warunków interpolacji mamy:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{s_i''(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i''(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x)$$

W powyższym wzorze nie znamy $s_i''(x)$. Aby je wyliczyć korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej. Różniczkujemy więc $s_i(x)$

$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{3}s_i''(x_i) - \frac{h_i}{6}s_i''(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole: $\sigma_i = \frac{1}{6}s''(x_i)$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$

$$s_i'(x_i) = -2\sigma_i h_i - \sigma_{i+1}h_i + \Delta_i$$
$$s_i'(x_i) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Natomiast od drugiej strony:

$$s_{i-1}'(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Z warunku ciągłości: $s_{i-1}'(x_i) = s_i'(x_i)$

Po przekształceniu wzór prezentuje się tak:

$$\boxed{\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)}$$

otrzymujemy układ (n-2) równań liniowych (dla punktów pośrednich):

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n-1$$

ale ponieważ mamy n niewiadomych σ_i konieczne jest określanie dwóch dodatkowych warunków.

Warunek brzegowy 1:

Natural spline – drugie pochodne funkcji interpolującej na krańcach są równe 0

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0$$

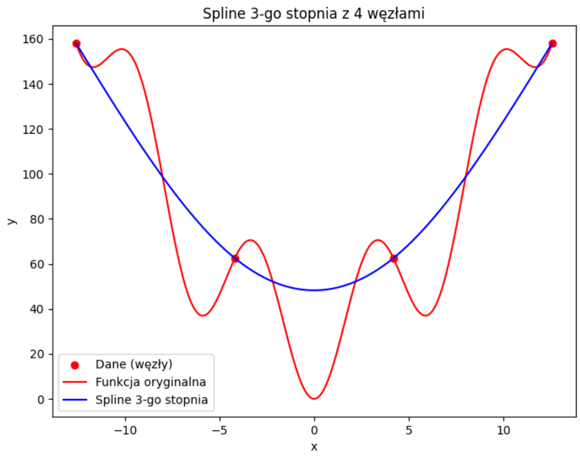
Korzystając z podstawienia $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i''(x_i)$ i uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S_1''(x_1) = 0 \iff \sigma_1 = 0$$
$$S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \iff \sigma_n = 0$$

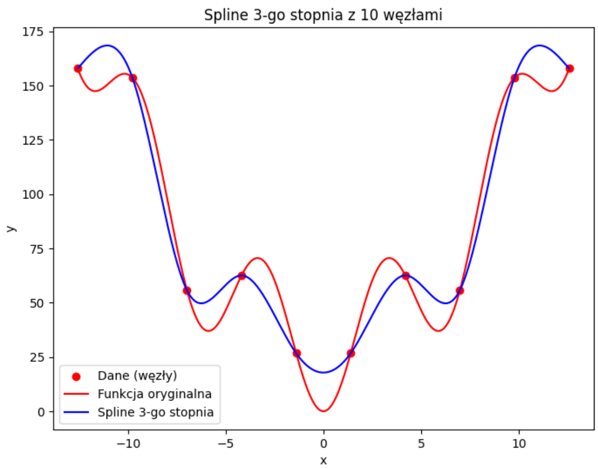
Dzięki temu otrzymujemy 2 wartości niewiadomych ($\sigma_1 = \sigma_n = 0$), dlatego możemy rozwiązać układ n-2 równań po dodaniu właśnie tych dwóch. Mamy wtedy układ n równań o postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

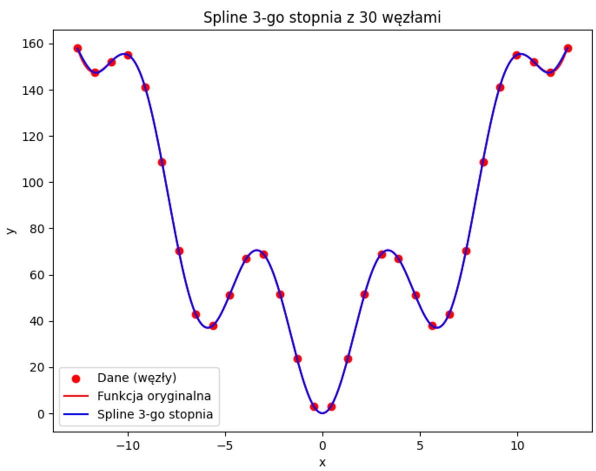
Przykłady:



