Wiktor Satora 411502 gr.2

Język Python

System Windows 11 x64, Środowisko PyCharm

# MOWNIT – Sprawozdanie 2

## Polecenie:

Dla jednej z poniższych funkcji (*podanej w zadaniu indywidualnym*) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona.

Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n$ = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*.

Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.

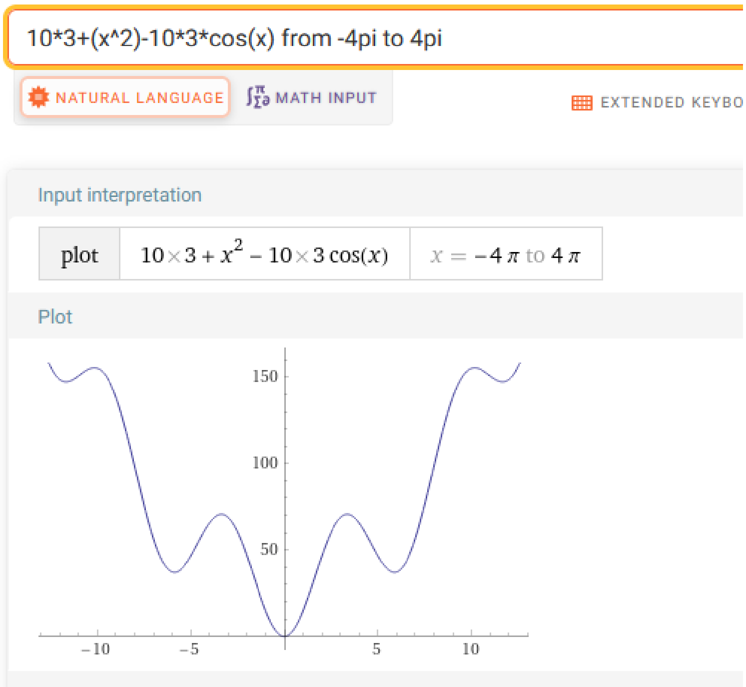
Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.

Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Zadana funkcja:

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx)$$

dla: k=1, m=3, [-4pi, 4pi]



# Wykonanie:

## Funkcje liczące:

Zostały opisane w kodzie

## Obliczenia

Wykonano obliczenia podanej funkcji w zadanym przedziale z zadaną ilością węzłów w 4 wariantach:

- Według wzoru Newtona (węzły rozmieszczone równomiernie na przedziale)
- Według wzoru Lagrange’a (węzły rozmieszczone równomiernie na przedziale)
- Według wzoru Newtona (węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa)
- Według wzoru Lagrange’a (węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa)

Użyto próbkowania przedziału dla p=100 punktów.

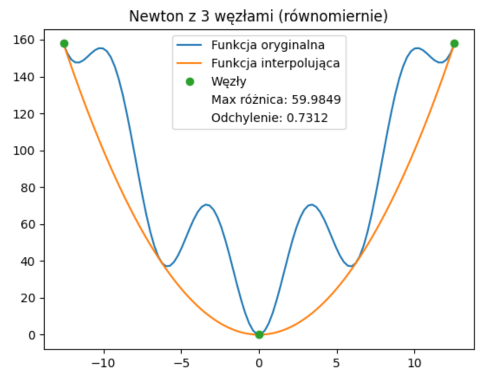
**Błąd maksymalny:** max(abs(f(x)-W(x))), gdzie f-funkcja właściwa, W-funkcja interpolująca

**Błąd średniokwadratowy:** $\frac{1}{p}\sqrt{\sum_1^p (f(x) - W(x))^2}$, gdzie f-funkcja właściwa, W-funkcja interpolująca, p-próbkowanie

