Wiktor Satora 411502 gr.2

Język Python

System Windows 11 x64, Środowisko PyCharm

MOWNiT – Sprawozdanie 4b

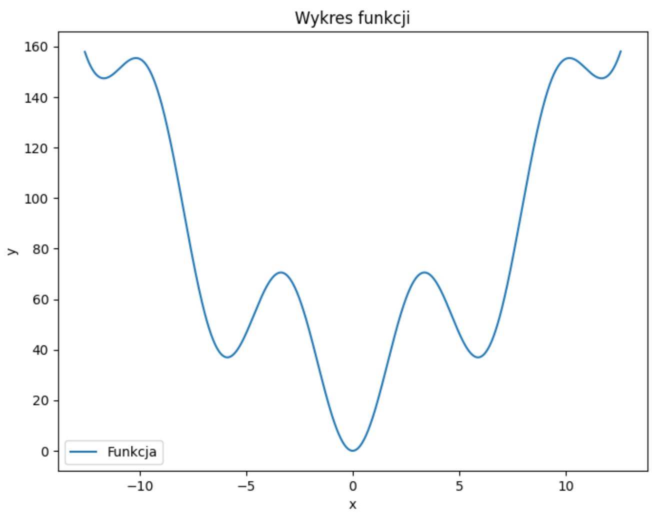
Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

Opis doświadczenia:

Dla funkcji:

$$f(x) = 30 + x^2 - 30 * \cos(x)$$

$$Dla\ przedziału: [-4\pi, 4\pi]$$



Wykres 1 Funkcja wejściowa

wyznaczono wartości w n dyskretnych punktach (węzłach).
Następnie w oparciu o te punkty wyznaczono przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi.
Wykonano eksperymenty numeryczne dla układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji.
Oszacowywano błędy przybliżenia.
Graficznie zilustrowano interesujące przypadki.

Użyto próbkowania przedziału dla p=1000 punktów
(wartości funkcji zostały wyliczone w 1000 równoodległych punktach z przedziału $[-4\pi, 4\pi]$)

Błąd maksymalny: $\max\limits_{-4\pi \le x \le 4\pi} |\boldsymbol{f(x) - W(x)}|$, gdzie f-funkcja właściwa, W-funkcja wyjściowa z aproksymacji

Błąd średniokwadratowy: $\frac{1}{1000}\sqrt{\sum_{-4\pi=x}^{4\pi}(f(x) - W(x))^2}$, gdzie f-funkcja właściwa, W- funkcja wyjściowa z aproksymacji

Do aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej zostały użyte wzory:

$$a_j = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot cos(j \cdot x_i)$$

$$b_j = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot sin(j \cdot x_i)$$

$$F_m(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{i=1}^{m} (a_j \cdot cos(j \cdot x) + b_j \cdot sin(j \cdot x))$$

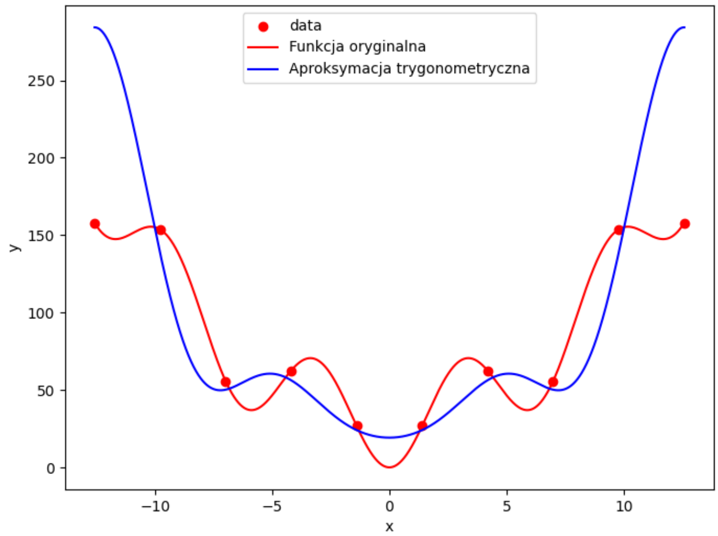
Wielomianami trygonometrycznymi można aproksymować dowolną funkcję okresową.

