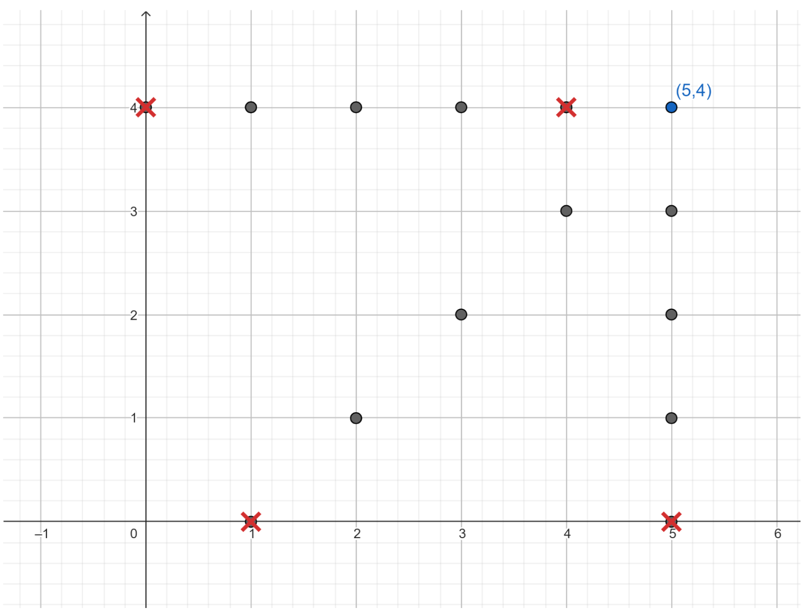
Zad2 - Gra 7 i 10 patyczków

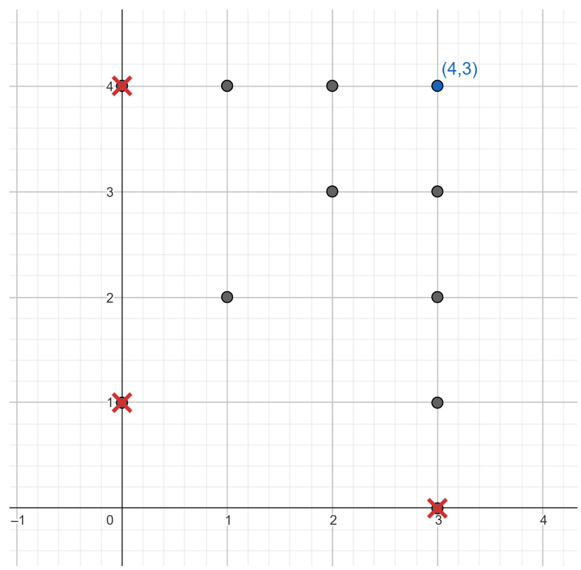
Dla uproszczenia, liczbę patyczków na stosach będziemy zapisywać jako (x,y): gdzie x-liczba patyczków na jednym stosie, y-liczba patyczków na drugim stosie.

(Kolejność zapisu nie ma znaczenia: **(x,y) = (y,x)** nawet jeśli **x ≠ y**. Dla większego ładu będziemy zawsze zapisywać tak, żeby liczba po lewej była większa - czyli (10,7), (9,6), itp.)

Drużyna może **wygrać** grę zawsze wtedy, kiedy tuż przed jej ruchem układ patyczków to **(x,0)** lub **(x,x)**, dla **x>0**. Np. kiedy rozkład patyczków to (5,0) i jest mój ruch, to wystarczy, że wezmę 5 patyczków z niezerowego stosu, i wygrywam. Jeśli rozkład patyczków to (7,7), to wtedy biorę po 7 patyczków z obu stosów, i wygrywam. W drugą stronę - jeśli taki stos dostanie przeciwnik po moim ruchu, to prawdopodobnie przegram, jeśli mój przeciwnik wie jak grać. Dlatego muszę unikać takich ruchów.

