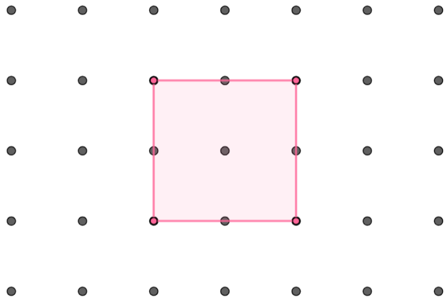
Zad1 - Kwadraty o wierzchołkach w punktach

Kwadraty - mające cztery wierzchołki pokrywające się z narysowanymi punktami - to takie, które możemy utworzyć, kiedy będziemy łączyć ze sobą punkty (i będziemy łączyć je odcinkami prostymi).



Na przykład:

Różowy kwadrat powstał, bo połączyliśmy ze sobą cztery punkty, czterema odcinkami.

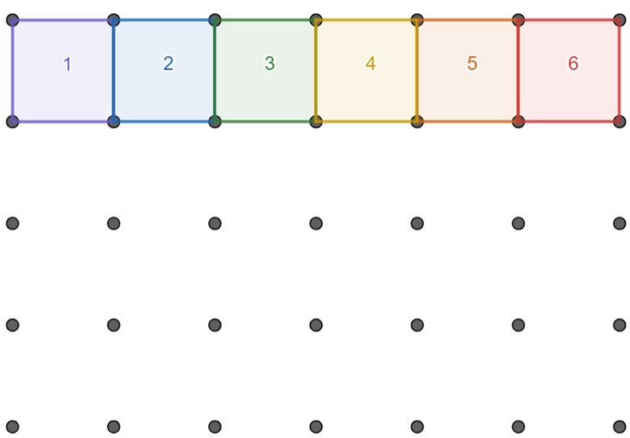
(Tak, jego krawędzie przecinają jeszcze cztery inne punkty - które wierzchołkami tego kwadratu nie są. Ale to w niczym nie przeszkadza, bo nadal mamy kwadrat, którego wierzchołki pokrywają się z szarymi punktami.)

Żeby policzyć ile jest wszystkich takich kwadratów - i żeby się w tym nie pogubić, bo może być ich dużo - trzeba jakoś podzielić to zadanie na mniejsze kawałki.

Zaczniemy od najmniejszego możliwego takiego kwadratu, a potem coraz większe, aż do największego możliwego.

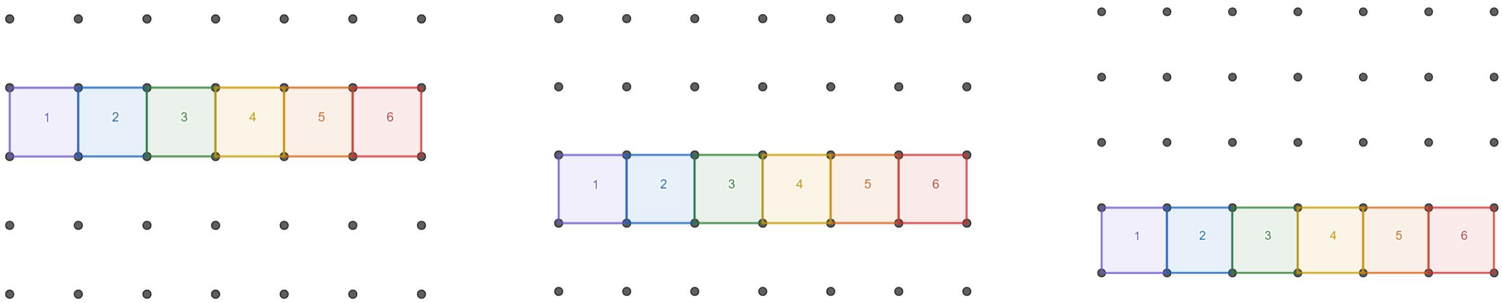
Kwadraty 1x1

Obszar utworzony z szarych punktów możemy podzielić na rzędy (poziome paski) i kolumny (pionowe paski). Widzimy, że mamy tutaj 4 rzędy i 6 kolumn - ta informacja ułatwi później liczenie (żeby nie musieć zliczać wszystkich po kolei). Będziemy liczyć od lewej strony, zaczynając od górnego rzędu. Narysujmy wszystkie kwadraty w górnym rzędzie:



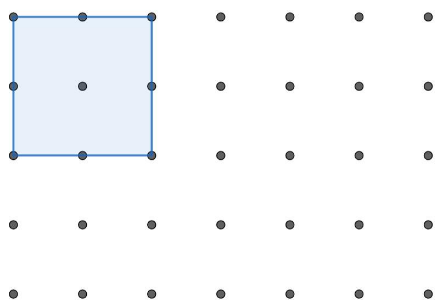
Widzimy, że jest ich 6, czyli tyle samo, co kolumn.

