1 Równanie Schrödingera dla nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

Mamy studnię potencjału o wymiarach $a = 1$, $b = 1$. Liczby kwantowe n_x, n_y.

Równanie Schrödingera jest dane wzorem

$$i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2\Psi}{\delta x^2} + V\Psi. \tag{1}$$

Potencjał rozważanej studni wynosi

$$V = \begin{cases} 0 & x \in [0,a], y \in [0,b] \\ \infty & wpp, \end{cases} \tag{2}$$

Z metody rozdzielania zmiennych i warunku unormowania

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right), \tag{3}$$

oraz:

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{b}\right). \tag{4}$$

Stąd rozwiązanie równania Schrödingera dla rozważanej studni

$$\Psi(x,y,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{b}\right)e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}. \tag{5}$$

2 Poziomy energetyczne

Energia jest dana wzorem

$$E = E_x + E_y, \tag{6}$$

$$E_x = \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{a^2 2m} \tag{7}$$

oraz

$$E_y = \frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{a^2 2m}. \tag{8}$$

Stąd poziomy energetyczne dane są wzorem

$$E_{n_x,n_y} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}(n_x^2 + n_y^2). \tag{9}$$

3 Stany nieustalone nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

Stany nieustalone są dane wzorem

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\Psi_n(x,t)e^{\frac{-iE_xt}{\hbar^2}} \tag{10}$$

oraz

$$\Psi(y,t) = \sum_{m=1}^{N} c_m\Psi_m e^{\frac{-iE_yt}{\hbar^2}}. \tag{11}$$

Więc:

$$\Psi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Psi_n(x,t) \sum_{m=1}^{N} c_m \Psi_m e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}, \tag{12}$$

Energia jest dana wzorem

$$E = E_x + E_y \tag{13}$$

Współczynniki w pzypadku rozważanej studni są unormowane:

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = 1. \tag{14}$$

4 Paczka gaussowska w dwuwymmiarowej nieskończonej studni potencjału

Rozwiazanie ogólne równania Schrödingera jest liniową kombinacją osobnych rozwiązań

$$\Psi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Psi_n(x,t) \sum_{m=1}^{N} c_m \Psi_m e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}. \tag{15}$$

Współczynniki wyznaczone są wzorem

$$c_n = \int_0^L \Psi_n(x)^* \Psi(x,0) dx, \tag{16}$$

$$c_m = \int_0^L \Psi_m(y)^* \Psi(y,0) dy. \tag{17}$$

Warunek początkowy funkcji falowej dla paczki gaussowskiej jest dany rozkładem normalnym

$$\Psi(x,0) = Ae^{\frac{-(x-a_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 x} \tag{18}$$

oraz

$$\Psi(y,0) = Ae^{\frac{-(y-b_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 y}. \tag{19}$$