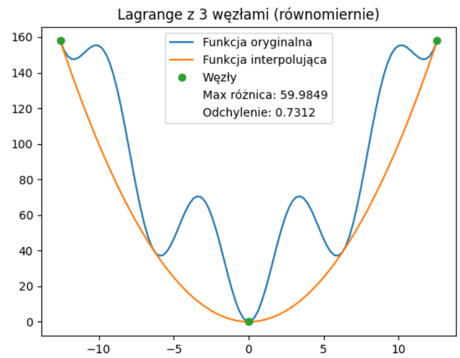
## Wyniki

### Dla n=3 węzłów

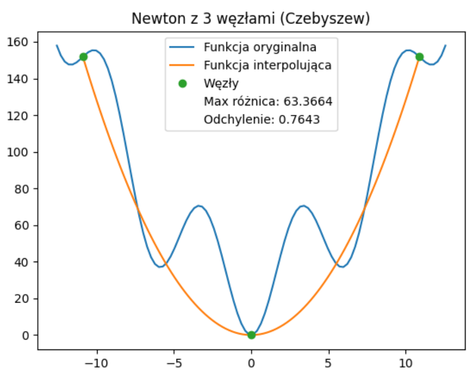
Funkcja interpolująca znacznie odbiega od właściwej, jest to spowodowane małą ilością węzłów.
Wszystkie 4 metody podobnie źle przybliżają funkcję



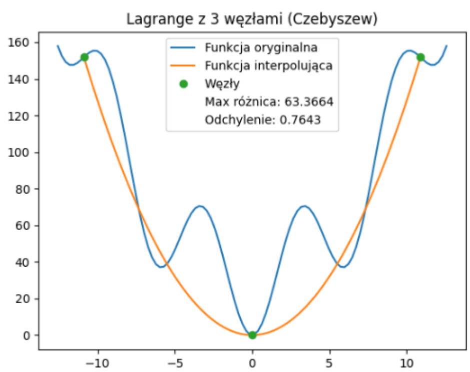

Wykres 1




Wykres 2



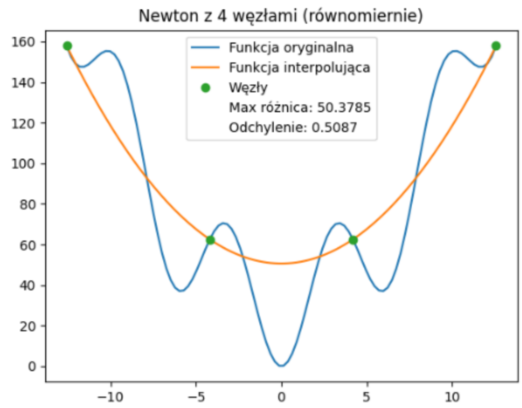

Wykres 3



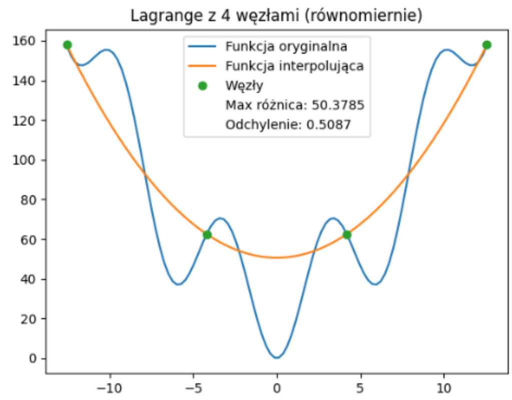

Wykres 4

## Dla n=4 węzłów

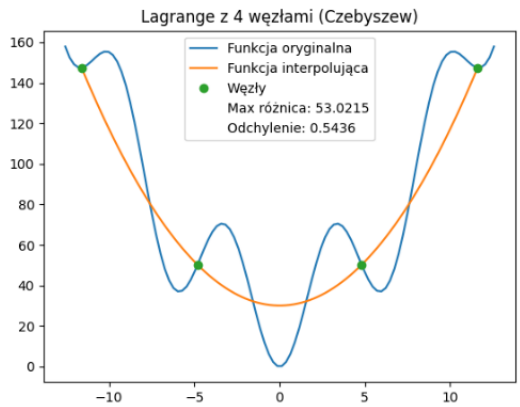
Funkcja jest przybliżona lepiej (dzięki dodaniu węzła), lecz nadal jest to wynik odległy od zadowalanego. Różnica między funkcją liczoną metodą Newtona a Lagrange'a nie jest zauważalna, natomiast rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa jeszcze pogarsza dokładność.



