Projekt 2 – Układy równań liniowych

May 10, 2022

Wiktoria Lewicka 184915, gr.2

1 Zadanie A

stworzenie układu równań Ax = b

Liczby, którymi zostanie uzupełniona macierz A:

[10]:
```
e = 9.0
N = 915
a1 = 5.0 + e
a2 = -1.0
a3 = -1.0
```

Funkcja tworząca dowolną macierz zawierającą 5 diagonali:

[51]:
```
def create_matrix(N, a1, a2, a3):
    rows, cols = (N, N)
    A = [[0.0 for i in range(cols)] for j in range(rows)]

    for i in range(N):
        A[i][i] = a1
        if i + 1 < N:
            A[i][i+1] = a2
        if i + 2 < N:
            A[i][i+2] = a3

        if i - 1 >= 0:
            A[i][i-1] = a2
        if i - 2 >= 0:
            A[i][i-2] = a3
    return A
```

Utworzenie macierzy A:

[12]:
```
A = create_matrix(N, a1, a2, a3)
```

Tworzenie wektora b:

[13]:
```
b = [0 for i in range(N)]
f = 4

for i in range(N):
    b[i] = math.sin(i*(f + 1))
```

2 Zadanie B

implementacja metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego i Gaussa–Seidla

Funkcja obliczająca normę euklidesową, wg wzoru:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |v_k|^2}$$

[14]:
```
def get_vector_norm_euklides(v):
    N = len(v)
    ret = 0
    for i in range(N):
        ret += v[i]*v[i]
    return math.sqrt(ret)
```

Funkcja mnożąca dwie macierze i zwracająca wynikową macierz:

[15]:
```
def multiply_matrix(A, x):
    N = len(x)
    ret = [0.0 for i in range(N)]

    for i in range(N):
        sum = 0.0
        for j in range(N):
            sum += A[i][j] * x[j]
        ret[i] = sum
    return ret
```

Funkcja odejmująca wektor b od wektora a i zwracająca wartość tej różnicy:

[16]:
```
def substract_vectors(a, b):
    N = len(a)
    for i in range(N):
        a[i] -= b[i]
    return a
```

Funkcja obliczająca wektor residuum i zwracająca go:

[17]:
```python
# Ax = b
def get_vector_residuum(A, x, b):
    N = len(x)
    Ax = multiply_matrix(A, x) #wektor o rozmiarze N
    residuum = substract_vectors(Ax, b) # wektor o rozmiarze N
    return residuum
```

Funkcja obliczająca normę z wektora residuum wektora A:

[54]:
```python
def get_vector_norm(A, x, b):
    N = len(x)
    residuum = get_vector_residuum(A, x, b)
    norm = get_vector_norm_euklides(residuum)
    #print("norma = " + str(norm))
    return norm
```

Funkcja rozwiązująca układ równań metodą Jacobiego:

[27]:
```python
def solve_jacobi(A, b, epsilon):
    N = len(b)
    x = [0.0 for i in range(N)]  # macierz X, na wynik
    x_prev = [1.0 for i in range(N)]  # początkowe "wyniki"

    k = 0
    print("epsilon: " + str(epsilon))
    start = time.time()

    while get_vector_norm(A, x, b) > epsilon:
        for i in range(N):
            x[i] = b[i]

            for j in range(N):
                if i != j:
                    x[i] -= A[i][j] * x_prev[j]
            x[i] /= A[i][i]

        x_prev = x.copy()
        k += 1
    end = time.time()
    print("czas wykonania: " + str(end - start) + "s")
    print("liczba iteracji: " + str(k))
    return x
```

Rozwiązanie układu równań z zadania A metodą Jacobiego:

[19]:
```python
jac = solve_jacobi(A, b, pow(10, -9))
```

```
epsilon: 1e-09
```

```
norma = 21.384473416735254
norma = 86.3625809047604
norma = 24.64974933570051
norma = 7.038155349261883
norma = 2.0098149031126695
norma = 0.5739609938612484
norma = 0.16391885550874827
norma = 0.046815604943892995
norma = 0.013371013538428353
norma = 0.0038189832404037323
norma = 0.0010907853552703493
norma = 0.00031155717301286034
norma = 8.899019987928162e-05
norma = 2.5418612357491103e-05
norma = 7.2604931609332244e-06
norma = 2.073884357276341e-06
norma = 5.92388571455784e-07
norma = 1.6921239786230125e-07
norma = 4.833489308631727e-08
norma = 1.3806772520399967e-08
norma = 3.9439024778674244e-09
norma = 1.1265814303455648e-09
norma = 3.218113789384394e-10
czas wykonania: 13.136632680892944s
liczba iteracji: 22
```