Układ patyczków tuż przed moim ruchem (na niebiesko), wraz z zaznaczonymi możliwymi układami tuż po moim ruchu (na szaro), można zilustrować na takim wykresie:



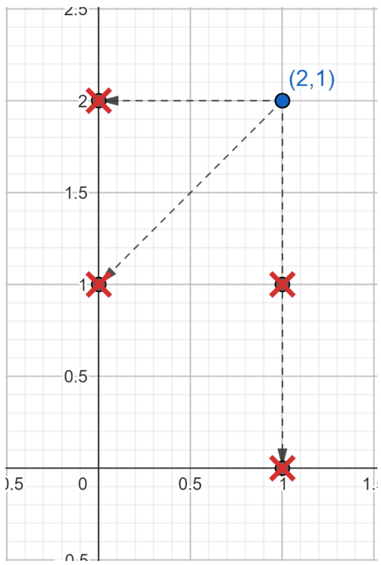


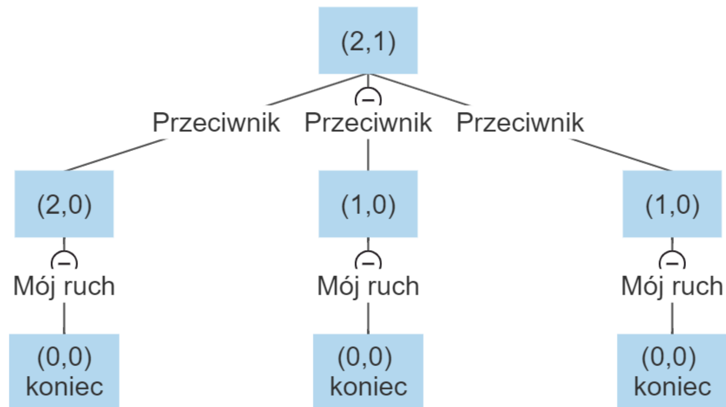
Czerwonym krzyżykiem dodatkowo zaznaczone są te ruchy, których muszę unikać, bo prawdopodobnie przegram, jeśli takie wykonam.

Dla każdego możliwego układu stosów (poza (x,0) oraz (x,x)) są co najmniej 3 takie ruchy.

Im więcej jest patyczków, tym więcej możliwych wszystkich ruchów można wykonać. Jednak, na **powyższym** przykładzie widzimy, że liczba "krytycznych" ruchów (których trzeba unikać) zawsze jest równa co najmniej trzy (jeśli obecny stan to nie (x,0) ani (x,x)).

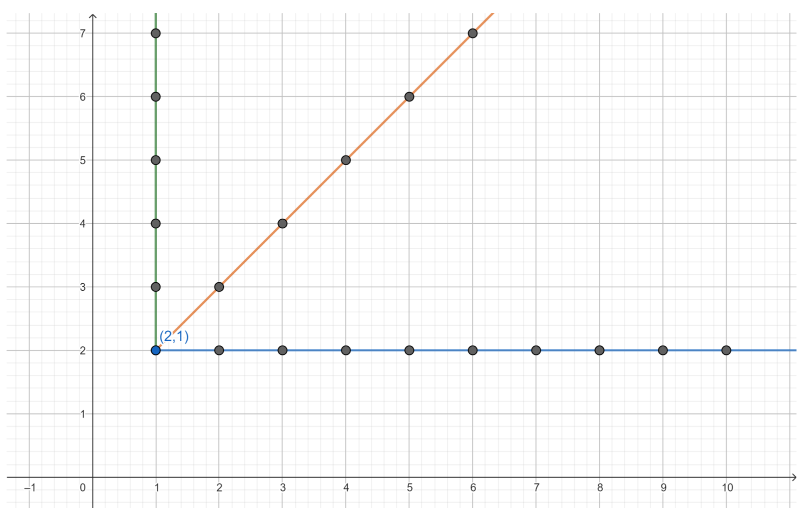
Możemy więc z tego wywnioskować, że da się postawić przeciwnika w takiej sytuacji, żeby każdy jego możliwy ruch był "krytyczny". Taką sytuacją jest stan (2,1):





Niezależnie od tego, **jaki ruch wtedy przeciwnik wykona: bez mojej pomyłki nie wygra.**

Żeby opracować najlepszą możliwą strategię, musimy więc się zastanowić, co zrobić, żeby zabrać tyle patyczków, żeby przeciwnik dostał układ patyczków (2,1) na jego ruch. Na wykresie są wszystkie możliwe stany, z których można "wywołać" przeciwnikowi stan (2,1):



Dzielą się one na 3 kategorie:

- (x, 1) - na zielonej linii,
- (x, 2) - na niebieskiej linii,
- (x, x-1) - na pomarańczowej.