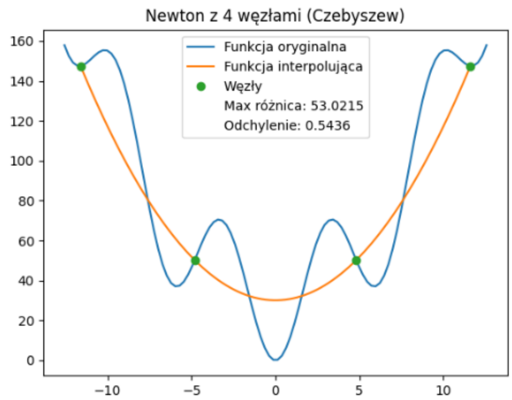

Wykres 5




Wykres 6



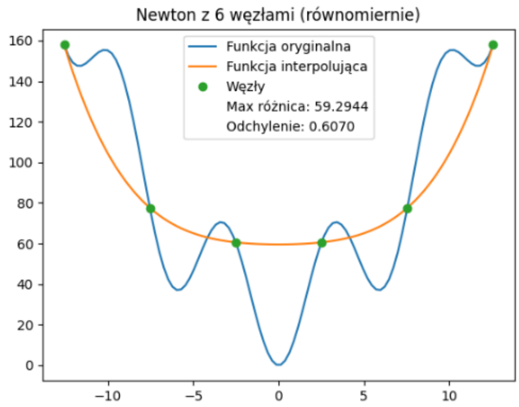

Wykres 7



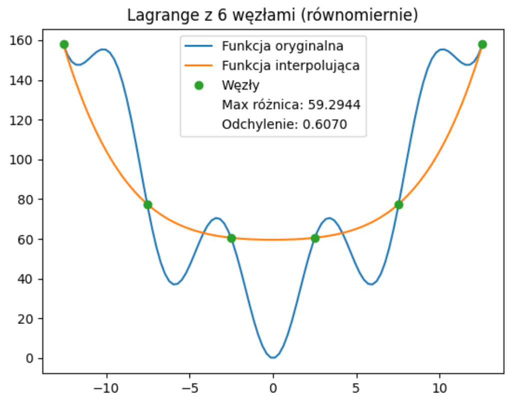

Wykres 8

## Dla n=6 węzłów

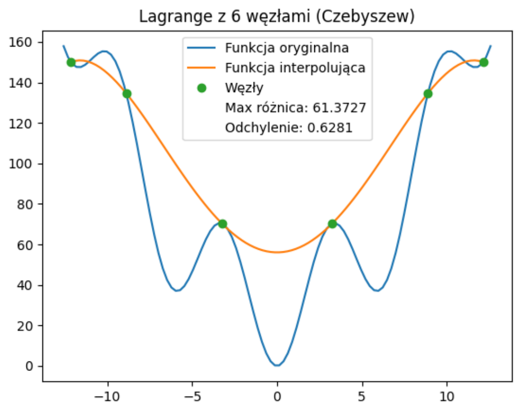
Tutaj obserwacje są identyczne jak w poprzednim doświadczenie