Tyle samo kwadratów 1x1 będzie również we wszystkich innych rzędach, co widać na rysunkach poniżej:

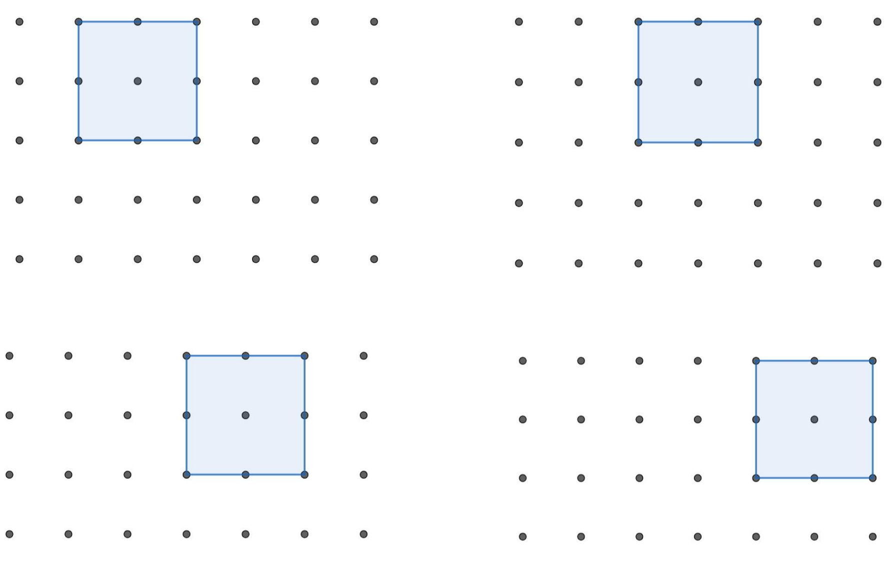


Są 4 rzędy, a w każdym po 6 kwadratów. Czyli w sumie jest ich 6+6+6+6 = 6*4 = 24.

Kwadraty 2x2

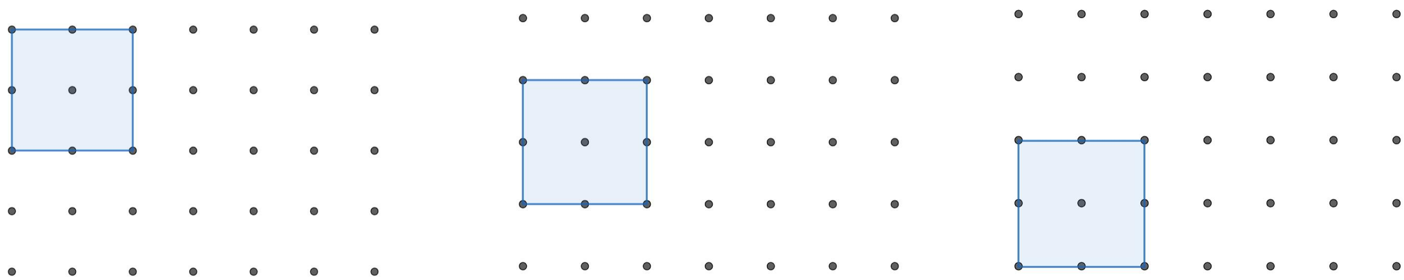


Nadal jednak liczyliśmy kwadraty trochę mozolnie, więc teraz zaczniemy liczyć je szybciej. Zamiast rysować wszystkie kwadraty, będziemy sobie wyobrażać, że je przesuwamy - najpierw w rzędzie, potem w koliumnie. Powyższy kwadrat 2x2 możemy przesunąć w rzędzie 4 razy:
(6 kolumn - długość boku 2 = 4 możliwe przesunięcia)



Doliczając do tego kwadrat w stanie początkowym (nieprzesunięty), mamy razem **5** kwadratów mieszczących się w jednym rzędzie.