Zasady doboru stopnia wielomianu aproksymacyjnego różnią się od tych wykorzystanych w przypadku wielomianów algebraicznych. W przypadku wielomianów trygonometrycznych możemy od razu przyjąć najwyższy dopuszczalny stopień (m) równy podłodze z $(n+1)/2$.

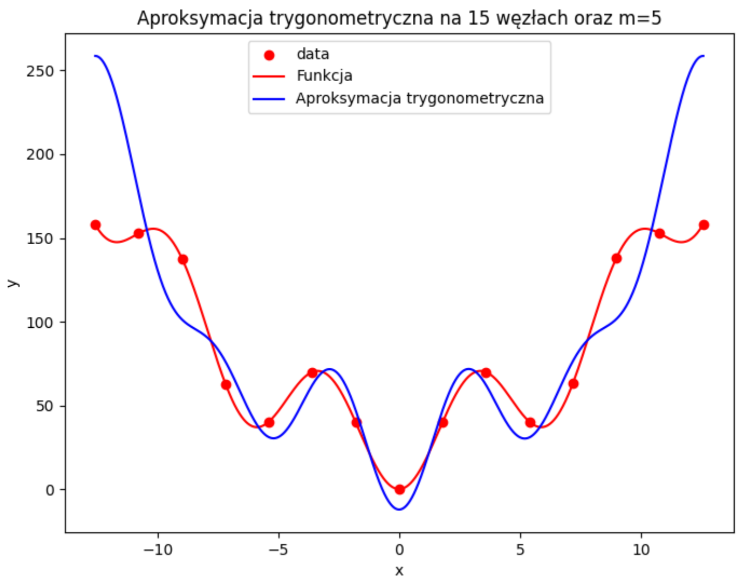
Dodatkowo w przypadku aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi musimy przeskalować każdy punkt aby był na przedziale -π do π. Należy podzielić każdy x przez długość przedziału, następnie pomnożyć przez 2* π, a później odjąć π oraz (2* π*początek_przedziału/długość_przedziału). Po przeskalowaniu wyliczamy nasze a_j oraz b_j . Wracając do początkowego przedziału należy wykonać kroki odwrotne do opisanych w poprzednim zdaniu. Kolejnym krokiem, jest ponowne przeskalowanie punktów jednak tym razem do wyjściowych wartości, a następnie na tych punktach wyliczamy funkcję F.

Przykładowe wykresy dla aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

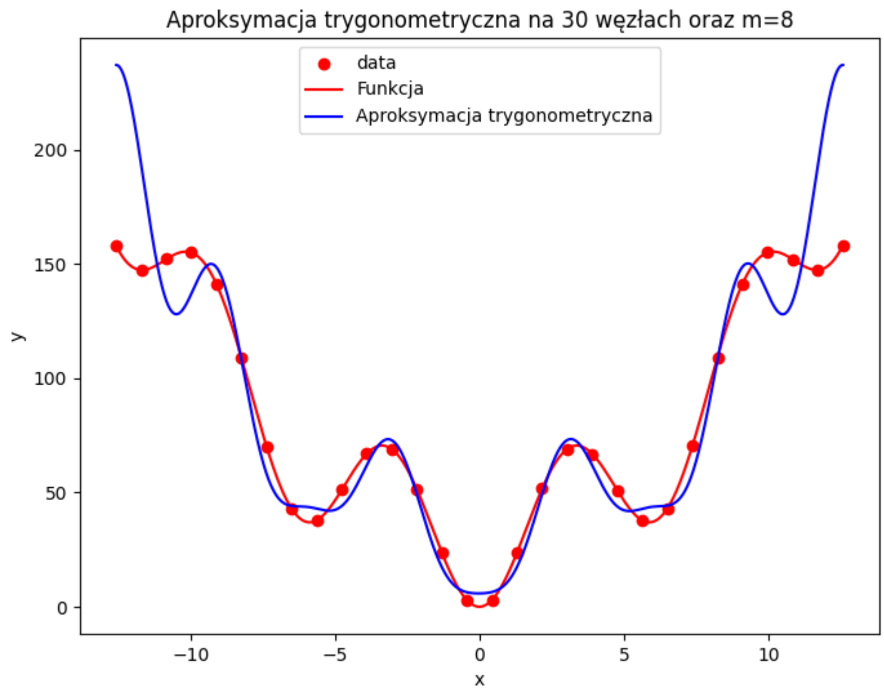
Poniżej zostały umieszczone wykresy dla: n=10 m=4, n=15 m=5, n=30 m=8, n=30 m=14, n=50 m=24, n=100 m=37