Wykres 1



Wykres 2



Wykres 3

Wykresy 1-3 przedstawiają kolejne wyniki spline'ów 3-go stopnia w wersji (natural spline). Widać, że wraz ze wzrostem ilości przedziałów wzrasta dokładność. Przy n=30 wizualnie jest prawie identyczna. Nie występuje efekt Rungego

Warunek brzegowy 2:

Warunek brzegowy z wykładu (cubic spline)
Przez pierwsze jak i ostatnie 4 punkty przechodzi jedna sześcienna funkcja:

$C_1(x)$ - funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty
$C_n(x)$ - funkcja sześcienna funkcja sześcienna przez ostatnie 4 punkty
Wynika z tego, że:

$$S'''(x_1) = C_1''' \text{ oraz } S'''(x_n) = C_n'''$$

Stałe C_1''' i C_n''' mogą być określone bez znajomości $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},\ \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i},\ \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$$

Różniczkując wzór na $S''(x)$ w przedziale $[x_i,\ x_{i+1}]$ otrzymujemy:

$$S'''(x_1) = C_1'''(x_1) = \frac{6}{h_1}(\sigma_2 - \sigma_1) = 6\Delta_1^{(3)}$$

$$S'''(x_n) = C_n'''(x_n) = \frac{6}{h_{n-1}}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}^{(3)}$$

po przekształceniu otrzymujemy 2 brakujące równania:

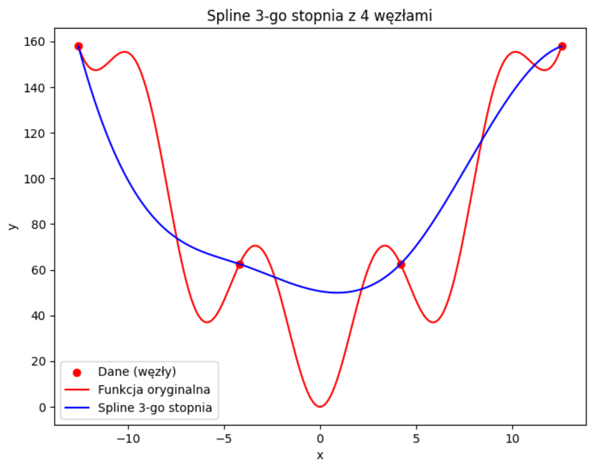
$$-h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)}$$

$$h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)}$$

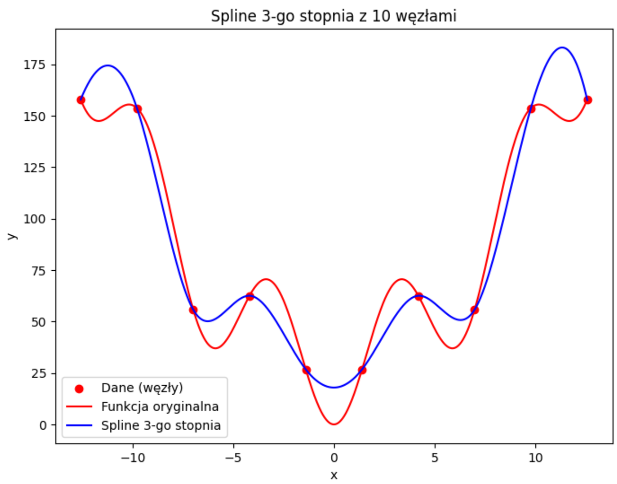
Ostatecznie nasz układ po uwzględnieniu warunku brzegowego możemy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

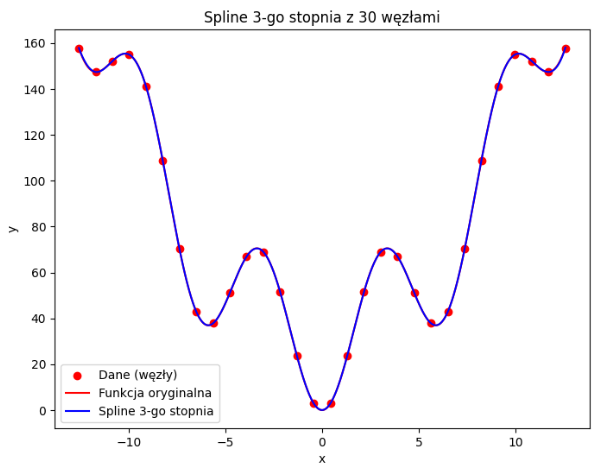
Przykłady:



Wykres 4



Wykres 5



Wykres 6

Wykresy 4-6 przedstawiają kolejne wyniki spline'ów 3-go stopnia w wersji cubic spline. Widać, że wraz ze wzrostem ilości przedziałów wzrasta dokładność. Przy n=30 wizualnie jest prawie identyczna. Nie występuje efekt Rungego. Porównując te wykresy z odpowiadającymi wykresami 1-3 możemy zaobserwować, że warunki brzegowe wpływają na ułożenie funkcji (trochę inaczej się układa)

Interpolacja funkcjami 2 stopnia

Wyprowadzanie wzoru

Do interpolacji funkcją sklejaną 2-go stopnia został użyty wzór:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \; dla \; i \in [0, \ldots, n - 1]$$

gdzie każdy segment $S_i(x)$ jest interpolującym wielomianem drugiego rzędu w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

Aby była to funkcja sklejana 2-go stopnia, musi ona spełniać następujące warunki:

1) $S_i(x_i) = y_i \; dla \; i \in [0, 1, \ldots, n - 1]$
2) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \; dla \; i \in [0, 1, \ldots, n - 2]$
3) $\frac{d}{dx}S_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{d}{dx}S_i(x_{i+1}) \; dla \; i \in [0, 1, \ldots, n - 2]$

Korzystając z warunku 1) otrzymujemy:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 = a_i$$

$$y_i = a_i$$

Następnie używając warunku 3) otrzymujemy:

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$=> c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}$$

Teraz korzystając z warunków 1) oraz 2) otrzymujemy:

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$=> b_i + b_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Z przesunięciem indeksów i -> (i - 1) otrzymujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i$$

$$\gamma_i = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Jedynymi niewiadomymi w równaniu są teraz wartości współczynników b_i, ponieważ współczynniki a_i obliczamy znając wartości b_i a c_i są nam znane. Aby rozwiązać równanie zapisujemy powyższe równanie w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 \\ \vdots \\ 2\gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

Co można zapisać w innej postaci jako:

$$b_1 + b_2 = 2\gamma_2$$
$$b_2 + b_3 = 2\gamma_3$$
$$\dots$$
$$b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1}$$
$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n$$

Układ ten ma n niewiadomych, o n-1 równaniach. Brakujące równanie wstawimy korzystając z warunku brzegowego.

Warunek brzegowy 1:

Natural spline – pochodne funkcji interpolującej na krańcach są równe 0

$$S'_1(x_1) = 0 \text{ lub } S'_{n-1}(x_n) = 0$$

Korzystając z różniczki obliczonej względem x:

$$S'_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i$$

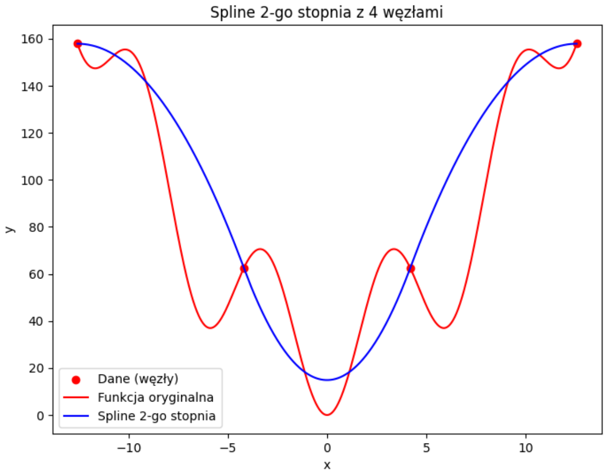
Otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$
$$b_1 = 0$$