Funkcja rozwiązująca układ równań metodą Gaussa-Seidla:

[28]:
```python
def solve_gauss_seidel(A, b, epsilon):
    N = len(b)
    x = [1.0 for i in range(N)]
    x_prev = [1.0 for i in range(N)]

    k = 0
    print("epsilon: " + str(epsilon))
    start = time.time()

    while get_vector_norm(A, x, b) > epsilon:
        for i in range(N):
            triangle_sum = 0

            # macierz trójkątna górna
            for j in range(i):
                triangle_sum += A[i][j] * x[j]

            # macierz trójkątna dolna
            for j in range(i + 1, N):
                triangle_sum += A[i][j] * x_prev[j]
```

```
            x[i] = (b[i] - triangle_sum) / A[i][i]
            x_prev = x.copy()
        k += 1

    end = time.time()
    print("czas wykonania: " + str(end - start) + "s")
    print("liczba iteracji: " + str(k))
    return x
```

Rozwiązanie układu równań z zadania A metodą Gaussa-Seidla:

[21]:
```
gau = solve_gauss_seidel(A, b, pow(10, -9))
```

```
epsilon: 1e-09
norma = 303.4769389078491
norma = 50.436837391861395
norma = 8.39253063017641
norma = 1.3972768660830874
norma = 0.23267129223825367
norma = 0.038745834253573724
norma = 0.006452592993771786
norma = 0.0010746208777309182
norma = 0.0001789680379060646
norma = 2.9805645817500467e-05
norma = 4.963926558255243e-06
norma = 8.267083848596229e-07
norma = 1.3768270359166436e-07
norma = 2.2930183188989988e-08
norma = 3.818881043534688e-09
norma = 6.360110564519612e-10
czas wykonania: 7.284369707107544s
liczba iteracji: 15
```

Porównanie czasu trwania algorytmów: - jacobi: ~6s - gauss-seidel: ~3.5s

Algorytm Gaussa Seidla rozwiązał równanie szybciej od algorytmu Jacobiego o 2.5s (jest 0,42x szybszy)

3 Zadanie C

Stworzenie układu równań dla a1 = 3, a2 = a3 = −1 i N = 915, wektor b pozostaje bez zmian

Utworzenie nowego wektora A:

[22]:
```
A = create_matrix(N, 3, -1, -1)
```

Próba rozwiązania układu Ax=b metodą Jacobiego:

```
[23]: jac = solve_jacobi(A, b, pow(10, -9))
```

```
epsilon: 1e-09
norma = 21.384473416735254
norma = 40.945050108768896
norma = 53.62470937500312
norma = 71.37475372570134
norma = 95.12425243463389
norma = 126.79143163680094
norma = 169.00458671200582
```

```
---------------------------------------------------------------------------
KeyboardInterrupt                         Traceback (most recent call last)
Input In [23], in <cell line: 1>()
----> 1 jac = solve_jacobi(A, b, pow(10, -9))

Input In [18], in solve_jacobi(A, b, epsilon)
     14     for j in range(N):
     15         if i != j:
---> 16             x[i] -= A[i][j] * x_prev[j]
     17     x[i] /= A[i][i]
     19 x_prev = x.copy()

KeyboardInterrupt:
```