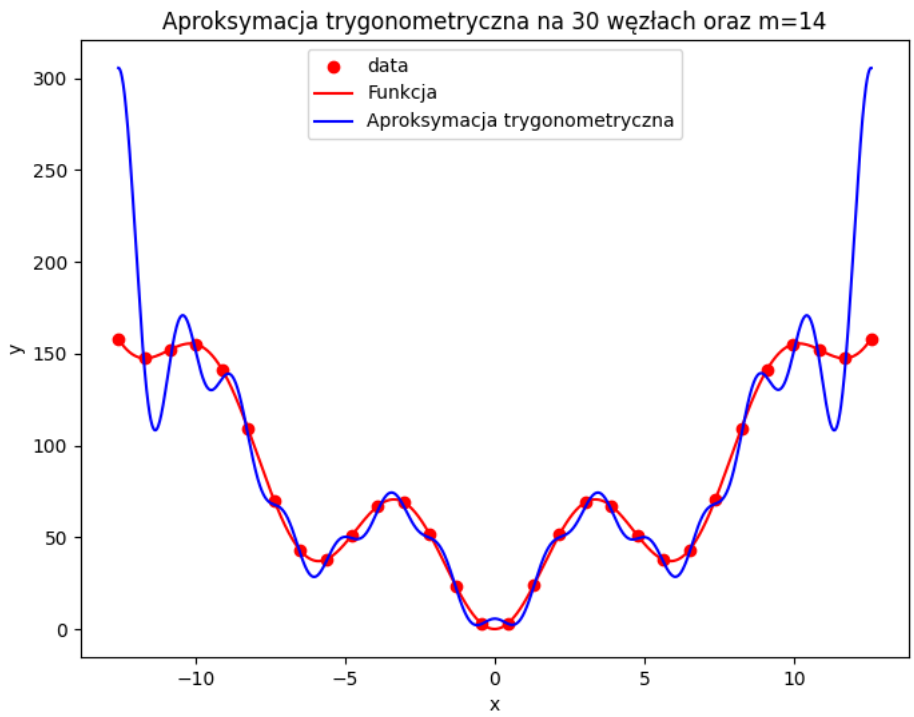
Wykres 2 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 10 węzłów i stopnia wielomianu 4