Tych stanów zatem również musimy unikać, nie wywołać ich naszym ruchem; ponieważ z nich przeciwnik może zrobić (2,1), a wtedy raczej przegramy.

<u>Kiedy można przeciwnika zmusić do tego, żeby wywołał stan (x,1), (x,2) lub (x, x-1)?</u>

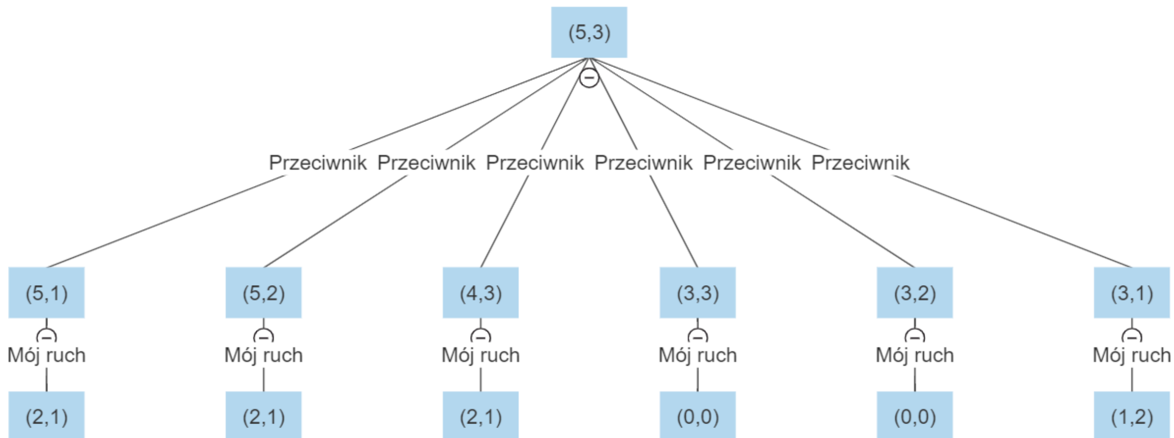
Mądry przeciwnik, kiedy jest jego ruch a stosy patyczków to (x,3) dla x>3, nigdy nie weźmie patyczka ze stosu o liczności 3 - bo wtedy wywoła stan (x,2), a my stan (2,1), i wygramy.

Podobnie, kiedy jest jego ruch a stosy patyczków to (x, x-2), nigdy nie weźmie patyczka z

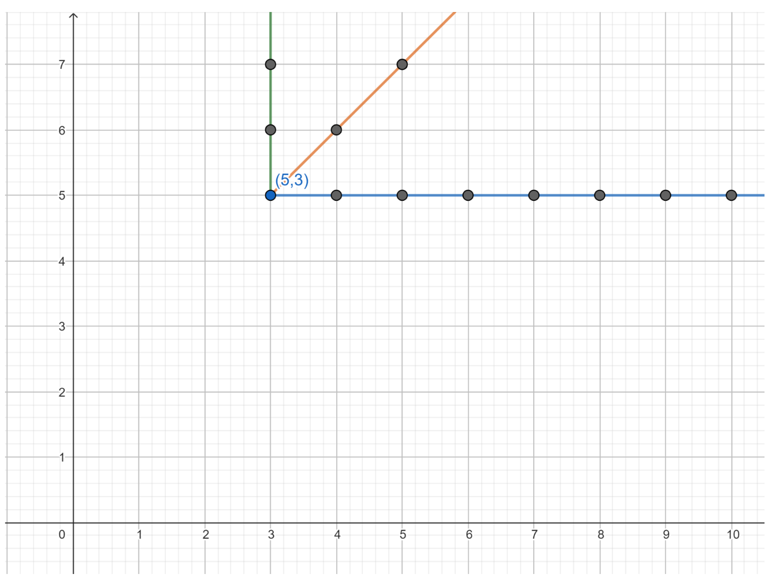
mniejszego stosu, bo wtedy my będziemy mieli stan (x, x-1) i weźmiemy tyle patyczków z obu stosów jednocześnie, żeby przeciwnika zostawić z nieszczęsnym stanem (2,1).

Jednak, czasem nawet najsprytniejszy przeciwnik może nie mieć wyboru - jeśli połączymy obie powyższe sytuacje w jedną: mniejsza liczba to będzie **x-2 = 3**, a większa **x = 5**.