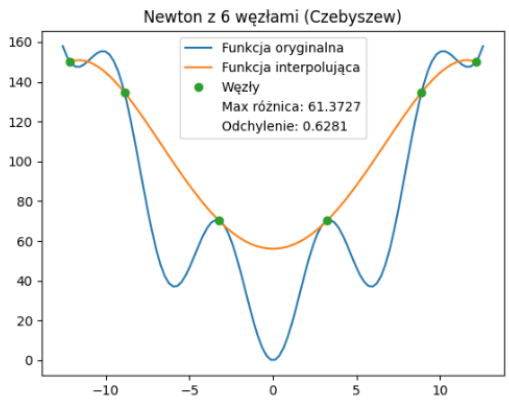

Wykres 9




Wykres 10



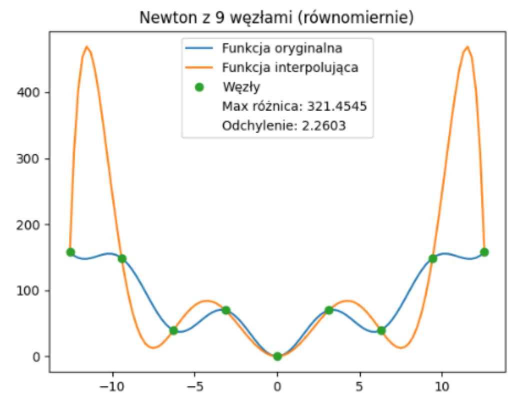

Wykres 11



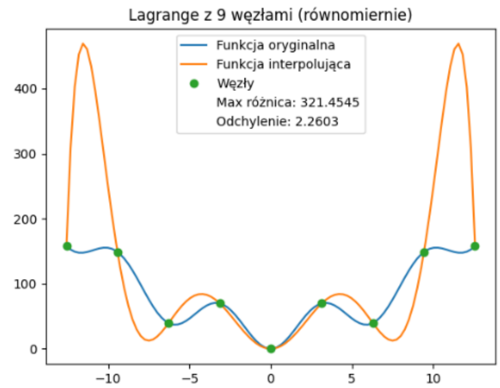

Wykres 12

## Dla n=9 węzłów

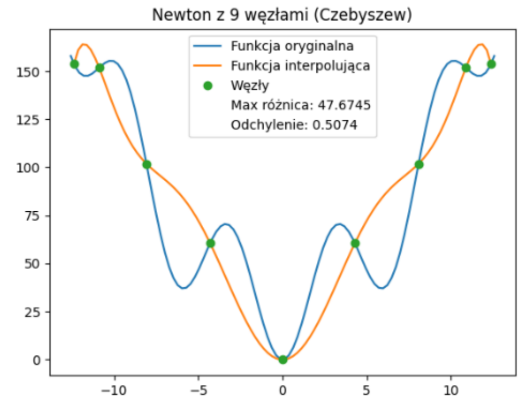
Tutaj obserwujemy pierwsze oznaki **Efektu Rungego**, czyli pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Znacznie poprawia to rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



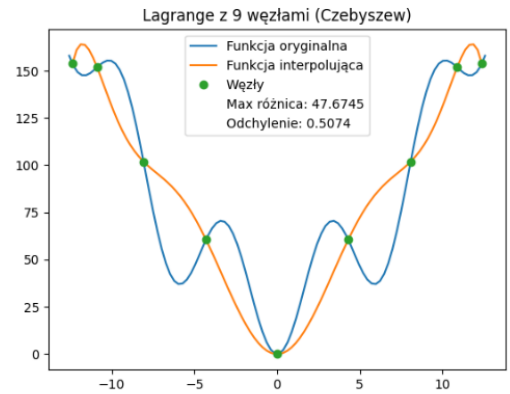

Wykres 13




Wykres 14



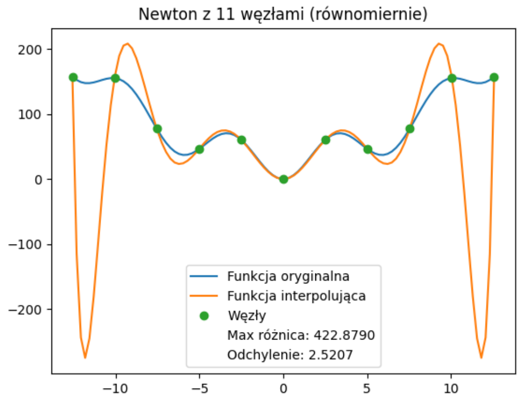

Wykres 15



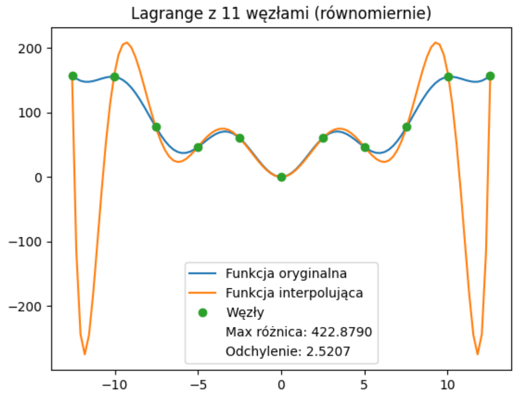

Wykres 16

## Dla n=11 węzłów

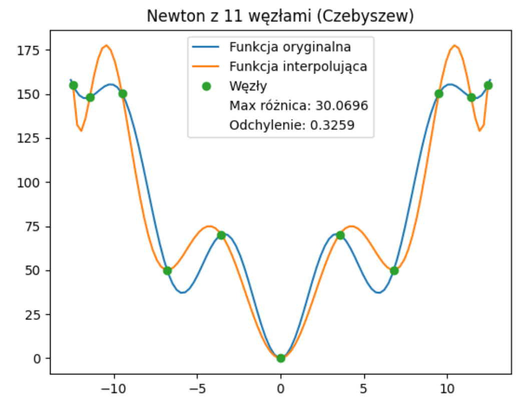
Efekt Rungego uwidacznia się jeszcze bardziej