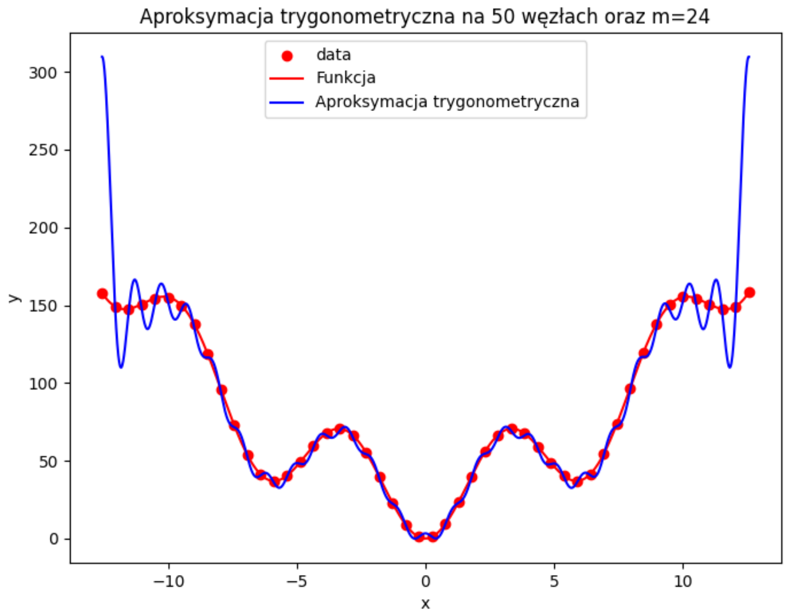
Wykres 3 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 5



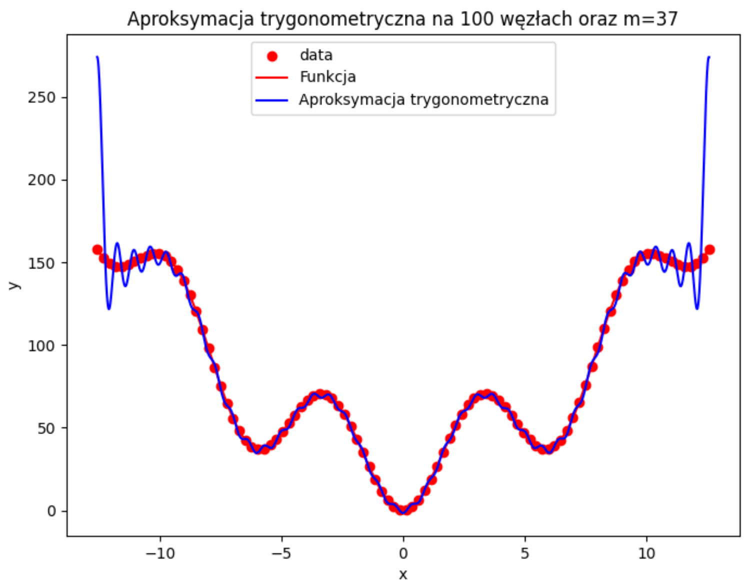
Wykres 4 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 30 węzłów i stopnia wielomianu 8



Wykres 5 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 30 węzłów i stopnia wielomianu 14



Wykres 6 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 50 węzłów i stopnia wielomianu 24



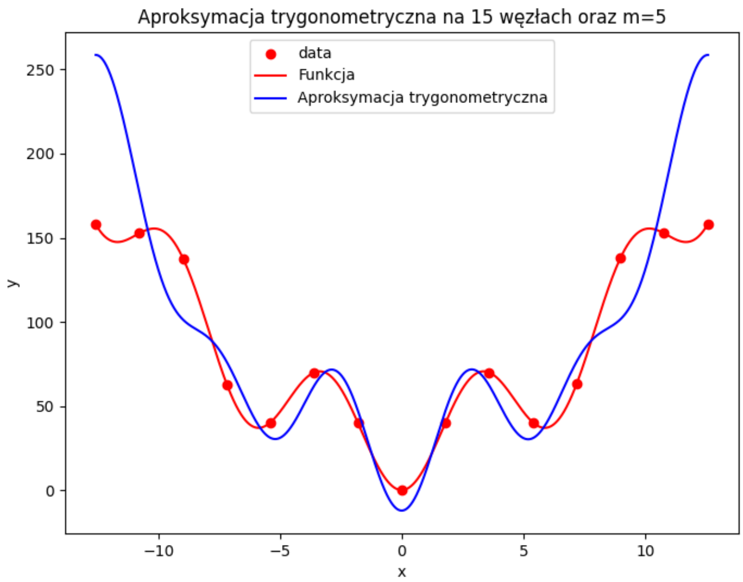
Wykres 7 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 100 węzłów i stopnia wielomianu 37