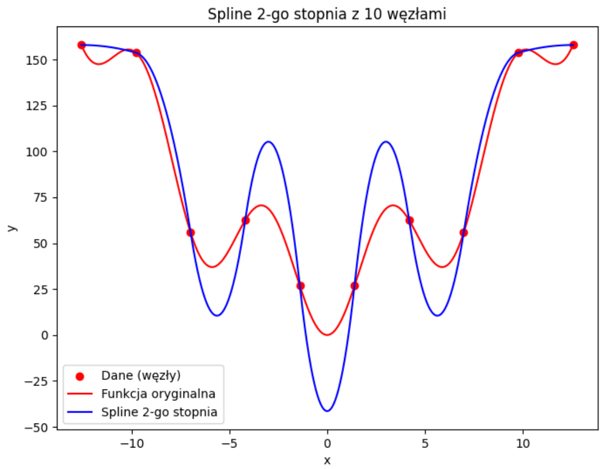
Zauważmy teraz, że dzięki tak policzonemu warunkowi brzegowemu, podstawiając go do naszego wcześniej wyznaczonego równania otrzymamy:

$$b_1 = 0$$
$$b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \;->\; b_2 = 2\gamma_2$$
$$b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \;->\; b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2)$$
$$\dots$$
$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \;->\; b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \dots)$$

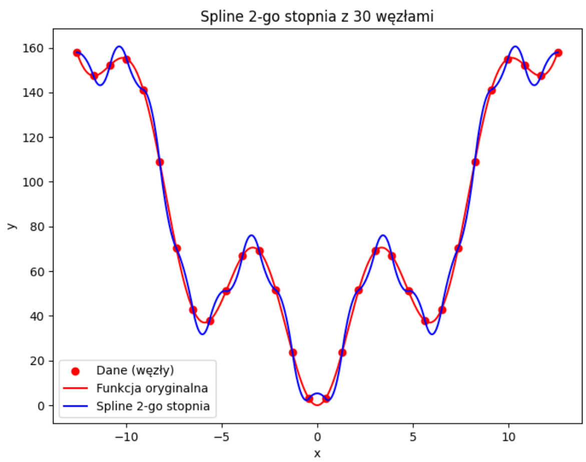
Przykłady:



Wykres 7



Wykres 8



Wykres 9

Wykresy 7-9 przedstawiają kolejne wyniki spline'ów 2-go stopnia w wersji natural spline. Widać, że wraz ze wzrostem ilości przedziałów wzrasta dokładność. Tutaj przy n=30 dokładność przybliżenia nadal pozostawia wiele do życzenia (nie tak jak było w spline'ach 3-go stopnia). Możemy zaobserwować, że te wykresy są bardziej „poszarpane", ponieważ są zbudowane z funkcji 2-go rzędu. Nie występuje efekt Rungego.

Warunek brzegowy 2:

Clamped spline – pierwsza pochodna funkcji interpolującej jest przybliżona przy pomocy ilorazów różnicowych:

$$S'_1(x_1) = f'_1 \text{ lub } S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}$$

Aby wyznaczyć przybliżoną wartość pochodnej, najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego:

$$S'_1(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}$$

Możemy teraz przekształcić to równanie do postaci:

$$2a_1(x_2 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} <=> b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}$$

Otrzymujemy teraz układ równań:

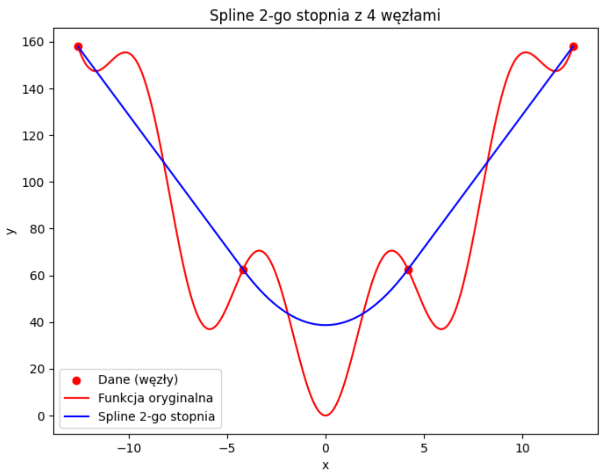
$$b_1 = \gamma_2$$

$$b_1 + b_2 = 2\gamma_2 -> b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2$$