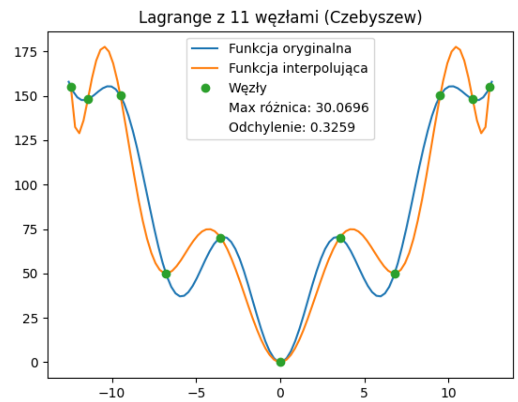

Wykres 17




Wykres 18



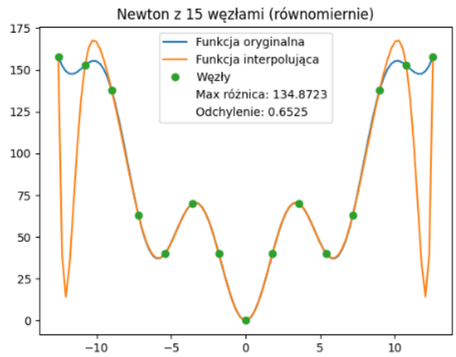

Wykres 19



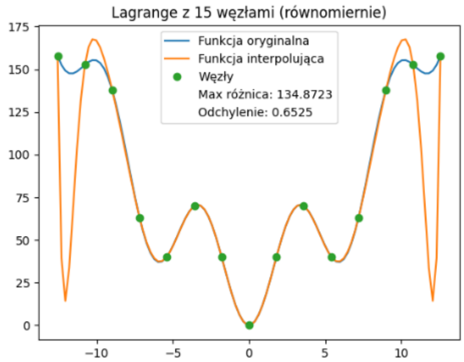

Wykres 20

## Dla n=15 węzłów

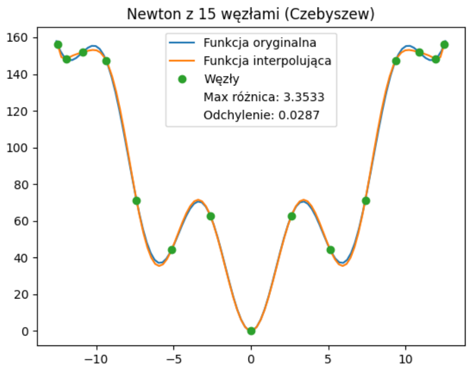
Efekt Rungego maleje, niemniej jednak metoda z węzłami zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa z wyjątkową skutecznością mu zapobiega