A w kolumnie: 4 rzędy - 2 = 2.



2 razy możemy przesunąć, czyli **3** kwadraty mieszczą się w jednej kolumnie.

Tak jak przy kwadratach 1x1 pomnożyliśmy 6 (ile kwadratów mieści się w rzędzie) przez 4 (ile kwadratów mieści się w kolumnie), i to była odpowiedź ile jest w sumie kwadratów 1x1;
tak teraz pomnożymy 5 (ile kwadratów 2x2 w rzędzie) przez 3 (ile w kolumnie):

5*3 = 15, więc mieści się 15 kwadratów 2x2.

Kwadraty 3x3

Ile razy można przesunąć kwadrat 3x3 w rzędzie: **6 - 3 = 3**
Ile kwadratów 3x3 mieści się w rzędzie: **3 + 1 = 4**

Ile razy można przesunąć kwadrat 3x3 w kolumnie: **4 - 3 = 1**
Ile kwadratów 3x3 mieści się w kolumnie: **1 + 1 = 2**

Ile w sumie mieści się kwadratów 3x3: **4 * 2 = 8**

Kwadraty 4x4

Ile kwadratów 4x4 mieści się w rzędzie: **(6 - 4) + 1 = 2 + 1 = 3**

Ile kwadratów 3x3 mieści się w kolumnie: **(4 - 4) + 1 = 0 + 1 = 1**

Ile w sumie mieści się kwadratów 3x3: **3 * 1 = 3**

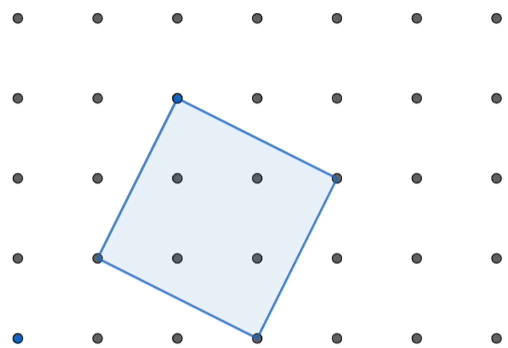
Większych już nie damy rady narysować, kwadrat 5x5 nie zmieści się pionowo w obszarze szarych punktów. **Ile razem jest takich kwadratów?**

Kwadratów 1x1: **24**
Kwadratów 2x2: **15**
Kwadratów 3x3: **8**
Kwadratów 4x4: **3**

Suma: 24 + 15 + 8 + 3 = 50

Kwadraty obrócone

Nie jest powiedziane, że nie możemy obracać kwadratów. Przykład kwadratu o ukośnej orientacji:

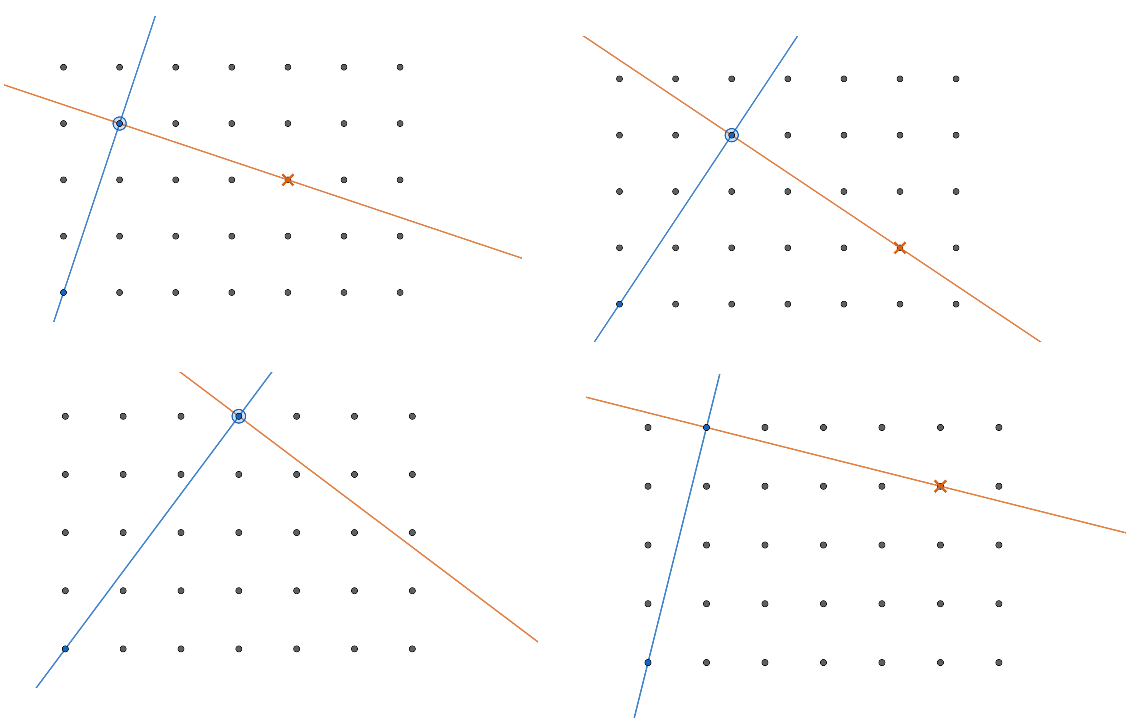


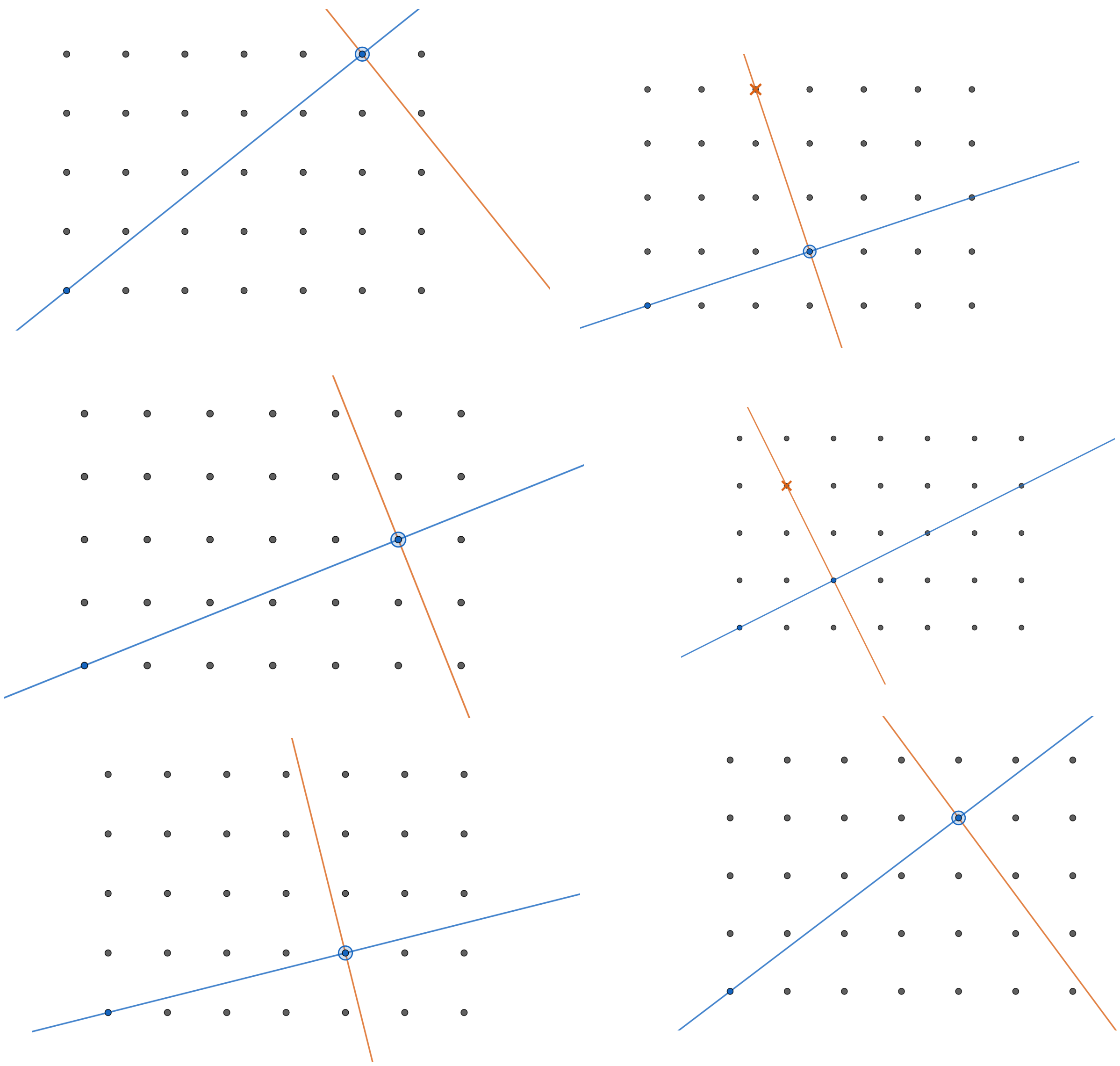
I takie kwadraty też musimy wszystkie zliczyć.