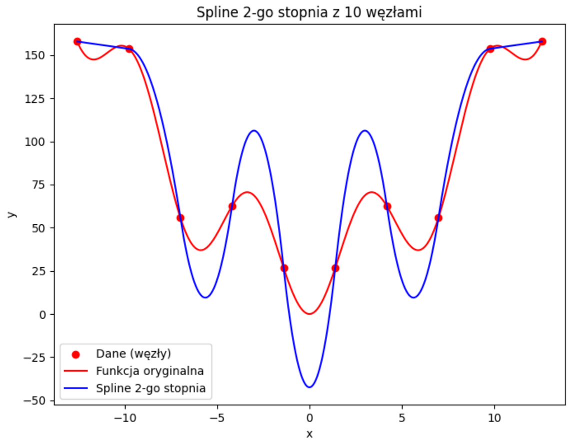
$$b_2 + b_3 = 2\gamma_3 -> b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2\gamma_3 - \gamma_2$$

$$\ldots$$

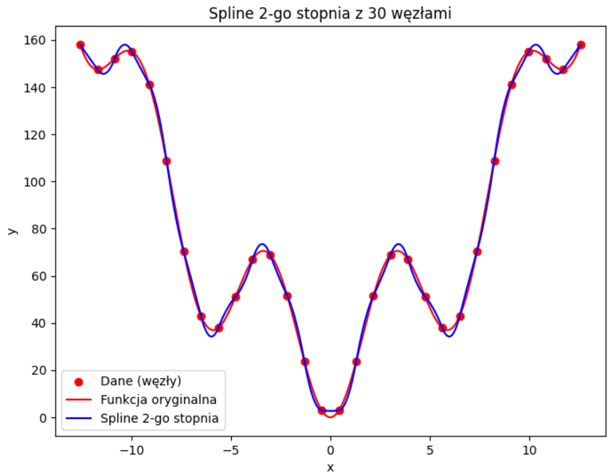
$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n -> b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \ldots)$$



Wykres 10



Wykres 11



Wykres 12

Wykresy 10-12 przedstawiają kolejne wyniki spline'ów 2-go stopnia w wersji clamped spline. Widać, że wraz ze wzrostem ilości przedziałów wzrasta dokładność. Tutaj przy n=30 dokładność przybliżenia nadal pozostawia wiele do życzenia (nie tak jak było w spline'ach 3-go stopnia). Możemy zaobserwować, że te wykresy są bardziej „poszarpane", ponieważ są zbudowane z funkcji 2-go rzędu. Nie występuje efekt Rungego. Porównując te wykresy z odpowiadającymi wykresami 7-9 możemy zaobserwować, że warunki brzegowe wpływają na ułożenie funkcji (trochę inaczej się układa)

Błędy

Błąd maksymalny:

n	3-go stopnia - natural spline	3-go stopnia - cubic spline	2-go stopnia - natural spline	2-go stopnia - clamped spline
4	48.238405	58.006325	65.082128	46.930843
5	60.704774	67.154803	99.478230	69.869446
7	53.671259	53.701507	93.817911	83.135554
10	19.586470	35.035684	41.437315	42.485947
15	7.266158	7.323791	14.689345	13.384450
20	3.384377	2.249395	9.153148	6.938997
30	1.291905	0.373461	5.578913	2.969443
50	0.426568	0.060339	3.238253	1.047039
70	0.210658	0.017203	2.292598	0.529351
80	0.160810	0.010261	2.001054	0.403839
100	0.101920	0.004289	1.595786	0.257325
150	0.043855	0.000841	1.059983	0.113737
200	0.025065	0.000273	0.793595	0.063782
500	0.003717	0.000014	0.316459	0.010146