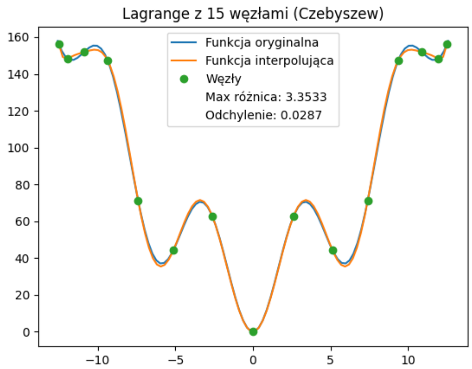

Wykres 21




Wykres 22



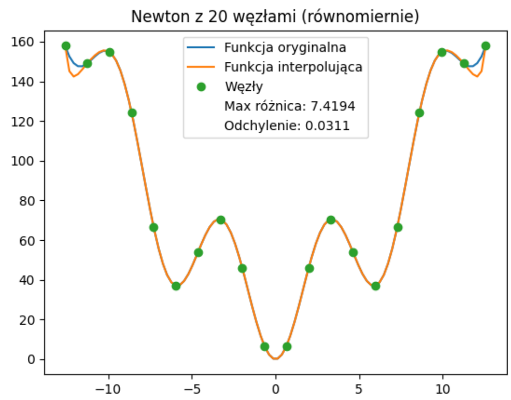

Wykres 23



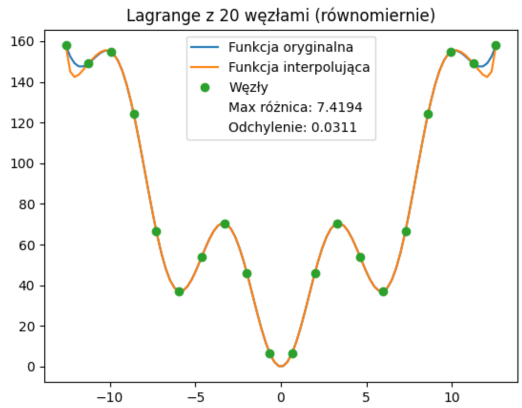

Wykres 24

## Dla n=20 węzłów

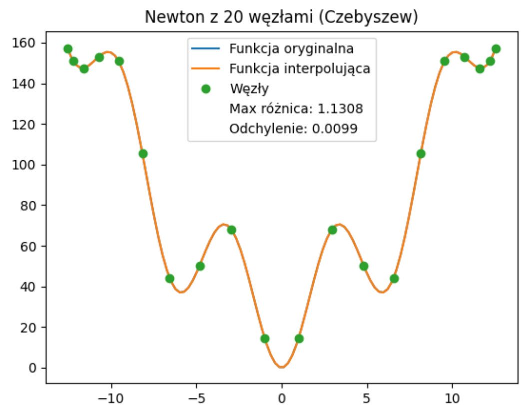
Jest to już wielomian dużego stopnia który dość skutecznie przybliża właściwą funkcję. Efekt Rungego jest nadal minimalnie obserwowany przy rozkładzie równomiernym