Próba rozwiązania układu Ax=b metodą Gaussa-Seidla:

```
[24]: gau = solve_gauss_seidel(A, b, pow(10, -9))
```

```
epsilon: 1e-09
norma = 36.988439400530865
norma = 60.832097892516686
norma = 120.23202850889238
norma = 240.0386891948221
norma = 479.47036235297304
norma = 957.7952778468476
norma = 1913.3766207868346
norma = 3822.4415357287357
```

```
---------------------------------------------------------------------------
KeyboardInterrupt                         Traceback (most recent call last)
Input In [24], in <cell line: 1>()
----> 1 gau = solve_gauss_seidel(A, b, pow(10, -9))

Input In [20], in solve_gauss_seidel(A, b, epsilon)
      7 print("epsilon: " + str(epsilon))
      8 start = time.time()
```

```
---> 10 while get_vector_norm(A, x, b) > epsilon:
     11     for i in range(N):
     12         triangle_sum = 0

Input In [17], in get_vector_norm(A, x, b)
      1 def get_vector_norm(A, x, b):
      2     N = len(x)
----> 3     residuum = get_vector_residuum(A, x, b)
      4     norm = get_vector_norm_euklides(residuum)
      5     print("norma = " + str(norm))

Input In [16], in get_vector_residuum(A, x, b)
      2 def get_vector_residuum(A, x, b):
      3     N = len(x)
----> 4     Ax = multiply_matrix(A, x) #wektor o rozmiarze N
      5     residuum = substract_vectors(Ax, b) # wektor o rozmiarze N
      6     return residuum

Input In [14], in multiply_matrix(A, x)
      6     sum = 0.0
      7     for j in range(N):
----> 8         sum += A[i][j] * x[j]
      9     ret[i] = sum
     10 return ret

KeyboardInterrupt:
```

Wnioski

Wykonanie kodu zostało ręcznie przerwane, ponieważ wartości normy z residuum rosną, zamiast się zmniejszać, co oznacza, że ten algorytm nie jest w stanie rozwiązać tego układu równań. Wynika z tego, że metody iteracyjne dla tego układu równań nie zbiegają się.

4 Zadanie D

Implementacja metody bezpośredniego rozwiązania układów równań liniowych: metody faktoryzacji LU

[29]:

```
def solve_LU_factor(A, b):
    N = len(b)
    x = [1.0 for i in range(N)]

    L = A.copy()
    U = create_matrix(N, 1, 0, 0)

    start = time.time()
```

```
    # L*U*x = b
    print("liczenie L i U")
    for i in range(N - 1):
        for j in range(i + 1, N):
            L[j][i] = U[j][i] / U[i][i]

            for k in range(i, N):
                U[j][k] = U[j][k] - L[j][i] * U[i][k]

    # Ly = b, macierz trójkątna górna, podstawianie uprzód
    print("trójkąt góra")
    y = [0.0 for i in range(N)]

    for i in range(N):
        Ly = 0
        for j in range(i):
            Ly += L[i][j] * y[j]
        y[i] = (b[i] - Ly) / L[i][i]

    # Ux = y, macierz trójkątna dolna, podstawianie wstecz
    print("trójkąt dół")
    for i in reversed(range(0, N - 1)):
        Ux = 0
        for j in range(i + 1, N):
            Ux += U[i][j] * x[j]
        x[i] = (y[i] - Ux) / U[i][i]

    end = time.time()
    print("czas wykonania: " + str(end - start) + "s")
    get_vector_norm(A, x, b)
    return x
```

Rozwiązania układu równań z zadania C metodą faktoryzacji LU:

[39]:
```
solve_LU_factor(A, b)
```

```
liczenie L i U
trójkąt góra
trójkąt dół
czas wykonania: 135.42630124092102s
norma = 11.68793985798178
```

5 Zadanie E

Stworzenie wykresów zależności czasu trwania poszczególnych algorytmów od liczby niewiadomych N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} dla przypadku z punktu A

Zmienne potrzebne do wykreślania wykresów:

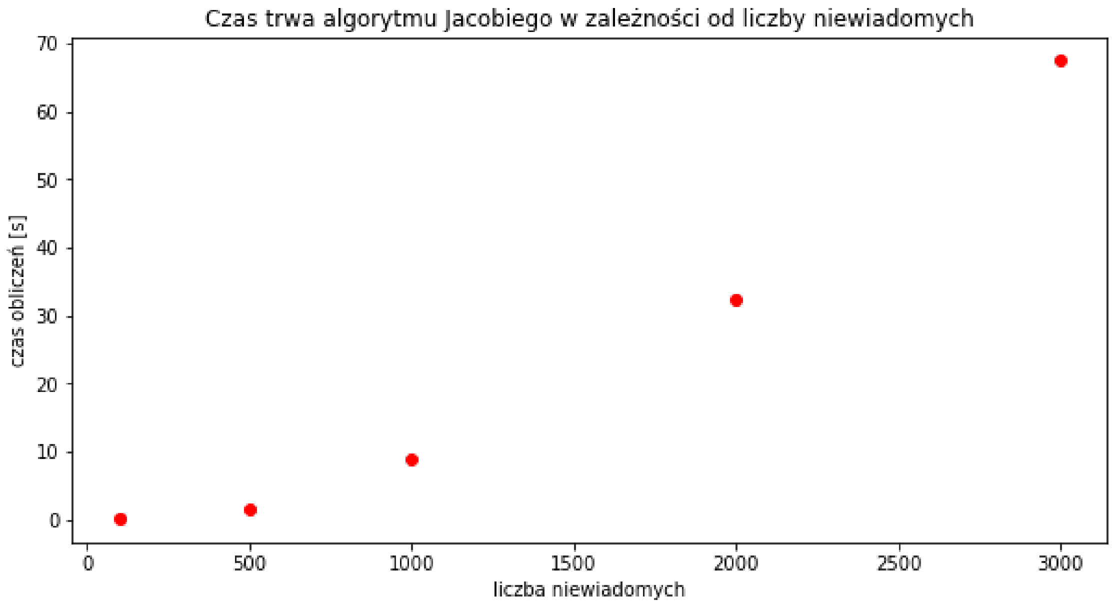
[33]:
```
it = [100, 500, 1000, 2000, 3000]
jacobi_time =  [0.0 for i in range(5)]
gauss_time =  [0.0 for i in range(5)]
LU_time =  [0.0 for i in range(5)]

epsilon = pow(10, -9)
```

Obliczenie czasów wykonania algorytmu Jacobiego dla N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} i narysowanie wykresu:

[34]:
```
i = 0
for n in it:
    A = create_matrix(n, a1, a2, a3)
    b = [1.0 for i in range(n)]

    start = time.time()
    solve_jacobi(A, b, epsilon)
    end = time.time()
    jacobi_time[i] = end - start

    print(jacobi_time[i])

    i += 1
```

```
0.07393026351928711
1.6323909759521484
9.042420148849487
32.46504187583923
67.48986792564392
```

[ ]:
```
plt.plot(it, jacobi_time, 'ro')
plt.title('Czas trwa algorytmu Jacobiego w zależności od liczby niewiadomych')
plt.ylabel('czas obliczeń [s]')
plt.xlabel('liczba niewiadomych')
plt.show()
```



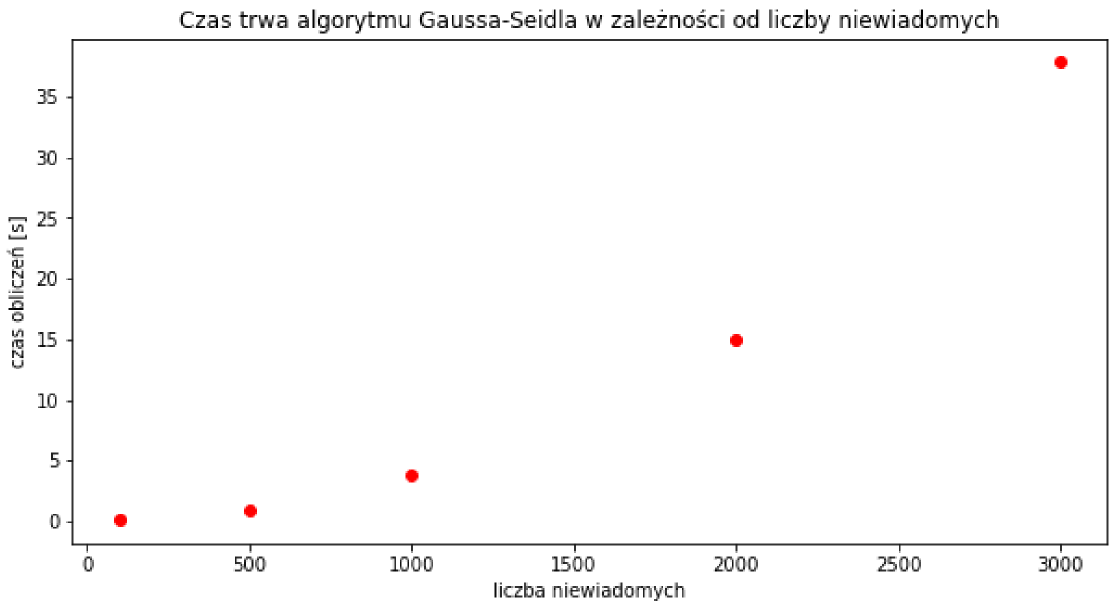
Obliczenie czasów wykonania algorytmu Gaussa-Seidla dla N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} i narysowanie wykresu:

[45]:
```
i = 0
for n in it:
    A = create_matrix(n, a1, a2, a3)
    b = [1.0 for i in range(n)]

    start = time.time()
    solve_gauss_seidel(A, b, epsilon)
    end = time.time()
    gauss_time[i] = end - start

    print(gauss_time[i])

    i += 1
```

```
0.07755179595947266
0.9151132106781006
3.7536559104919434
14.981579303741455
37.84542536735535
```

[ ]:
```
plt.plot(it, gauss_time, 'ro')
plt.title('Czas trwa algorytmu Gaussa-Seidla w zależności od liczby␣
 ↪niewiadomych')
plt.ylabel('czas obliczeń [s]')
```

```
plt.xlabel('liczba niewiadomych')
plt.show()
```

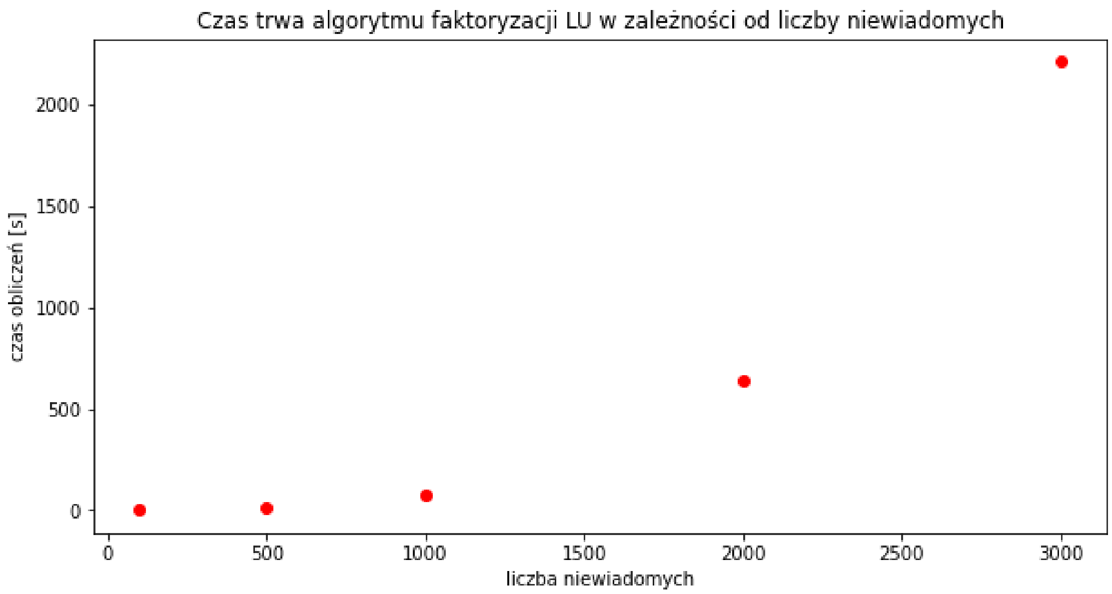


Obliczenie czasów wykonania algorytmu faktoryzacji LU dla N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} i narysowanie wykresu:

[49]:
```
i = 0
for n in it:
    A = create_matrix(n, a1, a2, a3)
    b = [1.0 for i in range(n)]

    start = time.time()
    solve_LU_factor(A, b)
    end = time.time()
    LU_time[i] = end - start

    print(LU_time[i])

    i += 1
```