Tabela 1

Błąd średniokwadratowy

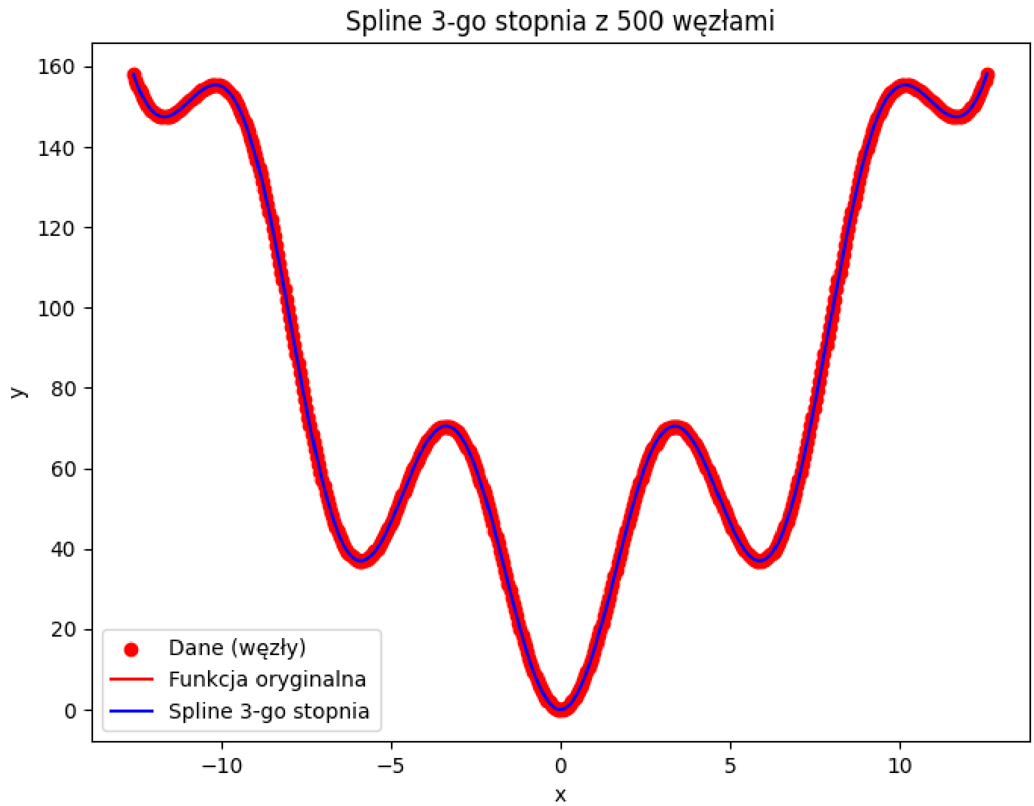
n	3-go stopnia - natural spline	3-go stopnia - cubic spline	2-go stopnia - natural spline	2-go stopnia - clamped spline
4	0.777403	0.880021	0.938891	0.759983
5	1.130847	1.194877	1.476158	1.183448
7	0.818696	0.818196	1.236996	1.136383
10	0.367038	0.457964	0.634837	0.653161
15	0.069463	0.060766	0.267476	0.238256
20	0.025682	0.012890	0.191223	0.140363
30	0.007757	0.002144	0.125609	0.065340
50	0.001967	0.000241	0.074382	0.023794
70	0.000823	5.43E-05	0.052825	0.012123
80	0.000585	3.00E-05	0.046139	0.009271
100	0.000331	1.11E-05	0.036818	0.005921
150	0.000119	1.91E-06	0.024463	0.002621
200	5.74E-05	5.75E-07	0.018317	0.001471
500	5.46E-06	1.74E-08	0.007305	0.000234

Tabela 2

Dzięki błędowi maksymalnemu (tabela 1) oraz błędowi średniokwadratowemu (tabela 2) możemy znaleźć najlepszy wielomian (jego stopień) który interpoluje naszą funkcję. Rozpatrzyliśmy to dla interpolacji funkcji sklejanej `3-go` stopnia dla warunków brzegowych `natural` i `cubic` oraz `2-go` stopnia dla `natural` i `clamped`. W naszym przypadku jest to spline z `n = 500 przedziałów`, bo zwiększając ilość przedziałów zwiększamy dokładność przybliżenia. Był on największym przez nas policzonym, dlatego jest to najlepsze przybliżenie. Gdybyśmy funkcję rozbili na jeszcze więcej przedziałów, to oczywiście przybliżenia byłyby coraz to lepsze. Patrząc na wyniki, możemy wysunąć wniosek, że nie występuje efekt Rungego w przypadku interpolacji funkcją sklejaną 2-go oraz 3-go stopnia.

Jeśli chodzi o porównanie stopnia spline'u oraz warunku brzegowego to najmniejsze błędy osiąga `spline 3-go stopnia w wersji (cubic spline)`

Tak się prezentuje wykres tej funkcji:



Wykres 13