Taki stan to (5,3), i wtedy - niezależnie od ruchu przeciwnika - możemy naszym ruchem dojść do stanu (2,1) i wygrać. Wizualizacja:



Stany, z których możemy zrobić (5,3), jeżeli występują przed naszym ruchem:



Dzielą się one na 3 kategorie:

- (x, 3) - na zielonej linii,
- (x, 5) - na niebieskiej linii,
- (x, x-2) - na pomarańczowej.

Tych stanów zatem również musimy unikać, nie wywołać ich naszym ruchem - ponieważ z nich przeciwnik może zrobić (5,3), a wtedy (jeśli przeciwnik zna tę strategię) raczej przegramy.

Kiedy można przeciwnika zmusić do tego, żeby wywołał stan (x,3), (x,5) lub (x, x-2)?

Mądry przeciwnik, kiedy jest jego ruch a stosy patyczków to (x,4) lub (y,6) dla x>4 i y>6, nigdy nie weźmie patyczka ze stosu o mniejszej liczności - bo wtedy wywoła stan (x,3), (y,5) lub inny z wyznaczonych wcześniej "dających przewagę" stanów; **a potem** my, dzięki naszej strategii, wygramy.

Podobnie, kiedy jest jego ruch, a stosy patyczków to **(x, x-3)**, nigdy nie weźmie patyczka z **mniejszego** stosu, bo wtedy my będziemy mieli (x, x-2) lub inne stany “dające przewagę”, i weźmiemy tyle patyczków z obu stosów jednocześnie, żeby przeciwnika zostawić z nieszczęsnym stanem (5,3).

Jednak, znowu, czasem nawet najsprytniejszy przeciwnik może nie mieć wyboru - jeśli połączymy obie powyższe sytuacje w jedną: mniejsza liczba to będzie x-3 = 4, a większa: x = 7.

Taki stan to (7,4), i wtedy - niezależnie od ruchu przeciwnika - możemy naszym ruchem dojść do stanu (5,3) i wygrać. Dlaczego?

- **Przeciwnik może wziąć patyczek z większego stosu i zmniejszyć różnicę między liczbą patyczków, co daje nam przewagę. Np. jeśli zrobi stan (6,4), to my bierzemy po 1 patyczek z obu i wtedy jest (5,3) - czyli my wygramy, stosując naszą strategię.**

- **Przeciwnik może też wziąć patyczek albo z obu stosów, albo z mniejszego - ale wtedy będzie na mniejszym stosie albo liczba 3, albo 2 , albo 1 - więc też wygramy.**

Analogicznie: stany, z których zrobić możemy (7,4), to:
- **(x, 7), (x, 4) lub (x, x-3)**

I, podobnie: sytuacja, która zmusi przeciwnika do wywołania jednego z takich stanów, to jeśli mniejsza liczba patyczków będzie wynosiła x-4 = 6, a większa x = 10.
Taki stan to (10,6) i wtedy - niezależnie od ruchu przeciwnika - możemy naszym ruchem dojść do stanu (7,4) i wygrać. Dlaczego?

- **Przeciwnik może wziąć z większego stosu i zmniejszyć różnicę między liczbą patyczków, co daje nam przewagę. Np. jeśli zrobi stan (9,6), to my bierzemy po 2 patyczki i jest (7,4) - czyli my wygramy, stosując naszą strategię.**

- **Przeciwnik może też wziąć patyczek albo z obu stosów, albo z mniejszego - ale wtedy będzie na mniejszym albo liczba 5 lub mniejsza - więc też wygramy.**

Wystarczy, że przeciwnik nie doprowadzi do żadnego z opisanych “krytycznych" stanów, i wtedy, stosując opisaną strategię, mamy gwarantowaną wygraną.

Kiedy to my zaczynamy: bierzemy 6 patyczków z większego stosu, wywołując stan (7,4) lub 1 patyczek z mniejszego stosu, wywołując stan (10,6). Na zmianę, żeby nikt się nie zorientował, jaką mamy strategię.

Gdy przeciwnik zaczyna: modlimy się, żeby nie zrobił (7,4) ani (10,6) w pierwszym ruchu, a jeśli nie zrobi, to my robimy (10,6), (7,4), (5,3) lub (2,1) - i wygrywamy.