Wykresy 2-7 przedstawiają kolejne wyniki funkcji aproksymujących dla coraz to większych n oraz m. Możemy zaobserwować że przybliżenie jest coraz dokładniejsze dla coraz większej liczby węzłów, natomiast im większy m tym większe odchyły na krańcach przedziału.

Własność funkcji parzystej

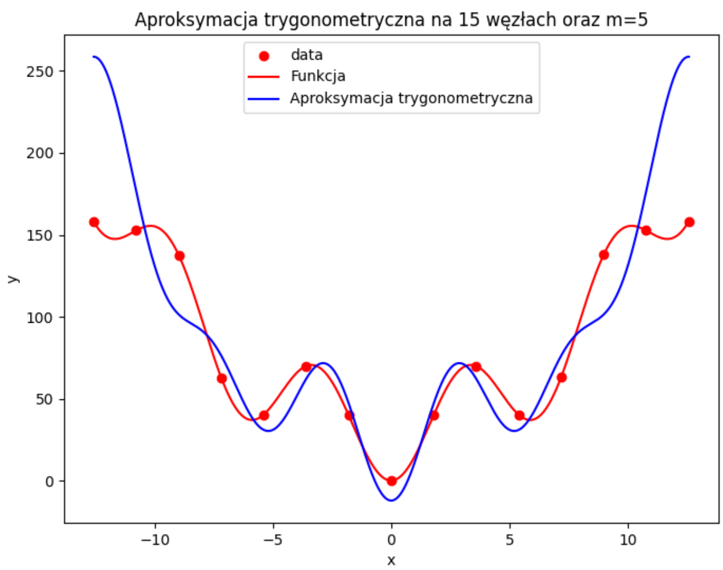
Zauważając że wejściowa funkcja jest parzysta możemy wyzerować wszystkie współczynniki b_j odpowiedzialne za skalowanie funkcji sinus.

Wykres funkcji zgodnie ze wzorem standardowym dla n=15, m=5:



Wykres 8 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 5. Wzór standardowy

Wyzerowane współczynniki b_j:



Wykres 9 Wykres aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 5. Wzór bez sinusów

Wykresy funkcji są identyczne.

Błędy

Błędy obliczeniowe zostały wykonane dla błędu maksymalnego punktów oraz dla błędu sumy kwadratów punktów.

Liczby węzłów jakie zostały wzięte pod uwagę to: 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 100 oraz m: 2, 3, 5, 10, 14, 20, 24

Tabela 1 Błąd maksymalny

Błąd maksymalny							
	m						
n	**2**	**3**	**5**	**10**	**14**	**20**	**24**
5	47.2789383	-	-	-	-	-	-
7	39.14883792	63.2785908	-	-	-	-	-
10	25.86565889	36.3622856	-	-	-	-	-
20	15.9075832	17.2686575	27.1094877	-	-	-	-
30	15.29771768	12.5035306	17.4752078	36.6560851	53.200231	-	-
50	18.92010276	9.3028232	10.7471371	20.8237769	30.2538842	44.6559385	54.3502926
80	20.89076832	10.4354404	7.4653619	12.60176	18.1657227	26.9613909	32.8625501
100	21.53731769	11.3501148	6.4765111	10.0202935	14.2940086	21.2400981	25.9466779