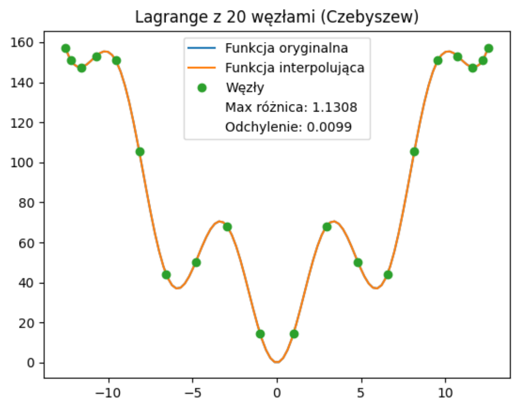

Wykres 25




Wykres 26



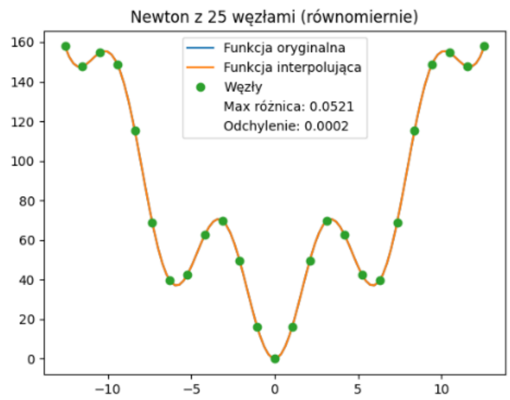

Wykres 27



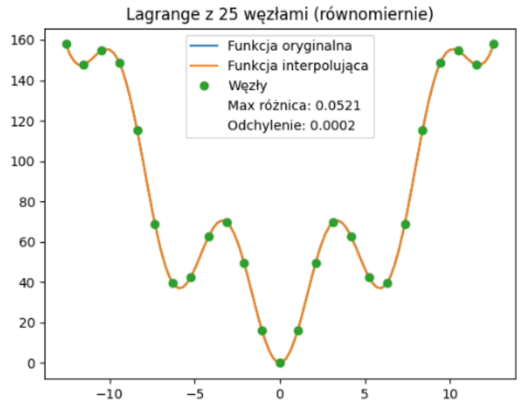

Wykres 28

## Dla n=25 węzłów

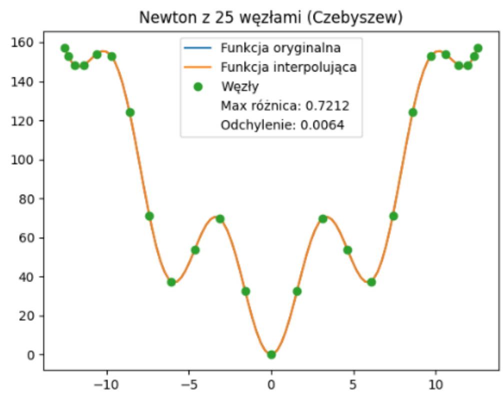
Liczba węzłów jest na tyle duża, że wersja z równomiernie rozłożonymi węzłami lepiej przybliża funkcję. Tak obserwujemy dla kolejnych wielomianów kolejnych stopni



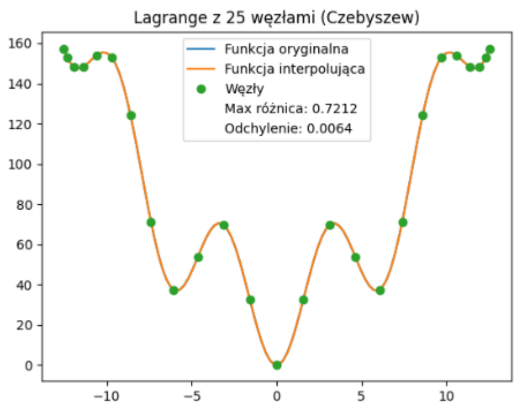

Wykres 29




Wykres 30




Wykres 31




Wykres 32

## Tabele

**Błąd maksymalny**

| | Metoda Newtona | | Metoda Lagrange'a | |
|---|---|---|---|---|
| n | równomiernie | zera Czebyszewa | równomiernie | zera Czebyszewa |
| 3 | 59.9849 | 63.3664 | 59.9849 | 63.3664 |
| 4 | 50.3785 | 53.0215 | 50.3785 | 53.0215 |
| 6 | 59.2944 | 61.3727 | 59.2944 | 61.3727 |
| 9 | 321.4545 | 47.6745 | 321.4545 | 47.6745 |
| 11 | 422.8790 | 30.0696 | 422.8790 | 30.0696 |
| 15 | 134.8723 | 3.3533 | 134.8723 | 3.3533 |
| 20 | 7.4194 | 1.1308 | 7.4194 | 1.1308 |
| 25 | 0.0521 | 0.7212 | 0.0521 | 0.7212 |

Tabela 1

**Błąd średniokwadratowy**

| | Metoda Newtona | | Metoda Lagrange'a | |
|---|---|---|---|---|
| n | równomiernie | zera Czebyszewa | równomiernie | zera Czebyszewa |
| 3 | 0.7312 | 0.7643 | 0.7312 | 0.7643 |
| 4 | 0.5087 | 0.5436 | 0.5087 | 0.5436 |
| 6 | 0.6070 | 0.6281 | 0.6070 | 0.6281 |
| 9 | 2.2603 | 0.5074 | 2.2603 | 0.5074 |
| 11 | 2.5207 | 0.3259 | 2.5207 | 0.3259 |
| 15 | 0.6525 | 0.0287 | 0.6525 | 0.0287 |
| 20 | 0.0311 | 0.0099 | 0.0311 | 0.0099 |
| 25 | 0.0002 | 0.0064 | 0.0002 | 0.0064 |

Tabela 2

## Wnioski

Wraz ze wzrostem stopnia wielomianu interpolującego wzrasta dokładność przybliżenia funkcji.

Początkowo ze wzrostem liczby węzłów *n* przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście *n* (od około 9), zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów (**efekt Rungego**).

Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. węzłami interpolacji *n*-punktowej wielomianowej powinny być miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa *n*-tego stopnia.

Interpolacja Lagrange'a, a Newtona daje niemalże identyczne wyniki co widać na tabeli 1 oraz 2. Różnią się one dopiero na dalekich miejscach po przecinku.

Poprawki:

- Poprawiono nieścisłości związane ze zmienną n
- Dodano tabelką
- Podpisano wykresy