Najprościej będzie poprowadzić jedną linię od lewego dolnego rogu, a następnie zacząć obracać ją i sprawdzać, czy odcinki pod takim kątem mogą utworzyć jakikolwiek kwadrat.

(Zaczynamy od lewego dolnego rogu, bo wtedy linię możemy połączyć z jak największą liczbą punktów. Gdybyśmy zaczynali od np. górnego prawego rogu, to także by to zadziałało, tylko wtedy po prostu szukalibyśmy przecięć linii z punktami poniżej i na lewo od początku linii. Gdybyśmy zaczynali od środka obszaru z punktami i patrzyli po jednej stronie, czy są jakieś przecięcia, moglibyśmy przegapić te po drugiej stronie.)

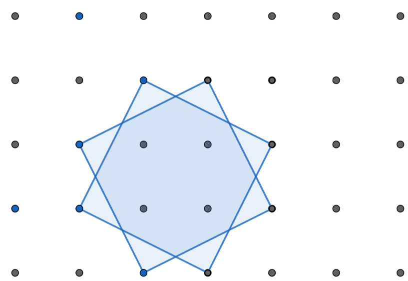
Poniżej przedstawiam przykładowe możliwe kąty, pod jakim można utworzyć odcinek między dwoma punktami (czyli potencjalny bok kwadratu):



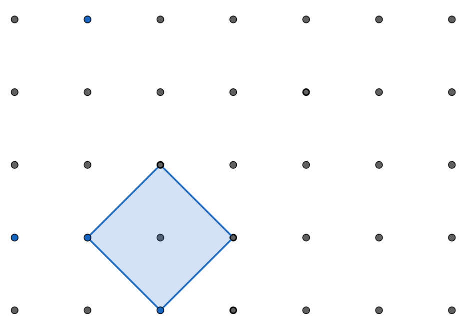


Jak widzimy, nie ze wszystkich da się utworzyć kwadrat taki, żeby szare punkty były jego wierzchołkami. Dlatego rozpatrzymy tylko te kąty, z których da się.

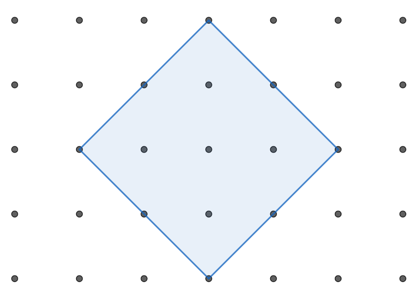
To są dwa różne kwadraty o różnych orientacjach (jeden odbiciem lustrzanym drugiego). Jeden taki kwadrat zmieści się on dokładnie tyle razy, ile mieszczą się kwadraty o wymiarach 4x4.
A są 2 takie kwadraty, czyli **2*3 = 6** razy.



Te kwadraty (2 nałożone na siebie, jeden odbiciem lustrzanym drugiego) mieszczą się tyle razy, ile kwadraty o wymiarach 3x3.
Czyli, podobnie jak wtedy, **2*8 = 16**.



Ten kwadrat jest symetryczny i nie odmiennego ma odbicia lustrzanego. Mieści się tyle, co kwadraty 2x2, czyli **15 razy.**



Finalnie, ten kwadrat: mieści się tyle, ile nieobrócony kwadrat 4x4, czyli **3 razy.**

<u>Sumując wszystkie obliczenia:</u>

Mieści się **50** nieobróconych kwadratów
oraz **6 + 16 + 15 + 3 = 40** obróconych.

Co w sumie daje **50 + 40 = 90**, i taka jest odpowiedź do zadania.

(90 / 3 = 30)