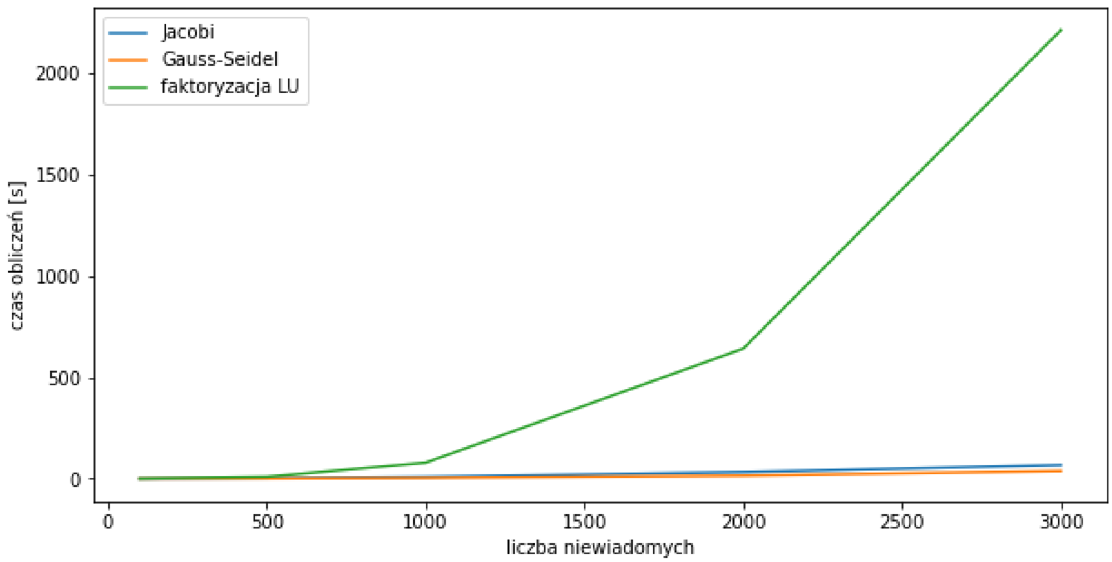
```
0.09384298324584961
9.375661373138428
79.0423583984375
641.7987179756165
2212.045578479767
```

[ ]:
```
plt.plot(it, LU_time, 'ro')
plt.title('Czas trwa algorytmu faktoryzacji LU w zależności od liczby␣
↪niewiadomych')
plt.ylabel('czas obliczeń [s]')
plt.xlabel('liczba niewiadomych')
plt.show()
```



Porównanie 3 algorytmów:

[9]:
```
plt.plot([100, 500, 1000, 2000, 3000], [0.07393026351928711, 1.
↪6323909759521484, 9.042420148849487, 32.46504187583923, 67.48986792564392],␣
↪label='Jacobi')
plt.plot([100, 500, 1000, 2000, 3000], [0.07755517959594727, 0.
↪9151132106781006, 3.7536559104919434, 14.981579303741455, 37.
↪84542536735535], label='Gauss-Seidel')
plt.plot([100, 500, 1000, 2000, 3000], [0.09384298324584961, 9.375661373138428,␣
↪79.0423583984375, 641.7987179756165, 2212.045578479767], label='faktoryzacja␣
↪LU')
plt.legend()
plt.ylabel('czas obliczeń [s]')
plt.xlabel('liczba niewiadomych')
plt.show()
```



5.0.1 Zadanie F

Wnioski: - dla małej liczby niewiadomych (100) wszystkie 3 algorytmy rozwiązują to samo równanie z podobną prędkością, mniej niż 1s - dla dużej liczby niewiadomych (>1000) czas wykonania wszystkich algorytmów rośnie wykładniczno. Najlepiej wypada algorytm Gaussa-Seidla (ok. 38 sekund dla 3000 niewiadomych), 176% więcej czasu od Gaussa-Seidla wykonuje się algorytm Jacobiego (ok. 67 sekund dla 3000 niewiadomych). Najdłużej rozwiązywał układ algorytm faktoryzacji LU (ok. 2212 sekund dla 3000 niewiadomych, czyli aż 582% wolniej od algorytmu Gaussa-Seidla).

Podsumowanie: Najszybszą metodą na rozwiązywanie układów równań jest metoda Gaussa-Seidla.