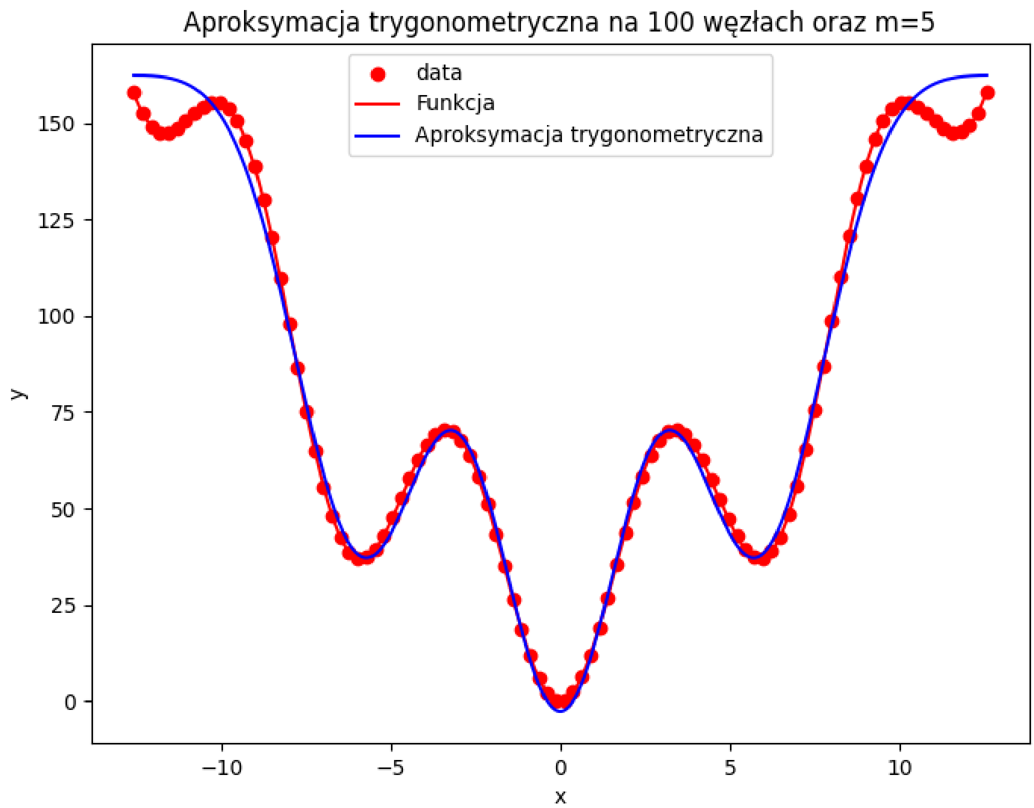
Tabela 2 Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy							
	m						
n	**2**	**3**	**5**	**10**	**14**	**20**	**24**
5	0.842296384	-	-	-	-	-	-
7	0.74361834	0.90633271	-	-	-	-	-
10	0.501334307	0.53932792	-	-	-	-	-
20	0.309184982	0.26380151	0.30985755	-	-	-	-
30	0.267672792	0.19066558	0.20436253	0.2819814	0.33646206	-	-
50	0.245418842	0.14327904	0.12677524	0.16577283	0.19634903	0.2365176	0.26074793
80	0.237753183	0.1240406	0.08784697	0.10326515	0.1213828	0.145729	0.16034327
100	0.23600832	0.11930717	0.07642748	0.08297286	0.0968891	0.11610454	0.12769585

W tabelach 1 oraz 2 pauzami zaznaczono pola gdzie m nie spełnia warunków opisanych w opisie doświadczenia.

Po przeanalizowaniu różnych przypadków dla aproksymacji trygonometrycznej (tabele, wykresy) możemy zauważyć, że wzrost liczby węzłów aproksymacji oraz stopnia wielomianu aproksymacyjnego nie powoduje zwiększenia się błędów obliczeniowych. Ze względów wydajności i dokładności obliczeń należy starać się zminimalizować stopień wielomianu aproksymacyjnego.

Najlepsze przybliżenie osiąga funkcja dla n=100 m=5:



Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 100 węzłów i n=5
Funkcja reprezentująca najlepsze przybliżenie